Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες- Κλασική Μηχανική **Ιούλιος 2004**

Θέμα 1

A) Ένα ελικόπτερο προσπαθεί να προσγειωθεί σε μία φρεγάτα που κινείται με 17 m/s προς τον θετικό ημιάξονα y. Την ίδια στιγμή φυσάει άνεμος με 12 m/s προς τον θετικό ημιάξονα x. Αν στο κατάστρωμα του πλοίου, το πλήρωμα βλέπει το ελικόπτερο να κατεβαίνει κάθετα με 5 m/s, ποια είναι η ταχύτητα του ελικοπτέρου α) ως προς το νερό και β) ως προς τον αέρα ;
(50%)

Λύση

α) $\vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} = \vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\varphi\rho\varepsilon\gamma} + \vec{\upsilon}_{\varphi\rho\varepsilon\gamma/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} = -5\hat{k} + 17\,\hat{j}$

β) $\vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} = \vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha} + \vec{\upsilon}_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha} = \vec{\upsilon}_{\varepsilon\lambda\iota\kappa/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} - \vec{\upsilon}_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha/\nu\varepsilon\rho\acute{o}} = (-5\hat{k} + 17\,\hat{j}) - 12\,\hat{i}$

B) Ένα αντικείμενο βάρους W εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_o. Αν θεωρήσουμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας και η σταθερά αναλογίας είναι κ, να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος.

(Υπόδειξη: Εάν $\frac{dy}{dx} = \alpha + \beta y$ όπου α, β σταθερές τότε $\frac{dy}{\alpha + \beta y} = dx$) (50%)

Λύση

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \kappa\vec{\upsilon} \Leftrightarrow \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{g} - \frac{\kappa}{m}\vec{\upsilon} \Leftrightarrow \frac{-d\upsilon}{g + \frac{\kappa}{m}\upsilon} = dt$$

όπου θεωρήσαμε θετική φορά την κατεύθυνση της επιτάχυνσης της βαρύτητας.
Επομένως:

$$\frac{-d\upsilon}{g + \frac{\kappa}{m}\upsilon} = dt \Leftrightarrow -\int_{\upsilon_o}^{0} \frac{d\upsilon}{g + \frac{\kappa}{m}\upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{m}{\kappa}\ln(g + \frac{k}{m}\upsilon)\Big|_{\upsilon_o}^{0} = t \Rightarrow$$

$$t = -\frac{m}{\kappa}\ln g + \frac{m}{\kappa}\ln(g + \frac{k}{m}\upsilon_o) \Rightarrow t = \frac{m}{\kappa}\ln\frac{(g + \frac{k}{m}\upsilon_o)}{g}$$

Θέμα 2

A) Σώμα μάζας m = 11 kg κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή που το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου υ_1= 10 m/s, κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ πιέζει το σώμα προς τα κάτω. Το μέτρο της $\vec{F}$ μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση F=10 -5t (F σε N, t σε s). Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι n= 0.2, να βρείτε την ταχύτητα που θα έχει το σώμα τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη. Δίνεται g=10 m/s^2
(70%))

Λύση

Η δύναμη $\vec{F}$ μηδενίζεται τη χρονική στιγμή F=10 -5t=0 ή t=2s. Το μέτρο της δύναμης της τριβής $\vec{T}$ δίνεται από τη σχέση:
T= n F_κ= n (F+mg) = 0.2 (10-5t+110) = 24 -t

Ισχύει $\sum \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t}$ αφού η τριβή είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στη διεύθυνση κίνησης.

Άρα $\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} - \int_0^2 \vec{T}dt \Rightarrow p_{τελ} = p_{αρχ} - \int_0^2 T dt$ (1)

Όπου έχουμε θεωρήσει θετική κατεύθυνση την φορά της αρχικής ταχύτητας.

Το ολοκλήρωμα είναι $\int_0^2 T dt = \int_0^2 (24-t)dt = 48 - [0.5*4] = 48 - 2 = 46$ Ns (ή υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση του μέτρου της τριβής με το χρόνο και είναι ίσο αριθμητικά εμβαδόν τραπεζίου με πλευρές 24 και 22 και ύψος 2)

Τελικά από την (1) παίρνουμε $\upsilon_{τελ} = \upsilon_1 - \frac{\int_0^2 T dt}{m} = 10 - \frac{46}{11} = 10 - 4.18 = 5.82$ m/s

B) Από ύψος H=2.2 m πάνω από οριζόντιο δάπεδο βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα υ_o=10 m/s μεταλλική σφαίρα βάρους B= 10 N. Αφού προσκρούει στο δάπεδο αναπηδά σε ύψος h =1.8 m. Αν η διάρκεια επαφής σφαίρας-δαπέδου είναι Δt =0.1 s, να υπολογίσετε τη μέση δύναμη που ασκήθηκε από το δάπεδο στη σφαίρα.
Δίνεται g=10 m/s^2
(30%)

Λύση

Θεωρούμε κατακόρυφο άξονα Oy με θετική φορά προς τα πάνω. Έστω $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα με την οποία προσκρούει και $\vec{\upsilon}_2$ η ταχύτητα με την οποία αναπηδά. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της $\vec{B}$ και η μέση δύναμη επαφής $\vec{F}$ από το δάπεδο. Άρα στη διάρκεια επαφής της δέχεται $\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{B} \Rightarrow \sum F = F - B$

Ισχύει $\sum \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow$ $-m\upsilon_1 + F\,\Delta t - B\Delta t = m\upsilon_2$ και άρα $F = B + \frac{B}{g\Delta t}(\upsilon_1 + \upsilon_2)$ (1)

Από τη διατήρηση της ενέργειας ισχύει

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + mgH = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2gH} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - mgh = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Από (1) (2) και (3) προκύπτει ότι $\boxed{F = B + \frac{B}{g\Delta t}\left(\sqrt{\upsilon_o^2 + 2gH} + \sqrt{2gh}\right)}$

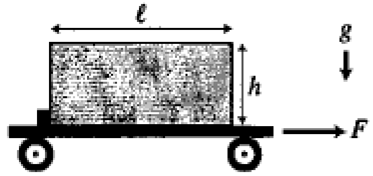
Με αριθμητική αντικατάσταση

$$F = 10\text{ N} + \frac{10\text{N}}{10\text{ms}^{-1}\,0.1\text{s}}\left(\sqrt{100\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2\text{x}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{x}2.2\text{m}} + \sqrt{2\text{x}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{x}1.8\text{m}}\right) \Rightarrow F = 190\text{N}$$

Θέμα 3

A) Ένα ομογενές κιβώτιο ύψους h, μήκους l και μάζας m στέκεται πάνω σε ένα βαγόνι μάζας M όπως δείχνει το σχήμα (η επιτάχυνση της βαρύτητας g έχει διεύθυνση προς τα κάτω). Ένα μικρό φρένο εμποδίζει

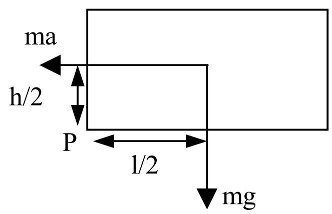
το κιβώτιο να ολισθήσει προς τα πίσω. Ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη F την οποία μπορώ να ασκήσω οριζόντια όπως δείχνει το σχήμα ώστε το κιβώτιο να μην αρχίσει να ανατρέπεται;
(70%)



Λύση

Λόγω της δύναμης F το βαγόνι και το κιβώτιο επιταχύνονται με επιτάχυνση $a=\dfrac{F}{m+M}$

Η ισορροπία του κιβωτίου μπορεί να αναλυθεί ως ένα πρόβλημα στατικής στο σύστημα που κινείται μαζί με το βαγόνι. Σ΄αυτό το σύστημα στο κιβώτιο ασκείται η πλασματική δύναμη $-m\vec{a}$ και το βάρος του mg , οι οποίες δρουν στο κέντρο μάζας του, όπως στο σχήμα



Τη στιγμή που το κιβώτιο πάει να ανατραπεί (χάνει επαφή με το βαγόνι), τότε ισορροπεί στιγμιαία άρα η συνισταμένη των ροπών ως προς το σημείο του φρένου P είναι μηδέν δηλαδή $\Sigma\vec{\tau}_P=0$ οπότε $\dfrac{mah}{2}=\dfrac{mgl}{2}\Rightarrow a=\dfrac{gl}{h}$ και άρα $F=\dfrac{(M+m)gl}{h}$

Β) Δύο ακριβώς ίδια αυτοκίνητα Α και Β ξεκινούν από την ηρεμία συγχρόνως και κινούνται στον ίδιο επίπεδο δρόμο υπό την επίδραση οριζόντιων δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα ώστε $F_1=F_2$. Πώς μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους η κινητική ενέργεια (Ε) και η ορμή (p) των δύο αυτοκινήτων, ένα λεπτό αργότερα εάν $m_B>m_A$;
(30%)

Λύση

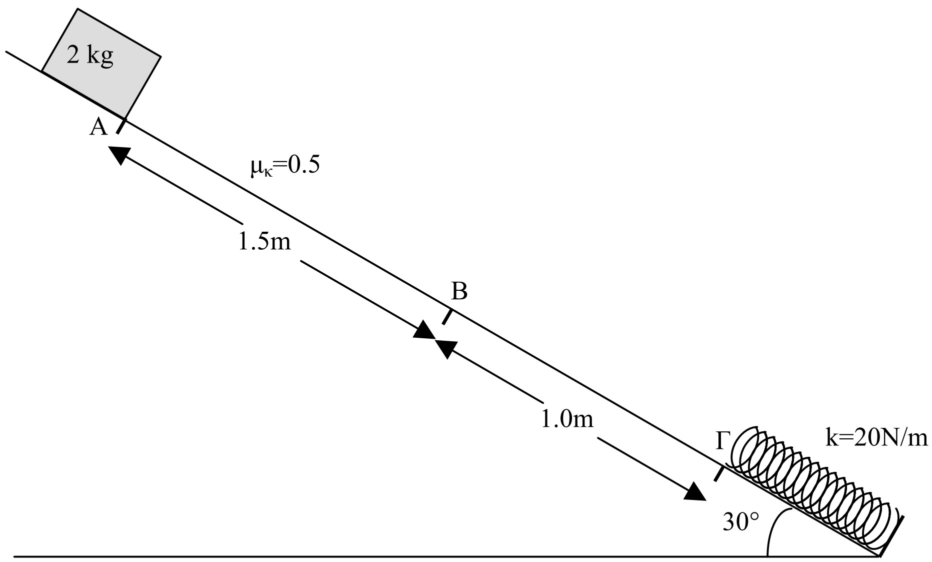
Αφού στα αυτοκίνητα δρα η ίδια δύναμη για το ίδιο χρονικό διάστημα και ξεκινούν από ηρεμία θα αποκτήσουν την ίδια ορμή $p_A= p_B$ ανεξάρτητα από τη διαφορετική τους μάζα.

Ισχύει $E=\dfrac{p^2}{2m}$.Άρα $\dfrac{E_A}{E_B}=\dfrac{p_A^2/2m_A}{p_B^2/2m_B}=\dfrac{m_B}{m_A}>1$ δηλαδή $E_A>E_B$

(Ή από $m_A \upsilon_A = m_B \upsilon_B$ με $m_B>m_A$ προκύπτει ότι το Α με τη μικρότερη μάζα θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β δηλαδή $\upsilon_A > \upsilon_B$ κι άρα θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση γιατί το διάστημα είναι ανάλογο της επιτάχυνσης ($x=\dfrac{1}{2}at^2$). Η ίδια δύναμη παράγει σ΄αυτό περισσότερο έργο και άρα $E_A>E_B$)

Θέμα 4

Α) Ένα σώμα μάζας 2 kg αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου κλίσης 30^o. Στα πρώτα 1.5 m του επιπέδου (από την κορυφή) υπάρχει τριβή με συντελεστή ολίσθησης μ=0.5, ενώ στα επόμενα 1.0 m δεν υπάρχει. Στη βάση του επιπέδου υπάρχει ελατήριο σταθεράς 20 N/m **.** α) Ποιο είναι το έργο της τριβής κατά την κίνηση του σώματος προς τη βάση του επιπέδου β) Με ποια ταχύτητα φτάνει το σώμα στο ελατήριο γ) Έστω ότι το σώμα συνεχίζοντας προς τη βάση του επιπέδου πιέζει το ελατήριο κατά x πριν να σταματήσει στιγμιαία (δεν υπάρχει τριβή σ΄αυτήν την περιοχή). Ποιά είναι η απόσταση x ; δ) Αφού το ελατήριο ισορροπεί, επανεκτείνεται, εκτοξεύοντας το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο. Τι απόσταση θα διανύσει το σώμα στο επίπεδο μέχρι να σταματήσει;
(70%)



Λύση

α) Κατά την κίνησή του από το Α στο Β ισχύει

$W_T = T\ AB \cos 180^0$ όπου AB=1.5 m

T= μ N AB

αλλά $N=mg \cos\theta= 2\ kg\ 10\ m/s^2 \cos(30^0)=17.3\ N$

οπότε T=8.66 N και άρα $\mathbf{W_T=-13J}$

β) Κατά την κίνησή του από το Α στο Γ ισχύει

$W_T = \Delta E_{\kappa\iota\nu}+\Delta E_{\delta\upsilon\nu}= E_{\kappa\iota\nu}(\Gamma)- E_{\kappa\iota\nu}(A)+ E_{\delta\upsilon\nu}(\Gamma)- E_{\delta\upsilon\nu}(A)= (1/2)\ m\ \upsilon^2-0+0-mg\ h$ όπου $h= (2.5\ m \sin30^0)$

άρα $(1/2)\ m\ \upsilon^2 = W_T +mgh=-13J+25J =12J$ Άρα $\mathbf{\upsilon = \sqrt{12}\ m/s}$

γ) Κατά την κίνησή του από το Γ στο Δ όπου ΓΔ=x ισχύει

$W= \Delta E_{\kappa\iota\nu}+\Delta E_{\delta\upsilon\nu}+ \Delta E_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} \rightarrow 0= E_{\kappa\iota\nu}(\Delta)- E_{\kappa\iota\nu}(\Gamma)+ E_{\delta\upsilon\nu}(\Delta)- E_{\delta\upsilon\nu}(\Gamma)+ E_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(\Delta)- E_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(\Gamma) \rightarrow$
$0=0-(1/2)\ m\ \upsilon^2 +0- mg\ x\sin30^0+(1/2)\ K\ x^2-0 \rightarrow -12-10x+10x^2=0$ απ΄όπου

$x_{1,2}=\frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\,x10x\,(-12)}}{20} = \frac{10 \pm 24}{20}$ Δεκτή η θετική λύση **x=1.7 m**

δ) Όταν το σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, θα έχει την ίδια κινητική ενέργεια με αυτή που είχε όταν έφτασε σ΄αυτό στο σημείο Γ δηλαδή από το ερώτημα (β) $E_{κιν}(Γ)= 12$ J

Κατά την άνοδό του, έστω ότι θα σταματήσει σε μία απόσταση s από το Γ . Αν s>ΒΓ, τριβή θα υπάρχει μόνο στο διάστημα (s-1.0 m). Θα ισχύει

$W_{T} = ΔE_{κιν}+ΔE_{δυν} \rightarrow W_T= E_{κιν}(s)- E_{κιν}(Γ)+ E_{δυν}(s)- E_{δυν}(Γ) \rightarrow$

$- T(s-1.0\ m)= 0- E_{κιν}(Γ)+mg\ s\ \sin 30^0-0 \rightarrow -8.66N\ (s-1.0\ m) = -12J+2\ kg\ 10\ (m/s^2)\ 0.5s$

$\rightarrow$ **s =1.12 m** πάνω από το Γ

Β) Ένα σωμάτιο αρχικά βρίσκεται στην αρχή και έχει επιτάχυνση $\vec{a} = 3\vec{j}\ m/s^2$ και αρχική ταχύτητα $\vec{υ}_O = 5\hat{i}$ m/s. Βρείτε α) το διάνυσμα θέσης και την ταχύτητα σε οποιονδήποτε χρόνο t και β) τις συντεταγμένες και την ταχύτητα του σωματίου τη χρονική στιγμή t=2s.

(30%))

Λύση

$υ=[υ_o, αt,0] = [5, 3t, 0]$ ή $\vec{υ}=(5\hat{i} +3t\hat{j})m/s$

$r=[υ_ot, (1/2)αt^2,0]= [5t, (3/2)t^2,0]$ ή $\vec{r} =(5t\hat{i}+(3/2)t^2\hat{j})$ m

για t=2s r=(10m, 6m) και υ= (5m/s, 6m/s,0) οπότε υ= 7.81m/s

Θέμα 5

Α)) Ένα σωμάτιο μάζας 2 kg κινείται στη μία διάσταση κάτω από την επίδραση μίας δύναμης που περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα δυναμικής ενέργειας.

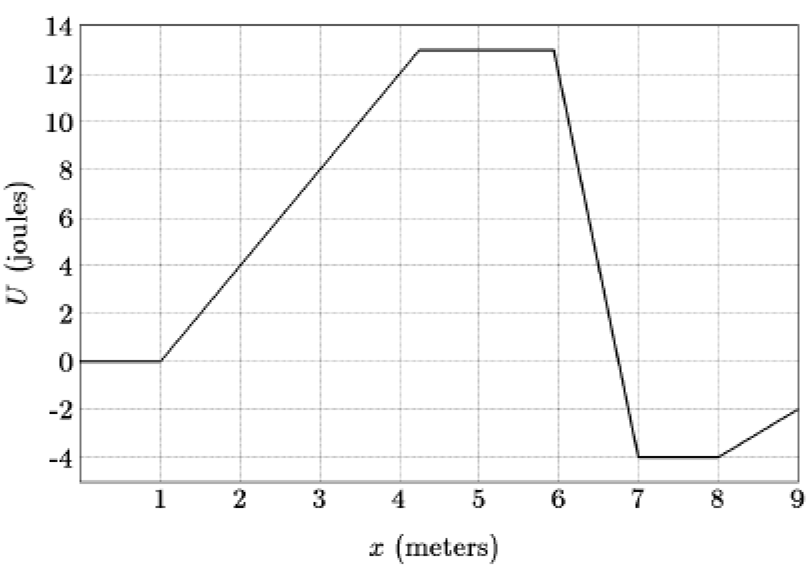
α) όταν το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση x=5m, ποιά είναι η δύναμη που δρα πάνω του;

β) όταν το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση x=2m, ποιά είναι η επιτάχυνσή του;

γ) εάν αφήσουμε το σωμάτιο που ηρεμεί στο x=6 m, με ποιά ταχύτητα θα φτάσει στο x=7.5 m

δ) εάν το σωμάτιο βάλλεται από την αρχή (x=0) με αρχική ταχύτητα 5 m/s προς τα δεξιά, με ποια ταχύτητα θα φτάσει στο x=3.25 m;

(60%)



Λύση

α) στο x=5m

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = 0$$

β) στο x=2m

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -4J/m = -4N$$

F_x=(2kg) $a_x \Rightarrow a_x = -2\frac{N}{kg} = -2m/s^2$

γ) Από τη διατήρηση της ενέργειας E= (1/2) Mυ^2 +U(x)= σταθ.

$E_{αρχ}$= U(6m)=12J

$E_{τελ}$= U(7.5m)+(1/2) (2kg) $\upsilon^2_{τελ} = -4J +$ +(1/2) (2kg) $\upsilon^2_{τελ}$

Από $E_{αρχ}$= $E_{τελ} \Rightarrow \upsilon^2_{τελ} = 16\frac{J}{kg} = 16\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow \upsilon_{τελ} = 4m/s$

δ) $E_{αρχ}$= U(0m)+(1/2) (2kg) $\upsilon^2_{αρχ} = 0J +$ +(1/2) (2kg) 25 (m^2/s^2)=25J

$E_{τελ}$= U(3.25m)+(1/2) (2kg) $\upsilon^2_{τελ} = 9J +$ +(1/2) (2kg) $\upsilon^2_{τελ}$

Από $E_{αρχ}$= $E_{τελ} \Rightarrow \upsilon^2_{τελ} = 16\frac{J}{kg} = 16\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow \upsilon_{τελ} = 4m/s$

B)) Ένα σώμα μάζας εκτοξεύεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα υ_o που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα κινείται στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Βρείτε τη στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή των συντεταγμένων όταν το σώμα βρίσκεται : α) στην αρχή των συντεταγμένων β) στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του και γ) στο σημείο ακριβώς προτού προσκρούσει στο έδαφος δ) ποια ροπή προκαλεί μεταβολές της στροφορμής του;
(40%)

Λύση

$\vec{L} = \vec{r}x\vec{p} = m\vec{r}x\vec{\upsilon}$ = m rυ sinφ

α) Το διάνυσμα θέσης είναι μηδέν οπότε $\vec{L} = 0$

β) Στο μέγιστο ύψος το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{r} = (\frac{\upsilon_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}, \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g})$

Η ταχύτητα έχει μόνο x συνιστώσα και έχει μέτρο $\upsilon=\upsilon_{ox}=\upsilon_o\cos\theta$,

Άρα $\vec{L} = m\vec{r}\ x\vec{\upsilon}$ = m $\frac{\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{2g}\upsilon_o\cos\theta\ (-\hat{k})$ = m $\frac{\upsilon_o^3 \cos\theta \sin^2\theta}{2g}\ (-\hat{k})$

γ) Στο σημείο πρόσκρουσης το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{r} = (R,0)$ όπου R το βεληνεκές. Η ταχύτητα είναι

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{ox} + \vec{\upsilon}_y$ όπου $\vec{\upsilon}_y = \upsilon_o\sin\theta\ (-\hat{j})$ οπότε

$\vec{L} = m\vec{r}x\vec{\upsilon}$ = m R $\upsilon_o\sin\theta\ (-\hat{k})$ = m $\frac{2\upsilon_o^2 \sin\theta\cos\theta}{g}\upsilon_o\sin\theta\ (-\hat{k})$ = m $\frac{2\upsilon_o^3 \cos\theta\sin^2\theta}{g}(-\hat{k})$

δ) η δύναμη της βαρύτητας δημιουργεί ροπή στη διεύθυνση -z

Θέμα 6

Α) Δύο φοιτητές της ΦΥΕ14 συζητούν σχετικά με την κίνηση συστήματος δύο μαζών m_1, m_2 που κινούνται με σταθερές ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ αντίστοιχα. α) ο φοιτητής Α ισχυρίζεται ότι η συνολική ορμή του συστήματος ισούται με το γινόμενο της συνολικής μάζας επί το διάνυσμα της ταχύτητας του κέντρου μάζας. Ο φοιτητής Β ισχυρίζεται ότι ότι η συνολική ορμή του συστήματος είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των δύο μαζών. β) ο φοιτητής Α ισχυρίζεται ότι η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος ισούται με το ήμισυ του γινομένου της συνολικής μάζας επί το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας. Ο φοιτητής Β ισχυρίζεται ότι η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων. Επιχειρηματολογήστε γιατί ο φοιτητής Α ή ο Β ή και οι δύο έχουν δίκιο.
(50%)

Λύση

α) φοιτητής Α: $\vec{p}_{\text{ολ}} = (m_1+m_2)\ \vec{V}_{\text{κμ}} = (m_1+m_2)\ \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1+m_2} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

φοιτητής Β: $\vec{p}_{\text{ολ}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

Άρα και οι δύο έχουν δίκιο (βλ. βιβλίο Τόμος Β Σελ. 39 σχέση 3.21 και 3.22)

β) φοιτητής Α: $E_{\text{ολ(Α)}} = \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)\ V_{\text{κμ}}^2$

φοιτητής Β: $E_{\text{ολ(Β)}} = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$

Ο φοιτητής Β προφανώς έχει δίκιο. Μένει να εξετάσουμε αν και ο Α έχει δίκιο.

Οι ταχύτητες ως προς το σύστημα του κ.μ είναι $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}'_1 + \vec{V}_{\text{κμ}}$ και $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}'_2 + \vec{V}_{\text{κμ}}$

αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε

$E_{\text{ολ(Β)}} = \dfrac{1}{2}m_1(\vec{\upsilon}'_1 + \vec{V}_{\text{κμ}})^2 + \dfrac{1}{2}m_2(\vec{\upsilon}'_2 + \vec{V}_{\text{κμ}})^2 =$

$\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_1V_{\text{κμ}}^2 + m_1\vec{\upsilon}'_1\vec{V}_{\text{κμ}} + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \dfrac{1}{2}m_2V_{\text{κμ}}^2 + m_2\vec{\upsilon}'_2\vec{V}_{\text{κμ}} =$

$\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)V_{\text{κμ}}^2 + (m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2)\vec{V}_{\text{κμ}} = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + E_{\text{ολ(Α)}}$

(ο τρίτος όρος μηδενίζεται γιατί είναι η ορμή του συστήματος ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας)
Άρα ο φοιτητής Α έχει άδικο

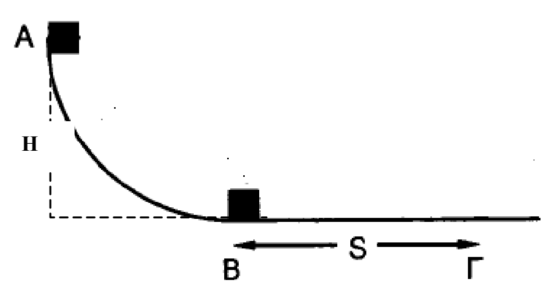
Β) Μία μάζα m_1= 5 kg αφήνεται από ύψος Η= 5m από το σημείο Α και συγκρούεται ελαστικά με ένα σώμα m_2 = 10 kg που αρχικά είναι ακίνητο στο σημείο Β. Η κίνηση του στο ΑΒ γίνεται χωρίς τριβές. Υπολογίστε α) το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα m_1 β) σε ποια απόσταση S θα σταματήσει το m_2 αν η οριζόντια επιφάνεια έχει συντελεστή τριβής μ=0.2 ;
(50%)

Λύση

Το σώμα m_1 πέφτει με ταχύτητα υ_1 που υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$E_A = E_B \Rightarrow m_1\, g\, H = (1/2)\, m_1\, \upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gH}$

Συγκρούεται ελαστικά με σώμα m_2 με υ_2=0. Άρα μετά την κρούση οι ταχύτητές τους θα είναι



$\upsilon_{1\,(\tau\varepsilon\lambda)} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\dfrac{1}{3}\upsilon_1$ με φορά προς τα αριστερά και

$\upsilon_{2\,(\tau\varepsilon\lambda)} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \dfrac{2}{3}\upsilon_1$ με φορά προς τα δεξιά

α) αν h είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα m_1, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

m_1 g h= (1/2) m_1 $\upsilon^2_{1(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow h = \dfrac{\upsilon^2_{1(\tau\varepsilon\lambda)}}{2g} = \dfrac{\upsilon_1^2}{18g} = \dfrac{2gH}{18g} = \dfrac{H}{9} \Rightarrow h = \dfrac{5}{9}m$

β) (1/2) m_2 $\upsilon^2_{2(\tau\varepsilon\lambda)}$ = μ m_2 g S $\Rightarrow S = \dfrac{\upsilon^2_{2(\tau\varepsilon\lambda)}}{2\mu g} = \dfrac{4\upsilon_1^2}{18\mu g} = \dfrac{8gH}{18\mu g} = \dfrac{4H}{9\mu} = 11.1m$