ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 09/04/09 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Μηχανική 1.

Θεωρήστε σύστημα άμαζου ελατηρίου στο άκρο 1 του οποίου είναι στερεωμένο σωμάτιο μάζας m (συντεταγμένη x_1). Στο άκρο 2 δεν υπάρχει σωμάτιο αλλά αυτό το άκρο είναι αναγκασμένο να κινείται έτσι που η θέση του συναρτήσει του χρόνου να είναι, $x_2 = x_2(t) = at^2/2$. Η κίνηση γίνεται κατά μήκος μιας ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται το ελατήριο και δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις στο σύστημα. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι μηδέν.
(α) Βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης με τη μέθοδο των εξισώσεων του Lagrange. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης κίνησης, $x_1 = x_1(t)$.
(β) Βρείτε τη γενικευμένη συνιστώσα δύναμης δεσμού (δύναμη δεσμού) στην οποία οφείλεται η κίνηση $x_2 = x_2(t) = at^2/2$ του σημείου 2.

Υπόδειξη: Για τον υπολογισμό της δύναμης του δεσμού μπορείτε να θεωρήσετε ότι και στο άκρο 2 υπάρχει σωμάτιο μηδενικής μάζας και να εξετάσετε το σύστημα: μάζα 1, ελατήριο, μάζα 2. Προσδιορίστε τη σχέση δεσμού $f(x_1, x_2, t) = 0$ και (αν την χρειάζεστε) τη διαφορική μορφή της.

Μηχανική 2.

Έστω $L = L(q, \dot{q}, t)$ είναι η λαγκραντζιανή συστήματος με n (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες θέσης (για τις οποίες ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange). Δείξτε με απευθείας αντικατάσταση ότι και η λαγκραντζιανή

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}F(q, t)}{\mathrm{d}t}$$

όπου $F(q, t)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση διαφορίσιμη ως προς τα ορίσματά της, οδηγεί στις ίδιες (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης.

Χρήσιμες σχέσεις για τα θέματα Μηχανικής

$$V = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2, \qquad L = T - V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{ci} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(t) A_{ji}(q, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji}(q,t)\mathrm{d}q_i + A_j(q,t)\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\ldots,M$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$f_j(q,t) = 0,, \quad j = 1,2,\ldots,M \qquad L' = L + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) f_j(q,t)$$

Κβαντομηχανική 1.

Να βρεθούν οι τυχόν δέσμιες καταστάσεις σωματιδίου μάζας m στο δυναμικό

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+L) + \delta(x-L)], \qquad \alpha \text{ και } L \text{ πραγματικές θετικές σταθερές.}$$

(α) Εξετάστε τις καταστάσεις με θετική ομοτιμία.
(β)Υπάρχουν πάντα λύσεις, ή η ύπαρξή τους εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων;

Κβαντομηχανική 2.

Θεωρήστε ένα σύστημα που οι φυσικές του καταστάσεις περιγράφονται από τις κυματοσυναρτήσεις

$$\Psi_{\Phi 1} = \cos\theta \Psi_{E1} + \sin\theta \Psi_{E2}, \qquad \Psi_{\Phi 2} = -\sin\theta \Psi_{E1} + \cos\theta \Psi_{E2}.$$

Οι Ψ_{E1} και Ψ_{E2} είναι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας: $\hat{H}\Psi_{E1} = E_1\Psi_{E1}, \quad \hat{H}\Psi_{E2} = E_2\Psi_{E2}$. Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος έχει τη γενική μορφή:

$$\Psi = c_1\Psi_{\Phi 1} + c_2\Psi_{\Phi 2}, \qquad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση Φ_1.
(α) Ποιά είναι η πιθανότητα να παρατηρήσουμε την κατάσταση Φ_1 τη χρονική στιγμή $t = T$;
(β) Ποιά είναι η πιθανότητα να παρατηρήσουμε την κατάσταση Φ_2 τη χρονική στιγμή $t = T$;

Κβαντομηχανική 3.

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B_0 κατά τον άξονα των z με το σπιν προς τα πάνω, δηλαδή προς τα θετικά z. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζεται ένα επί πλέον μαγνητικό πεδίο της μορφής $B_1(\cos\omega t\hat{x} + \sin\omega t\hat{y})$ με $B_0 > B_1 > 0$. Ποιά είναι η πιθανότητα να παρατηρήσουμε το σπιν του ηλεκτρονίου να δείχνει προς τα αρνητικά z τη χρονική στιγμή $t = T$;
Αγνοήστε τους χωρικούς βαθμούς ελευθερίας. Η Χαμιλτονιανή είναι

$$H = -\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/2 θέματα Μηχανικής & 2/3 θέματα Κβαντομηχανικής.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Παρασκευή 10/04/09 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

ΗΜ 1.

Θεωρήστε κατανομή φορτίου χώρου $\rho = \rho(\mathbf{r})$, που καταλαμβάνει περιοχή του χώρου η οποία χαρακτηρίζεται από όγκο V' και επιφάνεια, S', αντίστοιχα, και έχει συνολικό φορτίο μηδέν. Να δείξετε ότι,
(α) σε αποστάσεις $\mathbf{r}$, από την περιοχή της κατανομής, πολύ μεγαλύτερες από τις τυπικές διαστάσεις της κατανομής, ($r \gg \sqrt{S'}$, ή $r \gg^3 \sqrt{V'}$), το δυναμικό που προκαλεί η παραπάνω κατανομή έχει, σε πρώτη προσέγγιση, τη μορφή

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το διανυσματικό μέγεθος (διπολική ροπή)

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\mathrm{d}^3r' \neq 0$$

(β) Να δείξετε ότι η τιμή του $\mathbf{p}$, για το συγκεκριμένο σύστημα, που χαρακτηρίζεται από συνολικό φορτίο μηδέν, είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο υπολογίζεται.

ΗΜ 2.

Κυκλικός αγωγός ακτίνας R, βρίσκεται στο επίπεδο (x, y), με το κέντρο του στο σημείο $(0, 0, 0)$ και διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I.
(α) Να γραφούν οι αναλυτικές εκφράσεις, με τη μορφή κατάλληλων ολοκληρωμάτων, που δίνουν τις τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου, $B_x(x_0, y_0, z_0; R, I)$, $B_y(x_0, y_0, z_0; R, I)$, $B_z(x_0, y_0, z_0; R, I)$ σε τυχαίο σημείο $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, z_0)$.
(β) Να γραφούν οι αντίστοιχες εκφράσεις, στην περίπτωση που $x_0 = y_0 = 0$, και $z_0 = D \neq 0$.

ΗΜ 3.

Ευθύγραμμο ομοαξονικό καλώδιο, μεγάλου μήκους, αποτελείται από εσωτερικό πυρήνα με μορφή κυλινδρικού συμπαγούς αγωγού ακτίνας r_1, και από εξωτερικό λεπτότοιχο αγώγιμο φλοιό αμελητέου πάχους και ακτίνας r_2. Ανάμεσα στους δύο αγωγούς υπάρχει μονωτικό στρώμα από διηλεκτρικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r.
(α) Να υπολογίσετε την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους L_o του καλωδίου.

(β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους C_o του καλωδίου.
(γ) Σε περίπτωση που το καλώδιο χρησιμοποιείται ως γραμμή μεταφοράς, αποδεικνύεται ότι η διαφορική εξίσωση που διέπει την χωρο-χρονική μεταβολή της τάσης V και του ρεύματος I, κατά μήκος του άξονα (z) του καλωδίου, έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad \text{(και αντίστοιχα για το ρεύμα).}$$

Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης σε αυτή τη γραμμή μεταφοράς.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_o}|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r_o}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_o}|^3}, \qquad \int \frac{\mathbf{d}z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2 (z^2 + a^2)^{1/2}}, \qquad (1+\epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon \quad \text{όταν} \quad \epsilon \ll 1$$

Στατιστική Μηχανική 1.

Ένα σύστημα αποτελείται από N σωματίδια με σπιν $1/2$ και μαγνητική ροπή μ_o βρίσκεται μέσα σε στατικό σταθερό μαγνητικό πεδίο. Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν με το μαγνητικό πεδίο, αλλά όχι μεταξύ τους. Για το σύστημα των N σωματιδίων, να βρείτε:

(α) τη συνάρτηση επιμερισμού.
(β) τη μέση μαγνήτιση και τη μέση ενέργεια.
(γ) τη θερμοχωρητικότητα και
(δ) την εντροπία.

Στατιστική Μηχανική 2.

Ενα στερεό περιέχει **N διακριτές παγίδες** στην καθεμιά απο τις οποίες μπορεί να παγιδευθεί:
ή ένα ηλεκτρόνιο με σπιν $\uparrow$ και ενέργεια $E_\uparrow = E_o$
ή ένα ηλεκτρόνιο με σπίν $\downarrow$ και ενέργεια $E_\downarrow = E_o$
ή ένα ζεύγος από ηλεκτρόνια με σπίν $\uparrow\downarrow$ και ενέργεια $E_{\uparrow\downarrow} = 2E_o + g$ όπου g είναι θετική σταθερά και αναπαριστά την ενέργεια αλληλεπίδρασης των ηλεκτρονίων του ζεύγους και E_o είναι μια αρνητική σταθερά.

Προφανώς η τέταρτη δυνατή κατάσταση της παγίδας είναι να μήν παγιδεύσει κανένα ηλεκτρόνιο οπότε έχει ενέργεια μηδέν.

Το σύνολο είναι σε επαφή με ένα δοχείο ηλεκτρονίων χημικού δυναμικού μ και ένα δοχείο θερμότητας θερμοκρασίας T.

(α) Ποιές είναι οι φυσικές ποσότητες για τις οποίες έχουμε στατιστική πληροφορία και ποιό είναι το στατιστικό σύνολο μέσα στο οποίο θα εργαστούμε ; Υπολογίστε το μέσο αριθμό των παγιδευμένων ηλεκτρονίων και τη μέση ενέργεια του συνόλου τους.

(β) Παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου B οι ενεργειακές καταστάσεις της κάθε παγίδας γίνονται: $E_\uparrow = E_o - \mu_B B$, $E_\downarrow = E_o + \mu_B B$ και $E_{\uparrow\downarrow} = 2E_o + g$. Να βρείτε την ολική μαγνητική ροπή M του συστήματος των N παγίδων.

Στατιστική Μηχανική 3.

Θεωρήστε ένα ιδανικό κβαντικό αέριο φερμιονίων σε ισορροπία σε θερμοκρασία T. Για κάποια μονοσωματιδιακή κατάσταση, η συνάρτηση επιμερισμού είναι

$$Z = \sum_n e^{n\beta(\mu-\varepsilon)}$$

.

(α) Να βρείτε τον μέσο αριθμό καταλήψεως $< n >$ της μονοσωματιδιακής κατάστασης.

(β) Να βρείτε την πιθανότητα $P(n)$ να υπάρχουν n φερμιόνια σε μία κατάσταση και να την εκφράσετε συναρτήσει του $< n >$.

(γ) Να βρείτε την $< n^2 >$ συναρτήσει του $< n >$.

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να απαντηθεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Να απαντήσετε 1/3 θέματα Στατιστικής & 2/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού ή 2/3 θέματα Στατιστικής & 1/3 θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού

Καλή επιτυχία.