



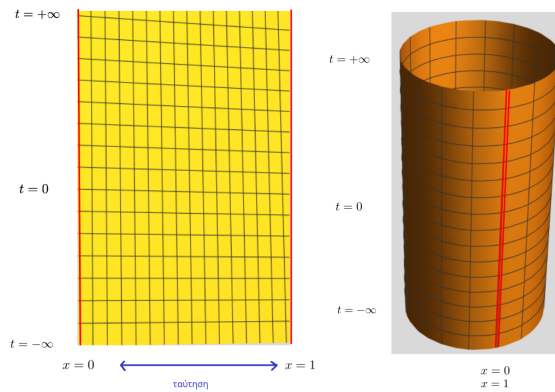
## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σεπτέμβριος 2025 – Κ. Αναγνωστόπουλος

### ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε κάθε θέμα σε ξεχωριστές κόλλες.

### 1 Ο Χώρος Misner



Θεωρήστε τον κύλινδρο  $\mathbb{R} \times S^1$ , και πάνω σε αυτόν ορισμένη τη μετρική

$$ds^2 = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt^2 - 2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt dx - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dx^2, \quad (1)$$

στο σύστημα συντεταγμένων  $-\infty < t < +\infty$ ,  $0 \leq x < 1$ . Μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα γεγονότα  $(t, x)$  και  $(t, x+1)$  ταυτίζονται, όταν  $-\infty < x < +\infty$ , το οποίο αντανακλά την τοπολογία του κυλίνδρου.

Δίνονται οι παρακάτω σχέσεις, που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ( $\mu, \nu = 0, 1$ ,  $t \equiv x^0$ ,  $x \equiv x^1$ ):

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= -\frac{t}{2(1+t^2)^2} & \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2(1+t^2)^2} & \Gamma_{11}^0 &= \frac{t}{2(1+t^2)^2} \\ \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1+2t^2}{2(1+t^2)^2} & \Gamma_{10}^1 &= \frac{t}{2(1+t^2)^2} & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2(1+t^2)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$R_{0101} = -\frac{3t}{2(1+t^2)^{5/2}} \quad (4)$$

$$R_{00} = \frac{3t^2}{2(1+t^2)^3} \quad R_{10} = -\frac{3t}{2(1+t^2)^3} \quad R_{11} = -\frac{3t^2}{2(1+t^2)^3} \quad (5)$$

#### 1.1 Γενικές Γεωμετρικές Ιδιότητες (30 βαθμοί)

Να εξετάσετε το είδος των διανυσμάτων βάσης  $\{\partial_t, \partial_x\}$  (χρονοειδή, φωτοειδή, χωροειδή). Είναι η βάση ορθογώνια;

Θεωρήστε την καμπύλη

$$\epsilon(t_0) : t(\lambda) = t_0 \quad x(\lambda) = \lambda \quad 0 \leq \lambda < 1. \quad (6)$$

για σταθερό  $t_0 > 0$ .

Ποια είναι η τοπολογία της καμπύλης; Ποιο το είδος της καμπύλης (χρονοειδής, φωτοειδής, χωροειδής); Ποιο είναι το χωροχρονικό της μήκος  $s(t_0) = \int_{\epsilon(t_0)} |ds|$ ; Εξετάστε αν το μήκος  $s(t_0)$  αυξάνει ή φθίνει με το  $t_0$  και σε ποιο όριο τείνει, όταν  $t_0 \rightarrow +\infty$ . Θα δεχόσασταν μια τέτοια καμπύλη να περιγράφει την κίνηση σωματιδίου σε ελεύθερη πτώση; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Θεωρήστε τη βάση  $(e_0, e_1)$  που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} e_0 &= (-t + \sqrt{1+t^2}) \partial_t + \partial_x \\ e_1 &= (-t - \sqrt{1+t^2}) \partial_t + \partial_x \end{aligned} \quad (7)$$

Να δείξετε πως η βάση είναι ορθογώνια, αλλά όχι ορθοκανονική. Να εξετάσετε το είδος των διανυσμάτων  $(e_0, e_1)$  για  $t > 0$ .

Να γράψετε τις διαφορικές εξισώσεις των γεωδαισιακών για τις συναρτήσεις  $(t(\tau), x(\tau))$  για σωματίδιο μη μηδενικής μάζας, όπου  $\tau$  είναι ο ιδιόχρονος.

Να βρείτε ένα Killing διανυσματικό πεδίο της μετρικής, και να υπολογίσετε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα πάνω σε μία γεωδαισιακή.

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις του Einstein στο κενό.

## 1.2 Αιτιακή Δομή (20 βαθμοί)

Να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση που δίνει τις φωτοειδείς καμπύλες είναι η:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{2}{t} \frac{dx}{dt} - 1 = 0. \quad (8)$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης μας δίνουν δύο οικογένειες φωτοειδών καμπύλων (μπορείτε να τις χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη):

$$\epsilon_1(c): \quad x(t) = -\sqrt{1+t^2} - \ln(-1 + \sqrt{1+t^2}) + c \quad (9)$$

$$\epsilon_2(c): \quad x(t) = +\sqrt{1+t^2} - \ln(+1 + \sqrt{1+t^2}) + c \quad (10)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, θα πρέπει να επιλεγεί το πεδίο ορισμού του  $t$  να δίνει  $x \in [0, 1)$ , ή το αποτέλεσμα να υπολογιστεί modulo 1.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη και τις σχέσεις:

$$\epsilon_1(c): \quad \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(-1 + \sqrt{1+t^2})} \quad (11)$$

$$\epsilon_2(c): \quad \frac{dx(t)}{dt} = +\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}(+1 + \sqrt{1+t^2})} \quad (12)$$

Επίσης, και η κλειστή καμπύλη  $(t(\lambda), x(\lambda)) = (0, \lambda)$  είναι φωτοειδής καμπύλη, αλλά θα την αγνοήσουμε στα παρακάτω<sup>1</sup>.

Τα εφραπτόμενα διανυσματικά πεδία των παραπάνω καμπύλων που ορίζουν συνεχή αιτιακή δομή<sup>2</sup> (συνεχείς κώνους φωτός) είναι:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(c): u_0 &= \begin{cases} -\left(1, \frac{dx}{dt}\right) & t > 0 \\ \left(1, \frac{dx}{dt}\right) & t < 0 \end{cases} \\ \epsilon_2(c): u_1 &= \left(1, \frac{dx}{dt}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u_\mu$  και να σχεδιάσετε σε ένα διάγραμμα τους αντίστοιχους κώνους φωτός για  $|t| \gg 1$ .

Να δείξετε ότι  $\lim_{t \rightarrow 0} u_1 = (1, 0)$ , και ότι για  $|t| \ll 1$ ,  $u_0 \approx (\pm 1, 2/|t|)$ , το οποίο είναι σχεδόν παράλληλο με το διάνυσμα  $(0, 1)$ .

Να σχεδιάσετε ενδιαμέσους κώνους φωτός για  $t \approx \pm 1$  και  $t = 0$ , χρησιμοποιώντας ποιοτικά επιχειρήματα (φυσικά, αν προτιμάτε, χρησιμοποιήστε τις σχέσεις (11-13), το οποίο σας ενθαρρύνω να κάνετε μετά στο σπίτι!).

<sup>1</sup>Άσκηση για το σπίτι (όχι τώρα, δεν παίρνει βαθμούς!): Δείξτε ότι οι  $\epsilon_1$  πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στην κλειστή καμπύλη  $t = 0$ . Δοκιμάστε επίσης να πάρετε το όριο της (8) όταν  $t \rightarrow 0$ .

<sup>2</sup>Να το μελετήσετε σπίτι σας γιατί...(πάλι, όχι τώρα, δεν παίρνει βαθμούς!).

## 2 Μετασχηματισμοί Lorentz (20 βαθμοί)

Δίνεται ο μετασχηματισμός που αναπαρίσταται από τον πίνακα:

$$\Lambda(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

με  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός  $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$  διατηρεί το  $x^{\mu'} x_{\mu'} = x^{\mu} x_{\mu}$  όταν  $(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1 1 1 1)$ .

## 3 Ο Τανυστής του Riemann (30 βαθμοί)

Έστω χωρόχρονος με μετρική  $g_{\mu\nu}$  και συνοχή με συναλλοίωτη παράγωγο  $\nabla_{\mu}$  χωρίς στρέψη, τέτοια ώστε  $\nabla_{\mu} V^{\rho} = \partial_{\mu} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} V^{\nu}$ .

Ο τανυστής του Riemann ορίζεται από τη σχέση

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} V^{\lambda}. \quad (15)$$

Να δείξετε ότι

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \quad (16)$$

Να δείξετε ότι

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \omega_{\rho} = -R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} \omega_{\lambda}. \quad (17)$$

Να δείξετε ότι  $R^{\rho}_{[\sigma\mu\nu]} = 0$ .

Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα του Bianchi  $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$  για να δείξετε ότι

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R \neq 0. \quad (18)$$

Δίνεται ο τανυστής του Weyl:

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - (g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho}) + \frac{1}{3} g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} R. \quad (19)$$

Να δείξετε ότι  $C_{\sigma\nu} = g^{\rho\mu} C_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$ .

Υπενθυμίζεται ότι το αντισυμμετρικό κομμάτι ενός τανυστή που ζητείται παραπάνω, δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2!} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}), \\ A_{[\mu\nu\rho]} &= \frac{1}{3!} (A_{\mu\nu\rho} + A_{\rho\mu\nu} + A_{\nu\rho\mu} - A_{\mu\rho\nu} - A_{\nu\mu\rho} - A_{\rho\nu\mu}). \end{aligned} \quad (20)$$