Φ Υ Σ Ι Κ Η   Ι   Σ Ε Μ Φ Ε. Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α. Κινηματική

Α.1 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 4 + 3t^2 - 2\sin 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).

Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του.

Α.2 Οι συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 4\sin 5t$ $y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Α.3 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).

Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Α.4 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 3\sin 5t$, $y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).

Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Α.5 Αν $\vec{\mathbf{r}}(t) = (3+t)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 2e^{-2t}\,\hat{\mathbf{z}}$, να βρεθούν τα $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ και $\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \dfrac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}$, καθώς και οι αρχικές τιμές (για $t = 0$) $\vec{\mathbf{r}}(0)$, $\dot{\vec{\mathbf{r}}}(0)$ και $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

Α.6 Να βρεθούν οι παράγωγοι του διανύσματος $\vec{\mathbf{r}}(t) = (x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}}) + \upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{\mathbf{z}}$ ως προς t, αν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Επίσης να βρεθούν οι τιμές τους για $t = 0$.

Α.7 Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (3t + 2t^2)\hat{\mathbf{x}} + (4 + 4t^2)\hat{\mathbf{y}} + (5 + 2t)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = (20 - t - t^2)\hat{\mathbf{x}} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{\mathbf{y}} + (1 + 4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου t = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).
(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. Απ.: $\tau = 2$ s
(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; Απ.: $\vec{\mathbf{F}}_{o\lambda} = \mathbf{0}$
(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; Απ.: $\vec{\mathbf{P}}_{o\lambda} = m(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$
(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{3}(40\hat{\mathbf{x}} + 24\hat{\mathbf{y}} + 7\hat{\mathbf{z}}) + \frac{1}{3}t(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$

Α.8 Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a\sin\omega t$, $y = 4a\sin\omega t$, $z = 5a\cos\omega t$, όπου t = χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές. Αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2$, $\vec{\mathbf{r}}_3$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\vec{\mathbf{r}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{r}}_3 = 0$.

Α.9 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = a\sin(\omega t), \qquad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$, η ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και η επιτάχυνση $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{c}} = z\hat{\mathbf{z}} = bt^2\hat{\mathbf{z}}$, και $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{c}}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\mathbf{R}}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ, και μία σταθερή στην κατεύθυνση z. Απ.: $\vec{\mathbf{F}} = -m\omega^2 R\hat{\mathbf{R}} + 2mb\,\hat{\mathbf{z}}$

(δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $P = \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z. Απ.: $P = 4mb^2 t$

Α.10 Η κίνηση βλήματος στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης δίνεται από τις σχέσεις:

$$x(t) = x_0 + (\upsilon_0 \cos\theta)t \qquad y(t) = y_0 + (\upsilon_0 \sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

όπου t είναι ο χρόνος, και τα υπόλοιπα μεγέθη είναι σταθερά. Ο άξονας x είναι οριζόντιος και ο άξονας των y είναι κατακόρυφος. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος $y_{\max}$ στο οποίο θα φθάσει το σώμα.

Απ.: $y_{\max} = y_0 + (\upsilon_0^2/2g)\sin^2\theta$

Α.11 Δίνεται ότι: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$ για κάθε x. Να υπολογιστεί η τιμή του $e^{0,1}$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Πόσο είναι το σφάλμα στο $e^{0,1}$ αν υποθέσουμε ότι είναι $e^x \approx 1 + x$;

Απ.: $e^{0,1} = 1{,}105, \quad 0{,}0052$

Α.12 Να βρεθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες η *ροπή* της δύναμης $\vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$ ως προς το σημείο (0, 0, 0), $\vec{\mathbf{N}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$. Απ.: $\vec{\mathbf{N}} = (yF_z - zF_y)\hat{\mathbf{x}} + (zF_x - xF_z)\hat{\mathbf{y}} + (xF_y - yF_x)\hat{\mathbf{z}}$

Α.13 Να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_\mu$ που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο Q που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = \upsilon_x\hat{\mathbf{x}}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}} = B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$. Να βρεθεί επίσης το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{F}}_\mu$. Απ.: $\vec{\mathbf{F}}_\mu = Q\upsilon_x(-B_z\hat{\mathbf{y}} + B_y\hat{\mathbf{z}})$

Α.14 Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως $\vec{\mathbf{N}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, όπου $\vec{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη Να δειχθεί ότι η ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}$ και $-\vec{\mathbf{F}}$ που ασκούνται στα σημεία $\vec{\mathbf{r}}_1$ και $\vec{\mathbf{r}}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Α.15 Η *στροφορμή* ως προς το σημείο (0, 0, 0) μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο $\vec{\mathbf{r}}$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$, ορίζεται ως $\vec{\mathbf{L}} \equiv m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια *κεντρική* δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0, 0, 0) και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Δείξτε ότι η στροφορμή της μάζας διατηρείται σταθερή.

[*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον χρόνο είναι $d\vec{\mathbf{L}}/dt = 0$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $m\,d\vec{\mathbf{v}}/dt = \vec{\mathbf{F}}$. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο C. Kittel κ.ά., *Μηχανική*, σελ. 197-8.]

Β. Δυναμική

Β.1 Ευθύγραμμη ράβδος έχει μήκος L και γραμμική πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα μήκους) που μεταβάλλεται συναρτήσει της απόστασης x από το ένα άκρο της ράβδου σύμφωνα με τη σχέση $\lambda = \lambda_0(1 + x/L)$ όπου λ_0 μια θετική σταθερά. Δείξετε ότι η ολική μάζα της ράβδου είναι $m = \frac{3}{2}\lambda_0 L$.

Β.2 Ένα σώμα μάζας $m = 1\,\mathrm{kg}$ κινείται πάνω στον άξονα των x υπό την επίδραση της δύναμης $F_x(t) = 6t$ (σε μονάδες S.I.) στην κατεύθυνση του άξονα, όπου t ο χρόνος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x(0) = 0$ και κινείται με ταχύτητα $\upsilon_x(0) = -1\,\mathrm{m/s}$.

Να βρεθούν η ταχύτητα $\upsilon_x(t)$ και η θέση $x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

Απ.: $\upsilon_x(t) = 3t^2 - 1, \quad x(t) = t^3 - t$

Β.3 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y = 0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, υ, ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\upsilon = -\dfrac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα τείνει σε μια ορική τιμή και βρείτε την τιμή αυτή. Απ.: $\upsilon_{o\rho} = -\dfrac{mg}{b}$

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $y = -\dfrac{m^2 g}{b^2}\left[\dfrac{b}{m}t - \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right]$

(δ) Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t. Δίνεται το ανάπτυγμα: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$.

Απ.: $y \approx -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}g\dfrac{b}{m}t^3, \quad \upsilon \approx -gt + \frac{1}{2}g\dfrac{b}{m}t^2$

Β.4 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y\hat{\mathbf{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;

(β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\upsilon_x = \upsilon_0/\sqrt{2}, \quad \upsilon_y = (\upsilon_0/\sqrt{2})e^{-kt}$

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy;

Απ.: $y = \dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,k}{\upsilon_0}x\right)\right]$

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά; Απ.: $y_m = \dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}$

Β.5 Σε εορταστική εκδήλωση μιας αερολέσχης, ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει με μηδενική αρχική ταχύτητα από ύψος 3000 m. Με το αλεξίπτωτο κλειστό, κάποια στιγμή αποκτά ταχύτητα $\upsilon_1 = 40\ \mathrm{m/s}$.

(α) Στο διάστημα αυτό, η αντίσταση που ασκεί ο αέρας πάνω στον αλεξιπτωτιστή είναι ανάλογη της ταχύτητάς του με σταθερά αναλογίας $b = 1{,}5\ \text{kg/s}$, η δε μάζα του αλεξιπτωτιστή με τη στολή του είναι 66 kg. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του αλεξιπτωτιστή. Πάρτε τον κατακόρυφο άξονα ως άξονα y, με θετικές τιμές προς τα κάτω, και την αρχική θέση του αλεξιπτωτιστή ως $y = 0$. Λύστε την εξίσωση για να βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου.

(β) Πόση είναι η ορική ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$ του αλεξιπτωτιστή;

(γ) Πόση απόσταση κάλυψε για να φθάσει την ταχύτητα $\upsilon_1 = 40\ \text{m/s}$;

(δ) Είναι συμβιβαστά τα δεδομένα; Εξηγήστε γιατί. (Θεωρήστε $g = 10\ \text{m/s}^2$)

Β.6 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στο σημείο $y = 0$, και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα κάτω). Κατά την κίνηση του σώματος στο πεδίο βαρύτητας, το οποίο θεωρούμε ομογενές, η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος, και ίση με $-a\upsilon^2$, όπου υ η ταχύτητα του σώματος και a μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, $\upsilon(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Δείξετε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια ορική ταχύτητα και βρείτε την τιμή της.

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, $y(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.

Β.7 **Σ**ώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{y}}$ $(V > 0)$ κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y = 0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}$ δείξτε ότι τα υ και y ικανοποιούν τη σχέση

$$y = \frac{V - \upsilon}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{1 + kV/g}{1 + k\upsilon/g}\right).$$

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Απ.: $H = \dfrac{V}{k} - \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1 + \dfrac{kV}{g}\right)$

(δ) Αν $\upsilon = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο $y = 0$, δείξτε ότι:

$$\left(1 - \frac{kU}{g}\right)e^{kU/g} = \left(1 + \frac{kV}{g}\right)e^{-kV/g}.$$

Β.8 Σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινηθεί πάνω στον άξονα των x, υπό την επίδραση της δύναμης $F_x = -\dfrac{k}{x^2}$, όπου x είναι η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή Ο και k μια θετική σταθερά. Το σωματίδιο κρατιέται σε κάποια θέση $x(0) = b > 0$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο, οπότε κάτω από την επίδραση της ελκτικής δύναμης κινείται προς το κέντρο Ο.

(α) Βρείτε πώς εξαρτάται η ταχύτητα του σωματιδίου υ από το x, δηλαδή τη συνάρτηση $\upsilon = \upsilon(x)$.

(β) Δείξτε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει το σωματίδιο από το σημείο εκκίνησης στο σημείο Ο είναι ίσος με $\pi\sqrt{mb^3/8k}$.

Δίνεται: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b - x}}\,dx = -\sqrt{x(b - x)} + b\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{b}}$.

Γ. Διατήρηση της ενέργειας

Γ.1 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $F_x(t) = F_0(1+t^2/\tau^2)$, όπου τα F_0 και τ είναι σταθερά και t ο χρόνος. Υπολογίστε την ώθηση που ασκεί η δύναμη στο σώμα στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t=0$ και $t=\tau$. Απ.: $\Omega = \frac{4}{3}F_0\tau$

Γ.2 Πόσο έργο παράγει η δύναμη $F_x(x) = F_0(1 + x/a - x^2/a^2)$ όταν το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται από το σημείο $x=0$ στο σημείο $x=a$; Απ.: $W = \frac{7}{6}F_0 a$

Γ.3 Ένα αυτοκίνητο έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα της οποίας το μέτρο δίνεται, συναρτήσει του χρόνου, από τη σχέση $\upsilon = \alpha + \beta t$. Να βρεθεί η κινητική του ενέργεια συναρτήσει του χρόνου. Αν το αυτοκίνητο κινείται χωρίς απώλειες λόγω τριβών, με ποιο ρυθμό παρέχει ενέργεια η μηχανή του (ισχύς); Απ.: Ισχύς $P = m\beta(\alpha + \beta t)$

Γ.4 Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο συναρτήσει της επιμήκυνσής του, x, δίνεται από τη σχέση $F(x) = -kx + px^2 - qx^3$. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο όταν το μήκος του μεταβληθεί, από τη φυσική του τιμή, κατά a; Απ.: $U(a) = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{3}pa^3 + \frac{1}{4}qa^4$

Γ.5 Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος είναι: (α) $U = \alpha xy^2z^3$, (β) $U = -\dfrac{\kappa}{r}$,

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, και α και κ είναι θετικές σταθερές.

Σε κάθε περίπτωση βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

Γ.6 Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = (3x - 2y)\hat{\mathbf{x}} + (y + 2z)\hat{\mathbf{y}} - x^2\hat{\mathbf{z}}$ (σε N όταν τα μήκη είναι σε m) όταν το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται από το σημείο (0, 0, 0) στο σημείο (1, 1, 1) κατά μήκος της καμπύλης C, όταν C είναι: (α) η καμπύλη $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, και (β) η καμπύλη $x = z^2,\ z = y^2$. (γ) Είναι διατηρητική η δύναμη; Απ.: (α) $\frac{23}{15}$ J, (β) $\frac{13}{15}$ J, (γ) όχι

Γ.7 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι (σε N όταν τα μήκη είναι σε m) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y^2 + 2xz)\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + (2yz + x^2)\hat{\mathbf{z}}$. Θεωρώντας ότι είναι $U(0,0,0) = 0$, δείξετε ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι $U(x,y,z) = -(xy^2 + yz^2 + zx^2)$.

Υπόδειξη: Ολοκληρώστε ξεχωριστά τις σχέσεις: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = -F_x$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -F_y$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = -F_z$.

Γ.8 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ όπως δίνεται παρακάτω, όπου κ και a είναι θετικές σταθερές, r είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων O και $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το σημείο O προς το σημείο $\vec{\mathbf{r}}$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις, βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, $U(\vec{\mathbf{r}})$. Θεωρήστε ότι $U = 0$ όταν $r = \infty$.

(α) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{2\kappa}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$. Απ.: $U(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{\kappa}{r^2}$. (β) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{2\kappa}{a^2} r\, e^{-r^2/a^2}\hat{\mathbf{r}}$. Απ.: $U(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\, e^{-r^2/a^2}$.

Γ.9 Σώμα μάζας m έχει δυναμική ενέργεια $U(r) = A\left(-\dfrac{3r_0^2}{r^2} + \dfrac{2r_0^3}{r^3}\right)$, όπου A και r_0 είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση του σώματος από ακίνητο σημείο O. (Σημείωση: το r είναι πάντοτε θετικό).

(α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα. Απ.: $F_r = -6A\left(\dfrac{r_0^2}{r^3} - \dfrac{r_0^3}{r^4}\right)$

(β) Σε ποια απόσταση μπορεί να ισορροπήσει το σώμα; Απ.: $r = r_0$

(γ) Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν σε άπειρη απόσταση από το Ο, να βρεθεί η ταχύτητά του στη θέση $r = r_0$ και η απόσταση στην οποία η ταχύτητά του θα ξαναγίνει μηδενική. Απ.: $\upsilon(r_0) = \pm\sqrt{2A/m}, \quad r = \frac{2}{3}r_0$

Γ.10 Ένα σώμα με μάζα $m = 0{,}5$ kg κινείται κατά τον άξονα x. Η δυναμική του ενέργεια είναι

$$U(x) = x^2 - \tfrac{1}{2}x^3, \quad (-\infty < x < \infty) \quad \text{σε J όταν το } x \text{ είναι σε m.}$$

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος. Απ.: $x = 0,\ x = \frac{4}{3}$ m

(β) Υπολογίστε και σχεδιάστε τη δύναμη $F(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα. Απ.: $F_x = \frac{3}{2}x^2 - 2x$

(γ) Το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 2$ m με αρχική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = -2\hat{\mathbf{x}}$ m/s. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνησή του. Βρείτε την ταχύτητά του στα σημεία ισορροπίας.

Απ.: $\upsilon(0) = \pm 2$ m/s, $\quad \upsilon(\frac{4}{3}) = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}$ m/s

Γ.11 Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\alpha\cos\omega t)\hat{\mathbf{x}} + (\beta\sin\omega t)\hat{\mathbf{y}}$, όπου α, β και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

(α) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

(β) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται στο σώμα. Δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(γ) Βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(r = 0) = 0$.

(δ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του σώματος; Δείξετε ότι αυτή διατηρείται σταθερή.

Απ.: $E_{ολ} = \frac{1}{2}m\omega^2(\alpha^2 + \beta^2)$

(ε) Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ καθώς το σώμα κινείται από τη θέση Α(α, 0), στη θέση Β(0, β). Απ.: $W_{δυν} = \frac{1}{2}m\omega^2(\alpha^2 - \beta^2)$

(στ) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ και ως συνάρτηση του χρόνου. Επαληθεύσετε το αποτέλεσμα (ε). Απ.: $W_{δυν} = \frac{1}{2}m\omega^2(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\omega t$

Γ.12 Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο σωματιδίων δίνεται από την έκφραση $U(r) = -V_0 r e^{-r/r_0}$ όπου r η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων και V_0 και r_0 είναι θετικές σταθερές. Αν το ένα σωματίδιο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$,

(α) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στο δεύτερο σωματίδιο. Απ.: $F_r = V_0\left(1 - \dfrac{r}{r_0}\right)e^{-r/r_0}$

(β) Να εξετάσετε αν η δύναμη αυτή είναι κεντρική, διατηρητική, ελκτική ή απωστική.

(γ) Υπάρχει τιμή του r για την οποία τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση ισορροπίας; Απ.: $r = r_0$

Γ.13 Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = D\left(-\dfrac{b}{r} + \dfrac{b^2}{r^2}\right)$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και D και b είναι θετικές σταθερές. Το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$.

(β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε πού είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική.

(γ) Το ελεύθερο άτομο κρατείται στη θέση $r = 3b/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει.

(δ) Αν τα δύο άτομα απομακρυνθούν σε απόσταση x το ένα από το άλλο και αφεθούν ελεύθερα με μηδενικές ταχύτητες, για ποιες τιμές του x θα διασπασθεί το μόριο;

Δ. Σχετικότητα

Κινηματική

Δ.1 Δείξετε ότι, για ένα συμβάν, η ποσότητα $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ είναι αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμό Lorentz (έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, με την προϋπόθεση ότι οι άξονές τους συμπίπτουν για $t = t' = 0$).

Δ.2 Οι συντεταγμένες δύο γεγονότων στο σύστημα αναφοράς S είναι οι εξής:

Γεγονός 1: $x_1 = x_0,\ t_1 = x_0/c\ \ (y_1 = 0,\ z_1 = 0)$.

Γεγονός 2: $x_2 = 2x_0,\ t_2 = x_0/2c\ \ (y_2 = 0,\ z_2 = 0)$.

(α) Υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς S΄, στο οποίο τα δύο αυτά γεγονότα συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή. Βρείτε την ταχύτητα του συστήματος αυτού ως προς το S. Υποθέτουμε ότι οι άξονες των συστημάτων S και S΄ συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$. Απ.: $V = -c/2$

(β) Σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνουν τα δύο αυτά γεγονότα στο σύστημα S΄; Απ.: $t_1' = t_2' = \sqrt{3}\, t_1$

Δ.3 Ο μέσος χρόνος ζωής των σωματιδίων μ στο δικό τους σύστημα αναφοράς είναι ίσος με $\tau = 2\times 10^{-6}$ s. Μια δέσμη σωματιδίων μ παράγεται σε κάποιο ύψος στην ατμόσφαιρα. Τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}99\, c$.

(α) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο παράγονται τα σωματίδια, αν ένα ποσοστό 1 % αυτών επιζούν και φθάνουν στην επιφάνεια της Γης.
[Στο σύστημα αναφοράς των σωματιδίων, ο αριθμός των επιζώντων σωματιδίων στη χρονική στιγμή t είναι $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, όπου N_0 είναι ο αριθμός των σωματιδίων όταν $t = 0$ και τ είναι ο μέσος χρόνος ζωής των σωματιδίων στο σύστημα αυτό.] Απ.: 19 km

(β) Πόσο είναι το μήκος αυτής της διαδρομής, όπως το βλέπουν τα σωματίδια; Απ.: 2,7 km

Δ.4 Ένα διαστημόπλοιο, Α, αναχωρεί από τη Γη και κατευθύνεται προς το άστρο α του Κενταύρου, με σταθερή ταχύτητα. Η απόσταση του άστρου από τη Γη είναι 4 έτη φωτός.
(1 έτος φωτός = η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος = $1\,\ell.\text{y.} = 9{,}45\times 10^{15}$ m).

(α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, ώστε για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο το ταξίδι αυτό να διαρκέσει 4 έτη; Απ.: $\beta = \sqrt{2}/2,\quad \gamma = \sqrt{2}$

(β) Πόσο διαρκεί το ταξίδι για έναν παρατηρητή στη Γη; Απ.: 5,7 έτη

(γ) Υποθέτουμε ότι ένα δεύτερο διαστημόπλοιο Β επιστρέφει από τον α του Κενταύρου με ταχύτητα $c/\sqrt{2}$ ως προς τη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α; Απ.: $-(2\sqrt{2}/3)c$

(δ) Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $\ell_0 = 48$ m, ποιο είναι το μήκος του όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α; Απ.: 16 m

Δ.5 Τρεις γαλαξίες, Α, Β και Γ, βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Ως προς τον Α, που βρίσκεται ανάμεσα στους Β και Γ, αυτοί κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσες με $0{,}7c$. Η ταχύτητα με την οποία οι Β και Γ απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, όπως την μετρά ο Α, είναι επομένως $1{,}4c$. Πόση είναι η ταχύτητα αυτή όπως την μετρούν οι Β και Γ; Απ.: 0,94 c

Δ.6 Το σύστημα αναφοράς S΄ κινείται με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S. Στο S΄, ένα φωτόνιο έχει συνιστώσες ταχύτητας $\upsilon_x = c\cos\theta$ και $\upsilon_y = c\sin\theta$. Βρείτε τις τιμές των συνιστωσών στο σύστημα S και δείξετε ότι η ταχύτητα του φωτονίου στο S είναι ίση με c.

Δυναμική

Δ.7 Σωματίδιο π, που ηρεμεί στο σύστημα του εργαστηρίου, διασπάται σε $\pi \to \mu + \nu$. Να δειχθεί ότι η ολική ενέργεια του μ είναι $E_\mu = \frac{c^2}{2m_\pi}\left(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2\right)$, όπου m_π, m_μ και m_ν είναι οι μάζες ηρεμίας των τριών σωματιδίων. Ποια είναι η ολική ενέργεια του ν; Ποια μορφή παίρνουν τα αποτελέσματα αυτά αν το νετρίνο ν έχει $m_\nu = 0$;

Δ.8 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_1 $\left(m_1 c^2 = 1\,\text{GeV}\right)$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}8\,c$ και συγκρούεται με ένα άλλο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_2 $\left(m_2\, c^2 = 10\,\text{GeV}\right)$ που είναι ακίνητο. Μετά την κρούση, τα δύο σωματίδια σχηματίζουν ένα σώμα με μάζα ηρεμίας M. Να βρεθούν:
(α) Η ολική ενέργεια του συστήματος, σε GeV. (β) Η ολική ορμή του συστήματος, σε GeV/c. (γ) Η μάζα M, σε GeV/c^2. Απ.: (α) 11,67 GeV, (β) 4/3 GeV/c, (γ) 11,59 GeV/c^2

Δ.9 Εξηγήστε γιατί τα ακόλουθα είναι αδύνατο να συμβούν:
(α) Ένα φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, και του δίνει όλη του την ενέργεια.
(β) Ένα μεμονωμένο φωτόνιο μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.
(γ) Ένα κινούμενο ποζιτρόνιο συγκρούεται με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο, και τα δύο εξαϋλώνονται παράγοντας ένα μόνο φωτόνιο. (Το ποζιτρόνιο είναι το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου.)

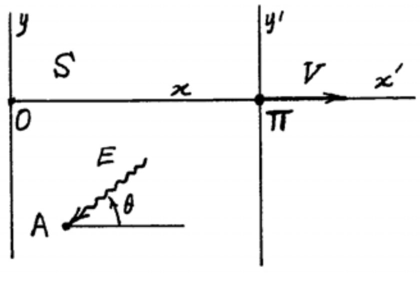
Δ.10 Ένα σωματίδιο K^0 έχει μάζα ηρεμίας ισοδύναμη με $m_K\, c^2 = 498$ MeV και διασπάται σε δύο μεσόνια, π^+ και π^-, που έχουν ίσες μάζες ηρεμίας, m_π. Στο σύστημα ηρεμίας του K^0 τα μεσόνια κινούνται με ταχύτητα $0{,}83c$ το καθένα.
(α) Να βρεθεί ο λόγος των μαζών ηρεμίας m_π / m_K. Απ.: $m_\pi / m_K = 0{,}28$
(β) Έστω ότι στο σύστημα του εργαστηρίου το K^0 κινείται με ταχύτητα $0{,}83c$ και τα δύο μεσόνια κινούνται πάνω στην αρχική ευθεία κίνησης του K^0. Να βρεθούν οι κινητικές ενέργειες των μεσονίων στο σύστημα του εργαστηρίου. Απ.: 0 και 616 MeV

Δ.11 (*Διάμηκες και εγκάρσιο φαινόμενο Doppler*). Πηγή φωτός Π κινείται με σταθερή ταχύτητα V κατά μήκος του άξονα των x στο σύστημα αναφοράς S. Η πηγή εκπέμπει, προς όλες τις κατευθύνσεις, φωτόνια τα οποία έχουν ενέργεια E_0 στο σύστημα αναφοράς S′ της πηγής (και επομένως συχνότητα $\nu_0 = E_0 / h$, και ορμή $p_0 = E_0 / c$, στο ίδιο σύστημα). Στο επίπεδο xy βρίσκεται παρατηρητής Α, ακίνητος στο σύστημα S. Ο παρατηρητής βλέπει σε μια χρονική στιγμή φωτόνια από την πηγή να κινούνται προς αυτόν, πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x, και τα οποία έχουν ενέργεια E $(\nu = E/h,\ p = E/c)$ στο σύστημα S.
(α) Να βρεθούν, στο S, οι συνιστώσες της ορμής των φωτονίων συναρτήσει των E και θ.

Απ.: $p_x = -\frac{E}{c}\cos\theta,\quad p_y = -\frac{E}{c}\sin\theta,\quad p_z = 0$

(β) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ορμής και ενέργειας, δείξετε ότι ο λόγος των συχνοτήτων στα δύο συστήματα είναι ίσος με:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\,\cos\theta} \qquad \left(\beta = \frac{V}{c}\right).$$



(γ) Συζητήστε σε συντομία τις ειδικές περιπτώσεις για $\theta = 0, 90^\circ, 180^\circ$.
(δ) Για ποια τιμή του θ είναι $\nu = \nu_0$;
Πώς εξηγείται αυτό;