

2

ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

2.1	Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου	44
2.2	Διαφορά δυναμικού και δυναμική συνάρτηση	46
2.3	Βαθμίδα βαθμωτής συνάρτησης	47
2.4	Εξαγωγή πεδίου από το δυναμικό	49
2.5	Δυναμικό κατανομής φορτίου	49
2.6	Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος	51
2.7	Απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης	56
2.8	Το θεώρημα Gauss και η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss	58
2.9	Η απόκλιση σε καρτεσιανές συντεταγμένες	59
2.10	Η Λαπλασιανή	63
2.11	Εξίσωση Laplace	64
2.12	Διακρίνοντας τη φυσική από τα μαθηματικά	66
2.13	Στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης	68
2.14	Το θεώρημα Stokes	70
2.15	Ο στροβιλισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες	71
2.16	Το φυσικό νόημα του στροβιλισμού	74
	Προβλήματα	78

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

2.1 Υποθέστε ότι E είναι το πεδίο κάποιας στατικής κατανομής φορτίου. Έστω P_1 και P_2 δύο σημεία οπουδήποτε στο πεδίο. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E μεταξύ των δύο σημείων είναι $\int_{P_1}^{P_2} E \cdot ds$,

λαμβάνόμενο σε κάποια διαδρομή από το P_1 στο P_2 , όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1. Η διαδικασία συνίσταται στο να διαιρέσουμε τη διαδρομή σε μικρά τμήματα, καθένα από τα οποία παριστάνεται με ένα διάνυσμα που συνδέει τα άκρα του. Η τιμή του ολοκληρώματος είναι το άθροισμα, σε ολόκληρη τη διαδρομή, των εσωτερικών γινομένων των επιμέρους διανυσμάτων κάθε τμήματος επί το πεδίο E σ' εκείνο το τμήμα. Το ολοκλήρωμα ως συνήθως πρέπει να θεωρείται ως το όριο αυτού του αθροίσματος, καθώς τα τμήματα γίνονται ολοένα μικρότερα και πολυπληθέστερα χωρίς όριο.

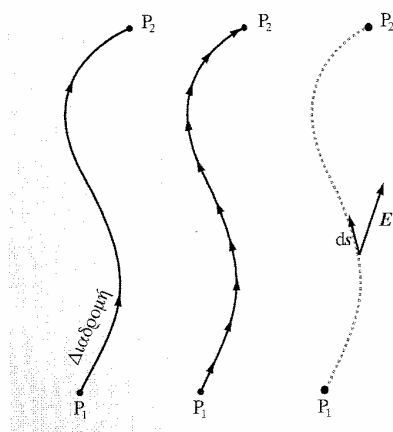
Ας θεωρήσουμε το πεδίο ενός σημειακού φορτίου q και κάποια διαδρομή από το σημείο P_1 έως το σημείο P_2 μέσα στο πεδίο. Οι διαφορετικές διαδρομές φαίνονται στο Σχ. 2.2. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E κατά μήκος της διαδρομής A, που σχηματίζεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα απομακρυνόμενο ακτινικά από το P_1 και από ένα τόξο ακτίνας r_2 . Κατά μήκος του ακτινικού τμήματος της διαδρομής A, τα E και ds είναι παράλληλα, το μέτρο του E είναι $q/4\pi\epsilon_0 r^2$ και το $E \cdot ds$ ισούται απλώς με $(q/4\pi\epsilon_0 r^2) dr$. Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σ' αυτό το τμήμα είναι

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

Το δεύτερο σκέλος της διαδρομής A, το κυκλικό τμήμα, δίνει μηδέν, επειδή το E είναι κάθετο στο ds σε όλα τα σημεία του τόξου. Ολόκληρο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται επομένως με

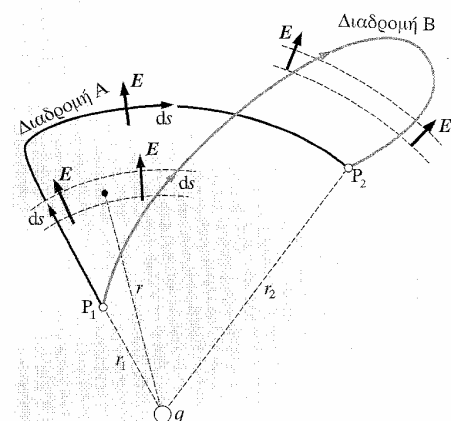
$$\int_{P_1}^{P_2} E \cdot ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2)$$

Δείτε τώρα τη διαδρομή B. Επειδή το E είναι ακτινικό με μέτρο $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, έχουμε $E \cdot ds = (q/4\pi\epsilon_0 r^2) dr$ ακόμα και όταν το ds δεν έχει ακτινική κατεύθυνση. Τα αντίστοιχα τμήματα της διαδρομής A και της διαδρομής B που φαίνονται στο διάγραμμα έχουν την ίδια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα. Το τμήμα της διαδρομής B που σχηματίζει θηλιά μετά το r_2 δεν συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα, επειδή η συνεισφορά του εξουδετερώνει τη συνεισφορά του εισερχόμενου κλάδου. Στο συνολικό ολοκλήρωμα η διαδρομή B θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με τη διαδρομή A. Εφόσον δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο στη διαδρομή B, η Εξ. 1 πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε διαδρομή που αρχίζει από το P_1 και τερματίζει στο P_2 .



ΣΧΗΜΑ 2.1

Παράσταση της διαίρεσης του δρόμου σε στοιχειώδη τμήματα δρόμου ds .



ΣΧΗΜΑ 2.2

Το ηλεκτρικό πεδίο E οφείλεται στο θετικό φορτίο q . Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E από το P_1 ως το P_2 κατά μήκος της διαδρομής A έχει την τιμή $(q/4\pi\epsilon_0) \cdot (1/r_1 - 1/r_2)$. Θα έχει ακριβώς την ίδια τιμή αν υπολογιστεί για τη διαδρομή B ή για οποιαδήποτε άλλη διαδρομή από το P_1 ως το P_2 .

Εδώ έχουμε στην ουσία επαναλάβει με διαφορετική γλώσσα το επιχείρημα της Παραγράφου 1.5, σχετικά με το έργο που εκτελείται όταν ένα σημειακό φορτίο κινείται κοντά σε κάποιο άλλο. Τώρα όμως ενδιαφερόμαστε για το συνολικό πεδίο που παράγεται από οποιαδήποτε κατανομή φορτίου. Ένα ακόμα βήμα θα μας οδηγήσει σε ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός αθροίσματος πεδίων ισούται με το άθροισμα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων των πεδίων που υπολογίζονται χωριστά. Ή, διατυπωμένο πιο προσεκτικά, εάν $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$, τότε:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s} + \dots \quad (3)$$

όπου η ίδια διαδρομή χρησιμοποιείται για όλες τις ολοκληρώσεις. Τώρα οποιοδήποτε ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα ενός αριθμού (πιθανόν τεράστιου) πεδίων σημειακών φορτίων, όπως εκφράζεται από την Εξ. 1.14 ή την 1.15. Επομένως, αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από το P_1 ως το P_2 δεν εξαρτάται από το δρόμο για κανένα από τα πεδία $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$, των σημειακών φορτίων, τότε το πεδίο \mathbf{E} πρέπει να έχει την ιδιότητα:

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ για οποιοδήποτε ηλεκτροστατικό πεδίο \mathbf{E} έχει την ίδια τιμή για όλους τους δρόμους από το P_1 ως το P_2 .

(4)

Τα σημεία P_1 και P_2 μπορούν να συμπίπτουν. Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι δρόμοι είναι κλειστές καμπύλες, μεταξύ των οποίων και δρόμοι μηδενικού μήκους. Οδηγούμαστε έτσι στο εξής αποτέλεσμα:

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ γύρω από οποιοδήποτε κλειστό δρόμο σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο είναι μηδέν.

(5)

Για να ακριβολογήσουμε, *ηλεκτροστατικό πεδίο* σημαίνει ηλεκτρικό πεδίο στατικών φορτίων. Παρακάτω θα συναντήσουμε ηλεκτρικά πεδία στα οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν είναι ανεξάρτητο του δρόμου. Αυτά τα πεδία συσχετίζονται συνήθως με ταχέως κινούμενα φορτία. Προς το παρόν μπορούμε να πούμε ότι, εάν τα φορτία έχουν μικρές ταχύτητες, το πεδίο \mathbf{E} παίρνει τέτοιες τιμές ώστε το ολοκλήρωμα $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ να είναι πρακτικώς ανεξάρτητο του δρόμου. Φυσικά, εάν το ίδιο το \mathbf{E} μεταβάλλεται με το χρόνο, το $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ θα πρέπει να ληφθεί ως το πεδίο που επικρατεί σε ολόκληρο το δρόμο τη δεδομένη χρονική στιγμή. Με αυτή την παραδοχή έχει νόημα να μιλάμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός μεταβαλλόμενου ηλεκτροστατικού πεδίου.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2.2 Επειδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ηλεκτροστατικό πεδίο δεν εξαρτάται από το δρόμο, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε μια βαθμωτή συνάρτηση ϕ_{21} χωρίς να ορίσουμε ένα συγκεκριμένο δρόμο:

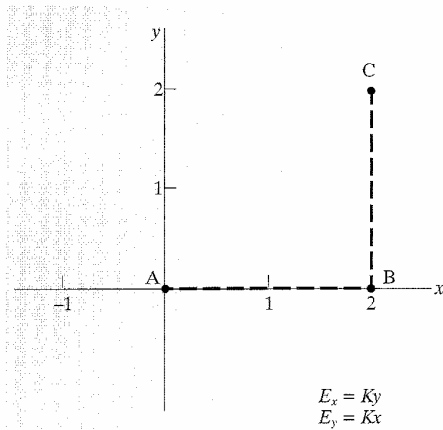
$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (6)$$

Επομένως το ϕ_{21} είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου που απαιτείται για να κινηθεί ένα θετικό φορτίο από το σημείο P_1 ως το P_2 μέσα στο πεδίο \mathbf{E} . Το καλούμε *διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού* μεταξύ των δύο σημείων.

Στο σύστημα SI η μονάδα μέτρησης της διαφοράς δυναμικού ονομάζεται volt (V). Απαιτείται ποσότητα έργου 1 J για να μετακινηθεί φορτίο 1 C σε διαφορά δυναμικού 1 V.

Υποθέστε ότι κρατάμε το P_1 σταθερό σε κάποιο σημείο αναφοράς. Τότε το ϕ_{21} θα είναι συνάρτηση μόνο του P_2 , συνάρτηση δηλαδή των χωρικών συντεταγμένων x, y, z . Γράφουμε τη συνάρτηση απλώς ως $\phi(x, y, z)$ χωρίς δείκτες, εάν θυμόμαστε ότι ο ορισμός της εξακολουθεί να συνεπάγεται μια συμφωνία σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς P_1 . Μπορούμε να πούμε ότι το ϕ είναι το δυναμικό που σχετίζεται με το πεδίο \mathbf{E} . Είναι μια βαθμωτή συνάρτηση θέσης ή ένα βαθμωτό πεδίο (σημαίνουν το ίδιο πράγμα). Η τιμή της σε κάποιο σημείο είναι απλώς ένας αριθμός (σε μονάδες έργου ανά φορτίο) και δεν υπάρχει καμιά διεύθυνση συσχετισμένη με αυτήν. Όταν δοθεί το διανυσματικό πεδίο \mathbf{E} , ορίζεται και η δυναμική συνάρτηση ϕ , εκτός από μια αυθαίρετη προσθετική σταθερά, η οποία οφείλεται στην αυθαίρετη επιλογή του P_1 .

Ας βρούμε, για παράδειγμα, το δυναμικό που οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο που περιγράφεται στο Σχ. 2.3, οι συνιστώσες του οποίου είναι $E_x = Ky$, $E_y = Kx$, $E_z = 0$, όπου K μια σταθερά. Το πεδίο αυτό είναι δυνατόν να δημιουργηθεί. Μερικές γραμμές πεδίου φαίνονται στο σχήμα. Αφού $E_z = 0$, το δυναμικό δεν θα εξαρτάται από το z και χρειάζεται να θεωρήσουμε μόνο το επίπεδο xy . Έστω x_1, y_1 οι συντεταγμένες του P_1 , και x_2, y_2 οι συντεταγμένες του P_2 . Μας βολεύει να τοποθετήσουμε το P_1 στην αρχή των αξόνων: $x_1 = 0, y_1 = 0$. Για να υπολογίσουμε το $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ από αυτό το σημείο αναφοράς ως το τυχαίο σημείο (x_2, y_2) είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε το δρόμο ABC του Σχ. 2.3.



ΣΧΗΜΑ 2.3

Ένας συγκεκριμένος δρόμος, ABC, στο ηλεκτρικό πεδίο $E_x = Ky$, $E_y = Kx$. Φαίνονται μερικές γραμμές πεδίου.

$$\begin{aligned} \phi(x_2, y_2) &= - \int_{(0,0)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_{(0,0)}^{(x_2, 0)} E_x dx - \int_{(x_2, 0)}^{(x_2, y_2)} E_y dy \end{aligned} \quad (7)$$

Το πρώτο από τα δύο ολοκλήρωματα στα δεξιά είναι μηδέν, επειδή το E_x είναι μηδέν κατά μήκος του άξονα x . Το δεύτερο ολοκλήρωμα εκτελείται με σταθερό x και $E_y = Kx_2$:

$$-\int_{(x_2,0)}^{(x_2,y_2)} E_y dy = -\int_0^{y_2} Kx_2 dy = -Kx_2 y_2 \quad (8)$$

Το σημείο (x_2, y_2) δεν είχε κανένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, οπότε μπορούμε να παραλείψουμε τους δείκτες και να γράψουμε

$$\phi = -Kxy \quad (9)$$

για το δυναμικό οποιουδήποτε σημείου (x, y) σε αυτό το πεδίο, όταν το δυναμικό στην αρχή των αξόνων είναι μηδέν. Οποιαδήποτε σταθερά τιμή μπορεί να προστεθεί σε αυτό. Αυτό θα σήμαινε μόνο ότι το σημείο αναφοράς έχει μετατοπιστεί κάπου αλλού.

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να μην μπερδεύουμε το δυναμικό ϕ που σχετίζεται με ένα δεδομένο πεδίο E , με τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων. Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων είναι το ολικό έργο που απαιτείται για να το συγκεντρώσει, ξεκινώντας από την κατάσταση στην οποία το κάθε φορτίο βρίσκεται πολύ μακριά από όλα τα άλλα. Στην Εξ. 1.8, για παράδειγμα, εκφράσαμε με U τη δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίων του Σχ. 1.6. Το ηλεκτρικό δυναμικό $\phi(x, y, z)$ το σχετιζόμενο με το πεδίο του Σχ. 1.6 ήταν το έργο ανά μονάδα φορτίου που θα απαιτείτο για να κινηθεί ένα μοναδιαίο θετικό δοκιμαστικό φορτίο από κάποιο επιλεγμένο σημείο αναφοράς στο σημείο (x, y, z) του πεδίου αυτής της δομής των οκτώ φορτίων.

ΒΑΘΜΙΔΑ ΒΑΘΜΩΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.3 Όταν δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση ηλεκτρικού δυναμικού. Μπορούμε όμως να προχωρήσουμε και κατά την αντίστροφη κατεύθυνση: από το δυναμικό μπορούμε να βρούμε το πεδίο. Φαίνεται από την Εξ. 6 ότι το πεδίο είναι κατά κάποια έννοια η παράγωγος της συνάρτησης δυναμικού. Για να κάνουμε αυτήν την ιδέα ακριβέστερη εισάγουμε τη *βαθμίδα* μιας βαθμωτής συνάρτησης θέσης. Έστω $f(x, y, z)$ κάποια συνεχής, παραγωγίσιμη συνάρτηση των συντεταγμένων. Με τις μερικές παραγώγους της $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ και $\partial f/\partial z$ μπορούμε να κατασκευάσουμε σε κάθε σημείο του χώρου ένα διάνυσμα, οι συνιστώσες x, y, z του οποίου είναι ίσες με τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους.[†] Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται *βαθμίδα* της f , και γράφεται ως $\text{grad } f$ ή ∇f .

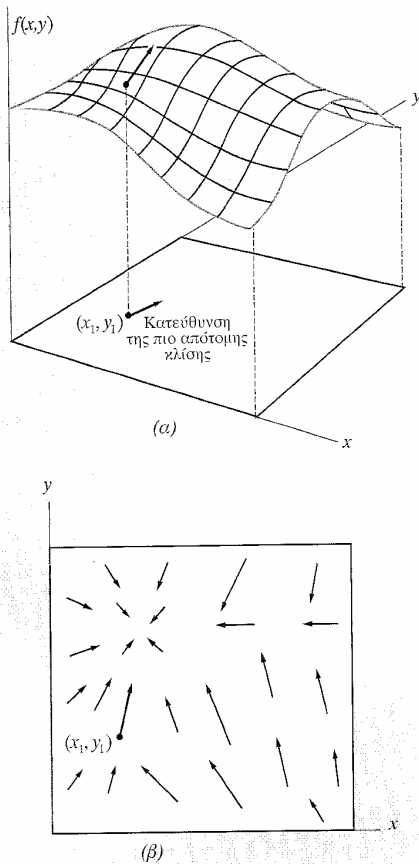
[†] Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι η μερική παράγωγος ως προς x μιας συνάρτησης των x, y, z , που γράφεται απλώς ως $\partial f/\partial x$, έχει την έννοια του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης ως προς το x , ενώ οι άλλες μεταβλητές y, z διατηρούνται σταθερές. Ακριβέστερα,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Π.χ. εάν $f = x^2 yz^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 yz^2$$

$$\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (10)$$



ΣΧΗΜΑ 2.4

Η βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y)$ παριστάνεται από την επιφάνεια στο (α). Τα βέλη στο (β) παριστάνουν τη διανυσματική συνάρτηση $\text{grad } f$ ή ∇f .

Το ∇f είναι ένα διάνυσμα που μας λέει πώς μεταβάλλεται η συνάρτηση f στη γειτονιά ενός σημείου. Η συνιστώσα x της συνάρτησης είναι η μερική παράγωγος της f ως προς x , ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής της f καθώς κινούμαστε κατά τη διεύθυνση x . Η κατεύθυνση του διανύσματος ∇f σε οποιοδήποτε σημείο είναι η κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθούμε από το σημείο αυτό, ώστε να βρούμε την ταχύτερη μεταβολή της συνάρτησης f . Υποθέστε ότι έχουμε μια συνάρτηση με δύο μόνο μεταβλητές, x και y , έτσι ώστε η συνάρτηση να μπορεί να παρασταθεί ως επιφάνεια τριών διαστάσεων. Όταν στεκόμαστε σε κάποιο σημείο αυτής της επιφάνειας, βλέπουμε την επιφάνεια να υψώνεται προς κάποια κατεύθυνση και να βαθαίνει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Υπάρχει μία κατεύθυνση κατά την οποία ένα μικρό βήμα θα μας πάει υψηλότερα από ένα βήμα του ίδιου μήκους προς οποιαδήποτε άλλη κατεύθυνση. Η βαθμίδα της συνάρτησης είναι διάνυσμα με φορά αυτή την κατεύθυνση της πιο απότομης ανωφέρειας και το μέτρο του είναι η κλίση που μετριέται σε αυτή την κατεύθυνση.

Το Σχ. 2.4 μπορεί να σας βοηθήσει να αντιληφθείτε νοητά αυτό το πεδίο. Υποθέστε ότι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση δύο μεταβλητών x και y απεικονίζεται με την επιφάνεια $f(x,y)$ που σχεδιάστηκε στο Σχ. 2.4α. Στη θέση (x_1, y_1) η επιφάνεια υψώνεται πιο απότομα προς μια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 80° με το θετικό άξονα x . Η βαθμίδα της $f(x,y)$, ∇f , είναι μια διανυσματική συνάρτηση των x και y . Η μορφή της υποδεικνύεται στο Σχ. 2.4β με έναν αριθμό διανυσμάτων σε διάφορα σημεία στο χώρο των δύο διαστάσεων, στον οποίο συμπεριλαμβάνεται το σημείο (x_1, y_1) . Η διανυσματική συνάρτηση ∇f που ορίζεται στην Εξ. 10 είναι απλώς μια προέκταση αυτής της ιδέας στο χώρο των τριών διαστάσεων. [Προσέξτε να μη συγχέετε το Σχ. 2.4α με τον πραγματικό τρισδιάστατο χώρο xyz : στο σχήμα αυτό η τρίτη συντεταγμένη είναι η τιμή της συνάρτησης $f(x,y)$.]

Ως ένα παράδειγμα συνάρτησης στο χώρο των τριών διαστάσεων, υποθέστε ότι η f είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας r , όπου r είναι η απόσταση από κάποιο σταθερό σημείο O . Πάνω σε σφαίρα με ακτίνα r_0 και κέντρο το O η $f = f(r_0)$ έχει σταθερή τιμή. Σε ελάχιστα μεγαλύτερη σφαίρα ακτίνας $r_0 + dr$ έχει επίσης σταθερή τιμή, ίση με $f = f(r_0 + dr)$. Εάν θέλουμε να κάνουμε την αλλαγή από την $f(r_0)$ στην $f(r_0 + dr)$, το συντομότερο βήμα που μπορούμε να κάνουμε είναι να προχωρήσουμε ακτινικά (όπως από το A στο B) και όχι από το A στο C στο Σχ. 2.5. Η «ανηφοριά» της f είναι μεγαλύτερη κατά την ακτινική κατεύθυνση, επομένως το ∇f σε κάθε σημείο είναι ένα ακτινικά κατευθυνόμενο διάνυσμα. Πράγματι, σ' αυτή την περίπτωση, $\nabla f = \hat{r}(df/dr)$, όπου \hat{r} υποδεικνύει σε κάθε σημείο ένα μοναδιαίο διάνυσμα με ακτινική διεύθυνση.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΠΕΔΙΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

2.4 Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι η σχέση της βαθμωτής συνάρτησης f με τη διανυσματική συνάρτηση ∇f είναι η ίδια, εκτός από ένα αρνητικό πρόσημο, με τη σχέση του δυναμικού ϕ με το πεδίο E . Θεωρήστε την τιμή του ϕ σε δύο γειτονικά σημεία, (x, y, z) και $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Η μεταβολή του ϕ από το πρώτο σημείο στο δεύτερο είναι, σε πρώτη προσέγγιση,

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \tag{11}$$

Εξάλλου, σύμφωνα με τον ορισμό του ϕ , η μεταβολή μπορεί επίσης να εκφραστεί ως

$$d\phi = -E \cdot ds \tag{12}$$

Η απειροστή διανυσματική μετατόπιση ds ισούται απλώς με $x dx + y dy + z dz$. Επομένως, εάν ταυτίσουμε το E με το $-\nabla \phi$, οι εξισώσεις 11 και 12 γίνονται ταυτόσημες. Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο είναι η αρνητική βαθμίδα του δυναμικού:

$$E = -\nabla \phi \tag{13}$$

Το αρνητικό πρόσημο εμφανίστηκε επειδή το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται από μια περιοχή θετικού δυναμικού προς μια περιοχή αρνητικού δυναμικού, ενώ το διάνυσμα $\nabla \phi$ ορίζεται έτσι, ώστε να δείχνει προς την κατεύθυνση του αυξανόμενου ϕ .

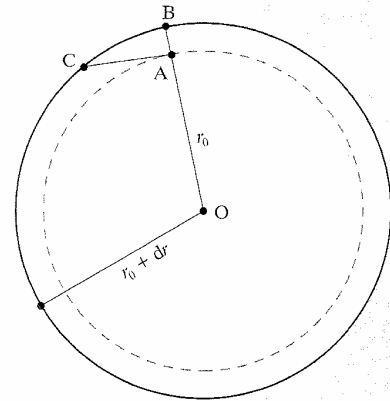
Για να δείξουμε πώς προέκυψε αυτό, πάμε πίσω στο παράδειγμα του πεδίου στο Σχ. 2.3. Από το δυναμικό που δίνεται με την Εξ. 9, $\phi = -Kxy$, μπορούμε να ανακτήσουμε το πεδίο από το οποίο ξεκινήσαμε:

$$E = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{x} y + \hat{y} x) \tag{14}$$

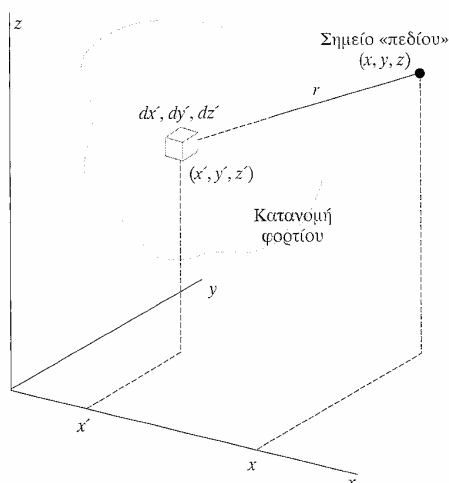
ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ

2.5 Γνωρίζουμε ήδη το δυναμικό που σχετίζεται με ένα απλό σημειακό φορτίο, αφού έχουμε υπολογίσει στην Εξ. 3 του Κεφαλαίου 1 το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί ένα φορτίο στη γειτονιά ενός άλλου. Το δυναμικό σε κάθε σημείο του πεδίου ενός απομονωμένου σημειακού φορτίου q ισούται απλώς με $q/4\pi\epsilon_0 r$, όπου r είναι η απόσταση του εν λόγω σημείου από την πηγή q , και όπου έχουμε ορίσει το δυναμικό μηδέν σε σημεία απείρως μακριά από την πηγή.

Η αρχή της επαλληλίας πρέπει να ισχύει τόσο για τα δυναμικά όσο και για τα πεδία. Εάν έχουμε πολλές πηγές, η συνάρτηση δυναμικού είναι απλώς το άθροισμα των συναρτήσεων δυναμικού που θα είχαμε για κάθε πηγή, αν η κάθε πηγή ήταν μόνη της —αρκεί να είχαμε έναν συνεπή ορισμό του δυναμικού μηδέν σε κάθε περίπτω-



ΣΧΗΜΑ 2.5
Το μικρότερο βήμα για δεδομένη αλλαγή της f είναι το ακτινικό βήμα AB , όταν η f είναι συνάρτηση μόνο της r .



ΣΧΗΜΑ 2.6

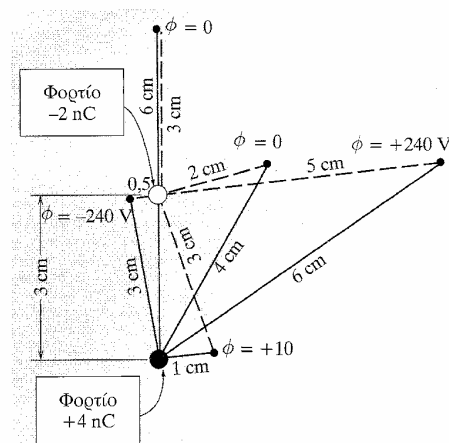
Κάθε στοιχείο της κατανομής φορτίου $\rho(x', y', z')$ συνεισφέρει στο δυναμικό ϕ στο σημείο (x, y, z) . Το δυναμικό σε αυτό το σημείο είναι το άθροισμα όλων αυτών των συνεισφορών (Εξ. 15).

ση. Αν όλες οι πηγές περιορίζονται σε κάποια πεπερασμένη περιοχή, είναι πάντοτε δυνατόν, και συνήθως η απλούστερη επιλογή, να θέσουμε το δυναμικό μηδέν σε άπειρη απόσταση. Εάν υιοθετήσουμε αυτό τον κανόνα, το δυναμικό οποιασδήποτε κατανομής φορτίου μπορεί να οριστεί με το ολοκλήρωμα:

$$\phi(x, y, z) = \int_{\text{σε όλες τις πηγές}} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (15)$$

όπου r η απόσταση από το στοιχείο όγκου $dx' dy' dz'$ του σημείου (x, y, z) στο οποίο υπολογίζεται το δυναμικό (Σχ. 2.6). Δηλαδή, $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. Σημειώστε τη διαφορά μεταξύ αυτής της σχέσης και του ολοκληρώματος που δίνει το ηλεκτρικό πεδίο μιας κατανομής φορτίου (Εξ. 15 του Κεφαλαίου 1). Εδώ έχουμε r στον παρονομαστή και όχι r^2 και το ολοκλήρωμα είναι βαθμωτή ποσότητα και όχι διάνυσμα. Από τη βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού $\phi(x, y, z)$ μπορούμε πάντοτε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο παίρνοντας την αρνητική βαθμίδα του ϕ , σύμφωνα με την Εξ 13.

Δυναμικό δύο σημειακών φορτίων. Θεωρήστε ένα πολύ απλό παράδειγμα, το δυναμικό των δύο σημειακών φορτίων που φαίνονται στο Σχ. 2.7. Ένα θετικό φορτίο 4×10^{-9} C (ή 4 nC) είναι τοποθετημένο σε απόσταση 3 cm από ένα αρνητικό φορτίο -2 nC. Το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου είναι το άθροισμα των δυναμικών που οφείλονται σε κάθε φορτίο χωριστά. Τα δυναμικά σε μερικά επιλεγμένα σημεία του χώρου δίνονται στο διάγραμμα. Εδώ δεν έχουμε να κάνουμε με διανυσματικά αθροίσματα, αλλά μόνο με αλγεβρικά αθροίσματα βαθμωτών ποσοτήτων. Για παράδειγμα, στο πιο απομακρυσμένο σημείο προς τα δεξιά, το οποίο απέχει απόσταση 6 cm από το θετικό φορτίο και 5 cm από το αρνητικό, το δυναμικό έχει την τιμή $\frac{10^{-9}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{6 \times 10^{-2}} - \frac{2}{5 \times 10^{-2}} \right) = 240$ V. Η μονάδα



ΣΧΗΜΑ 2.7

Το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ σε διάφορα σημεία σε ένα σύστημα φορτίων. Το ϕ μηδενίζεται σε άπειρη απόσταση. Το ϕ μετρείται σε volt (V) ή σε joule/coulomb (J/C).

εδώ είναι το volt το δυναμικό τείνει προς το μηδέν σε άπειρη απόσταση. Θα χρειαστούν 240 J για να φέρουμε μια μονάδα θετικού φορτίου από το άπειρο ως ένα σημείο όπου $\phi = 240$ V. Σημειώστε ότι δύο από τα σημεία που φαίνονται στο διάγραμμα έχουν δυναμικό μηδέν. Το καθαρό έργο που καταναλώνεται, για να φέρουμε οποιοδήποτε φορτίο από το άπειρο σε ένα από αυτά τα σημεία, είναι μηδέν. Μπορείτε εύκολα να συμπεράνετε ότι πρέπει να υπάρχει ένας άπειρος αριθμός τέτοιων σημείων, τα οποία σχηματίζουν μια επιφάνεια που περικλείει το αρνητικό φορτίο. Πράγματι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στα οποία το ϕ έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι μια επιφάνεια – που λέγεται *ισοδυναμική επιφάνεια* – η οποία στο δισδιάστατο σχεδιάγραμμα του σχήματος θα είχε τη μορφή μιας καμπύλης.

Δυναμικό μακρού φορτισμένου σύρματος. Υπάρχει ένας περιορισμός στη χρήση της Εξ. 15: Μπορεί να μη δώσει αποτελέσματα, εκτός αν όλες οι πηγές περιορίζονται σε κάποια πεπερασμένη περιοχή του χώρου. Ένα απλό παράδειγμα της δυσκολίας που εγείρεται από φορτία που κατανέμονται ως το άπειρο είναι το φορτισμένο σύρμα μεγάλου μήκους, το πεδίο \mathbf{E} του οποίου μελετήσαμε στην Παράγραφο 1.12. Αν επιχειρήσουμε να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση πάνω στην κατανομή φορτίου σύμφωνα με την Εξ. 15, διαπιστώνουμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει — βρίσκουμε αποτέλεσμα άπειρο. Δεν παρουσιάστηκε καμιά τέτοια δυσκολία όταν υπολογίσαμε το ηλεκτρικό πεδίο του σύρματος απείρου μήκους, γιατί οι συνεισφορές των στοιχειωδών τμημάτων της φορτισμένης γραμμής στο πεδίο ελαττώνονται πολύ γρήγορα με την απόσταση. Προφανώς θα ήταν προτιμότερο να τοποθετήσουμε το μηδενικό δυναμικό κάπου πολύ κοντά για συστήματα στα οποία υπάρχουν κατανομές φορτίων που εκτείνονται στο άπειρο. Έτσι λοιπόν αναγόμεστε απλώς στον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού ϕ_{21} μεταξύ του γενικού σημείου (x, y, z) και του σημείου αναφοράς που επιλέξαμε, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη σχέση της Εξ. 6.

Για να δούμε πώς εφαρμόζεται αυτό στην περίπτωση του φορτισμένου σύρματος απείρου μήκους, ας τοποθετήσουμε αυθαίρετα το σημείο αναφοράς P_1 σε απόσταση r_1 από το σύρμα. Τότε, για να μεταφέρουμε ένα φορτίο από το P_1 σε οποιοδήποτε άλλο σημείο P_2 σε απόσταση r_2 , απαιτείται έργο ανά μονάδα φορτίου

$$\begin{aligned}\phi_{21} &= -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \right) dr \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1\end{aligned}\quad (16)$$

Αυτό δείχνει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό του φορτισμένου σύρματος μπορεί να ληφθεί ως

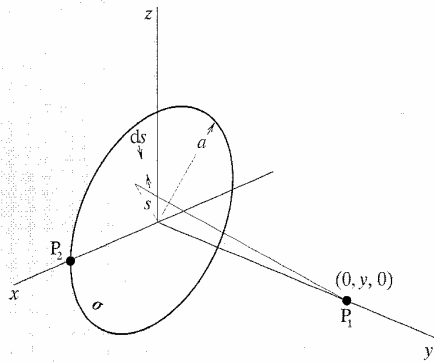
$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{σταθ.}\quad (17)$$

Η σταθερά $\lambda \ln r_1 / 2\pi\epsilon_0$ στην περίπτωση αυτή δεν έχει καμία επίδραση όταν πάρουμε το $-\text{grad } \phi$ για να πάμε πίσω στο πεδίο \mathbf{E} . Στην περίπτωση αυτή:

$$-\nabla\phi = -\hat{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r}\quad (18)$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΣ ΔΙΣΚΟΣ

2.6 Ας μελετήσουμε ως συγκεκριμένο παράδειγμα το ηλεκτρικό δυναμικό και το πεδίο γύρω από έναν ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο. Πρόκειται για μια κατανομή φορτίου που μοιάζει με αυτήν που μελετήσαμε στην Παράγραφο 1.13, εκτός από το ότι έχει πεπε-



ΣΧΗΜΑ 2.8

Υπολογισμός του δυναμικού σε σημείο P_1 πάνω στον άξονα ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου.

ρασμένη έκταση. Ο επίπεδος δίσκος ακτίνας a του Σχ. 2.8 φέρει θετικό φορτίο απλωμένο στην επιφάνειά του με σταθερή πυκνότητα σ , σε C/m^2 . (Πρόκειται για ένα απλό στρώμα φορτίου απειροστού πάχους και όχι για δύο στρώσεις φορτίου, μία σε κάθε πλευρά. Δηλαδή το ολικό φορτίο του συστήματος είναι $\pi a^2 \sigma$.) Συχνά θα συναντούμε στο μέλλον επιφανειακές κατανομές φορτίου, ειδικότερα σε μεταλλικούς αγωγούς. Όμως το αντικείμενο που μόλις περιγράψαμε δεν είναι αγωγός· αν ήταν, όπως θα δούμε αργότερα, το φορτίο δεν θα ήταν ομοιόμορφα κατανομημένο αλλά θα είχε ανακατανομηθεί και θα συσσωρευόταν περισσότερο προς την περιφέρεια του δίσκου. Αυτό που έχουμε είναι ένας μονωτικός δίσκος, όπως λ.χ. ένα πλαστικό φύλλο, πάνω στο οποίο έχει «επιστρωθεί» φορτίο, έτσι ώστε κάθε τετραγωνικό εκατοστό του δίσκου να έχει δεχθεί και να έχει συγκρατήσει την ίδια ποσότητα φορτίου.

Για να ξεκινήσουμε, ας βρούμε το δυναμικό σε κάποιο σημείο P_1 πάνω στον άξονα συμμετρίας, τον οποίο παίρνουμε ως άξονα y . Όλα τα φορτισμένα στοιχεία ενός λεπτού δακτυλιοειδούς τμήματος του δίσκου έχουν την ίδια απόσταση από το P_1 . Εάν s υποδηλώνει την ακτίνα ενός παρόμοιου δακτυλιοειδούς τμήματος και ds το εύρος του, η επιφάνειά του ισούται με $2\pi s ds$. Η ποσότητα φορτίου που περιέχει, dq , είναι επομένως $dq = \sigma 2\pi s ds$. Όλα τα τμήματα αυτού του δακτυλίου έχουν την ίδια απόσταση από το P_1 , συγκεκριμένα $r = \sqrt{y^2 + s^2}$, οπότε η συνεισφορά του δακτυλίου στο δυναμικό του P_1 είναι $dq/4\pi\epsilon_0 r$ ή $\sigma s ds/2\epsilon_0 \sqrt{y^2 + s^2}$. Για να υπολογίσουμε το δυναμικό ολόκληρου του δίσκου, πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλους τους δακτυλίους:

$$\begin{aligned} \phi(0, y, 0) &= \int_0^a \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^a \frac{\sigma s ds}{2\epsilon_0 \sqrt{y^2 + s^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + s^2} \right]_{s=0}^{s=a} \end{aligned} \quad (19)$$

Πρόκειται για ένα στοιχειώδες ολοκλήρωμα. Με την αντικατάσταση $u = y^2 + s^2$ παίρνει τη μορφή $\int u^{-1/2} du$. Βάζοντας τα σωστά όρια, παίρνουμε

$$\phi(0, y, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + a^2} - y \right) \quad \text{για } y > 0 \quad (20)$$

Ένα δευτερεύον σημείο χρήζει σχολιασμού: το αποτέλεσμα που έχουμε περιγράψει με την Εξ. 20 ισχύει για όλα τα σημεία του θετικού άξονα y . Είναι φανερό από τη φυσική συμμετρία του συστήματος (δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ της μιας και της άλλης όψης του δίσκου) ότι το δυναμικό πρέπει να έχει την ίδια τιμή τόσο για θετικές όσο και για αρνητικές τιμές του y , και τούτο αντανάκλαται στην Εξ. 19 όπου εμφανίζεται μόνο το y^2 . Γράφοντας όμως την Εξ. 20 κάναμε μια επιλογή στο πρόσημο όταν πήραμε την τετραγωνική ρίζα του y^2 , με αποτέλεσμα η σχέση να ισχύει μόνο για θετικά y . Η σωστή

έκφραση για $y < 0$ αντιστοιχεί στην επιλογή της άλλης ρίζας και είναι η:

$$\phi(0, y, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + a^2} + y \right) \quad \text{για } y < 0 \quad (21)$$

Έχοντας αυτό υπόψη, δεν θα πρέπει να εκπλαγούμε αν βρούμε μια ανωμαλία στο $\phi(0, y, 0)$ για $y = 0$. Πράγματι, η συνάρτηση εμφανίζει εκεί μια απότομη αλλαγή της κλίσης της, όπως βλέπουμε στο Σχ. 2.9 όπου έχουμε σχεδιάσει το δυναμικό πάνω στον άξονα ως συνάρτηση του y . Το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου είναι $\phi(0, 0, 0) = \sigma a / 2\epsilon_0$. Τόσο έργο θα χρειαζόταν για να φέρουμε μια θετική μονάδα φορτίου από το άπειρο, ακολουθώντας οποιονδήποτε δρόμο, και να την εναποθέσουμε στο κέντρο του δίσκου.

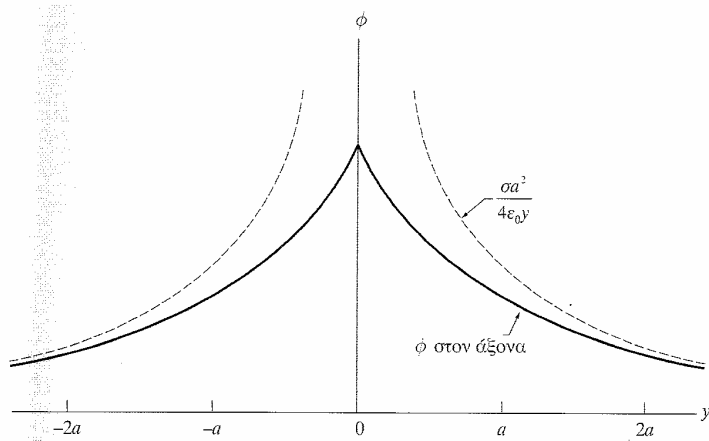
Ενδιαφέρουσα είναι η συμπεριφορά του $\phi(0, 0, 0)$ για πολύ μεγάλη y . Για $y \gg a$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την Εξ. 20 ως εξής:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + a^2} - y &= y \left[\left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \\ &= y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y} \end{aligned} \quad (22)$$

Επομένως,

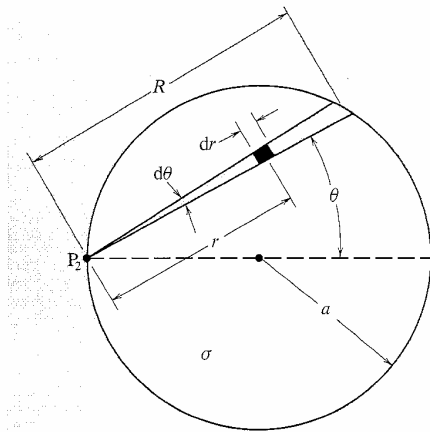
$$\phi(0, y, 0) \approx \frac{a^2 \sigma}{4\epsilon_0 y} \quad \text{για } y \gg a \quad (23)$$

Το σa^2 είναι το συνολικό φορτίο q του δίσκου και η Εξ. 23 είναι απλώς η έκφραση του δυναμικού που οφείλεται σε σημειακό φορτίο αυτού του μεγέθους. Όπως θα έπρεπε να περιμένουμε, σε σημαντική απόσταση από το δίσκο (σε σχέση με τη διάμετρό του) δεν ενδιαφέρει η μορφή της κατανομής του φορτίου. Σε πρώτη προσέγγιση ενδιαφέρει μόνο το συνολικό φορτίο. Στο Σχ. 2.9 έχει σχεδιαστεί με διακεκομμένη γραμμή η συνάρτηση $a^2 \sigma / 4\epsilon_0 y$. Μπορείτε να δείτε ότι η συνάρτηση δυναμικού στον άξονα πλησιάζει αρκετά γρήγορα την ασυμπτωτική τιμή της.



ΣΧΗΜΑ 2.9

Γραφική παράσταση του δυναμικού πάνω στον άξονα. Η διακεκομμένη καμπύλη είναι το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου $q = \sigma a^2$.



ΣΧΗΜΑ 2.10

Υπολογισμός του δυναμικού σε ένα σημείο P_2 στην περιφέρεια του φορτισμένου δίσκου.

Δεν είναι τόσο εύκολο να υπολογίσουμε το δυναμικό για τυχαία σημεία που είναι μακριά από τον άξονα συμμετρίας, γιατί το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν είναι τόσο απλό. Αποδεικνύεται ότι είναι μια συνάρτηση που καλείται *ελλειπτικό ολοκλήρωμα*. Οι συναρτήσεις αυτές είναι πολύ γνωστές και καταχωρημένες σε πίνακες, δεν έχει όμως νόημα να ασχοληθούμε εδώ με μαθηματικές λεπτομέρειες που χαρακτηρίζουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ένας άλλος υπολογισμός, που είναι αρκετά εύκολος, θα ήταν ένα διδακτικό παράδειγμα. Συγκεκριμένα, μπορούμε να βρούμε το δυναμικό σε ένα σημείο της ακμής του δίσκου, λ.χ. στο P_2 του Σχ. 2.10.

Για να υπολογίσουμε το δυναμικό στο P_2 μπορούμε να θεωρήσουμε πρώτα το λεπτό σφηνοειδές τμήμα μήκους R και γωνιακού εύρους $d\theta$ του Σχ. 2.10. Ένα στοιχείο της σφήνας, το μαύρο κομματάκι σε απόσταση r από το P_2 , περιέχει ποσότητα φορτίου $\sigma r d\theta dr$. Η συνεισφορά του στο δυναμικό του P_2 είναι $\sigma d\theta dr / 4\pi\epsilon_0$. Η συνεισφορά ολόκληρης της σφήνας είναι τότε $\frac{\sigma d\theta}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr = \frac{\sigma R d\theta}{4\pi\epsilon_0}$.

Όπως προκύπτει τώρα από τη γεωμετρία του ορθογωνίου τριγώνου, $R = 2a \cos \theta$, και ο δίσκος σαρώνεται ολόκληρος καθώς η θ μεταβάλλεται από $-\pi/2$ ως $\pi/2$. Βρίσκουμε έτσι το δυναμικό στο P_2 ως:

$$\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma a \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} d\theta = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} \quad (24)$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με το $\sigma a / 2\epsilon_0$, το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου, βλέπουμε ότι, όπως το περιμέναμε, το δυναμικό ελαττώνεται από το κέντρο προς την περιφέρεια του δίσκου. Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει μία προς τα έξω συνιστώσα στην επιφάνεια του δίσκου. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο παρατηρήσαμε νωρίτερα ότι, αν το φορτίο είναι ελεύθερο να κινηθεί, θα είχε ανακαταταχθεί προς την περιφέρεια του δίσκου. Για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, ο ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος δεν είναι επιφάνεια σταθερού δυναμικού, όπως θα έπρεπε να είναι κάθε αγωγή επιφάνεια εκτός εάν υπάρχει φορτίο σε κίνηση.[†]

Το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα συμμετρίας μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από τη συνάρτηση δυναμικού:

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{d}{dy} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{y^2 + a^2} - y) \right] \quad (25)$$

ή

$$E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right) \quad \text{για } y > 0 \quad (26)$$

[†] Το ότι μια αγωγή επιφάνεια πρέπει να είναι ισοδυναμική θα αναπτυχθεί λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 3.

(Ομολογουμένως δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί το E_y κατευθείαν από την κατανομή φορτίου για σημεία πάνω στον άξονα.)

Καθώς το y τείνει προς το μηδέν από τις θετικές τιμές του y , το E_y τείνει προς την τιμή $\sigma/2\epsilon_0$. Στην πλευρά των αρνητικών τιμών y , που θα την ονομάσουμε πίσω πλευρά, το E έχει την αντίθετη φορά και η συνιστώσα E_y έχει την τιμή $-\sigma/2\epsilon_0$. Είναι το ίδιο πεδίο με αυτό που οφείλεται σε φύλλο άπειρης έκτασης με πυκνότητα φορτίου σ και το οποίο είχε υπολογιστεί στην Παράγραφο 1.13. Έτσι θα έπρεπε να είναι αφού, για σημεία πολύ κοντά στο κέντρο του δίσκου, η παρουσία ή απουσία φορτίου πέρα από την άκρη του δίσκου έχει αμελητέα επίδραση. Με άλλα λόγια, κάθε φύλλο μοιάζει να έχει άπειρη έκταση αν παρατηρείται από πολύ κοντά. Πράγματι, το E_y έχει την τιμή $\sigma/2\epsilon_0$ όχι μόνο στο κέντρο αλλά σε ολόκληρη την επιφάνεια του δίσκου.

Στο Σχ. 2.11 δείχνουμε μερικές γραμμές πεδίου γι' αυτό το σύστημα και επίσης, σχεδιασμένες με διακεκομμένες καμπύλες, τις τομές των επιφανειών σταθερού δυναμικού με το επίπεδο yz . Κοντά στο κέντρο του δίσκου οι επιφάνειες είναι φακοειδείς, ενώ σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από a προσεγγίζουν τη σφαιρική μορφή των ισοδυναμικών επιφανειών ενός σημειακού φορτίου.

Στο Σχ. 2.11 φαίνεται η γενική ιδιότητα των δυναμικών γραμμών και των ισοδυναμικών επιφανειών. Η πεδιακή ή δυναμική γραμμή που περνάει από οποιοδήποτε σημείο και η ισοδυναμική επιφάνεια από το ίδιο σημείο είναι *αμοιβαία κάθετες*, ακριβώς όπως, σ' έναν υψομετρικό χάρτη μιας ορεινής περιοχής, η βαθμίδα είναι πιο απότομη όταν είναι κάθετη σε μια ισοϋψή καμπύλη. Αυτό πρέπει να ισχύει επειδή, αν το πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο είχε μια συνιστώσα παράλληλη προς την ισοδυναμική επιφάνεια που περνάει από αυτό το σημείο, θα χρειαζόταν κάποιο έργο για να μετακινηθεί ένα φορτίο κατά μήκος μιας ισοδυναμικής επιφάνειας.

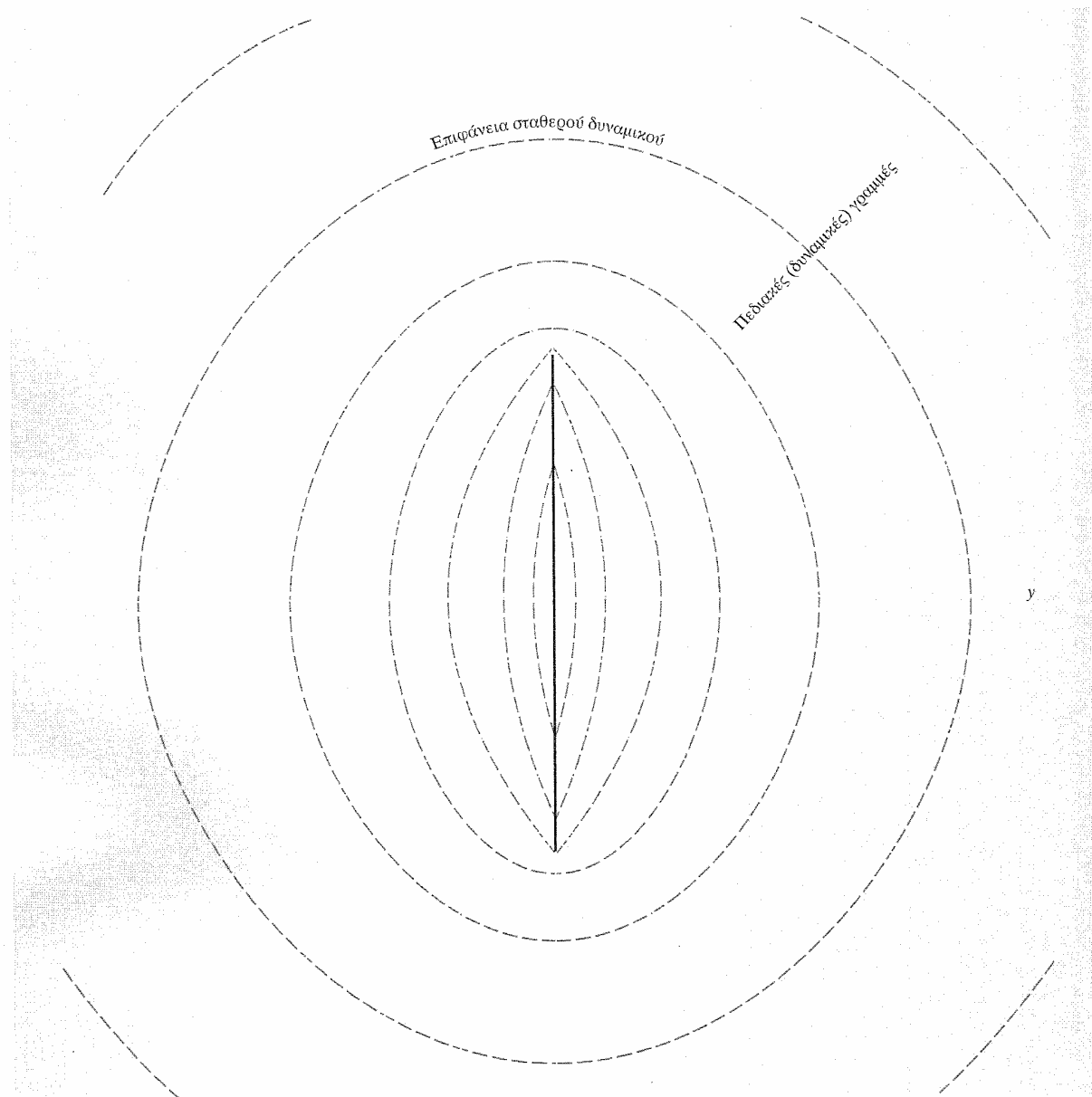
Η ενέργεια που σχετίζεται με αυτό το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο της ποσότητας $(\epsilon_0 E^2/2) dv$. Ισούται με το έργο που απαιτείται για τη συναρμολόγηση αυτής της κατανομής, αρχίζοντας από απειροστά φορτία σε μεγάλη μεταξύ τους απόσταση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως θα φανεί στο Πρόβλημα 2.27, αυτό το έργο δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί κατευθείαν, εάν γνωρίζουμε το δυναμικό στην περιφέρεια ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου.

Υπάρχει μια γενική σχέση μεταξύ του έργου U που απαιτείται για τη συγκέντρωση μιας κατανομής φορτίου $\rho(x, y, z)$ και του δυναμικού $\phi(x, y, z)$ αυτής της κατανομής:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dv \quad (27)$$

Η Εξ. 9 του Κεφαλαίου 1, που εκφράζει την ενέργεια ενός συστήματος διακριτών σημειακών φορτίων, θα μπορούσε να είχε γραφεί ως:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \sum_{k \neq j} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (28)$$



ΣΧΗΜΑ 2.11

Το ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορισμένου δίσκου. Οι συνεχείς καμπύλες είναι οι πεδιακές γραμμές. Οι διακεκομμένες καμπύλες είναι τομές επιφανειών σταθερού δυναμικού με το επίπεδο του σχήματος.

Το δεύτερο άθροισμα είναι το δυναμικό στη θέση του φορτίου q_j , που οφείλεται σε όλα τα άλλα φορτία. Για να προσεγγίσουμε αυτή την έκφραση σε συνεχή κατανομή, αντικαθιστούμε απλώς το q_j με $q\,dv$ και το άθροισμα της Εξ. 28 με ένα ολοκλήρωμα, καταλήγοντας έτσι στην Εξ. 27.

ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.7 Το ηλεκτρικό πεδίο έχει ορισμένη κατεύθυνση και μέτρο σε κάθε σημείο. Είναι μια διανυσματική συνάρτηση των συντεταγμένων που έχουμε συχνά υποδείξει γράφοντας $\mathbf{E}(x, y, z)$. Η ανάπτυξη

που πρόκειται να κάνουμε μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε διανυσματική συνάρτηση και όχι μόνο στο ηλεκτρικό πεδίο. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $F(x, y, z)$ ως υπενθύμιση αυτού του θέματος. Με άλλα λόγια, για κάποιο διάστημα θα μιλήσουμε για μαθηματικά και όχι για φυσική και θα εκλάβουμε την F απλώς ως μια γενική διανυσματική συνάρτηση. Θα μείνουμε όμως στις τρεις διαστάσεις.

Θεωρήστε έναν πεπερασμένο όγκο V κάποιου σχήματος, την επιφάνεια του οποίου θα συμβολίσουμε με S . Έχουμε ήδη εξοικειωθεί με την έννοια της ολικής ροής Φ , που διαπερνάει την S . Είναι η τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος που εκτείνεται σε ολόκληρη την S .

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (29)$$

Στο ολοκλήρωμα το $d\mathbf{a}$ παριστάνει το απειροστό διάνυσμα, το μέτρο του οποίου είναι το εμβαδόν ενός μικρού στοιχείου της S και η κατεύθυνση του οποίου συμπίπτει με την προς τα έξω κάθετο σε αυτό το μικρό στοιχείο επιφάνειας, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.12α.

Φανταστείτε τώρα ότι διαιρούμε τον όγκο V σε δύο μέρη με μια επιφάνεια ή ένα διάφραγμα D , που κόβει το «μπαλόνι» S , όπως φαίνεται στο Σχ. 2.12β. Αν θεωρήσετε τα δύο μέρη του V , V_1 και V_2 , ως ανεξάρτητους όγκους, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα χωριστά στον καθένα. Η συνοριακή επιφάνεια S_1 του V_1 περιλαμβάνει την D και το ίδιο κάνει και η S_2 . Είναι προφανές ότι το άθροισμα των δύο επιφανειακών ολοκληρωμάτων

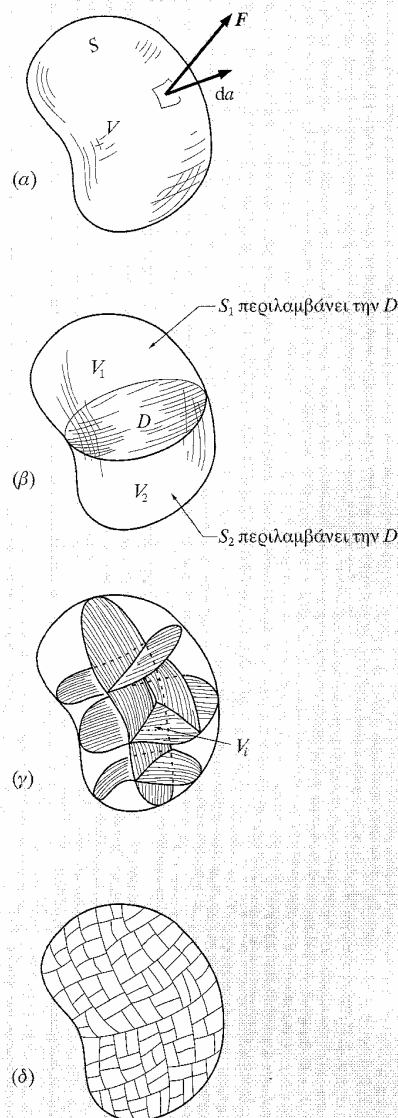
$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (30)$$

θα ισούται με το αρχικό ολοκλήρωμα σε ολόκληρη την επιφάνεια όπως εκφράζεται από την Εξ. 29. Τούτο οφείλεται στο ότι κάθε συγκεκριμένη στοιχειώδης επιφάνεια της D συνεισφέρει μια ποσότητα με ένα πρόσημο στο πρώτο ολοκλήρωμα και την ίδια ποσότητα με αντίθετο πρόσημο στο δεύτερο, αφού η «προς τα έξω» κατεύθυνση στο πρώτο ολοκλήρωμα είναι η «προς τα μέσα» κατεύθυνση στο δεύτερο. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε ροή εξέρχεται από τον V_1 , μέσα από την επιφάνεια D , είναι ροή που εισέρχεται στον V_2 . Η υπόλοιπη επιφάνεια είναι ταυτόσημη με την επιφάνεια ολόκληρου του αρχικού όγκου.

Μπορούμε να συνεχίσουμε την υποδιαίρεση ωστόσο, με αυτήν τη διαδικασία, ο όγκος V χωρίζεται σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό υποδιαίρεσεων, $V_1, \dots, V_i, \dots, V_N$ με επιφάνειες $S_1, \dots, S_i, \dots, S_N$. Ανεξάρτητα από το πόσες υποδιαίρεσεις κάνουμε, είναι βέβαιο ότι:

$$\sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi \quad (31)$$

Αυτό που ζητάμε είναι το εξής: Στο όριο, καθώς το N γίνεται τεράστιο, θέλουμε να προσδιορίσουμε κάτι που είναι χαρακτηριστικό μιας συγκεκριμένης μικρής περιοχής — και, τελικά, της γειτονιάς ενός σημείου. Τώρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα



ΣΧΗΜΑ 2.12

(α) Ο όγκος V που περικλείεται από επιφάνεια S χωρίζεται (β) σε δύο τμήματα που περικλείονται από τις επιφάνειες S_1 και S_2 . Ανεξάρτητα από το πόσες φορές μπορεί να διαιρεθεί ο όγκος, όπως φαίνεται στα (γ) και (δ), το άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων πάνω σ' όλα τα τμήματα θα ισούται με το αρχικό επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην S , για κάθε διανυσματική συνάρτηση F .

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \quad (32)$$

υπολογισμένο σε μία από τις μικρές περιοχές δεν είναι μια τέτοια ποσότητα επειδή, αν ξαναδιαιρέσουμε την περιοχή έτσι ώστε το N να γίνει $2N$, το ολοκλήρωμα διαιρείται σε δύο όρους, καθένας από τους οποίους είναι μικρότερος από πριν, μια και το άθροισμά τους είναι σταθερό. Με άλλα λόγια, καθώς θεωρούμε όλο και μικρότερους όγκους στην ίδια περιοχή, το επιφανειακό ολοκλήρωμα γίνεται βαθμιαία όλο και μικρότερο. Παρατηρούμε όμως ότι, καθώς υποδιαιρούμε, ο όγκος επίσης διαιρείται σε δύο μέρη, το άθροισμα των οποίων είναι το ίδιο με τον αρχικό όγκο. Αυτό μάς δίνει την ιδέα να διερευνήσουμε το λόγο του επιφανειακού ολοκληρώματος προς τον όγκο ενός στοιχείου του υποδιαιρεμένου χώρου:

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \quad (33)$$

Φαίνεται εύλογο ότι για αρκετά μεγάλο N , δηλαδή για αρκετά λεπτομερή διαμοιρασμό, μπορούμε να υποδιπλασιάζουμε τον όγκο, κάθε φορά που υποδιπλασιάζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα, και να βρούμε έτσι ότι, με συνεχή υποδιαίρεση οποιασδήποτε συγκεκριμένης περιοχής, ο λόγος αυτός πλησιάζει ένα όριο. Εάν όντως συμβαίνει αυτό, το συγκεκριμένο όριο είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{F} σε αυτή την περιοχή. Το όριο αυτό ονομάζεται *απόκλιση* του \mathbf{F} και γράφεται $\text{div } \mathbf{F}$. Η τιμή δηλαδή της απόκλισης $\text{div } \mathbf{F}$ σε κάθε σημείο ορίζεται ως:

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \quad (34)$$

όπου V_i είναι ο όγκος που περιβάλλει το σχετικό σημείο και η S_i , στην οποία λαμβάνεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα, είναι η επιφάνεια του V_i . Όλα αυτά ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από τη μέθοδο της υποδιαίρεσης. Προς το παρόν θα υποθέσουμε ότι αυτό αληθεύει.

Η έννοια του $\text{div } \mathbf{F}$ μπορεί να εκφραστεί και με τον ακόλουθο τρόπο: Η $\text{div } \mathbf{F}$ είναι η ροή που εξέρχεται από τον όγκο V_i , ανά μονάδα όγκου, στο όριο απειροστού V_i . Προφανώς είναι μια βαθμωτή ποσότητα. Μπορεί να μεταβάλλεται από θέση σε θέση και η τιμή της σε κάθε συγκεκριμένη θέση (x, y, z) είναι το όριο του λόγου της Εξ. 34, καθώς ο V_i τεμαχίζεται σε όλο και μικρότερα τμήματα περικλείοντας πάντα το σημείο (x, y, z) . Επομένως η $\text{div } \mathbf{F}$ είναι απλώς μια βαθμωτή συνάρτηση των συντεταγμένων.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS

ΚΑΙ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ GAUSS

2.8 Εάν γνωρίζουμε τη βαθμωτή συνάρτηση θέσης $\text{div } \mathbf{F}$, μπορούμε να προχωρήσουμε αντίστροφα και να υπολογίσουμε το επιφανεια-

κό ολοκλήρωμα για ένα μεγάλο όγκο. Γράφουμε πρώτα την Εξ. 31 κατ' αυτό τον τρόπο:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N V_i \left[\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right] \quad (35)$$

Στο όριο $N \rightarrow \infty$, $V_i \rightarrow 0$, ο όρος μέσα στις αγκύλες συγκλίνει προς την απόκλιση της \mathbf{F} και το άθροισμα προς το χωρικό ολοκλήρωμα:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv \quad (36)$$

Η Εξ. 36 ονομάζεται *θεώρημα Gauss ή θεώρημα της απόκλισης*. Ισχύει για κάθε διανυσματικό πεδίο για το οποίο το όριο, όπως ορίζεται από την Εξ. 34, υπάρχει.

Ας δούμε τι συνεπάγεται αυτό για το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} . Ο νόμος του Gauss μάς διαβεβαιώνει ότι

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (37)$$

Εάν το θεώρημα της απόκλισης ισχύει για κάθε διανυσματικό πεδίο, σίγουρα ισχύει και για το \mathbf{E} :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dv \quad (38)$$

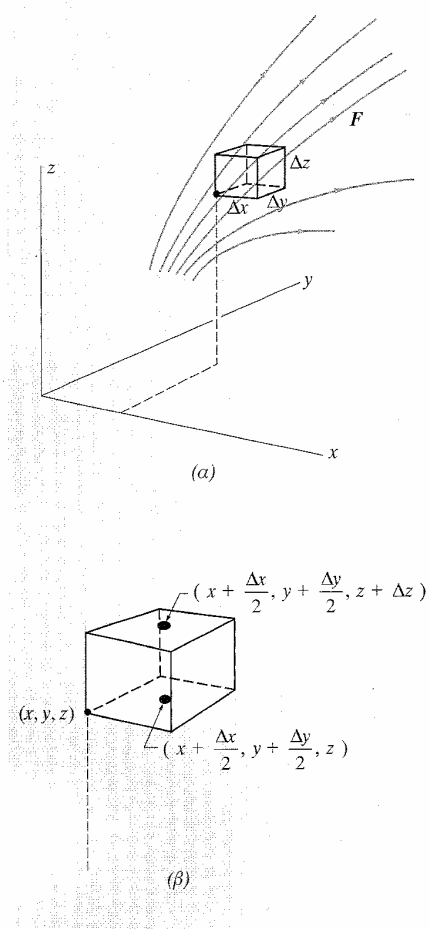
Τόσο η Εξ. 37 όσο και η Εξ. 38 ισχύουν για κάθε όγκο που θα επιλέγαμε — οποιουδήποτε σχήματος, μεγέθους ή θέσης. Συγκρίνοντας τις, βλέπουμε ότι τούτο αληθεύει μόνο όταν σε κάθε σημείο,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (39)$$

Εάν υιοθετήσουμε το θεώρημα της απόκλισης ως τμήμα της μαθηματικής εργαλειοθήκης μας, μπορούμε να θεωρούμε την Εξ. 39 απλώς ως μια εναλλακτική διατύπωση του νόμου Gauss σε διαφορική μορφή, εκπεφρασμένο δηλαδή ως συνάρτηση μιας τοπικής σχέσης ανάμεσα στην πυκνότητα φορτίου και στο ηλεκτρικό πεδίο.

Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

2.9 Μολονότι η Εξ. 34 είναι ο θεμελιώδης ορισμός της απόκλισης, ανεξάρτητα από οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε πώς να υπολογίζουμε την απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης όταν μας δίνεται σε ρητή μορφή. Υποθέστε ότι μια διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} έχει εκφραστεί ως συνάρτηση των συντεταγμένων x , y και z . Τούτο σημαίνει ότι έχουμε τρεις βαθμωτές συναρτήσεις, $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ και $F_z(x, y, z)$. Θα πάρουμε την περιοχή V_i με τη μορφή ενός μικρού ορθογωνίου κουτιού, με τη μία γωνία στο σημείο (x, y, z) και πλευρές Δx , Δy και Δz , όπως φαίνεται



ΣΧΗΜΑ 2.13

Υπολογισμός της ροής μέσα από το κουτί με όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$.

στο Σχ. 2.13α. Το κατά πόσον κάποιο άλλο σχήμα θα δώσει το ίδιο όριο είναι ένα ερώτημα που θα μας απασχολήσει αργότερα.

Θεωρήστε δύο απέναντι πλευρές του κουτιού, λ.χ. την επάνω και την κάτω, που μπορούν να παρασταθούν με τα διανύσματα $\hat{z} \Delta x \Delta y$ και $-\hat{z} \Delta x \Delta y$. Στη ροή μέσα από αυτές τις δύο επιφάνειες υπεισέρχεται μόνο η συνιστώσα z της F , και η συνολική συνεισφορά εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ της F_z στην επάνω πλευρά και της F_z στην κάτω ή, ακριβέστερα, από τη διαφορά μεταξύ της μέσης τιμής της F_z στην επάνω πλευρά και της μέσης τιμής της F_z στην κάτω. Αν εκφράσουμε τις μικρές ποσότητες σε προσέγγιση πρώτης τάξης, η διαφορά αυτή είναι $(\partial F_z / \partial z) \Delta z$. Το Σχ. 2.13β θα βοηθήσει στην ερμηνεία αυτής της προσέγγισης. Η μέση τιμή της F_z στην κάτω πλευρά, εάν θεωρήσουμε μόνο πρώτης τάξης μεταβολές της F_z σε αυτό το μικρό ορθογώνιο, είναι η τιμή της στο κέντρο του ορθογωνίου. Η τιμή αυτή είναι, σε προσέγγιση πρώτης τάξης[†] ως προς Δx και Δy ,

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad (40)$$

Για τη μέση τιμή της F_z στην επάνω πλευρά παίρνουμε την τιμή στο κέντρο της επάνω πλευράς, η οποία, σε πρώτη προσέγγιση ως προς μικρές μετατοπίσεις, είναι

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (41)$$

Η καθαρή ροή που εξέρχεται από το κουτί μέσα από τις δύο αυτές επιφάνειες, καθμία από τις οποίες έχει εμβαδόν $\Delta x \Delta y$, είναι επομένως,

$$\underbrace{\Delta x \Delta y \left[F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]}_{\text{(ροή εξερχόμενη από την πάνω πλευρά)}} - \underbrace{\Delta x \Delta y \left[F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \right]}_{\text{(ροή εισερχόμενη στην κάτω πλευρά)}} \quad (42)$$

η οποία ανάγεται στη $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial F_z / \partial z)$. Προφανώς παρόμοια ανάλυση ισχύει και για τις άλλες πλευρές. Δηλαδή η καθαρή εξερχόμενη ροή από το κουτί μέσα από τις πλευρές τις παράλληλες στο

[†] Αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από την αρχή του αναπτύγματος κατά Taylor της βαθμωτής συνάρτησης F_z στη γειτονιά του σημείου (x, y, z) . Δηλαδή,

$$F_z(x+a, y+b, z+c) = F_z(x, y, z) + \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) F_z + \dots + \left(\frac{1}{n!} \right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^n F_z + \dots$$

Όλες οι παραγωγίσεις πρέπει να υπολογιστούν στο σημείο (x, y, z) . Στη συγκεκριμένη περίπτωση, $a = \Delta x/2$, $b = \Delta y/2$, $c = 0$, και αμελούμε στο ανάπτυγμα όρους μεγαλύτερης τάξης.

επίπεδο yz είναι $\Delta y \Delta z \Delta x (\partial F_x / \partial x)$. Σημειώστε ότι το γινόμενο $\Delta x \Delta y \Delta z$ εμφανίζεται και εδώ. Επομένως, η ολική εξερχόμενη ροή από το μικρό κουτί είναι:

$$\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \quad (43)$$

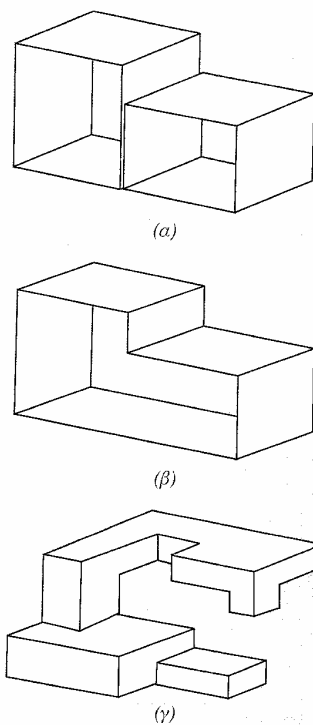
Ο όγκος του κουτιού είναι $\Delta x \Delta y \Delta z$ και συνεπώς ο λόγος της ροής προς τον όγκο είναι $\partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z$ και, εφόσον η έκφραση αυτή δεν περιέχει τις διαστάσεις του κουτιού, παραμένει ως το όριο καθώς το κουτί συρρικνώνεται. [Ακόμα και αν είχαμε κρατήσει όρους ανάλογους του $(\Delta x)^2$, $(\Delta x \Delta y)$, κ.λπ., στον υπολογισμό της ροής, οι όροι αυτοί θα είχαν φυσικά απαλειφθεί καθώς θα πηγαίναμε στο όριο.]

Μπορούμε τώρα να αρχίσουμε να καταλαβαίνουμε γιατί αυτό το όριο θα καταλήξει να είναι ανεξάρτητο από το σχήμα του κουτιού. Προφανώς είναι ανεξάρτητο από τις αναλογίες του ορθογώνιου κουτιού, αυτό όμως δεν μας λέει πολλά. Είναι εύκολο να δούμε ότι θα έχει την ίδια τιμή για οποιονδήποτε όγκο που θα κατασκευάζαμε συνενώνοντας μικρά ορθογώνια κουτιά οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος. Θεωρήστε τα δύο κουτιά του Σχ. 2.14. Το άθροισμα της ροής Φ_1 που εξέρχεται από το κουτί 1 και της Φ_2 που εξέρχεται από το κουτί 2 δεν αλλάζει, αν απομακρύνουμε τις εφαιπόμενες πλευρές ώστε να σχηματιστεί ένα κουτί, αφού οποιαδήποτε ροή πέρασε από το ένα επίπεδο ήταν αρνητική για το ένα κουτί και θετική για το άλλο. Θα μπορούσαμε έτσι να έχουμε ένα παράξενο σχήμα όπως αυτό του Σχ. 2.14γ χωρίς να επηρεάζεται το αποτέλεσμα. Αφήνουμε τον αναγνώστη να γενικεύσει περαιτέρω. Μπορείτε να αντιμετωπίσετε τις κεκλιμένες επιφάνειες, εάν πρώτα αποδείξετε ότι το διανυσματικό άθροισμα των τεσσάρων επιφανειακών εμβαδών του τετραέδρου του Σχ. 2.15 είναι μηδέν.

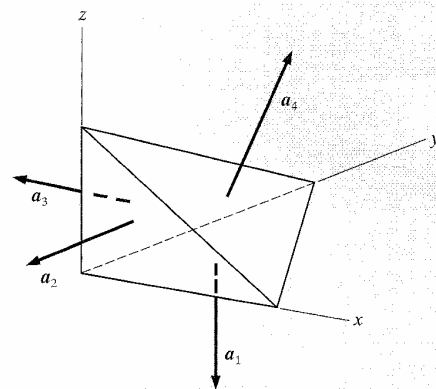
Συμπεραίνουμε ότι, αν υποθέσουμε απλώς και μόνο ότι οι συναρτήσεις F_x , F_y , και F_z είναι διαφορίσιμες, το ζητούμενο όριο, που σύμφωνα με τον ορισμό της απόκλισης δεν είναι τίποτε άλλο από την απόκλιση του F , υπάρχει και δίνεται από τη σχέση

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (44)$$

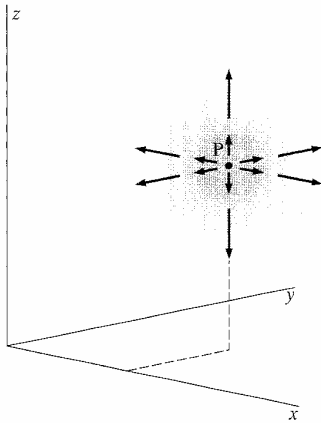
Εάν η τιμή του $\text{div } \mathbf{F}$ είναι θετική σε κάποιο σημείο, βρισκόμαστε –θεωρώντας την \mathbf{F} ως πεδίο ταχύτητας– μια καθαρή «εκροή» σε εκείνη τη γειτονιά. Για παράδειγμα, αν και οι τρεις μερικές παραγωγοί της Εξ. 44 είναι θετικές σε κάποιο σημείο P, θα μπορούσε να υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο σ' εκείνη τη γειτονιά που να μοιάζει με αυτό που υποδεικνύεται στο Σχ. 2.16. Όμως το πεδίο θα μπορούσε να είχε εντελώς διαφορετική μορφή και να εξακολουθούσε να έχει θετική απόκλιση, αφού θα μπορούσαμε να υπερθέσουμε σε αυτό οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{G} για την οποία θα ίσχυε $\text{div } \mathbf{G} = 0$. Επομένως θα μπορούσε η μία ή και οι δύο από τις τρεις μερικές παραγωγούς να ήταν αρνητικές και να εξακολουθού-



ΣΧΗΜΑ 2.14
Το όριο του πλόγου ροής/όγκο είναι ανεξάρτητο από το σχήμα του κουτιού.

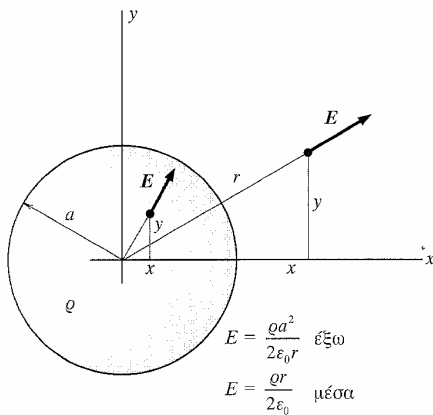


ΣΧΗΜΑ 2.15
Μπορείτε να αποδείξετε ότι $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.



ΣΧΗΜΑ 2.16

Εικονίζεται ένα πεδίο που στη γειτονιά του σημείου P έχει μη μηδενική απόκλιση.



ΣΧΗΜΑ 2.17

Το πεδίο μέσα και έξω από ομοιόμορφη κυλινδρική κατανομή φορτίου.

σε να ισχύει $\text{div } \mathbf{F} = 0$. Η απόκλιση είναι ποσότητα που εκφράζει μία μόνο όψη της χωρικής μεταβολής ενός διανυσματικού πεδίου.

Ας εφαρμόσουμε τα πιο πάνω σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο που είναι μάλλον εύκολο να φανταστούμε. Θεωρήστε έναν απείρου μήκους κυκλικό κύλινδρο ακτίνας a γεμισμένο με θετικό φορτίο πυκνότητας ρ . Έξω από τον κύλινδρο το ηλεκτρικό πεδίο είναι το ίδιο με το πεδίο ενός γραμμικού φορτίου τοποθετημένου στον άξονα. Το πεδίο είναι ακτινικό με μέτρο ανάλογο του $1/r$. Βρίσκουμε το πεδίο στο εσωτερικό εφαρμόζοντας το νόμο Gauss σε κύλινδρο ακτίνας $r < a$. Μπορείτε να το κάνετε και μόνοι σας ως ένα εύκολο πρόβλημα. Θα βρείτε ότι το πεδίο στο εσωτερικό είναι ανάλογο του r , και φυσικά είναι επίσης ακτινικό. Οι ακριβείς τιμές είναι:

$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \quad \text{για } r > a \quad (45)$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad \text{για } r < a$$

Στο Σχ. 2.17 φαίνεται μια τομή εγκάρσια στον άξονα του κυλίνδρου. Μολονότι οι ορθογώνιες συντεταγμένες δεν είναι η φυσικότερη επιλογή σε αυτό το πρόβλημα, θα τις χρησιμοποιήσουμε για να εξασκηθούμε κάπως με την Εξ. 44. Με $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, οι συνιστώσες του πεδίου εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} E_x &= \left(\frac{x}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 x}{2\epsilon_0 (x^2 + y^2)} & \text{για } r > a \\ &= \frac{\rho x}{2\epsilon_0} & \text{για } r < a \\ E_y &= \left(\frac{y}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 y}{2\epsilon_0 (x^2 + y^2)} & \text{για } r > a \\ &= \frac{\rho y}{2\epsilon_0} & \text{για } r < a \end{aligned} \quad (46)$$

Το E_z είναι φυσικά μηδέν.

Έξω από τον κύλινδρο φορτίου η τιμή του $\text{div } \mathbf{E}$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Μέσα στον κύλινδρο η τιμή του $\text{div } \mathbf{E}$ είναι

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (1 + 1) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (48)$$

Και τα δύο αποτελέσματα ήταν αναμενόμενα. Έξω από τον κύλινδρο δεν υπάρχει φορτίο, η εξερχόμενη από οποιονδήποτε όγκο ροή – μικρή ή μεγάλη – είναι μηδεν, επομένως το όριο ροή/όγκο είναι ασφαλώς μηδέν. Στο εσωτερικό του κυλίνδρου παίρνουμε το αποτέλεσμα που απαιτείται από τη θεμελιώδη σχέση, Εξ. 39.

Η ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ

2.10 Προς το παρόν έχουμε βρει δύο βαθμωτές συναρτήσεις που σχετίζονται με το ηλεκτρικό πεδίο, τη συνάρτηση δυναμικού ϕ και την απόκλιση $\text{div } \mathbf{E}$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες οι σχέσεις αυτές εκφράζονται ως:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi = -\left(\hat{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \quad (49)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (50)$$

Η Εξ. 49 δηλώνει ότι η συνιστώσα x του \mathbf{E} είναι $E_x = -\partial\phi/\partial x$. Αντικαθιστώντας αυτήν μαζί με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τα E_y και E_z στην Εξ. 50 παίρνουμε μια σχέση μεταξύ των $\text{div } \mathbf{E}$ και ϕ :

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div grad } \phi = -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) \quad (51)$$

Την πράξη που εκτελείται στο ϕ και υποδηλώνεται από την Εξ. 51, εκτός από το αρνητικό πρόσημο, μπορούμε να την ονομάσουμε «απόκλιση βαθμίδας» ή να πούμε «λαμβάνουμε την απόκλιση της βαθμίδας του (της)...». Το σύμβολο που χρησιμοποιείται για να παραστήσει αυτή την πράξη είναι το ∇^2 και ονομάζεται *Λαπλασιανός τελεστής* ή απλώς *Λαπλασιανή*. Η έκφραση

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

είναι η συνταγή για τη Λαπλασιανή σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ο συμβολισμός ∇^2 ερμηνεύεται ως εξής: Ο τελεστής της βαθμίδας συμβολίζεται με ∇ και ονομάζεται «ανάδελτα». Αναπτύσσοντας τον σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (52)$$

Εάν χειριστούμε το ανάπτυγμα ως διάνυσμα, το τετράγωνό του θα είναι

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (53)$$

που συμπίπτει με τη Λαπλασιανή σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Η Λαπλασιανή ονομάζεται συχνά «ανάδελτα (στο) τετράγωνο», και λέμε «ανάδελτα τετράγωνο του ϕ » εννοώντας «απόκλιση της βαθμ-

μίδας (“div grad”) του ϕ ». *Προσοχή*: Σε άλλα συστήματα συντεταγμένων, λ.χ. σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, οι αναπτυγμένες μορφές του τελεστή της βαθμίδας και του Λαπλασιανού τελεστή δεν συνδέονται με τόσο απλή μορφή. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι ο θεμελιώδης ορισμός του Λαπλασιανού τελεστή είναι «απόκλιση της βαθμίδας του (της)».

Συγκρίνοντας τώρα την Εξ. 50, που δίνει την απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, με την Εξ. 52, που δίνει το ανάπτυγμα του ανάδελτα σε καρτεσιανές συντεταγμένες, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το $\text{div } \mathbf{E}$ δεν είναι τίποτε άλλο από το εσωτερικό γινόμενο του «διανύσματος» ανάδελτα επί τη διανυσματική συνάρτηση \mathbf{E} , δηλαδή $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Πράγματι, αν ακολουθήσουμε τους κανόνες για το σχηματισμό του εσωτερικού γινομένου $\nabla \cdot \mathbf{E}$, παίρνουμε αυτομάτως τη συνάρτηση $\text{div } \mathbf{E}$. Έτσι $\text{div } \mathbf{E}$ και $\nabla \cdot \mathbf{E}$ σημαίνουν το ίδιο πράγμα, μπορούμε επομένως να συμβολίζουμε την απόκλιση με το $\nabla \cdot \mathbf{E}$ αντί του $\text{div } \mathbf{E}$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε αμέσως μια *τοπική* σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα φορτίου σε κάποιο σημείο και τη συνάρτηση δυναμικού στην άμεση γειτονιά του σημείου. Από τη διαφορική μορφή του νόμου Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, έχουμε:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (54)$$

Η Εξ. 54, που συνήθως ονομάζεται *εξίσωση Poisson*, συσχετίζει την πυκνότητα φορτίου με τη δεύτερη παράγωγο του δυναμικού. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (55)$$

Η Εξ. 55 μπορεί να θεωρηθεί ως η διαφορική μορφή της σχέσης που εκφράζεται από το ολοκλήρωμα στην Εξ. 15 και υποδεικνύει πώς να βρούμε το δυναμικό σε ένα σημείο αθροίζοντας τις συνεισφορές όλων των πηγών, τόνων των εγγύς όσο και των απομακρυσμένων.[†]

ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE

2.11 Οπουδήποτε $\rho = 0$, σε όλα δηλαδή τα σημεία του που δεν περιέχουν ηλεκτρικό φορτίο, το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ οφείλει να ικανοποιεί την εξίσωση

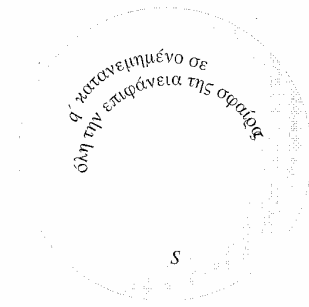
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (56)$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται *εξίσωση Laplace*. Τη συναντούμε σε πολλούς κλάδους της φυσικής. Μπορούμε πράγματι να πούμε ότι, από μαθηματικής σκοπιάς, η θεωρία των κλασικών πεδίων είναι ως

[†] Μπορεί πράγματι να αποδειχθεί ότι η Εξ. 55 είναι το *μαθηματικό* ισοδύναμο της Εξ. 15. Τούτο σημαίνει ότι, αν εφαρμόσετε τον Λαπλασιανό τελεστή στο ολοκλήρωμα της Εξ. 15, θα καταλήξετε στο αποτέλεσμα $-\rho/\epsilon_0$. Όμως δεν θα το αποδείξουμε εδώ. Θα πρέπει είτε να μας πιστέψετε, είτε να βρείτε τον τρόπο να το αποδείξετε μόνοι σας.

επί το πλείστον μελέτη των λύσεων αυτής της εξίσωσης. Οι συναρτήσεις που ανήκουν στην κατηγορία αυτών που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις*. Έχουν ορισμένες αξιοθαύμαστες ιδιότητες, μία από τις οποίες είναι η εξής: *Εάν η $\phi(x, y, z)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, τότε η μέση τιμή της ϕ πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια οποιασδήποτε σφαίρας (όχι αναγκαστικά μικρής σφαίρας) ισούται με την τιμή του ϕ στο κέντρο της σφαίρας*. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι τούτο ευσταθεί στην περίπτωση του ηλεκτρικού δυναμικού ϕ σε περιοχές που δεν περιέχουν φορτίο. Θεωρήστε ένα σημειακό φορτίο q και μια σφαιρική επιφάνεια S πάνω στην οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο q' . Θεωρήστε επίσης ότι φέρνουμε το φορτίο q από το άπειρο σε σημείο που απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση R μεγαλύτερη από την ακτίνα, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.18. Μια και το ηλεκτρικό πεδίο της σφαίρας είναι το ίδιο με το πεδίο που θα οφειλόταν στο q' , αν αυτό ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο, το έργο που απαιτείται είναι $qq'/4\pi\epsilon_0 R$. Υποθέστε τώρα ότι, αντιθέτως, το σημειακό φορτίο q τοποθετείται πρώτο και το φορτίο q' μεταφέρεται αργότερα από το άπειρο και κατανέμεται στην επιφάνεια της σφαίρας. Το έργο που απαιτείται γι' αυτό είναι το γινόμενο του q' επί τη μέση τιμή, πάνω στην επιφάνεια S της σφαίρας, του δυναμικού που οφείλεται στο σημειακό φορτίο q . Τώρα είναι σίγουρο ότι το έργο είναι το ίδιο και στη δεύτερη αυτή περίπτωση, ίσο δηλαδή με $qq'/4\pi\epsilon_0 R$, οπότε η μέση τιμή πάνω στη σφαίρα του δυναμικού που οφείλεται στο q πρέπει να ισούται με $q/4\pi\epsilon_0 R$. Αυτό είναι πράγματι το δυναμικό στο κέντρο της σφαίρας που οφείλεται στο εξωτερικό σημειακό φορτίο q . Τούτο αποδεικνύει τον αρχικό ισχυρισμό μας για οποιοδήποτε μοναχικό σημειακό φορτίο που βρίσκεται έξω από τη σφαίρα. Όμως το δυναμικό πολλών φορτίων ισούται απλώς με το άθροισμα των δυναμικών που οφείλονται σε μοναχικά φορτία και η μέση τιμή του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των μέσων τιμών. Έπεται ότι ο ισχυρισμός μας πρέπει να αληθεύει για οποιοδήποτε σύστημα πηγών που βρίσκονται εξολοκλήρου έξω από τη σφαίρα S .

Αυτή η ιδιότητα του δυναμικού, ότι δηλαδή η μέση τιμή του πάνω σε μια κοίλη σφαίρα ισούται με την τιμή του στο κέντρο, συνδέεται στενά με ένα γεγονός που ίσως βρείτε απογοητευτικό: δεν μπορείτε να συνθέσετε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο που να μπορεί να διατηρεί ένα φορτισμένο σωματίδιο σε *ευσταθή* ισορροπία στον κενό χώρο. Αυτό το συγκεκριμένο «θεώρημα του ανέφικτου», όπως και άλλα στη φυσική, είναι χρήσιμο γιατί μας απαλλάσσει από άκαρπες εικασίες και προσπάθειες. Ας δούμε γιατί αληθεύει. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο στο οποίο, αντίθετα με το θεώρημα, *υπάρχει* ένα σημείο P στο οποίο ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο θα μπορούσε να βρίσκεται σε *ευσταθή* ισορροπία. Τούτο σημαίνει ότι *οποιαδήποτε* μικρή μετατόπιση του σωματιδίου από το P θα πρέπει να το φέρει σε μια θέση στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο δρα με τρόπο τέτοιο, ώστε να το επαναφέρει στο P . Αυτό όμως σημαίνει ότι στην επιφάνεια μιας μικρής σφαίρας γύρω από το P το E έχει παντού φορά προς το εσωτερικό. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το



ΣΧΗΜΑ 2.18

Το έργο που απαιτείται για τη συλλογή του φορτίου και την κατανομή του πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας είναι το γινόμενο q' επί τη μέση τιμή, πάνω στη σφαίρα, του δυναμικού ϕ που οφείλεται στο q .

νόμο Gauss, αφού δεν υπάρχει καμιά πηγή αρνητικού φορτίου σ' αυτή την περιοχή. (Το φορτισμένο δοκιμαστικό φορτίο δεν υπολογίζεται· εξάλλου, είναι θετικό.) Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να έχετε έναν κενό χώρο όπου το ηλεκτρικό πεδίο να κατευθύνεται όλο προς τα μέσα ή όλο προς τα έξω, και ακριβώς αυτό θα σας χρειαζόταν για να έχετε *ευσταθή* ισορροπία. Για να εκφράσουμε το ίδιο γεγονός ως συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού, η ευσταθής θέση ενός φορτισμένου σωματιδίου πρέπει να είναι εκείνη όπου το δυναμικό ϕ είναι είτε μικρότερο από το δυναμικό σε όλα τα γειτονικά σημεία (αν το σωματίδιο είναι θετικά φορτισμένο) είτε μεγαλύτερο από το δυναμικό σε όλα τα γειτονικά σημεία (αν το σωματίδιο είναι αρνητικά φορτισμένο). Είναι φανερό ότι καμία από τις δύο περιπτώσεις δεν είναι δυνατή για κάποια συνάρτηση, η μέση τιμή της οποίας στην επιφάνεια μιας σφαίρας είναι πάντοτε ίση με την τιμή της στο κέντρο.

Μπορεί, φυσικά, ένα φορτισμένο σωματίδιο να βρίσκεται σε κατάσταση *ισορροπίας* σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, με την έννοια ότι η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μηδέν. Το σημείο όπου $E = 0$ στο Σχ. 1.10 αποτελεί μια τέτοια θέση. Η θέση στο μέσον της απόστασης μεταξύ δύο ίσων θετικών φορτίων είναι θέση ισορροπίας ενός τρίτου φορτίου, είτε θετικού είτε αρνητικού. Η ισορροπία όμως δεν είναι *ευσταθής*. (Αναλογιστείτε τι συμβαίνει όταν το τρίτο φορτίο απομακρύνεται ελάχιστα από τη θέση ισορροπίας του.) Παρεμπιπτόντως, *είναι* δυνατόν να παγιδευτεί και να παραμείνει σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο σε ηλεκτρικά πεδία που μεταβάλλονται με το χρόνο.

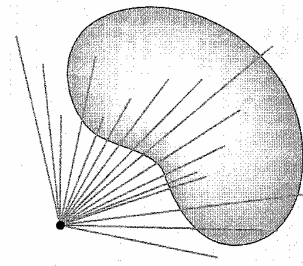
ΔΙΑΚΡΙΝΟΝΤΑΣ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

2.12 Στις αμέσως προηγούμενες σελίδες ασχοληθήκαμε με μαθηματικές σχέσεις και νέες μεθόδους για την έκφραση γνωστών γεγονότων. Αυτό θα μας βοηθήσει να διαχωρίσουμε τη φυσική από τα μαθηματικά και το νόμο από τον ορισμό, αν προσπαθήσουμε να φανταστούμε πώς θα ήταν τα πράγματα, αν η ηλεκτρική δύναμη δεν ακολουθούσε ακριβώς τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου, αλλά ήταν αντίθετα μια δύναμη πεπερασμένης εμβέλειας, λ.χ. μια δύναμη που μεταβαλλόταν με το νόμο:

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2} \quad (57)$$

Τότε, ο νόμος Gauss σε μορφή ολοκληρώματος όπως εκφράζεται από την Εξ. 37 σίγουρα θα κατέρρεε αφού, αν παίρναμε μια πολύ μεγάλη επιφάνεια που περιέκλειε κάποιες πηγές, θα βρίσκαμε ένα απειροστά μικρό πεδίο στην επιφάνεια. Η ροή θα μηδενιζόταν αντί να παραμένει σταθερή, καθώς η επιφάνεια θα εκτεινόταν. Μολαταύτα, θα μπορούσαμε και πάλι να ορίσουμε ένα πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την απόκλιση αυτού του πεδίου και η Εξ. 38, που περιγράφει μια μαθηματική ιδι-

ότητα *οποιοδήποτε* διανυσματικού πεδίου, θα εξακολουθούσε να ισχύει. Υπάρχει κάποια αντίφαση εδώ; Όχι, επειδή και η Εξ. 39 θα κατέρχε επίσης. Η απόκλιση του πεδίου δεν θα ήταν η ίδια με την πυκνότητα της πηγής. Μπορούμε να το κατανοήσουμε αυτό, παρατηρώντας ότι ένας μικρός όγκος κενός φορτίων θα περιείχε μια μη μηδενική ροή, που θα οφειλόταν σε πηγές *έξω* από τον όγκο, εάν το πεδίο είχε πεπερασμένη εμβέλεια. Όπως υποδεικνύεται στο Σχ. 2.19, περισσότερη ροή θα εισέρχεται από την επιφάνεια που είναι προς την πλευρά της πηγής παρά θα εξερχόταν από τον όγκο.



ΣΧΗΜΑ 2.19

Σε πεδίο μη αντιστρόφου τετραγώνου, η ροή μέσα από κλειστή επιφάνεια δεν είναι μηδέν.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι οι Εξ. 37 και 39 εκφράζουν τον *ίδιο φυσικό νόμο*, δηλαδή το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου, τον οποίο ο Coulomb εδραίωσε με απευθείας μετρήσεις των δυνάμεων που ασκούνται ανάμεσα σε φορτισμένα σώματα, ενώ η Εξ. 38 είναι μια έκφραση ενός *μαθηματικού θεωρήματος* που μας επιτρέπει να μεταφράζουμε τη διατύπωση αυτού του νόμου από διαφορική σε ολοκληρωτική μορφή και αντιστρόφως. Οι σχέσεις που συνδέουν τα E και ϕ συνοψίζονται στο Σχ. 2.20.

Πώς θα μπορούσαμε να δικαιολογήσουμε αυτές τις διαφορικές εξισώσεις ανάμεσα στις πηγές και στα πεδία σ' έναν κόσμο όπου το ηλεκτρικό φορτίο δεν είναι ένα ομοιογενές ζελέ αλλά συγκεντρώνεται σε σωματίδια, για την εσωτερική δομή των οποίων γνωρίζουμε τόσο λίγα; Πράγματι, μια διατύπωση σαν την Εξ. 54, δηλαδή την εξίσωση Poisson, έχει νόημα μόνο σε μακροσκοπική κλίμακα. Η πυκνότητα φορτίου ρ πρέπει να ερμηνευτεί ως μια μέση τιμή σε μια μικρή αλλά πεπερασμένη περιοχή που περιέχει πολλά σωματίδια. Επομένως η συνάρτηση ρ δεν μπορεί να είναι συνεχής σύμφωνα με τον τρόπο που θα προτιμούσαν οι μαθηματικοί. Όταν αφήνουμε την περιοχή V_i να συρρικνωθεί, στην προσπάθειά μας να επιδείξουμε τη διαφορική μορφή του νόμου Gauss, γνωρίζουμε ως φυσικοί ότι δεν πρέπει να την αφήσουμε να συρρικνωθεί πάρα πολύ. Πιθανόν

Ηλεκτρικό πεδίο

E

$$(1.15) \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \hat{r} \, d\tau'$$

$$E = -\nabla\phi \quad (2.15)$$

$$(2.54) \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot E$$

$$\phi = - \int E \cdot ds \quad (2.7)$$

Πυκνότητα φορτίου ρ

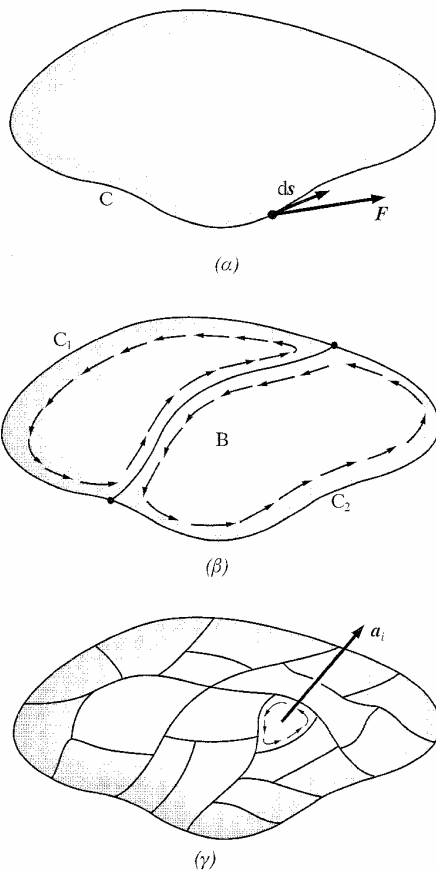
ϕ Ηλεκτρικό δυναμικό

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi \quad (2.69)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} \, d\tau' \quad (2.15)$$

ΣΧΗΜΑ 2.20

Πώς συνδέονται η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, το ηλεκτρικό δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο. Οι σχέσεις των ολοκληρωμάτων περιγράφουν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και το ολοκλήρωμα όγκου. Οι διαφορικές σχέσεις περιγράφουν τη βαθμίδα, την απόκλιση και τον τελεστή Laplace, ∇^2 . Η πυκνότητα φορτίου ρ δίνεται σε C/m^3 , το δυναμικό ϕ σε V , το πεδίο E σε V/m και όλα τα μήκη σε m . $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} C/V \cdot m$.



ΣΧΗΜΑ 2.21

Για τον υποδιαίρεμένο βρόχο, το άθροισμα όλων των κυκλοφοριών Γ_i γύρω από τα τμήματα, ισούται με την κυκλοφορία Γ γύρω από την αρχική καμπύλη C .

αυτό να είναι αδύναμο, αλλά το γεγονός παραμένει ότι τα βγάζουμε πέρα πολύ καλά με το συνεχές μοντέλο σε ηλεκτρικά συστήματα μεγάλης κλίμακας. Στην ατομική κλίμακα έχουμε τα στοιχειώδη σωματίδια και το κενό. Στο εσωτερικό των σωματιδίων, ακόμα κι αν ο νόμος του Coulomb καταλήγει να σημαίνει κάτι, πολλά άλλα πράγματα συμβαίνουν. Το κενό, τουλάχιστον όσον αφορά την ηλεκτροστατική, διέπεται από την εξίσωση Laplace. Παρ' όλα αυτά δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι, ακόμα και στο κενό, το πέρασμα σε ένα όριο μηδενικού μεγέθους έχει φυσικό νόημα.

ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ†

2.13 Αναπτύξουμε την έννοια της απόκλισης, μιας τοπικής ιδιότητας ενός διανυσματικού πεδίου, ξεκινώντας από το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω σε μια μεγάλη κλειστή επιφάνεια. Με το ίδιο πνεύμα ας θεωρήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κάποιου διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x, y, z)$, λαμβανόμενο γύρω από έναν κλειστό δρόμο, δηλαδή κάποια καμπύλη C που γυρίζει πίσω και ενώνεται με την αρχή της. Η καμπύλη C μπορεί νοητά να θεωρηθεί ως το σύνορο στο οποίο τεματίζεται κάποια επιφάνεια S . Ένα κατάλληλο όνομα του μέτρου ενός παρόμοιου επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε κλειστό δρόμο είναι η *κυκλοφορία*: Θα χρησιμοποιήσουμε το γράμμα Γ ως το σύμβολό της:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (58)$$

Στο όρισμα του ολοκληρώματος το $d\mathbf{s}$ είναι το στοιχείο δρόμου, ένα απειροστό διάνυσμα τοπικά εφαπτόμενο στη C (Σχ. 2.21α). Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να διανυθεί η C . Πρέπει να επιλέξουμε έναν από τους δύο, ώστε η φορά του $d\mathbf{s}$ να είναι μονοσήμαντη. Παρεμπιπτόντως, η καμπύλη C δεν χρειάζεται να βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο — μπορεί να είναι όσο στρεβλή θέλετε.

Γεφυρώστε τώρα τη C με ένα νέο δρόμο B , δημιουργώντας έτσι δύο βρόχους, C_1 και C_2 , καθένας από τους οποίους συμπεριλαμβάνει τον B ως ένα τμήμα του (Σχ. 2.21β). Υπολογίστε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε καθέναν από τους δύο βρόχους, κατά την ίδια φορά. Είναι εύκολο να αναγνωρίσετε ότι το άθροισμα των δύο κυκλοφοριών, Γ_1 και Γ_2 , ισούται με την αρχική κυκλοφορία γύρω από τη C : ο λόγος είναι ότι ο B διανύεται κατά αντίθετες κατευθύνσεις στα δύο ολοκληρώματα, με αποτέλεσμα να παραμένουν μόνον οι δύο συνεισφορές που συνθέτουν το αρχικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από τη C . Περαιτέρω υποδιαίρεσεις σε πολλούς βρόχους, $C_1, \dots, C_i, \dots, C_N$, αφήνουν το άθροισμα αμετάβλητο:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{ή} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \quad (59)$$

† Η μελέτη αυτής της παραγράφου και του υπολοίπου του Κεφαλαίου 2 μπορεί να αναβληθεί ώσπου να φτάσουμε στο Κεφάλαιο 6. Ως τότε η μόνη μας εφαρμογή αυτού του διανυσματικού διαφορικού θα είναι η απόδειξη ότι ένα ηλεκτροστατικό πεδίο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα $\text{curl} \mathbf{E} = 0$, όπως εξηγείται στην Παράγραφο 2.16.

Κι εδώ επίσης μπορούμε να συνεχίσουμε να υποδιαιρούμε απειρίστια, προσθέτοντας νέες γέφυρες, προσπαθώντας στο όριο να καταλήξουμε σε μια ποσότητα χαρακτηριστική του πεδίου \mathbf{F} σε μια τοπική γειτονιά. Όταν υποδιαιρούμε τους βρόχους, τους κάνουμε να έχουν μικρότερη κυκλοφορία, αλλά και μικρότερο εμβαδόν. Είναι επομένως φυσικό να θεωρήσουμε το λόγο της κυκλοφορίας του βρόχου προς το εμβαδόν του βρόχου, ακριβώς όπως θεωρήσαμε στην Παράγραφο 2.7 το λόγο της ροής ως προς τον όγκο. Όμως τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά εδώ, επειδή το εμβαδόν a_i της στοιχειώδους επιφάνειας που γεφυρώνει το μικρό βρόχο C_i είναι στην πραγματικότητα διάνυσμα. Η επιφάνεια είναι προσανατολισμένη στο χώρο. Πράγματι, καθώς μικραίνουμε όλο και περισσότερο τους βρόχους σε κάποια γειτονιά, μπορούμε να τακτοποιήσουμε το βρόχο έτσι, ώστε να έχει οποιονδήποτε προσανατολισμό διαλέξουμε. (Θυμηθείτε ότι δεν δεσμευόμαστε να κατασκευάσουμε κάποια συγκεκριμένη επιφάνεια σε ολόκληρη την περιοχή της καμπύλης C .) Μπορούμε επομένως να περάσουμε στο όριο με ουσιαστικά διαφορετικούς τρόπους και πρέπει να περιμένουμε ότι το αποτέλεσμα θα αντικατοπτρίζει αυτό το πράγμα.

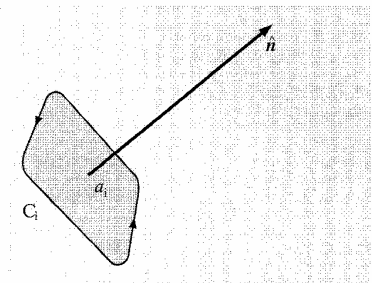
Ας επιλέξουμε κάποιο συγκεκριμένο προσανατολισμό για το στοιχείο της επιφάνειας, καθώς διέρχεται από τα τελευταία στάδια της υποδιαίρεσης. Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} θα υποδεικνύει την κάθετο στο τμήμα της επιφάνειας, το οποίο πρέπει να παραμένει σταθερό καθώς αυτό το τμήμα συρρικνώνεται προς το μηδέν. Το όριο του λόγου κυκλοφορία προς εμβαδόν επιφάνειας θα γράφεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \quad \text{ή} \quad \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \quad (60)$$

Ο κανόνας του προσήμου ακολουθεί τη συνθήκη ότι η φορά του \hat{n} και η φορά κατά την οποία διατρέχεται η C_i στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συνδέονται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.22. Το όριο που παίρνουμε από αυτήν τη διαδικασία είναι μια βαθμωτή ποσότητα που σχετίζεται με το σημείο P του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} και με την κατεύθυνση \hat{n} . Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τρεις κατευθύνσεις, όπως οι \hat{x} , \hat{y} και \hat{z} , και να πάρουμε τρεις διαφορετικούς αριθμούς. Το αποτέλεσμα είναι ότι αυτοί οι αριθμοί μπορούν να εκληφθούν ως οι συνιστώσες ενός διανύσματος. Ονομάζουμε αυτό το διάνυσμα *στροβιλισμό* του \mathbf{F} και το συμβολίζουμε με $\text{curl } \mathbf{F}$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός που παίρνουμε για το όριο, με το \hat{n} σε κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση, είναι η συνιστώσα προς αυτή την κατεύθυνση του διανύσματος $\text{curl } \mathbf{F}$. Αυτό διατυπώνεται με τη μορφή εξίσωσης ως:

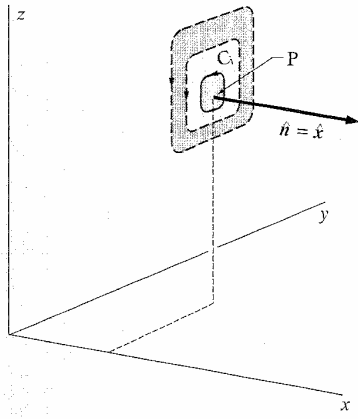
$$(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \quad (61)$$

Για παράδειγμα, παίρνουμε τη συνιστώσα x του $\text{curl } \mathbf{F}$ αν επιλέξουμε $\hat{n} = \hat{x}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.23. Καθώς ο βρόχος συρρι-



ΣΧΗΜΑ 2.22

Σχέση δεξιόστροφου κοχλία μεταξύ της κάθετου στην επιφάνεια και της κατεύθυνσης προς την οποία λαμβάνεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της κυκλοφορίας.



ΣΧΗΜΑ 2.23

Το τμήμα συρρικνώνεται γύρω από το P, διατηρώντας την κάθετο στην επιφάνεια κατά την κατεύθυνση του άξονα x.

κνώνεται γύρω από το σημείο P, τον διατηρούμε στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα x. Εν γένει το διάνυσμα $\text{curl } \mathbf{F}$ θα μεταβάλλεται από θέση σε θέση. Εάν λ.χ. αφήσουμε την επιφάνεια να συρρικνωθεί γύρω από κάποιο άλλο σημείο, ο λόγος της κυκλοφορίας προς το εμβαδόν μπορεί να έχει διαφορετικές τιμές, ανάλογα με τη φύση της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{F} . Το ίδιο δηλαδή το $\text{curl } \mathbf{F}$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση των συντεταγμένων. Η κατεύθυνσή του σε κάθε σημείο του χώρου είναι κάθετη στο διερχόμενο από το σημείο επίπεδο στο οποίο η κυκλοφορία είναι μέγιστη. Το μέτρο του είναι το όριο της τιμής της κυκλοφορίας ανά μονάδα επιφάνειας σε αυτό το επίπεδο, γύρω από το συγκεκριμένο σημείο.

Οι δύο τελευταίες προτάσεις μπορούν να ληφθούν ως ο ορισμός του $\text{curl } \mathbf{F}$. Όπως και στην Εξ. 61, δεν αναφέρονται σε κανένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Δεν έχουμε αποδείξει ότι το αντικείμενο που μόλις ορίσαμε είναι διάνυσμα, απλώς το βεβαιώσαμε. Οι ιδιότητες κατεύθυνσης και μέτρου δεν αρκούν για να ορίσουν ένα αντικείμενο ως διάνυσμα. Οι συνιστώσες του, όπως ορίστηκαν, πρέπει να συμπεριφέρονται ως συνιστώσες διανύσματος. Υποθέστε ότι έχουμε υπολογίσει ορισμένες τιμές για τις συνιστώσες x, y και z του $\text{curl } \mathbf{F}$, εφαρμόζοντας την Εξ. 61 με το \hat{n} επιλεγμένο διαδοχικά ως \hat{x} , \hat{y} και \hat{z} . Αν το $\text{curl } \mathbf{F}$ είναι διάνυσμα, ορίζεται μονοσήμαντα από τις τρεις αυτές συνιστώσες. Αν επιλέξουμε τώρα μια τέταρτη κατεύθυνση για το \hat{n} , το αριστερό σκέλος της Εξ. 61 παραμένει το ίδιο και η ποσότητα στα δεξιά, δηλαδή η κυκλοφορία σε επίπεδο κάθετο στο νέο \hat{n} , θα πρέπει να συμφωνήσει με αυτό. Πράγματι, μέχρι να βεβαιωθεί κανείς ότι το $\text{curl } \mathbf{F}$ είναι διάνυσμα, δεν είναι καν προφανές ότι μπορεί να υπάρχει το πολύ μία κατεύθυνση για την οποία η κυκλοφορία ανά μονάδα επιφάνειας στο σημείο P να είναι μέγιστη —όπως είχε σιωπηρά υποθεθεί στον ορισμό που κάναμε. Στην πραγματικότητα η Εξ. 61 όντως ορίζει ένα διάνυσμα, δεν θα το αποδείξουμε όμως εδώ.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ STOKES

2.14 Από την κυκλοφορία γύρω από ένα απειροστό τμήμα επιφάνειας μπορούμε τώρα να αναστρέψουμε τη διαδικασία και να υπολογίσουμε την κυκλοφορία γύρω από τον αρχικό μεγάλο βρόχο C:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\Gamma_i}{a_i} \right) \quad (62)$$

Στο τελευταίο βήμα απλώς πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε με a_i . Παρατηρήστε τώρα τι συμβαίνει στο δεξί σκέλος καθώς το N γίνεται τεράστιο και όλα τα a_i συρρικνώνονται. Η ποσότητα στην παρένθεση γίνεται $(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{n}_i$ όπου \hat{n}_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο i -οστό τμήμα. Έχουμε έτσι στο δεξί σκέλος το άθροισμα, για όλα τα τμήματα τα οποία συνθέτουν ολόκληρη την επιφάνεια S που περιγράφεται από τη C , του γινομένου «εμβαδόν τμήματος επί την κάθετη συνιστώσα του στροβιλισμού της \mathbf{F} ». Αυτό δεν

είναι άλλο από το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος $\text{curl } \mathbf{F}$ πάνω στην S :

$$\sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\Gamma_i}{a_i} \right) = \sum_{i=1}^N a_i (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \rightarrow \int_S \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot (\text{curl } \mathbf{F}) \quad (63)$$

Βρίσκουμε έτσι ότι

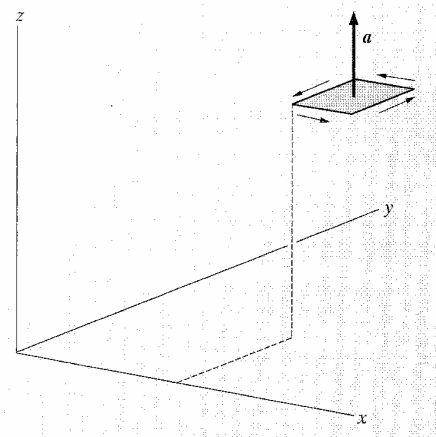
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} \quad (64)$$

Η σχέση που εκφράζεται από την Εξ. 64 είναι ένα μαθηματικό θεώρημα που ονομάζεται *θεώρημα Stokes*. Παρατηρήστε πόσο μοιάζει στη δομή του με το θεώρημα Gauss, το θεώρημα της απόκλισης. Το θεώρημα Stokes συσχετίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανύσματος με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού του διανύσματος. Το θεώρημα Gauss (Εξ. 36) συσχετίζει το επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός διανύσματος με το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης του διανύσματος. Το θεώρημα Stokes έχει να κάνει με μια επιφάνεια και την καμπύλη που την οριοθετεί. Το θεώρημα Gauss έχει να κάνει με έναν όγκο και την επιφάνεια που τον περικλείει.

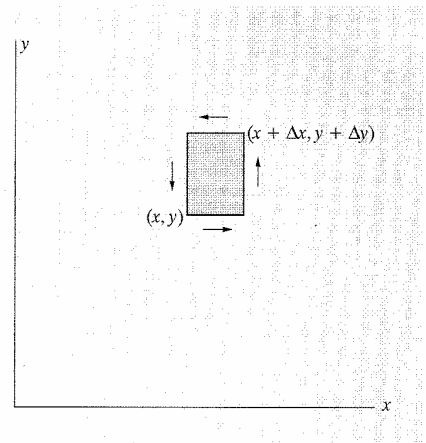
**Ο ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ
ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ**

2.15 Η Εξ. 61 είναι ο θεμελιώδης ορισμός του $\text{curl } \mathbf{F}$, διατυπωμένος χωρίς καμιά αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Από αυτήν τη σκοπιά μοιάζει με τον θεμελιώδη ορισμό της απόκλισης, Εξ. 34. Όπως και σ' εκείνη την περίπτωση, θέλουμε να γνωρίζουμε τον τρόπο υπολογισμού του $\text{curl } \mathbf{F}$ όταν δίνεται ρητά η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x, y, z)$. Για να αποκαλύψουμε τον κανόνα, θα εκτελέσουμε την ολοκλήρωση που απαιτεί η Εξ. 61, αλλά θα το κάνουμε πάνω σ' ένα δρόμο πολύ απλής μορφής, ένα δρόμο που περικλείει ένα ορθογώνιο τμήμα επιφάνειας παράλληλο στο επίπεδο xy (Σχ. 2.24). Παίρνουμε δηλαδή τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Σε συμφωνία με τον κανόνα μας σχετικά με το πρόσημο, η φορά της ολοκλήρωσης γύρω από την περίμετρο πρέπει να είναι κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού όπως φαίνεται από κάποιον που κοιτάζει προς τα πάνω κατά τη φορά του $\hat{\mathbf{n}}$. Στο Σχ. 2.25 κοιτάζουμε από πάνω προς τα κάτω το ορθογώνιο.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{A} γύρω από έναν τέτοιο δρόμο εξαρτάται από τη μεταβολή του A_x ως προς y και τη μεταβολή του A_y ως προς x . Γιατί, αν το A_x είχε την ίδια μέση τιμή κατά μήκος της κορυφής του πλαισίου, Σχ. 2.25, με τη μέση τιμή κατά μήκος της βάσης του πλαισίου, η συνεισφορά αυτών των δύο τμημάτων σε ολόκληρο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα προφανώς θα αναιρούνταν. Παρόμοια παρατήρηση ισχύει και για τα πλευρικά τμήματα. Σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς τις μικρές ποσότητες Δx και Δy , η διαφορά ανάμεσα στη μέση τιμή του A_x στο επάνω τμήμα του δρόμου στη θέση $y + \Delta y$ και στη μέση τιμή στο κάτω τμήμα στη θέση y είναι:



ΣΧΗΜΑ 2.24
Κυκλοφορία γύρω από ορθογώνιο τμήμα με $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$.



ΣΧΗΜΑ 2.25
Κοιτάζοντας από πάνω προς τα κάτω το τμήμα του Σχ. 2.24.

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y \quad (65)$$

Η επιχειρηματολογία μοιάζει με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε σε σχέση με το Σχ. 2.13β.

$$\begin{aligned} A_x &= A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} && \text{(Στο μέσον της βάσης του πλαισίου)} \\ A_x &= A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y} && \text{(Στο μέσον της κορυφής του πλαισίου)} \end{aligned} \quad (66)$$

Αυτές είναι οι μέσες τιμές στις οποίες αναφερθήκαμε, σε προσέγγιση πρώτης τάξης σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor. Το γινόμενο της διαφοράς τους επί το μήκος του τμήματος δρόμου Δx είναι αυτό που καθορίζει την καθαρή συνεισφορά τους στην κυκλοφορία. Η συνεισφορά αυτή ισούται με $-\Delta x \Delta y (\partial A_x / \partial y)$. Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει επειδή ολοκληρώνουμε προς τα αριστερά στην κορυφή έτσι ώστε, εάν το A_x είναι θετικότερο στην κορυφή, να έχει ως αποτέλεσμα μια αρνητική συνεισφορά στην κυκλοφορία. Η συνεισφορά από τις πλευρές είναι $\Delta y \Delta x (\partial A_y / \partial x)$ με θετικό πρόσημο επειδή, αν το A_y είναι πιο θετικό προς τα δεξιά, το αποτέλεσμα είναι μια θετική συνεισφορά στην κυκλοφορία.

Επομένως, αν θεωρήσουμε αμελητέες τις ανώτερες δυνάμεις των Δx και Δy , παίρνουμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από ολόκληρο το ορθογώνιο:

$$\begin{aligned} \int_{\square} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= (-\Delta x) \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y + (\Delta y) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) \Delta x \\ &= \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (67)$$

Το $\Delta x \Delta y$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του εγκλεισμένου ορθογωνίου, την οποία περιγράψαμε με ένα διάνυσμα κατά τη διεύθυνση z . Προφανώς η ποσότητα

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (68)$$

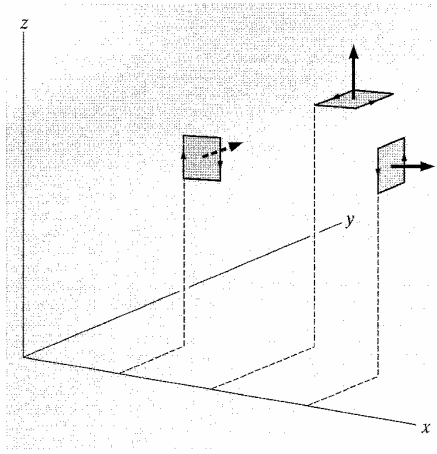
είναι το όριο του λόγου

$$\frac{\text{Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από το τμήμα επιφάνειας}}{\text{Εμβαδόν τμήματος επιφάνειας}} \quad (69)$$

καθώς το τμήμα της επιφάνειας συρρικνώνεται στο μηδέν. Εάν το ορθογώνιο πλαίσιο ήταν προσανατολισμένο κατά τη διεύθυνση του άξονα z , θα είχαμε βρει την έκφραση

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (70)$$

για το όριο του αντίστοιχου λόγου και, αν το πλαίσιο είχε προσανατολιστεί με την κάθετο του κατά τον άξονα x , όπως είναι το πλαίσιο στα δεξιά στο Σχ. 2.26, θα είχαμε πάρει



ΣΧΗΜΑ 2.26

Για κάθε προσανατολισμό, το όριο του λόγου κυκλοφορία/εμβαδόν καθορίζει μια συνιστώσα του $\text{curl } \mathbf{A}$ στο σημείο εκείνο. Για να καθορίσουμε όλες τις συνιστώσες του διανύσματος $\text{curl } \mathbf{A}$ σε οποιοδήποτε σημείο, τα σχήματα θα πρέπει να συσσωρευτούν όλα γύρω από το σημείο εκείνο· εδώ εμφανίζονται ξεχωριστά για λόγους σαφήνειας.

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (71)$$

Μολονότι έχουμε θεωρήσει μόνο ορθογώνια σχήματα, το αποτέλεσμα είναι στην πραγματικότητα ανεξάρτητο από τη μορφή του μικρού τμήματος επιφάνειας και της περιμέτρου του, για τους ίδιους λίγο πολύ λόγους όπως και στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στο θεώρημα της απόκλισης. Για παράδειγμα, είναι προφανές ότι μπορούμε ελεύθερα να συνενώσουμε ορθογώνια τμήματα για να κατασκευάσουμε άλλα σχήματα, επειδή τα επικαμπύλια ολοκληρώματα κατά μήκος των συνόρων μεταξύ δύο τμημάτων αλληλοαναιρούνται ακριβώς (Σχ. 2.27).

Συμπεραίνουμε ότι, για οποιονδήποτε προσανατολισμό, το όριο του πηλίκου της κυκλοφορίας προς το εμβαδόν είναι ανεξάρτητο από το σχήμα του τμήματος που επιλέγουμε. Καταλήγουμε σε μια γενική σχέση για τις συνιστώσες του διανύσματος $\text{curl } \mathbf{F}$, όταν το \mathbf{F} δίνεται ως συνάρτηση των x, y και z :

$$\text{curl } \mathbf{F} = \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (72)$$

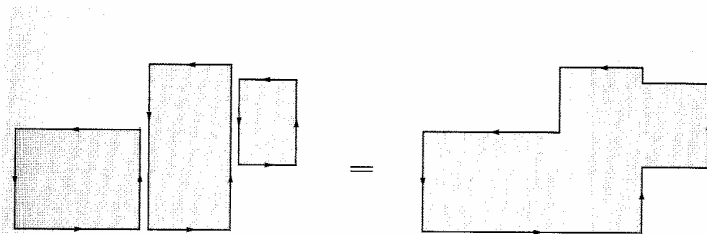
Μπορεί να βρείτε τον επόμενο κανόνα πιο ευκολομημόνευτο από την ίδια τη σχέση: Κατασκευάστε μια οριζουσα όπως είναι η παρακάτω:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (73)$$

Αναπτύξτε τη σύμφωνα με τους κανόνες των οριζουσών και θα έχετε υπολογίσει το στροβιλισμό του \mathbf{F} όπως δίνεται από την Εξ. 72. Σημειώστε ότι η συνιστώσα x του $\text{curl } \mathbf{F}$ εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής του F_z κατά τη διεύθυνση y και τον αρνητικό ρυθμό μεταβολής του F_y κατά τη διεύθυνση z , κ.ο.κ.

Το σύμβολο $\nabla \times$, που διαβάζεται ως «εξωτερικό γινόμενο του ανάδελτα επί», όπου το ∇ ερμηνεύεται ως το «διάνυσμα»:

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (74)$$



ΣΧΗΜΑ 2.27

Η κυκλοφορία στο βρόχο στα δεξιά είναι το άθροισμα των κυκλοφοριών στα ορθογώνια, και το εμβαδόν στα δεξιά είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων επιφανειών. Το διάγραμμα δείχνει γιατί ο λόγος κυκλοφορία/εμβαδόν είναι ανεξάρτητος από το σχήμα.

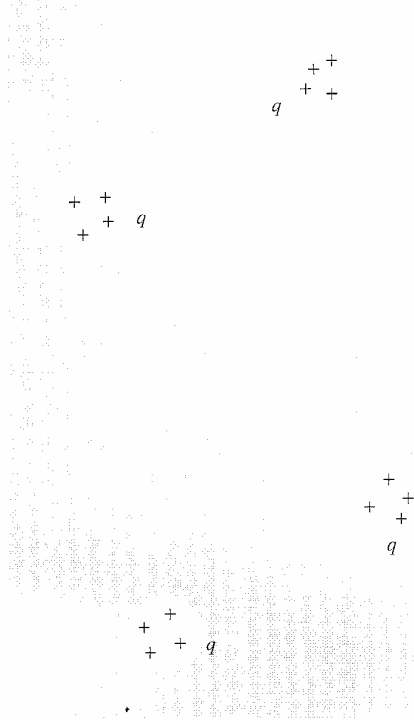
χρησιμοποιείται συχνά αντί του curl. Αν γράψουμε $\nabla \times \mathbf{F}$ και ακολουθήσουμε τους κανόνες για το σχηματισμό του εξωτερικού γινομένου, παίρνουμε αυτομάτως το διάνυσμα $\text{curl } \mathbf{F}$. Έτσι $\text{curl } \mathbf{F}$ και $\nabla \times \mathbf{F}$ σημαίνουν το ίδιο πράγμα.

ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΝΟΗΜΑ ΤΟΥ ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΥ

2.16 Το όνομα *στροβιλισμός* μάς θυμίζει ότι ένα διανυσματικό πεδίο με μη μηδενικό στροβιλισμό έχει την ιδιότητα της περιστροφής ή περιδίνησης. Ο Maxwell χρησιμοποιούσε τον όρο *περιστροφή* και στα γερμανικά ακόμα χρησιμοποιείται ένας παρόμοιος όρος με συντομογραφία *rot*. Φανταστείτε τώρα ένα διανυσματικό πεδίο ταχύτητας \mathbf{G} , και υποθέστε ότι $\nabla \times \mathbf{G} \neq 0$. Τότε οι ταχύτητες σε αυτό το πεδίο έχουν το χαρακτηριστικό που μπορεί να παρασταθεί ως: \square ή \square που μπορεί να υπερτίθενται σε μια γενικότερη μεταφορική κίνηση προς μία κατεύθυνση. Για παράδειγμα, το πεδίο ταχυτήτων του νερού που εκρέει από μια μπανιέρα αποκτάει συνήθως περιστροφική κίνηση. Στο μεγαλύτερο τμήμα της επιφάνειας ο στροβιλισμός του δεν είναι μηδενικός. Ένα αντικείμενο που επιπλέει στην επιφάνεια περιστρέφεται καθώς παρασύρεται από το νερό. Στη φυσική της ροής των ρευστών, της υδροδυναμικής και της αεροδυναμικής, αυτή η έννοια έχει πρωτεύουσα σημασία.

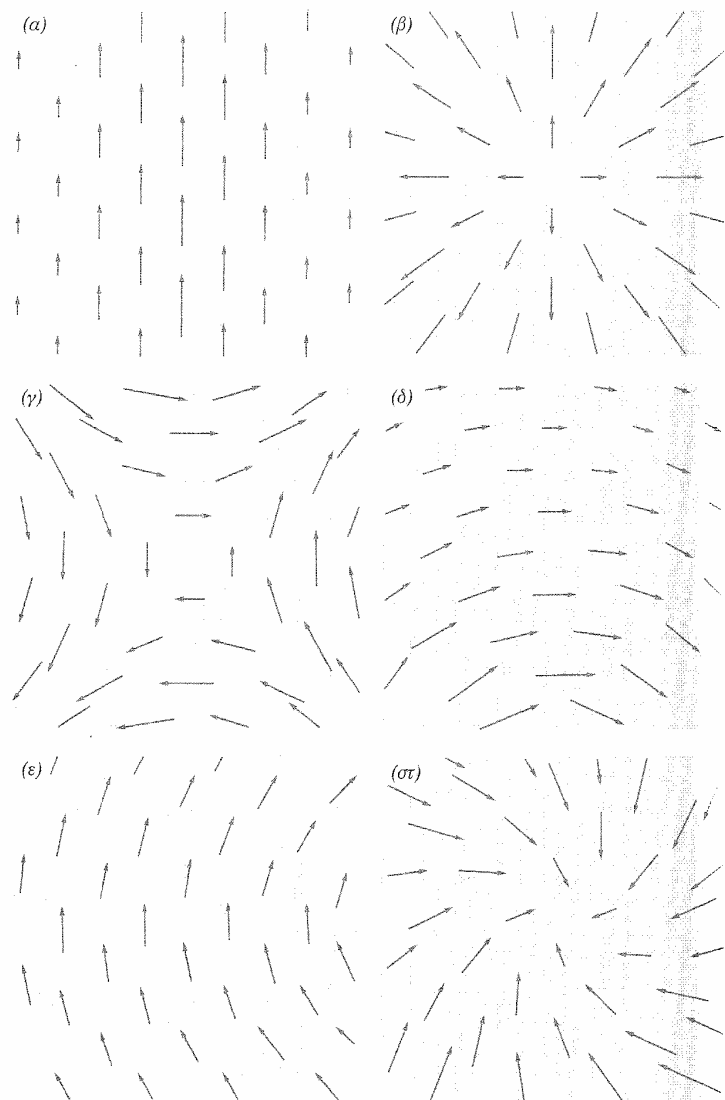
Για να κατασκευάσουμε ένα «στροβιλόμετρο» για ένα ηλεκτρικό πεδίο —στη φαντασία μας τουλάχιστον— θα μπορούσαμε να προσδέσουμε θετικά ηλεκτρικά φορτία στις άκρες των μονωτικών ακτίνων ενός τροχού χωρίς στεφάνη, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.28. Αν διερευνούσαμε ένα ηλεκτρικό πεδίο με αυτήν τη συσκευή, θα βρίσκαμε, σε κάθε θέση όπου το $\text{curl } \mathbf{E}$ δεν είναι μηδέν, ότι ο τροχός έχει την τάση να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα. Χρησιμοποιώντας ένα ελατήριο που αντιτίθεται στην περιστροφή, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το πλάτος της στρέψης του για να μετρήσουμε τη ροπή, η οποία θα ήταν ανάλογη της συνιστώσας του διανύσματος $\text{curl } \mathbf{E}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα. Εάν μπορούσαμε να βρούμε τη διεύθυνση του άξονα κατά την οποία η ροπή είναι μέγιστη και δεξιόστροφη, αυτή θα είναι η κατεύθυνση του $\text{curl } \mathbf{E}$. (Φυσικά δεν μπορούμε να εμπιστευτούμε το στροβιλόμετρο σε ένα πεδίο, οι τιμές του οποίου έχουν μεγάλες διακυμάνσεις στο χώρο του ίδιου του τροχού.)

Μετά από όλα αυτά, τι μπορούμε να πούμε για το *ηλεκτροστατικό πεδίο* \mathbf{E} ; Το συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι απλό: Η ένδειξη του στροβιλόμετρου θα είναι πάντα μηδενική! Αυτό προκύπτει από το γεγονός που ήδη έχουμε μάθει, ότι δηλαδή στο ηλεκτροστατικό πεδίο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{E} γύρω από *οποιοδήποτε* κλειστό δρόμο είναι μηδέν. Για να δούμε γιατί συμβαίνει αυτό, ας θυμηθούμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{E} μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, όπως τα P_1 και P_2 του Σχ. 2.29, είναι ανεξάρτητο από το δρόμο. Καθώς φέρνουμε το σημείο P_1 κοντά στο P_2 , το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο συντομότερο δρόμο του σχήματος προφανώς μηδενίζεται —εκτός εάν η τελική



ΣΧΗΜΑ 2.28
Το στροβιλόμετρο.

Θα μπορέσετε να πάρετε κάποια γεύση των ιδιοτήτων των διανυσματικών συναρτήσεων μελετώντας τα δισδιάστατα πεδία που εικονίζονται στο Σχ. 2.30. Σε τέσσερα από αυτά τα πεδία η απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης είναι μηδέν σε όλη την εικονιζόμενη περιοχή. Προσπαθήστε να αναγνωρίσετε και τις τέσσερις. Η απόκλιση υποδηλώνει την ύπαρξη καθαρής ροής προς ή από το εσωτερικό μιας περιοχής. Σε ορισμένες δομές εντοπίζεται εύκολα. Σε άλλες θα μπορέσετε αμέσως να διαπιστώσετε ότι η απόκλιση είναι μηδέν. Σε τρία από τα πεδία ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης είναι μηδέν σε ολόκληρο το τμήμα του πεδίου που εικονίζεται. Προσπαθήστε να αναγνωρίσετε αυτά τα τρία κρίνοντας αν το γραμμικό ολοκλήρωμα γύρω από κάποιο βρόχο θα μπορούσε ή όχι να είναι μηδέν για καθένα από τα σχήματα. Αυτή είναι η ουσία του *στροβιλισμού*. Αφού μελετήσετε τα σχήματα, ξανασκεφτείτε προσε-



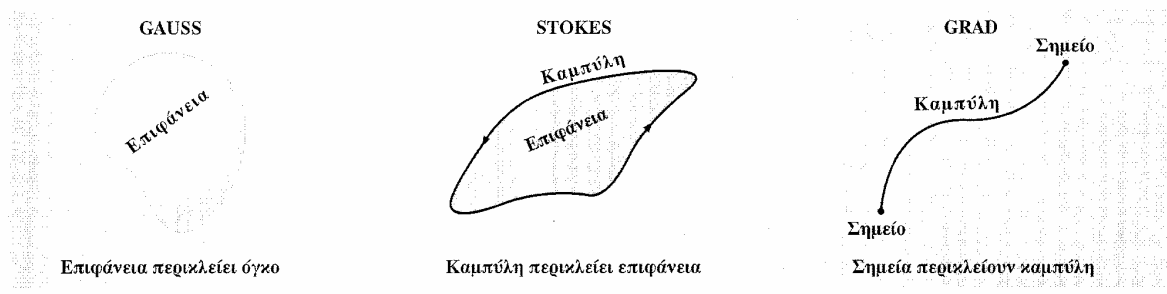
ΣΧΗΜΑ 2.30

Τέσσερα από αυτά τα διανυσματικά πεδία έχουν μηδενική απόκλιση στην περιοχή που εικονίζεται. Τρία από αυτά έχουν μηδενικό στροβιλισμό. Μπορείτε να τα εντοπίσετε;

κτικά αυτά τα θέματα προτού συγκρίνετε τη συλλογιστική και τα συμπεράσματά σας με την ερμηνεία που δίνεται πιο κάτω στο Σχ. 2.32.

Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου θα αποδειχθεί ένα χρήσιμο εργαλείο αργότερα, όταν θα καταπιαστούμε με ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, ο στροβιλισμός των οποίων δεν είναι μηδέν. Αναπτύξαμε τώρα αυτό το θέμα επειδή οι έννοιες που σχετίζονται με αυτό μοιάζουν πολύ με εκείνες που σχετίζονται με την απόκλιση. Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε δύο είδη παραγώγων ενός διανυσματικού πεδίου. Ένα είδος, η απόκλιση, έχει να κάνει με το ρυθμό μεταβολής της συνιστώσας ενός διανύσματος κατά την ίδια τη διεύθυνσή της, λ.χ. $\partial F_x / \partial x$, κ.ο.κ. Το άλλο είδος, ο στροβιλισμός, είναι ένα είδος «πλαγίας παραγώγου», που έχει να κάνει με το ρυθμό μεταβολής μιας συνιστώσας, λ.χ. της F_x , καθώς κινούμαστε κατά μήκος της διεύθυνσης y ή z .

Οι σχέσεις που ονομάζονται θεώρημα Gauss και θεώρημα Stokes συνοψίζονται στο Σχ. 2.31. Η σύνδεση μεταξύ της βαθμωτής συνάρτησης δυναμικού και του επικαμπυλίου ολοκληρώματος της βαθμίδας της μπορεί επίσης να θεωρηθεί μέλος αυτής της οικογένειας θεωρημάτων και περιλαμβάνεται στην τρίτη στήλη.



ΣΧΗΜΑ 2.31
Εννόπιση μερικών διανυσματικών σχέσεων.

$$\int_{\text{επιφάνεια}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{όγκος}} \nabla \cdot \mathbf{F} dv \qquad \int_{\text{καμπύλη}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{επιφάνεια}} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \qquad \phi_2 - \phi_1 = \int_{\text{καμπύλη}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{A} &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &+ \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &+ \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{grad} \phi &= \hat{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \nabla \phi \end{aligned}$$

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

(α)

Σημειώστε ότι το διάνυσμα παραμένει σταθερό καθώς προχωράτε κατά τη διεύθυνση που δείχνει. Δηλαδή $\partial F/\partial y = 0$, με $F = 0$. Επομένως $\text{div } F = 0$. Σημειώστε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από την εστιγμένη γραμμή δεν είναι μηδέν.



$$\nabla \cdot F = 0 \quad \nabla \times F \neq 0$$

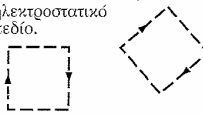
(β)

Το σχήμα απεικονίζει κεντρικό πεδίο. Δηλαδή η F είναι ακινητή και, για δεδομένο r , το μέτρο της είναι σταθερό. Όλα τα κεντρικά πεδία έχουν μηδενικό στροφισμό, η κυκλοφορία δηλαδή είναι μηδέν τόσο γύρω από τον εστιγμένο δρόμο όσο και από οποιονδήποτε άλλο δρόμο. Όμως η απόκλιση προφανώς δεν είναι μηδέν.



$$\nabla \cdot F \neq 0 \quad \nabla \times F = 0$$

(γ) Προφανώς, η κυκλοφορία θα μπορούσε να είναι μηδέν γύρω από τους δρόμους που εικονίζονται. Πράγματι, πρόκειται για το ίδιο πεδίο με αυτό του Σχ. 2.2 και είναι ένα πιθανό ηλεκτροστατικό πεδίο.



Δεν είναι προφανές ότι $\nabla \cdot F = 0$ μόνο από το πιο πάνω σχήμα, αλλά μπορείτε να δείτε ότι θα μπορούσε να ήταν και αυτό μηδέν.

$$\nabla \cdot F = 0 \quad \nabla \times F = 0$$

(δ)

Σημειώστε ότι το μέτρο του F δεν μεταβάλλεται, σε προσέγγιση πρώτης τάξης, καθώς προχωράτε κατά τη διεύθυνση που δείχνει το F . Αυτό είναι αρκετό για να εξασφαλίσει ότι η κυκλοφορία θα μπορούσε να ήταν μηδενική γύρω από το δρόμο που εικονίζεται, είναι ασθενέστερο στον μακρύτερο δρόμο από ό,τι στον βραχύτερο. Πράγματι πρόκειται για ένα πιθανό ηλεκτροστατικό πεδίο με το F ανάλογο προς το $1/r$, όπου r είναι η απόσταση από ένα σημείο εκτός του σχήματος.



$$\nabla \cdot F = 0 \quad \nabla \times F = 0$$

(ε)

Για τον ίδιο πιο πάνω λόγο, συμπεραίνουμε ότι $\nabla \cdot F = 0$. Εδώ, το μέτρο της F είναι παντού το ίδιο, επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, μακρύτερο δρόμο που απεικονίζεται δεν αντισταθμίζεται από το ολοκλήρωμα πάνω στο βραχύτερο τμήμα, και η κυκλοφορία δεν είναι μηδέν.



$$\nabla \cdot F = 0 \quad \nabla \times F \neq 0$$

(στ) Προφανώς, η κυκλοφορία γύρω από τον εστιγμένο δρόμο δεν είναι μηδέν. Φαίνεται επίσης ότι και η απόκλιση είναι μη μηδενική, αφού βλέπουμε διανύσματα να συγχλίνουν προς το κέντρο από όλες τις κατευθύνσεις.



$$\nabla \cdot F \neq 0 \quad \nabla \times F \neq 0$$

ΣΧΗΜΑ 2.32
Συζήτηση του Σχ. 2.30.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1 Η διανυσματική συνάρτηση που ακολουθεί αντιπροσωπεύει ένα πιθανό ηλεκτροστατικό πεδίο:

$$E_x = 6xy \quad E_y = 3x^2 - 3y^2 \quad E_z = 0$$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E από το σημείο $(0, 0, 0)$ ως το $(x_1, y_1, 0)$ κατά μήκος του δρόμου που συνδέει με ευθεία γραμμή το $(0, 0, 0)$ με το $(x_1, 0, 0)$ και από κει με το $(x_1, y_1, 0)$. Κάντε έναν παρόμοιο υπολογισμό για το δρόμο που διατρέχει τις δύο άλλες

πλευρές του ορθογωνίου, μέσω του $(0, y_1, 0)$. Θα πρέπει να βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα, αν αυτά που είπαμε πιο πάνω αληθεύουν. Έχετε τώρα τη δυναμική συνάρτηση $\phi(x, y, z)$. Υπολογίστε τη βαθμίδα αυτής της συνάρτησης και βεβαιωθείτε ότι ξαναπαίρνετε τις συνιστώσες του αρχικού πεδίου.

2.2 Θεωρήστε το σύστημα των δύο φορτίων που φαίνονται στο Σχ. 2.7. Υποθέστε ότι z είναι η συντεταγμένη κατά μήκος της γραμμής που ενώνει τα δύο φορτία, με $z = 0$ στη θέση του θετικού φορτίου. Σχεδιάστε το δυναμικό ϕ κατά μήκος αυτής της γραμμής ως συνάρτηση του z , από $z = -5$ cm ως $z = 15$ cm.

2.3 Φορτίο $0,7 \times 10^{-9}$ C (μC) είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων. Δύο φορτία $-0,35$ μC το καθένα είναι τοποθετημένα στα σημεία με συντεταγμένες x, y, z ίσες με $1, 1, 0$ και $-1, 1, 0$. Είναι εύκολο να δείτε ότι το δυναμικό ϕ είναι μηδέν στο σημείο $(0, 1, 0)$ εάν είναι μηδέν στο άπειρο. Έπεται ότι κάπου στον άξονα y πέρα από το σημείο $(0, 1, 0)$, η συνάρτηση $\phi(0, y, 0)$ θα έχει είτε ένα ελάχιστο είτε ένα μέγιστο. Σε αυτό το σημείο το ηλεκτρικό πεδίο E πρέπει να είναι μηδέν. Γιατί; Βρείτε το σημείο, έστω και προσεγγιστικά.

Απ. $y = 1,62$ cm.

2.4 Περιγράψτε το ηλεκτρικό πεδίο και την κατανομή φορτίου που προκύπτει από το πιο κάτω δυναμικό:

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{για } x^2 + y^2 + z^2 < a^2$$

$$\phi = -a^2 + \frac{2a^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad \text{για } a^2 < x^2 + y^2 + z^2$$

2.5 Σφαίρα μεγέθους μπάλας μπάσκετ φορτίζεται σε δυναμικό -1000 V. Πόσα περίπου πρόσθετα ηλεκτρόνια βρίσκονται πάνω σε ένα τετραγωνικό εκατοστό της επιφάνειας της σφαίρας;

Απ. 3×10^7 .

2.6 Σφαίρα στο μέγεθος της γης φέρει φορτίο 1 C ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια της. Πόση είναι η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου αμέσως έξω από την επιφάνεια; Πόσο είναι το δυναμικό της σφαίρας, αν το δυναμικό μηδέν είναι στο άπειρο;

Απ. $2,5 \times 10^{-4}$ V/m, 1500 V.

2.7 Σχεδιάστε ένα τετράγωνο με πλευρά 5 cm και συμβολίστε τις κορυφές κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού με A, B, C, D. Τοποθετήστε ένα φορτίο 6 μC στο A, και -9 μC στο B. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E , από το σημείο C στο σημείο D. (Δεν χρειάζεται να εκτελέσετε ολοκλήρωση!)

2.8 Για τον κύλινδρο με ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου του Σχ. 2.17:

(α) Δείξτε ότι η έκφραση που δίνει εκεί το πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου προκύπτει από το νόμο του Gauss.

(β) Βρείτε το δυναμικό ϕ συναρτήσει του r , τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του κυλίνδρου, παίρνοντας $\phi = 0$ στη θέση $r = 0$.

2.9 Για το σύστημα του Σχ. 2.10 σχεδιάστε την ισοδυναμική επιφάνεια που εφάπτεται στο χείλος του δίσκου. Βρείτε το σημείο στο οποίο η επιφάνεια αυτή τέμνει τον άξονα συμμετρίας.

2.10 Μια λεπτή βέργα εκτείνεται κατά μήκος του άξονα z από $z = -d$ ως $z = d$. Η ράβδος φέρει φορτίο ομοιόμορφα κατανομημένο σε όλο της το μήκος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Ολοκληρώνοντας σε αυτή την κατανομή φορτίου υπολογίστε το δυναμικό σε ένα σημείο P_1 στον άξονα z με συντεταγμένες $(0, 0, 2d)$. Με άλλη ολοκλήρωση βρείτε το δυναμικό σε ένα σημείο P_2 στον άξονα x και τοποθετήστε αυτό το σημείο έτσι, ώστε το δυναμικό του να είναι ίσο με το δυναμικό στο P_1 .

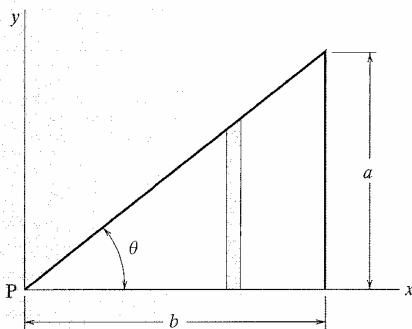
$$\text{Απ. } \lambda \ln 3/4\pi\epsilon_0, x = \sqrt{3}d.$$

2.11 Τα σημεία P_1 και P_2 του προηγούμενου προβλήματος συμβαίνει να κείνται σε έλλειψη, οι εστίες της οποίας συμπίπτουν με τα άκρα της ράβδου, όπως πολύ εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε συγκρίνοντας τα αθροίσματα των αποστάσεων των P_1 και P_2 από τα άκρα της ράβδου. Τούτο υπονοεί ότι ολόκληρη η έλλειψη είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Δοκιμάστε αυτή την εικασία υπολογίζοντας το δυναμικό στο σημείο $(3d/2, 0, d)$ που βρίσκεται πάνω στην έλλειψη. Πράγματι αυτό αληθεύει, μολονότι δεν υπάρχει κανένας προφανής λόγος εξαιτίας του οποίου θα έπρεπε οι ισοδυναμικές επιφάνειες αυτού του συστήματος να αποτελούν οικογένεια ομοεστιακών επιμήκων ελλειψοειδών. Δείτε αν μπορείτε να το αποδείξετε. Θα πρέπει να βρείτε μια σχέση για το δυναμικό στο γενικό σημείο $(x, 0, z)$ στο επίπεδο xz . Μετά να δείξετε ότι, αν τα x και z συνδέονται με τη σχέση $x^2/(a^2 - d^2) + z^2/a^2 = 1$, η οποία περιγράφει έλλειψη με εστίες στα σημεία $z = \pm d$, το δυναμικό θα εξαρτάται μόνο από την παράμετρο a και όχι από το x ή το y .

2.12 Το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή P , βάση b και ύψος a φέρει επιφανειακό φορτίο με ομοιόμορφη πυκνότητα σ . Υπολογίστε το δυναμικό στην κορυφή P . Βρείτε πρώτα τη συνεισφορά της κάθετης λωρίδας εύρους dx στο x . Δείξτε ότι το δυναμικό στο P μπορεί να γραφεί ως $\phi_P = (\sigma b/4\pi\epsilon_0) \ln[(1 + \sin\theta)/\cos\theta]$.

2.13 Με απευθείας υπολογισμό των συνιστωσών του $\nabla \times \mathbf{E}$ δείξτε ότι η διανυσματική συνάρτηση που ορίστηκε στο Πρόβλημα 2.1 μπορεί να περιγράφει ένα ηλεκτροστατικό πεδίο. (Φυσικά, αν έχετε λύσει το πρόβλημα, το έχετε ήδη αποδείξει με άλλο τρόπο, βρίσκοντας μια βαθμωτή συνάρτηση της οποίας το \mathbf{E} είναι η βαθμίδα.) Υπολογίστε την απόκλιση αυτού του πεδίου.

2.14 Ικανοποιεί τη διδιάστατη εξίσωση Laplace η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$; Την ικανοποιεί η $g(x, y) = x^2 - y^2$; Σχεδιάστε την τελευταία συνάρτηση, υπολογίστε τη βαθμίδα στα σημεία $(x = 0, y = 1)$, $(x = 1, y = 0)$, $(x = 0, y = -1)$ και $(x = -1, y = 0)$ και υποδείξτε με μικρά βέλη προς τα πού κατευθύνονται αυτά τα διανύσματα βαθμίδας.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.12

2.15 Υπολογίστε το στροβιλισμό και την απόκλιση καθενός από τα πιο κάτω πεδία. Εάν ο στροβιλισμός είναι μηδέν, προσπαθήστε να ανακαλύψετε μια βαθμωτή συνάρτηση ϕ το διανυσματικό πεδίο της οποίας είναι η βαθμίδα:

(a) $F_x = x + y, F_y = -x + y, F_z = -2z$

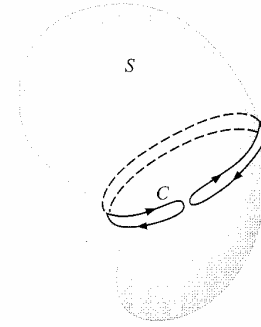
(b) $G_x = 2y, G_y = 2x + 3z, G_z = 3y$

(c) $H_x = x^2 - z^2, H_y = 2, H_z = 2xz$

2.16 Εάν A είναι ένα οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο με συνεχείς παραγώγους, τότε $\operatorname{div}(\operatorname{curl} A) = 0$ ή, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του ανάδελτα, $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$. Θα χρειαστούμε αυτό το θεώρημα αργότερα. Το πρόβλημα τώρα είναι να το αποδείξουμε. Δύο τρόποι για να γίνει αυτό υποδεικνύονται πιο κάτω:

(α) (Ο χωρίς έμπνευση απευθείας υπολογισμός σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων.) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το ανάδελτα σε καρτεσιανές συντεταγμένες να δουλέψετε μέσα από την αλυσίδα των μερικών διαφορικών δευτέρας τάξης που υποδεικνύει ο ορισμός του $\nabla \cdot (\nabla \times A)$.

(β) (Με το θεώρημα της απόκλισης και το θεώρημα Stokes δεν είναι απαραίτητες οι συντεταγμένες.) Θεωρήστε την επιφάνεια S του σχήματος, ένα μπαλόνι κομμένο σχεδόν στα δύο περιζωσμένο από την κλειστή καμπύλη C . Θεωρήστε το γραμμικό ολοκλήρωμα, πάνω σε μια καμπύλη όπως η C , οποιουδήποτε διανυσματικού πεδίου. Στη συνέχεια εφαρμόστε τα θεωρήματα Stokes και Gauss με κατάλληλα επιχειρήματα.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.16

2.17 Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\nabla(\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi$ και το θεώρημα της απόκλισης για να αποδείξετε ότι η Εξ. 38 του Κεφαλαίου 1 και η Εξ. 27 του Κεφαλαίου 2 είναι ισοδύναμες για οποιαδήποτε κατανομή φορτίου πεπερασμένης έκτασης.

2.18 Ένας κοίλος κυκλικός κύλινδρος ακτίνας a και μήκους b , με ανοικτά άκρα, φέρει ολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ ενός σημείου του άξονα στο ένα άκρο και του μέσου του άξονα; Δείξτε, σχεδιάζοντας μερικές δυναμικές γραμμές, πώς νομίζετε ότι θα μοιάζει το πεδίο αυτού του πράγματος.

2.19 Έχουμε δύο μεταλλικές σφαίρες ακτίνων R_1 και R_2 , η μία πολύ μακριά από την άλλη σε σύγκριση με την ακτίνα τους. Πώς θα μοιραστεί μια δεδομένη ολική ποσότητα φορτίου Q μεταξύ των σφαιρών έτσι, ώστε η δυναμική ενέργεια της προκύπτουσας κατανομής φορτίου να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη; Για να απαντήσετε σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει πρώτα να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος για μια αυθαίρετη διαίρεση του φορτίου, q στη μία και $Q - q$ στην άλλη. Μετά ελαχιστοποιήστε την ενέργεια ως συνάρτηση του q . Μπορείτε να υποθέσετε ότι οποιοδήποτε φορτίο, τοποθετημένο σε κάποια από αυτές τις σφαίρες, κατανέμεται ομοιόμορφα σε αυτήν, αφού η άλλη σφαίρα είναι αρκετά μακριά ώστε η επίδρασή της να είναι αμελητέα. Όταν βρείτε τη

βέλτιστη διαίρεση του φορτίου, δείξτε ότι με αυτήν τη διαίρεση η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σφαιρών είναι μηδέν. (Θα μπορούσαν επομένως να ενωθούν με ένα σύρμα χωρίς να υπάρξει ανακατανομή του φορτίου. Τούτο είναι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μιας γενικότερης αρχής που θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 3: στους αγωγούς το φορτίο κατανέμεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος.)

2.20 Ως κατανομή ηλεκτρικού φορτίου, ο πυρήνας του χρυσού μπορεί να περιγραφεί σαν μια σφαίρα με ακτίνα 6×10^{-13} cm και φορτίο $Q = 79e$ κατανεμημένο αρκετά ομοιόμορφα σε όλο το εσωτερικό της. Πόσο είναι το δυναμικό ϕ_0 στο κέντρο του πυρήνα εκφρασμένο σε megavolt; (Να βρείτε πρώτα ένα γενικό τύπο για το ϕ_0 για μια σφαίρα φορτίου Q και ακτίνας a . Κάντε το αυτό χρησιμοποιώντας το νόμο Gauss για να βρείτε το εσωτερικό και το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και μετά ολοκληρώνοντας για να βρείτε το δυναμικό.)

$$\text{Απ. } \phi = 3Q/8\pi\epsilon_0 a = 28,5 \text{ MV.}$$

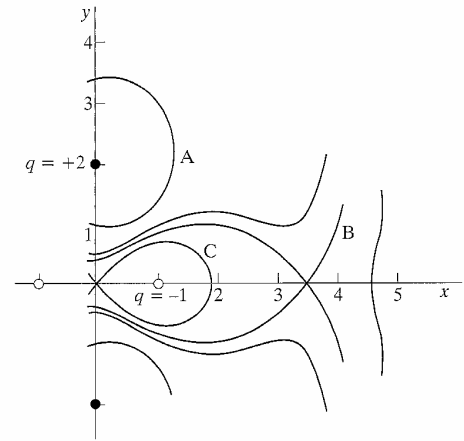
2.21 Υποθέστε ότι οκτώ πρωτόνια είναι μόνιμα στερεωμένα στις κορυφές ενός κύβου. Ένα ένατο πρωτόνιο αιωρείται ελεύθερα κοντά στο κέντρο του κύβου. Δεν υπάρχουν άλλα φορτία στην περιοχή και η βαρύτητα μπορεί να αμεληθεί. Είναι παγιδευμένο το ένατο πρωτόνιο; Μπορεί να βρει ένα δρόμο εξόδου που να είναι πάντοτε κατηφορικός ως προς τη δυναμική ενέργεια; Δοκιμάστε να βρείτε την απάντηση με το κομπιουτεράκι σας. Θα χρειαστείτε ακρίβεια πολλών σημαντικών ψηφίων.

2.22 Ένας κόκκος διαστρικής σκόνης, χονδρικά κυκλικός με ακτίνα 3×10^{-17} m, έχει αποκτήσει αρνητικό φορτίο τέτοιο, ώστε το δυναμικό του να είναι $-0,15$ V. Πόσα ηλεκτρόνια έχει μαζέψει; Ποια είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνειά του;

2.23 Με τη βοήθεια μιας γεννήτριας van de Graaff επιταχύνονται πρωτόνια υπό την επίδραση διαφοράς δυναμικού 5×10^6 V. Η δέση των πρωτονίων διέρχεται μέσα από ένα λεπτό έλασμα αργύρου. Ο ατομικός αριθμός του αργύρου είναι 47 και μπορείτε να υποθέσετε ότι ο πυρήνας του αργύρου έχει τόσο μεγαλύτερη μάζα από το πρωτόνιο, ώστε τόσο η μάζα όσο και η κίνησή του να μπορούν να αμεληθούν. Ποια είναι η πλησιέστερη απόσταση προσέγγισης ενός πρωτονίου από έναν πυρήνα αργύρου; Πόση θα είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δρα στο πρωτόνιο σε αυτή την απόσταση;

2.24 Το ποια από τις δύο διατυπώσεις που βρίσκονται μέσα σε πλαίσιο στην Παρ. 2.1 θεωρούμε ως συνέπεια της άλλης είναι αυθαίρετο. Δείξτε ότι, εάν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ είναι μηδέν γύρω από οποιονδήποτε κλειστό δρόμο, έπεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

2.25 Δύο σημειακά φορτία $+2 \mu\text{C}$ το καθένα και δύο σημειακά φορτία $-1 \mu\text{C}$ το καθένα τοποθετούνται συμμετρικά στο επίπεδο xy ως εξής: Τα δύο θετικά φορτία βρίσκονται στις θέσεις $(0, 2)$ και $(0, -2)$, τα αρνητικά φορτία στις θέσεις $(1, 0)$ και $(-1, 0)$. Μερικές από τις ισοδυναμικές στο επίπεδο xy εικονίζονται στο σχήμα. (Φυσικά οι καμπύλες αυτές είναι στην πραγματικότητα η τομή μερικών τρισδιάστατων ισοδυναμικών επιφανειών με το επίπεδο xy .) Μελετήστε το σχήμα έως ότου κατανοήσετε τη γενική εικόνα. Βρείτε τώρα την τιμή του δυναμικού ϕ για καθεμιά από τις καμπύλες A, B, και C, παίρνοντας ως συνήθως $\phi = 0$ στο άπειρο. Κάντε το αυτό υπολογίζοντας τα δυναμικά σε κάποιο σημείο της καμπύλης, ένα σημείο επιλεγμένο έτσι ώστε να κάνει τον υπολογισμό όσο το δυνατόν πιο εύκολο. Σχεδιάστε χονδρικά κάποιες ενδιάμεσες ισοδυναμικές γραμμές.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.25

2.26 Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 2.12 για να απαντήσετε στην ερώτηση: Εάν ένα τετράγωνο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και πλευρά s έχει το ίδιο δυναμικό στο κέντρο του με δίσκο που έχει την ίδια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου και διάμετρο d , ποιος πρέπει να είναι ο λόγος s/d ; Είναι λογική η απάντησή σας;

2.27 Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα που διατυπώνεται στην Εξ. 24 για να υπολογίσετε την ενέργεια που αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό πεδίο του φορτισμένου δίσκου που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2.6. (Υπόδειξη: Θεωρήστε το έργο που παράγεται όταν συγκροτείτε το δίσκο φορτίου αρχίζοντας από μηδενική ακτίνα 0 ως την ακτίνα a προσθέτοντας διαδοχικούς δακτυλίους εύρους dr . Εκφράστε την ολική ενέργεια συναρτήσει της ακτίνας a και του ολικού φορτίου $Q = \pi a^2 \sigma$.)

$$\text{Απ. } 2Q^2/3\pi^2\epsilon_0 a.$$

2.28 Λεπτός δίσκος ακτίνας 3 cm έχει μια κυκλική τρύπα ακτίνας 1 cm στο κέντρο του. Στο δίσκο υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου $-12 \mu\text{C}/\text{cm}^2$.

(α) Πόσο είναι το δυναμικό στο κέντρο της τρύπας; (Υποθέστε μηδενικό δυναμικό στο άπειρο.)

(β) Ηλεκτρόνιο, ξεκινώντας από την ηρεμία στο κέντρο της τρύπας, απομακρύνεται κατά μήκος του άξονα. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο ηλεκτρόνιο είναι οι απωστικές που οφείλονται στα φορτία του δίσκου. Πόση ταχύτητα θα αποκτήσει τελικά; (Μάζα ηλεκτρονίου = 9×10^{-28} g.)

2.29 Το ένα από δύο μη αγωγικά σφαιρικά κελύφη ακτίνας a φέρει φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του, και το άλλο $-Q$, επίσης ομοιόμορφα κατανεμημένο. Οι σφαίρες φέρονται σ' επαφή. Πώς μοιάζει το ηλεκτρικό πεδίο, τόσο μέσα όσο και έξω από τα κελύφη; Πόσο έργο απαιτείται για να τα απομακρύνουμε σε πολύ μεγάλη απόσταση;

2.30 Θεωρήστε μια κατανομή φορτίου που έχει σταθερή πυκνότητα ρ παντού στον εσωτερικό χώρο ενός κύβου πλευράς b και είναι

παντού μηδέν στο εξωτερικό του κύβου. Αν το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από τον κύβο, συμβολίστε με ϕ_0 το δυναμικό στο κέντρο του κύβου και με ϕ_1 το δυναμικό σε μια κορυφή του κύβου. Υπολογίστε το λόγο ϕ_0/ϕ_1 . Η απάντηση μπορεί να βρεθεί με πολύ λίγες πράξεις, αν συνδυάσετε διαστατικά επιχειρήματα με την αρχή της υπέρθεσης. (Θεωρήστε το δυναμικό στο κέντρο ενός κύβου με την ίδια πυκνότητα φορτίου και διπλάσιο μήκος ακμής.)

2.31 Επίπεδο μη αγωγίμο φύλλο συμπίπτει με το επίπεδο xy . Τα μόνα φορτία στο σύστημα είναι αυτά που υπάρχουν στο φύλλο. Στο ημιδιάστημα πάνω από το φύλλο, $z > 0$, το δυναμικό έχει τη μορφή $\phi = \phi_0 e^{-kz} \cos kx$, όπου ϕ_0 και k είναι σταθερές.

(α) Να επαληθεύσετε ότι το ϕ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο χώρο πάνω από το φύλλο.

(β) Πώς μοιάζουν οι ηλεκτρικές πεδιακές γραμμές;

(γ) Να περιγράψετε την κατανομή του φορτίου πάνω στο φύλλο.

2.32 Για να δείξετε ότι χρειάζεται κάτι περισσότερο από κατεύθυνση και μέτρο προκειμένου να κατασκευάσετε ένα διάνυσμα, προσπαθήστε να ορίσετε ένα διάνυσμα, το οποίο θα ονομάσουμε $\text{surl } \mathbf{F}$, με κάποια σχέση όπως αυτή της Εξ. 61 με το δεξί σκέλος υψωμένο στο τετράγωνο:

$$(\text{surl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left[\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \right]^2$$

Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω σχέση δεν ορίζει κάποιο διάνυσμα. (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να αντιστρέψετε τη φορά του $\hat{\mathbf{n}}$.)