ΒΙΒΛΙΟΝ VI.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

1. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμα εἶναι ὅσα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἀνὰ μίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους.

[2. Ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογα σχήματα εἶναι, ὅταν εἰς ἕκαστον τῶν σχημάτων ὑπάρχωσιν ἡγούμενοι καὶ ἑπόμενοι λόγοι].

3. Εὐθεῖα λέγεται, ὅτι ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὅταν εἶναι ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα, οὕτως τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ μικρότερον.

4. Ὕψος εἶναι παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος.

[5. Λόγος λέγεται, ὅτι σύγκειται ἐκ λόγων, ὅταν αἱ πηλικότητες (τὰ μέτρα) τῶν λόγων πολλαπλασιασθεῖσαι ἐφ' ἑαυτὰς σχηματίζωσι λόγον τινά].

1.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ὡς εἶναι ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΔ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς μέχρι τῶν σημείων Θ,Λ, καὶ ἂς ληφθῶσι πρὸς μὲν τὴν βάσιν ΒΓ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΒΗ, ΗΘ, πρὸς δὲ τὴν βάσιν ΓΔ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ ἴσα μεταξύ των (Ι. 38). Ὁσαπλασία ἄρα εἶναι ἡ βάσις ΘΓ τῆς βάσεως ΒΓ, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁσαπλασία εἶναι ἡ βάσις ΛΓ τῆς βάσεως ΓΔ, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΛΓ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ· καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΘΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΛ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΛ (I. 38), καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΘΓ ὑπερέχῃ τῆς βάσεως ΓΛ, ὑπερέχει καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ τοῦ τριγώνου ΛΓΛ, καὶ ἐὰν εἶναι μικροτέρα, εἶναι μικρότερον. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, ἤτοι δύο μὲν βάσεις αἱ ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ βάσις ΘΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ, τῆς δὲ βάσεως ΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἄλλα, τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια καὶ ἡ βάσις ΛΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΛΓ· καὶ ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ βάσις ΘΓ ὑπερέχῃ τῆς βάσεως ΓΛ, ὑπερέχει καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ τοῦ τριγώνου ΑΛΓ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴση, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικροτέρα, εἶναι μικρότερον· ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (V. ὁρισ. 5).

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΓ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ εἶναι διπλάσιον, τοῦ δὲ τριγώνου ΑΓΔ εἶναι διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΖΓ (I. 34), τὰ δὲ μέρη τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον (V. 15), εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΓ (V. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὡς μὲν εἶναι ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΓ (V. 11).

Ἄρα τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν εἰς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, θὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα· καὶ ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τμηθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα τῶν τομῶν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Διότι ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΔΕ, ΒΓ (I. 38)· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἄλλο τι. Τὰ δὲ ἴσα ἔχουσι πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν λόγον (V. 7)· ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως εἶναι ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· διότι ὄντα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, δηλ. τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένην κάθετον, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις (θεώρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὡς εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως εἶναι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ (V. 11).

Ἀλλ' ἂς τμηθῶσι τώρα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ (θεώρ. 1), καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ (V. 11). Ἄρα ἕκαστον τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΓΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ΑΔΕ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ (V. 9)· καὶ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (I. 39). Ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα εἰς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, θὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα· καὶ ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τμηθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα τῶν τομῶν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν τριγώνου διχοτομηθῇ ἡ γωνία, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τμήματα τῆς βάσεως θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου· καὶ ἐὰν τὰ τμήματα τῆς βάσεως ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΒΑΓ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ ἡ ΓΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἀφοῦ προεκταθῇ ἡ ΒΑ, ἂς συναντήσῃ αὐτὴν κατὰ τὸ Ε (I. αἴτ. 5).

Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΔ, ΕΓ, ἄρα ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΔ (I. 29). Ἀλλὰ ἡ ΓΑΔ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΔ, ΕΓ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς τὴν ΑΕΓ (I. 29). Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τρίγωνον τὸ ΒΓΕ ἤχθη ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ, ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλ' ἔστω τώρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως εἶναι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· διότι εἰς τρίγωνον τὸ ΒΓΕ ἤχθη ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ (θεώρ. 2)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ (V. 11). Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ (V. 9)· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ (I. 5). Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐκτὸς τὴν ΒΑΔ (I. 29), ἡ δὲ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐναλλὰξ τὴν ΓΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΔ. Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ.

Ἐὰν ἄρα διχοτομηθῇ ἡ γωνία τριγώνου, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τμήματα τῆς βάσεως θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου· καὶ ἐὰν τὰ τμήματα τῆς βάσεως ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ πλευραὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ὁμόλογοι.

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΓΕ, τὴν δὲ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΓΔΕ καὶ ἀκόμη τὴν ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΓΕ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ὁμόλογοι.

Διότι ἂς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΓΒ εἶναι μικρότεραι δύο ὀρθῶν (I. 17), εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΔΕΓ, ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΔΕΓ εἶναι μικρότεραι δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ ΒΑ, ΕΔ προεκβαλλόμεναι θὰ συμπέσωσιν (I. αἴτ. 5). Ἂς προεκβληθῶσι καὶ ἂς συμπέσωσι κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (I. 28). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΓ, ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΕ (I. 28). Ἄρα τὸ ΖΑΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΔ (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τρίγωνον τὸ ΖΒΕ ἤχθη πρὸς τὴν πλευρὰν ΖΕ παράλληλος ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως εἶναι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΖ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΑΓ· ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ (V. 16). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὡς μὲν εἶναι ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ (V. 22).

Ἄρα τῶν ἰσογωνίων τριγώνων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ὁμόλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἀκόμη ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ὅτι θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί, τὴν μὲν ΑΒΓ πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ πρὸς τὴν ΕΖΔ καὶ ἀκόμη τὴν ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἐκ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων τῶν Ε,Ζ πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴση ἡ ΖΕΗ, πρὸς δὲ τὴν ΑΓΒ ἴση ἡ ΕΖΗ (Ι. 23)· ἄρα ἡ ἄλλη γωνία ἡ παρὰ τὸ Α θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην τὴν παρὰ τὸ Η (Ι. 32).

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΗΖ. Ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΕΗΖ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὁμόλογοι (θεώρ. 4)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἐλήφθη ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ (V. 11). Ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα ἴση ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΗΕ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΕ, ΕΖ· καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΗ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ (Ι, 8) καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΕΖ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, ἐκεῖναι, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραὶ (Ι. 4). Εἶναι ἄρα ἴση καὶ ἡ μὲν γωνία ΔΖΕ πρὸς τὴν ΗΖΕ, ἡ δὲ ΕΔΖ πρὸς τὴν ΕΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΖΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ, ἀλλὰ ἡ ΗΕΖ πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ, καὶ ἀκόμη ἡ παρὰ τὸ Α ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Δ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΕΔΖ, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ θὰ ἔχῃ τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΑΓΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΖ καὶ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς τῶν Δ, Ζ πρὸς ἑκάστην μὲν τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ΖΔΗ, πρὸς δὲ τὴν ΑΓΒ ἴση ἡ ΔΖΗ (I. 23)· ἡ λοιπὴ ἄρα παρὰ τὸ Β γωνία θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Η (I. 32).

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΗΖ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ (θεώρ. 4). Ἐλήφθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ (V. 11). Ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ (V. 9)· καὶ ἡ ΔΖ εἶναι κοινή· ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΔ, ΔΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΖ· καὶ ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΖ· ἄρα ἡ βάσις ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΖ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΔΖ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (I, 4). Ἄρα ἡ μὲν ΔΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ ΔΗΖ πρὸς τὴν ΔΕΖ. Ἀλλ' ἡ ΔΖΗ εἶναι ἴση ππὸς τὴν ΑΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ. Ἐλήφθη δὲ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ε (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωοον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἄλλας γωνίας ἀναλόγους, ἐκ τῶν λοιπῶν δὲ γωνιῶν ἑκάστην ἢ μικροτέραν ἢ μὴ μικροτέραν ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἄλλας γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἀναλόγους, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐκ τῶν ὑπολοίπων δὲ γωνιῶν τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Γ, Ζ, πρότερον, ἑκάστην μικροτέραν ὀρθῆς· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία, δηλ. ἡ παρὰ τὸ Γ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ζ.

Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕΖ, μία ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΒΓ. Καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον αὐτῆς τὸ Β ἡ γωνία ΑΒΗ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ ΑΒΗ πρὸς τὴν ΔΕΖ, ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΑΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΔΖΕ (I. 32). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ (θεώρ. 4). Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἐλήφθη ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΓ, ΒΗ (V. 11)· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ (V. 9). Ὥστε καὶ ἡ παρὰ τὸ Γ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΓ (I. 5). Ἐλήφθη δὲ μικροτέρα ὀρθῆς ἡ παρὰ τὸ Γ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· ὥστε ἡ ἐφεξῆς πρὸς αὐτὴν γωνία ἡ ΑΗΒ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς (I. 13). Καὶ ἐδείχθη ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Ζ· καὶ ἡ παρὰ τὸ Ζ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. Ἐλήφθη δὲ μικροτέρα ὀρθῆς· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ παρὰ τὸ Α ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Δ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ζ (I. 32). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἀλλὰ πάλιν ἂς ληφθῇ ἑκάστη τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Γ, Ζ μὴ μικροτέρα ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ τώρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ· ὥστε καὶ ἡ παρὰ τὸ Γ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΓ (I. 5). Δὲν εἶναι δὲ μικροτέρα ὀρθῆς ἡ παρὰ τὸ Γ· ἄρα οὐδὲ ἡ ΒΗΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς. Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δὲν εἶναι μικρότεραι δύο ὀρθῶν· ὅπερ ἀδύνατον (I. 17). Πάλιν ἄρα ἡ ΑΒΓ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ παρὰ τὸ Α ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Δ· ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ζ (I. 32). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἄλλας γωνίας, ἀναλόγους, ἐκ τῶν λοιπῶν δὲ γωνιῶν ἑκάστην ἢ μικροτέραν ἢ μὴ μικροτέραν ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, τὰ παρὰ τὴν κάθετον τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των.

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν τὴν γωνίαν ΒΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀκόμη καὶ μεταξύ των.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ· διότι ἑκάστη εἶναι ὀρθή· καὶ ἡ παρὰ τὸ Β εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ, ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΒΑΔ (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα (κειμένη ἀπέναντι) τὴν παρὰ τὸ Γ γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ΒΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, καὶ ἀκόμη ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν παρὰ τὸν Β κοινὴν γωνίαν τῶν δύο τριγώνων. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους (θεώρ. 4). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἑκάτερον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι καὶ μεταξύ των ὅμοια.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΑΔΓ, ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ ΒΑΔ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν Γ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Β θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΔΑΓ (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ ὑποτείνουσα τὴν ΒΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἡ ὁποία ὑποτείνει (κεῖται ἀπέναντι) τὴν παρὰ τὸ Γ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ ὑποτείνουσα τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ΔΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Β, καὶ ἀκόμη ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ὑποτείνουσι τὰς ὀρθὰς γωνίας (θεώρ. 4)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ (ὁρισμ. 1).

Ἐὰν ἄρα εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, τὰ παρὰ τὴν κάθετον τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀχθεῖσα εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἀκόμη τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τμημάτων ἡ παρὰ τὸ τμῆμα πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος].

9.

Τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ προσταχθὲν μέρος.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει τῆς ΑΒ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ προσταχθὲν μέρος.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίτον. Καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν τυχοῦσαν· καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῶσιν αἱ ΔΕ, ΕΓ ἴσαι πρὸς τὴν ΑΔ. Καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΔΖ (Ι. 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤχθη πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν του τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΔ (θεώρ. 2), ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Εἶναι δὲ διπλασία ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· ἄρα καὶ ἡ ΒΖ εἶναι διπλασία τῆς ΖΑ· ἄρα ἡ ΒΑ εἶναι τριπλασία τῆς ΑΖ.

Ἄρα τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ ἀφῃρέθη τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Ἡ δοθεῖσα ἄτμητος εὐθεῖα νὰ τμηθῇ ὁμοίως πρὸς τὴν δοθεῖσαν τετμημένην.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἄτμητος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη κατὰ τὰ σημεῖα Δ,Ε ἡ ΑΓ, καὶ ἂς κεῖνται αὗται, ὥστε νὰ περιέχωσι τυχοῦσαν γωνίαν, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ καὶ διὰ τῶν Δ,Ε ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΔΘΚ (Ι. 31).

Ἄρα ἕκαστον τῶν ΖΘ, ΘΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΔΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ πρὸς τὴν ΗΒ (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΔΚΓ ἤχθη πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ παράλληλος ἡ ΘΕ, ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΚΘ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΕ ἤχθη πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ παράλληλος ἡ ΖΔ, ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ (θεώρ. 2). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· εἶναι ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ δοθεῖσα ἄρα ἄτμητος εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ ὁμοίως πρὸς τὴν δοθεῖσαν τετμημένην τὴν ΑΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ τρίτη ἀνάλογος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ ἂς κεῖνται περιέχουσαι γωνίαν τυχοῦσαν. Πρέπει νὰ εὑρεθῇ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογος.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αὗται μέχρι τῶν σημείων Δ,Ε, καὶ ἂς κεῖται πρὸς τὴν ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΔΕ (I. 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἤχθη παράλληλος ἡ ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ εὑρέθη τρίτη ἀνάλογος πρὸς αὐτὰς ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· πρέπει τῶν Α,Β,Γ νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος.

Ἂς κεῖνται δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ περιέχουσαι γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ΕΔΖ· καὶ ἂς κεῖται πρὸς μὲν τὴν Α ἴση ἡ ΔΗ, πρὸς δὲ τὴν Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἀκόμη πρὸς τὴν Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΘ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς αὐτὴν διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ (I. 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἤχθη παράλληλος ἡ ΗΘ, ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΔΗ πρὸς τὴν Α, ἡ δὲ ΗΕ πρὸς τὴν Β, ἡ δὲ ΔΘ πρὸς τὴν Γ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ εὑρέθη τετάρτη ἀνάλογος ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· πρέπει τῶν ΑΒ, ΒΓ νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος.

Ἂς κεῖνται (αἱ δοθεῖσαι) ἐπ' εὐθείας, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ ἡ ΒΔ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΓ βαίνει ἐπὶ ἡμικυκλίου, εἶναι ὀρθὴ (III. 31). Καὶ ἐπειδὴ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΔΓ ἔχει ἀχθῆ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΔΒ, ἄρα ἡ ΔΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως τῶν ΑΒ, ΒΓ (θ. 8, πόρισμα).

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ εὑρέθη μέση ἀνάλογος ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

14.

Τῶν ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἔχοντα τὰς παρὰ τὸ Β γωνίας ἴσας, καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἄρα θὰ εἶναι ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. Λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τουτέστιν, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Διότι ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ, εἶναι δὲ ἄλλο τι τὸ ΖΕ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ ,οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ (θεώρ. 1). Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων ΑΒ, ΒΓ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕ, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕ (θεώρ. 1), καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ (V. 11)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ (V. 9).

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τῶν ἴσων τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀντιστρόφως ἀναλόγους, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ πρὸς τὴν ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τουτέστιν ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΓΑ, ΑΔ· ἄρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΕΑ, ΑΒ. Καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, τὸ δὲ ΒΑΔ εἶναι ἄλλο τι, εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΓΑΒ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΕΑΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. Τῶν τριγώνων ἄρα ΑΒΓ, ΑΔΕ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ.

Διότι, ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ πάλιν ἡ ΒΔ, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΕΑΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ (θεώρ. 1), ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΕΑΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΑΔ (V. 9).

Τῶν ἄρα ἴσων τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀντιστρόφως ἀναλόγους εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε,Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ ἂς κεῖται πρὸς μὲν τὴν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, πρὸς δὲ τὴν Ε ἴση ἡ ΓΘ. Καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παραλληλόγραμμα ΒΗ, ΔΘ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε πρὸς τὴν ΓΘ, ἡ δὲ Ζ πρὸς τὴν ΑΗ, ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων ΒΗ, ΔΘ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι. Ἐκεῖνα δὲ τῶν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, εἶναι ἴσα (θεώρ. 14)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΘ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΒΗ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· διότι ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· διότι ἡ Ε εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΘ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον· λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Διότι ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καὶ εἶναι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· διότι ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· διότι ἡ ΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε· ἄρα τὸ ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΘ. Καὶ εἶναι ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (θεώρ. 14). Ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΓΘ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ ΑΗ πρὸς τὴν Ζ· ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης (ἀναγραφόμενον) τετράγωνον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τετράγωνον, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον.

Ἄς κεῖται ἡ Δ ἴση πρὸς τὴν Β.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἄρα εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον (θεώρ. 16). Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β,Δ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς Β (τετράγωνον)· διότι ἡ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β (τετράγωνον)· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Διότι ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β (τετράγωνον), ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ὀρθογώνιον· διότι ἡ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι (θεώρ. 16). Ἄρα εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Εἶναι δὲ ἡ Β ἴση πρὸς τὴν Δ· ὡς ἄρα εἶναι ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τετράγωνον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τετράγωνον, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγραφῇ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· πρέπει ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ἀναγραφῇ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΓΕ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΖ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς τῶν Α,Β πρὸς μὲν τὴν γωνίαν Γ ἴση ἡ ΗΑΒ, πρὸς δὲ τὴν ΓΔΖ ἴση ἡ ΑΒΗ (Ι. 23). Ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΓΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΓΔ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΑΒ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 4). Πάλιν, ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΗ καὶ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς τῶν Β,Η πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΔΖΕ ἴση ἡ ΒΗΘ, πρὸς δὲ τὴν ΖΔΕ ἴση ἡ ΗΒΘ (I. 23). Ἄρα ἡ λοιπὴ γωνία ἡ παρὰ τὸ Ε εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Θ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΔΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΒΘ· ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ (θεώρ. 4). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἀκόμη ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία ΓΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ, ἡ δὲ ΔΖΕ πρὸς τὴν ΒΗΘ, ἄρα ὅλη ἡ ΓΖΕ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΗΘ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΘ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ μὲν παρὰ τὸ Γ ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Α, ἡ δὲ παρὰ τὸ Ε πρὸς τὴν παρὰ τὸ Θ. Ἄρα τὸ ΑΘ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ ΓΕ· καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους· ἄρα τὸ εὐθύγραμμον ΑΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΓΕ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ ἀνεγράφη ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΑΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

19.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν παρὰ τὸ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

Διότι ἂς ληφθῇ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογος ἡ ΒΗ (θεώρ. 11), ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ (V. 16). Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως εἶναι ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ· ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΗ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι. Τὰ τρίγωνα δὲ τὰ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀντιστρόφως ἀναλόγους, εἶναι ἴσα (θεώρ. 15). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ἔχει διπλάσιον λόγον ἢ ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν (V. ὁρισ. 9), ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ ἔχει διπλάσιον λόγον ἢ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ (δηλ. $ΒΓ : ΒΗ = ΒΓ^2 : ΕΖ^2$). Ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ (θεώρ. 1)· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΗ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ τρίγωνον ΑΒΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

Τὰ ὅμοια ἄρα τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὅμοιον σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς δευτέρας [ἐπειδὴ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιροῦνται καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιροῦνται καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, καὶ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ.

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ, εἶναι ἴση ἡ γωνία ΒΑΕ πρὸς τὴν γωνίαν ΗΖΛ (ὁρισμ. 1). Καὶ εἶναι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ (ὁρισμ. 1). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ (θεώρ. 6)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοιον (θεώρ. 4 καὶ ὁρ. 1)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΗΛ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλη ἡ γωνία ἡ ΑΒΓ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΖΗΘ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· ἄρα ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ΕΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΗΘ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΖΗΛ εἶναι ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλ' ὅμως καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἄρα δι' ἴσου (V. 22 καὶ ὁρ. 17) εἶναι ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ καὶ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΕΒΓ, ΛΗΘ εἶναι ἀνάλογοι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ (θεώρ. 6)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΕΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ (θεώρ. 4 καὶ ὁρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΘΚ. Ἄρα τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ διηρέθησαν καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος.

Λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, τουτέστιν ὅτι εἶναι ἀνάλογα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς, τουτέστι τῆς ΑΒ πρὸς τῆς ΖΗ.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗΘ, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΘ (θεώρ. 6)· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖΘ, ἡ δὲ ΒΓΑ πρὸς τὴν ΗΘΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖΝ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒΜ ἴση πρὸς τὴν ΖΗΝ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΑΜΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΖΝΗ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΜ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΒΜΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΝΘ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ (θεώρ. 4)· ὥστε καὶ δι' ἴσου εἶναι ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὸ ΝΘ (V. 22 καὶ ὁρ. 17). Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΜ πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· διότι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις. Καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V.12)· ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΖΗΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΛΘ. Καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΕΓ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΖΗΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΛΘ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΕΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΛΘ

(V. 16). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ τρίγωνον ΒΕΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΓΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἀκόμη τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V. 12). εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΖΗ· διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα ἔχουσι λόγον οἷον τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θεώρ. 19). Καὶ τὸ πολύγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΖΗ.

Ἄρα τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιροῦνται καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα α΄.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων, ὅτι ἔχουσι λόγον οἷον τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθ' ὅλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα β΄.

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ,ΖΗ λάβωμεν τρίτην ἀνάλογον τὴν Ξ, ἡ ΒΑ πρὸς τὴν Ξ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς, τουτέστι τῆς ΑΒ πρὸς τῆς ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθ' ὅλου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον].

21.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον ὅμοια εἶναι καὶ μεταξύ των ὅμοια.

Διότι ἔστω ἕκαστον τῶν εὐθυγράμμων Α, Β ὅμοιον πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Γ, εἶναι ἰσογώνιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους (ὁρ. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ Β εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Γ, εἶναι ἰσογώνιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους (ὁρ. 1). Ἄρα ἕκαστον τῶν Α, Β εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ Γ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους [ὥστε καὶ τὸ Α εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ Β καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους]. Ἄρα τὸ Α εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Διότι ἂς ληφθῇ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογος ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογος ἡ Ο (θεώρ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο (V. 22 καὶ ὁρ. 17)[1]. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως καὶ τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ (θεώρ. 19 πόρ.)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ (θεώρ. 12), καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΠΡ πρὸς ἕκαστον τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ (θεώρ. 18 καὶ 19).

1. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ: ΓΔ=ΕΖ : ΗΘ, καὶ ἐκ κατασκευῆς ΑΒ: ΓΔ=ΓΔ:Ξ, ΕΖ:ΗΘ=ΗΘ:Ο, ἤτοι ΑΒ: ΓΔ=ΕΖ:ΗΘ, ΓΔ:Ξ = ΗΘ:Ο καὶ δι' ἴσου (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ εἶναι ΑΒ:Ξ = ΕΖ:Ο.

'Επειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῆ ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ (πρῶτον μέρος θεωρήμ.). Ἔχει δὲ ληφθῆ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. Τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΝΘ, ΣΡ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα εἶναι ἴσον τὸ ΝΘ πρὸς τὸν ΣΡ (V. 9). Εἶναι δὲ πρὸς αὐτὸ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΠΡ[1]. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΗΘ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

'Εὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα θὰ εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λ ῆ μ μ α]

[Ὅτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω, ὅτι ἡ ΡΠ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΗ.

Διότι ἐὰν εἶναι ἄνισοι, ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, ἄρα καὶ ἡ ΠΣ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΝ. 'Αλλὰ εἶναι καὶ ἴσον· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν εἶναι ἄνισος ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΗΘ· ἄρα εἶναι ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

23.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουσι μεταξύ των λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἔχοντα τὴν γωνίαν ΒΓΔ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν.

Διότι ἂς ληφθῆ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ μὲ τὴν ΓΗ· ἄρα εἶναι ἐπ' εὐθείας

1. Κατὰ τὸ θεώρ. 20 εἶναι ΝΘ:ΣΡ $=$ $(ΗΘ)^2$: $(ΠΡ)^2$. 'Αφοῦ δὲ ΝΘ $=$ ΣΡ, ἕπεται $(ΗΘ)^2 = (ΠΡ)^2$. Καὶ συνεπῶς ΗΘ $=$ ΠΡ.

καὶ ἡ ΔΓ μὲ τὴν ΓΕ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ Κ καὶ ἂς γίνῃ ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ λόγοι ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν πλευρῶν, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς Κ πρὸς τὴν Μ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου τῆς Κ πρὸς τὴν Λ καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς Λ πρὸς τὴν Μ (ἴδε ἐπεξήγ.)· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ (θεώρ. 1), ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ πρὸς τὸ ΓΖ (θεώρ. 1), ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ, δι' ἴσου ἄρα (V. 22 καὶ ἐπεξήγ.) εἶναι ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν· ἄρα καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἰσογώνια ἄρα παραλληλόγραμμα ἔχουσι μεταξύ των λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, παραλληλόγραμμα δὲ περὶ τὴν διαγώνιον ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἕκαστον τῶν παραλληλογράμμων ΕΗ, ΘΚ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓΔ καὶ μεταξύ των.

Διότι, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΕΖ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ (θεώρ. 2). Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἡ ΖΗ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ, εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ (θεώρ. 2). Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΗ (V. 18), καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ (V. 16). Τῶν παραλληλογράμμων ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ΒΑΔ εἶναι ἀνάλογοι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ, εἶναι ἴση ἡ μὲν γωνία ΑΖΗ πρὸς τὴν ΔΓΑ (I. 29)· καὶ ἡ γωνία ΔΑΓ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ εἶναι κοινή· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΗΖ (I. 32)· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΖΕ καὶ ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἀκόμη ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ (V. 22 καὶ ὁρισ. 17). Τῶν παραλληλογράμμων ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ (ὁρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιον καὶ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΚΘ· ἄρα ἕκαστον τῶν παραλληλογράμμων ΕΗ, ΘΚ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον ὅμοια εἶναι καὶ μεταξύ των ὅμοια (θεώρ. 21)· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον καὶ τὸ αὐτὸ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς ἄλλο δοθέν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον, τὸ ΑΒΓ, τὸ ἴσον δέ, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κατασκευασθῇ, τὸ Δ· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ πρὸς μὲν τὸ ΑΒΓ ὅμοιον, πρὸς δὲ τὸ Δ τὸ αὐτὸ νὰ εἶναι ἴσον.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (I. 44), παρὰ δὲ τὴν ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ Δ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΖΓΕ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν

ΓΒΛ (I. 45). 'Επ' εὐθείας ἄρα εἶναι ἡ μὲν ΒΓ καὶ ἡ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ καὶ ἡ ΕΜ. Καὶ ἂς ληφθῇ τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογος ἡ ΗΘ (θεώρ. 13), καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΗΘ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΑΒΓ τὸ ΚΗΘ (θεώρ. 18).

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (θεώρ. 19, πόρ.), ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΘ. 'Αλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ (θεώρ. 1). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΘ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα (θεώρ. 16) ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΚΗΘ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΚΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ. 'Αλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Δ· ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Δ. Εἶναι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ ὅμοιον.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓ κατεσκευάσθη ὅμοιον τὸ ΚΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ἄλλο τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

26.

'Εὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὅλον, ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτό, τοῦτο εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτὸ τὴν ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ μὲ τὸ ΑΖ.

Διότι ἂς μὴ εἶναι, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΑΘΓ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΗΖ, ἂς διαχθῇ μέχρι τοῦ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΒΓ (I. 30 καὶ 31).

'Επειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ ΚΗ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Εἶναι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ (ὁρ. 1)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ. Ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΑΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ (V. 9), ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα δὲν εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον τὸ ΑΒΓΔ μὲ τὸ ΑΖ· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὅλον, ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτό, τοῦτο εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐκ πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἐλλεῖπον.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΔΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι ἐκ πάντων τῶν παραλληλογράμμων τῶν παραβαλλομένων παρὰ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ΔΒ, μέγιστον εἶναι τὸ ΑΔ. Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΖΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΔΒ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΒ, εἶναι ταῦτα περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον (θεώρ. 26). Ἄς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΔΒ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (νὰ προεκταθῇ δηλ. ἡ ΗΖ μέχρι τοῦ Θ καὶ ἡ ΚΖ μέχρι τῆς ΔΕ).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΓΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΖΕ (I. 43), κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ἄρα ὅλον τὸ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΚΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΗ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ (θεώρ. 1). Καὶ τὸ ΗΓ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΚ. Ἄς προστεθῇ εἰς αὐτὰ τὸ κοινὸν ΓΖ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΛΜΖ· ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΔΒ, τουτέστι τὸ ΑΔ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΖ.

Ἐκ πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· πρέπει δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ ἴσον] νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου πρὸς τὸ ἐλλεῖπον [δηλ. τοῦ ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον].

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ, τὸ Γ, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ὁμοίου ὄντος πρὸς τὸ ἐλλεῖπον, πρὸς τὸ ὁποῖον δὲ πρέπει νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον, τὸ Δ· πρέπει παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον (παραβαλλόμενον) νὰ ἐλλείπῃ παραλληλόγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, τὸ ΕΒΖΗ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗ (θεώρ. 27).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός· διότι παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἔχει παραβληθῇ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΗΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι ἴσον, ἔστω τὸ ΘΕ μεγαλύτερον τοῦ Γ. Εἶναι δὲ τὸ ΘΕ ἴσον πρὸς τὸ ΗΒ· ἄρα καὶ τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ. Ὅσον τώρα μεγαλύτερον εἶναι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, πρὸς ταύτην τὴν ὑπεροχὴν ἴσον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ ΚΛΜΝ (θεώρ. 25). Ἀλλὰ τὸ Δ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ (θεώρ. 21.). Ἔστω λοιπὸν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ πρὸς τὴν ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ πρὸς τὴν ΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ Γ, ΚΜ, ἄρα τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΚΜ· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. Ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, πρὸς δὲ τὴν ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΞΗΟΠ· ἄρα τὸ ΗΠ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ ΚΜ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ]. Καὶ τὸ ΗΠ ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ (θεώρ. 21)· ἄρα τὸ ΗΠ καὶ τὸ ΗΒ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον (θεώρ. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΗΠΒ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (νὰ ἀχθῶσι δηλ. ἐκ τοῦ Π αἱ ΤΡ, ΠΣ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ, ΘΖ καὶ ΑΘ, ΗΕ).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ Γ, ΚΜ, τῶν ὁποίων τὸ ΗΠ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΜ, ἕπεται ὅτι ὁ λοιπὸς γνώμων ὁ ΥΧΦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ λοιπόν, τὸ Γ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΟΡ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΞΣ (Ι. 43), ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΠΒ· ἄρα ὅλον τὸ ΟΒ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΞΒ. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΤΕ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΒ (θεώρ. 1)· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΟΒ. Ἂς προστεθῇ κοινὸν τὸ ΞΣ· ἄρα ὅλον τὸ ΤΣ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸν γνώμονα ΦΧΥ. Ἀλλ' ὁ γνώμων ΦΧΥ ἐδείχθη ἴσος πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ παρεβλήθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΣΤ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΠΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ [ἐπειδὴ τὸ ΠΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΠ]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

29.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον νὰ παραβληθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον, τὸ Γ, τὸ ὅμοιον δέ, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ὑπερβάλλῃ, τὸ Δ· πρέπει παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ παραβληθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Γ, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ Δ.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ ὅμοιον πρὸς τὸ Δ καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ πρὸς τὸ ἄθροισμα μὲν τῶν ΒΖ, Γ ἴσον, τὸ αὐτὸ δὲ νὰ εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, τὸ ΗΘ (θεώρ. 25). Ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ πρὸς τὴν ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ πρὸς τὴν ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΖΒ, ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς μὲν τὴν ΚΘ ἔστω ἴση ἡ ΖΛΜ, πρὸς δὲ τὴν ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝ· ἄρα τὸ ΜΝ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΛ· ἄρα καὶ τὸ ΜΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΛ (θεώρ. 21)· ἄρα τὸ ΕΛ καὶ τὸ ΜΝ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον

(θεώρ. 26). Ἂς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΖΞ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (νὰ ἀχθῶσι δηλ. ἐκ τοῦ Β παράλληλοι πρὸς τὰς ΖΛ, ΖΕ).

Ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΜΝ, ἄρα καὶ τὸ ΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΕΛ, Γ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΕΛ· ἄρα καὶ ὁ λοιπὸς γνώμων ΨΧΦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ Γ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, εἶναι καὶ τὸ ΑΝ ἴσον πρὸς τὸ ΝΒ, τουτέστι πρὸς τὸ ΛΟ (Ι. 43). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα (δηλ. τὸ ΑΝ καὶ καὶ ΛΟ) τὸ κοινὸν ΕΞ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΦΧΨ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΦΧΨ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ παρεβλήθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΞ, τὸ ὁποῖον ὑπερβάλλει κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα τὸ ΠΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ, ἐπειδὴ καὶ πρὸς τὸ ΕΛ εἶναι ὅμοιον τὸ ΟΠ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

30.

Ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα νὰ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον.

Ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΓ ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα, τὸ ΑΔ, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΒΓ (θεώρ. 29).

Εἶναι δὲ τὸ ΒΓ τετράγωνον· ἄρα καὶ τὸ ΑΔ εἶναι τετράγωνον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφοτέρων τὸ κοινὸν ΓΕ· ἄρα τὸ λοιπὸν τὸ ΒΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΑΔ. Εἶναι δὲ καὶ ἰσογώνιον πρὸς αὐτό· ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν ΒΖ, ΑΔ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (θεώρ. 14)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΖΕ πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΑΕ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· ἄρα καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΒ (V. 14).

Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΒ ἐτμήθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον κατὰ τὸ Ε καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

31.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία ὑποτείνει τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ σχήματα τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΒΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφόμενον σχῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα σχήματα.

Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἤχθη ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ, τὰ παρὰ τὴν κάθετον τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ μεταξύ των καὶ πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ (θεώρ. 8). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΔ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (θεώρ. 19, πόρ.). Ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΒΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ[1]. Ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ σχῆμα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν σχημάτων τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ὁμοίων καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένων[2]. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ· ἄρα εἶναι ἴσον καὶ τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα σχήματα.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια ἄρα τρίγωνα τὸ σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία ὑποτείνει τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ σχήματα τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. Διότι εἶναι $\mathrm{Β\Gamma} : \mathrm{Α\Gamma} = \mathrm{Α\Gamma} : \mathrm{\Delta\Gamma}$ καὶ συνεπῶς $\mathrm{Β\Gamma} : \mathrm{\Delta\Gamma} =$ σχ. $\mathrm{Β\Gamma}$: σχ. $\mathrm{Α\Gamma}$.

2. Ἔστω τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως ἀναγραφόμενα ὁμοίως σχήματα α,β,γ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἀνωτέρω εἶναι $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\mathrm{Β\Delta}} = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \frac{\alpha}{\beta}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\alpha} = \frac{\mathrm{Β\Delta}}{\gamma}$, $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\alpha} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\beta}$ καὶ συνεπῶς $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\alpha} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\beta} = \frac{\mathrm{Β\Delta}}{\gamma}$. Ἐκ τούτων, $\frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{Β\Delta}} = \frac{\beta}{\gamma}$ καὶ ἐκ ταύτης $\frac{\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{Β\Delta}}{\mathrm{Β\Delta}} = \frac{\beta+\gamma}{\gamma}$. Ἐκ ταύτης $\frac{\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{Β\Delta}}{\beta+\gamma} = \frac{\mathrm{Β\Delta}}{\gamma}$ ὅπερ $= \frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\alpha}$. Ἐκ δὲ τῆς σχέσεως $\frac{\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{Β\Delta}}{\beta+\gamma} = \frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\alpha}$ ἔχομεν $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{Β\Delta}} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$.

32.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ δύο πλευραὶ μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς μιᾶς γωνίας συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τῶν τριγώνων θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ (συντεθειμένα κατὰ τὴν γωνίαν Γ), ἔχοντα ἀναλόγους τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΔΓ, ΔΕ, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ πρὸς τὴν ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΒΑΓ, ΑΓΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (Ι. 29). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΔ. Ὥστε καὶ ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Α ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Δ, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΕ (θεώρ. 6)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο τὰς ΑΒΓ, ΒΑΓ. Ἂς προστεθῇ ἡ κοινὴ ἡ ΑΓΒ· ἄρα αἱ ΑΓΕ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ. Ἀλλ' αἱ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα καὶ αἱ ΑΓΕ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς. Ὅμως ἔκ τινος εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη σχηματίζουσι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΑΓΕ, ΑΓΒ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (Ι. 14).

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ δύο πλευραὶ μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς μιᾶς γωνίας συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τῶν τριγώνων θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουσιν, εἴτε εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε εἶναι ἐγγεγραμμέναι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐπίκεντροι μὲν γωνίαι αὐτῶν ἐκ τῶν κέντρων Η, Θ ἔστωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ τόξον ΒΓ πρὸς τὸ τόξον ΕΖ, οὕτως καὶ ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ καὶ ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἃς ληφθῶσιν ἐν συνεχείᾳ τοῦ τόξου ΒΓ ὁσαδήποτε τόξα ἴσα πρὸς τοῦτο τὰ ΓΚ, ΚΛ, τοῦ τόξου δὲ ΕΖ ἐν συνεχείᾳ ὁσαδήποτε τόξα ἴσα πρὸς τοῦτο τὰ ΖΜ, ΜΝ καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ τόξα ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ εἶναι μεταξύ των ἴσα, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ (III. 27)· ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ τόξον ΒΛ τοῦ τόξου ΒΓ, τοσαπλασία εἶναι καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ τῆς ΒΗΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ τόξον ΝΕ τοῦ τόξου ΕΖ, τοσαπλασία εἶναι καὶ ἡ γωνία ΝΘΕ τῆς ΕΘΖ. Ἐὰν ἄρα τὸ τόξον ΒΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΝ, καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΝ, καὶ ἐὰν τὸ τόξον ΒΛ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου ΕΝ, καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΘΝ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικροτέρα. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, δύο μὲν τόξα τὰ ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνίαι αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐλήφθησαν τοῦ μὲν τόξου ΒΓ καὶ τῆς γωνίας ΒΗΓ ἰσάκις πολλαπλάσια καὶ τὸ τόξον ΒΛ καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ, τοῦ δὲ τόξου ΕΖ καὶ τῆς γωνίας ΕΘΖ καὶ τὸ τόξον ΕΝ καὶ ἡ γωνία ΕΘΝ. Καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι, ἐὰν τὸ τόξον ΒΛ ὑπερέχῃ τοῦ τόξου ΕΝ, ὑπερέχει καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ τῆς γωνίας ΕΘΝ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴση, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικροτέρα. Εἶναι ἄρα ὡς τὸ τόξον ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ, οὕτως ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ (V. ὁρ. 5). Ἀλλ' ὡς ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ, οὕτως ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ (V. 15)· διότι ἑκάστη (τῶν ΒΗΓ, ΕΘΖ) εἶναι διπλασία ἑκάστης (τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ) (III. 20). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τόξον ΒΓ πρὸς τὸ τόξον ΕΖ, οὕτως καὶ ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ καὶ ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Ἄρα εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ τόξα, ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουσιν, εἴτε εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.