

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

(παράδοση 2/4/2006)

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

1. Χαλύβδινη σφαίρα μάζας 1 kg είναι συνδεδεμένη στο ένα άκρο σύρματος μήκους 1 m που περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο γύρω από το άλλο άκρο του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 120 rad s^{-1} ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

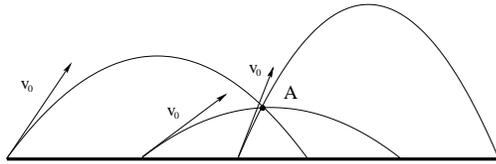
(α') Υπολογίστε την κινητική ενέργεια.

(β') Αν αντί της γωνιακής ταχύτητας είναι η ολική ενέργεια της σφαίρας που παραμένει σταθερή, ποια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της γωνιακής ταχύτητας μεταξύ του ψηλότερου και χαμηλότερου σημείου του κύκλου; Υποθέστε ότι η τιμή της γωνιακής ταχύτητας που δόθηκε παραπάνω ισχύει για το ψηλότερο σημείο του κύκλου.

2. Τρία πυροβόλα όπλα βάλουν βλήματα με αρχική ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0 κατά τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα βλήματα να περάσουν από το ίδιο σημείο A (όχι απαραίτητα την ίδια χρονική στιγμή).

(α') Προσδιορίστε την σχέση μεταξύ των μέτρων των ταχυτήτων v_A των βλημάτων στο A.

(β') Μπορείτε να προσδιορίσετε τη διεύθυνση της ταχύτητας των βλημάτων χρησιμοποιώντας μόνο την αρχή διατήρησης της ενέργειας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Σχήμα 1: Άσκηση 2

3. Θεωρήστε ένα σωματίο του οποίου η μηχανική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

με $v = dx/dt$ και

$$U(x) = \frac{L^2}{2mx^2} - \frac{k}{x}.$$

Θεωρήστε ότι $m = 1 \text{ kg}$ και $k = 1 \text{ J} \cdot \text{m}$. Θεωρήστε τις δύο περιπτώσεις $L_1 = 1 \text{ J} \cdot \text{s}$ και $L_2 = \sqrt{2} \text{ J} \cdot \text{s}$.

(α') Προσδιορίστε τις ελάχιστες τιμές $U_{\min,1}$, $U_{\min,2}$ της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σωματίου και στις δύο περιπτώσεις καθώς και τη θέση των ελαχίστων $x_{\min,1}$ και $x_{\min,2}$.

(β') Πόση ενέργεια χρειάζεται για τη μετάβαση από την κατάσταση ισορροπίας της μιας καμπύλης στην κατάσταση ισορροπίας της άλλης;

(γ') Σε ποιο διάστημα μπορεί το σωματίο να κινηθεί όταν έχει ενέργεια $U_{\min,2}$ και $L = L_1$; Φτιάξτε στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα δυναμικής ενέργειας του σωματίου δείχνοντας καθαρά τα αποτελέσματά σας.

(δ') Προσδιορίστε τη δύναμη (δηλ. μέτρο και φορά) που ασκείται στο σωματίο με $L = L_1$ όταν βρίσκεται στη θέση $x_{\min,2}$.

4. Σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων που περιγράφεται από τις παρακάτω συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας:

(α') $U(x) = ax^n$

(β') $U(x, y) = axy$

(γ') $U(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$

Σε κάθε περίπτωση εκφράστε το πεδίο δυνάμεων σε διανυσματική μορφή. Τα a, k είναι σταθερές¹.

5. Σωματίο κινείται στο επίπεδο κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων με δυναμική ενέργεια $U(x, y) = -kx$. Έστω (r, θ) δίνουν τη θέση του σωματιδίου, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα των x με φορά που ορίζεται από την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

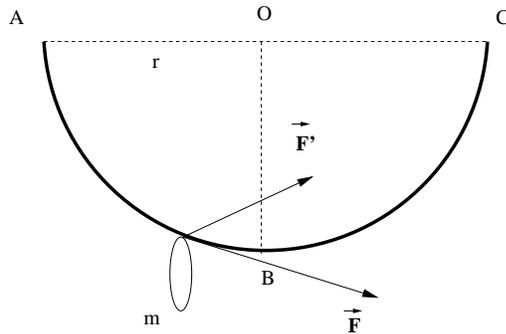
(α') Υπολογίστε τις συνιστώσες της δύναμης F_x και F_y που ασκείται στο σωματίο ($\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$).

(β') Υπολογίστε τις συνιστώσες της δύναμης F_r και F_θ , όπου F_r η προβολή της δύναμης στην ακτινική διεύθυνση και F_θ στην κάθετη προς αυτή διεύθυνση με θετική τη φορά που είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

(γ') Δείξτε ότι:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

6. Το δαχτυλίδι μάζας $m = 5.0 \text{ kg}$ ολισθαίνει πάνω σε λείο μεταλλικό τόξο ABC που αντιστοιχεί σε τόξο κύκλου ακτίνας 1.2 m . Στο δαχτυλίδι ασκούνται δύο δυνάμεις \vec{F} και \vec{F}' που έχουν μέτρα 40 N και 150 N αντίστοιχα. Η δύναμη \vec{F} παραμένει εφαπτόμενη στον κύκλο. Η \vec{F}' ασκείται σε σταθερή διεύθυνση και σχηματίζει γωνία 30° μοιρών με την οριζόντια διεύθυνση. Και οι δύο δυνάμεις βρίσκονται πάνω στο επίπεδο ABC . Υπολογίστε το ολικό έργο που παράγεται από το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα όταν μετατοπίζεται από το A στο B και από το A στο C .



Σχήμα 2: Άσκηση 6

7. Δίνεται η δύναμη $\vec{F} = k \hat{j} \times \vec{v}$ που ασκείται πάνω σε σωματίο μάζας m , όπου \hat{j} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση στη θετική διεύθυνση του άξονα των y και $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

(α') Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου παραμένει σταθερή.

(β') Ποιο είναι το έργο που παράγει η δύναμη;

(γ') Ποια η επίδραση της δύναμης πάνω στο διάνυσμα της ταχύτητας;

¹Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\vec{F} = -\nabla U$ της σελ. 153 του βιβλίου σας. Ο τελεστής της μερικής παραγώγου $\partial/\partial x$ όταν δράσει πάνω σε μία συνάρτηση $f(x, y, z, \dots)$ επιστρέφει την παράγωγο της συνάρτησης ως προς x θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές. Όμοια για τους τελεστές $\partial/\partial y$ και $\partial/\partial z$ παίρνουμε την παράγωγο ως προς y και z αντίστοιχα.

8. Σωματίδιο μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα \vec{v} και συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο μάζας m_2 που είναι ακίνητο ως προς το σύστημα του εργαστηρίου L . Παρατηρητής κινείται με ταχύτητα

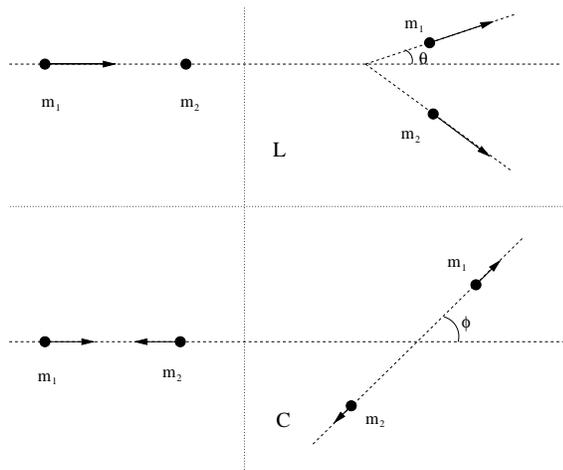
$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2},$$

ως προς το εργαστήριο και παρατηρεί στο σύστημά του C την ίδια κρούση.

- (α') Δείξτε ότι στο σύστημα C τα δύο σωματίδια πριν και μετά την κρούση κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις.
 (β') Δείξτε ότι οι γωνίες θ και ϕ που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του m_1 μετά την κρούση σε σχέση με τη αρχική διεύθυνση της κίνησής του στα συστήματα L και C αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan \theta = \frac{\sin \phi}{\cos \phi + \frac{m_1}{m_2}}.$$

- (γ') Βρίσκεται πειραματικά ότι η μέγιστη εκτροπή σωματιδίων άλφα από το υδρογόνο (πρακτικά δηλ. από το πρωτόνιο του πυρήνα του) στο σύστημα αναφοράς που το υδρογόνο είναι ακίνητο είναι περίπου 15° . Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα εκτιμήστε το λόγο των μαζών του σωματιδίου άλφα ως προς το υδρογόνο.

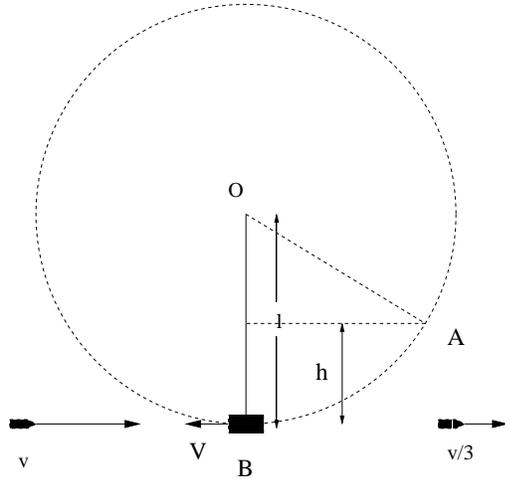


Σχήμα 3: Άσκηση 8

9. Σφαίρα μάζας m και ταχύτητας $\vec{v} = v \hat{i}$ περνάει μέσα από το βαρίδι εκκρεμούς μάζας M όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο B, και βγαίνει από αυτό με ταχύτητα $\vec{v}' = (v/3) \hat{i}$. Το βαρίδι του εκκρεμούς βρίσκεται στην άκρη αβαρούς νήματος μήκους l και αρχικά ήταν ακίνητο στη θέση A σε ύψος h ως προς το B. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της v ώστε το βαρίδι του εκκρεμούς να διαγράψει ολόκληρο κύκλο;
 10. Έχει βρεθεί πειραματικά ότι κατά τη μετωπική κρούση² δύο στερεών σφαιρών η σχετική ταχύτητα της σφαίρας 2 ως προς τη σφαίρα 1 μετά την κρούση $v'_{12} = v_2 - v_1$ σχετίζεται με την αντίστοιχη σχετική ταχύτητα πριν την κρούση $v_{12} = v_2 - v_1$ με τη σχέση:

$$v'_{12} = -e v_{12}.$$

²Θα θεωρήσετε δηλ. ότι οι σφαίρες κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση. Οι ποσότητες $v_1, v_2, v_{12} \dots$ είναι αλγεβρικές, δηλ. αναφέρονται στις συνιστώσες των αντίστοιχων διανυσμάτων πάνω στον άξονα που ορίζεται από τη διεύθυνση κίνησης και παίρνουν θετικές ή αρνητικές τιμές ανάλογα με τη φορά των αντίστοιχων διανυσμάτων.



Σχήμα 4: Άσκηση 9

Η τιμή του συντελεστή αποκατάστασης, e , είναι μεταξύ 0 και 1. Αυτό το αποτέλεσμα ανακαλύφθηκε από τον Νεύτωνα και ισχύει μόνο προσεγγιστικά. Επιπλέον η ορμή διατηρείται κατά την κρούση. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(α) Οι ταχύτητες μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1' = \frac{\mu v_2(1+e)}{m_1} + \frac{\mu v_1(1 - e \frac{m_2}{m_1})}{m_2}$$

$$v_2' = \frac{\mu v_1(1+e)}{m_2} + \frac{\mu v_2(1 - e \frac{m_1}{m_2})}{m_1}$$

όπου³

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

(β) Έστω παρατηρητής C που παρατηρεί την κρούση κινούμενος με ταχύτητα $V = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$. Η ποσότητα $Q = E_k^{(C)'} - E_k^{(C)}$ στο σύστημα του C μετράει την απώλεια ενέργειας του συστήματος και είναι

$$Q = -\frac{1}{2}(1 - e^2)\mu v_{12}^2.$$

Υπόδειξη: $E_k^{(C)} = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$ όπου $u_1 = v_1 - V$ και $u_2 = v_2 - V$. Αντίστοιχα $E_k^{(C)'} = \frac{1}{2}m_1 (u_1')^2 + \frac{1}{2}m_2 (u_2')^2$.

Παρατήρηση: (Χωρίς απόδειξη) Η ποσότητα Q θα ήταν η ίδια αν την ορίζαμε στο σύστημα του εργαστηρίου.

(γ) Ποια είναι η τιμή του e όταν η κρούση είναι ελαστική και ποια όταν είναι πλαστική (τα δύο σωμάτια κινούνται μαζί);

³μ ονομάζεται η ανηγμένη μάζα του συστήματος των δύο σωμάτων.