

## ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2004-05

6<sup>η</sup> ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία αποστολής 10/06/05

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1

**A)** Η ενέργεια Fermi του χαλκού στα 300K είναι ίση με 7.05eV. **AI)** Ποια είναι η μέση ενέργεια ενός ηλεκτρονίου αγωγιμότητας του χαλκού στα 300K; **AII)** Σε ποια θερμοκρασία η μέση ενέργεια ενός μορίου ιδανικού αερίου έχει ενέργεια ίση με την ενέργεια που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα;

**B)** Η ενέργεια Fermi του αλουμινίου είναι 11.63eV. **BI)** Αν υποτεθεί ότι το μοντέλο του ελευθέρου ηλεκτρονίου ισχύει για το αλουμίνιο, χρησιμοποιήστε τη σχέση

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}$$

για να υπολογίσετε τον αριθμό των ελευθέρων ηλεκτρονίων ανά

μονάδα όγκου σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. **BII)** Προσδιορίστε το σθένος του αλουμινίου διαιρώντας το αποτέλεσμα του μέρους **BI** με τον αριθμό των ατόμων αλουμινίου ανά μονάδα όγκου, όπως υπολογίζεται από την πυκνότητα και το ατομικό βάρος.

## Άσκηση 2

**AI)** Αποδείξτε ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα ιόν ενός ιοντικού στερεού μπορεί να

γραφεί ως 
$$F = -\alpha k \frac{e^2}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{m-1} \right]$$
, όπου  $r_0$  είναι η απόσταση ισορροπίας δύο

διαδοχικών ιόντων και  $\alpha$  η σταθερά Madelung. (Σημείωση: Χρησιμοποιήστε την

σχέση 
$$U_{\text{ολικό}} = -\alpha k \frac{e^2}{r} + \frac{B}{r^m}$$
 και ότι  $F = -dU/dr$ ). **AII)** Υποθέστε ότι ένα ιόν στο

στερεό μετατοπίζεται κατά μικρή απόσταση  $x$  από το  $r_0$  και αποδείξτε ότι το ιόν

υφίσταται μια δύναμη επαναφοράς  $F = -Kx$ , όπου 
$$K = \frac{\alpha k e^2}{r_0^3} (m-1)$$
.

ΑΙΙΙ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για να εκτιμήσετε τη συχνότητα ταλαντώσεως του ιόντος  $\text{Na}^+$  στο  $\text{NaCl}$ . Λάβετε  $m=8$  και χρησιμοποιήστε την τιμή  $\alpha=1.7476$ .

### Άσκηση 3

Α) Χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Bohr μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη μικρή ενέργεια σύνδεσης ενός από τα ηλεκτρόνια του ατόμου δότη καθώς και την ακτίνα της τροχιάς του σε έναν ημιαγωγό. Υπενθυμίζουμε ότι για ένα ηλεκτρόνιο που συγκρατείται από πυρήνα φορτίου  $Z$ , η ενέργεια σύνδεσης δίνεται από τη σχέση  $\frac{ke^2Z^2}{2\alpha_0} = 13.6Z^2\text{eV}$  και η ακτίνα της θεμελιώδους τροχιάς από την  $r_1 = \frac{\alpha_0}{Z}$ . Στην περίπτωση που ο δότης είναι άτομο φωσφόρου το οποίο εμπλουτίζει πυρίτιο, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο δότη έλκεται από ένα θωρακισμένο πυρηνικό φορτίο  $Z=1$ . Επειδή όμως ο πυρήνας του φωσφόρου είναι ενσωματωμένος στο πολώσιμο πυρίτιο, το καθαρό φορτίο που επιδρά στο ηλεκτρόνιο ελαττώνεται στο  $Z/\kappa$ , όπου  $\kappa$  είναι η διηλεκτρική σταθερά. ΑΙ) Υπολογίστε την ενέργεια σύνδεσης του ηλεκτρονίου του δότη στο Si ( $\kappa=12$ ) και στο Ge ( $\kappa=16$ ). ΑΙΙ) Υπολογίστε την ακτίνα της πρώτης τροχιάς Bohr του ηλεκτρονίου του δότη στο Si και στο Ge. Ποιο είναι το μέγεθος της ακτίνας της τροχιάς Bohr, συγκρινόμενη με την απόσταση των πλησιέστερων γειτόνων στο Si και στο Ge; (Σημείωση: για το Si η απόσταση δύο πλησιέστερων γειτόνων είναι  $2.34\text{\AA}$  και για το Ge η απόσταση δύο πλησιέστερων γειτόνων είναι  $2.43\text{\AA}$ ).

### Άσκηση 4

Α) Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διέρχεται μέσα από δοχείο που περιέχει ποσότητα διατομικού αερίου. Το φάσμα απορροφήσεως του αερίου, δείχνει ότι απορροφώνται ορισμένες μόνο συχνότητες που διαδοχικά απέχουν κατά τα ην ίδια ποσότητα  $\Delta$ . Οι συχνότητες αυτές αντιστοιχούν, για δοσμένη στάθμη ταλάντωσης, στις διεγέρσεις των μορίων από μια ενεργειακή στάθμη με κβαντικό αριθμό ολικής στροφορμής  $j$ , στην αμέσως επόμενη. ΑΙ) Υπολογίστε την απόσταση  $d$  των δύο ατόμων ενός μορίου συναρτήσει του  $\Delta$  και της μάζας  $M$  κάθε ατόμου (τα μόρια είναι ομοατομικά). ΑΙΙ)

Για το οξυγόνο έχουμε  $\Delta = 8.61 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$  και  $M = 15.9994 \text{ amu}$ . Πόση είναι η απόσταση  $d$ ;

### Άσκηση 5

**A)** Ένας ραδιενεργός πυρήνας με σταθερά διασπάσεως  $\lambda$ , διασπάται σε έναν σταθερό θυγατρικό πυρήνα. **AI)** Αποδείξτε ότι ο αριθμός των θυγατρικών πυρήνων  $N_2$ , αυξάνεται με τον χρόνο σύμφωνα με την έκφραση  $N_2 = N_{01}(1 - e^{-\lambda t})$ , όπου  $N_{01}$  είναι ο αρχικός αριθμός των πατρικών πυρήνων. **AII)** Αρχίστε με  $10^6$  πατρικούς πυρήνες, όταν  $t=0$ , με χρόνο υποδιπλασιασμού  $10\text{h}$  και παραστήστε γραφικά τον αριθμό των πατρικών πυρήνων και τον αριθμό των θυγατρικών πυρήνων ως συναρτήσεις του χρόνου στο χρονικό διάστημα από  $0$  έως  $30\text{h}$ .

**B)** Πολλά ραδιοϊσότοπα έχουν σημαντικές βιομηχανικές, ιατρικές και ερευνητικές εφαρμογές. Ένα από αυτά είναι το  $^{60}\text{Co}$ , το οποίο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού  $5.2$  έτη και διασπάται με την εκπομπή ενός σωματίου βήτα (ενέργειας  $0.31\text{MeV}$ ) και δύο φωτονίων (ενεργειών  $1.17\text{MeV}$  και  $1.33\text{MeV}$ ). Ένας επιστήμονας θέλει να παρασκευάσει μια πηγή  $^{60}\text{Co}$  η οποία θα έχει ενεργότητα τουλάχιστον  $10 \text{ Ci}$  μετά από χρήση  $30$  μηνών. **BI)** Ποια είναι η ελάχιστη αρχική μάζα του  $^{60}\text{Co}$  που απαιτείται; **BII)** Με ποιον ρυθμό η πηγή θα εκπέμπει ενέργεια μετά από  $30$  μήνες;

### Άσκηση 6

**A)** Η διάσπαση ενός ασταθούς πυρήνα με την εκπομπή σωματίου άλφα παριστάνεται από τη σχέση  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$ . Η ενέργεια διάσπασης  $Q$  που δίνεται από τη σχέση  $Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2$ , πρέπει να μοιραστεί μεταξύ του σωματίου άλφα και του θυγατρικού πυρήνα ούτως ώστε κατά τη διαδικασία της διάσπασης να διατηρούνται τόσο η ενέργεια όσο και η ορμή. **AI)** Αποδείξτε ότι  $Q$  και  $K_\alpha$ , η κινητική ενέργεια του σωματίου άλφα, συνδέονται με τη σχέση  $Q = K_\alpha (1 + \frac{M_\alpha}{M})$ , όπου  $M$  είναι η μάζα του θυγατρικού πυρήνα. **AII)** Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για να βρείτε την ενέργεια του σωματίου άλφα που εκπέμπεται κατά τη διάσπαση του  $^{226}\text{Ra}$ . (Σημείωση: Συμβουλευτείτε το παράδειγμα 45.8 του βιβλίου του Serway για τον υπολογισμό του  $Q$ ).

## Άσκηση 7

A) Ο χαλκός που απαντά στη φύση αποτελείται από δύο σταθερά ιόντα,  $^{63}\text{Cu}$  και  $^{65}\text{Cu}$ . AI) Ποια είναι η σχετική αναλογία των δύο ισοτόπων; Στους υπολογισμούς σας πάρετε το ατομικό βάρος του χαλκού ίσο με 63.55 και τις μάζες των δύο ισοτόπων 62.95u και 64.95u, αντίστοιχα.

B) Όταν η πυρηνική αντίδραση που παριστάνεται με την εξίσωση  $a + X \rightarrow Y + b$  είναι ενδόθερμη, η ενέργεια διάσπασης  $Q$  είναι αρνητική. Για να συνεχιστεί μια τέτοια αντίδραση, το προσπίπτον σωματίο πρέπει να έχει μια ελάχιστη ενέργεια που ονομάζεται ενέργεια κατωφλίου,  $E_{\text{th}}$ . Ένα κλάσμα της ενέργειας του προσπίπτοντος σωματίου μεταφέρεται στο σύνθετο πυρήνα ούτως ώστε να διατηρείται η ορμή. Συνεπώς, η  $E_{\text{th}}$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την  $Q$ . BI) Αποδείξτε ότι  $E_{\text{th}} = -Q(1 + \frac{M_a}{M_X})$ . BII) Υπολογίστε την ενέργεια κατωφλίου του προσπίπτοντος

σωματίου άλφα στην αντίδραση  $^4_2\text{He} + ^{14}_7\text{N} \rightarrow ^{17}_8\text{O} + ^1_1\text{H}$ .

## Άσκηση 8

A) Ο χρόνος ζωής του εξαιρετικά ασταθούς πυρήνα  $^5\text{Li}$  είναι περίπου  $10^{-21}\text{s}$ . AI) Χρησιμοποιήστε την αρχή της αβεβαιότητας για να υπολογίσετε την αβεβαιότητα της ολικής ενέργειας του πυρήνα. AII) Είναι η αβεβαιότητα αυτή αρκετά μεγάλη ώστε να επηρεάσει το αποτέλεσμα ενός πειράματος που έχει σχεδιαστεί για να μετρήσουμε τη μάζα του πυρήνα με μια ακρίβεια  $10^{-30}\text{Kg}$ ;

B) Η συνάρτηση της πυκνότητας φορτίου μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής εκφράζεται από τη σχέση  $\rho(r) = e \frac{12\sqrt{3}}{4\pi\alpha^3} e^{-\sqrt{12}r/\alpha}$ , όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερά με

διαστάσεις μήκους (για το πρωτόνιο  $\alpha \approx 0.80\text{fm}$ ) και  $r$  η απόσταση από το κέντρο της σφαιρικής κατανομής. Το ολικό φορτίο του πρωτονίου δίνεται από τη σχέση  $q = 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 dr$ . BI) Εξηγήστε γιατί αυτός είναι ο σωστός τύπος για το  $q$ . BII)

Δείξτε ότι  $q=e$ .

Η μέση τετραγωνική ακτίνα του πρωτονίου δίνεται από τη σχέση  $\langle r^2 \rangle = \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty \rho(r)r^4 dr$ . BIII) Εξηγήστε γιατί αυτός είναι ο σωστός τύπος για το

$\langle r^2 \rangle$ . BIV) Δείξτε ότι  $\langle r^2 \rangle = \alpha^2$ .

## Άσκηση 9

A) Νετρόνιο ενέργειας 2MeV εκπέμπεται σε έναν αντιδραστήρα σχάσεως. Αν αυτό χάνει το ήμισυ της κινητικής του ενέργειας σε κάθε κρούση με κάποιο άτομο του επιβραδυντή, πόσες κρούσεις θα υποστεί μέχρις ότου φτάσει στη θερμική ενέργεια (0.039eV);

B) Ο ήλιος ακτινοβολεί ενέργεια με ρυθμό  $4 \times 10^{23}$  kW. Αν η αντίδραση  $4({}_1^1\text{H}) \rightarrow {}_2^4\text{He} + 2\beta^+ + 2\nu + \gamma$  είναι η αιτία για την παραγωγή όλης της ενέργειας, υπολογίστε BI) τον αριθμό των πρωτονίων που συντήκονται ανά δευτερόλεπτο και BII) τη μάζα που μετατρέπεται σε ενέργεια ανά δευτερόλεπτο.

## Άσκηση 10

A) Μια δέσμη ενός προβολέα κατευθύνεται μέσα σε ένα σύννεφο. Μέσα στο σύννεφο η κλασματική αλλαγή της εντάσεως ανά μονάδα αποστάσεως είναι μια σταθερά  $\mu$ . AI) Εξάγετε έναν τύπο για την ένταση I της δέσμης σε συνάρτηση του βάθους διεισδύσεως μέσα στο σύννεφο. AII) Αν  $\mu=0.05\text{m}^{-1}$ , ποιο πάχος σύννεφου θα προκαλέσει μια ελάττωση της εντάσεως κατά έναν παράγοντα 1000;

B) Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του τριτίου είναι 12 έτη. Εάν ο αντιδραστήρας σύντηξης TFTR περιέχει  $50\text{m}^3$  τριτίου πυκνότητας ίσης με  $2.0 \times 10^{14}$  σωματίδια  $\text{cm}^3$ , εκφράστε την ενεργότητα αυτού του πλάσματος τριτίου σε Ci.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

### Ερώτηση 1

Αποδείξτε ότι η ενέργεια ιοντικής συνοχής ενός τετραπολικού στερεού δίνεται από τη σχέση  $U_0 = -\alpha k \frac{e^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ . (Σημείωση: Αρχίστε με τη σχέση  $U_{\text{ολικο}} = -\alpha k \frac{e^2}{r} + \frac{B}{r^m}$  και σημειώστε ότι  $dU/dr = 0$  όταν  $r = r_0$ )

### Ερώτηση 2

Στο μόριο HCl η μετάπτωση από μια ενεργειακή στάθμη ταλάντωσης στην αμέσως χαμηλότερη συνοδεύεται από ακτινοβολία με συχνότητα  $f = 8.66 \times 10^{13}$  Hz. Ποια

είναι η “σταθερά ελατηρίου” για το HCl; Αν υποθέσουμε την ίδια σταθερά ελατηρίου και για το μόριο H<sub>2</sub>, ποια είναι η συχνότητα ακτινοβολίας για την αντίστοιχη μετάπτωση ενός μορίου υδρογόνου; (Σημείωση: Θεωρήστε ότι το άτομο Cl έχει ατομικό βάρος 35).

### Ερώτηση 3

Θεωρήστε ότι έχουμε μια μονοδιάστατη γραμμή από διαδοχικώς εναλλασσόμενα θετικά και αρνητικά ιόντα. Αποδείξτε ότι η δυναμική ενέργεια ενός ιόντος σε αυτόν τον υποθετικό κρύσταλλο είναι  $U = -k\alpha \frac{e^2}{r}$ , όπου  $\alpha = 2 \ln 2$  (η σταθερά Madelung), και  $r$  η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ιόντων (Σημείωση: Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα σε σειρά του  $\ln(1+x)$ ).

### Ερώτηση 4

**A)** Ποιοι είναι οι λόγοι στους οποίους οφείλεται η δυσκολία επίτευξης της πυρηνικής σύντηξης; **B)** Σχολιάστε τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα στην πυρηνική σχάση και στην πυρηνική σύντηξη.

### Ερώτηση 5

**A)** Υποθέστε ότι δύο ραδιενεργά δείγματα έχουν την ίδια ενεργότητα, μετρημένη σε Ci. Θα επιφέρουν την ίδια καταστροφή σε ένα υλικό; Σχολιάστε την απάντησή σας.  
**B)** Γιατί νομίζετε ότι είναι αποτελεσματική η αποστείρωση χειρουργικών εργαλείων ή τυποποιημένων τροφών με ακτινοβολία;