

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ τετάρτου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοῦ περιλαμβάνοντος τὰ βιβλία XI, XII, XIII, ἤτοι τὰ στοιχεῖα τῆς στερεομετρίας, ὀλοκληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ μελετητὴς τοῦ τόμου τούτου θὰ διαπιστώσῃ ἐκ τῶν σχημάτων πολλῶν θεωρημάτων, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι "Ἕλληνες ἐγνώριζον προβολικὴν καὶ παραστατικὴν γεωμετρίαν.

Ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ ἐγγραφή τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ κύβου, τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τοῦ δωδεκαέδρου, εἰς σφαιραν. Ὁ σπουδάζων τὰ Στοιχεῖα ἐν γένει καὶ πρὸ παντὸς ἐκ τούτων τὰ συναφῆ πρὸς τὰ κανονικὰ πολύεδρα θεωρήματα μένει ἔκπληκτος πρὸ τοῦ μεγαλείου, τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ ἀνυπερβλήτου κάλλους τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ὅπως εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων (βιβλία I — X), οὕτω καὶ εἰς τὴν στερεομετρίαν ὁ Εὐκλείδης οὐδένα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν ἐπιχειρεῖ. Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο ὁ Εὐκλείδης τὸ θεωρεῖ ὡς μὴ ἀνήκον εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, ἥτις ὀδηγεῖ τὸν ἐρευνητὴν ἐγγύτερον πρὸς τὴν θεώρησιν τοῦ Θείου.

Εἰς τοὺς νεωτέρους μαθηματικοὺς γεννᾶται τὸ εὐλογον ἐρώτημα, ἂν οἱ ἀρχαῖοι "Ἕλληνες ἐγνώριζον τὸ θεώρημα : Τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἐδρῶν ἐνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο. Ἄν λάβῃ τις ὑπ' ὄψιν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι "Ἕλληνες ἀνεκάλυψαν τοὺς δυσκολωτάτους καὶ ὑπερόχους νόμους τῆς κατασκευῆς καὶ ἐγγραφῆς εἰς σφαιραν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἄγεται κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ

συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἦτο γνωστὸν εἰς αὐτούς.  
Ἱστορικὴν ὅμως μαρτυρίαν περὶ τούτου δὲν ἔχομεν. Ἐνδείξεις  
τινὰς καὶ συναφεῖς πληροφορίας σημειοῦμεν εἰς τὸ τέλος τῶν  
ἐπεξηγήσεων.

*E. ΣΤΑΜΑΤΗΣ*

\*Ἐγγραφοὺν ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1957.

## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ



## Βιβλίον XI.

1. « ἐπειδὴ περ ἐὰν κέντρῳ... » θεωρεῖται παρεμβολή, διότι δὲν ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀπόδειξιν. Εἰς ἄλλους παπύρους ( ἐκτὸς τοῦ παπύρου Pezard, ἰδὲ εἰσαγωγὴν I τόμου ), ὑπάρχει ἀντὶ τούτου « ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι εἰ μὴ μόνον ἐν κοινὸν σημεῖον· ἄλλως θὰ συμπίπτωσι ».

33. Πόρισμα. Αἱ εὐθεῖαι νοοῦνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογία, ὡς  $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$ , διὰ νὰ εἶναι  $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$ . Τὴν πρότασιν ὁμως ταύτην τὴν περιλαμβάνει ὁ δέκατος ὀρισμὸς τοῦ V βιβλίου. Ὅθεν γεννᾶται ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν γνησιότητα τοῦ πορίσματος. Εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἐὰν ληθῇ  $\delta = 2\alpha$  καὶ θεωρηθῇ ἡ  $\alpha$  ὡς ἀκμὴ κύβου, ἡ  $\beta = \alpha \sqrt[3]{2}$  εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ διπλασίου κύβου ( δῆλιον πρόβλημα ).

39. Τὰ πρίσματα νοοῦνται τριγωνικά.

## Βιβλίον XII.

2. Τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα εἶναι θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ καὶ ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χίον ( ἀκμὴ περὶ τὸ 430 π. Χ. ), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ σχολιαστοῦ τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, Σιμπλικίου<sup>1</sup> ( περὶ τὸ 550 μ. Χ. ). Ὁ Σιμπλικίος ἀρύεται τὰς πληροφορίες του, ὡς λέγει ὁ ἴδιος, παρὰ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Εὐδήμου, ὅστις ἔγραψε τὴν πρώτην ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ( ἀπολεσθεῖσαν ), καὶ τοῦ Ἀλεξάνδρου τοῦ Ἀφροδισιεύου ( περὶ τὸ 200 μ. Χ. ). Τὸ θεώρημα στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου ( τὸ διατυπωθὲν ὁμως τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, ἰδὲ εἰσαγωγὴν εἰς τὸν I τόμον, σ. 23 ) καὶ τὸ κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν ( πρῶτον θεώρημα τοῦ X βιβλίου ). Κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας οἱ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ὠνόμαζον τὴν ἐν τῷ θεωρήματι ἐφαρμοζομένην ἀποδεικτικὴν μέθοδον ἐξαντλητικὴν μέθοδον. Ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ὁμως τοῦ διανομομένου αἰῶνος ἀναγνωρίζεται γενικῶς, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη ἦτο ἀτυχῆς καὶ ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι τὸ πρῶτον εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἀπαντῶν θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

1. Σχόλια Σιμπλικίου εἰς Φυσικ. Η' τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐκδοσις Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου καὶ Ἐγκυκλοπαιδεία Pauly-Wissowa, ἄρθρον Ἱπποκράτης ὁ Χίος.

Ἐστωσαν οἱ κύκλοι  $ΑΒΓΔ (=K_1)$ ,  $ΕΖΗΘ (=K_2)$  καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν ἀντιστοίχως, αἱ  $ΒΔ$ ,  $ΖΘ$ .

Λέγω, ὅτι  $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{K_2}$  (1). Ὑποτίθεται  $K_1 \neq K_2$ .

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθῆς ἡ σχέσηις (1), θὰ εἶναι ἀληθῆς ἡ σχέσηις  $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ , ἐνθα  $\Sigma$  ἐπιφάνεια  $\leq K_2$ .

1. Ἐστω πρῶτον  $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$  (2), ἐνθα  $\Sigma < K_2$ , καὶ  $K_2 = \Sigma + \epsilon$ ,

ἐνθα  $\epsilon$  ὅσονδῆποτε μικρὰ ἐπιφάνεια.

Εἰς τὸν κύκλον  $K_2$  περιγράφομεν καὶ ἐγγράφομεν τετράγωνον. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου, δηλ. τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον  $K_2$  ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον κλπ. μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὰ ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα μεταξύ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ  $\epsilon$ . Τοῦτο εἶναι δυνατόν κατὰ τὸ Χ. 1 τῶν Στοιχείων, καθ' ὃ ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λαμβάνομεν κάποτε μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κύκλου ( $K_2$ ) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἀπέμειναν τέσσαρα κυκλικὰ τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ κυκλικὸν τμήμα  $ΕΚΖ$ . Ἐὰν ἐγγράψωμεν ὀκτάγωνον καὶ τὸ ἀφαιρέσωμεν, ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐξ ἑκάστου τῶν 4 κυκλικῶν τμημάτων  $ΕΚΖ$  ( $ΖΑΗ$ ,  $ΗΜΘ$ ,  $ΘΝΕ$ ) περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διότι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον  $ΕΚΖ$  εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος  $ΕΚΖ$ . Ἐπομένως τὸ τρίγωνον  $ΕΚΖ$ , τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου  $ΕΚΖ$ , εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυκλικοῦ τμήματος  $ΕΚΖ$ . Ὅθεν κατὰ τὴν ἐγγραφήν ὀκταγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει 4 τρίγωνα  $ΕΚΖ$ , ἤτοι περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἢ ὁποία ὑπάρχει μεταξύ κύκλου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. Κατὰ τὴν ἐγγραφήν δεκαεξαγώνου θὰ ἔχωμεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἢ ὁποία ὑπάρχει μεταξύ κύκλου καὶ ὀκταγώνου, κατὰ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς ἀπόδειξιν. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐστω ὅτι κατὰ τὴν ἐγγραφήν τοῦ (νυοστοῦ) πολυγώνου  $ΕΚΖΑΗΜΘΝ$ , τὸ ὁποῖον καλοῦμεν  $\Pi_2$ , ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξύ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου  $K_2$  κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ  $\epsilon$ . Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma + \epsilon \quad (3)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων  $< \epsilon$  (4).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma \quad (5).$$

Εἰς τὸν κύκλον  $K_1$  ἐγγράφομεν πολύγωνον ὁμοιον πρὸς τὸ  $\Pi_2$  τὸ  $\Lambda\Xi\Theta$   $\Gamma\text{H}\Delta\text{P}$ , τὸ ὁποῖον καλοῦμεν  $\Pi_1$ . Κατὰ τὸ XII. 1 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} \quad (6).$$

Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν  $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ . Εἶναι ἄρα  $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ .

Ἐπειδὴ  $\Pi_1 < K_1$ , διότι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον περιέχεται ὑπὸ τοῦ κύκλου, εἶναι καὶ  $\Pi_2 < \Sigma$  (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη, ὅτι εἶναι  $\Pi_2 > \Sigma$ . Ὡστε δὲν εἶναι  $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ , ἐνθα  $\Sigma$  ἐπιφάνεια

μικροτέρα τοῦ  $K_2$ . Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀποδείξις ὅτι δὲν εἶναι  $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$  (7) ἐνθα  $M$  ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ  $K_1$ .

2. Ἐστω δεύτερον ὅτι εἶναι  $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$  (8), ἐνθα  $\Sigma > K_2$ .

Ἐκ τῆς (8) ἀνάπαλιν εἶναι  $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$ . Τῶν  $\Sigma$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω  $T$ ,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T} \quad (9).$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι  $\Sigma > K_2$ . Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (9) καὶ  $K_1 > T$  (V. 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν  $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$ , ἐνθα  $T < K_1$ . Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (7) ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι  $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2 : \text{ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ } K_1$ .

Ἄφοῦ λοιπὸν δὲν εἶναι  $\Sigma < K_2$ , εἶναι  $\Sigma = K_2$ .

Σημ. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως δύναται νὰ γίνῃ χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς τετάρτης ἀναλόγου, διὰ τῆς συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων, ὡς ἔγινε τοῦτο καὶ διὰ τὸ πρῶτον μέρος.

Ἐπιτίθεται ὅτι  $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ , ἐνθα  $\Sigma > K_2$  καὶ  $K_2 = \Sigma - \varepsilon$ , ἐνθα  $\varepsilon$  ὁσονδήποτε μικρόν.

Ἐστω ὅτι μετὰ τὴν περιγραφὴν πολυγώνου τινὸς ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου  $K_2$  ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ  $\varepsilon$ . Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \quad (1)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων  $\langle \varepsilon$  (2).

Διὰ προσθέσεως τῶν (2) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν, Περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον  $K_2$  πολύγωνον  $\Pi_2 \langle \Sigma$  (3), ἐὰν καλέσωμεν τὸ τελευταῖον περιγραφέν πολύγωνον  $\Pi_2$ .

Εἰς τὸν κύκλον  $K_1$  περιγράφομεν ὁμοιον πρὸς τὸ  $\Pi_2$  πολύγωνον τὸ  $\Pi_1$ . Κατὰ τὸ XII.1 θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}. \text{ Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν } \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}.$$

Εἶναι ἄρα  $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ . Ἐπειδὴ  $\Pi_1 \rangle K_1$ , διότι ὁ κύκλος περιέχεται ὑπὸ τοῦ πολυγώνου, εἶναι καὶ  $\Pi_2 \rangle \Sigma$  (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη  $\Pi_2 \langle \Sigma$ .

Ὡστε δὲν εἶναι  $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ , ἐνθα  $\Sigma \rangle K_2$ . Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι  $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$ , ἐνθα  $M \rangle K_1$ .

Θεωροῦμεν λογικὸν τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ ἐπινοητὴς τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς ἐγγραφῆς πολυγώνων θὰ εἶχεν ἐπινοήσει καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων. Εἰς τὸ λογικὸν τοῦτο συμπέρασμα ἀντιστρατεύεται τὸ ἐξῆς ἐπιχείρημα.

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων πρέπει νὰ δειχθῇ προηγουμένως ὅτι κατὰ τὴν περιγραφὴν εἰς τὸν κύκλον τοῦ  $n$  πολυγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἣ ὑποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ  $(n-1)$  πολυγώνου καὶ τοῦ κύκλου. Ἐν τῇ ἀπόδειξιν ταύτην παρέχει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ πρῶτον Θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει μόνον ἐκείνας τὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας δὲν ἔχουσιν ἀποδείξει οἱ πρὸ αὐτοῦ μαθηματικοί.

5. Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ θεωρήματος 2.

Ἐστῶσαν αἱ πυραμίδες  $AB\Gamma H$ ,  $\Delta EZ\Theta$  ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ . Λέγω, ὅτι εἶναι  $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{\Delta EZ\Theta}$ . Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι  $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$ , ἐνθα  $X$  στερεὸν  $\lessgtr \Delta EZ\Theta$ .

1. Ἐστῶ πρότερον  $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$  (1), ἐνθα  $X \langle \Delta EZ\Theta$  καὶ  $\Delta EZ\Theta = X + \varepsilon$ , ἐνθα  $\varepsilon$  στερεὸν ὅσονδήποτε μικρόν.



Διαιρούμεν τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ εἰς δύο ἴσας πυραμίδας ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ (θ. 3). Κατὰ τὸ αὐτὸ θ. 3 τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν δύο πυραμίδων. Ἀφαιροῦντες τὰ δύο πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Τῶν ἀπομεινασῶν δύο πυραμίδων διαιρούμεν ἑκατέραν εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ, ἥτοι λαμβάνομεν 4 πυραμίδας ἴσας καὶ 4 πρίσματα ἴσα. Ἀφαιροῦντες τὰ 4 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῶν 2 πυραμίδων, τὰς ὁποίας ἐλάβομεν κατὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν τῆς ΔΕΖΘ, περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διαιρούμεν τὰς 4 ἴσας πυραμίδας εἰς 8 ἴσας πυραμίδας καὶ ὁμοίας πρὸς τὰς προηγουμένας καὶ 8 ἴσα πρίσματα. Ἀφαιροῦντες τὰ 8 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῶν 4 πυραμίδων. Συνεχίζομεν τὴν διαίρεσιν τῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὴν ἀφαιρέσιν τῶν πρισμαμάτων, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον πυραμίδας τινάς, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X. 1 τῶν Στοιχείων. Θὰ ἔχομεν λοιπὸν τὰς σχέσεις  $\Delta EZ\Theta = X + \epsilon$  (2)

$$\text{Ὀγκος ὑπολειφθεισῶν πυραμίδων} < \epsilon \quad (3).$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (3) ἀπὸ τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{Ὀγκος συνόλου ἀφαιρεθέντων πρισμαμάτων} > X, \text{ ἢ } \Pi_2 > X, \quad (4)$$

ἂν καλέσωμεν  $\Pi_2$  τὸν ὄγκον τῶν πρισμαμάτων τούτων. (Τὸ πλῆθος τῶν πρισμαμάτων τούτων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς προόδου  $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$ ).

Διαιρούμεν ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς καὶ τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῆς τόσα τὸ πλῆθος πρίσματα, ὅσα ἀφηρέσαμεν ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ, καλοῦμεν δὲ τὸν ὄγκον τῶν πρισμαμάτων τούτων  $\Pi_1$ . Κα-

τὰ τὸ θ. 4 εἶναι  $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$  (5). Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν

$$\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X} \quad (6), \text{ (ἐνθα } X < \Delta EZ\Theta). \text{ Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν}$$

$$\frac{AB\Gamma H}{X} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \text{ Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς } AB\Gamma H \text{ εἶναι μεγαλύτερα τῶν ὑπ'}$$

αὐτῆς περιεχομένων πρισμαμάτων  $\Pi_1$ , εἶναι ἄρα καὶ  $X > \Pi_2$  (V. 14).

Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (4) ἀπεδείχθη  $\Pi_2 > X$ . Ὡστε δὲν εἶναι

$$\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}, \text{ ἐνθα } X < \Delta EZ\Theta. \text{ Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι}$$

$$\frac{\Delta EZ}{AB\Gamma} = \frac{\Delta EZ\Theta}{M}, \text{ ἐνθα } M \text{ στερεόν τι } < AB\Gamma H.$$

2. Ἐστω δεύτερον  $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$ , ἐνθα  $X > \Delta EZ\Theta$ .

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι  $\frac{\Delta EZ}{AB\Gamma} = \frac{X}{AB\Gamma H} \quad (7).$

Τῶν  $X, ABΓH, ΔEZΘ$  λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω  $\Sigma$ ,

$$\frac{X}{ABΓH} = \frac{\Delta EZ\Theta}{\Sigma} \quad (8).$$

Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως  $X > \Delta EZ\Theta$ . Εἶναι ἄρα καὶ  $ABΓH > \Sigma$  (9). Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν

$$\frac{\Delta EZ}{AB\Gamma} = \frac{\Delta EZ\Theta}{\Sigma}, \quad \text{ἐνθα } \Sigma < AB\Gamma H \text{ (ἐκ τῆς 9)}.$$

Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ εἶναι βᾶσις : βᾶσιν = ἀντίστοιχος πυραμῖς : στερεὸν μικρότερον τῆς ἄλλης πυραμίδος.

$$\text{Ὡστε } X = \Delta EZ\Theta, \quad \text{ἤτοι } \frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{\Delta EZ\Theta}.$$

10. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι κύλινδρος = 3 κῶνοι (βᾶσις καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ), θὰ εἶναι κύλινδρος  $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$  3 κῶνων.

1. Ἐστω πρῶτον κύλινδρος  $> 3$  κῶνων καὶ κύλινδρος = 3 κῶνοι +  $\epsilon$ , ἐνθα  $\epsilon$  στερεὸν ὄγκου ὅσονδήποτε μικροῦ. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πρισματῶν, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου θὰ ἀπομείνωσι κατὰ τινὰ στιγμὴν κυλινδρικὰ τμήματα (ἔστω τὰ ἀπὸ τῶν κυκλικῶν τμημάτων  $AE, EB\dots$ ), τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ  $\epsilon$ . Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{κύλινδρος} = 3 \text{ κῶνοι} + \epsilon \quad (1)$$

$$\text{ὄγκος ἀπομεινάντων κυλινδρικῶν τμημάτων} < \epsilon \quad (2).$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Πρίσμα ἔχον βᾶσιν τὸ πολύγωνον  $AEBZΓH\Delta\Theta > 3$  κῶνων ἔχόντων βᾶσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτὸ) ἢ πυραμίδα ἔχουσα βᾶσιν τὸ πολύγωνον  $AEBZΓH\Delta\Theta >$  κῶνου ἔχοντος βᾶσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτὸ). Ὅπερ ἀδύνατον, διότι ὁ κῶνος ἐμπεριέχει τὴν πυραμίδα.

2. Ἐστω δεύτερον κύλινδρος  $< 3$  κῶνων (βᾶσις, ὕψος τὰ αὐτὰ)

$$\text{ἢ κῶνος} > \frac{1}{3} \text{ κυλίνδρου},$$

ὁπότε θὰ εἶναι κῶνος =  $\frac{1}{3}$  κυλίνδρου +  $\epsilon$ , ἐνθα  $\epsilon$  ὅσονδήποτε μικροῦ ὄγκου στερεόν.

Διὰ συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κῶνου, θὰ ἀπομείνωσι κατὰ τινὰ στιγμὴν τμήματα κῶνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ  $\epsilon$ . Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\kappa\acute{\omega}\nu\omicron\varsigma = \frac{1}{3} \kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho\upsilon + \varepsilon \quad (3)$$

$$\acute{\alpha}\pi\omicron\mu\epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\upsilon\tau\alpha \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha \kappa\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon \langle \varepsilon \quad (4).$$

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) λαμβάνομεν :

πυραμῖς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον  $\Lambda\text{EBZ}\Gamma\text{H}\Delta\Theta$   $\rangle \frac{1}{3}$  κυλίνδρου (ὕψος τὸ αὐτό), ἢ πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον  $\Lambda\text{EBZ}\Gamma\text{H}\Delta\Theta$   $\rangle$  κυλίνδρου. "Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ πρίσμα ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου.

$$11. \text{ Διότι ἐὰν δὲν εἶναι } \frac{\text{AB}\Gamma\Delta}{\text{EZH}\Theta} = \frac{\text{A}\Lambda}{\text{E}\text{N}}, \text{ θὰ εἶναι } \frac{\text{AB}\Gamma\Delta}{\text{EZH}\Theta} = \frac{\text{A}\Lambda}{\Xi},$$

ἐνθα  $\Xi$  στερεὸν  $\lesssim$  EN.

1. "Ἐστω πρότερον  $\Xi \langle$  EN καὶ  $\text{EN} = \Xi + \Psi$ , ἐνθα  $\Psi$  στερεὸν ὅσονδῆποτε μικροῦ ὄγκου. "Ανυψοῦντες ἀπὸ τοῦ κύκλου EZHΘ συνεχῶς πυραμίδας, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιροῦντες ταύτας ἀπὸ τοῦ κῶνου θὰ λάβωμεν κατὰ τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα κῶνου μικρότερα τοῦ  $\Psi$  (X. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{EN} = \Xi + \Psi \quad (1)$$

ἀπομείναντα τμήματα κῶνου  $\langle \Psi \quad (2).$

"Αφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν :

πυραμῖς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον  $\Theta\text{OE}\Pi\text{Z}\rho\text{H}\Sigma$   $\rangle \Xi$  (3) (ἐὰν ἡ τελευταίως ἀφαιρεθεῖσα πυραμῖς εἶχε βάσιν τὸ ἀνωτέρω πολύγωνον καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ τοῦ κῶνου). "Ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὸν κύκλον ABΓΔ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ  $\Theta\text{OE}\Pi\text{Z}\rho\text{H}\Sigma$  πολύγωνον τὸ  $\Delta\text{TAYB}\Phi\Gamma\text{X}$  καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἰσοῦψῆ πρὸς τὸν κῶνον AΛ. Καλοῦμεν  $\text{K}_1$  τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν AΓ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον  $\Pi_1$  καὶ  $\text{K}_2$  τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν EH καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον  $\Pi_2$ . "Ἐπειδὴ εἶναι  $\frac{\text{A}\Gamma^2}{\text{E}\text{H}^2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$  καὶ  $\frac{\text{A}\Gamma^2}{\text{E}\text{H}^2} = \frac{\text{K}_1}{\text{K}_2}$ , θὰ εἶναι ἄρα  $\frac{\text{K}_1}{\text{K}_2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$  (4).

$$\text{Εἶναι δὲ } \frac{\text{K}_1}{\text{K}_2} = \frac{\text{A}\Lambda}{\Xi} \quad (5), \text{ ἐνθα } \Xi \langle \text{EN}, \text{ καὶ } \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\text{πυραμῖς, } \Pi_1 \cdot \upsilon}{\text{πυραμῖς, } \Pi_2 \cdot \upsilon} \quad (6)$$

ἂν καλέσωμιν  $\upsilon$  τὸ ὕψος  $\text{KL} = \text{MN}$ .

$$\text{"Ἐκ τῶν (4), (5), (6) λαμβάνομεν } \frac{\text{A}\Lambda}{\Xi} = \frac{\text{πυραμῖς, } \Pi_1 \cdot \upsilon}{\text{πυραμῖς, } \Pi_2 \cdot \upsilon} \quad (7).$$

"Ἐπειδὴ κῶνος AΛ  $\rangle$  πυραμίδος,  $\Pi_1 \cdot \upsilon$ , εἶναι ἄρα καὶ  $\Xi \rangle$  πυραμίδος,  $\Pi_2 \cdot \upsilon$ , (V. 14). "Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη ὅτι  $\Xi \langle \Pi_2 \cdot \upsilon$ .

Καθ' ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι  $\frac{\text{K}_2}{\text{K}_1} = \frac{\text{EN}}{\text{M}}$ , ἐνθα M στερεὸν  $\langle$  τοῦ κῶνου AΛ.

2. Ἐστω δεύτερον  $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\Lambda\Lambda}{\Xi}$ , ἔνθα  $\Xi >$  κώνου EN.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι  $\frac{K_2}{K_1} = \frac{\Xi}{\Lambda\Lambda}$  (1). Τῶν  $\Xi, \Lambda\Lambda, EN$  λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον,  $\frac{\Xi}{\Lambda\Lambda} = \frac{EN}{X}$  (2). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως  $\Xi > EN$ . Εἶναι ἄρα καὶ  $\Lambda\Lambda > X$  (V. 14).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν  $\frac{K_2}{K_1} = \frac{EN}{X}$ . Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ εἶναι κύκλος : κύκλον = κῶνος : μικρότερον ἀντιστοίχου κώνου στερεόν. Ὡστε δὲν

εἶναι  $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\Lambda\Lambda}{\Xi \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} EN}$ , καὶ συνεπῶς εἶναι  $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\Lambda\Lambda}{EN}$ .

Εἶναι ἄρα καὶ  $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\text{κύλινδρος}}{\text{κύλινδρον}}$ .

12. Λέγω, ὅτι εἶναι  $\frac{\text{κῶνος } \Lambda\text{B}\Gamma\Delta\Lambda}{\text{κῶνος } \text{E}\text{Z}\text{H}\Theta\text{N}} = \frac{\text{B}\Delta^3}{\text{Z}\Theta^3}$  (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἰσχύη ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι  $\frac{\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\Lambda}{\Xi} = \frac{\text{B}\Delta^3}{\text{Z}\Theta^3}$ , ἔνθα  $\Xi$  στερεόν  $\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}$  κώνου EZHΘN.

1. Ἐστω πρότερον  $\Xi < \text{EZH}\Theta\text{N}$  καὶ  $\text{EZH}\Theta\text{N} = \Xi + \varepsilon$ , ἔνθα  $\varepsilon$  στερεόν ὅσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων καὶ ἀφαιρέσεως τούτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος θὰ ἀπομείνῃσι κατὰ τινὰ στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὅποια θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ  $\varepsilon$  (X. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{EZH}\Theta\text{N} = \Xi + \varepsilon \quad (1)$$

καὶ ἀποτμήματα κώνου  $< \varepsilon$  (2).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν πυραμὶς (βάσις EΟΖΠΗΡΘΣ, ὕψος MN)  $> \Xi$ . (3).

Εἰς τὸν κύκλον ABΓΔ ἐγγράφομεν τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον EΟΖΠΗΡΘΣ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἔχουσαν ὕψος τὸ ΚΛ. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τὰ τρίγωνα ΒΚΛ, ΖΜΝ εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα ΒΚΤ, ΖΜΟ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΚΤ, ΝΜΟ. Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΚΒ, ΝΜΖ εἶναι  $\frac{\Lambda\text{B}}{\text{B}\text{K}} = \frac{\text{N}\text{Z}}{\text{Z}\text{M}}$  (4) καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων

ΒΚΤ, ΖΜΟ εἶναι  $\frac{ΚΒ}{ΒΤ} = \frac{ΜΖ}{ΖΟ}$  (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (4) καὶ (5) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) λαμβάνομεν  $\frac{ΑΒ}{ΒΤ} = \frac{ΝΖ}{ΖΟ}$ . Ἀνάπαλιν ἡ σχέσις αὕτη εἶναι

$\frac{ΒΤ}{ΑΒ} = \frac{ΖΟ}{ΝΖ}$  (6). Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΤΚ, ΝΟΜ εἶναι

$\frac{ΑΤ}{ΤΚ} = \frac{ΝΟ}{ΟΜ}$  (7), καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΚΒ, ΟΜΖ εἶναι

$\frac{ΚΤ}{ΤΒ} = \frac{ΜΟ}{ΟΖ}$  (8). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (7) καὶ (8) κατὰ μέλη

(λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου) λαμβάνομεν  $\frac{ΑΤ}{ΤΒ} = \frac{ΝΟ}{ΟΖ}$  (9). Διὰ πολλα-

πλασιασμοῦ τῶν (9) καὶ (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν  $\frac{ΤΑ}{ΑΒ} = \frac{ΝΟ}{ΝΖ}$ , ἥτοι καὶ

ἡ τετάρτη ἔδρα τῆς πυραμίδος ΒΚΤΑ ἢ ΒΤΑ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τετάρτην ἔδραν τῆς πυραμίδος ΖΜΟΝ τὴν ΖΟΝ. Αἱ πυραμίδες ἄρα αὗται εἶναι ὁμοιαί.

Εἶναι ἄρα  $\frac{ΒΚΤΑ}{ΖΜΟΝ} = \frac{ΒΚ^3}{ΖΜ^3} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$  (θ. 8).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι  $\frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3} = \frac{ΤΚΑΛ}{ΟΜΕΝ} = \frac{ΑΚΧΛ}{ΕΜΣΝ} = \frac{ΧΚΔΛ}{ΣΜΘΝ} = \frac{ΔΚΦΛ}{ΘΜΡΝ} = \frac{ΦΚΓΛ}{ΡΜΗΝ} = \frac{ΓΚΥΛ}{ΗΜΠΝ} = \frac{ΥΚΒΛ}{ΜΠΖΝ}$ . Καὶ κατὰ γνω-

στὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν (V. 12) θὰ εἶναι  $\frac{ΒΚΤΑ}{ΖΜΟΝ} =$

$\frac{ΒΚΤΑ + ΤΚΑΛ + ΑΚΧΛ + ΧΚΔΛ + ΔΚΦΛ + ΦΚΓΛ + ΓΚΥΛ + ΥΚΒΛ}{ΖΜΟΝ + ΟΜΕΝ + ΕΜΣΝ + ΣΜΘΝ + ΘΜΡΝ + ΡΜΗΝ + ΗΜΠΝ + ΜΠΖΝ}$

ἢ  $\frac{ΒΚΤΑ}{ΖΜΟΝ} = \frac{\text{πυραμῖς, ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ}}{\text{πυραμῖς, ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$ .

Ἐπετέθη δὲ καὶ  $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$ , ἔνθα Ξ < κῶνου ΕΖΗΘΝ.

Εἶναι ἄρα  $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{\text{πυραμῖς, ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ}}{\text{πυραμῖς, ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ}}$ .

Ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ > πυραμίδος ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ, εἶναι ἄρα καὶ στερεὸν Ξ > πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη Ξ < πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ.

Ὅστε δὲν εἶναι  $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$ , ἔνθα Ξ < κῶνου ΕΖΗΘΝ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι

$\frac{\text{κῶνος ΕΖΗΘΝ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$ , ἔνθα Ξ < κῶνου ΑΒΓΔΛ.

2. Ἐστω δεύτερον  $\frac{\text{κῶνος } \text{ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν } \Xi} = \frac{\text{ΒΔ}^3}{\text{ΖΘ}^3}$ , ἔνθα  $\Xi >$  κῶνου  $\text{ΕΖΗΘΝ}$ .

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι  $\frac{\Xi}{\text{ΑΒΓΔΛ}} = \frac{\text{ΖΘ}^3}{\text{ΒΔ}^3}$  (1). Τῶν  $\Xi$ ,  $\text{ΑΒΓΔΛ}$ ,  $\text{ΕΖΗΘΝ}$

λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον,  $\frac{\Xi}{\text{ΑΒΓΔΛ}} = \frac{\text{ΕΖΗΘΝ}}{\text{Χ}}$  (2). Ἐπειδὴ

ὑπετέθη  $\Xi >$   $\text{ΕΖΗΘΝ}$ , εἶναι ἄρα καὶ  $\text{ΑΒΓΔΛ} >$   $\text{Χ}$  (V. 14). Ἐκ τῶν (1)

καὶ (2) λαμβάνομεν  $\frac{\text{ΕΖΗΘΝ}}{\text{Χ}} = \frac{\text{ΖΘ}^3}{\text{ΒΔ}^3}$ , ἔνθα  $\text{Χ} <$  κῶνου  $\text{ΑΒΓΔΛ}$ . Ὅπερ

ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν

νὰ εἶναι διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον, ἐνὸς κῶνου : διάμετρος βάσεως εἰς

τὸν κύβον ἄλλου κῶνου = πρώτος κῶνος : στερεὸν μικρότερον τοῦ ἄλλου

κῶνου. Ὅθεν ἀφοῦ δὲν εἶναι  $\Xi <$  κῶνου  $\text{ΕΖΗΘΝ}$ , θὰ εἶναι  $\Xi =$  κῶνος

$\text{ΕΖΗΘΝ}$  καὶ συνεπῶς  $\frac{\text{κῶνος } \text{ΑΒΓΔΛ}}{\text{κῶνος } \text{ΕΖΗΘΝ}} = \frac{\text{ΒΔ}^3}{\text{ΖΘ}^3}$ .

Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς κῶνοι = κύλινδρος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους, θὰ

εἶναι  $\frac{\text{κύλινδρος } \text{ΑΒΓΔΛ}}{\text{κύλινδρος } \text{ΕΖΗΘΝ}} = \frac{\text{ΒΔ}^3}{\text{ΖΘ}^3}$ .

17. Τὸ  $\text{ΚΒ}^2$  εἶναι  $>$   $2\text{ΒΨ}^2$ , διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου =  $2\text{ΒΨ}^2$ . Ἐπειδὴ δὲ  $\text{ΚΒ} = \text{ΚΣ} = \text{ΒΟ} >$   $\text{ΟΣ}$ , ἔπεται  $\text{ΚΒ} >$  πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

18. Ἐστώσαν αἱ σφαῖραι  $\text{ΑΒΓ}$ ,  $\text{ΔΕΖ}$  καὶ διάμετροι αὐτῶν αἱ  $\text{ΒΓ}$ ,  $\text{ΕΖ}$ .

Λέγω, ὅτι εἶναι  $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$  (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι  $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΗΘΚ}} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$ , ἔνθα

$\text{ΗΘΚ}$  σφαῖρα  $\leq$  σφαῖρας  $\text{ΔΕΖ}$ .

1. Ἐστω πρότερον  $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΗΘΚ}} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$  (2), ἔνθα  $\text{ΗΘΚ}$  σφαῖρα  $<$  σφαί-

ρας  $\text{ΔΕΖ}$ . Θεωροῦμεν τὰς σφαῖρας ὁμοκέντρους. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν  $\text{ΔΕΖ}$  στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαῖρας  $\text{ΗΘΚ}$  κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, τὸ ὅποιον καλοῦμεν  $\Pi_2$ . Ἐπίσης ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὴν σφαῖραν  $\text{ΑΒΓ}$  στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγραφέν εἰς τὴν σφαῖραν  $\text{ΔΕΖ}$ , τὸ ὅποιον καλοῦμεν  $\Pi_1$ . Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Gamma^3}{EZ^3} \quad (3).$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν  $\frac{AB\Gamma}{H\Theta K} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ . Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα  $AB\Gamma$  > τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου πολυέδρου  $\Pi_1$ . Εἶναι ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα  $H\Theta K$  > τοῦ πολυέδρου  $\Pi_2$  (V. 14). Ἀλλὰ ἡ σφαῖρα  $H\Theta K$  ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ πολυέδρου  $\Pi_2$  καὶ συνεπῶς εἶναι μικρότερα αὐτοῦ· ὥστε δὲν εἶναι  $\frac{AB\Gamma}{H\Theta K} = \frac{B\Gamma^3}{EZ^3}$ , ἐνθα  $H\Theta K < \Delta EZ$ . Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι καὶ  $\frac{\Delta EZ}{\Sigma} = \frac{EZ^3}{B\Gamma^3}$ , ἐνθα  $\Sigma$  σφαῖρα < σφαίρας  $AB\Gamma$  (α).

2. Ἐστώ δεύτερον  $\frac{AB\Gamma}{\Lambda MN} = \frac{B\Gamma^3}{EZ^3}$ , ἐνθα  $\Lambda MN$  σφαῖρα > σφαίρας  $\Delta EZ$ . Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι  $\frac{\Lambda MN}{AB\Gamma} = \frac{EZ^3}{B\Gamma^3}$  (1). Τῶν σφαιρῶν  $\Lambda MN$ ,  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  εὐρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν σφαῖραν ἔστω  $\Sigma$ , ἥτοι  $\frac{\Lambda MN}{AB\Gamma} = \frac{\Delta EZ}{\Sigma}$  (2). Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως  $\Lambda MN > \Delta EZ$ , εἶναι ἄρα καὶ  $\Lambda B\Gamma > \Sigma$  (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν  $\frac{\Delta EZ}{\Sigma} = \frac{EZ^3}{B\Gamma^3}$ , ἐνθα  $\Sigma < \Lambda B\Gamma$ . Ὅπερ ἀδύνατον.

Διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (α). Ὡστε δὲν εἶναι  $H\Theta K \lessgtr \Delta EZ$ , ἥτοι  $H\Theta K = \Delta EZ$ .

Παρατήρησις ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 2, 5, 11, 12, 18.

Εἰς τὴν σχέσιν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  (1), ἐνθα  $\alpha > \gamma$ , διὰ νὰ συναχθῇ τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ  $\beta > \delta$ , λαμβάνεται ὁ ἐναλλάξ λόγος  $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ , ἐν ᾧ εἰς τὸ συναφές θεώρημα τοῦ V. 14 ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς (1), ὅτι ἂν  $\alpha \lessgtr \gamma$  εἶναι καὶ  $\beta \lessgtr \delta$ .

Σημ. Τοῦ θεωρήματος 6 δὲν ὑπάρχει ἄλλη ἀπόδειξις εἰς τὸ Παράρτημα II.

## Βιβλίον XIII.

1. Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον τμήμα τῆς εὐθείας  $\alpha$  τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον εἶναι  $x$ , θὰ εἶναι καὶ

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 5 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

2. Ἀντίστροφον προηγουμένου.

3. Ἐὰν  $x^2 = \alpha(\alpha - x)$  εἶναι καὶ  $\left[(\alpha - x) + \frac{x}{2}\right]^2 = 5 \left(\frac{x}{2}\right)^2.$

4. Ἐὰν  $x^2 = \alpha(\alpha - x)$  εἶναι καὶ  $\alpha^2 + (\alpha - x)^2 = 3x^2.$

5. Ἐὰν  $x^2 = \alpha(\alpha - x)$  εἶναι καὶ  $\alpha^2 = (\alpha + x)x.$

6. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι ῥητῆ,  $\rho$ , καὶ εἶναι  $x^2 = \rho(\rho - x)$ , ἡ  $x$  καὶ ἡ  $(\rho - x)$  εἶναι ἀποτομαί.

Κατὰ τὸ Θεώρ. 1 εἶναι  $\left(x + \frac{\rho}{2}\right)^2 = 5 \left(\frac{\rho}{2}\right)^2$ , ἐξ ἧς  $x = \frac{\rho}{2} \sqrt{5} -$

$\frac{\rho}{2}$ . Τὰ μονώνυμα τῆς διαφορᾶς  $x$  εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73). Ἐὰν εἰς τὴν  $(\rho - x)$  ἀντικαταστήσωμεν τὴν  $x$  διὰ τῆς εὐρεθείσης τιμῆς τῆς, θὰ ἔχωμεν  $\rho - x = \frac{3\rho}{2} - \frac{\rho}{2} \sqrt{5}$ . Καὶ ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀποτομῆ, διότι τὰ μονώνυμα τοῦ β' μέλους εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73).

9. Ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου εἶναι  $\frac{\rho}{2} \sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$ , ἔνθα  $\rho$  ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου (IV. 10). Κατὰ τὸ θεώρημα ἡ ὅλη εὐθεῖα θὰ εἶναι

$$\rho + \left(\frac{\rho}{2} \sqrt{5} - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{\rho}{2} \sqrt{5} + \frac{\rho}{2},$$

$\rho$  τὸ μεγαλύτερον τμήμα ταύτης τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ  $\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{5} + \frac{\rho}{2}\right) - \rho = \frac{\rho}{2} \sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$ , τὸ μικρότερον τμήμα. Ἦτοι

$$\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{5} + \frac{\rho}{2}\right) \left(\frac{\rho}{2} \sqrt{5} - \frac{\rho}{2}\right) = \rho^2.$$

11. Ἐστω ἡ ῥητῆ διάμετρος  $B\Theta = 2\rho$ , καὶ  $ZK = \frac{\rho}{4}$ . Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος εἶναι  $BK^2 = 5KM^2$  (1) καὶ εἶναι  $BM = BK - KM$ .



Ἀντικαθιστῶντες ἐνταῦθα ἐκ τῆς (1) τὴν ΒΚ λαμβάνομεν  $BM = BK \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  (2). Εἶναι δὲ  $BK = \frac{5\rho}{4}$ . Συνεπῶς  $BM = \frac{5\rho}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ .  
 $AB^2 = BM \times B\Theta = \frac{10\rho^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ,  $AB = \frac{\rho}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ , (3), ἢ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Αὕτη εἶναι ἐλάσσων (X. 76). Εἶναι ὁμως δεδομένη ὑπὸ τὴν μὴ ἀνεπτυγμένην μορφήν τοῦ X. 94 (τοῦ α' μέλους τοῦ θ. τούτου· ἰδὲ ἐπεξήγησιν). Ἡ (3) γράφεται  $\rho \sqrt{\frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ . Κατὰ τὸ X. 94 θὰ εἶναι

$$\rho \sqrt{\frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\rho}{2} \sqrt{5 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} - \frac{\rho}{2} \sqrt{5 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \quad (4).$$

(Ἡ εἰς τὸ X. 94 σχέσις  $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$  εἶναι ἐνταῦθα  $1^2 + 2^2 = 5$ ).

Τὸ β' μέλος τῆς (4) εἶναι ἡ μορφή τῆς ἐλάσσονος τοῦ X. 76, ἥτοι εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μονωνύμων εἶναι ῥητὸν  $\left(\tauὸ \frac{5\rho^2}{2}\right)$  καὶ τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων εἶναι μέσον, ἥτοι περιέχει τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ  $\left(\tauὸ \frac{5\rho^2}{4\sqrt{5}}\right)$ .

16. Ἡ ἀκτίς  $\rho$  τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἐγγράφεται πεντάγωνον, τοῦ ὁποῖου ἡ πλευρὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσάεδρου, λαμβάνεται συναρτήσῃ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἐγγράφεται τὸ εἰκοσάεδρον καὶ εἶναι  $\rho = \frac{2r}{\sqrt{5}}$ , ἐὰν  $r$  εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας. Ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων κατὰ τὸ θ. 11.



**Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τὸ ὁποῖον μνημονεύεται εἰς τὸν πρόλογον ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο».**

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων θεώρημα τοῦ Euler. Ὁ Max Zacharias εἰς τὸ ἔργον του Στοιχειώδης Γεωμετρία τοῦ Ἐπιπέδου καὶ τοῦ Χώρου, 1930, σελ. 172 (Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Göschens Lehrbücherei B. 16) γράφει ἐπὶ τούτου τὰ ἑξῆς:

«Τὸ θεώρημα διετυπώθη, ὡς πρῶτος παρετήρησεν ὁ R. Baltzer τῷ 1861, ἤδη πρὸ τοῦ Euler, ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου (Descartes), ὡς συνάγεται ἐκ παρεφθαρμένου τινὸς ἀντιγράφου διατηρηθέντος ὑπὸ τοῦ Leibnitz καὶ δημοσιευθέντος μόλις τῷ 1860. Καὶ δὴ καὶ εἶναι πιθανὸν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης τὸ ἐγνώριζεν. Ὁ Euler τὸ ἀνεκάλυψεν ἐκ νέου τῷ 1752 κατ' ἀρχὰς δι' ἐπαγωγῆς καὶ τὸ ἐδημοσίευσεν ἄνευ ὅμως ἀποδείξεως, τὴν ὁποίαν εὔρεν ἀμέσως μετὰ ταῦτα (Descartes, Oeuvres inéd., Paris 1860, σ. 214. Euler, Nov. Comm. Petz. (1752 - 1753) 4 (τυπωθὲν 1758) σ. 109 καὶ 140. Baltzer, Berl. Mon. Ber. 1861, σ. 1043)».

Ἐκ τῆς διατυπουμένης ἀνωτέρω γνώμης τοῦ M. Zacharias ὅτι πιθανὸν ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ διερευνήσωμεν τὸ πρᾶγμα. Πρὸ παντὸς πρέπει νὰ εὔρεθῇ, εἰς ποῖα στοιχεῖα στηρίζει ὁ M. Zacharias τὴν γνώμην του ταύτην. Ἐγράψαμεν εἰς διακεκριμένους ἐν Γερμανίᾳ μαθηματικούς, ἀσχολουμένους εἰδικῶς μὲ τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικά, ἀλλὰ δυστυχῶς δὲν ἦσαν οὗτοι εἰς θέσιν νὰ παράσχωσιν εἰς ἡμᾶς συναφεῖς πληροφορίες. Οὔτε ἐλάβομεν ζητηθὲν ἀντίγραφον τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης πραγματείας τοῦ Baltzer.



ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΛΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ  
ΓΕΝΟΜΕΝΑΙ ΕΝ ΤΗ ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

1. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου. Συνεδρία 11-6-1953.

Διὰ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης, λαμβανομένης ἀφορμῆς ἐκ παρατηρήσεως τοῦ G. Vacca<sup>1</sup>, γενομένης τῷ 1910, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς (ὁ καλούμενος καὶ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς ἢ ἐκ τῆς ἀληθείας τῶν  $n$  συνάγεται ἢ ἀλήθεια τῶν  $n + 1$ ) ἐφαρμόζεται εἰς πλεῖστα θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Πρὸς τοῦτο μνημονεύονται 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 20 θεωρ. τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, 2) Τὸ χωρίον ἐκ τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων (73 b 32) τοῦ Ἀριστοτέλους « Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται » καὶ 3) Ἐκ τῶν συγχρόνων ἀποδείξεων τὸ θεώρημα « ἐν γινόμενον  $n$  πλήθους συναρτήσεων (πεπερασμένου) εἶναι συνεχῆς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστος παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συνάρτησις συνεχῆς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ».

Ὁ E. Lindelöf<sup>2</sup> διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου γράφει τὰ ἐξῆς: « Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις ἐν γινόμενον ἐκ τριῶν συναρτήσεων

$$u_1(x) u_2(x) u_3(x),$$

τὰς ὁποίας ὅλας ὑποθέτομεν διὰ  $x = x_0$  συνεχεῖς. Ἐν ᾧ τώρα τὰς δύο ἔστω πρώτας συναρτήσεις θεωροῦμεν ὡς μίαν, δυνάμεθα τὴν δοθεῖσαν παράστασιν νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι  $u_1(x) u_2(x)$  καὶ  $u_3(x)$ . Καὶ αἱ δύο αὗται συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς διὰ  $x = x_0$ , ἤτοι  $u_3(x)$  κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ  $u_1(x) u_2(x)$  κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν θεώρημα.

[ Σημ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔστω (α) λέγει: ἐὰν αἱ 2 συναρτήσεις  $u(x)$

1. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 240, σελ. 79, Λειψία 1935, ὑπὸ Clemens Thaer, παρατήρησις εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

2. Ernst Lindelöf, Einführung in die Höhere Analysis, γερμανικὴ ἔκδοσις ὑπὸ E. Ullrich μετὰ τὴν πρώτην σουηδικὴν καὶ τὴν δευτέραν φινλανδικὴν, σελ. 41, B. C. Teubner, 1950, Λειψία.

καὶ  $v(\chi)$  εἶναι συνεχεῖς διὰ  $\chi = \chi_0$  εἶναι καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν  $u(\chi)$   $v(\chi)$  συνεχές]. Κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα εἶναι συνεπῶς καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων [ τῶν  $u_1(\chi)$   $u_2(\chi)$  καὶ  $u_3(\chi)$  ] συνεχές διὰ  $\chi = \chi_0$  καὶ κατὰ ταῦτα ἀπεδείχθη τὸ θεώρημά μας ἐπίσης καὶ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων.

Ἐὰν τώρα ἔχωμεν γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων

$$u_1(\chi) u_2(\chi) u_3(\chi) u_4(\chi),$$

ἐκάστη τῶν ὁποίων εἶναι συνεχῆς διὰ  $\chi = \chi_0$ , δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι τοῦ ἐνὸς  $u_1(\chi) u_2(\chi) u_3(\chi)$  καὶ τοῦ ἄλλου  $u_4(\chi)$ . Ὁ πρῶτος παράγων εἶναι συνεχῆς κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδείχθῆν (περὶ τριῶν συναρτήσεων), ὁ δεύτερος εἶναι συνεχῆς καθ' ὑπόθεσιν. Καὶ κατὰ τὸ θεώρημα (α) εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων  $u_1(\chi) u_2(\chi) u_3(\chi)$  καὶ  $u_4(\chi)$  συνεχές. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ πέντε συναρτήσεις κλπ. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν χρειάζεται, διότι δυνάμεθα ὄλας αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις νὰ τὰς συμπεριλάβωμεν εἰς μίαν ἀπόδειξιν, καθ' ἣν ἀποδεικνύομεν :

Ἐὰν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθές διὰ γινόμενον  $n$  συναρτήσεων, ἰσχύει τοῦτο ἐπίσης διὰ γινόμενον  $n + 1$  συναρτήσεων, ἐνθα  $n$  δύναται νὰ εἶναι οἰοσδήποτε ἀριθμὸς 2, 3, 4, .....

Ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἐν γινόμενον  $n$  συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι συνεχές, θεωροῦμεν τὸ γινόμενον  $n + 1$  συναρτήσεων

$$u_1(\chi) u_2(\chi) \dots u_n(\chi) u_{n+1}(\chi), \quad (1)$$

ἐνθα ἕκαστος παράγων διὰ  $\chi = \chi_0$  εἶναι συνεχῆς.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι ἔχομεν γινόμενον μόνον δύο παραγόντων, τῶν  $u_1(\chi) u_2(\chi) \dots u_n(\chi)$  καὶ  $u_{n+1}(\chi)$ . Ἐκαστος παράγων ἐκ τούτων εἶναι συνεχῆς διὰ  $\chi = \chi_0$ , διότι ὑπέθεσαμεν ὅτι τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ  $n$  παραγόντας. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ θεώρημα (α) ἔχομεν ἀποδείξει τὴν συνέχειαν διὰ γινόμενον δύο παραγόντων, ἔπεται ὅτι ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι τὸ γινόμενον (1) εἶναι διὰ  $\chi = \chi_0$  συνεχές. Ὅθεν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθές ἐπίσης διὰ γινόμενον  $n + 1$  παραγόντων, ἐὰν εἶναι ἀληθές διὰ γινόμενον  $n$  παραγόντων. «Ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ὁ Lindelöf ἀκολουθεῖ πιστότατα τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 20οῦ θεωρήματος τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ὀλίγους μῆνας μετὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηναίων ἐλάβομεν παρὰ τοῦ Ὀλλανδοῦ καθηγητοῦ Hans Freudenthal (Μαθηματικὸν Ἰνστιτούτον τοῦ Πανεπιστημίου Rijks) πραγματείας του γερμανιστί, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς», δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ φύλλον 22 τοῦ 1953 τῆς τριμηνιαίας Ἐπιθεωρήσεως τοῦ Διεθνoῦς Ἀρχείου τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν, (ARCHIVES INTERNATIONALES D' HISTOIRE DES SCIENCES, Revue trimestrielle de l' Union Interna-

tionale d' Histoire des Sciences, Publiée avec le concours financier de l' UNESCO ) Numéro 22-1953. Pages 17 à 37).

Μεταφέρομεν ἔνταῦθα τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα σημεῖα τῆς πραγματείας ταύτης.

« Λίαν ἔνωρις ὁ Ἰάκωβος Μπερνούλι ( Jakob Bernoulli, 1645 — 1705 ) ἐθεωρεῖτο ὁ ἐπινοητὴς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Ἐπειτα ἀπέδωκεν τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου εἰς τὸν Pascal ( 1623 — 1662 ). Εἰς τὰς περισσοτέρας δὲ νέας πραγματείας θεωρεῖται ὅτι ὁ πρῶτος ἐπινοήσας τὴν μέθοδον ταύτην εἶναι ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος<sup>1</sup>. Εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς γνώμης ταύτης συνετέλεσεν ὁ G. Vacca, ὅστις ἀνέφερε πέντε θεωρήματα ἐκ τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Μαυρόλυκου καὶ προεκάλεσε οὕτω τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν πρόκειται περὶ ἐφαρμογῆς τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Ὁ Vacca μνημονεύει, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του τονίζει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἠσχολήθη μόνον μὲ τοὺς ἐπιπέδους, τοὺς στερεοὺς, τοὺς τετραγώνους καὶ τοὺς κύβους ἀριθμούς, ἐν ᾧ διὰ τοὺς τριγώνους, πενταγώνους, ἑξαγώνους, ἑπταγώνους πολὺ ὀλίγοι ἔρευναί ἐγιναν καὶ ὅτι αὐτός, ὁ Μαυρόλυκος, ἐπιθυμῆ νὰ ἐπανορθώσῃ τὴν παράλειψιν ταύτην τοῦ Εὐκλείδου.

Οὔτε ἐκ τῆς Εἰσαγωγῆς οὔτε ἐκ τοῦ λοιποῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου δύναται νὰ ὑποστηριχθῆ, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰσήγαγε καὶ ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ...».

« Εἰς τὸ θεώρημα 84 πρόκειται περὶ τῶν πολυγωνικῶν — πυραμιδικῶν ἀριθμῶν<sup>2</sup>. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τούτου, εὐρίσκομεν ἔνταῦθα γνησίαν πλήρη ἐπαγωγὴν... Ἐν τῷ συνόλῳ εὑρον εἰς τὸν Μαυρόλυκον δύο παραδείγματα γνησίας καὶ ἐν τοιοῦτο ἀμφιβόλου, πλήρους ἐπαγωγῆς ».

Ἀκολουθεῖ ἡ ἔρευνα ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 22, 32, 35, 36 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Καὶ ὁ Freudenthal ἐπὶ τούτου ἐπάγεται : « Συμπερασματικῶς δύναται τις νὰ εἴπῃ, ὅτι ἐπίσης καὶ εἰς τὸν Εὐκλείδην ( δηλ. παραλλήλως πρὸς τὸν Μαυρόλυκον, ὅστις ἐγνώριζεν ἄριστα τὸν Εὐκλείδην ) παρατηροῦνται μερικὰ παρα-

1. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἐγεννήθη ἐν Μεσσήνῃ τῆς Σικελίας τῷ 1494, ἐκ γονέων Ἑλλήνων, οἵτινες κατέφυγον εἰς Ἰταλίαν ἐκ Κωνσταντινουπόλεως μετὰ τὴν ἄλωσιν αὐτῆς ὑπὸ τῶν Τούρκων. Ἀπέθανε τῷ 1575. Ὁ πατὴρ του ἦτο ἐκ τῶν λογίων ἀνδρῶν τῆς Κωνσταντινουπόλεως. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἠσπάσθη τὸν Καθολικισμόν, γενόμενος μοναχός. [ Ἰδὲ Μεγάλη Ἰταλικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία ]. Μετέφρασεν ἐκ τῆς Ἑλληνικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τὰ Φαινόμενα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ σφαιρικά τοῦ Θεοδοσίου καὶ τοῦ Μενελάου καὶ ἐξέδωκε παράφρασιν τοῦ περὶ Κέντρου βάρους τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Περὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων διαλαμβάνει ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνός ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Εἰσαγωγῇ, ἐκδ. R. Hoche, Teubner, σελ. 99 κ. ἑ.

δείγματα πλήρους επαγωγής, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερον στοιχειώδη ἢ τὰ τοῦ Μαυρολύκου, ἀλλὰ περὶ συστηματικῆς ἐφαρμογῆς ἢ διατυπώσεως τῆς Ἀρχῆς δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος. Ὁ ἰσχυρισμὸς ὅμως τοῦ Trotske καὶ τοῦ Günther, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους επαγωγῆς εἶναι ὅπωςδῆποτε ἀπορριπτέος ».

« Τὸ ἀκριβέστατον ὅμως ὑπόδειγμα ( μέχρι τοῦ 19ου αἰῶνος ) πλήρους επαγωγῆς δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς ἀπόσπασμα Πυθαγορείου θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ἐσώθη διὰ τοῦ Θέωνος ( τοῦ Σμυρναίου ), τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ τοῦ Πρόκλου. Πρόκειται διὰ τοὺς πλεονεξικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι ὀρίζονται διὰ τῆς επαγωγῆς

$$a_1 = d_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = d_n + 2a_n$$

( Σημ. Ἴδε εἰσαγωγήν εἰς II τόμον Εὐκλείδου, σελ. 8 ).

« Ἐὰν θέλῃ τις δύναται νὰ θεωρήσῃ ἀκόμη ἐν παράδειγμα πλήρους επαγωγῆς τὸ ὑπὸ τοῦ B. L. van der Waerden σημειούμενον ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Σμπλικίου εἰς τὰ Φυσικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους<sup>1</sup>. Πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ χωρίου περὶ τοῦ Ζήνωνος :

Προδείξας γὰρ ὅτι « εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἶη », ἐπάγει « εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου· καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος· καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἔξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὁμοίον δὴ τοῦτο ἀπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν » [ Ἑρμηνεία : διότι προαποδείξας ὅτι « ἐὰν τὸ ὄν δὲν ἔχη μέγεθος, δὲν θὰ ὑπάρχη, ἐπάγεται « ἐὰν δὲ ὑπάρχη, εἶναι ἀνάγκη ἕκαστον μέρος αὐτοῦ νὰ ἔχη μέγεθος καὶ πάχος καὶ ἀπόστασιν τὸ ἐν μέρος ἀπὸ τοῦ ἄλλου. Καὶ περὶ τοῦ προηγουμένως κειμένου μέρους ἰσχύει τὸ αὐτό· διότι καὶ ἐκεῖνο θὰ ἔχη μέγεθος καὶ πρὸ αὐτοῦ θὰ κεῖται ἄλλο· διότι τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τὸ εἶπῃ τις μίαν μόνον φορὰν καὶ νὰ ἰσχύῃ γενικῶς » ].

2. Μία παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς  $\sqrt{2}$  παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (19 - 1 - 1953).

Ἴδε Εἰσαγωγήν II τόμον τῶν Στοιχείων, Ὁργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953, σελὶς 17.

1. Math. Ann. 117 (1939), 148. — SIMPL. Phys. 140, 34.



3. Ἐπὶ τοῦ Εὐκλείδειου θεωρήματος περὶ μεγίστου.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (10 - 12 - 1953).

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος 27 τοῦ VI Βιβλίου τῶν Στοιχείων περὶ μεγίστου ( τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ) εἶναι γενική.

4. Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (4 - 6 - 1954).

Διὰ παραθέσεως χωρίων ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων ὑποστηρίζεται, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ οὐχὶ ἀπλῶς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἐκ τῶν χωρίων τούτων μνημονεύομεν δύο τοῦ Ἀριστοτέλους

α'. « Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ » ( Ἡθικὰ Νικομάχεια Ε' III 8 ).

β'. « Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμὸν ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται » ( Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4 ). [ Σημ. Ὁ Ross διορθώνει « κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται », ὕπερ παρουσιάζεται μὴ ἀποδίδον ἔννοιάν τινα. Ὁ Αρelli δέχεται τὸ ὀρθόν ].

5. Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς  $\sqrt{3}$ .

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2 - 6 - 1955).

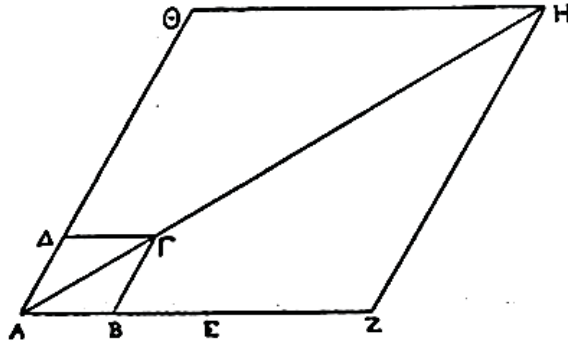
Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Κόκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως ( ὡς γνωστὰς ) τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \quad \text{καὶ}$$

$$265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2, \quad 1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1.$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 0. II. 10 τῶν Στοιχείων, διὰ τοῦ ὁποῖου κατὰ τὸν Πρόκλον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον ὑπολογίζεται ἡ  $\sqrt{2}$  διὰ κατασκευῆς τετραγώνων ( ἴδε Εἰσαγωγήν II τόμον, σ. 8 ) εὐρίσκονται οἱ ἀνωτέρω τύποι τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ κατασκευῆς συνεχῶν ῥόμβων.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ῥόμβον  $AB\Gamma\Delta$ , τοῦ ὁποῖου ἡ ἀμβλεῖα γωνία  $AB\Gamma = 120^\circ$ . Φέρομεν τὴν διαγώνιον  $AG$ . Καλοῦμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ῥόμβου  $AB = a_1$  καὶ τὴν διαγώνιον  $AG = \delta_1$ . Κατὰ τὸ *II 12* τῶν *Στοιχείων* θὰ ἔχωμεν  $\delta_1^2 = 3a_1^2$  (1) καὶ συνεπῶς  $\delta_1 : a_1 = \sqrt{3}$ . Ἐπὶ τῆς προεκτά-



σεως τῆς  $AB$  λαμβάνομεν τμήμα  $BE = AB = a_1$  καὶ ἐν συνεχείᾳ τμήμα  $EZ = AG = \delta_1$ . Κατὰ τὸ *II 10* τῶν *Στοιχείων* θὰ ἔχωμεν

$$(2a_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2a_1^2 + 2(a_1 + \delta_1)^2, \quad \text{καὶ ἐκ ταύτης}$$

$$(2a_1 + \delta_1)^2 = 4a_1^2 + 4a_1\delta_1 + \delta_1^2 \quad (2).$$

$$\text{Εἶναι ἄρα καὶ} \quad 3(2a_1 + \delta_1)^2 = 12a_1^2 + 12a_1\delta_1 + 3\delta_1^2 \quad (3).$$

Ἄλλὰ κατὰ τὴν (1) εἶναι  $\delta_1^2 = 3a_1^2$ . Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ β' μέλος τῆς (3) λαμβάνομεν

$$3(2a_1 + \delta_1)^2 = 9a_1^2 + 12a_1\delta_1 + 4\delta_1^2$$

$$\eta \quad 3(2a_1 + \delta_1)^2 = (3a_1 + 2\delta_1)^2 \quad (4).$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ, ὅτι ἡ μὲν  $2a_1 + \delta_1$ , ἣν καλοῦμεν  $a_2$ , εἶναι ἡ πλευρὰ, ἡ δὲ  $3a_1 + 2\delta_1$  ἣν καλοῦμεν  $\delta_2$ , εἶναι ἡ διαγώνιος δευτέρου ῥόμβου τοῦ  $ABZ\eta\Theta$ , ὁμοίου πρὸς τὸν πρῶτον, τὸν  $AB\Gamma\Delta$ . Ὅθεν εὑρέθη ὁ νόμος κατασκευῆς ὁμοίων ῥόμβων. Ἡ πλευρὰ ἐκάστου τούτων εἶναι  $a_r = 2a_{r-1} + \delta_{r-1}$  καὶ ἡ διαγώνιος  $\delta_r = 3a_{r-1} + 2\delta_{r-1}$ .

Οἱ συναφεῖς πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἦτοι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι τῶν συνεχῶν ῥόμβων, θὰ εἶναι

	Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ (πλευρὰ)	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ (διαγώνιος)
πρώτου ῥόμβου	$a_1$	$\delta_1$
δευτέρου ῥόμβου	$a_2 = 2a_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3a_1 + 2\delta_1$
τρίτου ῥόμβου	$a_3 = 2a_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3a_2 + 2\delta_2$
τετάρτου ῥόμβου	$a_4 = 2a_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3a_3 + 2\delta_3$
⋮	⋮	⋮
$\nu$ ῥόμβου	$a_\nu = 2a_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3a_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν  $a_1 = 1$ ,  $\delta_1 = 1$ , λαμβάνομεν τὰς ἐξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 11$$

$$a_4 = 41$$

$$a_5 = 153$$

⋮

Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ

$$\delta_1 = 1$$

$$\delta_2 = 5$$

$$\delta_3 = 19$$

$$\delta_4 = 71$$

$$\delta_5 = 265$$

⋮

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3}$$

καὶ

$$1^2 = 3 \cdot 1^2 - 2$$

$$5^2 = 3 \cdot 3^2 - 2$$

$$19^2 = 3 \cdot 11^2 - 2$$

$$71^2 = 3 \cdot 41^2 - 2$$

$$265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2$$

⋮

$$y^2 = 3 \cdot x^2 - 2$$

Ἐὰν θέσωμεν  $a_1 = 1$ ,  $\delta_1 = 2$ , λαμβάνομεν τὰς ἐξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 15$$

$$a_4 = 56$$

$$a_5 = 209$$

$$a_6 = 780$$

Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ

$$\delta_1 = 2$$

$$\delta_2 = 7$$

$$\delta_3 = 26$$

$$\delta_4 = 97$$

$$\delta_5 = 362$$

$$\delta_6 = 1351$$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

καὶ

$$2^2 = 3 \cdot 1^2 + 1$$

$$7^2 = 3 \cdot 4^2 + 1$$

$$26^2 = 3 \cdot 15^2 + 1$$

$$\begin{aligned}
 97^2 &= 3 \cdot 56^2 + 1 \\
 362^2 &= 3 \cdot 209^2 + 1 \\
 1351^2 &= 3 \cdot 780^2 + 1 \\
 &\vdots \\
 y^2 &= 3 \cdot x^2 + 1
 \end{aligned}$$

Ευρέθησαν δηλ. οί τύποι, τούς οποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἄνευ ἀποδείξεων (ὡς εὐρεθέντας ὑπὸ προγενεστέρων του), ἥτοι

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

καὶ  $265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2, \quad 1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1.$

[ Σημ. Ἡ λήψις 1)  $a_1 = 1, \delta_1 = 1$  καὶ 2)  $a_1 = 1, \delta_1 = 2$  εἶναι χρησιμοποιήσις τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων, τῆς σήμερον λεγομένης *iteratio*. Αὕτη ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ὡς συναγεται ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς  $\sqrt{2}$  διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Συναφῆς εἶναι ἡ ἀνακοίνωσις ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 14.6.1956 ].

β. Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2-6-1955).

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης πραγματείας διὰ τὴν  $\sqrt{3}$  εὐρίσκεται ἡ  $\sqrt{\lambda}$  διὰ  $\lambda \geq 5$ , (ἀκέραιον) ἐκ τῶν ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ

$$\begin{aligned}
 a_1 & \\
 a_2 &= 2a_1 + \delta_1 \\
 a_3 &= 2a_2 + \delta_2 \\
 a_4 &= 2a_3 + \delta_3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= 2a_{n-1} + \delta_{n-1}
 \end{aligned}$$

Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ

$$\begin{aligned}
 \delta_1 & \\
 \delta_2 &= \lambda a_1 + 2\delta_1 \\
 \delta_3 &= \lambda a_2 + 2\delta_2 \\
 \delta_4 &= \lambda a_3 + 2\delta_3 \\
 &\vdots \\
 \delta_n &= \lambda a_{n-1} + 2\delta_{n-1}
 \end{aligned}$$

καὶ  $\frac{\delta_1}{a_1} < \frac{\delta_3}{a_3} < \frac{\delta_5}{a_5} < \dots < \sqrt{\lambda} < \dots < \frac{\delta_6}{a_6} < \frac{\delta_4}{a_4} < \frac{\delta_2}{a_2}$

( λαμβάνεται  $a_1 = 1$  καὶ  $\delta_1 = 2$  ).

Εἶναι δὲ ἀκόμη  $\delta_n^2 = \lambda a_n^2 + (\lambda - 4)^n (-1)^n$ .

7. Ἐπὶ τοῦ Εὐκλείδειου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Διὰ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (24 - 11 - 1955).

Εἰς τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα ἢ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους αὐτοῦ γίνεται, κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ταύτην, ὡς καὶ τοῦ πρώτου, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γ' θεωρήματος τῆς Κύκλου μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους.

8. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Λιγνίτη (12 - 1 - 1956).

Εἰς τὸ χωρίον τοῦτο ὁ Πλάτων γράφει ὅτι ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηνάιος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ...  $\sqrt{17}$  καὶ ὅτι μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς  $\sqrt{17}$  ἐσταμάτησεν. Ὑποστηρίζεται διὰ τῆς πραγματείας ταύτης ἐπὶ τῇ βάσει χωρίων παλαιῶν συγγραφέων, ὅτι ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται ἐνταῦθα τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσει εἰς τὴν  $\sqrt{17}$ . Μνημονεύονται 1) Ὁ μουσικὸς τόνος διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος ὁ  $\frac{9}{8}$ , 2) Ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τούτου 9 καὶ 8 ἰσοῦται πρὸς 17, 3) Ὅτι οἱ ὄροι οὗτοι 9 καὶ 8 εἶναι οἱ μέσοι ὄροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας  $6 : 8 = 9 : 12$ , 4) Ὅτι τὸ πλῆθος τῶν συλλαβῶν τοῦ πρώτου στίχου τῆς Ὀδυσσεΐας « ἄνδρα μοι ἔννεπε... » εἶναι 17, 5) Ὅτι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας καὶ ἡ μικροτέρα 8, ἤτοι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κίωνων τοῦ Παρθενῶνος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας  $6 : 8 = 9 : 12$ , ἐξ ἧς κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλίμαξ τοῦ Πυθαγόρου.

9. Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (14 - 6 - 1956).

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις, καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος  $\chi$  τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν  $\chi = \varphi(\chi)$ . Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται ἀθαιρέτως τιμὴ τις προσεγγίσεως, ἔστω  $\chi_0$ , καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως  $\chi_{n+1} = \varphi(\chi_n)$ , [ $n = 0, 1, 2, \dots$ ]

κατὰ σειράν ἢ ἀκολουθία τῶν τιμῶν  $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \dots$ . Ἐν ἡ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὀριακὴν τινα τιμὴν  $\xi$ , εἶναι προφανές, ὅτι  $\xi = \varphi(\xi)$  εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλείστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἀποδεικνύεται διὰ συναφῶν παραδειγμάτων, ὅτι ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας τοῦλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου.

10. Ἐπὶ τοῦ X Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (17 - 1 - 1957).

Παρέχεται νέα ἐρμηνεῖα τοῦ περιεχομένου τοῦ X Βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ ὑποστηρίζεται, ὅτι σκοπὸς τοῦ Βιβλίου τούτου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται διὰ τὴν κατασκευὴν τούτου τὰ ἀπλούστατα τῶν ἄσυμμέτρων μεγεθῶν.

11. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, μέρος II.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (31 - 1 - 1957).

Διὰ τῆς παραθέσεως στίχων ἐκ τῆς Ὀδυσσεΐας τοῦ Ὀμήρου φαίνεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἦτο ἱερὸς καὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὀμήρου. Συνεπῶς ἐνισχύεται ἔτι περαιτέρω ἡ κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς 12.1.1956 ὑποστηρικθεῖσα ἄποψις, ὅτι ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσει εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἄσυμμέτρου τῆς  $\sqrt{17}$  ὑπανίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

## ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

- 'Αρχιμήδους τετραγωνισμὸς παραβολῆς, 'Αθῆναι, 1946.
- 'Αρχιμήδους Μηχανικά I, 'Αθῆναι, 1946.
- Τὸ δῆλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, 'Αθῆναι, 1949.
- 'Αρχιμήδους, Κύκλου μέτρησις, 'Αθῆναι, 1950.
- Εὐκλείδου, Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλ. I, II, III, IV. Τόμ. I, 'Αθῆναι, 1952, ἔκδ. Νικ. Σάκκουλα.
- Εὐκλείδου, Γεωμετρία — Θεωρία Ἀριθμῶν, Στοιχείων Βιβλ. V, VI, VII, VIII, IX, Τόμ. II, Ὁργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων (Ἐπιτελεῖον Παιδείας), 'Αθῆναι, 1953.
- Μαθήματα ἱστορίας τοῦ πολιτισμοῦ. Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικά. [Ἐκ τῶν παραδόσεων ἐν τῇ Σχολῇ Γενικῆς Μορφώσεως Ἀνωτέρων Ἀξιωματικῶν τοῦ Γενικοῦ Ἐπιτελεῖου Στρατοῦ]. 'Αθῆναι 1956. Ἐκδ. Ἀνδ. Σιδέρη.
- Εὐκλείδου, Περὶ Ἀσυμμέτρων, Στοιχείων Βιβλ. X, Τόμ. III, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, 'Αθῆναι, 1956/1957.
- Εὐκλείδου, Στερεομετρία, Στοιχείων Βιβλ. XI, XII, XIII. Τόμ. IV, Ὁργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων (Ἐπιτελεῖον Παιδείας), 'Αθῆναι 1957.