ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

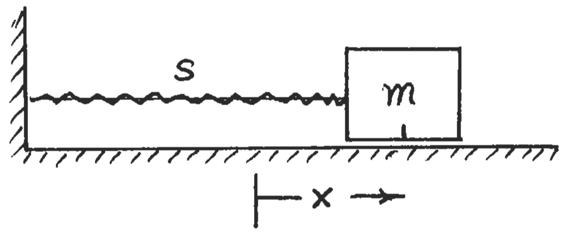
ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1.1 Απλή αρμονική κίνηση χωρίς απόσβεση

Ένα σύστημα μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση είναι αυτό της μάζας m στο άκρο ενός ελατηρίου, η οποία είναι ελεύθερη να κινηθεί χωρίς τριβή κατά μήκος μιας ευθείας (Σχ.1.1). Το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke και η δύναμη επαναφοράς που ασκείται επί της μάζας είναι ανάλογη της απομάκρυνσής της από το σημείο ισορροπίας.

Αν η απομάκρυνση x μετράται από τη θέση ισορροπίας και η σταθερά του ελατηρίου είναι ίση με s, η δύναμη επί της μάζας είναι:

$$F(x) = -sx. \qquad (1.1)$$



Σχ.1.1 Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Η μονοδιάστατη απλή αρμονική κίνηση χωρίς απόσβεση, είναι η κίνηση που εκτελεί ένας ταλαντωτής κάτω από την επίδραση αυτής της δύναμης. Η λύση του προβλήματος, η οποία δίνει τη θέση της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου, x(t), θα βρεθεί παρακάτω με δύο διαφορετικούς τρόπους.

1.1.1 Ενεργειακή θεώρηση

Αν η δυναμική ενέργεια της μάζας, με σημείο αναφοράς το σημείο $x=0$, είναι το έργο που παράγει μια εξωτερική δύναμη $F(x) = sx$ η οποία, εξισορροπόντας τη δύναμη του ελατηρίου, μετατοπίζει τη μάζα από το σημείο $x=0$ στο $x(t)$, τότε η δυναμική ενέργεια στη θέση $x(t)$ είναι

$$V(x) = \int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x sx\,dx = \frac{1}{2}sx^2. \qquad (1.2)$$

Αν η ταχύτητα της μάζας στη θέση $x(t)$ είναι $v(t)$, τότε η κινητική της ενέργεια είναι $K(x) = \frac{1}{2}mv^2$ και η ολική της ενέργεια είναι $E = K + V$, η οποία και διατηρείται. Επομένως,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \qquad (1.3)$$

και

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E - V(x)\Big)} \qquad (1.4)$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ των σημείων $x=x_0$ και x, στα οποία βρίσκεται η μάζα τις χρονικές στιγμές $t=0$ και t αντίστοιχα, έχουμε τη σχέση

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{[\,E - V(x)\,]^{1/2}} = \pm\int_0^t dt = \pm\, t. \tag{1.5}$$

Για δυναμική ενέργεια $V(x) = \frac{1}{2}sx^2$, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\left(E - \frac{1}{2}sx^2\right)^{1/2}} = \pm\, t. \tag{1.6}$$

Ορίζουμε το μέγεθος $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ και τη νέα μεταβλητή θ σύμφωνα με τη σχέση

$$\sin\theta = x\sqrt{\frac{s}{2E}}\,. \tag{1.7}$$

Επίσης, αν $\sin\phi = x_0\sqrt{\frac{s}{2E}}$, το ολοκλήρωμα της Εξ.(1.6) είναι ίσο με

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\left(E - \frac{1}{2}sx^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{\omega_0}\int_{\phi}^{\theta}d\theta = \frac{1}{\omega_0}(\,\theta - \phi\,). \tag{1.8}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.(1.6), έχουμε τη σχέση

$$\theta = \pm\,\omega_0 t + \phi \tag{1.9}$$

η οποία δίνει για το $x(t)$,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{s}}\sin\theta = \alpha\,\sin(\omega_0 t + \phi). \tag{1.10}$$

όπου το $\pm$ έχει παραληφθεί γιατί οι σταθερές α και ϕ μπορούν να επιλεγούν θετικές ή αρνητικές, έτσι ώστε το $x(t)$ να έχει το σωστό πρόσημο. Η σταθερά $\alpha = \sqrt{\frac{2E}{s}}$ είναι το πλάτος της ταλάντωσης, συναρτήσει του οποίου η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$E = \frac{1}{2}s\alpha^2. \tag{1.11}$$

Επομένως, η λύση για τη θέση του απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση είναι:

$$x(t) = \alpha\,\sin(\omega_0 t + \phi). \tag{1.12}$$

Στη σχέση αυτή, η μέγιστη απομάκρυνση α ονομάζεται πλάτος της ταλάντωσης, το μέγεθος $(\omega_0 t + \phi)$ φάση και η σταθερά ϕ σταθερά φάσης.

1.1.2 Δυναμική θεώρηση

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - sx \tag{1.13}$$

ή, με $\omega_0 = \sqrt{s/m}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.14}$$

Η συνάρτηση $x(t) = \alpha \sin(\omega_0 t + \phi)$, που βρέθηκε πιο πάνω, ικανοποιεί πράγματι τη διαφορική αυτή εξίσωση και είναι η ζητούμενη λύση της.

Ας σημειωθεί ότι η διαφορική εξίσωση (1.13) προκύπτει και από τη διατήρηση της ενέργειας E με παραγώγιση της Εξ.(1.3) ως προς τον χρόνο.

1.2 Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης της Α.Α.Τ.

Η διαφορική εξίσωση για την απλή αρμονική ταλάντωση είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.15}$$

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής $x = C\, e^{\alpha t}$ με τα C και α σταθερά. Επειδή $\frac{dx}{dt} = \alpha C\, e^{\alpha t}$ και $\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 C\, e^{\alpha t}$, αντικαθιστώντας στην Εξ.(1.15), έχουμε $Ce^{\alpha t} (\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$, ή $\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$ και επομένως:

$$\alpha = \pm\, i\omega_0. \tag{1.16}$$

Οι δύο δυνατές λύσεις της Εξ.(1.15) είναι επομένως οι

$$x_1(t) = C_1\, e^{i\omega_o t} \qquad \text{και} \qquad x_2(t) = C_2\, e^{-i\omega_o t}. \tag{1.17}$$

Επειδή η διαφορική εξίσωση (1.15) είναι γραμμική (εμφανίζονται μόνο οι πρώτες δυνάμεις των μεταβλητών και των παραγώγων τους), οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι επίσης λύση και επομένως

$$x(t) = C_1\, e^{i\omega_o t} + C_2\, e^{-i\omega_o t} \tag{1.18}$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης για τον Α.Α.Τ.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\, \sin\theta, \tag{1.19}$$

μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση με συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών. Έτσι, η

(1.18) παίρνει τη μορφή

$$x(t) = C_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + C_2 [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)] \tag{1.20}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 \right) \cos(\omega_0 t) + i \left(C_1 - C_2 \right) \sin(\omega_0 t) \tag{1.21}$$

Ορίζοντας τις νέες σταθερές

$$A = \left(C_1 + C_2 \right) \quad \text{και} \quad B = i \left(C_1 - C_2 \right), \tag{1.22}$$

η λύση της διαφορικής εξίσωσης για τον Α.Α.Τ. είναι:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \tag{1.23}$$

Μια άλλη μορφή της λύσης βρίσκεται αν ορίσουμε σταθερές α και ϕ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$A = \alpha \sin\phi \quad \text{και} \quad B = \alpha \cos\phi \tag{1.24}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{και} \quad \phi = \arctan \frac{A}{B}. \tag{1.25}$$

Τότε, $x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) \sin\phi + \alpha \sin(\omega_0 t) \cos\phi$ και τελικά,

$$x(t) = \alpha \sin(\omega_0 t + \phi). \tag{1.26}$$

Ισοδύναμη είναι και η μορφή:

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \phi). \tag{1.27}$$

Το **πλάτος** α και η **σταθερά φάσης** ϕ της ταλάντωσης, καθορίζονται από τις αρχικές ή άλλες συνθήκες του προβλήματος. Το μέγεθος ω ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα** (ή και κυκλική συχνότητα). Αν οριστούν τα μεγέθη

$$\textbf{συχνότητα} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{και} \quad \textbf{περίοδος} \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{1.28}$$

η λύση μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$x(t) = \alpha \sin(2\pi\nu_0 t + \phi) \quad \text{ή} \quad x(t) = \alpha \sin\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \phi \right) \tag{1.29}$$

Παρατηρούμε ότι ο ταλαντωτής εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση σε χρόνο T_0, στον οποίο η φάση του μεταβάλλεται κατά 2π. Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί στη μονάδα του χρόνου είναι ίσος με $1/\nu_0$. Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης του ταλαντωτή σε ακτίνια ανά μονάδα χρόνου είναι ω_0.

1.3 Ταχύτητα, επιτάχυνση και ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Από τις λύσεις (1.23) και (1.27) για την απλή αρμονική κίνηση, μπορούν να βρεθούν η ταχύτητα $(v = dx/dt)$, η επιτάχυνση $(\gamma = dv/dt = d^2x/dt^2)$ και οι ενέργειες, κινητική $(K = \frac{1}{2}mv^2)$, δυναμική $(V = \frac{1}{2}sx^2)$ και ολική $(E = K + V)$, του ταλαντωτή.

Από την Εξ.(1.23) προκύπτουν οι σχέσεις:

Μετατόπιση: $$x(t) = A\cos(\omega t_0) + B\sin(\omega_0 t) \tag{1.30}$$

Ταχύτητα: $$v(t) = -\omega_0 A\sin(\omega t_0) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t) \tag{1.31}$$

Επιτάχυνση: $$\gamma(t) = -\omega_0^2\,[A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_o t)] \tag{1.32}$$

Κινητική ενέργεια: $$K(t) = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\,[A\sin(\omega_0 t) - B\cos(\omega_0 t)]^2 \tag{1.33}$$

Δυναμική ενέργεια: $$V(t) = \frac{1}{2}\,s\,[A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)]^2 \tag{1.34}$$

Ολική ενέργεια: $$E = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\,[A^2 + B^2] = \frac{1}{2}\,s\,[A^2 + B^2] \tag{1.35}$$

όπου στον υπολογισμό της E χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\omega_0 = \sqrt{s/m}$.

Από την Εξ.(1.27) προκύπτουν οι σχέσεις:

Μετατόπιση: $$x(t) = \alpha\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.36}$$

Ταχύτητα: $$v(t) = -\omega_0\alpha\sin(\omega_0 t + \phi) \tag{1.37}$$

Επιτάχυνση: $$\gamma(t) = -\omega_0^2\alpha\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.38}$$

Κινητική ενέργεια: $$K(t) = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\alpha^2\sin^2(\omega_0 t + \phi) \tag{1.39}$$

Δυναμική ενέργεια: $$V(t) = \frac{1}{2}\,s\alpha^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) \tag{1.40}$$

Ολική ενέργεια: $$E = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\alpha^2 = \frac{1}{2}\,s\alpha^2 \tag{1.41}$$

1.4 Προσδιορισμός των σταθερών της κίνησης του Α.Α.Τ. από τις αρχικές συνθήκες

Οι σταθερές A, B, α και ϕ στις λύσεις $x(t)$ για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή, προσδιορίζονται από τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος, τα οποία είναι συνήθως οι αρχικές συνθήκες. Έστω ότι στο χρόνο $t=0$ η μετατόπιση είναι x_0 και η ταχύτητα είναι v_0.

Από τις (1.30) και (1.31) βρίσκουμε ότι

$$x_0 = x(0) = A \qquad \text{και} \qquad v_0 = v(0) = \omega_0 B \qquad \text{ή} \tag{1.42}$$

$$A = x_0 \qquad \text{και} \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0} \tag{1.43}$$

και η λύση (1.23) γράφεται ως:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \tag{1.44}$$

Από τις (1.36) και (1.37) βρίσκουμε ότι

$$x_0 = x(0) = \alpha \cos\phi \qquad \text{και} \qquad v_0 = v(0) = -\omega_0 \alpha \sin\phi \tag{1.45}$$

και επομένως

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \qquad \text{και} \qquad \phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \tag{1.46}$$

είναι οι σταθερές για τη λύση $x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Αντί της αρχικής μετατόπισης και της αρχικής ταχύτητας, άλλα μεγέθη, όπως η μετατόπιση και η ταχύτητα σε άλλες τιμές του χρόνου, ή οι ενέργειες κλπ, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των A, B, α και φ.

1.5 Μιγαδικός συμβολισμός για την απλή αρμονική κίνηση

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης για την απλή αρμονική κίνηση μπορούν να γραφούν σε μια εύχρηστη μορφή με τη χρήση του μιγαδικών συναρτήσεων.

Από την ταυτότητα του Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{1.47}$$

προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\ e^{i\theta} \tag{1.48}$$

όπου το σύμβολο Re υποδηλώνει το πραγματικό μέρος της παράστασης που το ακολουθεί (το φανταστικό συμβολίζεται με Im).

Έτσι, αντί της λύσης $x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$, μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = \alpha\ \mathrm{Re}\ e^{i(\omega t + \phi)}. \tag{1.49}$$

Η σύμβαση που ακολουθείται, είναι να παραλείπεται το σύμβολο Re, και να δίνεται η λύση ως

$$x(t) = \alpha\ e^{i(\omega t + \phi)} \tag{1.50}$$

και να υπονοείται ότι θα πάρουμε το πραγματικό μέρος της συνάρτησης ως λύση.

Δεχόμαστε επίσης ότι το πλάτος μπορεί να είναι μιγαδικό και έτσι αν

$$A = \alpha\, e^{i\phi} \tag{1.51}$$

τότε

$$x(t) = A\, e^{i\omega t}. \tag{1.52}$$

Μπορούμε έτσι να ενσωματώσουμε τη σταθερά φάσης στο μιγαδικό πλάτος.

Με τις συμβάσεις αυτές, έχουμε την ισοδυναμία:

$$x(t) = A\, e^{i\omega t} \quad \longleftrightarrow \quad x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi). \tag{1.53}$$

Ένα μιγαδικό μέγεθος όπως το $x(t) = \alpha\, e^{i(\omega t+\phi)}$ μπορεί να παρασταθεί σε ένα διάγραμμα Argand (Σχ.1.2). Είναι ένα διάνυσμα με μέτρο $|\alpha|$, που σχηματίζει γωνία ίση με $\omega t + \phi$ με τον άξονα των x.

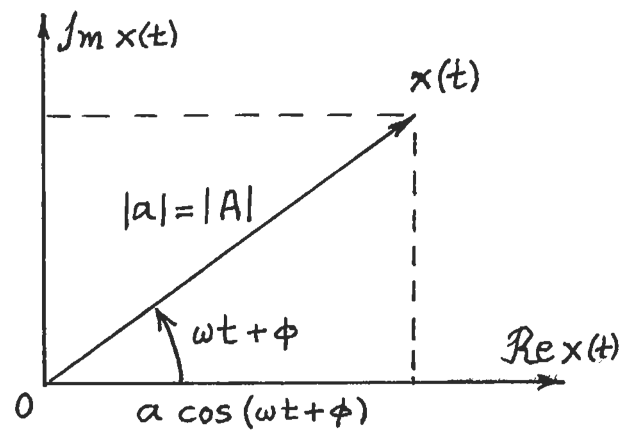
Το πραγματικό μέρος του $x(t)$ είναι

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$$

Επειδή $A = \alpha\, e^{i\phi}$, θα είναι επίσης

$$|A| = |\alpha|.$$

Με την πάροδο του χρόνου, η φάση $\omega t + \phi$ αυξάνει με σταθερό ρυθμό και το διάνυσμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω με θετική φορά.



Σχ.1.2 Διάγραμμα Argand για το x(t).

Η επαλληλία ταλαντώσεων, καθώς και η παραγώγιση ή η ολοκλήρωση της $x(t)$, είναι πράξεις που μπορούν να εκτελεσθούν και στις δύο μορφές της (1.53) για την $x(t)$ με ταυτόσημα αποτελέσματα στο τέλος, όταν πάρουμε το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης. Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί όταν υπολογίζουμε μεγέθη που δεν έχουν γραμμική εξάρτηση από το $x(t)$, όπως π.χ. το x^2, ή το $(dx/dt)^2$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα μεγέθη αυτά πρέπει να υπολογίζονται αφού πρώτα ανακτηθεί το πραγματικό μέρος της λύσης.

Τα πλεονεκτήματα του μιγαδικού συμβολισμού οφείλονται στην ευκολία με την οποία μπορούμε να συμπεριλάβουμε σταθερές φάσης στις λύσεις, πράγμα που κάνει δυνατό τον ορισμό μεγεθών όπως η σύνθετη αντίσταση, στην οποία οι μεταβολές φάσης ενσωματώνονται με πολύ απλό τρόπο. Οι μαθηματικές ευκολίες στο χειρισμό εκθετικών συναρτήσεων, σε σύγκριση με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι επίσης ένα πλεονέκτημα.

1.6 Επαλληλία n απλών αρμονικών ταλαντώσεων

Ως εφαρμογή του μιγαδικού συμβολισμού, θα υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της επαλληλίας n απλών αρμονικών ταλαντώσεων του ιδίου πλάτους αλλά με σταθερές διαδοχικές διαφορές φάσης μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα.

Έστω το άθροισμα n απλών αρμονικών ταλαντώσεων κοινού πλάτους α, γωνιακής συχνότητας ω και σταθερών φάσης 0, δ, 2δ,..., (n–1)δ αντίστοιχα,

$$x = \alpha \cos\omega t + \alpha \cos(\omega t+\delta) + \alpha \cos(\omega t+2\delta) + \ldots + \alpha \cos[\omega t+(n-1)\delta]. \qquad (1.54)$$

Αυτό είναι ίσο με το πραγματικό μέρος του αθροίσματος των αντίστοιχων εκθετικών συναρτήσεων:

$$x = \mathrm{Re}\left\{ \alpha\, e^{i\omega t} + \alpha\, e^{i(\omega t+\delta)} + \alpha\, e^{i(\omega t+2\delta)} + \ldots + \alpha\, e^{i[\omega t+(n-1)\delta]} \right\} \qquad (1.55)$$

$$x = \alpha\, \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t} \left(1+ e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \ldots + e^{i(n-1)\delta} \right)\right]. \qquad (1.56)$$

Το άθροισμα των εκθετικών όρων είναι άθροισμα γεωμετρικής προόδου, που είναι ίσο με

$$1+ e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \ldots + e^{i(n-1)\delta} = \frac{1 - e^{in\delta}}{1 - e^{i\delta}}. \qquad (1.57)$$

Επομένως,

$$x = \alpha\, \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t} \left(\frac{1 - e^{in\delta}}{1 - e^{i\delta}} \right)\right] \qquad (1.58)$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$x = \alpha \frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \cos\left(\omega t + \frac{(n-1)\delta}{2}\right). \qquad (1.59)$$

Το μιγαδικό άθροισμα

$$z = \alpha\, e^{i\omega t} + \alpha\, e^{i(\omega t+\delta)} + \alpha\, e^{i(\omega t+2\delta)} + \ldots + \alpha\, e^{i[\omega t+(n-1)\delta]} \qquad (1.60)$$

μπορεί να παρασταθεί σε ένα διάγραμμα Argand ως το διανυσματικό άθροισμα n όρων της μορφής

$$z_r = \alpha\, e^{i(\omega t+r\delta)} \qquad [\, r = 0,\ 1,\ 2, \ldots (n-1) \,] \qquad (1.61)$$

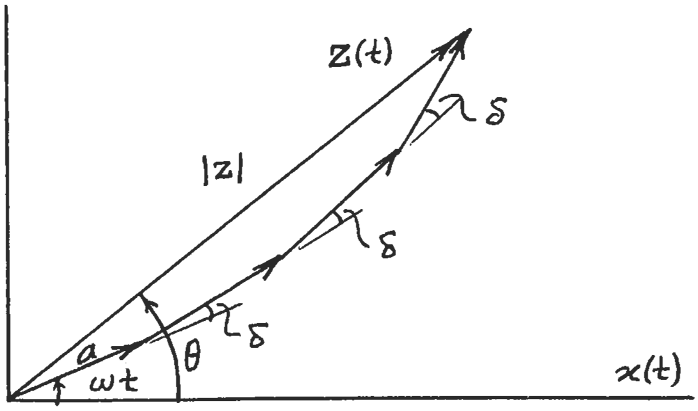
ο καθένας των οποίων έχει μέτρο α και σχηματίζει με τον πραγματικό άξονα γωνία ίση με (ωt+rδ). Το άθροισμα αυτό φαίνεται στο Σχ.1.3.

$$z = \alpha\, e^{i\omega t} \left(\frac{1 - e^{in\delta}}{1 - e^{i\delta}} \right) \qquad (1.62)$$

Σε πολική μορφή, το z μπορεί να εκφραστεί ως

$$z = |z|\, e^{i\theta} \qquad (1.63)$$

όπου $|z| = \alpha \dfrac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$ και $\theta = \omega t + \dfrac{(n-1)\delta}{2}$. (1.64)



Σχ.1.3 Η επαλληλία n απλών αρμονικών ταλαντώσεων στο διάγραμμα Argand.
Το αποτέλεσμα της άθροισης είναι, σύμφωνα με την (1.58),

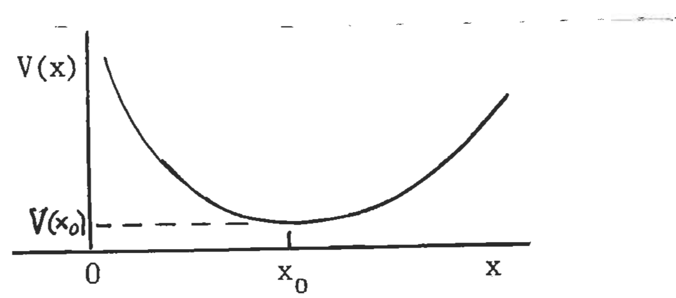
Η συνισταμένη των n διανυσμάτων στο διάγραμμα Argand, είναι το διάνυσμα z που έχει μέτρο $|z|$ και σχηματίζει γωνία θ με τον πραγματικό άξονα.

1.7 Ταλαντώσεις γύρω από σημείο ευσταθούς ισορροπίας

Θα εξετάσουμε τις ταλαντώσεις μικρού πλάτους ενός συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας, κοντά σε μια θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Έστω ότι το σημείο $x=x_0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος. Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του συστήματος $V(x)$ θα έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό (Σχ.1.4). Μπορούμε να αναπτύξουμε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x=x_0$:

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_o}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_o}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_o}(x-x_0)^3 + \ldots \tag{1.65}$$



Σχ.1.4 Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος κοντά σε ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Τα μεγέθη $V(x_0)$, $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_o}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_o}$ και $\frac{1}{6}\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_o}$ είναι σταθεροί συντελεστές που καθορίζουν τη συμπεριφορά της $V(x)$ στην περιοχή γύρω από το σημείο $x=x_0$.

Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σύστημα στην κατεύθυνση του x είναι $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ και επομένως

$$F(x) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_o} - \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_o}(x-x_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_o}(x-x_0)^2 - \dots \tag{1.66}$$

Επειδή το σημείο $x=x_0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας, η δυναμική ενέργεια θα έχει ελάχιστο εκεί, δηλαδή θα είναι:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_o} = 0 \qquad \text{και} \qquad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_o} \geq 0.$$

Με τον συμβολισμό

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_o} \qquad \text{και} \qquad b = \frac{1}{2}\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_o} \tag{1.67}$$

και τη νέα μεταβλητή $x' = x - x_0$, η δύναμη είναι:

$$F(x') = -kx' - bx'^2 - \dots \tag{1.68}$$

Για μικρές ταλαντώσεις με θέση ισορροπίας το σημείο $x=x_0$, δηλαδή για μικρές τιμές του x', η δύναμη είναι, σε πρώτη προσέγγιση,

$$F(x') \simeq -kx'. \tag{1.69}$$

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι επομένως

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -kx' \tag{1.70}$$

και η ταλάντωση είναι απλή αρμονική, με γωνιακή συχνότητα

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_o}}. \tag{1.71}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει από την προσέγγιση που έγινε και που ουσιαστικά θεωρεί ότι στην περιοχή του ελαχίστου η μορφή της $V(x)$ είναι παραβολική.

Η σημασία του προβλήματος του απλού αρμονικού ταλαντωτή έγκειται, μεταξύ άλλων, και στο γεγονός ότι οι ταλαντώσεις μικρού πλάτους σε πολλά συστήματα που βρίσκονται κοντά σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας είναι, σε πρώτη προσέγγιση, απλή αρμονική.

Προβλήματα

Προβλήματα από Pain: 1.6, 1.9, 1.14, 1.19, 1.21, 1.24, 1.27.

1.1 Υπολογίστε τις τιμές των: (α) $\sqrt{i}$ και (β) i^i.

Απ.: (α) $\sqrt{i} = \pm \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$,

(β) i^i = 0,0003882..., ή 0,20788..., ή 111,3178... κλπ !!!

1.2 Ένα μόριο αποτελείται από δύο άτομα, το ένα από τα οποία έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από το άλλο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ακίνητο. Το άλλο άτομο έχει μάζα m. Η δυναμική ενέργεια του μορίου δίνεται από τη σχέση

$$V(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^9}$$

όπου A και B είναι θετικές σταθερές και r είναι η απόσταση του ατόμου με μάζα m από το "ακίνητο" άτομο. Αποδείξετε ότι οι ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από το σημείο ισορροπίας του ατόμου με μάζα m έχουν γωνιακή συχνότητα ίση με

$$\omega_0 = \sqrt{8\,\frac{A}{m}\left(\frac{A}{9B}\right)^{3/8}}\,.$$

1.3 Μάζα m είναι συνδεδεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς s και εκτελεί απλή αρμονική κίνηση χωρίς απώλειες. Η κίνηση της μάζας δίνεται από την έκφραση $x(t) = A\sin(\omega t)$. Για $t > \tau$, εφαρμόζεται στον ταλαντωτή σταθερή δύναμη F προς τα θετικά x $(F > 0)$. Τα A, s, ω, τ και F είναι γνωστά.

(α) Βρείτε την κίνηση του ταλαντωτή για $t > \tau$.

(β) Για δεδομένη F, ποια είναι η συνθήκη για να είναι μέγιστη η νέα ενέργεια του ταλαντωτή;