ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 26/02/09 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Μηχανική 1.

Θεωρήστε στερεή άμαζη ευθύγραμμη λεπτή ράβδο μήκους L η οποία μπορεί να περιστρέφεται περί το ένα της άκρο στο επίπεδο. Στο άλλο άκρο της είναι στερεωμένο υλικό σημείο (σωμάτιο) μάζας m. Η ράβδος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας σταθερής έντασης g. Θεωρήστε σύστημα πολικών συντεταγμένων με τον άξονα μέτρησης της γωνίας ϕ θετικόν προς τα κάτω. Ζητείται να βρείτε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης η λύση της οποίας προσδιορίζει την $\phi = \phi(t)$. Συγχρόνως να βρείτε τις γενικευμένες συνιστώσες δύναμης του δεσμού Q_{cr}, $Q_{\mathrm{c}\phi}$ οι οποίες αναγκάζουν το σωμάτιο να βρίσκεται σε σταθερή απόσταση L από το σημείο περιστροφής (βρείτε τις αντίστοιχες καρτεσιανές συνιστώσες F_{cr}, $F_{\mathrm{c}\phi}$). Οι δυνάμεις να εκφραστούν συναρτήσει της ταχύτητας του σωματίου και της γωνίας ϕ. Η λύση <u>ΠΡΕΠΕΙ</u> να γίνει <u>ΜΟΝΟ</u> με τις μεθόδους της Αναλυτικής Μηχανικής.

Χρήσιμες σχέσεις

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(t) A_{ji}(q, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji}(q, t)\mathrm{d}q_i + A_j(q, t)\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, M$$

Μηχανική 2.

Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Lagrange στη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

μπορεί να γραφτούν στη μορφή των εξισώσεων του Nielsen στη μορφή

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{όπου} \quad \dot{T} = \frac{\mathrm{d}T(q, \dot{q}, t)}{\mathrm{d}t}$$

Υπόδειξη: $\dot{T} = \dot{T}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, δηλαδή έχομε άμεση εξάρτηση από τα $q,\ \dot{q},\ \ddot{q},\ t$.

Κβαντομηχανική 1.

Για έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή, με συχνότητα ω, θεωρήστε τις σύμφωνες καταστάσεις:

$$|z> \equiv e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n>,$$

όπου ο z είναι μιγαδικός αριθμός.
(1) Δείξτε ότι είναι κανονικοποιημένες και ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή καταστροφής με ιδιοτιμή το z.
(2) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή

$$N = < z|a^\dagger a|z >$$

και την αβεβαιότητα

$$\Delta N = \sqrt{< z|a^\dagger a a^\dagger a|z > - N^2}$$

για μια τέτοια κατάσταση.
(3) Υποθέστε τώρα ότι ο ταλαντωτής τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σ' αυτήν την κατάσταση. Να προσδιορίσετε την κυματοσυνάρτηση για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$. Ποιά είναι η πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί στην κατάσταση $|z>$ για $t > 0$;

Κβαντομηχανική 2.

Ένα σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(r) = Ne^{-ar}$, όπου το N είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης και το a θετική σταθερά με μονάδες αντίστροφου μήκους.
(α) Υπολογίστε το N.
(β) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε απόσταση $r > \frac{1}{a}$;
(γ) Προσδιορίστε την κυματοσυνάρτηση $\tilde{\psi}(k)$ στο χώρο των ορμών.
(δ) Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει το σωματίδιο ορμή $p < \hbar a$;

Κβαντομηχανική 3.

Ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο και βρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \sin(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$$

Για $t = 0$ το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_n με ιδιοτιμή $+\hbar/2$, όπου

$$S_n = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

(α) Επιλύστε τη χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger.

(β) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την πιθανότητα μέτρησης της τιμής $-\hbar/2$, για το σπιν στην κατεύθυνση x.

Υπόδειξη: Η Χαμιλτονιανή δίνεται από τη σχέση:

$$H = -\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \ \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Χρήσιμες σχέσεις

$$\int \mathrm{d}k \frac{k^2}{(k^2+a^2)^4} = \frac{-3a^5k + 8a^3k^3 + 3(a^2+k^2)^3 \arctan\left(\frac{k}{a}\right)}{48a^5(a^2+k^2)^3}, \qquad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad L_\pm \equiv L_x \pm iL_y,$$

$$L_+|nlm>= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|nl\,m{+}1>, \qquad L_-|nlm>= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|nl\,m{-}1>,$$

$$\text{Μετασχηματισμός Fourier} : \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\vec{x}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}f(\vec{x})$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/2 θέματα Μηχανικής & 2/3 θέματα Κβαντομηχανικής.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

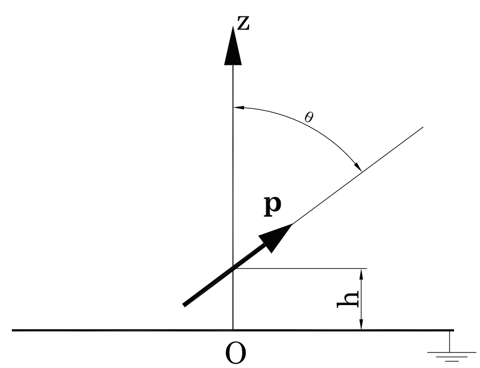
Μέρος ΙΙ - Παρασκευή 27/02/09 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

Ένα ηλεκτρικό δίπολο ηλεκτρικής διπολικής ροπής

$$\mathbf{p} = p(\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z)$$

τοποθετείται σε ύψος h από γειωμένο ιδανικό αγωγό ο οποίος καταλαμβάνει των χώρο ($z \leq 0$). Το διάνυσμα της ηλεκτρικής διπολικής ροπής σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z. Υπολογίστε τα ακόλουθα:
(α) τη δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρικό δίπολο,
(β) το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί το δίπολο στο άπειρο



$$W_{h\to\infty} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1+\cos^2\theta}{(2h)^3}p^2$$

Δίνονται:
1) Το δυναμικού ηλεκτρικού διπόλου

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

2) Το δυναμικό αλληλεπίδρασης ηλεκτρικού διπόλου με εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

$$W_{\text{int}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$$

3) Το ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτρικού διπόλου

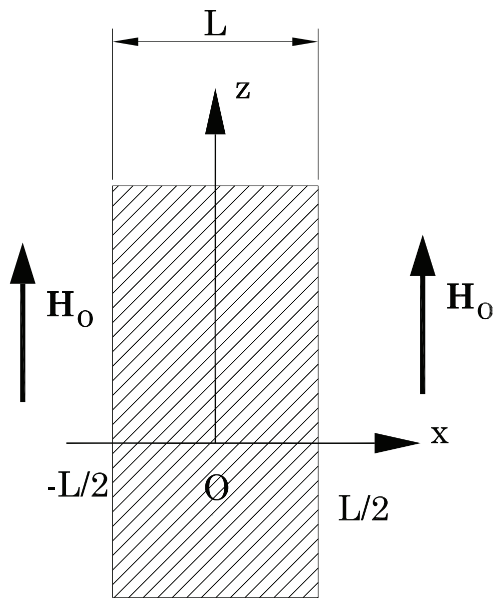
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5}$$

HM 2.

Φαινομενολογικά ένας υπεραγωγός μπορεί να περιγραφεί ως ένα μέσο ($\epsilon = \epsilon_0,\ \mu = \mu_0$) για το οποίο ισχύουν οι εξισώσεις London

$$\mathbf{E} = \Lambda\left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + c^2\nabla\rho\right) \quad \text{(Ιδιότητα τέλειου αγωγού)}$$

$$\mathbf{B} = -\Lambda\nabla\times\mathbf{J} \quad \text{(Φαινόμενο Meissner)}$$



(α) Να αποδείξετε ότι

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{E}, \qquad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{B}$$

$$\nabla^2\mathbf{J} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{J}}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{J}, \qquad \nabla^2\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\rho$$

όπου $\lambda = (\Lambda/\mu_0)^{1/2}$ είναι το μήκος διείσδυσης. Ποια είναι η φυσική σημασία αυτών των εξισώσεων στη μόνιμη κατάσταση;

(β) Θεωρήστε μια υπεραγώγιμη άπειρη πλάκα, πάχους L, παράλληλη με το επίπεδο $y - z$, η οποία βρίσκεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H_o} = H_o\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$. Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις που ικανοποιεί ένας υπαραγωγός στη μόνιμη κατάσταση να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή σ' όλο το χώρο και την πυκνότητα ρεύματος.

Υπόδειξη: Για τη λύση του προβλήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}$$

Για το ερώτημα (β) θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε σωστά τις τις συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η μαγνητική επαγωγή στις επιφάνειες $x = L/2$ και $x = -L/2$.

HM 3.

Οι πηγές ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι τοποθετημένες σε μια αξονική συμμετρία με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν φορτία κοντά στον άξονα συμμετρίας. Να δείξετε ότι το δυναμικό, $\Phi(\rho, z)$, (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) κοντά στον άξονα συμμετρίας θα έχει τη μορφή

$$\Phi(\rho, z) = \Phi(0, z) - \frac{1}{2\cdot 2!}\rho^2\frac{\partial^2\Phi(0, z)}{\partial z^2} + \ldots$$

Υπόδειξη: Η εξίσωση Laplace, $\nabla^2\Phi = 0$, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, (ρ, ϕ, z), έχει τη μορφή

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Στατιστική Μηχανική 1.

Ένα δοχείο με όγκο V περιέχει N μόρια ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία T και υπό πίεση P_1. Η ενέργεια ενός μορίου έχει τη μορφή

$$E_k(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \epsilon_k,$$

όπου ϵ_k συμβολίζει τις ενεργειακές στάθμες που αντιστοιχούν στις εσωτερικές καταστάσεις των μορίων του αερίου.

(α) Να υπολογίσετε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz, $F = -k_B T \ln Z$, όπου Z είναι η συνάρτηση επιμερισμού. Να αναδείξετε τη σχέση της F με τον όγκο V.

Στη συνέχεια, θεωρήστε ένα άλλο δοχείο, επίσης σε θερμοκρασία T, που περιέχει τον ίδιο αριθμό μορίων ενός ιδανικού αερίου υπό πίεση P_2.

(β) Να βρείτε μία έκφραση για την ολική εντροπία των δύο αερίων συναρτήσει των $T,\ N,\ P_1,\ P_2$.

(γ) Τα δοχεία έρχονται σε επαφή ώστε να επιτρέπεται στα αέρια να αναμειχθούν χωρίς την παραγωγή έργου. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της εντροπίας που θα επέλθει στο σύστημα. Να κάνετε έναν έλεγχο της απάντησής σας, θεωρώντας την ειδική περίπτωση $V_1 = V_2$ (δηλαδή $P_1 = P_2$).

Στατιστική Μηχανική 2.

Ιδανικό μονατομικό αέριο βρίσκεται εντός κυλινδρικού δοχείου ακτίνας R και μήκους L, που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Το σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με θερμοκρασία T. Το άεριο αποτελείται από άτομα μάζας m, που υπακούουν την κλασική στατιστική και δεν έχουν εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας.
(α) Να βρείτε την ενέργεια του ιδανικού αερίου στο σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με το σώμα.
(β) Υπολογίστε την πυκνότητα των ατόμων συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Αγνοήστε το βαρυτικό πεδίο

Στατιστική Μηχανική 3.

Ένας γραμμικός απλός αρμονικός ταλαντωτής έχει ενεργειακές στάθμες, $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα του κανονικού τρόπου ταλάντωσης και $n = 1, 2, 3, \ldots$
(α) Θεωρήστε ότι ο αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T, όπου $kT/\omega \ll 1$. Να βρείτε τη μέση ενέργεια του ταλαντωτή συναρτήσει της θερμοκρασίας.
(β) Για έναν διδιάστατο απλό αρμονικό ταλαντωτή, $n = n_x + n_y$, όπου

$$E_{nx} = (n_x + 1/2)\hbar\omega_x,\ E_{ny} = (n_y + 1/2)\hbar\omega_y,\ n_x = 1, 2, 3, \ldots \text{ και } n_y = 1, 2, 3, \ldots$$

Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού Z όταν αυτός βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T. Στη συνέχεια να βρείτε τη Z για την εκφυλισμένη περίπτωση $w_x = w_y$.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να απαντήσετε 1/3 θέματα Στατιστικής & 2/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού ή 2/3 θέματα Στατιστικής & 1/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού

Καλή επιτυχία.