ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

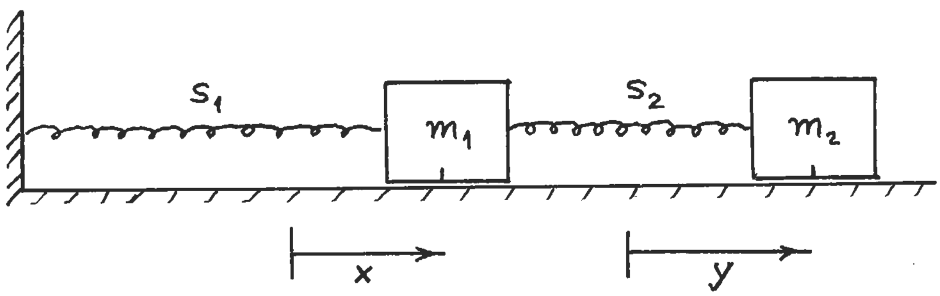
ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Σε πολύ λίγες περιπτώσεις είναι προφανής ο τρόπος αποσύζευξης των δύο ή περισσοτέρων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τις κινήσεις συζευγμένων συστημάτων (π.χ. το πρόβλημα της παραγρ. 3.2 του Pain), ώστε να βρεθούν οι κανονικές συντεταγμένες και συχνότητες. Θα παρουσιάσουμε εδώ τη γενική μέθοδο λύσης του προβλήματος, πρώτα με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός συστήματος με δύο βαθμούς ελευθερίας και μετά για τη γενική περίπτωση.

3.1 Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης συστήματος με δύο βαθμούς ελευθερίας

Έστω το σύστημα του σχήματος, στο οποίο δύο διαφορετικές μάζες συνδέονται μεταξύ τους και με ακίνητο σημείο με δύο ελατήρια διαφορετικών σταθερών. Οι μάζες μπορούν να κινούνται κατά μήκος μιας ευθείας, χωρίς τριβές. Οι μετατοπίσεις των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι x και y αντίστοιχα.



Οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών είναι:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -\, s_1 x + s_2(y-x) \qquad (3.1)$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -\, s_2(y-x) \qquad (3.2)$$

(Κάποιες παρατηρήσεις για τον υπολογισμό των δυνάμεων από ελατήρια δίνονται στο τέλος του κεφαλαίου).

Δεν είναι προφανές ποιες είναι οι κανονικές συντεταγμένες για τις οποίες επιτυγχάνεται η αποσύζευξη των δύο διαφορικών εξισώσεων με δύο μεταβλητές η καθεμιά σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους διαφορικές εξισώσεις.

(α) Οι κανονικές συχνότητες

Για να βρούμε τις κανονικές συχνότητες, τους αντίστοιχους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τελικά τις κανονικές συντεταγμένες, κάνουμε χρήση της βασικής ιδιότητας των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, δηλαδή ότι:

Σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα μέρη του συστήματος ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα (αυτήν του κανονικού τρόπου) και την ίδια φάση.

Έτσι, εξετάζοντας την περίπτωση που μόνο ένας κανονικός τρόπος είναι διεγερμένος στο σύστημα, υποθέτουμε ότι

$$x = A\cos(\omega t+\phi) \qquad y = B\cos(\omega t+\phi) \tag{3.3}$$

όπου ϕ είναι μια σταθερά φάσης που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες, ω είναι η ζητούμενη κανονική συχνότητα και A και B είναι τα πλάτη ταλάντωσης των δύο μαζών και ο λόγος των οποίων, B/A, καθορίζει τον τρόπο ταλάντωσης. Οι τιμές των A και B εξαρτώνται και αυτές από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος αλλά ο λόγος B/A είναι δεδομένος για κάθε κανονικό τρόπο.

Αντικαθιστώντας στις εξιώσεις κίνησης παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 m_1 A &= -s_1 A + s_2(B-A) \\ -\omega^2 m_2 B &= -s_2(B-A) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} (s_1+s_2-\omega^2 m_1)A - s_2 B &= 0 \\ s_2 A - (s_2-\omega^2 m_2)B &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς ω^2 και B/A. Θα βρεθούν δύο τιμές του ω^2 και επομένως και δύο θετικές τιμές του ω, που είναι οι δύο κανονικές συχνότητες. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας και επομένως και δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, ο καθένας με τη συχνότητά του. Σε κάθε τιμή της ω αντιστοιχεί και ένας λόγος B/A με τον οποίο καθορίζεται και ο κανονικός τρόπος ταλάντωσης.

Ερώτηση: Γιατί χρησιμοποιούνται μόνο οι θετικές τιμές του ω; Αποδείξετε ότι προσθέτοντας και λύσεις με αρνητικές ω δεν μεταβάλλουμε τη γενική λύση.

Για την περίπτωση των δύο εξισώσεων, εξισώνοντας τις τιμές του λόγου B/A που βρίσκονται από τις δύο εξισώσεις προκύπτει η σχέση:

$$\frac{B}{A} = \frac{s_1+s_2-\omega^2 m_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_2-\omega^2 m_2} \tag{3.5}$$

Από αυτήν παίρνουμε την εξίσωση

$$\omega^4 - \frac{s_2 m_1 + (s_1+s_2)m_2}{m_1 m_2}\,\omega^2 + \frac{s_1 s_2}{m_1 m_2} = 0 \tag{3.6}$$

η οποία έχει δύο λύσεις, ω_1^2 και ω_2^2, από τις οποίες προκύπτουν οι δύο (θετικές) τιμές των κανονικών συχνοτήτων ω_1 και ω_2. Αντικαθιστώντας στην Εξ.(3.5), βίσκουμε τους λόγους των πλατών B_1/A_1 και B_2/A_2 που αντιστοιχούν στις ω_1 και ω_2.

Ας σημειωθεί ότι το σύστημα εξισώσεων (3.4) έχει λύση αν ισχύει η σχέση

$$\begin{vmatrix} s_1 + s_2 - \omega^2 m_1 & - s_2 \\ s_2 & - s_2 + \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

από την οποία προκύπτει η Εξ.(3.6) και οι κανονικές συχνότητες.

Για να συγκεκριμενοποιήσουμε το παράδειγμα, απλοποιώντας την αλγεβρική ανάλυση, ας υποθέσουμε ότι είναι:

$m_1 = m \qquad m_2 = 2m \qquad s_1 = s \qquad s_2 = 2s \qquad \text{και} \qquad \frac{s}{m} = \omega_0^2.$ Τότε

$$\frac{B}{A} = \frac{3 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{3.7}$$

και επομένως είναι

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1 = 0. \tag{3.8}$$

Οι θετικές λύσεις της Εξ.(3.8) δίνουν τις κανονικές συχνότητες

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{3}} \qquad \omega_2 = \omega_0\sqrt{2 + \sqrt{3}} \tag{3.9}$$

στις οποίες αντιστοιχούν, σύμφωνα με την Εξ.(3.7), οι λόγοι των πλατών

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \qquad \frac{B_2}{A_2} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \tag{3.10}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος B_1/A_1 είναι θετικός και έτσι στον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης οι μάζες κινούνται σε κάθε στιγμή προς την ίδια κατεύθυνση, ενώ ο λόγος B_2/A_2 είναι αρνητικός και επομένως στο δεύτερο κανονικό τρόπο ταλάντωσης οι δύο μάζες κινούνται με διαφορά φάσης 180^o, δηλαδή όταν η μια κινείται προς τα δεξιά η άλλη κινείται προς τα αριστερά.

(β) Οι γενικές λύσεις

Οι γενικές λύσεις για τις κινήσεις των δύο μαζών προκύπτουν από επαλληλία όλων των (ανεξάρτητων μεταξύ τους) κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Ετσι, για παράδειγμα, η μετατόπιση της πρώτης μάζας δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) + b \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

με α, b, ϕ_1 και ϕ_2 σταθερά μεγέθη που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Ο πρώτος όρος εκφράζει το μέρος της κίνησης που αντιστοιχεί στον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, στην κανονική συχνότητα ω_1, ο δε δεύτερος όρος εκφράζει το μέρος της κίνησης που αντιστοιχεί στον δεύτερο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, στην κανονική συχνότητα ω_2. Με δεδομένη την κίνηση της μιας μάζας, η κίνηση της άλλης είναι καθορισμένη, γιατί οι λόγοι των πλατών των όρων που αντιστοιχούν σε κάθε τρόπο ταλάντωσης είναι καθορισμένοι από τις Εξ.(3.10). Έτσι, για τη δεύτερη μάζα, ο όρος που αντιστοιχεί στη συχνότητα ω_1 θα έχει πλάτος ίσο με $\alpha(B_1/A_1) = \alpha\,(\sqrt{3}+1)/2$ και ο όρος που αντιστοιχεί στη συχνότητα ω_2 θα έχει πλάτος ίσο με $b(B_2/A_2) = -\,b\,(\sqrt{3}-1)/2$. Θα είναι επομένως,

$$y(t) = \alpha\left(\frac{B_1}{A_1}\right)\cos(\omega_1 t+\phi_1) + b\left(\frac{B_2}{A_2}\right)\cos(\omega_2 t+\phi_2).$$

Οι γενικές λύσεις είναι:

$$x(t) = \alpha\cos(\omega_1 t+\phi_1) + b\cos(\omega_2 t+\phi_2) \tag{3.11}$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,\alpha\cos(\omega_1 t+\phi_1) - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,b\cos(\omega_2 t+\phi_2). \tag{3.12}$$

(γ) Οι κανονικές συντεταγμένες

Έχοντας βρει τις λύσεις x(t) και y(t), μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τις κανονικές συντεταγμένες. Βασιζόμαστε στο γεγονός ότι η μια θα μεταβάλλεται με συχνότητα ω_1 και η άλλη με συχνότητα ω_2. Αν, επομένως, απαλείψουμε από τις Εξ.(3.11) και (3.12) την ω_2 θα βρούμε τη μια κανονική συντεταγμένη και αν απαλείψουμε την ω_1 θα βρούμε την άλλη. Πολλαπλασιάζοντας την Εξ.(3.11) επί $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ και προσθέτοντας στην Εξ.(3.12) έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,x + y = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\alpha\cos(\omega_1 t+\phi_1) \qquad \text{ή, τελικά,}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,x + y\right) = \alpha\cos(\omega_1 t+\phi_1). \tag{3.13}$$

Ομοίως,

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,x - y = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) b\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad \text{και}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,x - y\right) = b\cos(\omega_2 t+\phi_2). \tag{3.14}$$

Αν ορίσουμε τις νέες συντεταγμένες

$$X_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,x + y\right) \qquad \text{και} \qquad X_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,x - y\right) \tag{3.15}$$

τότε για αυτές ισχύουν οι σχέσεις:

$$X_1 = \alpha\cos(\omega_1 t+\phi_1) \qquad \text{και} \qquad X_2 = b\cos(\omega_2 t+\phi_2). \tag{3.16}$$

Οι X_1 και X_2 είναι επομένως κανονικές συντεταγμένες του συστήματος. Δεν είναι όμως οι μόνες δυνατές, γιατί οποιοδήποτε ζεύγος μεταβλητών c_1X_1 και c_2X_2, είναι επίσης κανονικές συντεταγμένες αν τα c_1 και c_2 είναι σταθερά. Τα c_1 και c_2 δεν είναι απαραιτήτως αδιάστατοι αριθμοί, αλλά θα μπορούσαν να είναι μεγέθη με διαστάσεις τέτοιες ώστε οι X_1 και X_2 να μην έχουν διαστάσεις μήκους.

(δ) Οι ενέργειες των κανονικών τρόπων

Αξίζει τον κόπο να υπολογίσουμε τις ενέργειες που σχετίζονται με τον κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης και την ολική ενέργεια του συστήματος.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_K = \frac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{y}^2 = \frac{1}{2} m\left(-\omega_1\alpha \sin(\omega_1 t+\phi_1) - \omega_2 b \sin(\omega_2 t+\phi_2)\right)^2 +$$
$$+ m\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega_1\alpha \sin(\omega_1 t+\phi_1) + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega_2 b \sin(\omega_2 t+\phi_2)\right)^2$$

$$E_K = \frac{3+\sqrt{3}}{2} m\omega_1^2\alpha^2\sin^2(\omega_1 t+\phi_1) + \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_2^2 b^2\sin^2(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$E_K = \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2\alpha^2\sin^2(\omega_1 t+\phi_1) + \frac{3+\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 b^2\sin^2(\omega_2 t+\phi_2). \tag{3.17}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_P = \frac{1}{2} s_1 x^2 + \frac{1}{2} s_2(y-x)^2 = \frac{1}{2} s\left(\alpha \cos(\omega_1 t+\phi_1) + b \cos(\omega_2 t+\phi_2)\right)^2 +$$
$$+ s\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\alpha \cos(\omega_1 t+\phi_1) - \frac{\sqrt{3}+1}{2} b \cos(\omega_2 t+\phi_2)\right)^2$$

$$E_P = \frac{3-\sqrt{3}}{2} s\alpha^2\cos^2(\omega_1 t+\phi_1) + \frac{3+\sqrt{3}}{2} s\alpha^2\cos^2(\omega_1 t+\phi_1)$$

$$E_P = \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2\alpha^2\cos^2(\omega_1 t+\phi_1) + m\omega_0^2 b^2\cos^2(\omega_2 t+\phi_2). \tag{3.18}$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_T = E_K + E_P = \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2\alpha^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 b^2. \tag{3.19}$$

Από την Εξ.(3.17) βλέπουμε ότι για $b=0$, προκύπτει η κινητική ενέργεια που σχετίζεται με τον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, $E_{K,1}$, ενώ για $\alpha=0$ προκύπτει η κινητική ενέργεια που σχετίζεται με τον δεύτερο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, $E_{K,2}$. Με τον ίδιο τρόπο από την Εξ.(3.18) βρίσκονται οι αντίστοιχες δυναμικές ενέργεις $E_{P,1}$ και $E_{P,2}$. Τα αποτελέσματα είναι:

$$E_{K,1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_1 t+\phi_1) \qquad E_{K,2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 b^2 \sin^2(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$E_{P,1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_1 t+\phi_1) \qquad E_{P,2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 b^2 \cos^2(\omega_2 t+\phi_2)$$

Οι ολικές ενέργειες των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι, αντίστοιχα,

$$E_{T,1} = E_{K,1} + E_{P,1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 a^2 \qquad E_{T,2} = E_{K,2} + E_{P,2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} m\omega_0^2 b^2.$$

Βλέπουμε ότι οι ενέργειες που σχετίζονται με τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και ότι η ολική ενέργεια του κάθε τρόπου ταλάντωσης είναι σταθερή. Το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των δύο τρόπων είναι ίσο με την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος και το ίδιο ισχύει και για τη δυναμική ενέργεια. Το άθροισμα των ολικών ενεργειών των δύο κανονικών τρόπων είναι ίσο με την ολική ενέργεια του συστήματος, η οποία είναι σταθερή.

Τέλος, επειδή σύμφωνα με τις Εξ.(3.11) και (3.12) οι κανονικές συντεταγμένες είναι

$$x(t) = X_1 + X_2 \qquad \text{και} \qquad y(t) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} X_1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} X_2 \tag{3.20}$$

η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2} s_1 x^2 + \tfrac{1}{2} s_2(y-x)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2} (s_1+s_2)x^2 + \tfrac{1}{2} s_2 y^2 - \tfrac{1}{2} s_2 xy \end{aligned}$$

η οποία με αντικατάσταση από τις Εξ.(3.20) δίνει τελικά

$$E = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} s X_1^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{2} m \dot{X}_1^2 \right) + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} s X_2^2 + \frac{3-\sqrt{3}}{2} m \dot{X}_2^2 \right)$$

που είναι της μορφής

$$E = \left(k_1 X_1^2 + k_1' \dot{X}_1^2 \right) + \left(k_2 X_2^2 + k_2' \dot{X}_2^2 \right) \tag{3.21}$$

με k_1, k_1', k_2 και k_2' σταθερά, όπως αναμένεται για τις δύο κανονικές συντεταγμένες X_1 και X_2. Σε αντίθεση, στη σχέση για την ενέργεια συναρτήσει των x και y υπάρχει, εκτός από τους όρους με x^2, y^2, $\dot{x}^2$ και $\dot{y}^2$, και ένας όρος με το γινόμενο xy, ένδειξη ότι οι συντεταγμένες x και y δεν είναι κανονικές συντεταγμένες.

3.2 Γενική μέθοδος εύρεσης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης

Θα εξετάσουμε τώρα τον γενικό τρόπο εύρεσης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (δηλαδή των κανονικών συχνοτήτων, των σχέσεων των πλατών και των κανονικών συντεταγμένων) για ένα σύστημα με N βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση του συστήματος εξαρτάται από N ανεξάρτητες μεταβλητές (συντεταγμένες θέσης) και περιγράφεται από N εξισώσεις κίνησης, οι οποίες μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots\ldots + c_{1N}x_N$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots\ldots + c_{2N}x_N$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3.22}$$

$$\frac{d^2x_N}{dt^2} = c_{N1}x_1 + c_{N2}x_2 + c_{N3}x_3 + \ldots\ldots + c_{NN}x_N$$

όπου οι συντελεστές c_{ij} είναι σταθεροί.

Εξετάζουμε την κίνηση σε μόνο ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης, έστω τον i-στο, με κανονική συχνότητα ω_i. Υποθέτουμε λύσεις της μορφής

$$x_{1i} = A_{1i}\cos(\omega_i t+\phi_i) \qquad x_{2i} = A_{2i}\cos(\omega_i t+\phi_i) \quad \ldots\ldots \quad x_{Ni} = A_{Ni}\cos(\omega_i t+\phi_i). \tag{3.23}$$

Με αντικατάσταση στις Εξ.(3.22) και απλοποίηση του κοινού παράγοντα $\cos(\omega_i t+\phi_i)$, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$(c_{11}+ \omega_i^2)A_{1i} + c_{12}A_{2i} + c_{13}A_{3i} + \ldots\ldots + c_{1N}A_{Ni} = 0$$

$$c_{21}A_{1i} + (c_{22}+ \omega_i^2)A_{2i} + c_{23}A_{3i} + \ldots\ldots + c_{2N}A_{Ni} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3.24}$$

$$c_{N1}A_{1i} + c_{N2}A_{2i} + c_{N3}A_{3i} + \ldots\ldots + (c_{NN}+ \omega_i^2)A_{Ni} = 0$$

το οποίο έχει λύση αν η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται:

$$\begin{vmatrix} (c_{11}+ \omega_i^2) & c_{12} & c_{13} & \ldots\ldots & c_{1N} \\ c_{21} & (c_{22}+ \omega_i^2) & c_{23} & \ldots\ldots & c_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \ldots\ldots & (c_{NN}+ \omega_i^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.25}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα, προκύπτει μια εξίσωση βαθμού N ως προς ω_i^2, η οποία έχει N θετικές λύσεις για την ω_i. Αυτές είναι οι κανονικές συχνότητες. Έχοντας βρεί τις κανονικές συχνότητες μπορούμε, με αντικατάσταση στις

Εξ.(3.24), να βρούμε για κάθε κανονικό τρόπο τους λόγους των πλατών, έστω A_{ki}/A_{1i}.

Η γενική λύση για την κάθε μάζα είναι μια επαλληλία N ανεξάρτητων κινήσεων στις κανονικές συχνότητες του συστήματος. Για παράδειγμα, για την πρώτη μάζα, η κίνηση δίνεται από τη σχέση:

$$x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t+\phi_2) + \dots + A_{1N}\cos(\omega_N t+\phi_N). \qquad (3.26)$$

Αν καθοριστούν τα πλάτη $A_{11}, A_{12},\dots A_{1N}$ για μια μάζα (την πρώτη εδώ) και οι σταθερές φάσης $\phi_1, \phi_2,\dots\phi_N$, καθορίζεται και η κίνηση όλων των άλλων μαζών. Η κίνηση της μάζας με αύξοντα αριθμό k δίνεται από τη σχέση:

$$x_k = A_{11}\left(\frac{A_{k1}}{A_{11}}\right)\cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_{12}\left(\frac{A_{k2}}{A_{12}}\right)\cos(\omega_2 t+\phi_2) + \dots$$
$$\dots + A_{1N}\left(\frac{A_{kN}}{A_{1N}}\right)\cos(\omega_N t+\phi_N) \qquad (k=1,2,3\dots N) \qquad (3.27)$$

Οι κανονικές συντεταγμένες πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η καθεμιά να μεταβάλλεται σε μία μόνο από τις κανονικές συχνότητες. Αν για παράδειγμα θεωρηθούν ως κανονικές συντεταγμένες οι $X_1, X_2,\dots X_N$ τέτοιες ώστε

$$X_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t+\phi_1) \quad X_2 = A_{12}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \quad \dots \quad X_N = A_{1N}\cos(\omega_N t+\phi_N) \qquad (3.28)$$

Τότε οι Εξ.(3.27) δίνουν το σύστημα εξισώσεων

$$x_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

$$x_2 = \left(\frac{A_{21}}{A_{11}}\right)X_1 + \left(\frac{A_{22}}{A_{12}}\right)X_2 + \dots + \left(\frac{A_{2N}}{A_{1N}}\right)X_N$$

$$x_3 = \left(\frac{A_{31}}{A_{11}}\right)X_1 + \left(\frac{A_{32}}{A_{12}}\right)X_2 + \dots + \left(\frac{A_{3N}}{A_{1N}}\right)X_N$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3.29)$$

$$x_N = \left(\frac{A_{N1}}{A_{11}}\right)X_1 + \left(\frac{A_{N2}}{A_{12}}\right)X_2 + \dots + \left(\frac{A_{NN}}{A_{1N}}\right)X_N$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να λυθούν και να δώσουν, συναρτήσει των $x_1, x_2,\dots x_N$, τις κανονικές συντεταγμένες:

$$X_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3 + \dots + b_{iN}x_N \qquad (i=1,2,3\dots N). \qquad (3.30)$$

Με τον τρόπο αυτό βρίσκονται οι κανονικές συχνότητες, οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών, οι κανονικές συντεταγμένες και έτσι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ενός συστήματος με N βαθμούς ελευθερίας.

3.3 Χορδή με σημειακές μάζες

Μια αβαρής χορδή μήκους $(n+1)\alpha$ η οποία είναι τεντωμένη με τάση T έχει τα δύο της άκρα ακίνητα και έχει συμμετρικά στερεωμένες επάνω της n σημειακές μάζες m σε ίσες αποστάσεις α μεταξύ τους. Οι μάζες εκτελούν εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους, σε ένα κοινό επίπεδο. (Βλ. Pain, παράγρ. 3.6).

Η χορδή με n μάζες έχει n κανονικούς τρόπου ταλάντωσης. Οι κανονικές συχνότητες δίνονται από τη σχέση

$$\omega_s = \omega_0 \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{s\pi}{n+1}\right)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \qquad \text{(P.3.80)}$$

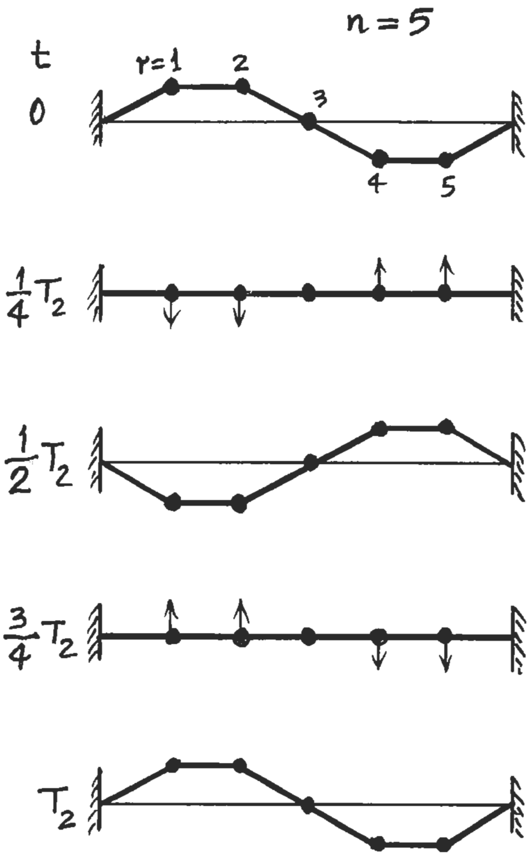
όπου $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{T}{m\alpha}}$ και s είναι ο αύξων αριθμός του κανονικού τρόπου ταλάντωσης. Η σχέση αυτή γράφεται και ως

$$\omega_s = 2\,\omega_0 \sin\frac{s\pi}{2(n+1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n).$$

Στον κανονικό τρόπο ταλάντωσης με αύξοντα αριθμό s, το πλάτος της ταλάντωσης της r-στης μάζας δίνεται από τη σχέση

$$A_r = C \sin\frac{r s\pi}{n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots n \quad \text{και} \quad r = 1, 2, \ldots n) \qquad \text{(P.3.82)}$$

όπου C είναι μια σταθερά.



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται, για την περίπτωση πέντε σφαιριδίων ($n=5$) και τον δεύτερο κανονικό τρόπο ταλάντωσης ($s=2$), οι θέσεις των μαζών σε διάφορες χρονικές στιγμές. $T_2 = 2\pi/\omega_2$ είναι η περίοδος του τρόπου. Για τη στιγμή $t=0$ οι μετατοπίσεις των μαζών είναι μέγιστες. Από αυτές προκύπτουν τα σχετικά πλάτη ταλάντωσης των πέντε μαζών για τον συγκεκριμένο τρόπο ταλάντωσης.

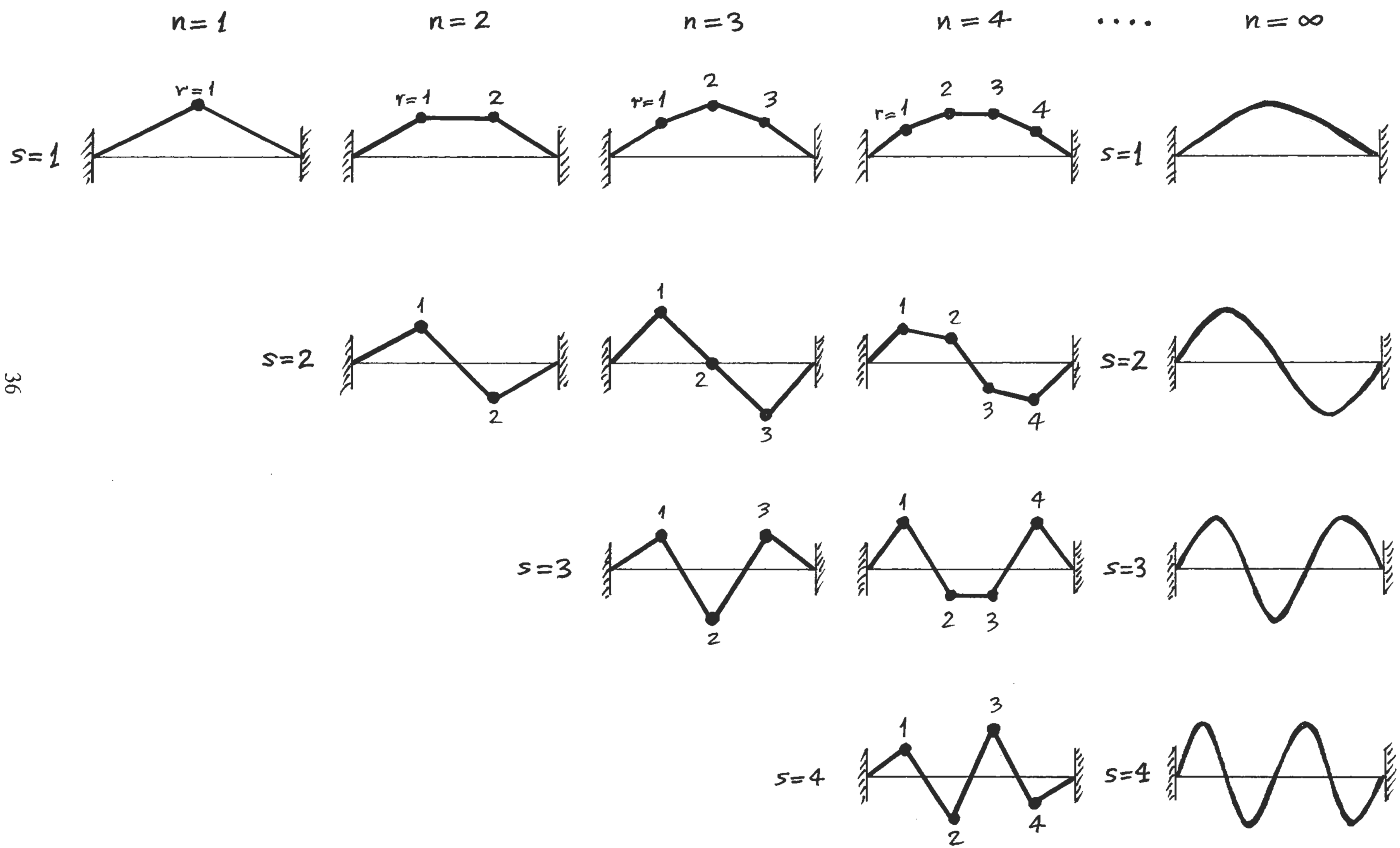
Στο σχήμα της επόμενης σελίδας φαίνονται τα σχετικά πλάτη στους διάφορους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης μιας χορδής με σφαιρίδια.

n = αριθμός σφαιριδίων στη χορδή ($n = 1,2,3,\ldots\infty$).

s = αύξων αριθμός του κανονικού τρόπου ($s = 1,2,3,\ldots n$).

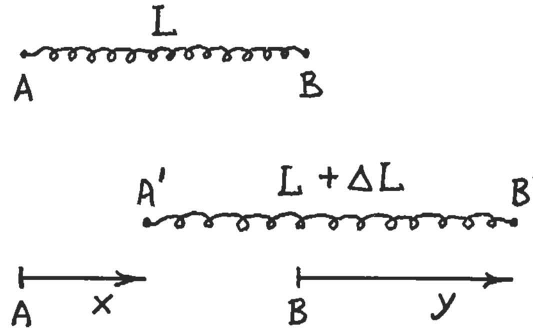
r = αύξων αριθμός κάθε σφαιριδίου ($r = 1,2,3,\ldots n$).

Στο όριο $n \longrightarrow \infty$, το σύστημα γίνεται μια συνεχής χορδή με μάζα ρ ανά μονάδα μήκους, η οποία έχει άπειρους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.


n=1
n=2
n=3
n=4
....
n=∞
s=1
r=1
2
3
4
s=2
s=3
s=4

Υπολογισμός των δυνάμεων που ασκούνται από ελατήρια

Οι δυνάμεις που ασκεί ένα ελατήριο δίνονται συνήθως από το νόμο του Hooke και είναι ανάλογες της επιμήκυνσης του ελατηρίου. Χρειάζεται όμως προσοχή για να αποφευχθούν σφάλματα που η πείρα έδειξε ότι πολύ εύκολα γίνονται με τα πρόσημα των δυνάμεων. Μια μέθοδος για τον υπολογισμό των δυνάμεων είναι η εξής:



Έστω ότι το ελατήριο έχει μήκος L και ότι τα άκρα του βρίσκονται στα σημεία A και B όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος.

Ορίζουμε μια θετική διεύθυνση κατά μήκος του ελατηρίου, έστω προς τα δεξιά στο σχήμα. Αν σε κάποια στιγμή τα άκρα του ελατηρίου βρίσκονται σε αποστάσεις x και y από τα σημεια A και B αντίστοιχα, τότε η **επιμήκυνση** του ελατηρίου είναι ίση με τη μετατόπιση του δεξιού του άκρου προς τα δεξιά, μείον τη μετατόπιση του αριστερού του άκρου προς τα δεξιά, δηλαδή $\Delta L = y - x$. Η σύμβαση των προσήμων που ακολουθήθηκε δίνει το σωστό αποτέλεσμα για την επιμήκυνση του ελατηρίου (θετική ή αρνητική) ανεξάρτητα από το αν τα x και y είναι θετικά ή αρνητικά.

Για θετικό ΔL, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί και θα τείνει να μειώσει το μήκος του. Οι δυνάμεις που θα ασκεί το ελατήριο στα δύο του άκρα θα έχουν κατεύθυνση προς το κέντρο του. Θα είναι δηλαδή:

Δύναμη στο A: $F_A = s\,\Delta L = s\,(y - x)$

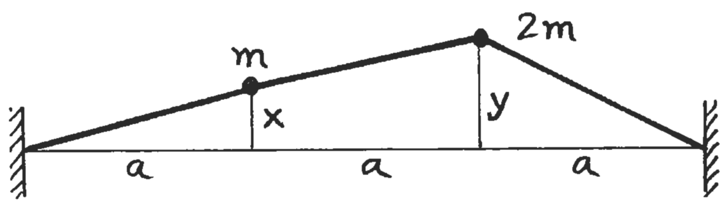
Δύναμη στο B: $F_B = -\,s\,\Delta L = -\,s\,(y - x)$

Μια διερεύνηση δείχνει ότι οι δυνάμεις έχουν τις σωστές κατευθύνσεις για όλα τα σχετικά μεγέθη και κατευθύνσεις των x και y.

Προβλήματα

Προβλήματα από Pain: 3.4, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.17, 3.19, 3.20.

3.1 Αβαρές νήμα μήκους 3a έχει τα άκρα του ακίνητα και είναι τεντωμένο με τάση T. Μια σημειακή μάζα m είναι στερεωμένη στο νήμα σε απόσταση a από το ένα του άκρο και άλλη, 2m, σε απόσταση a από το άλλο του άκρο. Οι δύο μάζες εκτελούν εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους, κατά τις οποίες τα τρία τμήματα του νήματος παραμένουν ευθύγραμμα και στο ίδιο επίπεδο.



(α) Να βρεθούν οι κανονικές συχνότητες του συστήματος.

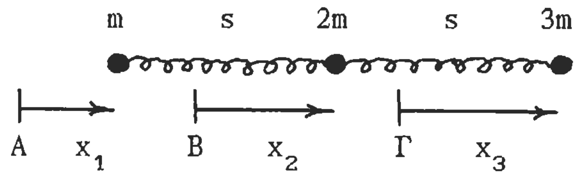
(β) Ποιες είναι οι γενικές λύσεις για τις μετατοπίσεις x και y των μαζών;

Απ.: (α) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2p}}$ $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2p}}$ όπου $p = \dfrac{m\alpha}{T}$

(β) $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2)$

$$y(t) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) - \frac{\sqrt{3}-1}{2} A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2).$$

3.2 Οι τρεις μάζες, m, 2m και 3m του σχήματος έχουν θέσεις ισορροπίας Α, Β και Γ αντίστοιχα. Οι μάζες συνδέονται με δύο ελατήρια με σταθερά s, που έχουν τα φυσικά τους μήκη όταν οι μάζες βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους. Έστω ότι x_1, x_2 και x_3 είναι οι μετατοπίσεις των τριών μαζών από τα Α, Β και Γ αντίστοιχα, στο χρόνο t.



Να βρεθούν:

(α) Οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης

(β) Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και οι λόγοι των πλατών των τριών μαζών σε αυτούς.

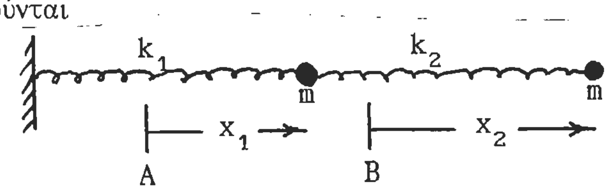
Απ.: (α) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{s}{m} \cdot \dfrac{7-\sqrt{13}}{6}}$ $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{s}{m} \cdot \dfrac{7+\sqrt{13}}{6}}$

(β) $x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t+\phi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t+\phi_2)$

$$x_2(t) = \frac{\sqrt{13}-1}{6} A_1 \sin(\omega_1 t+\phi_1) - \frac{\sqrt{13}+1}{6} B_1 \sin(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$x_3(t) = -\frac{\sqrt{13}+2}{9} A_1 \sin(\omega_1 t+\phi_1) + \frac{\sqrt{13}-2}{9} B_1 \sin(\omega_2 t+\phi_2).$$

3.3 Δύο ίσες μάζες m συνδέονται με ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι μάζες κινούνται χωρίς τριβή κατά μήκος του του άξονα των x. Στις θέσεις ισορροπίας των μαζών, Α και Β, τα ελατήρια έχουν τα φυσικά τους μήκη.



Να βρεθούν οι κανονικές συχνότητές του συστήματος.

Απ.: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2m}\left(k_1 + 2k_2 - \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}\right)}$ $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2m}\left(k_1 + 2k_2 + \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}\right)}$

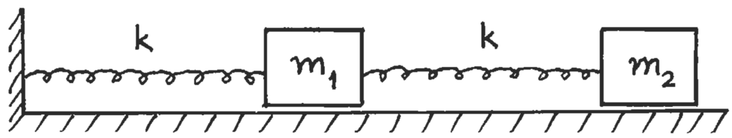
3.4 Τρία πανομοιότυπα ελατήρια, ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ, συνδεδεμένα στη σειρά, είναι κρεμασμένα από το σημείο Α. Η σταθερά των ελατηρίων είναι s. Στα σημεία Β, Γ και Δ υπάρχουν μάζες ίσες με 2m, 2m και m αντίστοιχα. Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων κατακόρυφων ταλαντώσεων.

Απ.: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\dfrac{s}{m}}$ $\qquad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{s}{m}}$ $\qquad \omega_3 = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\dfrac{s}{m}}$.

3.5 Δύο ίσες μάζες m ελέγχονται από ένα ελατήριο σταθεράς s η καθεμιά. Οι μάζες είναι συζευγμένες μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε μάζα να ασκείται δύναμη τριβής ίση με r φορές τη σχετική ταχύτητα των μαζών. Αν πάνω στη μια μάζα ασκείται δύναμη $F\sin\beta t$, δείξετε ότι οι μέγιστες ταχύτητες των μαζών είναι

$$\frac{F\sqrt{r^2+X^2}}{X\sqrt{4r^2+X^2}} \quad \text{και} \quad \frac{Fr}{X\sqrt{4r^2+X^2}}, \quad \text{όπου} \quad X = m\beta - \frac{s}{\beta}.$$

3.6 Δύο μάζες, m_1 και m_2, συνδέονται μεταξύ τους και με ακίνητο σημείο με δύο ελατήρια με σταθερά k, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Γράψετε τις εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών, με μετατοπίσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ για τις m_1 και m_2 αντίστοιχα.

(β) Απαλείφοντας την $x_2(t)$ από τις δύο εξισώσεις κίνησης, δείξετε ότι η $x_1(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$m_1 m_2 \frac{d^4x_1}{dt^4} + k(m_1 + 2m_2)\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2 x_1 = 0.$$

(γ) Δείξετε ότι, με αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση, προκύπτει η εξίσωση για τη γωνιακή συχνότητα της κίνησης της μάζας m_1,

$$m_1 m_2\, \omega^4 - k(m_1 + 2m_2)\,\omega^2 + k^2 x_1 = 0$$

η οποία δίνει δύο τιμές για την $|\omega|$.