

Ασκήσεις

**Σημείωση:** Οι πέντε πρώτες ασκήσεις καθώς και οι δύο πρώτες ερωτήσεις απαιτούν γνώσεις μόνο από τα 3 πρώτα κεφάλαια. Οι υπόλοιπες ασκήσεις και ερωτήσεις απαιτούν γνώση και των υπολοίπων κεφαλαίων του βιβλίου της Σχετικότητας του Σ. Περσίδη

1. Α) Οι συντεταγμένες δύο γεγονότων στο σύστημα αναφοράς  $\Sigma$  είναι οι εξής:

Γεγονός 1:  $t_1 = x_0/c$ ,  $x_1 = x_0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$ . Γεγονός 2:  $t_2 = x_0/2c$ ,  $x_2 = 2x_0$ ,  $y_2 = 0$ ,  $z_2 = 0$ .

Δείξτε ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς  $\Sigma'$ , στο οποίο τα δύο αυτά γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα. Ποια είναι η ταχύτητά του ως προς το  $\Sigma$  και ποιά η κοινή χρονική στιγμή  $t'$ ;

Β) Δύο τρένα  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , κινούμενα αντίθετα με σχετική ταχύτητα 1000 m/s συναντώνται στο  $(x, t) = (x', t') = (0, 0)$ . Εκεί είναι οι θέσεις των οδηγών  $O$ ,  $O'$ .



Εάν έχουν ένα (1) επιβάτη ανά μέτρο (m) και, μετά από χρόνο  $t = 1,5$  s, ο 1000ος επιβάτης του  $\Sigma$  ανάψει τσιγάρο, ποιός επιβάτης του  $\Sigma'$  θα τον δει μπροστά του, και μετά από πόσο χρόνο  $t'$ ; Αν το άναβε μετά από  $t=1$  s;

2. Ένας αστροναύτης παίρνει μαζί του από τη Γη καλλιέργεια  $N_0$  βακτηριδίων, που διπλασιάζονται κάθε  $T_0 = 20$  min. Ταξιδεύει με ταχύτητα  $v = 0.8 c$  και επιστρέφει μετά από 10 ώρες Γης. Αν  $N_0=2$ , πόσα βακτηρίδια έχουν αναπτυχθεί στο διαστημόπλοιο, και πόσα, αντίστοιχα, θα είχαν αναπτυχθεί στη Γη, αν η καλλιέργεια είχε παραμείνει στη Γη;

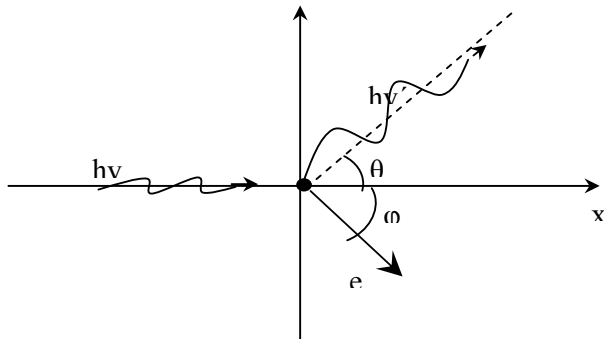
3. Αν ένας σφαιρικός γαλαξίας έχει διάμετρο  $10^5$  έτη φωτός ως προς ένα ακίνητο παρατηρητή στο κέντρο του  $K$ ,

α) τί διαστάσεις θα του απέδιδε αστροναύτης κινούμενος με ταχύτητα  $v = 0.999999 c$  ως προς το  $K$  κατά μήκος μιας διαμέτρου του και σε πόσον ίδιο-χρόνο θα διάνυε μια διάμετρό του; β) Ως προς το  $K$ , πόσος χρόνος χρειάζεται για να διανυθεί ο γαλαξίας από αυτόν τον αστροναύτη; Πόσα μέτρα ένα φωτεινό σήμα θα προηγείται του αστροναύτη ως προς το  $K$  στο τέλος του ταξιδιού του, αν το σήμα εκπεμπόταν τη στιγμή που ο αστροναύτης περνούσε από το  $K$  με την παραπάνω ταχύτητα; Πόσα μέτρα ως προς το διαστημόπλοιο; (Αγνοήστε τυχόν κινήσεις του γαλαξία).

4. Μια ράβδος μήκους ηρεμίας  $L_0$  κινείται με ταχύτητα μέτρου  $v$  κατά μήκος του άξονα  $Ox$  του συστήματος  $\Sigma$ , σχηματίζοντας γωνία  $\theta$  με αυτόν. Στο σύστημα αναφοράς  $\Sigma'$ , στο οποίο η ράβδος ηρεμεί, σχηματίζει γωνία  $\theta_0$  με τον άξονα  $x'$ . Δείξτε ότι το μήκος της ράβδου όπως μετρείται από ένα ακίνητο παρατηρητή στο  $\Sigma$  είναι  $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0}$ . Δείξτε ότι για τον ακίνητο παρατηρητή στο  $\Sigma$ , η ράβδος συστέλλεται και ότι  $\theta \neq \theta_0$  (η ράβδος φαίνεται περιστρεμμένη).

Υπόδειξη Θεωρήστε ότι το κάτω σημείο της ράβδου συμπίπτει με τη αρχή του τονούμενου συστήματος συντεταγμένων και υπολογίστε την γωνία (ή την εφαπτομένη της γωνίας)  $\theta$  στο ακίνητο σύστημα αναφοράς.

5. Ένα τρένο κινείται ως προς τη Γη με ταχύτητα  $v_{1Γ}$ . Ένας επιβάτης, που κινείται ως προς το τρένο με ταχύτητα  $v_{21}$ , εκτοξεύει αβαρές βέλος οριζοντίως με ταχύτητα  $v_{32}$  ως προς το τόξο του (ως προς τον εαυτό του). Το βέλος βρίσκει στόχο στη Γη με ταχύτητα  $v_{3Γ}$  ως προς τη Γη. Α) Πόση είναι η ταχύτητα  $v_{3Γ}$ ; Εφαρμογή:  $v_{1Γ} = 600 \text{ km/8h}$ ,  $v_{21} = 100 \text{ m/10s}$ ,  $v_{32} = 300 \text{ km/h}$ , όλες οι ταχύτητες είναι ομόρροπες. Β) Πόση θα ήταν η  $v_{3Γ}$  αν το «βέλος» ήταν φωτόνιο, δηλ. αν  $v_{32} = c$ ;



6. Ένα φωτόνιο ακτίνων X συχνότητας  $\nu$  εισέρχεται από τα αριστερά στο σχήμα κατά μήκος του άξονα των  $x$  και προσπίπτει σε ένα ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, οπότε του μεταβιβάζει μέρος της ενέργειας και της ορμής του. Το φωτόνιο σκεδάζεται κατά μια γωνία  $\theta$ , ενώ το ηλεκτρόνιο αποκτά κινητική ενέργεια  $K$  και ορμή  $\mathbf{p}$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  σχηματίζει γωνία  $\phi$  με

τον άξονα των  $x$ . Το σκεδαζόμενο φωτόνιο, λόγω της κινητικής ενέργειας που μεταβίβασε στο ηλεκτρόνιο χάνει μέρος της ενέργειάς του και έτσι η νέα του ενέργεια  $h\nu'$  (όπου  $h$  η σταθερά του Planck) είναι μικρότερη από την αρχική. Χρησιμοποιώντας τις αρχές διατήρησης της ενέργειας και της ορμής κατά μήκος των αξόνων  $x$  και  $y$ , βρείτε την γωνία  $\phi$  και την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. (Μπορείτε να πολλαπλασιάσετε την ταυτότητα  $\gamma^2 - \gamma^2 v^2/c^2 = 1$  επί  $m^2 c^4$ , αν χρειασθεί).

7. Θεωρήστε ότι σ' έναν ευθύγραμμο οριζόντιο αγωγό πολύ μεγάλου μήκους σε ένα σύστημα  $\Sigma$ , το ηλεκτρικό ρεύμα οφείλεται στην κίνηση μιας γραμμικής διάταξης ελεύθερων θετικών φορτίων  $e$  που ισαπέχουν και κινούνται προς τα δεξιά με μέτρο ταχύτητας  $v$  και ελεύθερων αρνητικών φορτίων  $-e$  που ισαπέχουν και κινούνται προς τα αριστερά με αντίθετη ταχύτητα  $-v$ . Ο αριθμός των θετικών ή αρνητικών φορτίων ανά μονάδα μήκους είναι ίδιος.

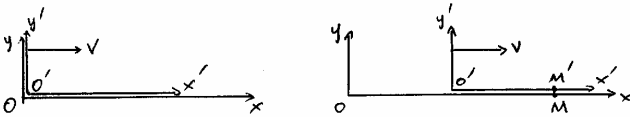
α) Δείξτε ότι, ως προς το  $\Sigma$ , το ρεύμα  $I$  δίνεται από τη σχέση  $I = 2ev \gamma / l_0$ , όπου  $l_0$  είναι η απόσταση ηρεμίας μεταξύ διαδοχικών θετικών φορτίων ή μεταξύ διαδοχικών αρνητικών φορτίων.

β) Βρείτε το ρεύμα  $I'$ , ως προς τη  $\Gamma\eta$ , όπου τα θετικά φορτία είναι ακίνητα, και δείξτε ότι αυτό το ρεύμα είναι  $I' = \gamma I$ , δηλαδή μεγαλύτερο από το ρεύμα που μετρείται στο σύστημα  $\Sigma$ .

8. Αντιπρωτόνιο  $p^-$  μάζας ηρεμίας  $M_0 = 938 \text{ MeV}/c^2$  διεισδύει σε κομμάτι ύλης, επιβραδύνεται και, όταν ηρεμήσει, αλληλεπιδρά με παρευρισκόμενο πρωτόνιο  $p^+$  που ηρεμεί (ίσης μάζας ηρεμίας  $M_0$ ). Με την αλληλεπίδραση τα δύο ηρεμούντα σώματα εξαυλώνονται, και παράγονται δύο ουδέτερα πιόνια  $\pi^0$  μάζας ηρεμίας  $m_0 = 135 \text{ MeV}/c^2$  το καθένα. Να βρεθεί το μέτρο της ορμής καθενός πιονίου σε  $\text{MeV}/c$  και η ταχύτητά του σε ποσοστό του  $c$ .

### Ερωτήσεις

1. Ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $\Sigma'$  ( $O', t', x', y', z'$ ), κινείται με ταχύτητα  $\mathbf{V} = V\mathbf{i}$ ,  $V > 0$ , ως προς άλλο,  $\Sigma$  ( $O, t, x, y, z$ ). Τη στιγμή  $t = t' = 0$ , οι αρχές  $O, O'$  ταυτίζονται. Ύστερα, για  $t > 0$ ,  $t' > 0$  και για τυχόν σημείο  $M'$  της ευθείας  $O'x'$ , που αντιστοιχεί στο σημείο  $M$  του  $Ox$ , (π.χ. τη θέση μιας μύγας) με συντεταγμένες  $x'$  και  $x$ , αντίστοιχα, θα έχουμε:



Ως προς  $\Sigma$ :  $OM = OO' + O'M$ . Ως προς  $\Sigma'$ :  $O'M' = OM' - OO'$ .

A) Εξηγήστε γιατί

Ως προς  $\Sigma$ :  $OM \neq OO' + O'M'$ . Ως προς  $\Sigma'$ :  $O'M' \neq OM - OO'$ ;

B) Εάν  $AB_{(\Sigma)}$  σημαίνει «το μήκος  $AB$  ως προς το  $\Sigma$ , δηλαδή στο συγχρονισμό του  $\Sigma$ »,

(π.χ. το μήκος μιας ράβδου στο  $\Sigma$ , όταν τα άκρα της είναι τα  $A$  και  $B$  και προσδιορίζονται την ίδια χρονική στιγμή) εξηγήστε γιατί

$OO'_{(\Sigma)} = V t$ , ενώ  $OO'_{(\Sigma')} = V' t' = -V t'$ ,

$O'M_{(\Sigma)} = (1 - V^2/c^2)^{1/2} O'M'_{(\Sigma')}$  και  $OM'_{(\Sigma')} = (1 - V^2/c^2)^{1/2} OM_{(\Sigma)}$

2. Υπάρχει παράδοξο στον εξής συλλογισμό; «Ένα διαμπερές δωμάτιο και ένα δόρυ έχουν μήκη ηρεμίας  $L_0 = 4 \text{ m}$  και  $l_0 = 5 \text{ m}$ , αντίστοιχα. Το δόρυ κινείται με σχετικιστική ταχύτητα ούτως ώστε το μήκος του ως προς το δωμάτιο να γίνεται  $l(v) = l_0/\gamma = 4 \text{ m}$ . Ως προς τον συγχρονισμό της  $\Gamma\eta$ , το κινούμενο δόρυ χωράει ολόκληρο μέσα στο δωμάτιο. Ως προς τον συγχρονισμό του δόρατος το (κινούμενο) δωμάτιο έχει μήκος μικρότερο από  $4 \text{ m}$  και άρα ουδέποτε μπορεί να περιέχει ολόκληρο το δόρυ.»

(Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι οι πόρτες ήταν κλειστές και καθεμία ανοίγει την κατάλληλη στιγμή για να περάσει το δόρυ, και μόλις εκτελέσει τον προορισμό της, ξανακλείνει. Θεωρήστε την χρονική αλληλουχία όλων αυτών των γεγονότων στα δύο συστήματα αναφοράς)

**3.** Ως γνωστόν, παράλληλα ρεύματα έλκονται. Δηλαδή ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα  $\mathbf{v}$  παράλληλα προς τα κινούμενα ηλεκτρόνια ενός ρευματοφόρου σύρματος, έλκεται προς το σύρμα με δύναμη  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  λόγω του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$  που αναπτύσσεται γύρω από το σύρμα. Όμως, στο δικό του σύστημα αναφοράς (ως προς τον εαυτό του) έχει ταχύτητα  $\mathbf{v} = 0$ . Άρα δεν επηρεάζεται από κανένα μαγνητικό πεδίο. Τότε τίθεται το ερώτημα “πώς έλκεται;”. Η θεωρία Σχετικότητας ερμηνεύει αυτή την έλξη με την συστολή του μήκους. Για την ερμηνεία αυτή απαντήστε περιγραφικά, χωρίς υπολογισμούς στην εξής άσκηση.

Έστω σύρμα σταθερής πυκνότητας αποτελούμενο από άτομα που συνεισφέρουν ένα (1) ελεύθερο ηλεκτρόνιο (αγωγιμότητας). Όταν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα, τα ηλεκτρόνια κινούνται με μέση ταχύτητα  $v_d$ . Ένα άλλο ηλεκτρόνιο, απ’ έξω, έστω ότι την στιγμή της παρατηρήσεως κινείται παράλληλα προς το σύρμα με την ίδια ταχύτητα  $\mathbf{v} = v_d$ .

A) Πώς το ελεύθερο ηλεκτρόνιο, θεωρώντας τον εαυτό του ακίνητο, θα βλέπει τα ηλεκτρόνια του σύρματος και πώς θα βλέπει να κινούνται τα θετικά ιόντα;

B) Αν σε ένα μήκος  $\Delta x$ , απέναντί του, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο βλέπει να υπάρχουν  $N$  ηλεκτρόνια στο σύρμα, σε πόσο μήκος θα βλέπει να υπάρχουν  $N$  θετικά ιόντα;

Γ) Στο ίδιο μήκος  $\Delta x$  θα βλέπει να υπάρχουν περισσότερα θετικά ιόντα από ηλεκτρόνια ή λιγότερα;

Δ) Βάσει των ανωτέρω εξηγήστε γιατί το (ακίνητο ως προς τον εαυτό του) ηλεκτρόνιο υφίσταται ολική ελκτική δύναμη με φορά προς το σύρμα.

E) Πώς ερμηνεύεται αυτή η ελκτική δύναμη από το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου (όπου τα θετικά ιόντα είναι ακίνητα και τα ηλεκτρόνια κινούνται);

**4.** Ως αποτέλεσμα των μετασχηματισμών 5.11-5.13 του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, είναι εύκολο να επαληθευθεί με απλή αντικατάσταση, ότι οι ποσότητες  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  και  $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2$  είναι αναλλοίωτες κατά Lorentz. Χρησιμοποιώντας την πληροφορία αυτή, απαντήστε στην εξής ερώτηση: (Απαιτούνται γενικές σκέψεις περί αναλλοίωτου και όχι ειδικές γνώσεις του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου).

Έστω ότι σε ένα σύστημα αναφοράς  $\Sigma$  ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει μόνο ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  (π.χ. γύρω από ένα ακίνητο φορτίο  $q$ ), και  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Υπάρχει κινούμενο σύστημα αναφοράς  $\Sigma'$  στο οποίο ένας (ακίνητος ως προς αυτό) παρατηρητής θα έβλεπε μόνο μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}'$  (και  $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$ );

(Κάθε άσκηση αντιστοιχεί σε μια βαθμολογική μονάδα, ενώ κάθε ερώτηση σε μισή)