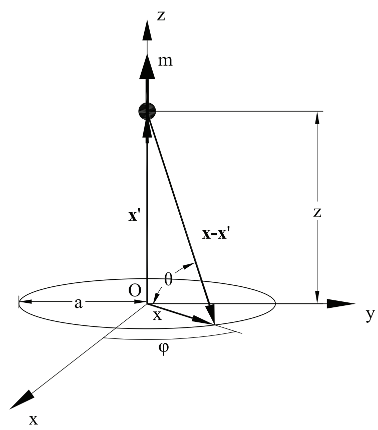
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3021

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3021
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος Ι - Πέμπτη 19/4/07 10:00, Διάρκεια 2 1/2 ώρες

Θέμα 1. Θεωρήστε έναν πακτωμένο κυκλικό δακτύλιο ακτίνας a και αυτεπαγωγής L. Ο δακτύλιος είναι φτιαγμένος από ιδανικό αγωγό (μηδενικής ειδικής αντίστασης) και βρίσκεται στο επίπεδο xy με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων (δες σχήμα). Ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο ροπής $\mathbf{m} = m_0\widehat{\mathbf{z}}$ μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα z. Αν αρχικά το δίπολο βρίσκεται πολύ μακριά από το δακτύλιο ώστε το επαγόμενο ρεύμα στο δακτύλιο είναι μηδενικό και το φέρουμε σε απόσταση z από το κέντρο του δακτυλίου υπολογίστε τα ακόλουθα:



(α) Το μέτρο και τη φορά του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος που διαρέει το δακτύλιο όταν το μαγνητικό δίπολο βρίσκεται σε απόσταση z.

(β) Το μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα z που προκαλεί το επαγόμενο ρεύμα στο δακτύλιο.

(γ) Τη δύναμη μεταξύ του διπόλου και του δακτυλίου.

Υπόδειξη: Το διανυσματικό δυναμικό, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, σημειακού μαγνητικού διπόλου δίνεται από την έκφραση:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

όπου r το ακτινικό διάνυσμα από τη θέση του διπόλου.

$\boxed{\textbf{Θέμα 2.}}$ Δίνονται οι τελεστές:

$$\widetilde{L_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(α) Ποιές τιμές μπορεί να προκύψουν αν μετρηθεί το L_z;
(β) Θεωρήστε την κατάσταση στην οποία $L_z = 1$. Να υπολογιστούν στην κατάσταση αυτή οι ποσότητες $\left\langle \widetilde{L_x} \right\rangle$, $\left\langle \widetilde{L_x^2} \right\rangle$, $\Delta \widetilde{L_x}^2 = \left\langle \left(\widetilde{L_x} - \left\langle \widetilde{L_x} \right\rangle \right)^2 \right\rangle$.
(γ) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\widetilde{L_x}$ και οι αντίστοιχες (κανονικοποιημένες) ιδιοκαταστάσεις. Να αναπτυχθούν στη βάση των (κανονικοποιημένων) ιδιοκαταστάσεων του $\widetilde{L_z}$.
(δ) Αν το σωματίδιο βρίσκεται στην κατάσταση με $L_z = -1$ και μετρηθεί το $\widetilde{L_x}$, ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα και ποια η πιθανότητα να προκύψει το καθένα απ' αυτά;
(ε) Αν στην κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

μετρηθεί το $\widetilde{L_z^2}$ και βρεθεί ίσο με +1, ποιά είναι η (κανονικοποιημένη) κυματοσυνάρτηση μετά τη μέτρηση; Ποια ήταν η πιθανότητα να ληφθεί το αποτέλεσμα αυτό; Αν μετρηθεί το L_z, ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα και η πιθανότητα να προκύψει το καθένα απ' αυτά;
(στ) Ένα σωματίδιο βρίσκεται σε μια κατάσταση για την οποία οι πιθανότητες είναι $P(L_z = 1) = 1/4$, $P(L_z = 0) = 1/2$, $P(L_z = -1) = 1/4$. Να δειχθεί ότι η πιο γενική κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση με την ιδιότητα αυτή είναι η:

$$|\psi\rangle = \frac{\mathrm{e}^{i\phi_1}}{2}\,|L_z = +1\rangle + \frac{\mathrm{e}^{i\phi_2}}{\sqrt{2}}\,|L_z = 0\rangle + \frac{\mathrm{e}^{i\phi_3}}{2}\,|L_z = -1\rangle\,.$$

Υπολογίστε την ποσότητα $P(L_x = 0)$.

$\boxed{\textbf{Θέμα 3.}}$ **(α)** Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μια περιοχή που προσδιορίζεται από το διατηρητικό (συντηρητικό) δυναμικό πεδίο:

$$U(x, y, z) = k(y\cos z + x^2\mathrm{e}^{-y}),$$

όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά. Στο σωματίδιο ασκείται μια ακόμη δύναμη $\mathbf{f} = a\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}$, (όπου a είναι μια θετική σταθερά, $\mathbf{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και $\mathbf{\Omega}$ μια σταθερά διανυσματική ποσότητα) . Τη χρονική στιγμή t_i το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{r}_i = \widehat{\mathbf{y}}$ και τη χρονική στιγμή t_f στο σημείο $\mathbf{r}_f = 2\widehat{\mathbf{x}} + 7\pi\widehat{\mathbf{z}}$. Υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας, $\Delta T = T_i - T_f$, του σωματιδίου από το σημείο $\mathbf{r}_i$ στο σημείο $\mathbf{r}_f$.

(β) Υποθέστε ότι ένα μηχανικό σύστημα με ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες, περιγράφεται με τη Lagrangian $L = L(q, \dot{q}, t)$. Έστω τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση $F = F(q, t)$. Δείξτε με απευθείας υπολογισμούς ότι και η Lagrangian:

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t},$$

οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις Euler-Lagrange.

(γ) Δείξτε ότι ο παρακάτω μετασχηματισμός γενικευμένων συντεταγμένων και ορμών:

$$Q = \ln\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right), \quad P = 2\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p,$$

είναι κανονικός. Δείξτε ότι μπορεί να προκύψει από τη γεννήτρια συνάρτηση:

$$F_3(p, Q, t) = -\left(\mathrm{e}^Q - 1\right)^2 \tan p.$$

Υπενθυμίζεται ότι:

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i = \left[H(q,p,t) - K(Q,P,t)\right]\mathrm{d}t + \mathrm{d}F_3(p,Q,t).$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα 3 θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3021

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3021
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος ΙΙ - Πέμπτη 19/4/07 14:00, Διάρκεια 2 1/2 ώρες

Θέμα 1. **(α)** Γράψτε τις εξισώσεις Maxwell στο κενό, απουσία φορτίων και ρευμάτων και περιγράψτε σύντομα τη φυσική τους σημασία. Βρείτε τις εξισώσεις που καθορίζουν τη μορφή του Ηλεκτρικού και Μαγνητικού πεδίου κατά τη διάδοση του Ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό, η ύπαρξη του οποίου προβλέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell.

(β) Θεωρήστε το ακόλουθο ηλεκτρομαγνητικό κύμα:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \mathrm{e}^{ikx-i\omega t}\widehat{\mathbf{y}}, \quad E_0 \in \mathcal{R},\ k \in \mathcal{R}^+,\ \omega \in \mathcal{R}^+,$$

όπου $\widehat{\mathbf{y}}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα στη διεύθυνση y.
Χαρακτηρίστε το είδος αυτού του κύματος και περιγράψτε το ρόλο κάθε μεταβλητής και σταθεράς του. Περιγράψτε την κατάσταση πόλωσης αυτού του κύματος.
Βεβαιωθείτε ότι αυτό το κύμα είναι λύση της εξίσωσης D' Alembert ($\nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$) και βρείτε τη σχέση σκέδασης (dispersion relation). Βεβαιωθείτε πως το κενό δεν είναι σκεδαστικό (dispersive).

(γ) Η ιονόσφαιρα, το στρώμα στην ατμόσφαιρα πάνω από 50 km από τη γή, μπορεί να θεωρηθεί σαν πλάσμα. Είναι δηλαδή ένα ιονισμένο μέσο με συγκέντρωση ελευθέρων ηλεκτρονίων $n_0 = 10^{10}$ m^{-3} και συγκέντρωση ιόντων φορτίου +e επίσης ίσο με n_0. Επομένως στο σύνολο το πλάσμα είναι ουδέτερο. Αυτή είναι μια πάρα πολύ μικρή πυκνότητα φορτίου σε σύγκριση π.χ. με την συγκέντρωση ελευθέρων ηλεκτρονίων στο χαλκό 8.46×10^{28} m^{-3}. Ποια δύναμη που ασκείται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια, καθώς κινούνται, μπορείτε εύκολα να αμελήσετε σε σχέση με την περίπτωση του χαλκού; Μελετήστε τη διάδοση σε τέτοιο μέσο ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος του τύπου:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \mathrm{e}^{ikx-i\omega t}\widehat{\mathbf{y}}, \quad E_0 \in \mathcal{R},\ k \in \mathcal{C}^+,\ \omega \in \mathcal{R}^+.$$

Ποιες δυνάμεις ασκούνται σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο του ιονοσφαιρικού πλάσματος; Δεδομένου ότι τα ηλεκτρόνια του πλάσματος δεν είναι σχετικιστικά, ποια δύναμη μπορείτε να αγνοήσετε ως αμελητέα;

Γράψτε την εξίσωση κίνησης με βάση την υπερισχύουσα δύναμη για ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Λύνοντάς την βρείτε την ταχύτητα κίνησής του. Από την ταχύτητα και την πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων, βρείτε την έκφραση για την πυκνότητα ρεύματος. Συνεισφέρουν καθόλου τα ιόντα σ' αυτή; Στη συνέχεια βρείτε την αγωγιμότητα σ του ηλεκτρονικού πλάσματος (από τη σχέση $j = \sigma E$).

Θέμα 2. Ένας τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

(α) Να δοθεί μια γενική έκφραση για τις ενεργειακές στάθμες της H_0.
(β) Έστω ότι ένα σωματίδιο που κινείται στο δυναμικό του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi = Nx\mathrm{e}^{-br^2}\mathrm{e}^{-\frac{iEt}{\hbar}},$$

όπου N θετική σταθερά. Να προσδιοριστούν οι σταθερές E και b.
(γ) Να θεωρηθεί τώρα ο υπόχωρος M των διεγερμένων σταθμών με ενέργεια $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$. Να συζητηθεί πώς ο εκφυλισμός αυτού του υποχώρου αίρεται μερικώς από μια ασθενή διαταραχή της μορφής $V = \alpha(x^4 + y^4 + z^4)$, όπου $0 < \alpha \ll m^2\omega^3/\hbar$. Πιο συγκεκριμένα, να δοθούν οι ενέργειες των σταθμών του M περιλαμβάνοντας όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς α. Πρέπει τα αποτελέσματά σας να μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των ποσοτήτων:

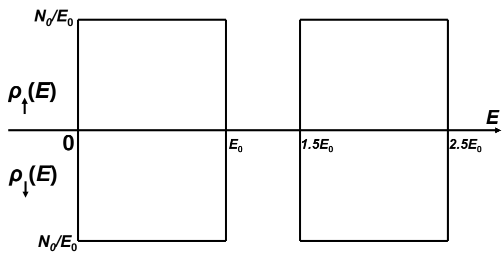
$$V_0 \equiv \langle 0|q^4|0\rangle = \int \mathrm{d}q\psi_0^*(q)q^4\psi_0(q),$$

$$V_1 \equiv \langle 1|q^4|1\rangle = \int \mathrm{d}q\psi_1^*(q)q^4\psi_1(q),$$

$$V_2 \equiv \langle 2|q^4|2\rangle = \int \mathrm{d}q\psi_2^*(q)q^4\psi_2(q).$$

Δε χρειάζεται να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των ολοκληρωμάτων.

Θέμα 3. Δίνεται σύστημα N μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων τοποθετημένο μέσα σε θερμοδοχείο θερμοκρασίας T. Οι πυκνότητες καταστάσεων $\rho_{\uparrow}(E)$, $\rho_{\downarrow}(E)$ που αντιστοιχούν στις δύο καταστάσεις του σπιν των ηλεκτρονίων δίνονται στο κατωτέρω διάγραμμα απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου:



(α) Να υπολογίσετε το χημικό δυναμικό του συστήματος στο όριο $T = 0$ και να το συσχετίσετε με την ενέργεια Fermi αυτού, E_F.

(β) Στη συνέχεια, στο σύστημα επιβάλλεται και εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο H.

(i) Να καθορίσετε τη θέση της ενέργειας Fermi, E_F, του συστήματος παρουσία του πεδίου.

(ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ενέργειας ΔE και της μαγνήτισης ΔM του συστήματος λόγω του μαγνητικού πεδίου.

Δίνονται: $N = (21/10)N_0$ και $\mu_B H = E_0/20$. (μ_B: μαγνητόνη του Bohr)

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα 3 θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3023, Fax: 210 772-3021

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3023, Fax: +30 210 772-3021
html://www.physics.ntua.gr

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση - ΕΜΠ & ΕΚΕΦΕ-"Δημόκριτος"

Μέρος III - Παρασκευή 20/4/07 10:00, Διάρκεια 3 ώρες

Απαντήστε σε 3 από τα 6 θέματα

Θέμα 1. **(α)** Δύο σωματίδια μάζας M κινούνται έτσι ώστε $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ (σύστημα κέντρου μάζας). Δείξτε ότι:
i) Το αναλλοίωτο μέγεθος $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu$ είναι ίσο με E_{CM}^2/c^2 όπου E_{CM} είναι η συνολική ενέργεια των δύο σωματιδίων
ii) Αν το ένα από τα σωματίδια είναι ακίνητο, η ενέργεια E_1 του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:

$$E_1 = \frac{E_{CM}^2}{2Mc} - Mc^2.$$

(β) Ξεκινώντας από τη Lagrangian για το ελεύθερο βαθμωτό σωματίδιο:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

να συναγάγετε την εξίσωση Klein-Gordon:

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi + m^2c^2\phi^2 = 0.$$

Όμοια από την Lagrangian του πεδίου Dirac:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - m\bar{\psi}\psi,$$

να συναγάγετε τις εξισώσεις που υπακούουν τα ψ και $\bar{\psi}$:

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - mc\psi = 0, \qquad\qquad i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + mc\bar{\psi} = 0.$$

(Υπόδειξη: τα ψ και $\bar{\psi}$ θεωρούνται ανεξάρτητα μεγέθη).

$\boxed{\textbf{Θέμα 2.}}$ Ξεκινώντας από την εξίσωση Klein-Gordon:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - \hbar^2 \nabla^2 \Phi + m^2c^2\Phi = 0,$$

δείξτε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi, \qquad \text{όπου} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{με} \quad \chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi + \frac{i\hbar}{mc}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right), \quad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi - \frac{i\hbar}{mc}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \quad \text{και}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη: Θέστε $\partial\Phi/\partial t = -im\Psi_0$ και εκφράστε τα Φ και Ψ_0 συναρτήσει των χ_1 και χ_2. Αν θέλετε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το σύστημα $\hbar = c = 1$

$\boxed{\textbf{Θέμα 3.}}$ Το δευτέριο είναι μια δέσμια κατάσταση ενός πρωτονίου και ενός νετρονίου με ολική στροφορμή και ομοτιμία $J^P = 1^+$. Η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση έχει τη μορφή:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_1(r) + V_2(r)\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + V_3(r)S_{12}, \quad \text{όπου}$$

$$S_{12} = \frac{3}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}},$$

και $\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{\sigma}_2$ τα διανύσματα θέσης των δυο νουκλεονίων και οι πίνακες του Pauli, αντίστοιχα.
(α) Δείξτε ότι η μορφή της Χαμιλτονιανής είναι τέτοια ώστε να διατηρείται η ομοτιμία.
(β) Ποιες είναι οι επιτρεπτές τιμές της τροχιακής στροφορμής L και του σπιν S του συστήματος. Γράψτε τις δυνατές καταστάσεις του συστήματος στη μορφή της ατομικής φασματοσκοπίας $^{2S+1}L_J$, όπου $L = S, P, D, F, \ldots$ για $L = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ποια είναι η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης και τι συμμετρία έχει ως προς την εναλλαγή των χωρικών μεταβλητών και των μεταβλητών του σπιν των δυο σωματιδίων.

(γ) Το φυσικό μέγεθος το οποίο αντιστοιχεί στον τελεστή $P = P_r P_\sigma$ που εναλλάσσει τις χωρικές συντεταγμένες και τις συντεταγμένες του σπιν των δυο νουκλεονίων είναι σταθερά της κίνησης. Αν $P_\sigma = (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)/2$ να δείξετε ότι το $\boldsymbol{S}^2$ είναι καλός κβαντικός αριθμός του συστήματος, όπου $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$.
(Δίνονται οι πίνακες του Pauli: $\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

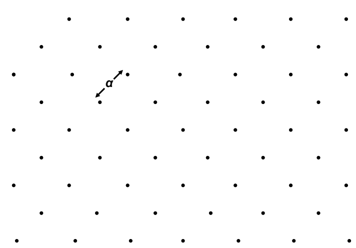
Θέμα 4. Σ' έναν ενδογενή ημιαγωγό οι ενέργειες της ζώνης αγωγιμότητας στην περιοχή ελάχιστης ενέργειας και της ζώνης σθένους στην περιοχή μέγιστης ενέργειας είναι

$$E_c = \epsilon_1 + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(k_x - k_o)^2}{a} + \frac{(k_y^2 + k_z^2)}{b}\right], \qquad E_v = \epsilon_2 - \frac{\hbar^2}{2m}\gamma k^2,$$

όπου a, b και γ θετικές σταθερές.
(α) Να βρείτε την ενεργό μάζα m_e^* ενός ηλεκτρονίου αγωγιμότητας και m_h^* μίας οπής.
(β) Πόσο είναι το ενεργειακό χάσμα στο ελάχιστο της E_c;
(γ) Τι μήκος κύματος πρέπει να έχουν τα φωνόνια που θα μπορούσαν να συμμετάσχουν σε μία οπτική διέγερση ηλεκτρονίου από το μέγιστο της ζώνης σθένους στο ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας; Να περιγράψετε αυτήν την έμμεση διαδικασία απορρόφησης.

Θέμα 5. Θεωρήστε το διδιάστατο πλέγμα Bravais που δείχνει το σχήμα, με θεμελιώδη διανύσματα του πλέγματος:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}) \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{y}}).$$



Η απόσταση μεταξύ δύο πλησιέστερων σημείων του πλέγματος είναι α.
(α) Να βρείτε τα θεμελιώδη διανύσματα, $\mathbf{b}_1$ και $\mathbf{b}_2$ του αντιστρόφου πλέγματος.
(β) Να σχεδιάσετε τις τρεις πρώτες ζώνες Brillouin.
(γ) Να κάνετε την αναγωγή της δεύτερης και της τρίτης ζώνης Brillouin στην περιοχή της πρώτης ζώνης. Να αναφέρετε πώς "μετατοπίζεται" το κάθε κομμάτι.
(δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη κινητική ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου στα όρια της πρώτης ζώνης Brillouin.
(ε) Πώς μπορεί να επηρεάζει το αποτέλεσμα του **(δ)** την αγωγιμότητα των δισθενών μετάλλων;

$\boxed{\textbf{Θέμα 6.}}$ **(α)** Για ένα ενεργό υλικό λέηζερ σε θερμική ισορροπία, υπολογίστε τη θερμοκρασία στην οποία εξισώνονται οι ρυθμοί αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής, για το μήκος κύματος λ_1 των 500 nm. Επίσης υπολογίστε το μήκος κύματος λ_2 για το οποίο οι ρυθμοί αυτοί εξισώνονται, όταν η θερμοκρασία γίνει 4000 ^oK.
(β) Υπολογίστε τη συχνότητα ταλάντωσης των διατομικών μορίων, ενεργού υλικού λέηζερ, τα οποία αποτελούνται από άτομα με μάζες M_1 και M_2, σαν συνάρτηση της ανηγμένης τους μάζας $M_{\alpha\nu}$.
(γ) Θεωρήστε την περιστροφή (στερεού σώματος) των διατομικών μορίων ενός ενεργού υλικού λέηζερ, τα οποία αποτελούνται από άτομα με μάζες M_1 και M_2, που βρίσκονται σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους P_o. Υπολογίστε την ροπή αδράνειας I περί τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος και είναι κάθετος στον άξονα P_o. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τον κανόνα κβάντωσης της στροφορμής, προσδιορίστε τη σταθερά περιστροφής των μορίων.
(Δίνονται: $h = 6,63\ 10^{-34}\mathrm{Js}$, $c = 3,00\ 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$, $k = 1,38\ 10^{-23}\mathrm{J^oK^{-1}}$, $A_{10} = 8\pi h\nu_{10}^3 B_{10}/c^3$, $\rho_\nu = (8\pi\nu^2/c^3)\frac{h\nu}{[e^{(h\nu/kT)}-1]}$).

Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις.

Κάθε θέμα να γραφτεί σε διαφορετική κόλλα χαρτί.

Τα 6 θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία