

# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2005-06

4<sup>η</sup> ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 21/3/06

## Άσκηση 1

A) Αν μπορούσαμε να ταξιδέψουμε από τη Γη στο A του Κενταύρου (απόσταση 4 έτη φωτός) με ταχύτητα  $v = 0,99c$  (i) για πόσες μέρες θα έπρεπε να έχουμε προμήθειες; (ii) Πόσο διάστημα θα είχαμε διανύσει στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου;

B) Το αρνητικά φορτισμένο πιόνιο ( $\pi^-$ ) είναι ένα ασταθές σωματίδιο με χρόνο ζωής  $1.60 \times 10^{-8} s$  (μετρημένο στο σύστημα αναφοράς του πιονίου). Όταν το πιόνιο κινείται με μεγάλη ταχύτητα στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου ο μετρούμενος χρόνος ζωής είναι  $4.20 \times 10^{-7} s$ . (i) Υπολογίστε την ταχύτητα του πιονίου και εκφράστε την ως κλάσμα της ταχύτητας του φωτός  $c$ . (ii) Υπολογίστε το διάστημα που διάνυσε το πιόνιο στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου κατά τη διάρκεια της ζωής του.

## Άσκηση 2

A) Όπως μετριέται από ένα παρατηρητή στη Γη το μήκος ενός διαστημοπλοίου, που απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα  $4.00 \times 10^7 m/s$ , είναι 3600 m. Ποιο μήκος μετράει για το διαστημόπλοιο ο κυβερνήτης του που βρίσκεται μέσα σε αυτό;

B) Ένα ασταθές σωματίδιο δημιουργείται στην ανώτερη ατμόσφαιρα από μια κοσμική ακτίνα και ταξιδεύει κάθετα προς την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα  $0.99540c$ . Τα όργανα ενός επιστήμονα στη Γη δείχνουν ότι το σωματίδιο δημιουργήθηκε σε ύψος 45.0km. (i) Για τον επιστήμονα πόσο χρόνο θα κάνει το σωματίδιο να φτάσει στην επιφάνεια της Γης; (ii) Ποια η απόσταση που διανύει το σωματίδιο μέχρι να φτάσει στη Γη στο δικό του σύστημα αναφοράς; και (iii) πόσο χρόνο χρειάζεται το σωματίδιο για να φτάσει στη Γη στο δικό του σύστημα αναφοράς;

## Άσκηση 3

A) Το διαστημόπλοιο (της Άσκησης 1A) αναχωρεί για το A του Κενταύρου με ταχύτητα  $v = 0,99c$ . (i) Με πόση το πολύ καθυστέρηση μπορεί να ξεκινήσει από τη Γη ένα ταχυδρομικό διαστημόπλοιο το οποίο κινείται με ταχύτητα  $v = 0,995c$  για να προλάβει το πρώτο πριν φτάσει στον προορισμό του; (ii) Με πόση σχετική ταχύτητα πλησιάζουν τα διαστημόπλοια μεταξύ τους;

B) Δύο διαστημόπλοια πλησιάζουν το ένα το άλλο και το καθένα κινείται με την ίδια ταχύτητα όπως μετριέται από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στη Γη. Αν η σχετική τους ταχύτητα είναι  $0.7c$  να βρεθεί η ταχύτητα του κάθε διαστημοπλοίου. (Θεωρείστε τη Γη και τα διαστημόπλοια σε ευθεία γραμμή)

#### Άσκηση 4

A) Δύο τρένα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  συναντώνται και αντιπαρέρχονται με σχετική ταχύτητα  $v = 3c/5$ . Τη στιγμή που οι οδηγοί (στις αρχές των αξόνων τους,  $O$  και  $O'$ ) συναντώνται, μηδενίζουν τα χρονόμετρά τους ( $t = t' = 0$ ). Μετά από  $t' = 1\mu s = 10^{-6}s$  το  $\Sigma$  έχει προχωρήσει απόσταση  $x'$  ως προς το  $\Sigma'$  και ο οδηγός του βλέπει ακριβώς δίπλα του ένα ρολόι  $P'$  του  $\Sigma'$ . (i) Ποια η απόσταση  $O'P'$  ως προς το  $\Sigma'$  εκείνη τη στιγμή; (ii) Τι ένδειξη βλέπει ο επιβάτης  $P'$  στο δικό του ρολόι ακριβώς τότε; (iii) Ποιες οι χωροχρονικές συντεταγμένες της συνάντησης του  $O$  με το  $P'$  ως προς το  $\Sigma'$  και (iv) το ερώτημα (iii) ως προς το  $\Sigma$ .

B) Τρένο ιδίου μήκους (μήκος στο σύστημα αναφοράς του)  $L$ , κινείται με ταχύτητα  $c/2$  ως προς το έδαφος. Μια μπάλα εκτοξεύεται από την πίσω άκρη του τρένου προς τα εμπρός με ταχύτητα  $c/3$  ως προς το τρένο. Από την σκοπιά ενός παρατηρητή στο έδαφος (i) Πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση της μπάλας (μέχρι να φτάσει στην εμπρόσθια άκρη του τρένου) (ii) Τι διάστημα διανύει; (Αγνοείστε την επίδραση της βαρύτητας στην κίνηση της μπάλας)

(Η επίλυση στα A, B να γίνει χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Lorentz)

#### Άσκηση 5

A) Το διαστημόπλοιο (της Άσκησης 1A) αναχωρεί για το A του Κενταύρου με ταχύτητα  $v = 0,99c$  και έχει μάζα ηρεμίας 10 τόνους. Ποια η συνολική ενέργεια, η ορμή και η κινητική του ενέργεια (i) στο σύστημα αναφοράς της Γης (ii) Στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου;

B) Επιταχύνουμε πρωτόνιο από την ηρεμία μέχρις ότου αποκτήσει κινητική ενέργεια 6 GeV. (i) Πόση είναι η ταχύτητα, η ορμή και η ενέργειά του; (ii) Πόση ενέργεια καταναλώσαμε; Θεωρείστε μάζα ηρεμίας  $m_p = 1\text{GeV}/c^2$ . Αγνοήστε κάθε απώλεια ενέργειας καθώς επιταχύνεται το πρωτόνιο.

#### Άσκηση 6

A) Το διαστημόπλοιο (της Άσκησης 1A) αναχωρεί για το A του Κενταύρου με ταχύτητα  $v = 0,99c$ . Καθώς το διαστημόπλοιο πλησιάζει το άστρο στέλνει σε αυτό μια ακτίνα Laser χρώματος κόκκινου (750nm) ως προς το διαστημόπλοιο. (i) Με τι χρώμα θα το έβλεπαν από το άστρο και (ii) με τι χρώμα φαίνεται το LASER από το διαστημόπλοιο μετά την ανάκλαση στο άστρο;

B) Ένας αστροναύτης φεύγει για να εξερευνήσει ένα άστρο το οποίο απέχει 96 έτη φωτός από τη Γη. Επιταχύνει γρήγορα μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα  $v = 0,96c$  και ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή προς το άστρο. Μετά από πόσα χρόνια (όπως μετρούνται στη Γη) φτάνει στο άστρο; Εκεί επιβραδύνεται γρήγορα μέχρι να σταματήσει. Εξερευνά το άστρο για 20 χρόνια και μετά επιβιβάζεται στο διαστημόπλοιο επιταχύνει γρήγορα σε  $v = 0,96c$  και μετά από 100 γήινα έτη φτάνει στη Γη όπου επιβραδύνεται γρήγορα και σταματάει. Ζωγραφίστε ένα χωροχρονικό διάγραμμα που να δείχνει την κοσμική γραμμή του αστροναύτη από τη σκοπιά ενός παρατηρητή στη Γη.

### Άσκηση 7

A) Σώμα μάζας ηρεμίας  $M$ , που κινείται με ταχύτητα  $v$  κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα των  $x$ , διασπάται σε δύο φωτόνια που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  σε σχέση με το αρχικό σωματίδιο. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (i) Ποια είναι η ενέργεια του κάθε φωτονίου; (ii) Θα μπορούσαν τα φωτόνια να κινούνται κατά τη διεύθυνση του άξονα των  $y$ ;

B) Δύο φωτόνια έχουν το καθένα ενέργεια  $E$ . Συγκρούονται υπό γωνία  $\theta$  και δημιουργούν ένα σωματίδιο μάζας  $M$ . Να υπολογιστεί το  $M$  συναρτήσει των  $E$  και  $\theta$ . Εξετάστε και σχολιάστε τις ειδικές περιπτώσεις  $\theta = 180^\circ, 90^\circ$  και  $\theta = 0^\circ$ .

### Άσκηση 8

A) Σε ένα αδρανειακό σύστημα ένα ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο περιγράφεται από τα πεδία  $E = E_0 \hat{e}_x, B = B_0 \hat{e}_y$  όπου  $E_0, B_0$  σταθερές. (i) Να βρεθούν τα πεδία σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται ως προς το προηγούμενο με ταχύτητα  $v = v_0 \hat{e}_z$  ( $v_0$  σταθερά) (ii) Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο ο παρατηρητής βλέπει μόνο ηλεκτρικό πεδίο ή μόνο μαγνητικό πεδίο ή κανένα πεδίο;

B) Υπολογίστε τη δύναμη που παρατηρείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου ανάμεσα σε δύο ηλεκτρόνια που κινούνται παράλληλα και με την ίδια φορά σε απόσταση  $1\text{mm}$  όταν η ενέργεια του κάθε ηλεκτρονίου είναι  $1\text{keV}$  και όταν είναι  $1\text{MeV}$ .

### Άσκηση 9

Στην σκέδαση σωματιδίων τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη είναι ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς παρά το γεγονός ότι οι ενέργειες και οι γωνίες σκέδασης των σωματιδίων εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς. Αυτό συνεπάγεται ότι όλη η ενδιαφέρουσα πληροφορία εξαρτάται μόνο από αναλλοίωτους συνδυασμούς των τετραορμών. Θεωρήστε την παρακάτω διαδικασία σκέδασης

$$a + b \rightarrow c + d$$

Όπου οι τετραορμές των σωματιδίων  $a, b, c, d$  είναι  $p_a^\mu, p_b^\mu, p_c^\mu, p_d^\mu$  και οι μάζες ηρεμίας  $m_a, m_b, m_c, m_d$  αντίστοιχα. (i) Δείξτε ότι όλα τα γινόμενα  $\eta_{\mu\nu} p_i^\mu p_j^\nu, i, j = a, b, c, d$  γράφονται συναρτήσει τριών αναλλοίωτων ποσοτήτων

$$s = (p_a + p_b)^2, t = (p_a - p_c)^2, u = (p_a - p_d)^2$$

και των μαζών ηρεμίας. (ii) Δείξτε επίσης ότι

$$s + t + u = \sum_{i=a,b,c,d} m_i^2 c^4$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $(p_a + p_b)^2 = \eta_{\mu\nu} (p_a^\mu + p_b^\mu)(p_a^\nu + p_b^\nu)$  κοκ

### Άσκηση 10

A) Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  μετατοπίζεται κατά μήκος ευθείας γραμμής κάτω από την επίδραση δύναμης  $F$ . (i) Υπολογίστε την παράγωγο  $F = \frac{dp}{dt}$  για να δείξετε ότι η επιτάχυνση δίνεται από την έκφραση

$$a = \frac{F}{m} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

(ii) Αν το σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία υπολογίστε την ταχύτητά του μετά από

χρόνο  $t$ . (Δίνεται ότι  $\int \frac{dz}{(1-z^2)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ )

B) Ένα φορτισμένο σωματίδιο φορτίου  $q$  και μάζας  $m$  αποκτάει ταχύτητα  $\vec{v}$  κάτω από τη δράση ενός ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  και ενός μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$ . Δείξτε ότι η επιτάχυνση  $\vec{a}$  του φορτίου μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\vec{a} = \frac{s}{\gamma} \left[ (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \right]$$

όπου  $s$  μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τη μάζα και το φορτίο.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- 1) Αν ένας αστέρας απομακρύνεται με ταχύτητα  $0.9c$  ποιο μέρος του φάσματός του βλέπουμε ως ορατό;
- 2) Το γεγονός ότι υπάρχει άνω όριο στην ταχύτητα ενός σωματιδίου μάζας  $m$ , συνεπάγεται και άνω όριο στην κινητική του ενέργεια και την ορμή του;
- 3) Πως συμβιβάζεται με την αιτιότητα το γεγονός ότι το ταυτόχρονο δεν είναι απόλυτη έννοια, αλλά εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς; Θα μπορούσε δηλαδή ένα γεγονός  $A$ , που προηγείται και είναι η αιτία ενός άλλου γεγονότος  $B$  σε ένα σύστημα αναφοράς, να έπεται του  $B$  σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς;
- 4) Σε ποια ταχύτητα ένα σωματίδιο έχει διπλάσια ορμή από αυτήν που προβλέπει η Νευτώνια μηχανική; Εξαρτάται η απάντηση από τη μάζα του σωματιδίου;
- 5) Στη σχέση  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  ποια από τα μεγέθη που συμβολίζουν τα γράμματα  $E$ ,  $p$ ,  $m$  και  $c$  δεν εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή και γιατί;