

Η Κβαντοηλεκτροδυναμική Πρόβλεψη για την Σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Ευάγγελος Νάστας
Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

2016

Περιεχόμενα

- Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου
- Οι Κανόνες Feynman
- Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$
 - Αθροίσματα Πόλωσης Φωτονίων
 - Το Στοιχείο Πίνακα
 - Η Σχέση Klein-Nishina
 - Όριο Υψηλών Ενεργειών

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου είναι μια θεωρία πεδίου που ενσωματώνει την κβαντική μηχανική και τις αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Όπως θα φανεί αργότερα η κβαντική θεωρία πεδίων είναι απλά κβαντική μηχανική με άπειρο αριθμό αρμονικών ταλαντωτών.

Η θεωρία προβλέπει ότι σε κάθε πεδίο, η αλληλεπίδραση πραγματοποιείται με την μεταφορά ενός σωματιδίου, που ονομάζεται κβάντο του πεδίου, από το ένα σωματίδιο στο άλλο. Για παράδειγμα το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, είναι το φωτόνιο, ενώ της ισχυρής πυρηνικής δύναμης είναι το γλουόνιο. Ακριβέστερα, αυτά τα σωματίδια αλληλεπίδρασης αποτελούν διηγευμένες καταστάσεις του πεδίου.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Για παράδειγμα, η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) χρησιμοποιεί ένα ηλεκτρονιακό πεδίο και ένα φωτονικό πεδίο, η κβαντική χρωμοδυναμική (QCD) έχει ένα πεδίο για κάθε τύπο κουάρκ και η φυσική συμπυκνωμένης ύλης ένα πεδίο ατομικής μετατόπισης που προκαλεί τα φωνόνια.

Υπάρχει επομένως ένα πεδίο για κάθε τύπο σωματιδίου. Έτσι ένα πεδίο για όλα τα φωτόνια στο σύμπαν, ένα πεδίο για όλα τα ηλεκτρόνια και ούτω καθεξής. Και αυτά τα πεδία υπάρχουν παντού.

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου

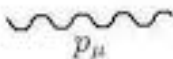
Αν δοθεί αρκετή ενέργεια, το πεδίο θα πάει σε μια υψηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Αυτές οι καταστάσεις είναι που ερμηνεύονται ως σωματίδια. Το σημείο στο πεδίο όπου του δόθηκε ενέργεια θα μοιάζει με σωματίδιο και καθώς η ενέργεια διαδίδεται μέσω του πεδίου, θα μοιάζει με σωματίδιο που κινείται. Ορισμένα πεδία απαιτούν περισσότερη ενέργεια από άλλα για να δημιουργήσουν σωματίδια. Η ποσότητα ενέργειας είναι ανάλογη της μάζας των σχετικών σωματιδίων.

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Για παράδειγμα, ένα μποζόνιο Higgs είναι πολύ πιο μαζικό από ένα ηλεκτρόνιο. Έτσι τα ηλεκτρόνια είναι πολύ πιο εύκολο να δημιουργηθούν, αλλά τα μποζόνια Higgs είναι πολύ πιο δύσκολο. Αυτός είναι ουσιαστικά ο λόγος που πήρε τόσο πολύ χρόνο για να βρεθεί το μποζόνιο Higgs. Έπρεπε να οικοδομηθεί ένα τεράστιο μηχάνημα, LHC, όπου ήταν σε θέση να δώσει στο πεδίο Higgs αρκετή ενέργεια για να δημιουργήσει μποζόνια Higgs από αυτό.

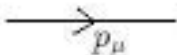
Οι Κανόνες Feynman

photon propagator



$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

electron propagator



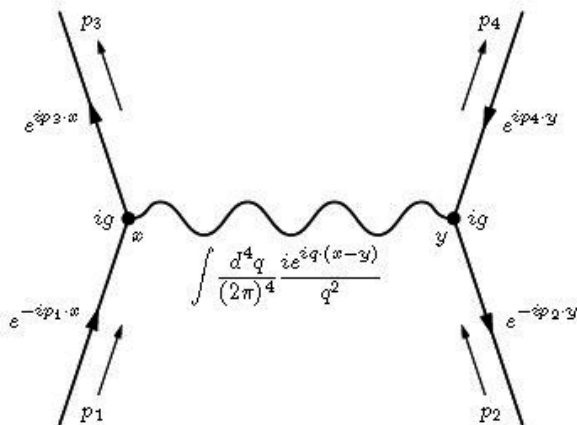
$$\frac{i(p_\mu \gamma^\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

QED Vertex

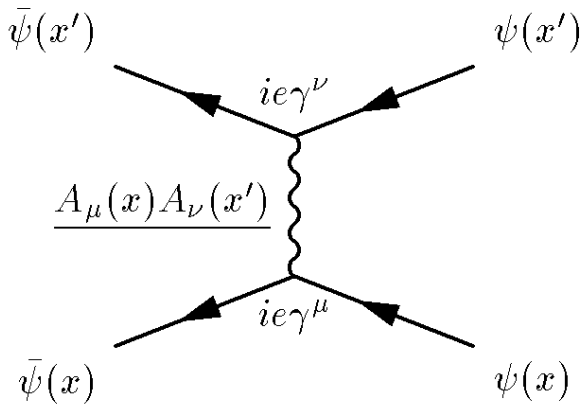


$$iQe\gamma^\mu$$

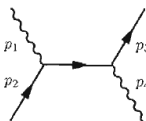
Οι Κανόνες Feynman



Οι Κανόνες Feynman



Οι Κανόνες Feynman



$$i\mathcal{M}_s = (-ie)^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_4^{*\nu} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \gamma^\mu u(p_2),$$

Σχήμα: Η συνεισφορά s-channel στην σκέδαση Compton.

Οι Κανόνες Feynman

$$i\mathcal{M}_t = (-ie)^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_4^{\nu} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_2 - \not{p}_4 + m)}{(p_2 - p_4)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_2)$$

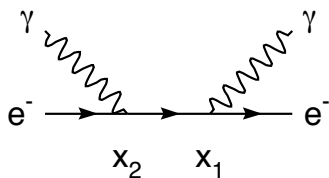
Σχήμα: Η συνεισφορά t-channel στην σκέδαση Compton.

Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

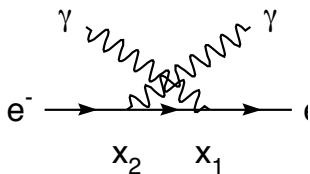
Στη περίπτωση της Κβαντοηλεκτροδυναμικής πρόβλεψης για την σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ πρέπει στις $S_2^{(2)}$, $\psi^+(x_2)$ να επιλεγεί να καταστρέφεται το αρχικό ηλεκτρόνιο και στην $\bar{\psi}^-(x_1)$ να δημιουργείται το τελικό. Όσον αφορά τα φωτόνια, αφού το A_μ είναι πραγματικό πεδίο, μπορεί να καταστρέφεται το αρχικό φωτόνιο τόσο στην x_2 όσο και στην x_1 και να δημιουργείται το τελικό φωτόνιο στο άλλο σημείο. Επομένως, λαμβάνονται δύο συνεισφορές.

Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα δίδονται στο Σχήμα 4.



S_a



S_b

Σχήμα: Διαγράμματα για την σκέδαση Compton. < > ≡ ↺ ↻

Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

$$S_2^{(2)}(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b, \quad (1)$$

με

$$S_a = (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1-x_2) \gamma^\nu A_\mu^-(x_1) A_\nu^+(x_2) \psi^+(x_2) \quad (2)$$

και

$$S_b = (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1-x_2) \gamma^\nu A_\nu^-(x_2) A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_2). \quad (3)$$

Αθροίσματα Πόλωσης Φωτονίων

Έχει επαληθευθεί ότι (βλ. σχέση πληρότητας)

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_{\mu}^{i*} \epsilon_{\nu}^i = -g_{\mu\nu} + \frac{1}{2E^2} p_{\mu} \bar{p}_{\nu} + \bar{p}_{\mu} p_{\nu} \quad (4)$$

Τώρα, ας υποθεθεί ότι υπάρχει ένα πλάτος που περιλαμβάνει ένα φωτόνιο. Γράφοντας $\mathcal{M} = \epsilon_{\mu} M_{\mu}$, προκύπτει

$$\sum_i |\mathcal{M}|^2 = \epsilon_{\mu}^{i*} M_{\mu}^* M_{\nu} \epsilon_{\nu}^i = -M_{\mu}^* M_{\mu} + \frac{1}{2E^2} p_{\mu} M_{\mu}^* M_{\nu} \bar{p}_{\nu} + \bar{p}_{\mu} M_{\mu}^* M_{\nu} p_{\nu} \quad (5)$$

Αθροίσματα Πόλωσης Φωτονίων

Από την ταυτότητα Ward, $p^\mu M_\mu = 0$, και επομένως μπορεί απλά να αντικατασταθεί στις πολώσεις

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_\mu^{i*} \epsilon_\nu^i \rightarrow -g_{\mu\nu} \quad (6)$$

σε οποιοδήποτε στοιχείο φυσικού πίνακα.

Το Στοιχείο Πίνακα

Οι κανόνες για τον υπολογισμό του αναλλοίωτου πλάτους \mathcal{M} για την σκέδαση Compton είναι

$$|i\rangle = |e^-(p), \gamma(k)\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-(p'), \gamma(k')\rangle. \quad (7)$$

Το στοιχείο πίνακα S για την σκέδαση Compton δίδεται από τις εξ. (1), (2) και (3)

$$S_2^{(2)}(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b \quad (8)$$

και

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}
 \langle f|S_a|i\rangle &= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\
 &\times \bar{u}(p') e^{ip'x_1} \hat{\epsilon}^*(k') e^{ik'x_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x_1 - x_2)} S_F(q) \\
 &\times \hat{\epsilon}(k) e^{-ikx_2} u(p) e^{-ipx_2} \\
 &= (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \\
 &\times \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Το Στοιχείο Πίνακα

Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση, δύναται να είναι

$$\langle f | S_a | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_k}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{k'}}} \mathcal{M}_a,$$

(10)

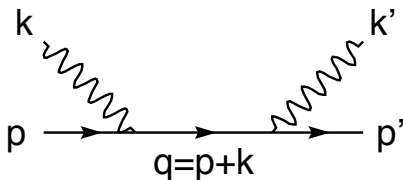
με

$$\mathcal{M}_a = \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p), \quad q = p + k.$$

(11)

Το Στοιχείο Πίνακα

Το διάγραμμα του Σχ. σχετίζεται με την έκφραση 5.



Σχήμα: Συνεισφορά s-channel στην σκέδαση Compton.

Το Στοιχείο Πίνακα

Η τετραορμή q υπολογίζεται από την διατήρηση της τετραορμής στις κορυφές: $q = p + k = p' + k'$. Ωστόσο, σημειώνεται ότι γενικώς είναι $q^2 = m^2 + 2p \cdot k \neq m^2$, δηλαδή το ανταλλαγμένο σωματίδιο, που περιγράφεται από τον διαδότη, δεν είναι ένα πραγματικό σωματίδιο αλλά εικονικό (**virtual**). Από τις εκφράσεις προκύπτει άμεσα πως τα διάφορα κομμάτια συνδέονται με τα στοιχεία του διαγράμματος.

Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Οι Κανόνες Feynman

Η Κβαντοηλεκτροδυναμική πρόβλεψη για την σκέδαση $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Αθροίσματα Πόλωσης Φωτονίων

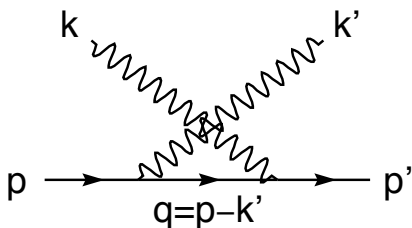
Το Στοιχείο Πίνακα

Η Σχέση Klein-Nishina

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Το Στοιχείο Πίνακα

Σημειώνεται επιπλέον ότι οι σπινωριακοί παράγοντες ξεκινούν από τις τελικές καταστάσεις και τελειώνουν με τις αρχικές. Η επιπλέον συνεισφορά στην σκέδαση Compton που δίδεται από την S_b αντιστοιχεί στο διάγραμμα του Σχ. 6, και χρησιμοποιώντας τους κανόνες, έχω



Σχήμα: Η συνεισφορά t-channel στην σκέδαση Compton.

Το Στοιχείο Πίνακα

Επιστρέφοντας στη διαδικασία $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ της σκέδασης Compton, υπολογίζεται τώρα, το $|\mathcal{M}|^2$, αθροισμένο πάνω στα σπιν και τις πολώσεις. Το $|\mathcal{M}|^2$ περιλαμβάνει όρους από τα διαγράμματα t-channel και s-channel τετραγωνισμένα καθώς και τους ανάμεικτους όρους τους $\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_s^* \mathcal{M}_t$. Για να φανεί τι εμπλέκεται, ας υπολογισθεί πρώτα ένα κομμάτι στο όριο της υψηλής ενέργειας όπου μπορεί να ορισθεί $m = 0$. Στο όριο αυτό μπορεί να εκφρασθεί το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Mandelstam:

$$s = (p_i + k_i)^2, \quad t = (p_f - p_i)^2, \quad u = (p_f - k_i)^2 \quad (13)$$

Σημειώνεται ότι οι μεταβλητές αυτές δεν είναι ανεξάρτητες, αφού $s + t + u = 0$

Το Στοιχείο Πίνακα

Επομένως, στο όριο αυτό, γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$\mathcal{M}_t = -\frac{e^2}{t} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{4*} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma^\nu u(p_2) \quad (14)$$

και χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη σχέση πληρότητας της προηγούμενης παραγράφου είναι

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{e^4}{t^2} \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma_\mu] \quad (15)$$

Θα γίνει τώρα χρήση των $\gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu = -2\not{p}$ και
 $q^\mu = p_2^\mu - p_4^\mu = p_3^\mu - p_1^\mu$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = 4 \frac{e^4}{t^2} \text{Tr}[p_3 \not{q} p_2 \not{q}] = 16 \frac{e^4}{t^2} (2(p_3 \cdot q)(p_2 \cdot q) - p_{23} q^2) \quad (16)$$

και χρησιμοποιώντας ότι $p_3^2 = p_2^2 = 0$, δύναται να απλοποιηθεί αυτή, στην

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 &= 16 \frac{e^4}{t^2} (2p_{13}p_{24} + 2p_{23}p_{13}) = 8 \frac{e^4}{t^2} (t^2 + ut) \\
 &= -8e^4 \frac{s}{t} = 8e^4 \frac{p_{12}}{p_{24}}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Το Στοιχείο Πίνακα

Σημειώνεται ότι όλοι οι παράγοντες του t απλοποιήθηκαν και άρα η απόκλιση στο $t = 0$ δεν είναι $\frac{1}{t^2}$ αλλά απλώς $\frac{1}{t}$.

Συμπεριλαμβανομένων όλων των όρων προκύπτει

$$\mathcal{M} = e^2 \epsilon_{\mu}^{\text{in}} \epsilon_{\nu}^{\text{out}*} \bar{u}(p_3) \left[\frac{\gamma^{\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^{\mu}}{s - m^2} + \frac{\gamma^{\mu} (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^{\nu}}{t - m^2} \right] u(p_2) \quad (18)$$

Το Στοιχείο Πίνακα

όπου

$$\mathcal{M}_s = e^2 \epsilon_\mu^{\text{in}} \epsilon_\nu^{\text{out}*} \bar{u}(p_3) \left[\frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} \right] u(p_2) \quad (19)$$

και

$$\mathcal{M}_t = e^2 \epsilon_\mu^{\text{in}} \epsilon_\nu^{\text{out}*} \bar{u}(p_3) \left[\frac{\gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \right] u(p_2) \quad (20)$$

Το Στοιχείο Πίνακα

Στη συνέχεια, αθροίζοντας / υπολογίζοντας κατά μέσο όρο πάνω στα σπιν και τις πολώσεις, βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left\{ [(p_3 + m) \right. \\
 &\times \left[\frac{\gamma^\nu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\mu}{s - m^2} + \frac{\gamma^\mu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\nu}{t - m^2} \right] \\
 &\times (p_2 + m) \left. \left[\frac{\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\nu}{s - m^2} + \frac{\gamma^\nu (p_2 - p_4 + m) \gamma^\mu}{t - m^2} \right] \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

Το Στοιχείο Πίνακα

που αρχικά περιέχει 144 όρους. Δεδομένου ότι το ίχνος γινομένου περιττού αριθμού πινάκων γ είναι μηδέν, απομένουν μη-μηδενικοί όροι με ίχνος γινομένου τεσσάρων, έξι και οκτώ πινάκων γ αντίστοιχα. Ενδεικτικά, υπολογίζονται οι εξής όροι

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = 16m^4 g^{\mu\nu} g^{\nu\mu} = 64m^4\end{aligned}\tag{22}$$

με παρονομαστή $4p_{12}^2$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{16m^4}{p_{12}^2}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= 4m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\nu] = 16m^4 g^{\nu\mu} g^{\mu\nu} = 64m^4\end{aligned}\tag{23}$$

με παρονομαστή $4p_{24}^2$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{16m^4}{p_{24}^2}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= -2m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\mu] = -8m^4 g^{\nu\mu} g^{\mu\nu} = -32m^4\end{aligned}\tag{24}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{8m^4}{p_{12}p_{24}}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\mu m\gamma^\nu m\gamma^\mu m\gamma^\nu] &= m^4 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= -2m^4 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\nu] = -8m^4 g^{\nu\mu} g^{\mu\nu} = -32m^4 \end{aligned} \quad (25)$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{8m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu p_2 \gamma^\mu p_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu] = -8p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32m^2 p_2^2 = -32m^4 \end{aligned} \quad (26)$$

με παρονομαστή $4p_{12}^2$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{-8m^4}{p_{12}^2}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\ &= 16p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 64m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2 p_2^2 = 64m^4\end{aligned}\quad (27)$$

με παρονομαστή $4p_{12}^2$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{16m^4}{p_{12}^2}$

$$\begin{aligned}\text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = -8p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= -32m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = -32m^2 p_2^2 = -32m^4\end{aligned}\quad (28)$$

με παρονομαστή $4p_{24}^2$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{-8m^4}{p_{24}^2}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu] \\ &= 16p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 64m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 64m^2 p_2^2 = 64m^4 \end{aligned} \quad (29)$$

με παρονομαστή $4p_{24}^2$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{16m^4}{p_{24}^2}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4 \end{aligned} \quad (30)$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu] \\
 &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\
 &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4
 \end{aligned} \tag{31}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu m\gamma^\nu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu] \\
 &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\
 &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4
 \end{aligned} \tag{32}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu m\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\
 &= -2p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4p_2^\rho p_2^\sigma m^2 \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\
 &= 16m^2 p_2^\rho p_2^\sigma g^{\rho\sigma} = 16m^2 p_2^2 = 16m^4
 \end{aligned} \tag{33}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $-\frac{4m^4}{p_{12}p_{24}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu] &= -2p_2^2 p_3^\lambda p_2^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu] \\
 &= -8m^2 p_3^\lambda p_2^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\rho] \\
 &= -32m^2 p_3^\lambda p_2^\rho g^{\lambda\rho} = -32m^2 p_{23}
 \end{aligned} \tag{34}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $8m^2 \frac{p_{23}}{p_{12}p_{24}}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] &= p_3^\lambda p_2^2 p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\
 &= -2m^2 p_3^\lambda p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\nu] = -8m^2 p_3^\lambda p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\kappa] \\
 &= -32m^2 p_{13} = -32m^2 p_{24}
 \end{aligned} \tag{35}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $\frac{8m^2}{p_{12}}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}\text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] &= -p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu] \\ &= 2p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma^\nu] = -4p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_1^\kappa \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\kappa \gamma^\rho] \\ &= 32p_3 p_4 p_2 p_1 = 32p_{12}^2\end{aligned}\tag{36}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $-8\frac{p_{12}}{p_{24}}$

Το Στοιχείο Πίνακα

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[-\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] &= -p_3^\lambda p_4^\rho p_2^2 \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu] \\
 &= 2m^2 p_3^\lambda p_4^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\kappa \gamma^\nu] = -4m^2 p_3^\lambda p_4^\rho \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\kappa \gamma^\rho] \\
 &= -16 p_3^\lambda p_4^\rho p_2^\sigma p_2^\kappa (g^{\lambda\rho} g^{\sigma\kappa} + g^{\lambda\kappa} g^{\rho\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\rho\kappa}) \\
 &= -16 p_3 p_4 p_2^2 = -16m^2 p_{34} = -16m^2 p_{12}
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

με παρονομαστή $-4p_{12}p_{24}$ λαμβάνεται ο όρος $4 \frac{m^2}{p_{24}}$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{24}} \right)^2 \right]$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Η εξαγωγή θα ξεκινήσει με το όριο χαμηλής ενέργειας, $\omega \ll m$, όπου έχει νόημα να γίνει στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Τότε

$$\begin{aligned}p_1 &= (\omega, 0, 0, \omega), \\p_2 &= (m, 0, 0, 0), \\p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = (E', p'), \\p_4 &= (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta).\end{aligned}\tag{39}$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Σημειώνεται ότι η συνθήκη on-shell $p_3^2 = m^2$ συνεπάγεται ότι

$$0 = p_{12} - p_{14} - p_{24} = \omega m - \omega \omega' (1 - \cos \theta) - m \omega', \quad (40)$$

και άρα

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} \quad (41)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

που είναι ο τύπος για τη μετατοπισμένη συχνότητα ως συνάρτηση της γωνίας. Δεν υπάρχει QED σε αυτή τη σχέση, αλλά είναι απλώς η διατήρηση της ορμής και είναι η ίδια με την σχέση του Compton για την μετατόπιση του μήκους κύματος:

Η Σχέση Klein-Nishina

$$\Delta\lambda = \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta) \quad (42)$$

Έπειτα, αφού $p_{12} = \omega m$ και $p_{24} = \omega' m$, προκύπτει μια απλή σχέση για το $|\mathcal{M}|^2$:

Η Σχέση Klein-Nishina

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Τώρα πρέπει να μελετηθεί ο χώρος φάσης. Στο εργαστηριακό σύστημα, και επιστρέφοντας στο γενικό τύπο, είναι

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}} = \frac{1}{4\omega m} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{\text{LIPS}} \quad (44)$$

και

Η Σχέση Klein-Nishina

$$\int d\Pi_{\text{LIPS}} = \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} [(2\pi)^4 \delta^4(p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu)] \quad (45)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Η συνάρτηση δ καθορίζει τις 3-ορμές κατά την ολοκλήρωση πάνω στο d^3p_4 , αφήνοντας τον περιορισμό της ενέργειας

$$\begin{aligned} \int d\Pi_{\text{LIPS}} &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \omega'^2 d\Omega d\omega' \frac{1}{\omega' E'} \delta(\sum E) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta d\omega' \frac{\omega'}{E'} \delta(\sum E) \end{aligned} \quad (46)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Τώρα πρέπει να γίνει ολοκλήρωση πάνω στο ω' για την επιβολή του ενεργειακού περιορισμού $E' + \omega' = m + \omega$. Αλλά τα E' και ω' έχουν ήδη περιορισθεί από την συνθήκη on-shell του ηλεκτρονίου:

Η Σχέση Klein-Nishina

$$\begin{aligned} E'^2 &= m^2 + p'^2 = m^2 + (\omega' \sin \theta)^2 + (\omega' \cos \theta - \omega)^2 \\ &= m^2 + \omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta. \end{aligned} \quad (47)$$

Άρα

$$E' \frac{dE'}{\omega'} = \omega' - \omega \cos \theta \quad (48)$$

και επομένως

Η Σχέση Klein-Nishina

$$\begin{aligned}\int d\Pi_{\text{LIPS}} &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta d\omega' \frac{\omega'}{E'} \delta(\omega' + E'(\omega') - m - \omega) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{\omega'}{E'} \left(1 + \frac{dE'}{d\omega'}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{\omega'}{E'} \left(1 + \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{E'}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}\end{aligned}\tag{49}$$

Η Σχέση Klein-Nishina

όπου το ω' τώρα αναφέρεται στην παραπάνω εξίσωση, και όχι στη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Αυτό οδηγεί στο:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{4\omega m} \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (50)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

ή απλούστερα

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (51)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Αυτή είναι η σχέση Klein-Nishina. Αρχικά υπολογίστηκε από τους Klein και Nishina το 1929 και ήταν μία από τις πρώτες δοκιμές της QED. Αντικαθιστώντας το ω' προκύπτει

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left[1 + \cos^2\theta - \frac{2\omega}{m}(1 + \cos^2\theta)(1 - \cos\theta) + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^2}{m^2}\right) \right]. \quad (52)$$

Η Σχέση Klein-Nishina

Σημειώνεται ότι στο όριο $m \rightarrow \infty$ είναι

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} [1 + \cos^2\theta] \quad (53)$$

Αυτή είναι η ενεργός διατομή σκέδασης Thomson για κλασική ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Έχουν έτσι υπολογισθεί οι πλήρεις σχετικιστικές διορθώσεις.

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Στη συνέχεια, εξετάζεται το αντίθετο όριο, $\omega \gg m$. Στο όριο αυτό δύναται να κατανοηθεί κάποια από τη Φυσική της σκέδασης Compton, ειδικότερα, η εξάρτηση από το σπιν και την πόλωση και η προέλευση μιας φαινομενικής ιδιομορφίας για ακριβή οπισθοσκέδαση, $\theta = \pi$. Στις υψηλές ενέργειες, το σύστημα κέντρου μάζας είναι το πιο κατάλληλο. Τότε

$$\begin{aligned} p_1 &= (\omega, 0, 0, \omega), \\ p_2 &= (E, 0, 0, -\omega), \\ p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = (E, -\omega \sin \theta, 0, -\omega \cos \theta), \\ p_4 &= (\omega, \omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta). \end{aligned} \tag{54}$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} p_{12} &= \omega(E + \omega) \\ p_{24} &= \omega(E + \omega \cos \theta) \end{aligned} \quad (55)$$

και

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \left[\frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} \right] = 2e^4 \left[\frac{E + \omega \cos \theta}{E + \omega} + \frac{E + \omega}{E + \omega \cos \theta} \right]. \quad (56)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Για $\omega \gg m$, $E = \sqrt{m^2 + \omega^2} \approx \omega \left(1 + \frac{m^2}{2\omega^2}\right)$ και

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \left[\frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{\frac{m^2}{2\omega^2} + 1 + \cos \theta} \right]. \quad (57)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Διατηρήθηκαν μόνο οι συντελεστές του m που απαιτούνται για να διακοπεί η ιδιομορφία στο $\cos \theta = -1$. Η ενεργός διατομή για $\omega \gg m$ είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} &\approx \frac{2\pi}{64\pi^2(2\omega)^2} \left(\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 \right) \\ &\approx \frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2} \left[\frac{1 + \cos \theta}{4} + \frac{1}{\frac{m^2}{2\omega^2} + 1 + \cos \theta} \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Κοντά στην $\theta = \pi$, $\omega \gg m$, είναι εμφανές ότι η ενεργός διατομή γίνεται πολύ μεγάλη (αλλά είναι ακόμα πεπερασμένη). Σε αυτήν την περιοχή του χώρου φάσης, το φωτόνιο και το ηλεκτρόνιο αναπηδούν το ένα το άλλο και επιστρέφουν στον δρόμο από όπου ήλθαν. Ή, στην γλώσσα αναλλοιωτήτας Lorentz, η κατεύθυνση της εξερχόμενης ορμής φωτονίων είναι η ίδια με την κατεύθυνση της εισερχόμενης ορμής ηλεκτρονίων. Ας εξετασθεί τώρα η προέλευση της ιδιομορφίας $\theta = \pi$. Δεδομένου ότι το στοιχείο πίνακα μπορεί να γραφθεί στο άμαζο όριο ως

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol.}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p_{24}}{p_{12}} + \frac{p_{12}}{p_{24}} \right] \approx -2e^4 \left[\frac{t}{s} + \frac{s}{t} \right] \quad (59)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

για $\omega \gg m$ και

$$t \approx -2p_{24} = -2\omega^2(1 + \cos\theta) \quad (60)$$

φαίνεται πως η προέλευση του πόλου στο $\theta = \pi$ οφείλεται στην ανταλλαγή του t-channel. Από τα προηγούμενα, το στοιχείο πίνακα t-channel είναι

$$\mathcal{M}_t = -\frac{e^2}{t} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{4*} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_4) \gamma^\nu u(p_2) \quad (61)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Δεδομένου ότι αυτό κλιμακώνεται κατά $\frac{1}{t}$ ίσως αναμένεται η ενεργός διατομή να αποκλίνει κατά $\frac{1}{t^2} \sim \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}$. Μάλιστα, αυτό θα συνέβαινε σε μια θεωρία βαθμωτού πεδίου, όπως μία με αλληλεπίδραση $g\phi^3$ για την οποία

$$\mathcal{M} \sim \frac{g^2}{t}, |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{g^4}{t^2}, \quad (62)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

που έχει έναν ισχυρό t^2 πόλο. Στην QED, υπολογίσθηκε το διάγραμμα t-channel στο άμαζο όριο και βρέθηκε ότι

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins/pol.}} |\mathcal{M}_t|^2 = -2e^4 \frac{s}{t} = 4e^4 \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad (63)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Αυτό δίδει ολόκληρο τον πόλο $\frac{1}{t}$, οπότε δεν χρειάζεται να απασχολεί η παρεμβολή για την κατανόηση της ιδιομορφίας. Ας μελετηθεί τώρα από πού προήλθε ο άλλος παράγοντας t για την απλοποίηση του πόλου.

$$\begin{aligned} p_1 &= (\omega, 0, 0, \omega), \\ p_2 &= (\omega, 0, 0, -\omega), \\ p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = (\omega, -\omega\phi, 0, \omega), \\ p_4 &= (\omega, \omega\phi, 0, -\omega). \end{aligned} \tag{64}$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

και τότε

$$t = -\omega^2 \phi^2. \quad (65)$$

Έτσι ένας πόλος $\frac{1}{t}$ έχει ως $\frac{1}{\phi^2}$, αλλά ένας $\frac{1}{t^2}$ έχει ως $\frac{1}{\phi^4}$. Αλλά
ας παρατηρηθεί ότι ο παράγοντας ορμής στο στοιχείο πίνακα
εξαφανίζεται επίσης καθώς $p_2 \rightarrow p_4$:

$$p_2' - p_4 = -\omega \phi k, \quad k^\mu = (0, 1, 0, 0). \quad (66)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Οπότε,

$$\mathcal{M}_t = \frac{e^2}{\omega^2 \phi^2} \bar{u}(p_3) \epsilon_1(p_2 - p_4) \epsilon_4^* u(p_2) = -\frac{e^2}{\omega \phi} \bar{u}(p_3) \epsilon_1 k \epsilon_4^* u(p_2) \quad (67)$$

Το Όριο Υψηλών Ενεργειών

Άρα, ένας παράγοντας του ϕ απλοποιείται. Αυτός ο παράγοντας προήλθε από τους σπίνορες και είναι αποτέλεσμα της διατήρησης της στροφορμής.

Αν συμπεριληφθεί και η μάζα των ηλεκτρονίων, όπως προηγουμένως, θα βρεθεί ότι $\frac{\omega\phi}{\omega^2\phi^2+m_e^2}$ αντί του $\frac{1}{\omega\phi}$, το οποίο είναι πεπερασμένο ακόμη και για ακριβή οπισθοσκέδαση. Επομένως, δεν υπάρχει πραγματικά απόκλιση. Ακόμη, η ενεργός διατομή γίνεται πολύ μεγάλη για την σχεδόν οπισθοσκέδαση.