ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Δευτέρα 19/10/09 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Μηχανική 1.

Λεπτή ράβδος αρχικά ακίνητη έχει μήκος l, ομοιόμορφη πυκνότητα και μάζα m. Σε απόσταση x από το ένα της άκρο σφηνώνεται ακαριαία (κρουστικό φαινόμενο) βλήμα αμελητέας μάζας το οποίο κινείται αρχικά κάθετα προς τη ράβδο και έχει αρχική ορμή p_0.
Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της. Δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας και η κίνηση είναι επίπεδη. Πόσο πρέπει να είναι το x ώστε το σημείο A από όπου μετριέται το x, αμέσως μετά την κρούση να έχει (διανυσματική) ταχύτητα $\mathbf{v}_{\rm A} = 0$; Ζητείται πρώτα να βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου.

Υπόδειξη: ¨Εργαστείτε¨ ως προς το κέντρο μάζας.

Μηχανική 2.

Θεωρήστε σύστημα τροχαλίας με δυο μάζες $m_1,\ m_2$ ($m_1 > m_2$) οι οποίες είναι δεμένες στα άκρα σχοινιού που περιβάλει την τροχαλία. Ο άξονας της τροχαλίας είναι σταθερός και οριζόντιος, το σύστημα βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Η μάζα της τροχαλίας m είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη και η ακτίνα της είναι R. Το σχοινί είναι εύκαμπτο, σταθερού μήκους και άμαζο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η τροχαλία έχει γωνιακή ταχύτητα ω_0 με φορά τέτοια που η μάζα m_2 να ανέρχεται. Η κίνηση περιγράφεται ως προς τον κατακόρυφο άξονα z που έχει αρχή το κέντρο της τροχαλίας.
Βρείτε την κίνηση του συστήματος στη μορφή $z = z(t)$, όπου z είναι η θέση της μάζας m_2. Η κατακόρυφη αρχική θέση της m_2 είναι z_0.
Το πρόβλημα να λυθεί με τη μέθοδο των εξισώσεων του Lagrange. Ζητείται να βρείτε πρώτα τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της.

Στερεά Κατάσταση 1.

Δίνεται το επίπεδο (312) στο εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα (fcc).
(α) Ποιοι είναι οι δείκτες Miller αυτού του επιπέδου ως προς ένα απλό κυβικό πλέγμα (sc) και ως προς ένα χωροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα (bcc);
(β) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο επίπεδο.
(γ) Να βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών επιπέδων όταν το πλέγμα είναι sc, fcc και bcc και να σχεδιάσετε τα διαδοχικά επίπεδα.

(δ) Να βρείτε την πυκνότητα των πλεγματικών σημείων στο επίπεδο αυτό για τις περιπτώσεις sc, fcc και bcc.

Θεμελιώδη διανύσματα του αντιστρόφου πλέγματος:

$$\text{sc} \qquad \mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{bcc}: \qquad \mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}) \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}) \qquad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(\hat{\mathbf{z}}+\hat{\mathbf{x}})$$

$$\text{fcc}: \qquad \mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}}) \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(-\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}) \qquad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})$$

Στερεά Κατάσταση 2.

Ένας διδιάστατος κρύσταλλος έχει τετράγωνο πλέγμα με ένα άτομο με μάζα m ανά μοναδιαία κυψελίδα. Η απόσταση μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων είναι a. Θεωρούμε, στην αρμονική προσέγγιση, ότι αλληλεπιδρούν οι πλησιέστεροι γείτονες στην κατεύθυνση x με σταθερά ελατηρίου k_1 και οι πλησιέστεροι γείτονες στην κατεύθυνση y με σταθερά ελατηρίου k_2.

(α) Με δεδομένο ότι τα άτομα κινούνται στο επίπεδο του πλέγματος, να βρείτε τη σχέση διασποράς $\omega(\mathbf{q})$.

(β) Να εκφράσετε το $\omega(\mathbf{q})$ κατά μήκος του άξονα x ($\mathbf{q} = q_y\hat{\mathbf{y}}$) από το $\mathbf{q} = 0$ έως το άκρο της ζώνης Brillouin.

(γ) Να βρείτε τον τρόπο που ταλαντώνεται το σύστημα όταν το $\mathbf{q} = 0$ και όταν βρίσκεται στην γωνία της ζώνης Brillouin από το ερώτημα (β). Αιτιολογήστε ποιοτικά την απάντησή σας.

Κβαντομηχανική 1.

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ισχυρό μαγνητικό πεδίο B_0 κατά τον (θετικό) άξονα των z με το σπιν επίσης κατά τον (θετικό) άξονα των z. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να δρα πρόσθετο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{x}}B_1\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}B_1\sin(\omega t)$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το σπιν του ηλεκτρονίου να δείξει κατά τον αρνητικό άξονα των z τη χρονική στιγμή $t > 0$.

Υποδείξεις: Αγνοήστε οποιαδήποτε χωρική εξάρτηση. Η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης δίνεται από τη σχέση:

$$H = -\gamma\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Οι πίνακες του Pauli είναι:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{-1} \end{pmatrix}.$$

Κβαντομηχανική 2.

Θεωρήστε τους φερμιονικούς τελεστές $a_+,\ a_-$.

(1) Αν ορίσουμε νέους τελεστές

$$b_+ = ua_+ - va_-^\dagger,\ b_- = ua_- + va_+^\dagger,$$

να βρεθούν οι συνθήκες υπό τις οποίες τα b_+, b_- είναι επίσης φερμιονικοί τελεστές. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα u και v είναι πραγματικοί αριθμοί.

(2) Να εκφράσετε το κενό $|0_b>$ (ορισμός: $b_+|0_b>= b_-|0_b>= 0)$, συναρτήσει του κενού $|0_a>$ (ορισμός: $a_+|0_a>= a_-|0_a>= 0)$, των $u,\ v$ και των τελεστών $a_+^\dagger,\ a_-^\dagger$.

Υπόδειξη: γράψτε το $|0_b>$ ως σειρά δυνάμεων των τελεστών $a_+^\dagger,\ a_-^\dagger$ που δρουν πάνω στο $|0_a>$ και προσδιορίστε τους συντελεστές κάθε όρου.

Κβαντομηχανική 3.

Να προσδιορίσετε τις δέσμιες καταστάσεις γιά ένα δυναμικό της μορφής

$$V(x) = -g\delta(x-L) - g\delta(x+L),\ g > 0,\ L > 0.$$

Ειδικότερα, δείξτε ότι, αν $\frac{2mgL}{\hbar^2} < 1$, προκύπτει μόνο μία δέσμια κατάσταση, ενώ αν, αντίθετα, $\frac{2mgL}{\hbar^2} > 1$, προκύπτουν δύο δέσμιες καταστάσεις.

Υποδείξεις: $E < 0$. Θεωρήστε χωριστά τις λύσεις άρτιας και περιττής ομοτιμίας.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε (1/2 θέματα Μηχανικής ή 1/2 θέματα Στερεάς Κατάστασης) & 2/3 θέματα Κβαντομηχανικής.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Τρίτη 20/10/09 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

Συμπαγές διηλεκτρικό υλικό έχει σχήμα σφαίρας ακτίνας R, και χαρακτηρίζεται από σταθερή πυκνότητα διπολικής ροπής, ($\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathbf{d}^3 r = \mathbf{P_o}$=σταθ., δηλ., ομοιόμορφη πόλωση). Υπολογίστε, συναρτήσει των P_o και R, τα παρακάτω μεγέθη:
(α) Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του πολωμένου διηλεκτρικού υλικού, $\mathbf{E}_{\epsilon\xi}$.
(β) Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πολωμένου διηλεκτρικού υλικού, $\mathbf{E}_{\epsilon\sigma}$.
(γ) Τη συνολική πυκνότητα φορτίου χώρου του πολωμένου διηλεκτρικού υλικού, $\rho = \rho(\mathbf{r})$.
(δ) Την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην σφαιρική επιφάνεια, $\sigma = \sigma(R, \theta)$, ως συνάρτηση της γωνίας θ, ως προς την κατεύθυνση της πόλωσης $\mathbf{P_o}$.
(ε) Προσδιορίστε τις γωνίες όπου παρατηρείται μέγιστη (θ_1) και ελάχιστη (θ_2) ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου, $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\epsilon\sigma} - \mathbf{E}_{\epsilon\xi}$, στα όρια της σφαίρας, ($r = R$), και συσχετίστε τα με την τοπική τιμή της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου, $\sigma_1 = \sigma(R, \theta_1)$ και $\sigma_2 = \sigma(R, \theta_2)$, αντίστοιχα.
(στ) Να σχεδιάσετε τη μορφή των δυναμικών γραμμών των $\mathbf{E}_{\epsilon\xi}$ και $\mathbf{E}_{\epsilon\sigma}$.

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν σας διευκολύνει, υποθέστε ότι το ίδιο υλικό, όταν δεν είναι πολωμένο, μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση δύο πυκνοτήτων φορτίου χώρου, $\rho_+(\mathbf{r}) = -\rho_-(\mathbf{r}) = \rho_o$ =σταθ.]

ΗΜ 2.

Κυλινδρικός πυκνωτής μήκους L αποτελείται από δύο ομοαξονικούς αγώγιμους κυλινδρικούς φλοιούς ακτίνων R_1 και R_2. Ισχύει, $L \gg R_2 - R_1$ και, επομένως, μπορούμε να θεωρούμε αμελητέα τα φαινόμενα των άκρων.
(α) Υπολογίστε την χωρητικότητα, $C = |Q| / |\Delta V|$, του πυκνωτή, συναρτήσει των γεωμετρικών του χαρακτηριστικών και παγκόσμιων σταθερών.
(β) Δείξτε ότι, στο όριο που $R_1 \to \infty$, αλλά $R_2 - R_1 = D$=σταθ., η χωρητικότητα του συστήματος τείνει στο όριο του κατάλληλου (αντίστοιχου) επίπεδου πυκνωτή.
(γ) Αν η εξωτερική ακτίνα του πυκνωτή είναι σταθερή, $R_2 = a$, να υπολογιστεί η τιμή της εσωτερικής ακτίνας R_1, συναρτήσει του a, έτσι ώστε ο πυκνωτής να αποθηκεύει τη μέγιστη ηλεκτροστατική ενέργεια, υπό την προϋπόθεση ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του δεν θα υπερβαίνει τη μέγιστη τιμή $|\mathbf{E}_{\max}| = E_o$.

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Προσδιορίστε την τιμή της ακτίνας r στην οποία παρατηρείται το μέγιστο ηλεκτροστατικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή, για δεδομένη ηλεκτροστατική κατάσταση].

ΗΜ 3.

Ένα συρμάτινο τετραγωνικό πλαίσιο πλευράς a, μάζας M, και συνολικής αντίστασης R, βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = 0$ και κινείται με ταχύτητα $v_o \hat{\mathrm{x}}$. Το πλαίσιο βρίσκεται στο επίπεδο $x - y$, ενώ στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_o(x/x_o)\hat{\mathbf{z}}$, όπου x_o B_o είναι σταθερές.
(α) Υπολογίστε την απόσταση που θα διανύσει το πλαίσιο μέχρι να σταματήσει, υποθέτοντας ότι η πλευρά a είναι τόσο μικρή ώστε η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πλαισίου να θεωρείται αμελητέα.
(β) Υπολογίστε ακριβώς την ροή του μαγνητικού πεδίου που διέρχεται από το πλαίσιο, όταν το κέντρο του βρίσκεται στη θέση x, χωρίς την προσέγγιση του ερωτήματος (α).

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_o}|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r_o}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_o}|^3}, \qquad \int \frac{\mathbf{d}z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2(z^2 + a^2)^{1/2}}, \qquad (1+\epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon \quad \text{όταν} \quad \epsilon \ll 1$$

$$\mathbf{B_m}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \qquad \mathbf{E_p}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right], \qquad \ln(1 + x) \approx x, \ \ -1 < x \leq 1$$

Στατιστική Μηχανική 1.

Οι τρεις χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες κάποιου μορίου είναι $E_1 = 0,\ E_2 = \epsilon,\ E_3 = 10\epsilon$. Θεωρούμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό, N, τέτοιων μορίων, τα οποία έχουν αμελητέα αλληλεπίδραση, σε ισορροπία σε θερμοκρασία T.
(α) Να βρείτε τη μέση ενέργεια ανά μόριο και την ειδική θερμότητα ανά μόριο.
(β) Έστω $N = 10^{10}$ μόρια. Να δείξετε ότι κάτω από κάποια θερμοκρασία, μόνο οι ενεργειακές στάθμες E_1 και E_2 είναι κατειλημμένες. Ποια είναι (κατά προσέγγιση) η θερμοκρασία αυτή;

Στατιστική Μηχανική 2.

Ένα σύστημα αποτελείται από n μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια και βρίσκεται σε ασθενές μαγνητικό πεδίο B, σε ισορροπία σε θερμοκρασία T. Η μαγνητική ροπή του κάθε σωματιδίου μπορεί να έχει τιμή $m\mu$ κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, όπου $m = -J, -J+1, -J+2, \ldots, J-2, J-1, J$, (όπου J είναι ακέραιος).
(α) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος.
(β) Να βρείτε τη μέση μαγνήτιση, $< M >$, του συστήματος.
(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της μέσης μαγνήτισης για πολύ υψηλές τιμές της θερμοκρασίας.

Στατιστική Μηχανική 3.

Ένα σύστημα αποτελείται από τρία σωματίδια κατά μήκος μίας γραμμής. Το κάθε σωματίδιο, που έχει σπιν $S = 1/2$ είναι συζευγμένο με αλληλεπιδράσεις πρώτων γειτόνων.

$$S(1) - S(2) - S(3)$$

Το κάθε σωματίδιο έχει μαγνητική ροπή στην ίδια κατεύθυνση με το σπιν, $\boldsymbol{\mu_i} = 2m\mathbf{S}(i)$. Το σύστημα τοποθετείται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο B στην κατεύθυνση z και βρίσκεται σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία T. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται προσεγγιστικά από το μοντέλο Ising:

$$H = J[S_z(1)S_z(2) + S_z(2)S_z(3)] - 2\mu B\left[S_z(1) + S_z(2) + S_z(3)\right],\ (J > 0,\ \mu > 0)$$

(α) Να βρείτε όλες τις μικροκαταστάσεις του συστήματος και την ενέργεια της κάθε μίας από αυτές.
(β) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος.
(γ) Να βρείτε τη μέση ενέργεια και τη μέση μαγνήτιση του συστήματος.
(δ) Ποια είναι η βασική κατάσταση του συστήματος για τις περιπτώσεις (i) $\mu B = J/2$ και (ii) $\mu B = 6J$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας με φυσικά επιχειρήματα.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/3 θέματα Στατιστικής & 2/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού ή 2/3 θέματα Στατιστικής & 1/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού

Καλή επιτυχία.