

Ο Φορμαλισμός της 3+1 Αριθμητικής Σχετικότητας για τη Μελέτη της Μετρικής Schwarzschild

Αναστασία Ιωάννα Ισούκη

ΣΕΜΦΕ, Ιούλιος 2025



- Οι εξισώσεις Einstein λύνονται αναλυτικά μονάχα για ελάχιστα αστροφυσικά συστήματα, τα οποία διακρίνονται από υψηλή συμμετρία →
- Υπάρχει ανάγκη επίλυσής τους αριθμητικά!
- Ο υπολογιστής αδυνατεί να λύσει τις εξισώσεις στη συνναλοιώτη μορφή τους!

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (0.1)$$



Ανάγκη γραφής των εξισώσεων Einstein ως Πρόβλημα Αρχικών Τιμών ή αλλιώς Πρόβλημα Cauchy!

- Χρειάζεται γνώση των $\{g_{\alpha\beta}, \partial_t g_{\alpha\beta}\}$ σε κάθε σημείο μιας υπερεπιφάνειας με $t = \text{const.} = t_o$.
- Απαιτείται γνώση του $\partial_t^2 g_{\alpha\beta}$ από τις εξισώσεις Einstein $\rightarrow$
- Ολοκλήρωση για υπολογισμό των $\{g_{\alpha\beta}, \partial_t g_{\alpha\beta}\}$ στην υπερεπιφάνεια $t + \delta t$
- 10 εξισώσεις Einstein όμως:

Ταυτότητα Bianchi:

$$\partial_t G^{\alpha 0} = -\partial_i G^{\alpha i} - G^{\beta\mu} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} - G^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu}^{\mu} \quad (1.1)$$

- Τα $G^{\alpha 0}$ δεν εμπεριέχουν $\partial_t^2 g_{\alpha\beta} \rightarrow$ οι 4 εξισώσεις δεν εμπεριέχουν πληροφορία για τη χρονική εξέλιξη
- $\rightarrow$ 4 βαθμοί ελευθερίας σχετιζόμενοι με την ελευθερία επιλογής συστήματος συντεταγμένων
- $\rightarrow$ Αποτελούν σχέσεις που πρέπει οι μεταβλητές $\{g_{\alpha\beta}, \partial_t g_{\alpha\beta}\}$ να ικανοποιούν
- Η πληροφορία για τη δυναμική βρίσκεται στις $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$

$\rightarrow$ Ανάγκη εισαγωγής του 3+1 Σπασίματος του Χωροχρόνου

Η Γεωμετρία μιας Χωρικής Υπερεπιφάνειας

Μια υπερεπιφάνεια Σ ορίζεται τοπικά ως τα σημεία όπου ένα βαθμωτό πεδίο $f(x^\alpha) = \text{const.}$. Εδώ επιλέγεται ο καθολικός χρόνος t ως το βαθμωτό πεδίο. Ορίζεται:

One-form

$$\Omega_\alpha = \nabla_\alpha t = \partial_\alpha t \quad (1.2)$$

Κάθετο στην υπερεπιφάνεια διάνυσμα

$$\omega^\alpha = g^{\alpha\mu} \Omega_\mu \quad (1.3)$$

Κανονικοποιημένο Κάθετο Διάνυσμα

$$n^\alpha = -(-g^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t)^{-1/2} \nabla^\alpha t \quad (1.4)$$

Πρόσημο $(-)$ $\rightarrow$ το διάνυσμα δείχνει προς το μέλλον

Η νόρμα του Ω_α ορίζεται ως:

$$||\Omega_\alpha|| = g^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t \equiv -\frac{1}{\alpha^2} \quad (1.5)$$

οπότε

κάθετο Διάνυσμα

$$n^\alpha = -\alpha \nabla^\alpha t \quad (1.6)$$

Για χωρική υπερεπιφάνεια, **n** *χρονοειδής* :

$$n^\mu n_\mu = -1 \quad (1.8)$$

→ Λόγω της ιδιότητας αυτής ερμηνεύεται και ως η τετραταχύτητα του "normal"/κανονικού παρατηρητή

Επιτάχυνση του κανονικού διανύσματος

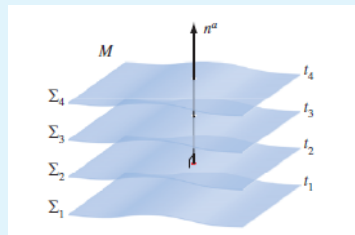
$$\alpha_\alpha = -n^\beta \nabla_\beta n_\alpha \quad (1.9)$$

Ιδιότητα

$$n_\alpha \nabla_\beta n^\alpha = 0 \quad (1.10)$$

Χωρικός Χαρακτήρας Επιτάχυνσης

$$n^\alpha \alpha_\alpha = 0 \quad (1.11)$$



Σχήμα: Το διάνυσμα n είναι κάθετο στις χωρικές υπερεπιφάνειες

Χωρικός Προβολικός Τελεστής

$$\gamma_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + n^{\alpha} n_{\beta} \quad (1.12)$$

Χρονικός Κανονικός Προβολικός Τελεστής

$$N_{\beta}^{\alpha} = -n^{\alpha} n_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} - \gamma_{\beta}^{\alpha} \quad (1.13)$$

Προβολή Τανυστή στη Χωρική Υπερεπιφάνεια

$$\perp T_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} T_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

Αποσύνθεση σε Χωρικό Και Χρονικό Μέρος

$$u^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} u^{\beta} = \perp u^{\alpha} - n^{\alpha} n_{\beta} u^{\beta} \quad (1.15)$$

$$\omega_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta} \omega_{\beta} = \perp \omega_{\alpha} - n^{\beta} n_{\alpha} \omega_{\beta} \quad (1.16)$$

Ορίζουμε τη χωρική προβολή της μετρικής $g_{\alpha\beta}$ ως χωρική μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} + n_{\alpha} n_{\beta} \quad (1.17)$$

→ Δίνει πληροφορία για την εσωτερική καμπυλότητα της υπερ επιφάνειας

Η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος

Για τανυστικό πεδίο T πάνω στην Σ ορίζεται η συναλλοίωτη παράγωγός του σύμφωνα με την σύνδεση αυτή Levi-Civita και συνδέεται με την χωροχρονική συναλλοίωτη παράγωγο του ως:

$$DT = \gamma \nabla T \quad (1.18)$$

με τα στοιχεία της να γράφονται ως

$$D_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots \gamma^{\nu_l}_{\beta_l} \gamma^\delta_\gamma \nabla_\delta T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (1.19)$$

όπου

$$D_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.20)$$

Χωρικός Τανυστής Riemann

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{T}(\Sigma) : (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) u_\mu = R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu u_\nu \quad (1.21)$$

Χωρικός τανυστής Ricci και Ricci καμπυλότητα

$$\mathbf{R} : R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^\mu \quad (1.22)$$

$$R : R = \gamma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (1.23)$$

Χωρικά Σύμβολα Christoffel, Συντελεστές της Σύνδεσης Levi-Civita

Για δεδομένο σύστημα αναφοράς:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\delta}(\partial_{\gamma}\gamma_{\delta\beta} + \partial_{\beta}\gamma_{\delta\gamma} - \partial_{\delta}\gamma_{\beta\gamma}) \quad (1.24)$$

ενώ ο χωρικός τανυστής Riemann δίνεται:

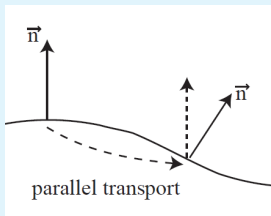
$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} - \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu\beta}^{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\delta} \quad (1.25)$$

Επιτάχυνση Κάθετου Διανύσματος

$$\alpha_{\beta} = D_{\beta} \ln \alpha \quad (1.26)$$

Η εξωγενής Καμπυλότητα

Η χωρική μετρική δεν εμπεριέχει πληροφορία για το σχήμα της χωρικής υπερεπιφάνειας εμβαπτισμένης στο χωρόχρονο!



Σχήμα: Η πληροφορία αυτή δίνεται από την παράλληλη μετακίνηση του κανονικού διανύσματος.

το $-K$ εκφράζει το κλασματικό ρυθμό μεταβολής του τρισδιάστατου όγκου κατά μήκος του $n \rightarrow$

Ορισμός Τανυστή Εξωγενούς Καμπυλότητας

$$K_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\beta}^{\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu} \quad (1.27)$$

Ισοδύναμες Διατυπώσεις

$$K_{\alpha\beta} = -\nabla_{\alpha} n_{\beta} - n_{\alpha} \alpha_{\beta}, \quad K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{\alpha\beta} \quad (1.28)$$

$\rightarrow$ συμμετρικός τανυστής $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$

Το ίχνος του τανυστή $K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} K &= -\nabla^{\alpha} n_{\alpha} \\ &= -\mathcal{L}_n \ln \gamma^{1/2} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Συσχετισμός της χωροχρονικής καμπυλότητας με τα μεγέθη που περιγράφουν την καμπυλότητα στον (3+1) φορμαλισμό $\rightarrow$ προβολές του ${}^{(4)}R_{\delta\kappa\lambda\sigma}$ στη χωρική υπερεπιφάνεια αλλά και στη χρονική κατεύθυνση.

Εξίσωση Gauss-Codazzi

$$\gamma_{\alpha}^{\delta}\gamma_{\beta}^{\kappa}\gamma_{\mu}^{\lambda}\gamma_{\nu}^{\sigma}{}^{(4)}R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu} \quad (1.30)$$

Εξίσωση Gauss-Mainardi

$$D_{\beta}K_{\alpha\delta} - D_{\alpha}K_{\beta\delta} = \gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}^{\nu}\gamma_{\delta}^{\lambda}n^{\sigma}{}^{(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (1.31)$$

Εξίσωση Ricci

$$\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} = n^{\mu}n^{\nu}\gamma_{\alpha}^{\delta}\gamma_{\beta}^{\sigma}{}^{(4)}R_{\mu\nu\delta\sigma} - \frac{1}{\alpha}D_{\alpha}D_{\beta}\alpha - K_{\beta}^{\mu}K_{\alpha\mu} \quad (1.32)$$

Ορισμός Φυλλοποίησης

Με τον όρο φυλλοποίηση εννοούμε όταν υπάρχει λείο βαθμωτό πεδίο $\hat{t}$ στην πολλαπλότητα $\mathcal{M}$ το οποίο είναι κανονικό έτσι ώστε κάθε υπερεπιφάνεια να είναι μια στάθμη βαθμωτού πεδίου:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Sigma_t := \{p \in \mathcal{M}, \hat{t}(p) = t\}. \quad (1.33)$$

με το $\hat{t}$ να είναι κανονικό να σημαίνει πως οι υπερεπιφάνειες Σ_t δεν τέμνονται:

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset \quad \text{for } t \neq t'. \quad (1.34)$$

Όλες οι υπερεπιφάνειες Σ_t θεωρούμε είναι χωρικές και καλύπτουν όλη την πολλαπλότητα:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t. \quad (1.35)$$

- Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$ δεν αποτελεί καλή επιλογή ώστε η εξέλιξη να γίνει κατά μήκος του
 $\rightarrow n^\alpha \Omega_\alpha = -\alpha \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t = \frac{1}{\alpha}$
- Επιλέγεται το $\mathbf{t}$ με στοιχεία $t^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha$ όπου β ένα διάνυσμα shift (χωρικό). Πράγματι,
 $\rightarrow t^\alpha \Omega_\alpha = -\alpha^2 \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t + \beta^\alpha \nabla_\alpha t = 1$
- Κάθε διάνυσμα $t dt$ που ξεκινά από τη Σ_t καταλήγει στη γειτονική της Σ_{t+dt} .

Η συνάρτηση lapse και το διάνυσμα shift

- Ο παρατηρητής που κινείται κατά μήκος των καμπυλών που γεννά το διανυσματικό πεδίο n καλείται Eulerian ή κατά Euler.
- Επιλογή $\alpha, \beta^\alpha \rightarrow$ ελευθερία επιλογή συστήματος συντεταγμένων

Η συνάρτηση lapse α

Η συνάρτηση α μετρά τον ιδιόχρονο που μετρά ένας Eulerian παρατηρητής για dt συντεταγμένο χρόνο.

$$dt = \frac{d\tau}{\alpha} \quad (1.36)$$

Το διάνυσμα shift β

Μετράει το πόσο μετατοπίζονται οι χωρικές συντεταγμένες μέσα σε μια υπερεπιφάνεια, σε σχέση με το κάθετο διάνυσμα:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i dt \quad (1.37)$$

Χωρικά Διανύσματα Βάσης

$$e_{(i)}^\alpha \Omega_\alpha = 0, \quad (1.38)$$

$$\downarrow$$

$$n_i = 0 \quad (1.39)$$



Οι ανταλλοίωτες συνιστώσες χωρικών ταχυοτήτων με χρονικούς δείκτες

$$\beta^\alpha = (0, \beta^i), K^{0i} = 0, K^{00} = 0, \gamma^{\alpha 0} = 0 \quad (1.40)$$

→ Όλη η πληροφορία των χωρικών βρίσκεται ταχυοτήτων βρίσκεται στις χωρικές συνιστώσες. Ισχύει για ανταλλοίωτες αλλά και συναλλοίωτες συνιστώσες!

Στοιχεία Μετρικής

$$g_{00} = (-\alpha^2 + \beta^i \beta_i), g_{0i} = \beta_i, g_{ij} = \gamma_{ij} \quad (1.41)$$

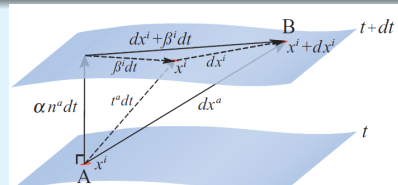
$$g^{00} = -\frac{1}{\alpha^2}, g^{0i} = \frac{\beta^i}{\alpha^2}, g^{ij} = \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \quad (1.42)$$

Χρονικό Διάνυσμα Βάσης

$$e_{(0)}^\alpha = t^\alpha = (1, 0, 0, 0) (\rightarrow \mathcal{L}_t = \partial_t) \quad (1.43)$$

Το κάθετο Διάνυσμα

$$n^\alpha = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}\right), n_\alpha = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (1.44)$$



Σχήμα:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (-\alpha^2 + \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Εξισώσεις Περιορισμού και Εξισώσεις Εξέλιξης

$$G^{ij} = 8\pi T^{ij} \quad (1.45)$$

$$G^{\alpha 0} = 8\pi T^{\alpha 0} \quad (1.46)$$

→ 6 εξισώσεις εξέλιξης 2ης τάξης

→ 6 εξισώσεις εξέλιξης 1ης τάξης $\partial_t \gamma_{\alpha\beta} \sim K_{\alpha\beta}$

→ 4 εξισώσεις περιορισμού

+6 εξισώσεις εξέλιξης 1ης τάξης $\partial_t K_{\alpha\beta}$

- Από Γεωμετρία → ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΧΩΡΙΚΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ

$$-2\alpha K_{\alpha\beta} = (\mathcal{L}_t \gamma_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_\beta \gamma_{\alpha\beta}) \quad (1.47)$$

- Από $n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} = 8\pi n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta} \rightarrow$ ΕΞΙΣΩΣΗ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΟΥ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ

$$R + K^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = 16\pi\rho \quad (1.48)$$

- Από $\gamma^{\mu\alpha} n^\nu G_{\mu\nu} = 8\pi \gamma^{\mu\alpha} n^\nu T_{\mu\nu} \rightarrow$ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΟΡΜΗΣ

$$D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\mu\alpha} K) = 8\pi j^\alpha \quad (1.49)$$

- Από $\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \rightarrow$ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΑΝΥΣΤΗ ΕΞΩΓΕΝΟΥΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

$$\mathcal{L}_t K_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_\beta K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha (R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda} K_\beta^\lambda) + 4\pi\alpha [\gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) - S_{\alpha\beta}] \quad (1.50)$$

← Εισάγοντας Παρατηρήσιμες Ποσότητες



Προβολές Τανυστή Ενέργειας-Ορμής

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (1.51)$$

$$j_\alpha = -\gamma_\alpha^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (1.52)$$

$$S_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu T_{\mu\nu} \quad (1.53)$$

Τιποθετώντας το Σύστημα Συντεταγμένων Προσαρμοσμένο στη Φυλλοποίηση:

ADM εξισώσεις

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \quad (1.54)$$

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i \quad (1.55)$$

$$\partial_t K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha(R_{ij} - 2K_j^k K_{ik} + K K_{ij}) - 8\pi\alpha(S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(S - \rho)) + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ik} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k \quad (1.56)$$

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (1.57)$$

Εξέλιξη ίχνους K και ορίζουσας γ

$$\partial_t \ln \gamma^{1/2} = -\alpha K + D_i \beta^i \quad (1.58)$$

$$\partial_t K = -D^2 \alpha + \alpha(K_{ij}K^{ij} + 4\pi(\rho + S)) + \beta^i D_i K, \quad (1.59)$$

Ορίζονται οι ποσότητες:

$$\mathcal{H} := n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} - 8\pi\rho \quad (1.60)$$

$$\mathcal{M}_\alpha := -n^\mu \gamma_\alpha^\nu G_{\mu\nu} - 8\pi j_\alpha \quad (1.61)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} := \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu G_{\mu\nu} - 8\pi S_{\alpha\beta} \quad (1.62)$$

Εξισώσεις

$\mathcal{H} = 0, \mathcal{M}_\alpha = 0 \rightarrow$ Εξισώσεις Περιορισμού
Διαφορετικές μορφές των εξισώσεων εξέλιξης
προκύπτουν από διαφορετικούς συνδυασμούς:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta}\mathcal{H} + l_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$$

$$\text{Θεωρούμε } m_{\alpha\beta} = \mu \gamma_{\alpha\beta}, l_{\alpha\beta}^\mu = 0$$

$\rightarrow$ πχ για $\mu = 0$ πρωταρχική μορφή εξισώσεων ADM :

$$\partial_t K_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_\beta K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha(R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda} K_\beta^\lambda) + 4\pi\alpha[\gamma_{\alpha\beta}(S - \rho) - S_{\alpha\beta}] - \frac{\alpha\gamma_{\alpha\beta}}{2}\mathcal{H} \quad (1.63)$$

$\rightarrow$ πχ για $\mu = 1 \rightarrow$ μορφή ADM που λήφθηκε παραπάνω

Προσθήκη συνδυασμών των περιορισμών:

- Φυσικά ισοδύναμα συστήματα αφού πρέπει να ισούνται με 0
- Διαφορετική Μαθηματική Δομή
- Αριθμητικά, απόκλιση από το 0 $\rightarrow$ πιθανή εμφάνιση αριθμητικής αστάθειας

$$\begin{aligned}\nabla^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) &= 0 \\ \nabla^\alpha (\mathcal{E}_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) &= 0\end{aligned}\tag{1.64}$$

Προβολή στη χρονική κατεύθυνση και πάνω στη χωρική υπερεπιφάνεια:



Παράγωγοι στην κατεύθυνση κάθετη των υπερεπιφανειών:

$$n_\nu \nabla^\nu \mathcal{M}_\alpha = -D^\kappa \mathcal{E}_{\alpha\kappa} - \mathcal{E}_{\alpha\kappa} n^\nu \nabla_\nu n^\kappa + \mathcal{L}_\alpha(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{H})\tag{1.65}$$

$$n_\nu \nabla^\nu \mathcal{H} = -\mathcal{E}_{\mu\nu} \nabla^\mu n^\nu - D^\nu \mathcal{M}_\nu + \mathcal{L}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{H})\tag{1.66}$$

Άρα οι περιορισμοί διατηρούνται!

Για το έλεγχο των εξισώσεων και του φορμαλισμού είναι μια καλή ιδέα να εφαρμοστούν για:

- Ένα αστροφυσικό σύστημα η αναλυτική λύση του οποίου είναι γνωστή
- Να εμφανίζει μη τετριμμένα φαινόμενα όπως φυσικές ιδιομορφίες



Μελέτη της μετρικής Schwarzschild μέσω του 3+1 φορμαλισμού!

Ισοτροπικές Συντεταγμένες

Για να γραφεί η μετρική Schwarzschild ώστε το χωρικό μέρος να Συμμορφικά Επίπεδο:

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \right)^2 \quad (2.1)$$

Μετρική Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \quad (2.2)$$

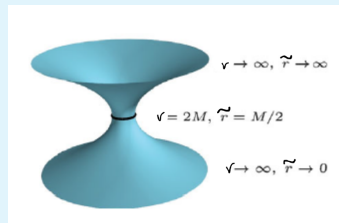
→

Ισοτροπικές Συντεταγμένες

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - 2M/\tilde{r}}{1 + 2M/\tilde{r}} \right)^2 dt^2 + \psi^4 (dr^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2) \quad (2.3)$$

όπου σύμμορφος παράγοντας : $\psi = 1 + 2M/\tilde{r}$

- Ορίζεται κανονικά στον ορίζοντα όπου: $\tilde{r} = M/2$
- Ιδιομορφία Συντεταγμένων για: $\tilde{r} = 0$, αντιστοιχεί στο $r \rightarrow \infty$ που είναι καλά ορισμένο
- Από αντίστροφο μετασχ.
$$\tilde{r} = \frac{1}{2} \left(r - M \pm \sqrt{r^2 - 2Mr} \right):$$
 - εκφράζουν την περιοχή $r \geq 2M$
 - $\tilde{r} \rightarrow 0, \tilde{r} \rightarrow \infty$ αντιστοιχούν σε $r \rightarrow \infty$
 - $\tilde{r} \in [0, M/2]$: η άλλη πλευρά της Einstein-Rosen γέφυρας



Προσδιορισμός των $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ σε μια αρχική υπερεπιφάνεια ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί:

Σύμμορφος Μετασχηματισμός

- Χρονικά Συμμετρικές Λύσεις: $K_{ij} = 0$ άρα και $K = 0$
- Οι εξισώσεις Περιορισμού Ορμής ικανοποιούνται ταυτοτικά
- Καλούμαστε να λύσουμε την εξίσωση Χαμιλτονιανού Περιορισμού
- Σφαιρικά Συμμετρικές Λύσεις

- Χωρική Μετρική: $\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij}$
- Χωρική Καμπυλότητα Ricci: $R = \psi^{-4} \bar{R} - 8\psi \bar{D}^2 \psi$
- Χαμιλτονιανός Περιορισμός:
 $8\bar{D}^2 \psi - \psi \bar{R} - \psi^5 K^2 + \psi^5 K^{ij} K_{ij} = -16\pi\rho\psi^5$
- Επιλέγεται: $\bar{\gamma}_{ij} = \eta_{ij}$
όπου $\bar{D}^2 = \bar{\gamma}^{ij} \bar{D}_i \bar{D}_j$

Λύση Εξίσωσης Laplace σε Σφαιρικές Συντεταγμένες

$$\bar{D}^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi = A + \frac{B}{r^2}, r \rightarrow \infty, \psi \rightarrow 1 \quad (2.4)$$

$$\psi = 1 + \frac{B}{r^2} \quad (2.5)$$

οπότε τελικά:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{B}{r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega) \quad (2.6)$$

Χωρική Μετρική Schwarzschild μελανής οπής σε ισοτροπικές συντεταγμένες με $M = 2B$

Υπάρχει ελευθερία επιλογής για τις συναρτήσεις α, β^i .
Υπάρχουν επιλογές των συναρτήσεων αυτών που δίνουν γνωστές μορφές:

Αρχικά Δεδομένα: επιφάνεια χρονικής συμμετρίας:
 $t = \text{const.}$ για $2M \leq r \leq \infty$:

$$\alpha(r) = (1 - 2M/r)^{1/2}, \quad \beta^r(r) = 0 \quad (2.7)$$

→ δίνουν τη μετρική σε Schwarzschild συντεταγμένες.
Μετασχηματισμός σε ισοτροπικές συντεταγμένες:

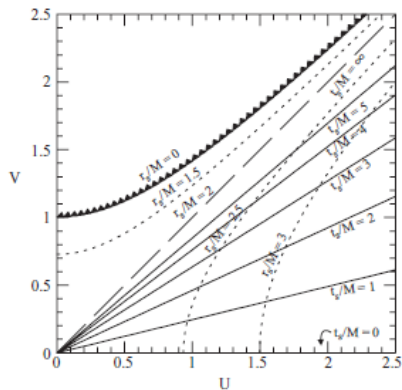
$$\alpha(\tilde{r}) = \frac{1 - M/2\tilde{r}}{1 + M/2\tilde{r}}, \quad \beta^{\tilde{r}}(\tilde{r}) = 0, \quad (2.8)$$

→ δίνουν την ίδια διαμέριση, απλά συναρτήσει της ισοτροπικής ακτίνας
Η διαμέριση σταματά στον ορίζοντα, καθώς εκεί η συνάρτηση lapse απειρίζεται

Αρχικά Δεδομένα: επιφάνεια σταθερού
Eddington-Finkelstein χρόνου: μη χρονικά συμμετρικές

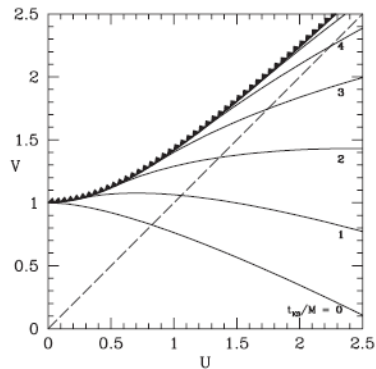
$$\alpha(r) = \left(\frac{r}{r + 2M} \right)^{1/2}, \quad \beta^r(r) = \frac{2M}{r + 2M}. \quad (2.9)$$

→ Δίνεται η μετρική του Schwarzschild χωρόχρονου στη Kerr-Schild μορφή
Εισχωρούν στον ορίζοντα, αλλά η συνάντηση με την ιδιομορφία είναι αναπόφευκτη



Σχήμα: Η Schwarzschild διαμέριση

Σχήμα: Στην πρώτη περίπτωση, η διαμέριση σταματά όταν οι επιφάνειες σταθερού Schwarzschild χρόνου συναντήσουν τον ορίζοντα $r = 2M$. Αντίθετα, οι επιφάνειες σταθερού Eddington-Finkelstein χρόνου, διαπερνούν τον ορίζοντα αλλά η σύγκρουσή τους με τη φυσική ιδιομορφία στο $r=0$ είναι αναπόφευκτη.



Σχήμα: Η Kerr-Schild διαμέριση

$$\alpha = 1 \quad \beta^i = 0 \quad (2.10)$$

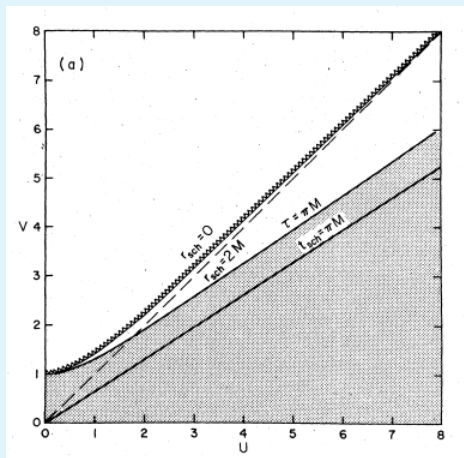


$$\alpha_\beta = D_\beta \ln \alpha = 0 \quad (2.11)$$

→ Οι normal παρατηρητές ακολουθούν Γεωδαισιακές Τροχιές

Ανάπτυξη Ιδιομορφιών Συντεταγμένων

- Αύξηση χωρίς όριο του K : $\partial_t K = K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S) \geq 0$
- Στοιχειώδης τρισδιάστατος κανονικός όγκος: $\Delta V(t) = \sqrt{\gamma(t, \mathbf{x})} dx^1 dx^2 dx^3$ με κλασματικό ρυθμό μεταβολής:
 $\frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt} [\Delta V] = \partial_t (\ln \sqrt{\gamma})$
- Για Γεωδαισιακή Διαμέριση: $\partial_t (\ln \sqrt{\gamma}) = -K$
- Ο τρισδιάστατος κανονικός όγκος θα καταρρεύσει στο μηδέν → ιδιομορφίες συντεταγμένων



Σχήμα: Ξεκινώντας από τη $V = 0$, οι τομές κατά τη γεωδαισική διαμέριση θα χτυπήσουν πάνω στην ιδιομορφία $r_s = 0$ μετά από συντεταγμένο χρόνο $t = \pi M$. Η τελευταία αυτή τομή πλησιάζει ασυμπτωτικά $t_{sch} = \pi M$ επομένως καλύπτεται μόνο ένα μικρό κομμάτι της εξωτερικής λύσης επιλέγοντας αυτή τη διαμέριση. [SmarrYork]

Στοιχείο Όγκου σχετιζόμενο με τους κανονικούς παρατηρητές

$$\frac{\mathcal{L}_n \Delta V}{\Delta V} = -K = 0 \quad (2.12)$$

Παραμένει σταθερό $\rightarrow$

Maximal Συνθήκες

$$K = 0, \partial_t K = 0 \quad (2.13)$$



Ελλειπτική Εξίσωση για α

$$D^2 \alpha = \alpha [K^{ij} K_{ij} + 4\pi(\rho + S)] \quad (2.14)$$

Μεγιστοποίηση όγκου χωρικών τομών όταν $K = 0$

$$\delta \text{vol}(S) = - \int_S d^3x \sqrt{\gamma} cK \quad (2.15)$$

Maximal ελλειπτική εξίσωση + Εξίσωση Χαμιλτονιανού Περιορισμού
↓

Ελλειπτική Εξίσωση

$$D^2\alpha = \alpha R \quad (2.16)$$

→ Μοντέλο-πρόβλημα των Smarr και York:
Κατανομή μάζας ακτίνας a με:

- γ_{ij} flat, $R = 0$ στο εξωτερικό, $R = R_0$ στο εσωτερικό

↓

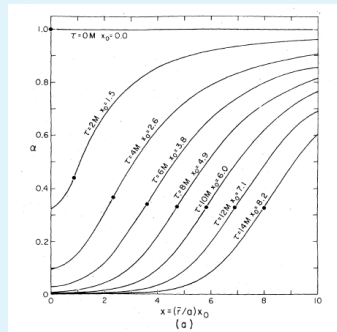
$$\alpha \sim e^{-a\sqrt{R_0}} \quad (2.17)$$

→ γενικεύοντας στη σφαιρικά συμμετρική περίπτωση
→ όπου παράμετρος ισχύς:

$$x_0 = \int_0^\infty R^{1/2} \gamma_{rr}^{1/2} dr \equiv a [R(r=0)]^{1/2} \quad (2.18)$$

↓

$$\alpha \sim e^{-0.97x_0} \quad (2.19)$$



Σχήμα: Η συνάρτηση lapse συναρτήσει της αδιάστατης ακτίνας, $x = (\bar{r}/a)x_0$, όπου $\bar{r}$ η απόσταση από τον λαιμό.

Θεωρούνται υπερεπιφάνειες σταθερού:

$$\sigma(t, r) = t - F(r) = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad t = F(r) + \sigma \quad (2.20)$$

→

Κάθετο Διάνυσμα

$$n_\mu = -N \nabla_\mu \sigma = -N(1, -F') \quad (2.21)$$

Maximal Συνθήκη

↓

$$F' = -\frac{C}{(1 - 2M/r)\sqrt{r^4 - 2Mr^3 + C^2}}, N = \frac{1}{r^2} (r^4 - 2Mr^3 + C^2)^{1/2} \quad (2.22)$$

Αποφυγή της ιδιομορφίας → οι τομές να εμφανίζουν ελάχιστη τιμή του r στο λαιμό → απειρισμός του F'

- Πόλος $r = 2M \rightarrow$ σχετίζεται με ιδιομορφία συντεταγμένων
- Αναζήτηση μη τετρημένης λύσης του:
 $P(r) = r^4 - 2Mr^3 + C^2$
- 2 πραγματικές ρίζες: $C^2 < 27M^4/16$

- $r_C \rightarrow$ η μεγαλύτερη ρίζα
- $C^2 = 0 \rightarrow r_C = 2M$
- $C \rightarrow 27M^4/16, r_C \rightarrow 3M/2$: οριακή maximal τομή

$$F(r, C) = - \int_{r_C}^r \frac{C}{\left(1 - \frac{2M}{x}\right) \sqrt{P(x)}} dx \quad (2.23)$$

Έστω $\sigma = 0$ αρχική τομή

$$C = 0$$

Υπερεπιφάνειες σταθερού $\sigma = t = \text{const.}$ Schwarzschild χρόνου

- Maximal καθώς $K_{ij} = 0$
- Στο $r = r_C$ η σ δεν είναι διαφορίσιμη
- $N : 1$ στο ένα άπειρο και -1 στο άλλο
↓ Περιττές maximal τομές

$$0 < C < 3\sqrt{3}M^2/4$$

Παραμετροποιούμε με:

$$\tau(C) = F(\infty, C) = - \int_{r_C}^{\infty} \frac{C}{\left(1 - 2M/x\right) [P(x)]^{1/2}} dx \quad (2.24)$$

Ιδιόχρονο μετρούμενος στο άπειρο

- Κάθετο Διάνυσμα: $n_\mu = -\alpha \nabla_\mu \tau$

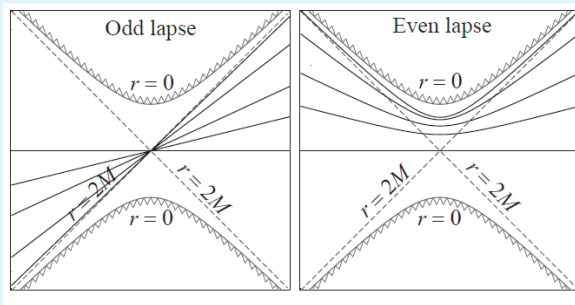
$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{dC}{d\tau} \left[\frac{1}{r - \frac{3M}{2}} \frac{[P(r)]^{1/2}}{r^2} - \int_{r_C}^r \frac{x(x-3M)}{\left(x - \frac{3M}{2}\right)^2 [P(x)]^{1/2}} dx \right]$$

- α : 1 και στα 2 άπειρα → άρτιες maximal τομές

N , α λύσεις της:

$$(D^2 - K_{ij}K^{ij})f = 0 \quad (2.25)$$

με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες



Μελέτη των Beig και O'Murchadha:

Η συνάρτηση lapse α στο r_C

$$\alpha(r_C) = \frac{dC}{d\tau} \left(\frac{1}{2\delta} \right) \quad (2.26)$$

όπου δ η απόσταση του λαιμού από την ακραία τιμή: $\delta := r_C - \frac{3M}{2}$
Υπολόγισαν πως:

$$\alpha(r_C) \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\delta}{M} \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} \exp\left(\frac{A}{\Omega}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\Omega M}\right) \quad (2.27)$$

με

$$\Omega \simeq 1.8371, A \simeq -0.2181 \quad (2.28)$$

Μελέτη της α στο $r = 2M$ για μεγάλους χρόνους τ

Εμπειρική διαπίστωση: $\alpha \sim 0.3$.

Οι Riemann και Bruegmann το μελετήσαν με τις παραπάνω τεχνικές:

Υπολόγισαν πως στο $r = 2M$:

$$\alpha_{r=2M} = -\frac{1}{K_C(\infty)} \left[\frac{2}{M} - \frac{C}{4M^2} K_C(2M) \right]. \quad (2.29)$$

όπου τα $K_C(\infty), K_C(2M)$ για μεγάλους χρόνους αυξάνονται ραγδαία ως $1/\delta^2$, άρα:

$$\alpha_{r=2M} = \frac{C_{\text{lim}}}{4M^2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \approx 0.3248, \quad (2.30)$$

Ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!

