Ονοματεπώνυμο ______________________________

Τμήμα ______________________________

ΘΕΜΑ 1

1ο Ερώτημα

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

α) $\int x^2 \cos(3x)dx$ β) $\int \frac{9x^2-4x+12}{x^3-4x}dx$

(Απάντηση)

α) θέτω $u = x^2$ *και* $du = \cos(3x)$ *τότε* $du = 2xdx$ *και* $u = \frac{1}{3}\sin(3x)$ *οπότε*

$$\int x^2 \cos(3x)dx = \int u \ \ d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon \ \ du = x^2 \frac{1}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)2xdx = \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \sin(3x) \ \ x \ \ dx$$

$$= \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[x \ \ (-\frac{1}{3}\cos(3x) - \int (-\frac{1}{3}\cos(3x)\right] = \frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\right] =$$

$$\frac{x^2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\right] = \frac{x^2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27} \ \ \sin(3x) + c$$

β) x^3*-4x =x (*x^2*-4) = x (x+2) (x-2) οπότε* $\frac{9x^2-4x+12}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$

$$9x^2 - 4x + 12 = A(x^2-4) + Bx(x-2) + Cx(x+2) = A(x^2-4) + B(x^2-2x) + C(x^2+2x) =$$

$$(A+B+C)x^2 + (-2B+2C)x - 4A \quad \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$A+B+C = 9$$

$$-2B+2C = -4$$

$$-4A = 12$$

Επομένως A=-3, B=7, C=5 οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{9x^2-4x+12}{x^3-4x}dx = \int\left(\frac{-3}{x} + \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right)dx = -3\int \frac{1}{x}dx + 7\int \frac{1}{x+2}dx + 5\int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$-3\ln \ \ |x| + 7\ln \ \ |x+2| + 5 \ \ \ln \ \ |x-2| + c$$

2ο Ερώτημα

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^2e^y + y^2e^x = 2e$ στο σημείο (1,1)

(Απάντηση)

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης f(x) στο σημείο (x_o*,* y_o*) είναι y-*y_o*=* $f'(x_o)$*(x-*x_o*) όπου*

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$. *Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της* $x^2e^y + y^2e^x = 2e$ έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(x^2e^y + y^2e^x - 2e\right) = 0 \Rightarrow 2x \ \ e^y + x^2e^y\frac{dy}{dx} + y^2e^x + e^x 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^2e^y + 2e^x y\right) = -2x \ \ e^y - y^2e^x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x \ \ e^y - y^2e^x}{x^2e^y + 2 \ \ e^x y}$$

στο (1,1) είναι $\frac{dy}{dx}=\frac{-2(1)\,e^{(1)}-(1)^2e^{1)}}{(1)^2e^{(1)}+2e^{(1)}(1)}=-1$ *Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι y-1=-1(x-1) ή*

y=-x+2

ΘΕΜΑ 2

1ο Ερώτημα

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x+1}$ για x$\in R$

(Απάντηση)

α) η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίου ορισμού της το οποίο είναι όλο το R γιατί ο παρανομαστής είναι πάντα θετικός.
β) για x=0 είναι f(0) =1 οπότε το διάγραμμά της τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο 1
και $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2-x+1}=0$ *για x =-1 οπότε το διάγραμμά της τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο –1.*
Ακόμα για x < -1 είναι f(x)<0 και για x >-1 είναι f(x)>0
γ) η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in R$,

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x^2-x+1)-(x+1)^3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{(x+1)^2\left(3(x^2-x+1)-(x+1)(2x-1)\right)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ *για x =-1 και x =2 (πιθανές θέσεις ακροτάτων)*

Διερευνούμε το πρόσημο της $f'(x)$ *. Ισχύει* $\forall x<-1$ $f'(x)$*>0,* $\forall x\in(-1,2)$ $f'(x)$*>0,* $\forall x>2$ $f'(x)$*>0, Άρα η f δεν έχει ακρότατα και είναι αύξουσα*

δ) η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη $\forall x\in R$,

$$f''(x)=\left(\left(\frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}\right)^2\right)'=2\left(\frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}\right)\left(\frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}\right)'=$$

$$2\left(\frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}\right)\frac{(2x-1)(x^2-x+1)-(x^2-x-2)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=2\left(\frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}\right)\frac{(2x-1)(x^2-x+1-x^2+x+2)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$\frac{6(2x-1)(x^2-x-2)}{(x^2-x+1)^3}$$

Είναι $f''(x)=0$ *για* $x=\frac{1}{2},x=-1,x=2$ *(πιθανές θέσεις σημείων καμπής)*

Διερευνούμε το πρόσημο της $f''(x)$.

Ισχύει $\forall x\in(-1,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ $f''(x)$ *>0, και* $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},2)$ $f''(x)$ *<0 άρα*

f κυρτή στα διαστήματα $(-1,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ *και f κοίλη στα* $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},2)$

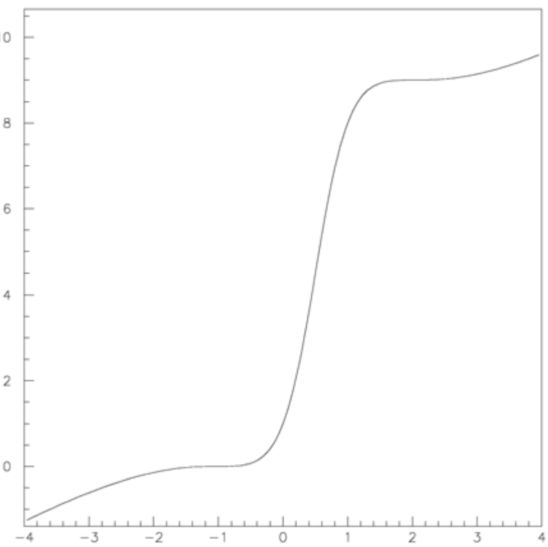
ε) δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *και* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+2x+1}{x^2-x+1} = 4$$ *οπότε η ευθεία y=x+4 είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος*

x	**-∞**	**-1**		**0**		**0.5**		**2**	**+∞**
f΄	+	0	+		+		+	0	+
f΄΄	-	0	+		+	0	-	0	+
f	-	0	+	1	+	4.5	+	9	+
	↗ ∩	ΣΚ	↗ ∪		↗ ∪	ΣΚ	↗ ∩	ΣΚ	↗ ∪



2^{o} Ερώτημα

Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα

$$x + y = 1 - \kappa z$$
$$x + \kappa y + z = \kappa$$
$$x + \kappa z - 3 = y$$

όπου οι άγνωστοι x,y,z ανήκουν στο R και κ παράμετρος που επίσης ανήκει στο R.

(Απάντηση)

Το σύστημα γράφεται ως εξής:

x +y +κz = 1

x +κy +z = κ

x -y +κz =3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & -1 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa^2+1)-(\kappa-1)+\kappa(-1-\kappa) = \kappa^2+1-\kappa+1-\kappa-\kappa^2 = 2(1-\kappa)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa & 1 \\ 3 & -1 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa^2+1)-(\kappa^2-3)+\kappa(-\kappa-3\kappa) = \kappa^2+1-\kappa^2+3-\kappa^2-3\kappa^2 = 4-4\kappa^2 = 4(1-\kappa^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 3 & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa^2-3)-(\kappa-1)+\kappa(3-\kappa) = \kappa^2-3-\kappa+1+3\kappa-\kappa^2 = 2\kappa-2 = 2(\kappa-1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & \kappa \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3\kappa+\kappa)-(3-\kappa)+(-1-\kappa) = 4\kappa-3+\kappa-1-\kappa = 4\kappa-4 = 4(\kappa-1)$$

1) Αν $D \neq 0 \Rightarrow 2(1-\kappa) \neq 0 \Rightarrow \kappa \neq 1$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4(1-\kappa^2)}{2(1-\kappa)} = 2(1+\kappa)$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(k-1\ )}{2(1-\kappa)} = -1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{4(\kappa-1)}{2(1-\kappa)} = -2$$

2) Αν D=0 δηλαδή κ =1 το σύστημα γίνεται

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{x+y+z=1} \\ \mathrm{x+y+z=1} \\ \mathrm{x-y+z=3} \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ 2x+2z=4 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x=2-z \\ z \in R \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} y=1-x-z \\ x=2-z \\ z \in R \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} y=-1 \\ x=2-z \\ z \in R \end{matrix}\right\}$$

άρα για κ=1 το σύστημα είναι αόριστο (x ,y, z)=(2-z , -1 , z)

ΘΕΜΑ 3

1ο Ερώτημα

α) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $f(x) = x^5$ και $g(x) = 2x$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $f(x) = x$,

$g(x) = 2x$ και $h(x) = 5 - x$

(Απάντηση)

α) Βρίσκουμε που τέμνονται οι δύο καμπύλες

$x^5 = 2x \Leftrightarrow x(x^4 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \sqrt[4]{2}, x = -\sqrt[4]{2}$. Το εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-\sqrt[4]{2}}^{0} \left|x^5 - 2x\right| dx + \int_{0}^{\sqrt[4]{2}} \left|x^5 - 2x\right| dx = 2\int_{0}^{\sqrt[4]{2}} (2x - x^5) dx = 2\left[x^2 - \frac{x^6}{6}\right]_0^{\sqrt[4]{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ τμ}$$

β) Οι τρεις ευθείες τέμνονται στα σημεία 0, 5/3, 5/2. Το εμβαδόν είναι

$$E = \int_{0}^{5/3} (2x - x) dx + \int_{5/3}^{5/2} (5 - x - x) dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{5/3} + \left.\left(5x - x^2\right)\right|_{5/3}^{5/2} = 2.083 \text{ τμ}$$

2ο Ερώτημα

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x - \sin 4x}{x^3}$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} Ce^{3x}, & x \geq -1 \\ x^3 + x + 1, & x < -1 \end{cases}$

Να υπολογιστεί το C ώστε η f(x) να είναι συνεχής στο x=-1

(Απάντηση)

α) $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x - \tan x) = 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - \tan x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}$$

επειδή το πάνω και το κάτω όριο είναι 0 εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα L'Hospital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\cos x - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - 2\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2 \tan x}{6x} \qquad (1) \qquad \text{γιατί}$$

$$\left(\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\right)' = 2\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = 2\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 2\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\cos x}\tan x = 2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \tan x$$

επειδή το πάνω και το κάτω όριο της (1) είναι 0 εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα L'Hospital, άρα (1) ισούται με

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'-2\left(\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\right)'\tan x-2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2(\tan x)'}{(6x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-2\left(2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\tan x\right)\tan x-2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-2\left(2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\tan x\right)\tan x-2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2}{6}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-4\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\tan^2 x-2\left(\frac{1}{\cos x}\right)^4}{6}=-\frac{-1+0-2}{6}=-\frac{1}{2}$$

β) Επειδή $\lim_{x\to 0}(4x-\sin 4x)=0$ $\lim_{x\to 0}(x^3)=0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4x-\sin 4x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos 4x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(4-4\cos 4x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{16\sin 4x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(16\sin 4x)'}{(6x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{64\cos 4x}{6}=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$$

γ) Πρέπει $f(-1)=\lim_{x\to -1^-}Ce^{3x}=\lim_{x\to -1^+}x^3+x+1\Rightarrow Ce^{-3}=-1\Rightarrow C=-e^3$

Να απαντηθούν και τα 3 πλήρη θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα ενώ τα ερωτήματα των θεμάτων έχουν ίση συνεισφορά στην βαθμολογία του κάθε θέματος. Υπενθυμίζεται ότι θα πρέπει να συμπληρώσετε το βαθμό 5 σε κάθε εξέταση και ότι ο συνολικός σας βαθμός των γραπτών εξετάσεων θα είναι 0.5 (βαθμός Μηχανικής) +0.3 (βαθμός στα Μαθηματικά) +0.2 (βαθμός στον Ηλεκτρομαγνητισμό).

Καλή Επιτυχία