Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Τελικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

Ιούλιος 2008

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.5)

Λύση

Α) Ο ιδιοχρόνος Δτ για τον επιβάτη συνδέεται με το χρονικό διάστημα ως προς τη Γη ως $\Delta t = \gamma\, \Delta\tau$. Συνεπώς, ως προς τη Γη

$$XY = \upsilon \Delta t = \frac{\upsilon \Delta\tau}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon / c = \frac{XY}{\sqrt{XY^2 + c^2 \Delta\tau^2}} = 0.50 \Rightarrow \upsilon = 0.50c$$

Β) Το σκάφος θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο αλλά βλέπει τις βάσεις να κινούνται προς αυτό οπότε μετράει απόσταση ανάμεσά τους

$$XY' = XY/\gamma = XY\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 0.866XY = 4.50\times 10^7\, km$$

Γ) Έστω ότι μειώνει την ταχύτητα του από $\upsilon_1 = \upsilon$ σε υ_2. Οι αντίστοιχες κινητικές ενέργειες σχετίζονται ως

$$K_2 = (\gamma_2\text{-}1)\text{mc}^2 \equiv \frac{1}{2}K_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1\text{-}1)\text{mc}^2 \;\Rightarrow\; \gamma_2 = 1 + \frac{1}{2}(\gamma_1\text{-}1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1\text{-}(\upsilon_1/\text{c})^2}} = 1.156$$

Από την οποία βρίσκουμε το $\upsilon_2 = c\sqrt{1-1/\gamma_2^2} = 0.37c$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 2.5)

Α)Έστω ότι το μεσόνιο κινείται πριν τη διάσπαση πάνω στον άξονα x και ότι τα 2 φωτόνια εκπέμπονται υπό γωνίες θ, φ. Από τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής έχουμε:

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow m\gamma c^2 = E_1 + E_2 \quad (1) \text{ και}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \begin{cases} p_x = p_{1x} + p_{2x} \Rightarrow m\gamma\upsilon = \dfrac{E_1}{c}\cos\theta + \dfrac{E_2}{c}\cos\phi \Rightarrow m\gamma\upsilon - \dfrac{E_1}{c}\cos\theta = \dfrac{E_2}{c}\cos\phi & (2) \\ p_y = \vec{p}_{1y} + \vec{p}_{2y} \Rightarrow -\dfrac{E_1}{c}\sin\theta = \dfrac{E_2}{c}\sin\phi & (3) \end{cases}$$

Υψώνοντας τις (2) και (3) στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$m^2\gamma^2\upsilon^2 + \frac{E_1^2}{c^2}\cos^2\theta - 2m\gamma\upsilon\frac{E_1}{c}\cos\theta + \frac{E_1^2}{c^2}\sin^2\theta = \frac{E_2^2}{c^2}\cos^2\phi + \frac{E_2^2}{c^2}\sin^2\phi \Rightarrow$$

$$m^2\gamma^2\upsilon^2 + \frac{E_1^2}{c^2} - 2m\gamma\upsilon\frac{E_1}{c}\cos\theta = \frac{E_2^2}{c^2}$$

και κάνοντας χρήση της (1) για να απαλείψουμε την E_2 παίρνουμε:

$$m^2\gamma^2\upsilon^2+\frac{E_1^2}{c^2}-2m\gamma\upsilon\frac{E_1}{c}\cos\theta=\frac{(m\gamma c^2-E_1)^2}{c^2}\Rightarrow$$

$$m^2\gamma^2\upsilon^2+\frac{E_1^2}{c^2}-2m\gamma\upsilon\frac{E_1}{c}\cos\theta=m^2\gamma^2c^2+\frac{E_1^2}{c^2}-2m\gamma E_1\Rightarrow$$

$$m^2\gamma^2\upsilon^2-2m\gamma\upsilon\frac{E_1}{c}\cos\theta=m^2\gamma^2c^2-2m\gamma E_1$$

Λύνοντας την τελευταία ως προς E_1 παίρνουμε

$$E_1=\frac{mc^2}{2\gamma(1-\frac{\upsilon}{c}\cos\theta)}$$

B)Η μέγιστη τιμή της ενέργειας λαμβάνεται για $\cos\theta=1\Rightarrow\theta=0$

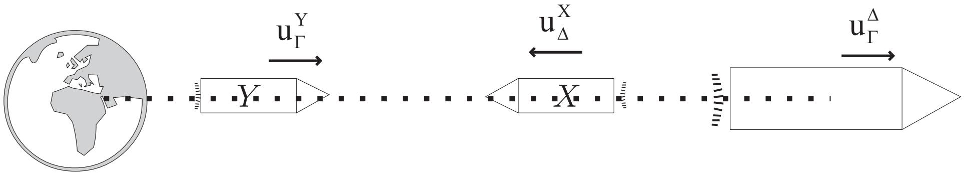
$$E_1^{\max}=\frac{mc^2}{2\gamma(1-\frac{\upsilon}{c})}$$

και η ελάχιστη για $\cos\theta=-1\Rightarrow\theta=\pi$

$$E_1^{\max}=\frac{mc^2}{2\gamma(1+\frac{\upsilon}{c})}$$

<u>Θέμα 3ο</u> (Μονάδες: 2.5)

A)



Από την εκφώνηση και θεωρώντας θετική τη φορά από τη Γη προς το διαστημόπλοιο, έχουμε:

$u_\Gamma^Y=+\,0.7c\,,u_\Delta^X=-\,0.7c,u_\Gamma^\Delta=+\,0.9c$

$u_X^Y=$ ταχύτητα του Y ως προς το X

Επομένως:

$$u_\Gamma^X=\frac{u_\Delta^X+u_\Gamma^\Delta}{1+\frac{u_\Delta^X u_\Gamma^\Delta}{c^2}}=\frac{-0.7+0.9}{1-0.7\times0.9}c=0.541c\quad,$$

ο X κινείται με θετική φορά ως προς τη Γη, (απομακρύνεται από τη Γη)

$$u_X^Y=\frac{u_\Gamma^Y-u_\Gamma^X}{1-\frac{u_\Gamma^X\cdot u_\Gamma^Y}{c^2}}=\frac{0.7-0.541}{1-0.541\times0.7}c=0.256c\quad,$$

ο Y κινείται με θετική φορά ως προς X (τον πλησιάζει).

B) Μολονότι ο X εκτοξεύεται προς την Γη, στην ουσία απομακρύνεται από αυτήν, λόγω της μεγάλης αντίθετης ταχύτητας του Δ απ' όπου εκτοξεύτηκε, άρα η Γη απομακρύνεται ως προς τον X με ταχύτητα μέτρου u_Γ^X και έχουμε αύξηση του μήκους κύματος (μετατόπιση προς το ερυθρό) καθώς η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή:

$$f_X = f_\Gamma \sqrt{\frac{1-u_\Gamma^X/c}{1+u_\Gamma^X/c}} \Rightarrow \lambda_X = \lambda_\Gamma \sqrt{\frac{1+u_\Gamma^X/c}{1-u_\Gamma^X/c}} = 400\sqrt{\frac{1+0.54}{1-0.54}} \Rightarrow \lambda_X = 732 \text{ nm}$$

Θέμα 4^o (Μονάδες: 2.5)

Α)Θεωρώντας το σημείο συνάντησης του επιβάτη με τον παρατηρητή ως την αρχή των συντεταγμένων $x = x' = 0, t = t' = 0$ στο ΣΑ του επιβάτη έχουμε για τα αντίστοιχα γεγονότα

1.	εκτόξευση από το Η	$x_1' = 0, t_1' = 0$
2.	άφιξη στο Ζ	$x_2' = L, t_2' = \frac{L}{u} = \frac{3L}{c}$
3.	επιστροφή στο Η	$x_3' = 0, t_3' = \frac{2L}{u} = \frac{6L}{c}$

Επίσης $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547$. Στο ΣΑ του παρατηρητή θα έχουμε

$x_1 = 0, t_1 = 0$, ενώ τα x_2, t_2 και x_3, t_3 θα δίνονται από το μετασχηματισμό Lorentz

$$t_2 = \gamma t_2' + \gamma \frac{\upsilon x_2'}{c^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3L}{c} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{c}{2}\frac{L}{c^2} = \left(2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{L}{c} = \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{L}{c} = 4.04\frac{L}{c}$$

Συνεπώς $t_{HZ} = t_2 - t_1 = \dfrac{7}{\sqrt{3}}\dfrac{L}{c} = 4.04\dfrac{L}{c}$

Β) Ομοίως

$$t_3 = \gamma t_3' + \gamma \frac{\upsilon x_3'}{c^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{6L}{c} = 4\sqrt{3}\frac{L}{c} = 6.93\frac{L}{c}$$

και επομένως

$$t_{ZH} = t_3 - t_2 = 4\sqrt{3}\frac{L}{c} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{L}{c} = \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{L}{c} = 2.89\frac{L}{c}$$

Γ) Από το μετασχηματισμό Lorentz

$$x_2 = \gamma x_2' + \gamma \upsilon t_2' = \frac{2}{\sqrt{3}}L + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{c}{2}\frac{3L}{c} = \frac{5}{\sqrt{3}}L = 5.89L$$

$$x_3 = \gamma x_3' + \gamma \upsilon t_3' = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{c}{2}\frac{6L}{c} = 2\sqrt{3}L = 3.46L$$

και το διάστημα που διένυσε ο μηχανισμός είναι

$$\Delta x = x_3 - x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}L = 0.577L$$

ενώ το μήκος του βαγονιού για τον παρατηρητή στο έδαφος είναι

$$L_\Gamma = \frac{L}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}L}{2} = 0.866L$$

μεγαλύτερο από το διάστημα που διένυσε ο μηχανισμός. Αυτό συμβαίνει γιατί ο μηχανισμός κινείται ως προς το έδαφος με αποτέλεσμα να διανύει διαφορετικό μήκος από το μήκος του βαγονιού.