Ασκήσεις για το μάθημα Φυσική ΙΙ (Ηλεκτρομαγνητισμός) της Σχολής ΗΜΜΥ

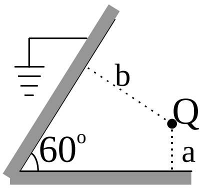
Ενότητα 2. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΑΓΩΓΟΙ)

2.1 Τρία φορτία, Q, Q και $-2Q$, βρίσκονται στο επίπεδο xy και στις θέσεις (a, a), $(-a, a)$ και $(0, -a)$ αντίστοιχα ($Q > 0$, $a > 0$). Να βρεθούν: (α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο (0,0,0). (β) Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο (0,0,0). (γ) Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Απ.: (α) $\vec{\boldsymbol{E}} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{2}\right)\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{y}}$, (β) $\phi = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a}$, (γ) $U = -\left(\frac{\sqrt{5}}{10}-\frac{1}{8}\right)\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a}$.

2.2 Υπολογίστε την ενέργεια μιας σφαίρας, ομοιόμορφα φορτισμένης με ολικό φορτίο Q, ως εξής: Συναρμολογήστε τη σφαίρα κατά στρώματα, φέρνοντας κάθε φορά ένα απειροστό φορτίο dq από το άπειρο και απλώνοντάς το ομοιόμορφα πάνω στην επιφάνεια, αυξάνοντας έτσι σιγά-σιγά την ακτίνα. (α) Πόσο έργο dW απαιτείται για να αυξηθεί η ακτίνα από r σε $r+dr$; (β) Ολοκληρώστε για να βρείτε το έργο που απαιτείται για τη συναρμολόγηση ολόκληρης της σφαίρας, ακτίνας R.

Απ.: (α) $dW = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6} r^4 dr$, (β) $W = U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

2.3 Δύο ημιάπειρα αγώγιμα επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μίας ευθείας σχηματίζοντας δίεδρη γωνία 60°, όπως στο σχήμα. Και τα δύο επίπεδα είναι συνδεδεμένα με τη Γη (δυναμικό $\phi_{\text{επιπέδων}}$= 0).



Στο εσωτερικό της γωνίας, και σε αποστάσεις a και b αντίστοιχα από τις δύο έδρες της γωνίας, τοποθετείται σημειακό φορτίο Q. (α) Προτείνετε εικονικά φορτία εκτός της γωνίας, τέτοια ώστε, σε συνδυασμό με το πραγματικό φορτίο Q, να δίνουν για τον εντός της γωνίας χώρο ηλεκτρικό δυναμικό ϕ και ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\boldsymbol{E}}$ που να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. (β) Μπορεί η μέθοδος που προτείνεται στο (α) να δουλέψει για οποιαδήποτε τιμή της δίεδρης γωνίας ;

2.4 Φορτίο Q βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο αφόρτιστου σφαιρικού φλοιού ακτίνας a, $(a < d)$. Βρείτε το μέγεθος Q' ενός ειδώλου φορτίου και την απόστασή του b από το κέντρο του φλοιού, που κάνει το δυναμικό της επιφάνειας του φλοιού ίσο με μηδέν.

Απ.: $b = a^2/d$, $Q' = -(a/d)Q$.

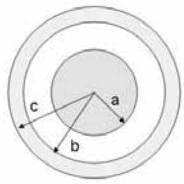
2.5 Μέσα σε έναν αγωγό που εκτείνεται στο άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις, υπάρχει μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R_2. Ο αγωγός έχει μηδενικό δυναμικό. Μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ακτίνας R_1, $(R_1 < R_2)$, τοποθετείται στο κέντρο της κοιλότητας, ομόκεντρη με αυτήν. Η σφαίρα φορτίζεται με φορτίο Q. Να βρεθούν: (α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου. (β) Το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου. (γ) Η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος. (Χρησιμοποιήστε τον ευκολότερο, για σας, από τους τρεις τρόπους που έχουμε αναπτύξει.)

2.6 Μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ακτίνας R, που φέρει φορτίο q, περιβάλλεται από ένα παχύ ομόκεντρο μεταλλικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b, $(R < a < b)$. Το κέλυφος δεν φέρει φορτίο. (α) Βρείτε τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στο R, στο a και στο b. (β) Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο χρησιμοποιώντας ως σημείο αναφοράς το άπειρο.

2.7 Ένας πυκνωτής παράλληλων οπλισμών επιφάνειας A, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση a, έχει χωρητικότητα $C = \varepsilon_0 A/a$. Οι δύο οπλισμοί είναι φορτισμένοι με φορτία $\pm Q$ και έλκονται μεταξύ τους. Ο ένας οπλισμός αφήνεται να πλησιάσει τον άλλο κατά μια απειροστή απόσταση δ, ενώ τα φορτία στους οπλισμούς διατηρούνται σταθερά. (α) Υπολογίστε τη μεταβολή της ενέργειας του πυκνωτή ($Q^2/2C$) λόγω της μετατόπισης και δείξετε ότι είναι ανάλογη του δ. (β) Από το αποτέλεσμα του (α), υπολογίστε τη δύναμη που ασκεί ο ένας οπλισμός πάνω στον άλλο. (γ) Από το αποτέλεσμα του (β), υπολογίστε την πίεση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας), που ασκείται στους οπλισμούς, συναρτήσει της έντασης E του ηλεκτρικού πεδίου.

2.8 Δύο αγώγιμες σφαίρες ακτίνων R_1 και R_2 φέρουν φορτία Q_1 και Q_2 αντίστοιχα και απέχουν απόσταση R ($R >> \max(R_1, R_2)$) έτσι ώστε η μία να αισθάνεται την άλλη ως σημειακό φορτίο. Να υπολογίστε το φορτίο που φέρει η κάθε μία στην περίπτωση που συνδέονται μεταξύ τους με ένα λεπτό σύρμα το οποίο δεν έχει καθόλου φορτία στην τελική κατάσταση και δεν επιδρά καθόλου στη μορφή του πεδίου μεταξύ των δύο σφαιρών.

2.9 Μια συμπαγής αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a έχει θετικό φορτίο $3Q$. Η σφαίρα περικλείεται από χωρική κατανομή φορτίου που έχει σταθερή πυκνότητα στο εσωτερικό ενός, ομόκεντρου ως προς αυτήν, σφαιρικού φλοιού εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c, και συνολικό φορτίο $-Q$. (α) Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της αγώγιμης σφαίρας. (β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της αγώγιμης σφαίρας.



2.10 Θεωρήστε δύο ομόκεντρους λεπτότοιχους αγώγιμους σφαιρικούς φλοιούς, με ακτίνες R_1 και R_2 αντίστοιχα ($R_2 > R_1$). Αν ο εσωτερικός φλοιός φέρει φορτίο Q_1 και ο εξωτερικός Q_2, βρείτε: (α) το δυναμικό ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο του συστήματος $(V(r \to \infty) = 0)$, και (β) το Q_2, συναρτήσει των Q_1, R_1 και R_2, έτσι ώστε το δυναμικό του εσωτερικού φλοιού να είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, σχεδιάστε πρόχειρα το $V(r)$. Απ.: (α) $\phi = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ για $r \geq R_2$, $\phi = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$ για $R_1 \leq r \leq R_2$, $\phi = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ για $r \leq R_1$. (β) $Q_2 = -\dfrac{R_2}{R_1} Q_1$.

2.11 Ένα σύστημα αποτελείται από κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R_1 και μήκους ℓ ο οποίος περιβάλλεται από άλλον κυλινδρικό αγωγό που έχει ακτίνα R_2 ($R_2 > R_1$), μήκος ℓ και άξονα που συμπίπτει με τον άξονα του πρώτου κυλίνδρου. Ο χώρος μεταξύ των κυλίνδρων είναι γεμάτος με αγώγιμο υλικό ειδικής αγωγιμότητας σ. Ο εσωτερικός κύλινδρος βρίσκεται σε δυναμικό ϕ_1 και ο εξωτερικός σε δυναμικό ϕ_2. Να βρεθεί το ολικό ρεύμα I που διαρρέει το σύστημα και η ολική αντίσταση R του συστήματος. Απ.: $I = 2\pi\sigma\ell \dfrac{\phi_2 - \phi_1}{\ln(R_2/R_1)}$, $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma\ell}\ln(R_2/R_1)$.