



ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σεπτέμβριος 2025 - Κ. Αναγνωστόπουλος

1 Ο Χώρος Misner

$$\partial_t \cdot \partial_t = g_{00} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \begin{cases} \text{spacelike} & t > 0 \\ \text{timelike} & t < 0 \end{cases}$$

$$\partial_x \cdot \partial_x = g_{11} = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \begin{cases} \text{timelike} & t > 0 \\ \text{spacelike} & t < 0 \end{cases}$$

$$\partial_t \cdot \partial_x = g_{01} \neq 0 \quad \text{όχι ορθογώνια}$$

Η καμπύλη $\in (t_0)$ είναι S^1 (κύκλος)

Το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$v^\mu = \left(\frac{dt}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right) = (0, 1) = \partial_x$$

είναι timelike ($t_0 > 0$). Έχουμε κλειστή

timelike καμπύλη

$$ds^2 = \frac{t(\lambda)}{\sqrt{1+t(\lambda)^2}} dt^2 - 2 \frac{dx dt}{\sqrt{1+t(\lambda)^2}} - \frac{t(\lambda) dx^2}{\sqrt{1+t(\lambda)^2}}$$

$$= \frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}} \cdot 0 - 2 \frac{d\lambda \cdot 0}{\sqrt{1+t_0^2}} - \frac{t_0 d\lambda^2}{\sqrt{1+t_0^2}}$$

$$= \frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}} d\lambda^2$$

$$|ds| = \frac{t_0^{1/2}}{(1+t_0^2)^{1/4}} d\lambda$$

$$S = \int_0^1 |ds| = \frac{t_0^{1/2}}{(1+t_0^2)^{1/4}}$$

H gegeven is een wolk, om te zo $s(t_0)$

wolk te zo t_0 , kan $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} s(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{t_0^{1/2}}{t_0^{1/2} (1 + \frac{1}{t_0^2})^{1/4}} = 1$

$$e_0 \cdot e_1 = (-t + \sqrt{1+t^2}) (-t - \sqrt{1+t^2}) \partial_t \cdot \partial_t$$

$$+ (-t + \sqrt{1+t^2}) \partial_t \cdot \partial_x$$

$$+ (-t - \sqrt{1+t^2}) \partial_x \cdot \partial_t$$

$$+ \partial_x \cdot \partial_x$$

$$= -[(1+t^2) - t^2] g_{00} - 2t g_{01} + g_{11}$$

$$= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0$$

Αρα e_0, e_1 ορθογώνια

$$\begin{aligned} e_0 \cdot e_0 &= (-t + \sqrt{1+t^2})^2 \partial_t \cdot \partial_t + 2(-t + \sqrt{1+t^2}) \partial_t \partial_x + \partial_x \partial_x \\ &= (-t + \sqrt{1+t^2})^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - 2(-t + \sqrt{1+t^2}) \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left\{ 2t(t^2+1) - 2(-t + \sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2} \right\}$$

$$= 2(t^2+1) \left\{ -1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right\} \neq \pm 1$$

όμοια

$$e_1 \cdot e_1 = 2(t^2+1) \left\{ 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right\} \neq \pm 1$$

Άρα η βάση $\{e_0, e_1\}$ είναι ορθογώνια αλλά
 όχι ορθοκανονική

(άλλαξη: να την κανείς ορθοκανονική)

$$\Gamma_{1\alpha} \dot{x}^\alpha > 0 \quad e_0 \cdot e_0 < 0 \Rightarrow e_0 \text{ timelike}$$

$$e_1 \cdot e_1 > 0 \Rightarrow e_1 \text{ spacelike}$$

Geodesic axis:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$$

$\mu=0$ $\ddot{t} + \Gamma^0_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho =$

$$\ddot{t} + \Gamma^0_{00} \dot{t}^2 + 2\Gamma^0_{01} \dot{t} \dot{x} + \Gamma^0_{11} \dot{x}^2 =$$

$$\ddot{t} + \frac{1}{2(1+t^2)^2} \left\{ -\dot{t}^3 + 2\dot{t}\dot{x} + \dot{x}^2 \right\} = 0$$

$\mu=1$ $\ddot{x} + \Gamma^1_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho =$

$$\ddot{x} + \Gamma^1_{00} \dot{t}^2 + 2\Gamma^1_{01} \dot{t} \dot{x} + \Gamma^1_{11} \dot{x}^2 =$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{2(1+t^2)^2} \left\{ -(1+2t^2)\dot{t}^2 + 2\dot{t}\dot{x} - \dot{x}^2 \right\} = 0$$

Ta $g_{\mu\nu}$ σε εξάρτηση από το x ,
 ο ∂_t είναι KVF, $\zeta^\mu = (0, 1)$

Η διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$\begin{aligned} -P &= \dot{x}^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu u^\nu \\ &= g_{00} \dot{x}^0 u^0 + g_{01} \dot{x}^0 u^1 + g_{10} \dot{x}^1 u^0 + g_{11} \dot{x}^1 u^1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot 1 \cdot \ddot{t} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot 1 \cdot \dot{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} (\ddot{t} + t \dot{x})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$= g^{00} R_{00} + 2g^{01} R_{01} + g^{11} R_{11}$$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{3t^2}{2(1+t^2)^3} + \frac{2-3t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{3t}{2(1+t^2)^3} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{3t^2}{2(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{3t}{(1+t^2)^{5/2}}$$

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{3t^2}{2(1+t^2)^3} - \frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{3t}{(1+t^2)^{5/2}} = 0$$

$$R_{10} - \frac{1}{2} g_{10} R = \frac{-3t^2}{2(1+t^2)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{3t}{(1+t^2)^{5/2}} = 0$$

$$R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = \frac{-3t^2}{2(1+t^2)^3} + \frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{3t}{(1+t^2)^{5/2}} = 0$$

1.2 Αιτιακή Δομή

Null lines: $ds^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} (t dt^2 - 2 dt dx - t dx^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{2}{t} \left(\frac{dx}{dt}\right) - 1 = 0$$

$$\underline{t < 0} \quad u_0 = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(-1+\sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$= \left(1, -\frac{t}{|t|\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} - \frac{t}{|t|\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}(-1+|t|\sqrt{1+\frac{1}{t^2}})} \right)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow -\infty} = \left(1, +\frac{1}{\sqrt{1+0}} + \frac{1}{\sqrt{1+0}|t|\sqrt{1+0}} \right) = (1, 1+0)$$

$$= (1, 1)$$

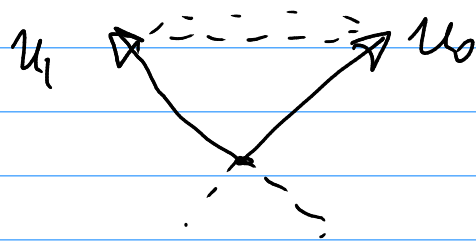
$$u_1 = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2} (1 + \sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$= \left(1, \frac{t}{|t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} - \frac{t}{|t| \sqrt{1+t^2} (1 + |t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}})} \right)$$

$$t \rightarrow -\infty = \left(1, \frac{-1}{\sqrt{1+0}} + \frac{1}{\sqrt{1+0} |t| \sqrt{1+0}} \right)$$

$$= (1, -1)$$

'Αρα



δίναν τον επηρεασμό κενό γινός

$$\underline{t > 0} \quad u_0 = \left(-1, + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t}{(-1 + \sqrt{1+t^2}) \sqrt{1+t^2}} \right)$$

$$= \left(-1, \frac{t}{|t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{t}{|t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} (-1 + |t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}})} \right)$$

$$t \rightarrow +\infty = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{1+0}} + \frac{1}{\sqrt{1+0} |t| \sqrt{1+0}} \right)$$

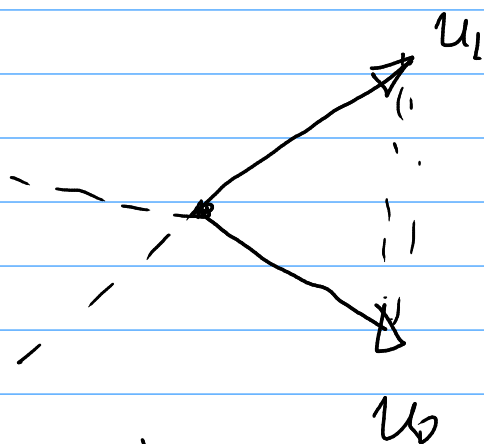
$$= (-1, 1+0) = (-1, 1)$$

$$u_1 = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2} (1 + \sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$= \left(1, \frac{t}{|t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} - \frac{t}{|t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} (1 + |t| \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}})} \right)$$

$$t \rightarrow +\infty = \left(1, + \frac{1}{\sqrt{1+0}} - \frac{1}{\sqrt{1+0} |t| \sqrt{1+0}} \right)$$

$$= (1, 1+0) = (1, 1)$$



Οι προτάσεις αυτές γινόνται εχρηστικά

και $\frac{n}{2}$

$$\Gamma_{1a} \quad |t| \ll 1$$

$$\underline{t < 0} \quad u_0 = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(-1+\sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$\approx \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(-1+\sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$t \rightarrow 0^- = \left(1, \frac{0}{1} - \frac{2}{1 \cdot t} \right) = \left(1, -\frac{2}{t} \right)$$

$$= \left(1, \frac{2}{|t|} \right)$$

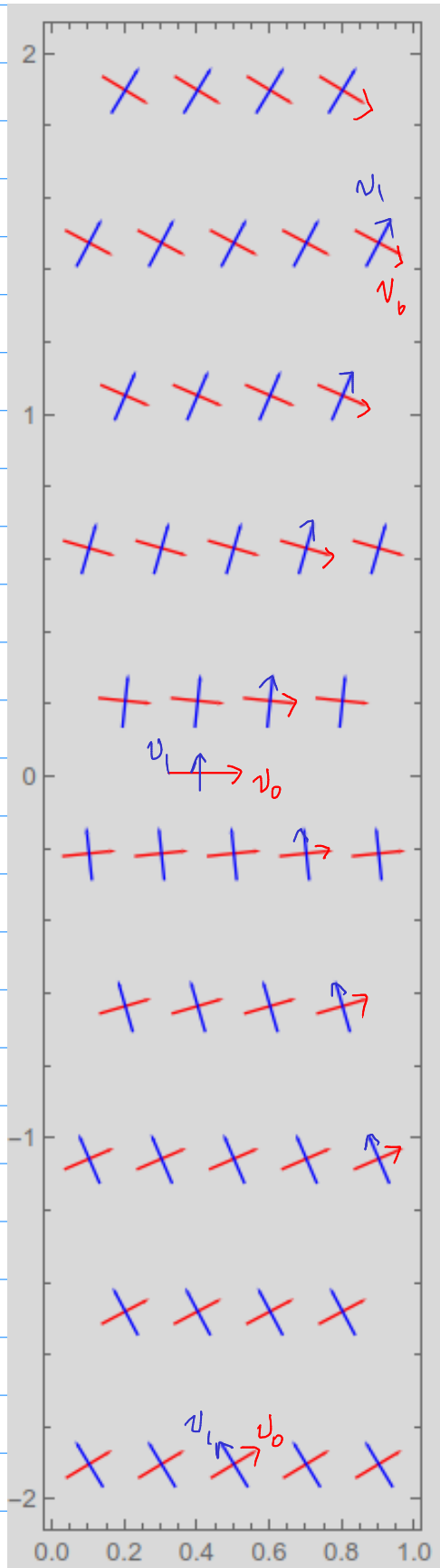
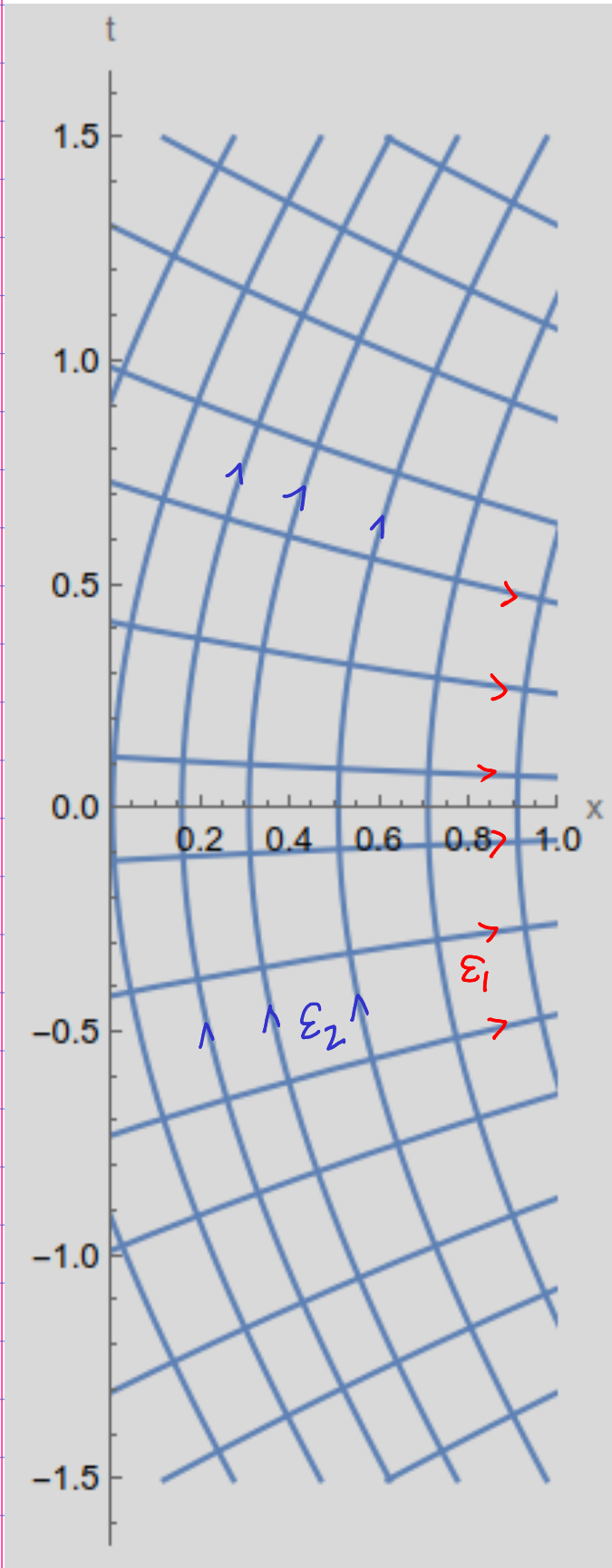
$$u_1 = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$t \rightarrow 0 = \left(1, \frac{0}{1} - \frac{0}{1(1+1)} \right) = (1, 0)$$

$$\underline{t > 0} \quad u_0 = \left(-1, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(-1+\sqrt{1+t^2})} \right)$$

$$t \rightarrow 0^+ = \left(-1, \frac{0}{1} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(-1+1+\frac{1}{2}t^2)} \right)$$

$$= \left(-1, \frac{2}{t}\right) = \left(-1, \frac{2}{|t|}\right)$$



Τα u_0, u_1 δεν έχουν τη σωστή κλίμακα μήκας (άγκυρα, για ϵ στο ϵ στο ϵ)

2 Μετασχηματισμοί Lorentz

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & \cosh\phi & s\phi & 0 \\ 0 & -s\phi & \cosh\phi & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$t' = \cosh\theta t - \sinh\theta z$$

$$x' = \cosh\phi x + s\phi y$$

$$y' = -s\phi x + \cosh\phi y$$

$$z' = -\sinh\theta t + \cosh\theta z$$

Boost in z-direction
+
Rotation in x-y plane

$$\begin{aligned} -t'^2 + z'^2 &= -(\cosh\theta t - \sinh\theta z)^2 + (-\sinh\theta t + \cosh\theta z)^2 \\ &= -\cosh^2\theta t^2 - \sinh^2\theta z^2 + 2\cosh\theta\sinh\theta tz \\ &\quad + \sinh^2\theta t^2 + \cosh^2\theta z^2 - 2\cosh\theta\sinh\theta tz \\ &= -t^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (\cosh\phi x + s\phi y)^2 + (-s\phi x + \cosh\phi y)^2 \\ &= \cosh^2\phi x^2 + s\phi^2 y^2 + 2\cosh\phi s\phi xy \\ &\quad + s\phi^2 x^2 + \cosh^2\phi y^2 - 2s\phi\cosh\phi xy \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\text{So } -t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

3 Ο Τανυστής του Riemann

Τα 4 πρώτα ερωτήματα είναι κυτόνια
από τις συντεταγμένες της G^μ διατεταγμένα
στην ισομετρία

$$g^{\rho\mu} C_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{2} g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} R_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu} R_{\mu\sigma} - g_{\sigma\mu} R_{\nu\rho} + g_{\sigma\nu} R_{\mu\rho})$$

$$+\frac{1}{6} g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma}) R$$

$$= R_{\sigma\nu}$$

$$-\frac{1}{2} (\delta^\mu_\mu R_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\nu R_{\mu\sigma} - \delta^\rho_\sigma R_{\nu\rho} + g_{\sigma\nu} R^\mu_\mu)$$

$$+\frac{1}{6} (\delta^\mu_\mu g_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\nu g_{\mu\sigma}) R$$

$$= R_{\sigma\nu}$$

$$-\frac{1}{2} (4 R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} + g_{\sigma\nu} R)$$

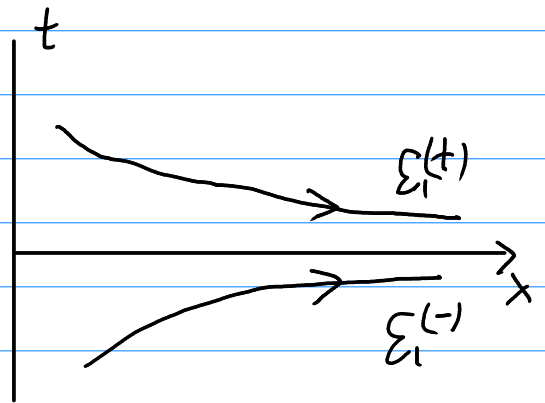
$$+ \frac{1}{6} (4 g_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}) R$$

$$= R_{\sigma\nu} - R_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\sigma\nu} R + \frac{1}{2} g_{\sigma\nu} R = 0$$

Σημείωση για την (1.3) για το U_0

Οι σχέσεις (9) (10)
ορίζουν τις Σ_1, Σ_2 ως
παρακείμενα στο t .

Συνήθως παίρνουμε
 $t_1 < t < t_2$



Αλλά τότε βλέπουμε ότι η κατεύθυνση κίνησης
στην $\Sigma_1^{(+)}$ για αυξανόμενο t είναι προς τα
αριστερά. Για να είναι οι κυματικές φωνές ωκελίες,
πρέπει να αλλάζουμε την φορά κατεύθυνσης

και για τον ίδιο λόγο

$$U_0 = - \left(1, \frac{dx}{dt} \right)$$

