

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 30/10/08 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Μηχανική 1. Όλες οι διαδικασίες να γίνουν με χρήση Αναλυτικής Δυναμικής.

Δίνεται σύστημα που αποτελείται από άμαξη ευθύγραμμη λεπτή ράβδος στα άκρα της οποίας βρίσκονται δυο σημειακές μάζες 1 και 2. Η ράβδος βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο περί οριζόντιο άξονα που διέρχεται από κάποιο σημείο της. Υποθέστε ότι η ράβδος βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία όταν η μάζα 1 είναι στο κατώτατο σημείο που μπορεί να βρεθεί. Θεωρήστε ως γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον κατακόρυφο άξονα ο οποίος είναι θετικός προς τα πάνω.

(i) Υπολογίστε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος ως συναρτήσεις της γενικευμένης συντεταγμένης.

(ii) Υπολογίστε την ενεργειακή συνάρτηση του συστήματος.

(iii) Υπολογίστε τη μηχανική ενέργεια και βεβαιωθείτε ότι αυτές οι δυο συναρτήσεις είναι ίδιες.

(iv) Δείξτε ότι κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

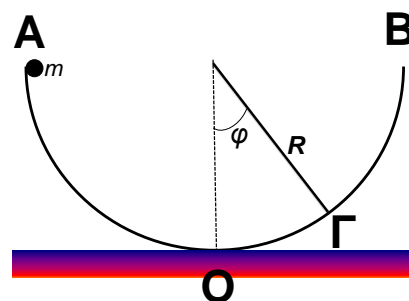
(v) Βρείτε υπό ποια προϋπόθεση η ανωτέρω θέση είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας. Θυμηθείτε ότι η ενέργεια πρέπει να είναι ελάχιστη. Ποια είναι η θέση ασταθούς ισορροπίας;

(vi) Γράψτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας και βρείτε την περίοδο των "μικρών" ταλαντώσεων.

Υπενθύμιση:

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Μηχανική 2. (α) Μικρή σφαίρα μάζας m αρχικά βρίσκεται στο σημείο Α του σχήματος. Αφήνεται να πέσει και ολισθαίνει κατά μήκος της ημικυκλικής επιφάνειας ΑΟΒ που έχει ακτίνα R . Η περιοχή ΑΟ είναι λεία, ενώ η ΟΒ είναι στρωμένη με υλικό που έχει τριβή. Έτσι η σφαίρα σταματάει στο Γ. Βρείτε τη σχέση μεταξύ του συντελεστή τριβής μ και της γωνίας ϕ . Να υπολογίσετε και να εκφράσετε τη φυσική σημασία του μ αν το Γ συμπίπτει (i) με το Ο και (ii) με το Β.



(β) Υποθέστε ότι έχετε ένα είδος γενικευμένης μηχανικής όπου η λαγκραντζιανή εξαρτάται και από δευτερες παραγώγους των γενικευμένων συντεταγμένων ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Εφαρμόστε την αρχή του Hamilton με τους περιορισμούς ότι στα άκρα της ολοκλήρωσης οι "μεταβολές" (variations) όχι μόνο των q_i αλλά και των \dot{q}_i είναι μηδέν και δείξτε ότι οι (διαφορικές) εξισώσεις των Euler-Lagrange παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Θυμίζουμε ότι η αρχή του Hamilton λέει ότι η "μεταβολή" του ολοκληρώματος δράσης λαμβανόμενου πάνω στην πραγματική διαδρομή και πάνω σε απείρως γειτονικές διαδρομές είναι μηδέν, δηλαδή

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) dt = 0$$

όπου οι "μεταβολές" νοούνται με t σταθερό.

Κβαντομηχανική 1. Ένα κβαντικό σύστημα διέπεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$H = E \begin{pmatrix} 1+\mu & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1+\mu \end{pmatrix}.$$

Το μ είναι θετική σταθερά. Να υπολογιστεί η κυματοσυνάρτηση $|x(t)\rangle$ για τυχόντα χρόνο, αν

$$|x(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Κβαντομηχανική 2. Θεωρήστε σωματίδιο με σπιν $1/2$ και μια κατεύθυνση στο χώρο που προσδιορίζεται από το μοναδιαίο άνυσμα $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

- (i) Βρείτε τον τελεστή \hat{s}_n του σπιν κατά μήκος του \hat{n} .
- (ii) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της προβολής κατά μήκος του \hat{n} καταστάσεων με $s_z = +1/2$ ή $s_z = -1/2$;
- (iii) Ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε προβολές $s_n = +1/2$ ή $s_n = -1/2$ σε τέτοιες καταστάσεις;
- (iv) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις για καταστάσεις με $s_x = \pm 1/2$ και $s_y = \pm 1/2$.

Κβαντομηχανική 3. Θεωρήστε τον αρμονικό ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

- (i) Αποδείξτε ότι $\langle n | x^4 | n \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 \frac{3}{4} (2n^2 + 2n + 1)$, όπου $|n\rangle$ η ιδιοσυνάρτηση της στάθμης n .

(ii) Προσδιορίστε, σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών, τις ενεργειακές στάθμες του αναρμονικού ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^4$$

(iii) Προσδιορίστε, μέχρι δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών, τις ενεργειακές στάθμες του αναρμονικού ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \gamma x^3$$

Θα χρειαστούν οι σχέσεις

$$\langle n-3|x^3|n \rangle = \langle n|x^3|n-3 \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{(3/2)} \sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)}{8}}$$

$$\langle n-1|x^3|n \rangle = \langle n|x^3|n-1 \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{(3/2)} \sqrt{\frac{9n^3}{8}}$$

που είναι τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία πίνακα του x^3

Υπενθύμιση:

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), & a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \\ a^\dagger|n \rangle &= \sqrt{n+1}|n+1 \rangle, & a|n \rangle &= \sqrt{n}|n-1 \rangle \\ E_n^{(1)} &= \langle n|V|n \rangle, & E_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V|n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \end{aligned}$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να απαντήσετε 1/2 θέματα Μηχανικής & 2/3 θέματα Κβαντομηχανικής.

Καλή επιτυχία.

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος II - Παρασκευή 31/10/08 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

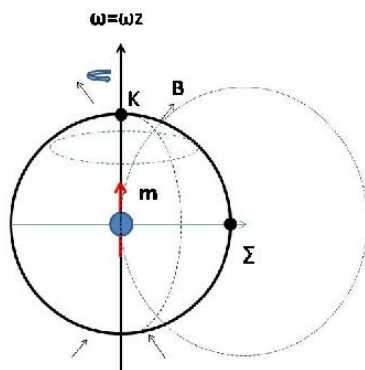
(α) Διατυπώστε το νόμο του Faraday σε ολοκληρωτική μορφή.

(β) Θεωρήστε ένα βρόχο ο οποίος κινείται με ταχύτητα v ως προς το σύστημα του εργαστηρίου. Δείξτε ότι η μεταβολή της μαγνητικής ροής θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$



Σχήμα 1: Περιστρεφόμενος κυκλικός δακτύλιος.

(γ) Κυκλικός βρόχος ακτίνας R περιστρέφεται ομοιόμορφα με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega \hat{z}$ ως προς την διάμετρο του που συμπίπτει με τον άξονα z . Στην αρχή των αξόνων υπάρχει ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο μαγνητικής διπολικής ροπής $\mathbf{m} = m\hat{z}$. Δείξτε ότι η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη μεταξύ των σημείων K και Σ δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{E}_{\Sigma K} = \int_{\Sigma}^K \mathbf{E}' \cdot d\ell = \frac{\mu_0 M \omega}{4\pi R}$$

\mathbf{E}' είναι το ηλεκτρικό πεδίο ως προς το σύστημα αναφοράς του βρόχου. Δίνεται η μαγνητική επαγωγή σημειακού διπόλου, διπολικής ροπής \mathbf{m}

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \right]$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του \mathbf{x} .

HM 2.

(α) Λαμβάνοντας υπόψη τις βασικές υποθέσεις τις ηλεκτροστατικής αποδείξτε ότι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας τέλει αγωγού με επιφανειακή κατανομή φορτίου σ δίνεται από τη σχέση

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και ϵ_0 η επιτρεπτικότητα του κενού.

(β) Ένας απομονωμένος σφαιρικός φλοιός ακτίνας a βρίσκεται σε ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$. Αν η σφαίρα κοπεί σε δύο ημισφαίρια με ένα επίπεδο κάθετο στο εξωτερικό πεδίο υπολογίστε τη δύναμη που απαιτείται για να αποτραπεί ο διαχωρισμός των ημισφαιρίων αν ο φλοιός είναι αφόρτιστος και αν το συνολικό του φορτίο είναι Q . Δίνεται γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Laplace παρουσία αξιμουθιακής συμμετρίας

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell} r^{\ell} + b_{\ell} r^{-(\ell+1)}] P_{\ell}(\cos \theta),$$

τα πολυώνυμα Legendre

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), \dots$$

και η σχέση ορθοκανονικότητάς τους

$$\int_{-1}^1 P_{\ell'}(x) P_{\ell}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell' \ell}.$$

HM 3.

Θεωρήστε δύο όμοιους παράλληλους ομοαξονικούς αγωγίσιμους δακτυλίους ακτίνας a των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στον άξονα z και απέχουν απόσταση b . Οι δακτύλιοι φέρουν ηλεκτρικό φορτίο Q_1 και Q_2 , αντίστοιχα.

- (α) Πώς θα κατανεμηθεί το ηλεκτρικό φορτίο σε κάθε δακτύλιο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (β) Διατυπώστε την έκφραση που περιγράφει την χωρική πυκνότητα φορτίου των δακτυλίων σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με την βοήθεια της κατανομής $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ του Dirac.
- (γ) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στον άξονα z .
- (δ) Αν το έργο που απαιτείται για να φέρουμε ένα σημειακό φορτίο q έως τα κέντρα των δακτυλίων είναι W_1 και W_2 , αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα φορτία των δακτυλίων είναι

$$Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{b^2 q} (a^2 + b^2)^{1/2} [(a^2 + b^2)^{1/2} W_1 - a W_2]$$

$$Q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{b^2 q} (a^2 + b^2)^{1/2} [(a^2 + b^2)^{1/2} W_2 - a W_1]$$

Στατιστική Μηχανική 1.

(α) Να δείξετε ότι για ένα σύστημα μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων σε θερμοκρασία T , η πιθανότητα να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο σε μία κατάσταση με ενέργεια Γ πάνω από το χημικό δυναμικό μ είναι η ίδια με την πιθανότητα να λείπει ένα ηλεκτρόνιο από μία κατάσταση με ενέργεια Γ κάτω από το χημικό δυναμικό.

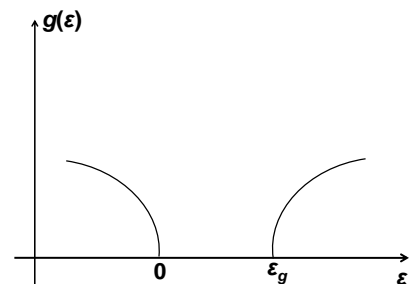
(β) Έστω ότι η πυκνότητα των καταστάσεων $g(\epsilon)$ δίνεται από τη σχέση

$$g(\epsilon) = \begin{cases} a(\epsilon - \epsilon_g)^{1/2} & \text{για } \epsilon > \epsilon_g \\ 0 & \text{για } 0 < \epsilon < \epsilon_g \\ b(-\epsilon)^{1/2} & \text{για } \epsilon < 0 \end{cases}$$

όπως δείχνει το σχήμα.

Όταν $T = 0$ όλες οι καταστάσεις με $\epsilon < 0$ είναι κατειλημμένες και όλες οι άλλες κενές. Όταν όμως $T > 0$, ορισμένες καταστάσεις με $\epsilon > 0$ καταλαμβάνονται, ενώ ορισμένες καταστάσεις με $\epsilon < 0$ μένουν κενές. Να βρείτε το χημικό δυναμικό $\mu(T)$ όταν $a = b$. Να βρείτε τη σχέση που καθορίζει το χημικό δυναμικό όταν $a \neq b$ και να περιγράψετε ποιοτικά τη συμπεριφορά του $\mu(T)$ όταν $a > b$ και όταν $a < b$.

(γ) Αν υπάρχουν n_d περισσότερα ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου από όσα μπορούν να καταλάβουν τις καταστάσεις με $\epsilon < 0$, ποια είναι η τιμή του χημικού δυναμικού για $T = 0$, $\mu(0)$;



Στατιστική Μηχανική 2.

Θεωρήστε ένα κβαντικό αέριο μη αλληλεπιδρώντων μποζονίων με σπιν 0 και μάζα m το καθένα (π. χ. άτομα ${}^4\text{He}$) τα οποία είναι ελεύθερα να κινούνται μέσα σε όγκο V .

(α) Να βρείτε την πυκνότητα ενέργειας και τη ειδική θερμότητα στην περιοχή των πολύ χαμηλών θερμοκρασιών. Για ποιο λόγο θέτουμε το χημικό δυναμικό ίσο με μηδέν σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες;

(β) Να απαντήσετε στα ερωτήματα του (α) για την περίπτωση του φωτονικού αερίου (τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα). Να δείξετε ότι η ενέργεια είναι ανάλογη της T^4 .

Να φέρετε τα ολοκληρώματα σε αδιάστατη μορφή, αλλά να μην τα υπολογίσετε.

Στατιστική Μηχανική 3.

Υπολογισμός της ισοθερμικής συμπίεσότητας μετάλλων με το μοντέλο των ελεύθερων ηλεκτρονίων: Θεωρήστε ότι τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας είναι ένα αέριο μη αλληλεπιδρώντων φερμιονίων σε θερμοκρασία $T = 0$ K. Η αριθμητική τους πυκνότητα είναι n και η ενέργεια Fermi ϵ_F .

Να βρείτε την ισοθερμική συμπίεσότητα

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

όπου V είναι ο όγκος και p η πίεση.

Υπόδειξη: $p = -(\partial F/\partial V)_T$, όπου F είναι η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz και $pV = (2/3)E$, όπου E είναι η ολική ενέργεια.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

**Να απαντήσετε 1/3 θέματα Στατιστικής & 2/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού ή
2/3 θέματα Στατιστικής & 1/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού**

Καλή επιτυχία.