# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

*Κατὰ τὸ 1902 ὁ περίφημος Οὔγγρος μαθηματικὸς Bolyai, εἷς ἐκ τῶν ἱδρυτῶν τῆς ὑπερβολικῆς γεωμετρίας, ἔγραψεν, ὅτι εἶχε διαπιστώσει 1700 ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἰς διαφόρους γλώσσας καὶ ἐντὸς διαστήματος 1900 ἐτῶν. Γενικῶς ὅμως πιστεύεται, ὅτι αἱ ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπερβαίνουν κατὰ πολὺ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως ἐξ ἀραβικῶν ἐκδόσεων. Ἅπασαι αὗται ἐστηρίζοντο εἰς ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων γενομένην ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὸν 4ον μ.Χ. αἰῶνα ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος, πατρὸς τῆς μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου Ὑπατίας. Κατὰ τὸ 1808 μετεφέρθησαν ἐκ τοῦ Βατικανοῦ ὑπὸ τοῦ Ναπολέοντος εἰς Παρισίους πολλοὶ ἑλληνικοὶ κώδικες, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ F. Peyrard ἀνεκάλυψεν ἕνα, φερόμενον σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα κῶδιξ Βατικανὸς ὑπ' ἀριθ. 190, ὅστις περιεῖχε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ κῶδιξ οὗτος ἐστηρίζετο εἰς ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων πολὺ παλαιοτέραν τῆς ἐκδόσεως τοῦ Θέωνος (ὁ κῶδιξ ἐπεστράφη εἰς τὸ Βατικανὸν τὸ 1814). Ἀπὸ τὸν κώδικα τοῦτον διεπιστώθησαν τὸ πρῶτον αἱ μεταβολαί, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐπιφέρει ὁ Θέων, καὶ ἐσημειώθησαν αὗται ὑπὸ τοῦ E. F. August κατὰ τὴν ἔκδοσιν ὑπὸ τούτου τῶν Στοιχείων τὴν γενομένην κατὰ τὸ 1829. Κατὰ τὸ 1882 - 1888 ὁ Δανὸς I. L. Heiberg τῇ συνεργασίᾳ τοῦ Γερμανοῦ H. Menge ἐξέδωκεν ἐν Λειψίᾳ τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου. Ἐκ τοῦ προλόγου τοῦ πρώτου τόμου τῶν Στοιχείων ὑπὸ τοῦ I. L. Heiberg παραθέτομεν ἐδῶ τὰ σπουδαιότερα μέρη.*

*«Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τρεῖς σχεδὸν αἰῶνας εἶχον ὡς κριτικὸν των θεμέλιον τὴν πρωταρχικὴν (διὰ τοῦ τύπου) ἔκδοσιν, ἡ ὁποία εἶδε τὸ φῶς ἐν Βασιλείᾳ κατὰ τὸ 1533. Διότι ὁ Gregorius εἰς τὰ Στοιχεῖα ἐξαρτᾶται ἐξ ὁλοκλήρου ἐπὸ τὴν ἔκδοσιν ἐκείνην. Τίνος ποιότητος ὑπῆρξε τὸ θεμέλιον ἐκεῖνο κατανοεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἡ Βασιλειανὴ ἔκδοσις, συμφώνως πρὸς τὴν συνήθειαν τῶν χρόνων ἐκείνων, ἐγένετο ἀκολουθοῦσα πιστῶς ἐλαχίστους καὶ οὐχὶ τοὺς ἀρίστους κώδικας, καίτοι ὑπάρχουν κώδικες τῶν Στοιχείων ἀρχαιότατοι καὶ ἄριστοι εἰς ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον δυσκόλως ἀνέρχονται οἱ κώδικες οἱουδήποτε ἄλλου Ἕλληνος συγγραφέως. Ὅθεν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνός μας (19ου) ὁ F. Peyrard προσέφερεν ὑψίστην εὐεργεσίαν εἰς τὰ Στοιχεῖα, ἐπειδὴ ἐχρησιμοποίησεν ἕνα κώδικα ἀρχαῖον καὶ ὑπεραρχαιότατον ἐν συγκρίσει πρὸς ὅλους, πρὸς διόρθωσιν τῆς Βασιλειανῆς ἐκδόσεως, ἐφ' ὅσον ὁ κῶδιξ οὗτος περιεῖχε κριτικὴν ἀναθεώρησιν παλαιοτέραν τῆς τοῦ Θέωνος. Τὸ ὅτι τὸν κώδικα*

*τοῦτον ἔφερεν εἰς φῶς ἐκ τῶν ἀδύτων τοῦ Βατικανοῦ καὶ τὸ ὅτι διέγνωσε τὴν ὑπεροχήν του, τοῦτο ἀποτελεῖ δόξαν τοῦ F. Peyrard, ἥτις δὲν πρέπει νὰ ἐκτιμηθῇ ὡς μικρά. Ἀλλὰ δὲν ἐχρησιμοποίησε πανταχοῦ ὀρθὴν καὶ σταθερὰν κρίσιν ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀληθινῆς γραφῆς καὶ κατὰ πρῶτον λόγον, διότι ἐστερεῖτο καλῶν κωδίκων τῆς ἀναθεωρήσεως τοῦ Θέωνος, οὔτε ἐκρατήθη σταθερῶς εἰς τὸ εὕρημά του, οὔτε καὶ ὀρθῶς τὸ ἐξετίμησε. Εἰς τοῦτο προστίθεται, ὅτι ἡ ἔκδοσίς του καὶ δύσχρηστος εἶναι καὶ κατὰ τοὺς χρόνους μας εἶναι λίαν σπανία. Οὔτε ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι μετὰ τὸν Peyrard ἐξέδωκαν τὰ Στοιχεῖα ἐπηύξανον τὰ κριτικὰ βοηθήματα καὶ οὐδόλως διεχειρίσθησαν οὕτω τὴν ὑπόθεσιν, ὥστε τὸ κείμενον τῶν Στοιχείων νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καταστῇ φανερόν, ὅτι χρησιμοποιεῖ ἀρκετὰ βέβαιον καὶ κατάλληλον πρὸς χρῆσιν κριτικὸν θεμέλιον. Εἶναι δὲ ἀρκούντως ὡμολογημένον, ὅτι ὡς πρὸς τὰ λοιπὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἐγένοντο πολὺ χειρότερα. Ἐπειδὴ ἔβλεπον, ὅτι ταῦτα κατενοοῦντο ἀπὸ πολλούς, ἀπεφάσισα νὰ προσθέσω εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὴν ἔκδοσιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ πρὸς ἀνάληψιν τοῦ κόπου τούτου, τὸν ὁποῖον ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐν τῇ διανοίᾳ μου ἀνεπόλουν, παρωρμήθην κατὰ τοσοῦτον μᾶλλον, καθ' ὅσον ἔβλεπον, ὅτι ἡ ἔκδοσις τοῦ Ἀρχιμήδους ἐγένετο δεκτὴ ὑπὸ τῶν λογίων ἀνδρῶν εὐμενῶς. Ἀλλ' ἀμέσως ἔγινε καταφανές, ὅτι οὔτε τὰ μέσα οὔτε οἱ τρόποι οὔτε αἱ δυνάμεις μου ἦσαν ἀρκεταὶ δι' ὁλόκληρον τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐσκόπευον νὰ ἀναλάβω. Διότι ἔπρεπε νὰ γίνῃ ἀντιβολὴ μεγάλου ἀριθμοῦ κωδίκων καὶ ἔπρεπε νὰ μεταβῶ διὰ μεγάλου ἀριθμοῦ ταξιδίων εἰς μέγαν ἀριθμὸν βιβλιοθηκῶν. Ὅθεν ἠρώτησα τὸν Hurican Menge, λόγιον ἄνδρα, περὶ τοῦ ὁποίου ἐγνώριζον ὅτι καὶ αὐτὸς εἶχεν ἀσχοληθῇ μὲ τὸν Εὐκλείδην, ἂν ἤθελε νὰ ἀναλάβῃ μέρος τοῦ ἔργου. Οὗτος συγκατένευσε καὶ συνηρμόσθη μεταξύ μας τὸ πρᾶγμα οὕτως, ὥστε ἐκεῖνος μὲν νὰ κάμῃ τὴν ἔκδοσιν τῶν «Δεδομένων», «Φαινομένων» καὶ τῶν μουσικῶν συγγραφῶν τοῦ Εὐκλείδου, ἐγὼ δὲ τῶν «Στοιχείων», τῶν «Ὀπτικῶν» καὶ τῶν «Κατοπτρικῶν», ἀμφότεροι δὲ νὰ κάμωμεν διὰ κοινῆς ἐργασίας τὴν ἀντιβολὴν τῶν κωδίκων. Προκειμένου περὶ τῶν Στοιχείων, ἠναγκάσθην ἐκ τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν κωδίκων νὰ ἐκλέξω ὀλίγους.*

*Τούτους ἐσημείωσα διὰ τῶν κατωτέρω γραμμάτων.*

*P— κῶδιξ Βατικανὸς Ἑλληνικὸς 190, Peyrard, 10ου αἰῶνος, ἐπὶ μεμβράνης (δηλ. περγαμηνῆς). Ἐδῶ καὶ ἐκεῖ, χεὶρ λίαν πρόσφατος ἔχει ἀνανεώσει γράμματα, τὰ ὁποῖα εἶχον σχεδὸν ἐξαλειφθῇ ἐκ τῆς πολυκαιρίας. Ταύτην τὴν χεῖρα ἐσημείωσα διὰ τοῦ γράμματος π εἰς ὅσα μέρη ἐφαίνετο, ὅτι ἀπέδιδεν ὀλιγώτερον ὀρθῶς τὴν ἀρχαίαν γραφήν. Τὰ 4 - 9 βιβλία παρέβαλα ὁ ἴδιος ἐν Ρώμῃ κατὰ τὸ 1881, τὸ 2ον καὶ μέρος τοῦ 3ου βιβλίου παρέβαλεν ὁ Menge, τὸ πρῶτον καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ τρίτου ἀνέλαβε λίαν εὐμενῶς νὰ παραβάλῃ ὁ λόγιος ἀνὴρ Augustus Mau.*

*B— κῶδιξ Βοδληϊανός, Δορβιλλιανὸς 10,1 (δηλ. ἐκ τῆς συλλογῆς D'Orville)* *ἐν φύλλῳ 2,30 γραφεὶς τὸ ἔτος 888 ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὰ βιβλία 1 - 7 παρέβαλον ἐγὼ ἐν Ὀξφόρδῃ κατὰ τὸ 1882.*

*F— κῶδιξ Φλωρεντιανὸς Λαυρεντιανὸς 28,3 τοῦ 10ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Καὶ εἰς τὸν κώδικα αὐτὸν ἔχει πολλάκις ἀνανεωθῆ ἡ ἀρχαία γραφὴ διὰ χειρὸς τοῦ 16ου αἰῶνος, ἡ ὁποία ἔγραψεν ἐκ νέου πολλὰ φύλλα καὶ συνεπλήρωσεν ὁλόκληρον τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ κώδικος. Τὴν χεῖρα ταύτην ἐσημείωσα διὰ τοῦ γράμματος φ, εἰς ὅσα μέρη εἶχε καταστρέψει τὴν ἀρχαίαν γραφήν. Ὁλόκληρον τὸν κώδικα τὸν παρέβαλον ὁ ἴδιος ἐν Φλωρεντίᾳ κατὰ τὸ 1881.*

*Y— κῶδιξ Βιενναῖος Ἑλληνικὸς 103, τοῦ 11ου - 12ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ τελευταῖον μέρος ἐκ βομβυκίνου χάρτου συνεπλήρωσε χεὶρ τοῦ 13ου αἰῶνος. Τοῦτον παρέβαλον ὁλόκληρον ἐν Κοπεγχάγῃ κατὰ τὸ 1880.*

*β— κῶδιξ τῆς δημοτικῆς βιβλιοθήκης τῆς Βονωνίας, σημειούμενος διὰ τῶν ἀριθμῶν 18 - 19 τοῦ 11ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ πρῶτον βιβλίον καὶ μερικὰ ἄλλα μέρη ἐθεώρησα ἐν Φλωρεντίᾳ τῷ 1881.*

*P— κῶδιξ Παρισινός, Ἑλληνικὸς 2466 τοῦ 12ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ πρῶτον βιβλίον παρέβαλον ἐν Παρισίοις τῷ 1880. Τὰ βιβλία 2 - 7 ἐν Κοπεγχάγῃ τῷ 1882.*

*Ὑπολείπεται νὰ εὐχαριστήσω τοὺς ἄνδρας ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐπέδειξαν εὐμένειαν διὰ τὸ ἔργον μου. Πρῶτον, διὰ νὰ δυνηθῶ νὰ κάμω τόσον συχνὰ ταξίδια εἰς τοὺς Παρισίους καὶ τὴν Ἰταλίαν, κατωρθώθη διὰ τοῦ Ὑπουργείου, τὸ ὁποῖον προΐσταται τῆς Παιδείας καὶ τῶν Σχολείων τῆς χώρας μας (Δανίας), καὶ τοῦ Καρλσβεργικοῦ Ἱδρύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει δαψιλῆ χορηγίαν εἰς τὰ γράμματα καὶ τὰς ἐπιστήμας. Προσέτι καὶ εἰς τοὺς ἐν Βιέννῃ, Παρισίοις καὶ Βονωνίᾳ προϊσταμένους βιβλιοθηκῶν πλεῖστα ὀφείλω. Ἀκόμη εἰς τὸν Κάρολον Κρώξ, μὲ τὸν ὁποῖον ἔκαμα ἀπὸ κοινοῦ μέγα μέρος τοῦ εἰς τὴν Ἰταλίαν ταξιδίου κατὰ τὸ 1881. Οὗτος μὲ ἐβοήθησεν ἐξόχως εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἡλικίας τῶν κωδίκων, διότι εἰς συναφῆ παλαιογραφικὰ ζητήματα οὐδενὸς ὑστερεῖ. Νὰ ἐκφράσω ἐδῶ τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς αὐτὸν μὲ ἠμπόδισεν ἡ μοῖρα, ἡ ὁποία ὑπῆρξεν ἀδικωτάτη καὶ πρὸς ἡμᾶς τοὺς ἐπιζῶντας φίλους του καὶ πρὸς τὴν ἐπιστήμην.*

*Ἔγραφον ἐν Κοπεγχάγῃ κατὰ μῆνα Ἀπρίλιον 1883.*

*I. L. HEIBERG»*

*Εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν, μέχρι τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως αὐτῆς, τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐξεδίδοντο εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν γλῶσσαν, ὅπως ἐγράφησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Κων/πόλεως οὐδεμία ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐγένετο εἰς τὴν περιοχὴν τὴν κατοικουμένην ὑπὸ Ἑλλήνων. Ὅτε μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἤνθησαν Ἑλληνικαὶ Σχο-*

*λαὶ εἰς διαφόρους πόλεις τῆς δούλης Ἑλλάδος, ὅπως εἰς Κων/πολιν, Ἰωάννινα, Μοσχόπολιν, Ἅγιον Ὄρος, Κυδωνίας, Χίον κλπ., τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐξεδίδοντο ἐν περιλήψει ἐκ λατινικῆς μεταφράσεως, ἐκτυπούμενα εἰς τυπογραφεῖα τῆς Δύσεως. Τοιαύτην ἔκδοσιν ὀφειλομένην εἰς δαψιλῆ χορηγίαν τῶν Ζωσιμαδῶν, ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν ἐκ δωρεᾶς τοῦ λογιωτάτου καθηγητοῦ τῆς Ἰατρικῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν κ. Γεωργίου Τριανταφυλλίδου.*

*Ὁ τίτλος τοῦ σπανίου τούτου βιβλίου ἔχει ὡς ἑξῆς:*

*«Α. ΤΑΚΟΥΕΝΤΙΟΥ*
*Στοιχεῖα Γεωμετρίας*
*μετὰ σημειώσεων τοῦ Οὐΐστωνος*
*ἐξελληνισθεῖσα μὲν ἐκ τῆς λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τοῦ Πανιερωτάτου Ἀρχιεπισκόπου Κυρίου Εὐγενίου τοῦ Βουλγάρεως, ἱεροδιακόνου ἔτι ὄντος, καὶ σχολαρχοῦντος ἔν τε Ἰωαννίνοις καὶ ἐν τῇ Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ καὶ ἐν Κων/πόλει, πρὸς ἀκρόασιν τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιώντων.*
*Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς αὐταδελφότητος τῶν*
*Ζ Ω Σ Ι Μ Α Δ Ω Ν*
*Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.*
*ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων νεανίσκοις.*
*Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας*
*ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδώτη*
*1 8 0 5».*

*Ἡ παροῦσα ἔκδοσις περιλαμβάνουσα τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῶν Στοιχείων, ἤτοι τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τεσσάρων τόμων τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων, εἶναι ἡ πρώτη ἐν Ἑλλάδι γενομένη διὰ τοῦ τύπου ἔκδοσις τοῦ ἀρχαίου κειμένου.*

*Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1952.*

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συμφώνως πρὸς τὰς μαρτυρίας, τὰς ὁποίας μᾶς παρέχει ὁ Ἡρόδοτος, ὁ Εὔδημος, ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς καὶ ἄλλοι παλαιοὶ συγγραφεῖς, ἡ γεωμετρία εἶναι δημιούργημα τῶν Αἰγυπτίων. Κατὰ τοὺς συγγραφεῖς τούτους οἱ Αἰγύπτιοι ἤχθησαν εἰς τὴν ἀνακάλυψίν της, ἀπὸ τὴν ἀνάγκην μετρήσεως τῆς παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ Νείλου γῆς, ἡ ὁποία μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν τοῦ ποταμοῦ καὶ ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων ἔπρεπε πάντοτε νὰ μετρῆται ἐκ νέου διὰ λόγους κτηματολογικοὺς καὶ φορολογικούς. Τὸ παλαιότερον τεκμήριον, μέχρι σήμερον τοὐλάχιστον, ἐξ οὗ βεβαιούμεθα, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἐδημιούργησαν τὴν γεωμετρίαν, εἶναι ὁ πρὸ ὀλίγων δεκαετηρίδων εὑρεθεὶς πάπυρος τοῦ Rhind (Βρεταννικὸν Μουσεῖον), ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῆ περὶ τὸ 1700 π.Χ. περίπου, ὑπὸ τοῦ Ahmes. Ἐξ ὅλων ὅμως τῶν ὑπαρχόντων τεκμηρίων συνάγεται, ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν Αἰγυπτίων ἦτο καθαρῶς ἐμπειρικῆς μορφῆς, δηλ. τέχνη προκύψασα ἐκ τῆς πείρας κατὰ τὰς μετρήσεις τῆς γῆς. Οὐδαμοῦ εἰς τὴν αἰγυπτιακὴν γεωμετρίαν ἀναφαίνεται ἢ ἔστω ὑποδηλοῦται ἀπόδειξις γεωμετρικῆς τινος προτάσεως.

Ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης πρὸς ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, εἶναι ἀποκλειστικὸν ἔργον τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Αἱ ἑλληνικαὶ ἐν προκειμένῳ εἰδήσεις προερχόμεναι ἐκ συγγραφέων μεταγενεστέρων τοῦ Ἡροδότου, ἀποδίδουν τὴν θεμελίωσιν τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης εἰς τὸν συγκαταλεγόμενον μεταξὺ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαιότητος Θαλῆν τὸν Μιλήσιον. Ὡς πρῶται δὲ ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ, ἀναφέρονται, μεταξὺ ἄλλων, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὰ θεωρήματα τ' ἀποδεικνύοντα τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ὅτι ἡ γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἡμικυκλίου εἶναι ὀρθή. Ὁ γερμανὸς φιλόσοφος Κὰντ γράφει εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τοῦ περιφήμου αὐτοῦ ἔργου «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου» (Kritik der reinen Vernunft, 1787) τ' ἀκόλουθα: «Τὰ μαθηματικά, ὡς ἐπιστήμη, εὗρον τὸν ἀσφαλῆ δρόμον των εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων. . . Ὁ πρῶτος, ὅστις ἀπέδειξε τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως), ἔσχε μίαν ἀναλαμπήν. . .».

Ἡ διαπίστωσις, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι δὲν εἶχον ἰδέαν τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης, ἐνισχύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἄγνοιαν αὐτῶν ὡς πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτῆς. Ὁ Θαλῆς εὑρισκόμενος ἐν Αἰγύπτῳ, ἀφοῦ ἔστησε τὴν ράβδον του κατακορύφως εἰς τὸ ἄκρον τῆς σκιᾶς τῆς πυραμίδος, ὑπελόγισε τὸ ὕψος αὐτῆς ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σκιῶν, τὰς ὁποίας ἔρριπτον ἡ ράβδος καὶ ἡ πυραμίς. Τοιοῦτος ὅμως ὑπολογισμὸς προϋποθέτει γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμοίων τριγώνων καὶ ἱκανὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης. Περὶ τοιαύτης ὅμως ἀναπτύξεως οὐδὲν γνωρίζομεν μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ. Αἱ γεωμετρικαὶ γνώσεις τοῦ Θαλοῦ, ὡς αὗται μαρτυροῦνται ὑπὸ τῶν Ἑλληνικῶν εἰδήσεων, καθιστοῦν πιθανὴν τὴν γνώμην, ὅτι πολὺ πρὸ τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶχον τεθῆ ἐν Ἑλλάδι αἱ βάσεις τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης. Τοῦ Θαλοῦ οὐδεμία πραγματεία περιεσώθη. Ἀλλ' ἀμφίβολον εἶναι ἂν οὗτος εἶχεν ἀσχοληθῆ μὲ συγγραφάς. Ὁ Λόβων ὁ Ἀργεῖος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Θαλῆς εἶχε γράψει διακοσίας πραγματείας εἰς στίχους, αἱ ὁποῖαι ἀπωλέσθησαν. Μετὰ τὸν Θαλῆν μνημονεύεται ὡς σπουδαῖος μαθηματικὸς ὁ Μαμέρτιος, ὁ ἀδελφὸς τοῦ ποιητοῦ Στησιχόρου, ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, ὅστις ἔδρασεν ἐν τῇ μεγάλῃ Ἑλλάδι. Ἡ μυστικότης, ἡ ὁποία περιέβαλλε τὰς ἐργασίας τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου, ἐστάθη ἐμπόδιον εἰς τὴν διάδοσιν ἐκτὸς τῆς Σχολῆς τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐν αὐτῇ γενομένης μαθηματικῆς ἐρεύνης. Παρὰ ταύτην ὅμως, πολλαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις, μὴ ἀφορῶσαι εἰς τὸ μυστηριακὸν μέρος τῆς διδασκαλίας, ἦλθον εἰς τὴν δημοσιότητα μετὰ τὴν βιαίαν ἐν κάτω Ἰταλίᾳ διάλυσιν τῶν συλλόγων τῶν Πυθαγορείων καὶ τὴν διασποράν των εἰς τὰς διαφόρους Ἑλληνικὰς πόλεις. Εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου ἀνεπτύχθησαν σπουδαίως ἡ γεωμετρία καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν, ἔν τινι δὲ μέτρῳ καὶ ἡ Ἄλγεβρα, ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδονται, μεταξὺ ἄλλων, τὸ ὁμώνυμον θεώρημα, ἡ συναφὴς πρὸς τοῦτο σπουδὴ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $X^2+y^2=z^2$ (ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως δευτέρου βαθμοῦ) καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων. Ὀλίγον βραδύτερον, μετὰ τὴν δρᾶσιν τοῦ Πυθαγόρου ὡς ἀρχηγοῦ Σχολῆς, ἐπιχειρεῖται ἐν Ἀθήναις ἡ λύσις τοῦ περιφήμου προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ὑπὸ τῶν Ἀναξαγόρου, Ἀντιφῶντος καὶ Βρύσωνος. Αὕτη μαρτυρεῖ περὶ μεγάλης ἀνθήσεως τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἀθήναις κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην.

Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης, ἰδίως τῆς γεωμετρικῆς, σημειοῦται εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἔνθα ὑπὸ τὴν θείαν τούτου καθοδήγησιν οἱ διάσημοι μαθηματικοὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, Νεοκλείδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Λέων, Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης, οἱ ἀδελφοὶ Μέναιχμος καὶ Δεινόστρατος, Θεύδιος ὁ Μάγνης, Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνός, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, Φίλιππος ὁ Μενδαῖος ἢ Ὀπούντιος κλπ. προήγαγον δημιουργικῶς τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ἐλύθησαν τὰ ἄλλα δύο περίφημα προβλήματα, ἤτοι ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου, τὸ δήλιον λεγόμενον πρόβλημα, καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας, ἀμφότερα οὐχὶ διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ἀλλὰ δι' ἄλλων γραμμῶν ἢ κινητικῆς λεγομένης γεωμετρίας. Προσωπικῶς εἰς τὸν Πλάτωνα ἀποδίδεται ἡ λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, διὰ κινητικῆς γεωμετρίας, ὡς ἀναφέρει ὁ Εὐτόκιος κατὰ τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὸ ἔργον τοῦ 'Αρχιμήδους «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου 1», καὶ ἡ σπουδὴ τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν ὁ Πλάτων ἔλυσε κατὰ διάφορον τρόπον καὶ ὄχι ὅπως ὁ Πυθαγόρας. 'Αλλὰ καὶ ἐκτὸς τῆς 'Ακαδημίας ἔδρασαν διάφοροι μαθηματικοὶ καὶ μάλιστα μερικοὶ ἐξ αὐτῶν πρὶν ἀκόμη ἱδρυθῇ ἡ 'Ακαδημία, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸν σοφιστὴν 'Ιππίαν τὸν 'Ηλεῖον, τὸν 'Ιπποκράτην τὸν Χῖον, τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον, διδάσκαλον τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, καὶ τοὺς Πυθαγορείους Φιλόλαον, Θυμαρίδαν καὶ 'Αρχύταν τὸν Ταραντῖνον, τὸν φίλον τοῦ Πλάτωνος. 'Ως ἀποφασιστικοὺς σταθμοὺς διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς περὶ τῶν ἀναλογιῶν θεωρίας ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τὴν ὑπὸ τοῦ ἰδίου διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας, ὡς τοῦτο ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους, τὰς ἐρεύνας τοῦ 'Αρχύτου εἰς τὴν στερεομετρίαν, τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ὑπὸ τῶν Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου καὶ Θεαιτήτου τοῦ 'Αθηναίου καὶ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου. Θεμελιώδους ἐπίσης σημασίας διὰ τὴν πρόοδον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης θεωρεῖται ἡ συμβολὴ τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ 'Αριστοτέλους. Τὴν συμβολὴν ταύτην θὰ ἐξάρωμεν δι' ὀλίγων κατωτέρω, ἐκεῖ ἔνθα θὰ γίνῃ λόγος περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς 'Ελληνικῆς γεωμετρίας. Ἄλλα τρία ὀνόματα διασήμων 'Ελλήνων μαθηματικῶν ὁλοκληρώνουν, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, τὴν γιγαντιαίαν προσπάθειαν τοῦ 'Ελληνικοῦ πνεύματος πρὸς ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας. Καὶ τὰ ὀνόματα ταῦτα εἶναι, κατὰ χρονολογικὴν σειράν, Εὐκλείδης - 'Αρχιμήδης - 'Απολλώνιος. Μετὰ τὸν 'Απολλώνιον ἐπέρχεται ἡ φυσικὴ κάμψις τοῦ 'Ελληνικοῦ πνεύματος, χωρὶς ὅμως ἡ κάμψις αὕτη νὰ σημαίνῃ καὶ στασιμότητα τούτου. Σπουδαῖοι μαθηματικοί, ὅπως ὁ Νικομήδης, ὁ Διοκλῆς, ὁ Φίλων, ὁ Σπόρος, ὁ 'Αρίσταρχος, ὁ Ἥρων, ὁ Πτολεμαῖος, ὁ Διόφαντος, ὁ Μενέλαος καὶ ὁ Πάππος, συνεχίζουν καὶ συμπληρώνουν τὸ ἔργον τῶν μεγάλων προκατόχων των. 'Ως τελευταῖος μαθηματικὸς τῆς ἀρχαίας ἐποχῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς 'Υπατία (5ος αἰὼν μ.Χ.). Τὰ Πανεπιστήμια τοῦ Βυζαντίου ἐκαλλιέργουν τὴν μαθηματικὴν κληρονομίαν τῶν ἀθανάτων προγόνων, τὴν ὁποίαν μετέδιδον εἰς τὴν 'Εσπερίαν οἱ ὑπὸ ταύτης μετακαλούμενοι αὐτόθι ἐπὶ ἁδρᾷ ἀμοιβῇ Ἕλληνες καθηγηταί. 'Απὸ δὲ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Καρτεσίου ἀρχίζει ἡ νέα περίοδος τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν, ἡ ὁποία συνεχίζεται καὶ σήμερον.

'Ως πρῶτος συγγραφεὺς γεωμετρικοῦ βιβλίου μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Σουΐδα ὁ 'Αναξίμανδρος (. . . γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν). 'Ο 'Αναξίμανδρος ἐχρησιμοποίησε μαθηματικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ τὰς ἀστρονομικάς του μελέτας. 'Ασφαλεστέρα εἶναι ἡ πληροφορία τοῦ Πρόκλου, καθ' ἣν πρῶτος συγγραφεὺς παντὸς ὅ,τι μέχρι τῆς ἐποχῆς του παρήγαγε τὸ 'Ελληνικὸν πνεῦμα εἰς τὴν γεωμετρίαν εἶναι ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. Τοῦτον ἠκολούθησαν, κατὰ τὸν ἴδιον συγγραφέα, ὁ Λέων ὁ μαθητὴς τοῦ Νεοκλείδου, ὁ Θεύδιος ὁ Μάγνης καὶ ὁ Εὐκλείδης (Procli diadochi, σ. 66). Πρῶτον δὲ συγγραφέα ἱστορίας τῆς γεωμετρίας ἀναφέρει ἡ παράδοσις τὸν Εὔδημον, τὸν μαθητὴν τοῦ Ἀριστοτέλους. Λέγεται, ὅτι ἀποσπάσματά τινα τῆς μὴ σωζομένης πραγματείας ταύτης εἶχε περιλάβει εἰς ἰδικήν του πραγματείαν ὁ μαθηματικὸς Γεμῖνος (1ος αἰὼν π.Χ.), ἐκ τῆς πραγματείας δὲ ταύτης ὁ Πρόκλος (5ος αἰὼν μ.Χ.) ἤντλησε πολλὰ ἐκ τῶν εἰδήσεων, τὰς ὁποίας μᾶς παρέχει εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ α΄ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἀφ' ὅτου ὁ Εὐκλείδης ἐξέδωκε τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα ἔργον αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνονται αἱ θεμελιώδεις γνώσεις τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ὅλαι αἱ μέχρι τῆς ἐποχῆς του συναφεῖς πραγματεῖαι δὲν ἐπέζησαν πλέον. Ὅπου δὲ μεταγενέστεροι τοῦ Εὐκλείδου συγγραφεῖς ἀναφέρουν τοὺς ὅρους Στοιχεῖα καὶ Στοιχειωτής, ἐννοοῦν πάντοτε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸν Εὐκλείδην. Τὸ ἔργον τοῦτο, ἀπὸ τοῦ 300 π.Χ. περίπου, ἐκδίδεται ἀνελλιπῶς εἰς ὅλας τὰς γλώσσας τοῦ πεπολιτισμένου κόσμου. Ἐν σχέσει πρὸς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὰ Στοιχεῖα, ὁ Πρόκλος γράφει τὰ ἑξῆς (σ. 68): «νεώτερος τῶν περὶ τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος εἶναι ὁ Εὐκλείδης, ὁ συναθροίσας τὰ Στοιχεῖα καὶ διατάξας μὲν πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τελειοποιήσας δὲ πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου, προσέτι δὲ ὁ ἀναγαγὼν εἰς ἀλανθάστους ἀποδείξεις ἐκεῖνα τὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα πρὸ αὐτοῦ δὲν εἶχον αὐστηρῶς ἀποδειχθῆ. Ἔζησε δὲ ὁ ἀνὴρ οὗτος ἐπὶ βασιλείας Πτολεμαίου τοῦ πρώτου, διότι καὶ ὁ Ἀρχιμήδης μνημονεύει τὸν Εὐκλείδην καὶ λέγεται, ὅτι ὁ βασιλεὺς Πτολεμαῖος ἠρώτησέ ποτε τὸν Εὐκλείδην, ἐὰν ὑπάρχῃ συντομωτέρα ὁδὸς πρὸς ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας ἐκείνης, τὴν ὁποίαν προσφέρουν τὰ Στοιχεῖα. Ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀπήντησεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει βασιλικὴ ἀτραπὸς διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας. Εἶναι λοιπὸν οὗτος νεώτερος τῶν περὶ τὸν Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι οὗτοι ἦσαν σύγχρονοι, καθὼς μαρτυρεῖ ὁ Ἐρατοσθένης. Κατὰ τὸ σύστημα τὸ ὑπ' αὐτοῦ προτιμώμενον ἦτο Πλατωνικὸς καὶ οἰκεῖος πρὸς τὴν Πλατωνικὴν φιλοσοφίαν, καὶ συνεπῶς ἔθεσεν οὗτος ὡς σκοπὸν τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων τὴν κατασκευὴν τῶν Πλατωνικῶν σχημάτων[1]. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας. Ταῦτα εἶναι τὰ Ὀπτικά, τὰ Κατοπτρικά, αἱ κατὰ τὴν μουσικὴν Στοιχειώσεις, προσέτι δὲ τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον. Πολὺ θαυμάζουν αὐτὸν διὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων, ἕνεκα τῆς τάξεως καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων. Διότι

1. Πιθανῶς ἐκ τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Πρόκλου ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Simon ὁρμώμενος, διατυπώνει τὴν γνώμην, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐσπούδασεν ἐν Ἀθήναις εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος (Simon, Geschichte der Mathematik σελ. 185, 1909).

δὲν κατεχώρισε πᾶν τὸ σχετικῶς γνωστόν, ἀλλὰ τὸ ἀπαραίτητον διὰ τὴν οἰκοδόμησιν τῆς γεωμετρίας, προσέτι δὲ ἐχρησιμοποίησε τοὺς παντοίους τρόπους τῶν συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἰκεῖοι πρὸς ἐπιστήμην καὶ ἀλάνθαστοι, ἀκόμη δὲ ἐχρησιμοποίησεν ὅλας τὰς ἀποδεικτικὰς μεθόδους. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν γεωμετρίαν πολλαὶ ἀποδείξεις φαίνονται ἐκ πρώτης ὄψεως ὡς ἀληθεῖς, ἐνῷ εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν εἶναι, παρέδωκε διὰ τοὺς μεταγενεστέρους μεθόδους, διὰ τῶν ὁποίων ἀσκοῦνται οὗτοι εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν. Εἰς τοῦτο τὸ σύγγραμμα ἔδωκε τὸν τίτλον Ψευδάρια. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ βιβλίον χρήσιμον δι' ἄσκησιν, ἐνῷ τὰ Στοιχεῖα περιέχουν τὴν θεωρίαν τῶν γεωμετρικῶν πραγμάτων ἀλάνθαστον καὶ εἰσάγουν ἀσφαλῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι τὸ ἐπιθυμοῦν. Ἴσως νὰ ἐρωτήσῃ κανείς, ποῖος εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων; Ἐγὼ θ' ἀπαντήσω εἰς τὸν ἔχοντα τοιαύτην ἀπορίαν· Ὁ σκοπὸς τοῦ γεωμέτρου εἶναι νὰ ἐρευνήσῃ τὰ κοσμικὰ σχήματα (κανονικὰ πολύεδρα) ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων καὶ καταλήγων εἰς τὴν ἐγγραφήν των εἰς σφαῖραν. Διὰ τὸν μανθάνοντα τὴν γεωμετρίαν τίθεται ὡς σκοπὸς ἡ ἄσκησις τῆς διανοίας. Διότι, ὅταν ὁ σπουδάζων ἀγνοῇ τὰ Στοιχεῖα, εἶναι ἀδύνατον νὰ κατανοήσῃ τὰ ἄλλα μέρη τῆς ἐπιστήμης ταύτης καὶ εἶναι ἀδύνατον ἀκόμη νὰ μάθῃ κανεὶς ἄλλα πράγματα. Διότι τὰ Στοιχεῖα περιέχουν τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῶν μαθηματικῶν, ὡς ἀναφέρουν σχετικῶς ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος. Σκοπὸς λοιπὸν τῶν Στοιχείων εἶναι νὰ δώσουν τὰς ἐπιστημονικὰς βάσεις εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ μανθάνουν καὶ νὰ διδάξουν τὸν τρόπον ἐγγραφῆς εἰς τὴν σφαῖραν τῶν Πλατωνικῶν σχημάτων».

Ὁ τόπος καὶ ὁ χρόνος γεννήσεως καὶ θανάτου τοῦ Εὐκλείδου παραμένουν ἄγνωστα. Γνωστὸν εἶναι, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο Ἕλλην, ὅτι ἔζησεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ἔνθα διηύθυνε Σχολήν, καὶ ὅτι ἤκμασε περὶ τὸ 315-275 π.Χ. Παρὰ τοῦ Πάππου πληροφορούμεθα, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ διδάσκωνται τὴν γεωμετρίαν (VII, 976), ὁ δὲ Στοβαῖος μᾶς διέσωσε τὸ ἀκόλουθον χαρακτηριστικὸν ἐπεισόδιον μεταξὺ τοῦ Εὐκλείδου καί τινος μαθητοῦ του: «Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην «τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μανθάνοντι»· καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας «δὸς αὐτῷ, ἔφη, τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν» (Ἀνθολ. Στοβαίου, ἔκδ. Meineke τομ. IV σ. 205). Ἑρμ.: ὅταν τις, ἀρχίσας νὰ διδάσκεται γεωμετρίαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα, ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην «καὶ τώρα τί κέρδος θὰ ἔχω ἀφοῦ ἔμαθα τοῦτο»; Ὁ Εὐκλείδης καλέσας τὸν ὑπηρέτην του εἶπε, «δός του τρεῖς δεκάρες, ἐπειδὴ πρέπει νὰ κερδίζῃ ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μανθάνει». Ἄραβες συγγραφεῖς ἀναφέρουν τὰ ἑξῆς περὶ τοῦ Εὐκλείδου: «Ὁ Εὐκλείδης, υἱὸς τοῦ Ναυκράτους καὶ ἔγγονος τοῦ Ζηνάρχου, εἶναι ὁ συγγραφεὺς τῆς γεωμετρίας, παλαιὸς φιλόσοφος, Ἕλλην τὴν καταγωγήν, ἐγεννήθη εἰς τὴν Τύρον καὶ διέμενεν εἰς τὴν Δαμασκόν· οὗτος ἐδίδασκε τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας καὶ ἐξέδωκε τὸ πλέον ἔξοχον καὶ χρησιμώτατον βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον 'Αρχαὶ ἢ Στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἔργον γενικώτερον τοῦ ὁποίου δὲν ὑπῆρχε πρότερον εἰς τοὺς Ἕλληνας. Ὅθεν εἶναι εὐνόητον, ὅτι Ἕλληνες, Ρωμαῖοι καὶ ὄχι ὀλιγώτερον Ἄραβες συγγραφεῖς ἀνέλαβον τὸ καθῆκον νὰ ἐπεξηγοῦν τοῦτο καὶ ἐδημοσίευσαν πλῆθος σχολίων καὶ σημειώσεων ἐπὶ τοῦ ἔργου τούτου, ὡς καὶ περιλήψεις αὐτοῦ. Ἕνεκα τῆς σημασίας τῆς γεωμετρίας διὰ τὴν φιλοσοφίαν, οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι εἶχον ἀναρτήσει ἐπιγραφὴν εἰς τὰς εἰσόδους τῶν Σχολῶν των, ὅτι οὐδεὶς ἠδύνατο νὰ εἰσέλθῃ εἰς αὐτάς, ἐὰν δὲν ἐγνώριζε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου» (Casiri Bibliotheca Arabico - Hispana Escurialensis, I σ. 339). (T. Heath, A history of Greek mathematics, I σελ. 355).

Ἄραβες ἐπίσης συγγραφεῖς ἀναφέρουν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἦτο μαθητὴς τοῦ Σολομῶντος καὶ ὅτι ὁ Ἵππαρχος ἦτο Χαλδαῖος. Τέλος, οὗτοι ἑρμηνεύουν τὸ ὄνομα Εὐκλείδης ὡς ἑξῆς: Ucli (ἀραβιστὶ) σημαίνει κλειδί, Dis, σημαίνει μέτρον καὶ κατ' ἐπέκτασιν μέτρον γῆς. Ἄρα Εὐκλείδης (Uclidis) σημαίνει τὸ κλειδὶ τῆς γεωμετρίας! Αἱ ἀνωτέρω πληροφορίαι τῶν 'Αράβων περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου ἐλέγχονται ὡς μὴ ἀκριβεῖς. Εἶναι δὲ προφανὴς ἡ σύγχυσις τῶν συγγραφέων τούτων ὡς πρὸς ὅ,τι ἀναφέρουν διὰ τὴν ἐπιγραφήν, τὴν ὁποίαν εἶχον ἀναρτήσει οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι εἰς τὰς εἰσόδους τῶν Σχολῶν των, πρὸς τὴν ἀναγραφὴν εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς 'Ακαδημίας τοῦ Πλάτωνος «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». 'Επίσης καὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν καταγωγὴν τοῦ Πυθαγόρου καὶ Ἱππάρχου ἀραβικαὶ εἰδήσεις εἶναι ἀνάξιαι προσοχῆς.

## ΤΟ ΕΡΓΟΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

### ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τὰ Στοιχεῖα περιέχονται εἰς 13 βιβλία. Συνεκδίδονται ὅμως μετὰ τούτων καὶ ἄλλα δύο βιβλία, τὸ 14ον καὶ τὸ 15ον, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι βέβαιον, ὅτι δὲν ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Περὶ τῶν δύο τούτων βιβλίων θὰ γίνῃ μνεία μετὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ περιεχομένου τῶν 13 βιβλίων. Κατὰ τὰς τελευταίας ἑκατονταετίας διῄρουν τινὲς τὰ Στοιχεῖα ἀπὸ ἀπόψεως περιεχομένου καὶ διατάξεως τῆς ὕλης εἰς τέσσαρα κύρια μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἐρευνῶνται γεωμετρικὰ μεγέθη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ αἱ ἀμοιβαῖαι αὐτῶν σχέσεις, καθ' ἃς τὰ μεγέθη ταῦτα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα. Καὶ ὅταν μὲν ταῦτα εἶναι ἴσα, εἶναι ἀρκετὴ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσότητος αὐτῶν, ὅταν δὲ εἶναι ἄνισα, δέον νὰ μετρηθῇ ὁ βαθμὸς τῆς ἀνισότητος. Πρὸς τοῦτο ὅμως χρειάζεται ὁ ἀριθμός, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ μέτρον ἑκάστου μεγέθους, καὶ συνεπῶς ἀπαιτεῖται ἡ σπουδὴ τῶν ἀριθμῶν, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον κύριον μέρος τῶν Στοιχείων. 'Εν τοσούτῳ ὅμως ὁ πλήρως ὁρισθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἐξαρκεῖ εἰς τὴν μέτρησιν ὅλων ἐκείνων τῶν μεγεθῶν, ἅτινα ὑπόκεινται εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν. Ὑπάρχουν γεωμετρικὰ ἀντικείμενα, γραμαὶ ἢ ἐπιφάνειαι κλπ., ἅτινα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν μὲ τὸ αὐτὸ κοινὸν μέτρον. Ταῦτα ὀνομάζονται ἀσύμμετρα μεγέθη καὶ ἡ σπουδὴ τούτων εἶναι ἀπαραίτητος. Ὅθεν, τὸ τρίτον μέρος τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν (κατά τινας, ἡ σπουδὴ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν περιέχει ἐν ἑαυτῇ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν). Τέλος τὸ τέταρτον κύριον μέρος τῶν Στοιχείων ἀφορᾷ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων τῶν στερεῶν καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου.

Εἰδικώτερον: Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον περιέχονται 23 ὅροι (ὁρισμοί), πέντε αἰτήματα, ἐννέα κοιναὶ ἔννοιαι καὶ 48 θεωρήματα καὶ προβλήματα. Οἱ ὁρισμοὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας φαίνεται, ὅτι ἔχουν διατυπωθῇ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, προσπαθοῦντος νὰ ἐκφράσῃ τὰ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος ἐν σχέσει πρὸς τούτους ἀναφερόμενα. Οἱ περισσότεροι ὅμως ὁρισμοὶ θεωροῦνται ὡς διατυπωθέντες ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν μὴ Πυθαγορείων τῶν ἀκμασάντων ἐν Ἀθήναις πρὸ τῆς ἐποχῆς τῆς λειτουργίας τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος. Τὰ πρῶτα 26 θεωρήματα τοῦ πρώτου βιβλίου ἀφοροῦν γενικῶς εἰς τὰ τρίγωνα, ἐνῷ χρῆσις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν γίνεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ 27ον θεώρημα. Ὡς συνάγεται δὲ ἀπὸ δύο χωρία τοῦ Ἀριστοτέλους, τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ 28ον, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ ἐπίσης εἰς ἰδιότητας παραλλήλων, ἔχουν εὑρεθῇ εἰς ἐποχὴν παλαιοτέραν τοῦ Ἀριστοτέλους (Ἀναλυτ. πρότ. II, 17, 66. Ἀναλυτ. ὕστ. 1, 5, 74, 13-16). Μέχρι τοῦ 32ου θεωρήματος συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῶν παραλλήλων, ἐνῷ τὰ θεωρήματα 33-48 περιέχουν σπουδὴν παραλληλογράμμων, τριγώνων καὶ τετραγώνων, σχετικὴν πρὸς τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν. Τὸ 47ον θεώρημα εἶναι τὸ λεγόμενον Πυθαγόρειον θεώρημα, ἐνῷ τὸ 48ον, τὸ τελευταῖον τοῦ πρώτου βιβλίου, εἶναι τὸ ἀντίστροφον τούτου.

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιέχει δύο ὁρισμοὺς καὶ 14 θεωρήματα καὶ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐφαρμογὰς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Δι' αὐτῶν σπουδάζεται ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἀπὸ τετράγωνα καὶ ὀρθογώνια εἰς ποικίλους συνδυασμούς, διὰ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως κλπ. χρησιμοποιουμένου πολὺ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, ὅπερ καλεῖται γνώμων. Ὁ δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ βιβλίου τούτου ἀφορᾷ εἰς τὸν γνώμονα, ὅστις εἶναι εὕρημα τοῦ Ἀναξιμάνδρου (. . . εὗρε δὲ Ἀναξίμανδρος καὶ γνώμονα πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι· Διογ. Λαέρτιος II 1-2 (εὗρε δὲ καὶ τὸν γνώμονα πρῶτος ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ἔστησεν αὐτὸν πρὸς μέτρησιν τῆς σκιᾶς εἰς τὸ ἡλιακὸν ὡρολόγιον τῆς Λακεδαίμονος (Σπάρτης) ). Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει καὶ ἐφαρμογὴν τῆς γεωμετρίας εἰς τὴν Ἄλγεβραν καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὸ μέγιστον μέρος εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Τὰ πρῶτα δέκα θεωρήματα ἀφοροῦν εἰς ἀλγεβρικὰς ταὐτότητας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς ἀκολούθως, ἐὰν διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, . . . νοήσωμεν τμήματα εὐθειῶν γραμμῶν, ἤτοι:

1. $\alpha(\beta+\gamma+\delta)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta$
2. ἐὰν $\beta+\gamma=\alpha$, τότε $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha^2$
3. $(\alpha+\beta)\alpha=\alpha^2+\alpha\beta$
4. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
5. $\alpha\beta+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$
6. $(2\alpha+\beta)\beta+\alpha^2=(\alpha+\beta)^2$
7. $(\alpha+\beta)^2+\alpha^2=2(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2$
8. $4(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2=[(\alpha+\beta)+\alpha]^2$
9. $\alpha^2+\beta^2=2\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2\right]$
10. $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]$.

Ὡς ἑνδεκάτη πρότασις εἶναι τὸ λεγόμενον πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς ἀποδιδόμενον, κατὰ τὴν εἰς τὸ β′ βιβλίον τῶν Στοιχείων διατύπωσιν, εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι, ὡς γνωστόν, δοθὲν τμῆμα εὐθύγραμμον νὰ διαιρεθῇ οὕτω πως εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ δοθὲν τμῆμα καὶ τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου μέρους. Κατὰ τοὺς νεωτέρους κριτικοὺς ἡ ἀλγεβρικὴ σημασία τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι, ὅτι ἐπιζητεῖται δι' αὐτοῦ ἡ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x^2=\alpha(\alpha-x)$ ἢ $x^2+\alpha x=\alpha^2$. Τὰ θεωρήματα 12 καὶ 13 τοῦ βιβλίου τούτου ἀφοροῦν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τριγώνου κειμένης ἀπέναντι ἀμβλείας ἢ ὀξείας γωνίας, ἐνῷ τὸ 14 πρόβλημα σπουδάζει τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα.

Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον περιέχονται 11 ὁρισμοὶ καὶ 37 θεωρήματα καὶ προβλήματα. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἀφορᾷ εἰς τὸν κύκλον, τὴν μόνην καμπύλην γραμμήν, τὴν ὁποίαν συναντῶμεν εἰς τὰ Στοιχεῖα, καὶ τὴν ἐπαφὴν ἢ τομὴν κύκλου καὶ εὐθείας, ἢ τομὴν κύκλων. Ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως εἶναι τὸ 16ον θεώρημα, ἔνθα γίνεται λόγος περὶ γωνίας, τῆς ὁποίας τὸ ἓν σκέλος εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα, ἐνῷ τὸ ἄλλο εἶναι τόξον κύκλου, τὸ πρῶτον ἀπαντώμενον θεώρημα περὶ ἐπαφῶν.

Εἰς τὸ 4ον βιβλίον περιέχονται ἑπτὰ ὁρισμοὶ καὶ 16 προβλήματα, ἀφορῶντα εἰς συνδυασμὸν κύκλου καὶ εὐθείας καὶ εἰς τὴν ἐγγραφὴν καὶ περιγραφὴν εἰς κύκλον κανονικῶν πολυγώνων. Μεταξὺ τῶν τελευταίων τούτων περιλαμβάνεται τὸ πεντάγωνον, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὁποίου χρησιμοποιεῖται τὸ 11ον πρόβλημα τοῦ δευτέρου βιβλίου, τὸ πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς.

Εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον σπουδάζεται ἡ ἀνισότης μεταξὺ γεωμετρικῶν ἀντικειμένων καὶ ἡ μέτρησις αὐτῆς, ἡ ὁποία εἶναι γεωμετρικὴ ἢ ἀριθμητική. Ἡ μέτρησις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Τὰ θεωρούμενα κατὰ τὴν σπουδὴν ταύτην μεγέθη παριστάνονται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 ὁρισμοὺς καὶ 25 θεωρήματα.

Εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν ὁμοίων γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἡ ὁμοιότης τῶν σχημάτων τούτων προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Διὰ πρώτην φορὰν ἐνταῦθα εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς συνθέτου ἀναλογίας, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Φιλόλαον. Εἰς τὸ 27ον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου περιέχεται τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν. Κατὰ τοῦτο, εἰς σύγχρονον ἀλγεβρικὴν διατύπωσιν, ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς παραστάσεως $x\,(\alpha - x)$ λαμβάνεται, ὅταν $x = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 5 ὁρισμοὺς καὶ 33 θεωρήματα καὶ προβλήματα.

Τὰ βιβλία 7ον, 8ον καὶ 9ον εἶναι ἀφιερωμένα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ 7ον βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιέχει 23 ὁρισμοὺς καὶ 39 θεωρήματα, γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ τῶν συνθέτων ἀριθμῶν, ὡς καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Εἰς τὸ 8ον βιβλίον, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ὁρισμοὺς παρὰ 27 θεωρήματα, συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Εἰς τὸ 9ον βιβλίον συνεχίζεται ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν. Σημειώνομεν ἰδιαιτέρως τὸ 20ὸν θεώρημα, ἔνθα ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. Τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν περιέχει ὁρισμοὺς παρὰ μόνον 36 θεωρήματα.

Τὸ 10ον βιβλίον εἶναι τὸ ἐκτενέστερον ὅλων καὶ περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων. Ὡς πρῶτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου περιέχεται τὸ ἑξῆς: ἐὰν δοθοῦν δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μέγεθος μικρότερον τοῦ μικροῦ μεγέθους. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ὑπὸ τῶν νεωτέρων καλουμένης ἐξαντλητικῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καὶ συχνότατα κατόπιν ὁ Ἀρχιμήδης, εἶναι δὲ συναφὲς πρὸς τὸ σήμερον καλούμενον ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου καὶ πρὸς τὸν 4ον ὁρισμὸν τοῦ πέμπτου βιβλίου, περικλείοντος τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 4 ὁρισμοὺς καὶ 115 θεωρήματα.

Τὸ 11ον βιβλίον ἐρευνᾷ τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς σχέσεις εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδα ἢ ἐπιπέδων μεταξύ των, ὡς καὶ τὰς σχέσεις παραλληλεπιπέδου καὶ πρίσματος. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 28 ὁρισμοὺς καὶ 39 θεωρήματα.

Τὸ 12ον βιβλίον ἐρευνᾷ σχέσεις τινὰς στερεῶν, χωρὶς νὰ ἐπιχειρῇ οὐδεμίαν συγκεκριμένην ἀριθμητικὴν μέτρησιν. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 θεωρήματα καὶ προβλήματα.

Τέλος εἰς τὸ 13ον βιβλίον συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῶν εἰς κύκλον ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων, ἡ διακοπεῖσα εἰς τὸ 4ον βιβλίον, καὶ σπουδάζεται ἡ ἐγγραφὴ τῶν κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν, μὲ τελικὸν συμπέρασμα, ὅτι μόνον τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφοῦν εἰς σφαῖραν, ἤτοι τὸ τετράεδρον, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, ὁ κύβος καὶ τὸ δωδεκάεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι πεντάγωνα κανονικά. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 θεωρήματα. Τὸ σύνολον τῶν προτάσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὰ Στοιχεῖα ἀνέρχεται εἰς 465. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ὡς καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἔργα του, τὰ ὁποῖα σώζονται, οὐδεμία ὑπάρχει εἰσαγωγή, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου. Δὲν εἶναι γνωστόν, ἐὰν αἱ πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου συνωδεύοντο ὑπὸ εἰσαγωγῆς τινος, οὐδεὶς δὲ ὑπαινιγμὸς ἀπαντᾷ περὶ τούτου εἰς τὰς ἐργασίας τῶν σχολιαστῶν τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου. Ἐξ ὅλων τῶν σωζομένων σχολίων συνάγεται, ὅτι τὰ Στοιχεῖα δὲν εἶναι ἐξ ὑπαρχῆς προσωπικὴ παραγωγὴ τοῦ Εὐκλείδου. Σχετικῶς ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ Γεμῖνος γράφει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων πραγματείας τῶν μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος, Εὐδόξου καὶ Θεαιτήτου. Τὸ 1ον, 2ον καὶ 4ον βιβλία τῶν Στοιχείων ἀποδίδονται εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ἐνῷ κατὰ τὸν Πρόκλον τὰ θεωρήματα 15 καὶ 26 τοῦ πρώτου βιβλίου εἶναι εὑρήματα τοῦ Θαλοῦ, καὶ τὰ θεωρήματα 12 καὶ 23 τοῦ αὐτοῦ βιβλίου εἶναι εὑρήματα τοῦ Οἰνοπίδου (Πρόκλ. σ. 283, 299, 333, 352). Τὸ πέμπτον βιβλίον, κατ' ἀνώνυμόν τινα σχολιαστήν, εἶναι ὁλόκληρον εὕρημα τοῦ Εὐδόξου (5ος τόμος τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, σελ. 280 καὶ 282), εἰς τοῦτον δὲ ἀποδίδεται καὶ μέρος τοῦ ἕκτου βιβλίου. Τὰ βιβλία 10 καὶ 13 ἀποδίδονται κατὰ κύριον λόγον εἰς τοὺς Πυθαγορείους, τὸν Θεαίτητον καὶ τὸν Εὔδοξον. Τὰ δὲ θεωρήματα 11 - 15 τοῦ 12ου βιβλίου ἀποδίδονται κατὰ μαρτυρίαν τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸν Εὔδοξον (Ἀρχιμ. Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου I, σελ. 4. Πρὸς Ἐρατοσθένην Ἔφοδος, σελ. 430). Ἡ νεωτέρα κριτικὴ μεταξὺ τῶν ἄλλων ἀποδίδει προσωπικῶς εἰς τὸν Εὐκλείδην τὴν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων (5ον αἴτημα I βιβλ.). Καίτοι δὲν εἶναι γνωστὸν τί ἀκριβῶς παρήγαγε προσωπικῶς ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, ἐν τούτοις δὲν ἀμφισβητεῖται ἡ προσωπικὴ πρωτότυπος δημιουργική του συμβολή. Μετὰ μεγάλης πιθανότητος ἀποδίδονται ὑπὸ τῶν νεωτέρων κριτικῶν ὡρισμένα θεωρήματα τῶν Στοιχείων εἰς τὸν Εὐκλείδην. Ἀλλὰ καὶ μόνη ἡ διατύπωσις τῶν Στοιχείων εἶναι ἀρκετή, διὰ νὰ κατατάξῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγίστων μαθηματικῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Τέλος, σημειοῦμεν σχετικῶς πρὸς τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς τὴν στερεομετρίαν, ὅτι αὗται κατὰ μεγάλην πιθανότητα προέρχονται ἐκ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἰσχυρισμὸς ἐνισχύεται καὶ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου. Ὁ Ἀρχύτας χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν λύσιν ταύτην τομὰς κώνων, κυλίνδρου καὶ τροχίλου, αἱ ὁποῖαι μαρτυροῦν περὶ μεγίστης ἀνθήσεως τῆς στερεομετρίας εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολήν. (Ἰδὲ τὴν λύσιν ταύτην εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν, εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Ἑνώσεως τῶν Φυσικῶν τῆς Ἑλλάδος «ὁ φυσικὸς κόσμος» (τεῦχος 3 - 4 Μαρτίου - Ἀπριλίου 1950).

Τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων τὰς διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τούτων, τιθεμένης προτάσεώς τινος ζητεῖται ἡ εὕρεσις ἀποδεικτικῶς τῆς ἀληθείας της (θεώρημα). Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ἀνήκουν αἱ προτάσεις, εἰς τὰς ὁποίας ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ὡρισμένου γεωμετρικοῦ σχήματος (πρόβλημα). Ἐν σχέσει μὲ τὸ πρῶτον εἶδος τῶν προτάσεων, ὁ Εὐκλείδης μετὰ τὴν ἀπόδειξιν παραθέτει πάντοτε τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», ἐνῷ ἐν σχέσει μὲ τὸ δεύτερον εἶδος τῶν προτάσεων παραθέτει τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Δὲν ὑπάρχουν στοιχεῖα διὰ νὰ κρίνωμεν, ἐὰν ἡ χρησιμοποίησις τῶν φράσεων τούτων ἀπετέλει συνήθειαν τῶν Πυθαγορείων ἢ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ἢ τῆς Σχολῆς τοῦ Ἀριστοτέλους. Εἶναι γνωστὸν ὅμως ἀπὸ τὸν πάπυρον τοῦ Rhind, ὅτι ἡ φράσις «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι» ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν Αἰγυπτίων μετὰ τὸ τέλος γεωμετρικῆς τινος κατασκευῆς, ἡ ὁποία ἐγίνετο πάντοτε ἐμπειρικῶς καὶ ἄνευ ἀποδείξεώς τινος. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν δύο τούτων φράσεων ἐξηγεῖται ἴσως ἐκ τῆς προσπαθείας τῶν Πτολεμαίων νὰ ἐμφανίσουν ἑαυτοὺς ὡς συνεχιστὰς τῆς παραδόσεως τῶν παλαιῶν Αἰγυπτίων εἰς ὅλα τὰ πεδία τοῦ πολιτισμοῦ.

Μεταξὺ τῶν προτάσεων τῶν Στοιχείων ἀπαντῶμέν τινας ὑπὸ τὸ ὄνομα πόρισμα. Ἡ ἀλήθεια τοῦ πορίσματος δὲν ζητεῖται ἐξ ὑπαρχῆς. Ἐὰν δηλ. γεωμετρικὴ πρότασις τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν καὶ εὑρεθῇ ἀποδεικτικῶς ἡ ἀλήθεια ταύτης, ἐκ ταύτης ὅμως συνάγεται καὶ ἡ ἀλήθεια ἄλλης προτάσεως, ἡ ὁποία δὲν ἐτέθη πρὸς ἀπόδειξιν, ἡ τελευταία αὕτη πρότασις ὀνομάζεται πόρισμα τῆς ἀρχικῶς τεθείσης προτάσεως.

### Αἱ ἀποδεικτικαὶ μέθοδοι τῶν Στοιχείων.

Αὗται εἶναι τέσσαρες. Ἡ συνθετική, ἡ ἀναλυτική, ἡ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον ἢ ἄτοπον καὶ ἡ τῆς τελείας ἢ πλήρους ἐπαγωγῆς. Κατὰ τὴν συνθετικὴν μέθοδον, ὅταν τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν γεωμετρική τις πρότασις, ἀναχωροῦμεν ἐκ γνωστῶν προτάσεων στηριζομένων εἰς τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰ ἀξιώματα καὶ διὰ σειρᾶς καταλλήλων συλλογισμῶν καταλήγομεν εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς τεθείσης προτάσεως. Αὕτη εἶναι ἡ γενικὴ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος, ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Πλάτωνα, δέχεται πρὸς στιγμὴν τὸ ζητούμενον ἔστω Α, ὡς ἀληθές. Ἐκ τῆς ἀληθείας τούτου συνάγει (εἰ δυνατὸν) τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος Β καὶ ἐκ ταύτης τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος Γ. . . Ἐὰν ἡ ἀλήθεια τῆς τελευταίας προτάσεως Γ εἶναι γνωστὴ ἐξ ἄλλων στοιχείων, τότε συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως Α. Ὅμως ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον καὶ τοὺς Πυθαγορείους, πολὺ πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πλάτωνος. Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον, δεχόμεθα πρὸς στιγμὴν τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν τεθεῖσαν πρὸς ἀπόδειξιν. Δι' ἄλλων ὅμως προτάσεων γνωστῶν ὡς ἀληθῶν, γνωρίζομεν ὅτι ἡ γενομένη παραδεκτὴ ὡς ἀληθὴς ἀντίθετος πρότασις εἶναι ψευδής. Συνεπῶς ἡ ζητουμένη πρότασις εἶναι ἀληθής. Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς μία μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν ἰσχύῃ εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν. Αὕτη χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ θεωρήματα 3, 14, 27, 35 τοῦ 7ου βιβλίου, 13 τοῦ 8ου καὶ 20 τοῦ 9ου.

### Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τῶν Στοιχείων.

Ὡς γεωμετρικὰ σχήματα χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὰ Στοιχεῖα ἡ εὐθεῖα γραμμή, ὁ κύκλος καὶ τὰ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τούτων προκύπτοντα. Σχήματα δηλ. δυνάμενα νὰ σχεδιασθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Προβλήματα μὴ δυνάμενα νὰ λυθοῦν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου ἐθεωροῦντο ἄλυτα, καίτοι ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου δὲν ἔχομεν συγκεκριμένας μαρτυρίας. Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα προβλήματα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῆς τριχοτομήσεως τῆς ὀξείας γωνίας. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον, ὅτι τὰ τρία ταῦτα προβλήματα δὲν εἶχον λύσιν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῶν ἄλλων καμπύλων. Ἡ χρησιμοποίησις εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν ἁπλουστάτων γεωμετρικῶν σχημάτων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου δὲν εἶναι τυχαία. Ἀκολουθεῖ τὴν γενικὴν τάσιν τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος νὰ ἀναγάγῃ τὰ πάντα εἰς ὀλίγας ἁπλᾶς γενικὰς ἀρχὰς νοήσεως, συναφεῖς ὅμως πρὸς τὴν πραγματικότητα, ὡς αὕτη παρέχεται κατὰ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως.

Ἡ λέξις ἀξίωμα οὐδαμοῦ ἀναφέρεται εἰς τὰ στοιχεῖα, καίτοι αὕτη μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐννοίας ὅμως ἀξιωμάτων ἐκφράζουν τὰ αἰτήματα καὶ αἱ «κοιναὶ ἔννοιαι» τῶν Στοιχείων. Τὴν διάκρισιν μεταξὺ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος παρέχει ὡς κάτωθι ὁ Πρόκλος εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ (σ. 178). «1) Τὰ αἰτήματα εἶναι πρὸς τὰ ἀξιώματα ὡς τὰ προβλήματα πρὸς τὰ θεωρήματα. Τὰ αἰτήματα ἰσχυρίζονται τὴν δυνατότητα μιᾶς κατασκευῆς, ἥτις δὲν δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς ἄλλας κατασκευὰς γενομένας δεκτὰς ὡς δυνατάς. Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν τὴν ἰδιότητα, ἥτις ἄνευ ἀποδείξεως δύναται νὰ προσκρμοσθῇ εἰς ἓν σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ ἔχει ἀποδειχθῆ ἤδη ἢ λαμβάνεται αἰτηματικῶς. 2) Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ πᾶν μέγεθος καὶ ἰσχύουν καὶ ἐκτὸς τῆς γεωμετρίας. Τὰ αἰτήματα ἐκφράζουν ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν μόνον εἰς γεωμετρικὰ σχήματα. 3) Τὰ ἀξιώματα ἰσχύουν καθ' ἑαυτά, δηλ. ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σημασίας τῶν εἰς αὐτὰ περιεχομένων ἐκφράσεων (διατυπώσεων). Τὰ αἰτήματα δὲν προέρχονται κατ' ἀνάγκην ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν εἰς αὐτὰ περιεχομένων διατυπώσεων». Ἡ σημερινὴ γεωμετρία, ὡς γνωστόν, χρησιμοποιεῖ μόνον τὴν λέξιν ἀξίωμα.

Ἡ λέξις λῆμμα σημαίνει λῆψιν ἀρχῆς τινος γεωμετρικῆς χρησίμου πρὸς ἀπόδειξιν προτάσεων. Ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει ταύτην ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀξιώματος, ὅπως π.χ. εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι, ἔνθα χρησιμοποιεῖ, ὡς λαμβανόμενον, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Εὐκλείδης εἴς τινας περιπτώσεις εἰς τὰ Στοιχεῖα χρησιμοποιεῖ τὴν λέξιν λῆμμα καὶ ὑπὸ ἄλλην ἔννοιαν. Τὴν θεωρεῖ ὡς ἐκφράζουσαν βασικόν τι θεώρημα χρήσιμον διὰ περαιτέρω ἐρεύνας καὶ προβαίνει εἰς ἀπόδειξιν τούτου. Τέλος, ὁ ὅρος «διορισμὸς» εἶναι εὕρεσις τοῦ μαθηματικοῦ Λέοντος, κατὰ τὸν Πρόκλον. Ἡ φράσις πρόβλημά τι ἔχει ἢ οὐκ ἔχει διορισμόν, σημαίνει πότε πρόβλημά τι εἶναι δυνατὸν ἢ ἀδύνατον. Ἔρευναι ὅμως ἐπὶ τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ μιᾶς κατασκευῆς ἦσαν γνωσταὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σωκράτους (Μένων 86) καὶ συνεπῶς ἡ εἴδησις, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Πρόκλος, δὲν εἶναι ἀκριβής.

Γλωσσικῶς ἐξεταζόμενα τὰ Στοιχεῖα παρουσιάζουν ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ὁμοιομορφίαν. Ἐὰν προχωρήσωμεν ὅμως εἰς συγκριτικὴν σπουδὴν τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τοῦ ἔργου, θὰ διακρίνωμεν ἐνίοτε φραστικάς τινας ἀνομοιομορφίας, προσθήκας ἢ ἀφαιρέσεις, ὀφειλομένας εἰς τοὺς κατὰ καιροὺς διαφόρους ἐκδότας τῶν Στοιχείων, οἵτινες ἐπέφερον εἰς αὐτὰ τὰς κατὰ τὴν γνώμην των ἀναγκαίας μεταβολάς. Καλυτέρα ἔκδοσις τῶν Στοιχείων θεωρεῖται σήμερον ἡ ἐν Λειψίᾳ γενομένη ὑπὸ τοῦ Δανοῦ I. Heiberg (1883), ἡ ὁποία ὡς ἀπώτερόν της θεμέλιον ἔχει ἔκδοσιν παλαιοτέραν τῆς γενομένης ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (4ος αἰὼν μ.Χ.). Ἡ παροῦσα ἔκδοσις χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκδοσιν I. Heiberg.

#### Ἄλλαι πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου.

Ὁ Εὐκλείδης πλὴν τῶν Στοιχείων ἔγραψε σειρὰν ὅλην ἔργων, μερικὰ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν, ἐνῷ ἄλλα ἀπωλέσθησαν. Τὰ περισωθέντα εἶναι 1) Δεδομένα 2) Ὀπτικά. 3) Κατοπτρικά. 4) Φαινόμενα (ἀστρονομικόν). 5) Κατατομὴ κανόνος. 6) Εἰσαγωγὴ ἁρμονική. Διὰ τὴν «Κατατομὴν κανόνος», ἡ ὁποία περιέχει στοιχεῖα τῆς θεωρίας περὶ μουσικῆς τοῦ Πυθαγόρου, ὑποστηρίζεται, ὅτι δὲν εἶναι γνήσιον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου. Κατ' ἄλλους, τοῦτο ἀποτελεῖ περίληψιν γενικωτέρου περὶ μουσικῆς ἔργου τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τὸν τίτλον «Στοιχεῖα μουσικῆς», τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν σώζεται. Διὰ τὴν μουσικὴν πραγματείαν «Εἰσαγωγὴ ἁρμονική» ὑποστηρίζεται, ὅτι δὲν εἶναι τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ τοῦ Κλεομήδους. Ἀπολεσθέντα ἔργα μνημονεύονται 1) Πορίσματα, περιεχόμενα εἰς τρία βιβλία, 2) Τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον, σωζόμενον κατὰ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν, 3) Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, δύο βιβλία, ἐξ ὧν σώζονται μόνον 4 λήμματα περιλαμβανόμενα εἰς πραγματείαν τοῦ Πάππου, 4) Κωνικά. 4 βιβλία, 5) Ψευδάρια, περὶ τοῦ περιεχομένου τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου. Περὶ κωνικῶν εἶχε γράψει κατὰ τὸν Πάππον πρὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς 4 βιβλία ὁ περίφημος μαθηματικὸς Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος. Ἐξ ἀραβικῶν δὲ καὶ λατινικῶν ἀποσπασμάτων λαμβάνομεν τὴν εἴδησιν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶχε γράψει πραγματείαν ἀφορῶσαν εἰς τὴν μηχανικήν. Ἐκ περισωθέντων ἀποσπασμάτων καὶ διαμνημονεύσεως χωρίων τινῶν ἐκ τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων, ἀνασυνεκροτήθη μετά τινος ἐπιτυχίας τὸ ἀπολεσθὲν ἔργον «Πορίσματα».

Ἡ λέξις πόρισμα ἐνταῦθα δὲν ἔχει τὴν συνήθη ἔννοιαν τοῦ πορίσματος, ὅπως ἀπαντῶμεν αὐτὴν εἰς τὰ Στοιχεῖα.

Πρόκειται περὶ προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς γεωμετρικοὺς τόπους καὶ αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς μεῖξις θεωρημάτων καὶ προβλημάτων. Αἱ προτάσεις αὗται ἀνήρχοντο εἰς τὸν ἀριθμὸν 171. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν «Πόρισμα», διασωθέν, ὡς ἀναφερόμενον εἰς πραγματείαν τοῦ Πάππου (VII), καὶ ἔχον ὡς ἑξῆς: Ἐὰν τέμνωνται αἱ γραμμαὶ ἑνὸς κλειστοῦ τετραπλεύρου εἰς 6 σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τρία δίδονται, ὡς κείμενα ἐπ' εὐθείας, καὶ ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν ὑπολοίπων σημείων τὰ δύο κεῖνται ἕκαστον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, τότε τὸ τελευταῖον σημεῖον ἔχει ὡς γεωμετρικὸν τόπον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δύναται νὰ προσδιορισθῇ. Τὸ πόρισμα τοῦτο, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ Πάππου, ἐσπουδάζετο εἰς δέκα περιπτώσεις, ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν σημείων καὶ εὐθειῶν. Ἐκ τοῦ πορίσματος τούτου καὶ μόνον γίνεται φανερὰ ἡ σημασία τοῦ περιεχομένου τοῦ ἀπολεσθέντος σχετικοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ πραγματεία Δεδομένα περιέχει 94 προτάσεις, τῶν ὁποίων προηγοῦνται 15 ὁρισμοί. Τὸ ἔργον τοῦτο θεωρεῖται ὡς περιέχον ἐφαρμογὰς ἐκ τῆς θεωρίας τῶν Στοιχείων. Ἀναφέρομεν μερικὰς ἐκ τῶν προτάσεων τούτων. 1) Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ἔχει δοθῇ ὁ λόγος. 4) Ἐὰν ἀπὸ δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ δεδομένον μέγεθος, τὸ λοιπὸν μέγεθος ἔχει δοθῇ. 22) Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχουν ἕκαστον δεδομένον λόγον πρός τι μέγεθος, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει πρὸς τοῦτο δεδομένον λόγον. 41) Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν δεδομένην καὶ ἔχῃ δοθῇ ὁ λόγος τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν, τότε τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου εἶναι δεδομένον. 92) Ἐὰν εἰς δοθέντα κατὰ τὴν θέσιν κύκλον ληφθῇ σημεῖόν τι ἐντὸς αὐτοῦ ὡς δοθέν, καὶ διὰ τοῦ σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, τότε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἐκ τοῦ σημείου μέχρι τῆς περιφερείας εὐθείας εἶναι δεδομένον.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο πραγματειῶν τοῦ Εὐκλείδου Δεδομένα καὶ Στοιχεῖα συνάγεται, ὅτι ἡ πραγματεία Δεδομένα εἶναι πολὺ μεταγενεστέρα τῶν Στοιχείων. Καὶ εἰς ταύτην, ὅπως καὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα, λύονται ἐξισώσεις ἀλγεβρικαὶ δευτέρου βαθμοῦ γεωμετρικῶς. Ὑπὸ ἀλγεβρικὴν ἔποψιν παρουσιάζει ἐνδιαφέρον καὶ τὸ σωζόμενον μοναδικὸν ἀριθμητικὸν ἐπίγραμμα τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὐκλείδην (Συλλογὴ ἀρχαίων ἐπιγραμμάτων, τῶν Βυζαντίνων Κεφάλα-Πλανούδη, τόμος 3ος), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖς·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
«Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη;
εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις».
Εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίιστορ.

ἑρμηνεία: Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιποροῦσαν·
ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον, ἐστέναζεν ἡ ὄνος.
Ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε·
«Μητέρα, γιατί θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι;
ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον, θὰ ἔφερα διπλάσιον ἀπὸ τὸ βάρος σου·
ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα, θὰ εἴχαμε ἴσον».
Εἰπὲ τὸ μέτρον (τὸν ἀριθ. τῶν σάκκων), ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας.

(σημ.: Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν σάκκων τῆς ἡμιόνου κληθῇ $y$ καὶ τῆς ὄνου $x$, τότε τὸ σύστημα πρώτου βαθμοῦ θὰ εἶναι $y+1=2(x-1)$ καὶ $y-1=x+1$, ἐξ οὗ $x=5$ καὶ $y=7$).

Τὸ φερόμενον ὡς 14ον βιβλίον τῶν Στοιχείων εἶναι πραγματεία τοῦ Ὑψικλέους τοῦ Ἀλεξανδρέως (περίπου 150 π.Χ.), ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς ὡς συγγραφεὺς ἀστρονομικῆς πραγματείας, ἥτις σώζεται, καὶ ἄλλων ἔργων, ὅπως τὰ περὶ ἁρμονίας, περὶ σφαιρῶν καὶ περὶ πολυγωνικῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ 14ου βιβλίου, φαίνεται ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἔγραψε πραγματείαν, εἰς τὴν ὁποίαν περιελάμβανε σύγκρισιν δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου, ἐγγραφομένων εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν καὶ τὸν λόγον τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ στερεὰ ταῦτα. Κατὰ ταύτην, ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῶν στερεῶν τούτων, διότι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἡ αὐτή. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 12 θεωρήματα. Τέλος, τὸ 15ον βιβλίον θεωρεῖται ὡς ἔχον μικρότερον ἐνδιαφέρον ἀπὸ τὸ 14ον. Τοῦτο περιέχει κατασκευὰς στερεῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πέντε πρῶται εἶναι αἱ ἑξῆς: 1) Εἰς τὸν δοθέντα κύβον νὰ ἐγγραφῇ πυραμίς. 2) Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα νὰ ἐγγραφῇ ὀκτάεδρον. 3) Εἰς τὸν δοθέντα κύβον νὰ ἐγγραφῇ ὀκτάεδρον. 4) Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον νὰ ἐγγραφῇ κύβος. 5) Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον νὰ ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον. Μετὰ τὴν κατασκευὴν ταύτην, ὁ συγγραφεὺς τοῦ βιβλίου τούτου ἀναφερόμενος εἰς τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν τῶν κανονικῶν στερεῶν, λέγει ὅτι ταύτας εὗρεν ὁ μέγας αὐτοῦ διδάσκαλος Ἰσίδωρος.

Πρόκειται περὶ τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ ἐκ Τύρου καὶ συνεπῶς οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν ἀνήκει εἰς τὸν Εὐκλείδην.

## ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α΄. Αἱ πρῶται ἀρχαὶ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀνάγονται εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ Ἕλληνες ἔθεσαν εἰς ἑαυτοὺς τὸ ἐρώτημα: αἴτιον καὶ προέλευσις τοῦ Κόσμου. Ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο πρῶτος, κατὰ τὴν παράδοσιν, ἐπεχείρησε νὰ δώσῃ ὁ Θαλῆς, μετὰ τοῦτον ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ἀναξίμανδρος καὶ μετ' αὐτὸν ὁ Πυθαγόρας. Ὁ Ἀναξίμανδρος εἶναι ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος σπουδάζει ἐπὶ τῇ βάσει ἀριθμῶν τὰς σχέσεις μεγέθους Γῆς, Ἡλίου καὶ Σελήνης. Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι φρονοῦν, ὅτι μόνον τὸ ἔχον μορφὴν δύναται νὰ γνωσθῇ. Μορφὴν ὅμως οὐχὶ ὑπὸ τὴν Πλατωνικὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου, ἀλλὰ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ σχήματος. Ἡ μορφὴ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μέτρον. Ὅθεν ἡ ἔρευνα τῆς φύσεως δέον νὰ στηριχθῇ κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μέτρου. Εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολὴν εὑρίσκονται καὶ σπουδάζονται αἱ τέσσαρες βασικαὶ συνεχεῖς ἀναλογίαι. Ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρική, ἡ ἁρμονικὴ καὶ ἡ μουσική. Διὰ τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν ὁ Ἰάμβλιχος (ἐν τῇ εἰσ. Ἀριθμ. Νικομάχου) λέγει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας εἰσήγαγεν αὐτὴν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος, ἐνῷ διὰ τὰς τρεῖς πρώτας ἰσχυρίζεται, ὅτι αὗται εἶναι εὕρημα τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῆς Σχολῆς του. Δὲν θεωρεῖται ὅμως βάσιμος ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ Ἰαμβλίχου, ὅτι ἡ μουσικὴ ἀναλογία εἰσήχθη εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος. Αἱ τέσσαρες αὗται συνεχεῖς ἀναλογίαι ἔχουν ὡς ἑξῆς:

1) Ἀριθμητική: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$

2) Γεωμετρική: $\alpha : \beta = \beta : \gamma$

3) Ἁρμονικὴ ἢ ὑπεναντία: $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ ἢ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$

(ἡ ἁρμονικὴ ἢ ὑπεναντία ἀναλογία εἶναι ὁμοία πρὸς τὸν γνωστὸν τύπον τῶν σφαιρικῶν κατόπτρων, ἔνθα β ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος καὶ α καὶ γ αἱ ἀποστάσεις τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου).

4) Ἡ μουσική: $\alpha : \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} : \beta$

Εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Νικομάχου ἐκ Γερασῶν περὶ Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς, γραφεῖσαν περὶ τὸ 30 μ.Χ., σώζεται ἀπόσπασμα ἔργου τοῦ Πυθαγορείου Φιλολάου, ἀναφέροντος τὸν κύβον ὡς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν. Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εὑρίσκονται πράγματι εἰς ἁρμονικὴν συνεχῆ ἀναλογίαν, διότι εἶναι $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$

Τοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριῶν πρώτων ἀναλογιῶν ἔχει δώσει ὁ Ἀρχύτας, ὡς ἐξάγεται ἔκ τινος ἀποσπάσματος πραγματείας του μνημονευομένου εἰς τὰ «Πτολεμαίου ἁρμονικὰ» τοῦ Πορφυρίου.

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6, 12 εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Ἡ μουσικὴ ἀναλογία δύο ἀριθμῶν περιέχει ὡς δευτέραν ἀνάλογον τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ὡς τρίτην ἀνάλογον τὸ ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῶν. Ὁ κύβος, πάλιν, παριστᾷ μουσικὴν ἀναλογίαν σχηματιζομένην ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν 6 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν 12, ἤτοι εἶναι $6 : \frac{2.6 \cdot 12}{6+12} = \frac{6+12}{2} : 12$ ἢ $6 : 8 = 9 : 12$. Τὴν μουσικὴν ταύτην ἀναλογίαν ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων εἰς τὴν Ἐπινομίδα (κεφ. 12, 990 C κ. ἑ.).

Κατὰ τοὺς Πυθαγορείους, αἱ ἀναλογίαι ἀποτελοῦν μορφὰς λογισμοῦ, αἱ ὁποῖαι κυριαρχοῦν καὶ διέπουν τὴν ἐκ τοῦ χάους μορφικὴν δημιουργίαν τοῦ Κόσμου. Ἐφαρμογὴν δὲ τῶν ἀναλογιῶν τούτων ἀπαντῶμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ναῶν καὶ τῶν θεάτρων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Καὶ εἰς μὲν τοὺς ναοὺς παρατηροῦμεν ἐφαρμογὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, ἰδίως κατὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν κιόνων, ἐνῷ εἰς τὰ θέατρα ἐφαρμογὴν τοῦ προβλήματος τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (χρυσῆς τομῆς). Εἰς δὲ τὰ Μνημεῖα τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν παρατηροῦνται, πλὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ($6 : 8 = 9 : 12$), καὶ αἱ σχέσεις $3 : 1$, $12 : 7$, $12^2 : 7^2$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ σχέσις $12 : 7$ παριστᾷ κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{3}$.

Ὁ Σωκράτης στρέφει τὴν Πυθαγόρειον ἔρευναν πρὸς σπουδὴν τῆς ἐν τῷ Κόσμῳ ἁρμονίας, εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἁρμονίας εἰς τὸν ἐσωτερικὸν ἄνθρωπον (χαρακτηριστικὸν συναφῶς εἶναι καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ Δημοκρίτου λεχθέν, ἄνθρωπος μικρὸς κόσμος), ἐνῷ ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἀριστοτέλης συνδυάζουν τὴν Πυθαγόρειον καὶ τὴν Σωκρατικὴν ἔρευναν.

Β'. Ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία ἔχει ὡς ἀντικείμενον ἐρεύνης τὸν ἐνορώμενον χῶρον. Τοῦτον δέχεται ὡς τρισδιάστατον καὶ προβαίνει εἰς τὴν διατύπωσιν ἁπλῶν βασικῶν ἐννοιῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιχειρεῖ τὴν ἔρευναν. Γνώρισμα τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ διατύπωσις ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρων ἁπλῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν. Τὰς ἁπλᾶς ἀρχικὰς ἐννοίας αὐτῆς συναφεῖς ὅμως πρὸς τὴν πραγματικότητα διαιρεῖ ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία εἰς τρεῖς κατηγορίας. Πρῶτον εἰς ὁρισμούς, δεύτερον εἰς αἰτήματα καὶ τρίτον εἰς κοινὰς ἐννοίας, ἐνίοτε δὲ καὶ λήμματα. Ὅθεν, ἡ γενικὴ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία εἶναι ἡ λεγομένη ἀξιωματικὴ μέθοδος. Τὰ ἀξιώματα (αἰτήματα, ἔννοιαι καὶ ἐνίοτε λήμματα ἢ ὁρισμοὶ) δέον νὰ εἶναι ἀλήθειαι ὑπὸ τὴν Ἀριστοτέλειον ἑρμηνείαν τοῦ ὅρου ἀλήθεια, ἑρμηνείαν, ἥτις διαχωρίζει τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τὸν συμβολικὸν χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον ἀπέδιδον εἰς αὐτὰ οἱ Πυθαγόρειοι*.

* Ἑρμηνείαν τῶν ὅρων «ἐνόρασις» καὶ «ἀλήθεια» παρέχει ὁ Κ. Γεωργούλης εἰς τὴν ἔκδοσιν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἔργου «μετὰ τὰ φυσικὰ» τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ εἰς συναφῆ πρὸς τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστοτέλους ἄρθρα του.

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ἀξίωμα εἶναι πρωταρχικὴ ἔννοια, τὴν ὁποίαν ἀναγκαστικῶς πρέπει νὰ κατέχῃ ἐκεῖνος, ὅστις πρόκειται ν' ἀποκτήσῃ τὴν μάθησιν οἱουδήποτε πράγματος [ἀρχὴ ἣν ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον. Ἀναλυτ. ὕστερα 1, 2 (72α 17)].

Οἱ ὁρισμοί, τὰ αἰτήματα καὶ αἱ κοιναὶ ἔννοιαι, ὡς ταῦτα ἔχουν διατυπωθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ἔχουν ὑποστῆ κατὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου μικρὰς μεταβολάς. Αὗται ὅμως δὲν μεταβάλλουν τὴν μορφὴν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Ὡς θεμελιώδεις ὁρισμοὶ ταύτης θεωροῦνται αἱ ἔννοιαι σημεῖον, γραμμή, ἐπιφάνεια, ἐπίπεδον, γωνία, στερεόν. Διὰ τὴν ἀριθμητικήν, θεμελιώδεις ὁρισμοὶ θεωροῦνται αἱ ἔννοιαι μονὰς καὶ ἀριθμός. Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον, ὁ Θαλῆς εἶχεν ὁρίσει τὸν ἀριθμὸν ὡς «μονάδων σύστημα» (Ἰάμβλ. εἰς ἀριθμ. εἰσαγ. Νικομάχου σελ. 10).

Κατὰ τὰ Στοιχεῖα, σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος. Ἡ ἔννοια μέρος δηλοῖ διάστασιν, τὴν ὁποίαν ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία δέχεται ὡς δεδομένην ἐκ τῶν πραγμάτων ἔννοιαν. Ἡ ἔννοια σημεῖον εἶναι ἡ θεμελιωδεστέρα τῶν ἐννοιῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ταύτην δὲ ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων, ὅταν ἀποφαίνεται περὶ τῆς σχετικότητος τῆς ἀξίας τῆς γεωμετρίας ἐν σχέσει πρὸς τὴν φιλοσοφίαν, ὡς θὰ μνημονεύσωμεν κατωτέρω. Οἱ Πυθαγόρειοι ὥριζον τὸ σημεῖον, ὡς μονάδα θέσιν ἔχουσαν. Τῆς ἐννοίας σημεῖον θεωροῦνται παράγωγοι αἱ λοιπαὶ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Τοῦτο καταφαίνεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς. Κατὰ τοῦτον εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται ἐκείνη ἡ γραμμή, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου ἐπὶ τῶν σημείων της. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς εὐθείας γραμμῆς ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἶναι σκοτεινός. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἐπεχειρήθη κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας ἡ ἑρμηνεία του, χωρὶς ἀκόμη νὰ ἔχῃ εὑρεθῆ ἑρμηνεία τοιαύτη, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἐπιδέχεται ἀντίρρησιν. Ὁ Πλάτων ὁρίζει ὡς εὐθεῖαν γραμμὴν ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὸ μέσον καλύπτει τὰ ἄκρα, ἐνῷ ὁ Ἀρχιμήδης ὁρίζει αὐτήν, ὡς τὴν ἐλαχίστην γραμμὴν μεταξὺ γραμμῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα.

Ἐπιφάνεια εἶναι, κατὰ τὰ Στοιχεῖα, πᾶν ὅ,τι ἔχει μῆκος καὶ πλάτος. Ἐπίπεδον δὲ ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας τιθεμένη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει καθ' ὅλα αὐτῆς τὰ σημεῖα.

Γωνία ἐπίπεδος εἶναι ἡ «κλίσις» δύο εὐθειῶν συναντωμένων καὶ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας. Πλὴν τῆς τοιαύτης γωνίας, ἀναφέρεται εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ ἡ γωνία, τῆς ὁποίας τὸ ἓν σκέλος εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἐνῷ τὸ ἄλλο εἶναι τόξον κύκλου.

Στερεόν, τέλος, εἶναι ὅ,τι ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ βάθος, ἤτοι πᾶν ὅ,τι ἔχει τρεῖς διαστάσεις.

### Γ') Ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου καὶ ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας.

Τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν γεωμετρίαν ἀπαντῶμεν διατυπουμένην τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ 'Αναξαγόρου. 'Η ἔννοια αὕτη εἶναι συναφὴς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ἐπίσης διετύπωσεν ὁ 'Αναξαγόρας, ὡς φαίνεται εἰς σωζόμενον ἐκ τοῦ ἔργου του «περὶ φύσεως» ἀπόσπασμα. 'Η διατύπωσις αὕτη ἔχει ὡς ἑξῆς: «οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί, (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι μὴ οὐκ εἶναι) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἔστι μεῖζον» (διότι κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ μικροῦ δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ μικρότατον, ἀλλὰ πάντοτε μικρότερον, (διότι τὸ ὑπάρχον δὲν δύναται νὰ παύσῃ ὑπάρχον, ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν θεωρηθῇ) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερον). 'Η ἔννοια τῆς συνεχείας ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν 'Ιπποκράτη τὸν Χῖον, ὁ ὁποῖος τὴν χρησιμοποιεῖ κατὰ τὰς ἀποπείρας αὐτοῦ πρὸς τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Χρησιμοποιεῖ δηλ. οὗτος πρὸς τοῦτο τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θεώρημα προϋποθέτον γνῶσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας περιέχει ὁ τέταρτος ὁρισμὸς τοῦ πέμπτου βιβλίου τῶν Στοιχείων ἔχων ὡς ἑξῆς: «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν». 'Η ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι ὅτι, ὅταν δοθοῦν δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορά των πολλαπλασιαζομένη ἐπαρκῶς ὑπερβαίνει τὸ μεγαλύτερον μέγεθος. Σαφεστέραν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας παρέχει ὁ 'Αρχιμήδης εἰς δύο αὐτοῦ πραγματείας ἀναφέρων τοῦτο ὡς λῆμμα. Εἰς τὴν πραγματείαν του «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι» ὁ 'Αρχιμήδης μνημονεύων, ὅτι ὁ Εὔδοξος ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (χρησιμοποιῶν τὸ ἀξίωμα συνεχείας), διατυπώνει τοῦτο ὡς ἑξῆς: «ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου» ("Ετι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, εἶναι δυνατὸν ἡ διαφορά των λαμβανομένη πολλὰς φορὰς νὰ ὑπερβῇ ὁλόκληρον τὸ προτεθὲν μεγαλύτερον μέγεθος). Εἰς τὴν πραγματείαν του «Τετραγωνισμὸς παραβολῆς», κατὰ τὴν προσφώνησιν πρὸς τὸν φίλον του μαθηματικὸν Δοσίθεον, τὸ ἀξίωμα τοῦτο μνημονεύεται ὡς ἑξῆς: «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου» (ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν τὸ μεγαλύτερον ἐκ δύο δοθέντων μεγεθῶν ὑπερέχει, εἶναι δυνατὸν λαμβανομένη πολλάκις νὰ ὑπερβῇ τὸ δοθὲν (μεγαλύτερον) πεπερασμένον μέγεθος). 'Εν συνεχείᾳ πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην διατύπωσιν ὁ 'Αρχιμήδης προσθέτει: οἱ προγενέστεροι γεωμέτραι ἐχρησιμοποίησαν τὸ «λῆμμα» τοῦτο διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι οἱ κύκλοι ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουν ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων αὐτῶν καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφῶν μαρτυριῶν τοῦ Ἀρχιμήδους συνάγεται, ὅτι τὸ ἀξίωμα συνεχείας δὲν εἶναι εὕρημα τοῦ Εὐδόξου, ἀφοῦ τὸ ἐχρησιμοποίησαν οἱ προγενέστεροι γεωμέτραι. Διότι ναὶ μὲν ὁ Εὔδοξος εἶναι προγενέστερος τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀλλὰ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος εἶναι προγενέστερος τοῦ Εὐδόξου· ἐγνώριζε δὲ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ὡς ἀναφέρεται ἀνωτέρω. Πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας συναντῶμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Δὲν εἶναι γνωστὸν πότε ἔγινεν ἡ ἀπόδειξις αὕτη, εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου (ὅστις εἶναι νεώτερος τοῦ Ἀναξαγόρου 35 περίπου ἔτη). Ἐφ' ὅσον λοιπὸν δὲν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἐγένετο πρὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ὁ Ἀναξαγόρας εἶχε διατυπώσει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, τὸ ὀρθότερον εἶναι νὰ μνημονεύεται τοῦτο ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀναξαγόρου καὶ ὄχι ὡς ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου ἢ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀποκλείεται νὰ ἀνήκῃ ἡ εὕρεσις τούτου εἰς τὸν Εὔδοξον ἢ τὸν Ἀρχιμήδη ἢ τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον.

Πρὸ ὀλίγων ἀκόμη ἐτῶν τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐφέρετο εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ δὲ γεωμετρίαι τῶν νεωτέρων αἱ μὴ χρησιμοποιοῦσαι τὸ ἀξίωμα συνεχείας, ὀνομάζονται «μὴ ἀρχιμήδειοι» γεωμετρίαι. Τὴν ὀνομασίαν ἀξίωμα μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους χρησιμοποιεῖ ὁ D. Hilbert εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας» (Grundlagen der Geometrie, 1930, σ. 30). Εἰς τὴν νεωτέραν διεθνῆ βιβλιογραφίαν ὀνομάζεται τοῦτο ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Κων. Καραθεοδωρῆ, ἀναφέρων τοῦτο εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν, τὸ ὀνομάζει θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ἀποδίδει ὅμως εἰς τὸν Εὔδοξον καὶ τὸ διατυπώνει ὡς ἑξῆς: «Ἐὰν ε καὶ α εἶναι δύο τυχόντες πεπερασμένοι θετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ ἀκολουθία ε, 2ε, 3ε, 4ε, 5ε . . . περιέχει ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑπερβαίνουν τὸν α» (Reelle Funktionen I 1939, σελ. 15)[1].

Ὑπὸ τινων νεωτέρων ὑποστηρίζεται, ὅτι τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας ὑπενόει καὶ ὁ Δημόκριτος, ὅταν οὗτος διετύπωσε τὴν ἑξῆς ἀπορίαν· «ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν εἰς ἀπείρως λεπτὰ τμήματα, τί θὰ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἀποτεμνομένων τμημάτων; Ἴσαι ἢ ἄνισοι;» Ἀποφαίνεται δὲ οὗτος, ὅτι οὔτε ἴσαι θὰ εἶναι οὔτε ἄνισοι. Διότι, ἐὰν μὲν εἶναι ἴσαι,

---

1. Πρό τινων ἐτῶν ἐπεκράτει ἡ ἀντίληψις εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν, ὅτι τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι θεώρημα πηγάζον ἀπὸ τὸ λεγόμενον ἀξίωμα συνεχείας τοῦ G. Cantor. Ὁ Γερμανὸς ὅμως μαθηματικὸς Baldus ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἀξίωμα Cantor εἶναι θεώρημα προκῦπτον ἐκ τοῦ ἀξιώματος σνεχείας τοῦ Ἀρχιμήδους. (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Heidelberg 1930, σ. 12).

τὸ ἀρχικὸν σχῆμα θὰ εἶναι κύλινδρος καὶ ὄχι κῶνος, ἐὰν δὲ εἶναι ἄνισοι τότε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θὰ ἔχῃ βαθμίδας, ὅπερ ἄτοπον (Πλούταρχος, Περὶ ἐννοιῶν πρὸς Στωϊκοὺς 1079 Ε). Ἐκ τῆς διατυπώσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγεται ὑπὸ πολλῶν νεωτέρων, ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶναι ὁ πρῶτος συλλαβὼν τὴν ἰδέαν τῆς ὁλοκληρώσεως.

**Ἡ κριτικὴ τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων.**

Ἡ πρώτη κριτικὴ τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀποτελεῖ μέρος τῆς καθ' ὅλου κριτικῆς ἐπὶ τοῦ ὀντολογικοῦ προβλήματος, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν ὁ Παρμενίδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης. Ἡ συναφὴς πραγματεία τοῦ Ζήνωνος, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων (Παρμενίδης, 127 - 28) καὶ ἄλλοι μεταγενέστεροι συγγραφεῖς, δὲν ἐσώθη. Ἐσώθησαν ὅμως ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ταύτης, μερικὰ τῶν ὁποίων μνημονεύει ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Φυσικὴ ἀκρόασις» κατὰ τὴν ἀναίρεσιν τῶν θεωριῶν τοῦ Ζήνωνος περὶ ἀνυπαρξίας τῆς κινήσεως (Ζ, 9, 239 β κ.ἑ.).

Κατὰ τὸν Ζήνωνα, Α'. Δὲν ὑπάρχει πλῆθος (καὶ συνεπῶς μονὰς καὶ σημεῖον). Διότι πᾶν πλῆθος πρέπει ν' ἀποτελῆται ἀπὸ μονάδας. Ἡ μονὰς ὅμως εἶναι ἀδιαίρετος. Ἕκαστον λοιπὸν ἐκ τῶν πολλῶν πρέπει νὰ εἶναι ἀδιαίρετον ἢ ν' ἀποτελῆται ἀπὸ ἀδιαιρέτους μονάδας. Ὅ,τι ὅμως εἶναι ἀδιαίρετον, τοῦτο δὲν ἔχει μέγεθος, διότι πᾶν ὅ,τι εἶναι μέγεθος εἶναι διαιρετὸν ἐπ' ἄπειρον. Τὰ μέρη λοιπόν, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος, διὰ νὰ ὑπάρχουν, πρέπει νὰ ἔχουν μέγεθος καὶ νὰ εἶναι διαιρετὰ ἐπ' ἄπειρον. Τὸ τελευταῖον ὅμως μέρος τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως θὰ εἶναι μηδέν. Ὅ,τι ὅμως προστιθέμενον εἴς τι δὲν αὐξάνει τοῦτο ἢ ἀφαιρούμενον ἀπὸ κάτι δὲν ἐλαττώνει τοῦτο, τότε αὐτό, ὡς μηδέν, δὲν ἔχει ὕπαρξιν. Τὸ πλῆθος λοιπὸν εἶναι συγχρόνως ἀπείρως μικρὸν καὶ ἀπείρως μέγα. Ἀπείρως μικρόν, διότι κάθε μέρος του εἶναι τόσον μικρόν, ὥστε νὰ εἶναι μηδέν, πολλὰ δὲ μηδενικὰ δὲν μᾶς δίδουν μέγεθος. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ὑπάρχῃ πλῆθος, τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἀπείρως μέγα. Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέρη τοῦ πλήθους, τότε μεταξὺ τῶν μερῶν τούτων θὰ ὑπάρχουν ἄλλα μέρη, μεταξὺ τούτων ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Δεχόμενοι λοιπὸν τὴν ὕπαρξιν πλήθους, περιπίπτομεν εἰς τὴν ἀντίφασιν, ὅτι τοῦτο διὰ τῆς διχοτομίας ἐπ' ἄπειρον μηδενίζεται, ἐνῷ συγχρόνως διὰ τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ τῶν μερῶν του ἐπ' ἄπειρον ἄλλων μερῶν γίνεται ἀπείρως μέγα. Ὅπερ ἄτοπον.

Β'. Δὲν ὑπάρχει πλῆθος. Διότι, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, αὐτὰ θὰ εἶναι συγχρόνως πεπερασμένα καὶ ἄπειρα. Διότι, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι αὐτὰ τόσα ὅσα εἶναι καὶ οὔτε περισσότερα οὔτε ὀλιγώτερα. Ἐὰν ὅμως εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι, τότε ταῦτα εἶναι πεπερασμένα. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, τότε αὐτὰ εἶναι ἄπειρα. Διότι, μεταξὺ τῶν πολλῶν θὰ ὑπάρχουν ἄλλα, μεταξὺ τούτων θὰ ὑπάρχουν ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα τὰ πολλὰ πράγματα εἶναι ἄπειρα. Προηγουμένως ὅμως ἐδείχθη, ὅτι ταῦτα εἶναι πεπερασμένα. Τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὸν νόμον τῆς λογικῆς, καθ' ὃν εἰς ἓν πρᾶγμα δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποδώσωμεν συγχρόνως δύο ἰδιότητας. Ἄρα πλῆθος δὲν ὑπάρχει.

Τὴν ὕπαρξιν τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ἡ γεωμετρία διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἰσότητος γεωμετρικῶν σχημάτων δι' ἐπιθέσεως, ἀμφισβητεῖ ὁ Ζήνων διὰ τῶν ἑξῆς ἐπιχειρημάτων:

**Α΄. Διχοτομία.**

Διὰ νὰ φθάσῃ κινητὸν ἔκ τινος ἀφετηρίας εἰς τὸ τέρμα, πρέπει προηγουμένως νὰ διανύσῃ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως. Πρὸ τούτου ὅμως πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος. Ἀλλὰ καὶ πρὸ τούτου πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμίσεος, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα τὸ κινητὸν διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα,πρέπει νὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον. Συνεπῶς κίνησις δὲν ὑπάρχει.

**Β΄. Ἀχιλλεὺς καὶ Χελώνη.**

Ἐπ' εὐθείας γραμμῆς ἵστανται ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ ἡ Χελώνη, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ Ἀχιλλέως εἰς ἀπόστασιν ἔστω ἑνὸς σταδίου. Ἡ ταχύτης τοῦ Ἀχιλλέως ἔστω δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τῆς Χελώνης. Καὶ ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ ἡ Χελώνη ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας συγχρόνως. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τῆς Χελώνης, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ τὸ ἓν δωδέκατον τῆς ὑπὸ τούτου διανυθείσης ἀποστάσεως, ἤτοι κατὰ τὸ ἓν δωδέκατον τοῦ σταδίου. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ ἔχῃ διανύσει τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἤδη διανύσει ἡ Χελώνη, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ $\frac{1}{12}$ τοῦ $\frac{1}{12}$ ἤτοι $\left(\frac{1}{12}\right)^2$. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς διανύσῃ τὸ $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, ἤτοι κατὰ $\left(\frac{1}{12}\right)^3$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Συνεπῶς ὁ Ἀχιλλεὺς δὲν θὰ φθάσῃ ποτὲ τὴν χελώνην, ἄρα δὲν κινεῖται.

**Γ΄. Ἡ ὀϊστὸς (ἢ ὁ ὀϊστὸς = βέλος).**

Βέλος ἐκτοξευόμενον δὲν κινεῖται. Διότι, ἐὰν ὁ χρόνος καὶ ὁ χῶρος εἶναι μεγέθη, τότε περιπίπτομεν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἀντιφάσεως, ὅτι ταῦτα εἶναι ἀπείρως μικρὰ καὶ ἀπείρως μεγάλα. Ἐὰν ὅμως δὲν κάμωμεν ὑπόθεσίν τινα περὶ τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου, τότε πάλιν τὸ βέλος δὲν κινεῖται. Διότι, δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι τοῦτο κινεῖται ἐντὸς τοῦ χώρου, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται, οὔτε ἐντὸς τοῦ χώρου εἰς τὸν ὁποῖον δὲν εὑρίσκεται. Μὲ ἄλλην διατύπωσιν: ἐὰν τὸ βέλος κατέχῃ χῶρον, δὲν κινεῖται, διότι κατέχει χῶρον, «κεῖται» ἐπὶ τοῦ χώρου, καὶ συνεπῶς ὡς «κείμενον» δὲν κινεῖται. Ἐὰν πάλιν δὲν κατέχῃ χῶρον, τότε τοῦτο εἶναι ἀνύπαρκτον καὶ συνεπῶς ἓν ἀνύπαρκτον πρᾶγμα δὲν ἔχει κίνησιν.

**Δ΄. Οἱ ἐν τῷ Σταδίῳ κινούμενοι ἀντιθέτως ὄγκοι.**

Θεωρήσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τρεῖς σειρὰς ἀντικειμένων ὡς τὸ κατωτέρω σχῆμα.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & & & & \\ B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & \longrightarrow & & & & & & \\ & & \longleftarrow & & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & & & \end{array}$$

Τὰ ἀντικείμενα Α μένουν ἀκίνητα, ἐνῷ τὰ ἀντικείμενα Β, Γ κινοῦνται συγχρόνως κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις και φθάνουν εἰς τὴν θέσιν τοῦ κάτωθι σχήματος.

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_4 & B_3 & B_2 & B_1 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array}$$

Ὅταν τὸ $B_1$ φθάσῃ κάτωθεν τοῦ $A_4$ θὰ ἔχῃ διέλθει διὰ τῶν δύο ἀντικειμένων $A_3$, $A_4$, ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ $\Gamma_1$ διὰ νὰ φθάσῃ κάτωθεν τοῦ $B_4$, θὰ ἔχῃ διέλθει διὰ τῶν τεσσάρων ἀντικειμένων $B_1$ $B_2$ $B_3$ $B_4$. Τώρα, διερωτᾶται ὁ Ζήνων: Πῶς τὸ $B_1$ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἔχει διέλθει δύο ἀποστάσεις ἀνίσους ἤτοι τὰς $A_3$ $A_4$ καὶ τὰς $\Gamma_1$ $\Gamma_2$ $\Gamma_3$ $\Gamma_4$, ἤτοι πῶς ἔχει συγχρόνως μίαν ἁπλῆν ταχύτητα καὶ μίαν διπλῆν; (Σημ. Ὁ Ἰταλὸς γεωμέτρης F. Enriques θεωρεῖ τὸ ἐπιχείρημα τοῦτο τοῦ Ζήνωνος ὡς τὴν πρώτην διατύπωσιν τῆς θεωρίας περὶ σχετικότητος).

Διὰ τὸν χῶρον ὁ Ζήνων ἰσχυρίζεται, ὅτι οὗτος δὲν ὑπάρχει.

Διότι: διὰ νὰ ὑπάρχῃ χῶρος, πρέπει οὗτος νὰ ὑπάρχῃ εἰς χῶρόν τινα. Ὁ δεύτερος οὗτος χῶρος νὰ ὑπάρχῃ εἰς ἄλλον χῶρον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα χῶρος δὲν ὑπάρχει.

Ὁ Ἀριστοτέλης ἀνασκευάζων τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος, γράφει ὅτι ὁ Ζήνων παραλογίζεται. Διότι ἡ ὅλη ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ζήνωνος στηρίζεται εἰς τὴν ἔννοιαν ἄπειρον, τὴν ὁποίαν ὁ Ζήνων δὲν προσδιορίζει. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὸ ἄπειρον εἰς δύο κατηγορίας, εἰς ἄπειρον δυνάμει καὶ ἄπειρον ἐνεργείᾳ. Τὸ ἄπειρον ἐνεργείᾳ εἶναι συμβατικὴ ἔννοια τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος μὴ ὑπάρχουσα εἰς τὴν πραγματικότητα. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν π.χ. τῶν φυσικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν σχηματίζοντες ἀριθμούς, χωρὶς νὰ φθάνωμεν εἰς πέρας τι. Ὁ σχηματισμὸς οὗτος τῶν ἀριθμῶν παρέχει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου ἐνεργείᾳ. Ἄλλως ὅμως ἔχει τὸ ζήτημα μὲ τὸ δυνάμει ἄπειρον. Τοῦτο εἶναι ἄπειρον ἐν πεπερασμένῳ καὶ ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἐὰν π.χ. θεωρήσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ταύτης, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον, δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπερβῶμεν κατὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον λῆψιν τὸ πεπερασμένον μέγεθος, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Τὸ ἄθροισμα δηλ. τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν πεπερασμένον ἀριθμὸν 2.

Ἡ ἐν προκειμένῳ ἀμφισβήτησις τοῦ Ζήνωνος ἔγκειται εἰς τοῦτο: Ἡ εὐθεῖα γραμμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ σημεῖα. Μεταξὺ τῶν σημείων τούτων ὑπάρχουν ἄλλα σημεῖα, μεταξὺ τούτων ὑπάρχουν ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ὥστε ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, εἶναι κατὰ τὸ μέγεθος ἀπροσδιόριστος. Πρέπει δηλ. νὰ δικαιολογηθῇ ἄνευ ἀντιρρήσεων ὁ ὅρος «λαμβάνομεν εὐθεῖαν» καὶ τοῦτο κατὰ τὸν Ζήνωνα εἶναι ἀδύνατον.

Κατωτέρω παραθέτομεν ἀποσπάσματα ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀριστοτέλους «μετὰ τὰ Φυσικὰ» ἀφορῶντα εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

«Ἄπειρον εἶναι ἢ ὅ,τι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διεξέλθωμεν, ἐπειδὴ φυσικῶς δὲν καθίσταται δυνατὴ μία διέξοδος, ἀπαράλλακτα καθὼς ἡ φωνὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀντικείμενον τῆς ὁράσεως, ἢ ὅ,τι δίδει διέξοδον χωρὶς ὅμως ἡ διέξοδος αὐτὴ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα πέρας ἢ ὅ,τι μὲ δυσκολίαν δυνάμεθα νὰ διεξέλθωμεν ἢ ὅ,τι ἐνῷ ἐκ φύσεως εἶναι κατεσκευασμένον νὰ ἔχῃ διέξοδον ἢ πέρας, δὲν ἔχει οὔτε τὸ ἓν οὔτε τὸ ἄλλο. Ἄπειρον ἀκόμη εἶναι κάτι εἰς τὴν κατεύθυνσιν τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως ἢ εἰς τὰς δύο αὐτὰς κατευθύνσεις. Νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἄπειρον ὡς ἕνα πρᾶγμα ἰδιαίτερον μὲ ἰδικήν του ὕπαρξιν εἶναι ἀδύνατον. Διότι, ἐὰν τὸ καθαυτὸ ἄπειρον δὲν εἶναι οὔτε μέγεθος οὔτε πλῆθος, ἀλλὰ εἶναι οὐσία καὶ ὄχι συμβεβηκός, πρέπει νὰ εἶναι ἀδιαίρετον, διότι τὸ διαιρετὸν εἶναι ἢ μέγεθος ἢ πλῆθος. Ἂν ὅμως εἶναι ἀδιαίρετον, δὲν εἶναι ἄπειρον, ἐκτὸς μόνον εἰς τὴν σημασίαν κατὰ τὴν ὁποίαν λέγομεν τὴν φωνὴν ἀόρατον. Ἀλλὰ τὸν ὅρον ἄπειρον δὲν τὸν ἐκφωνοῦν εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν σημασίαν, οὔτε θέμα τῆς ἐρεύνης μας εἶναι αὐτὴ ἡ σημασία, ἀλλὰ ἡ σημασία ἡ ὁποία σημαίνει ὅ,τι εἶναι ἀδύνατον νὰ διεξέλθωμεν. Ἀκόμη: πῶς εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ὑπάρχῃ καθαυτὸ ἄπειρον, ἂν δὲν ἔχῃ μίαν καθ' ἑαυτὴν ὕπαρξιν ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος, ἀφοῦ τὸ ἄπειρον εἶναι ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἐπιδέχονται ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος; Ἂν ὅμως ὑπάρχῃ τὸ ἄπειρον κατὰ συμβεβηκός, τότε δὲν δύναται νὰ εἶναι ὡς ἄπειρον ἀποκλειστικῶς θεωρημένον, στοιχεῖον τῶν ὄντων, ἀπαράλλακτα καθὼς δὲν εἶναι τὸ ἀόρατον στοιχεῖον τῆς γλώσσης ἂν καὶ ἡ φωνὴ εἶναι ἀόρατος. Ὅτι ἀκόμη εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ ἐνεργείᾳ τὸ ἄπειρον, τοῦτο εἶναι ὁλοφάνερον. Διότι, ἐὰν ἦτο ἐνεργείᾳ τὸ ἄπειρον, οἱονδήποτε μέρος του καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν θὰ ἦτο τὸ μέρος του τοῦτο ἄπειρον. . .

Ὥστε εἶναι ἢ ἀδιαίρετον ἢ θὰ εἶναι διαιρετὸν εἰς μόρια, τὰ ὁποῖα ἐπιδέχονται πάλιν ἀτελεύτητον διαίρεσιν εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄπειρον θὰ ἦτο διαιρετόν, ἀλλὰ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πλῆθος ἀπείρων μορίων εἶναι ἀδύνατον· ὅπως λοιπὸν μέρος τοῦ ἀέρος εἶναι ἀήρ, οὕτω καὶ μέρος τοῦ ἀπείρου εἶναι ἄπειρον, ἂν τὸ ἄπειρον εἶναι ἀρχὴ καὶ οὐσία. Εἶναι ἄρα ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον. Εἶναι ἀδύνατον ὅμως ὅ,τι εἶναι ἐντελεχείᾳ ἄπειρον νὰ εἶναι ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον· διότι τὸ ἄπειρον εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάποιο ποσόν· ὑπάρχει ἄρα κατὰ συμβεβηκός. Ἀλλ' ἂν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ὑπάρχῃ, δὲν δύναται, ὅπως ἔχομεν ἀναπτύξει εἰς τὰ προηγούμενα, νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον ἀρχή, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἀρχὴ τοῦτο, τοῦ ὁποίου τὸ ἄπειρον εἶναι συμβεβηκός.

Ἡ προηγουμένη συζήτησις ἦτο γενική. Ὅτι πάλιν ἄπειρον εἰς τὴν περιοχὴν τῶν αἰσθητῶν δὲν ὑπάρχει, συνάγεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα: ἂν δηλαδὴ τὸ σῶμα ὁρίζεται ὡς πρᾶγμα καθωρισμένον ἀπὸ ἐπίπεδα, δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ κανὲν οὔτε αἰσθητὸν οὔτε νοητὸν ἄπειρον σῶμα. Οὐδὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ὡς χωριστὸς καὶ ἄπειρος. Διότι καὶ ὁ ἀριθμὸς καὶ ὅ,τι ἔχει ἀριθμὸν δύναται νὰ ἀριθμηθῇ. Ἂν ἐξετάσωμεν τὸ ζήτημα ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀπόδειξιν: οὔτε δηλ. σύνθετον δύναται νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον οὔτε ἁπλοῦν. Σύνθετον δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον, ἀφοῦ βέβαια ὑπάρχει ἓν πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων· διότι τὰ ἐναντία στοιχεῖα πρέπει νὰ εἶναι ἀναμεταξύ των ἴσα καὶ νὰ μὴ εἶναι τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἐναντιώσεως ἄπειρον, διότι ἂν ἡ δύναμις τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἐναντιώσεως (σημ. π.χ. θερμὸν—ψυχρὸν) εἶναι κατωτέρα κατά τινα ποσότητα ἀπὸ τὴν δύναμιν τοῦ ἄλλου, τὸ ἄπειρον θὰ φθείρῃ τὸ πεπερασμένον. Πάλιν, τὸ κάθε σῶμα νὰ εἶναι ἄπειρον εἶναι ἀδύνατον. Διότι σῶμα εἶναι ὅ,τι ἔχει διαστάσεις πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἄπειρον εἶναι ὅ,τι ἔχει ἀπεράντους διαστάσεις· ὥστε ἂν ὑπάρχῃ ἓν ἄπειρον σῶμα, ἡ ἀπειρότης του θὰ καταλάβῃ ὅλας τὰς διαστάσεις (ἀποκλείουσα τὴν συνύπαρξιν ἑνὸς δευτέρου σώματος). (Μετὰ τὰ φυσικὰ βιβλ. Κ 1066α 35, 1066β 34 καὶ φυσικῆς ἀκροάσεως Γ 204α 3 204β 22).

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη πᾶσα γνῶσις εἶναι γνῶσις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο τῆς γνώσεως καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς, ἐνῷ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ σκέψις τοῦ ἀνθρώπου ἀναφέρεται πρωτίστως εἴς τι ἀντικείμενον, δευτερευόντως δὲ δύναται νὰ στραφῇ αὕτη πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Διὰ τοῦτο ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία: 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ἡ ἔκτασις (ὁ χῶρος) διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις καὶ 3) αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαί, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ ἀφ' ἑαυτῶν φανερὰς προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα. Τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ προχωρήσουν πέραν τῶν ἀναποδείκτων ἀρχικῶν προτάσεων. Τὴν ἔρευναν τῶν προτάσεων τούτων ἐπιτελεῖ κατὰ τὸν 'Αριστοτέλη ἡ πρώτη φιλοσοφία, κατὰ δὲ τοὺς νεωτέρους ἡ γνωσιολογία. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες (τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα) ἔχουν μὲν ὕπαρξιν, ὄχι ὅμως καὶ αὐθυπαρξίαν. 'Υπάρχουν δηλ. αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες, ὡς σταθερὰ χαρακτηριστικὰ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἄνευ τῶν ὁποίων αὗται θὰ ἦσαν ἀνύπαρκτοι. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες σχηματίζονται διὰ τῆς σκέψεως κατόπιν ἀφαιρέσεως.

'Αλλὰ καὶ ὁ Πλάτων ἔχει τὴν γνώμην, ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετικὴ (σχετική), ἐνῷ οὗτος ὑπογραμμίζει ἰδιαιτέρως τὴν ἀξίαν τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν σπουδὴν τῆς φιλοσοφίας. Εἰς τὴν «Πολιτείαν» (525 Δ) γράφει: «σφόδρα ἄνω ποι ἄγει (τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα) τὴν ψυχὴν (πολὺ πρὸς τὰ ἐπάνω, πρὸς τὸν θεόν, ὁδηγοῦν τὰ μαθηματικὰ τὴν ψυχήν). Εἰς δὲ τὸν «Φίληβον» (16 C), ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι «θεῶν εἰς ἀνθρώπους δόσις». Εἰς τὴν «Πολιτείαν» ὅμως σαφῶς ἀποφαίνεται ὁ Πλάτων, ὅτι ἡ γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετική. Τὸ συναφὲς χωρίον ἔχει ὡς ἑξῆς (533 c): «ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; οὐδεμία ἦ δ' ὅς». (Διότι, ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ κάτι ἄγνωστον (τὸ σημεῖον), διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ αὐτοῦ συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ τῶν ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῇ ποτε τὴν τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην; οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος).

### 'Η σύγχρονος ἐπιστήμη ἐπὶ τῶν ἐπιχειρημάτων τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ 'Αριστοτέλους.

'Η σύγχρονος ἐπιστήμη παραδέχεται τὴν θεωρίαν τοῦ 'Αριστοτέλους περὶ δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἀπείρου. 'Υπάρχουν ὅμως καὶ οἱ φρονοῦντες, ὅτι ὁ Ζήνων δὲν ἦτο τόσον ἀφελής, ὥστε νὰ πιστεύῃ, ὅτι ὁ 'Αχιλλεὺς δὲν θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὔτε ὅτι ὁ Ζήνων δὲν θὰ ἐφονεύετο, ἐὰν ἐτίθετο ἐνώπιον ἐκτοξευομένου βέλους. Κατὰ τούτους ὁ Ζήνων ἐρωτᾷ ὄχι πότε θὰ φθάσῃ ὁ 'Αχιλλεὺς τὴν χελώνην, οὔτε πότε τὸ βέλος θὰ φθάσῃ εἰς τὸν στόχον. Τὸ ἐρώτημα τοῦ Ζήνωνος εἶναι «πῶς θὰ φθάσουν, ἀφοῦ θὰ κινοῦνται ἐπ' ἄπειρον».

### 'Η κριτικὴ τῆς 'Ελληνικῆς γεωμετρίας καὶ ἡ γένεσις νέων γεωμετριῶν.

Πλὴν τοῦ Ζήνωνος, ὁ ὁποῖος ἠμφεσβήτει τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἀπὸ τῆς προαριστοτελείου ἀκόμη ἐποχῆς ἀπησχόλει τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα τὸ εἰδικώτερον θέμα τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ 1ον βιβλίον τῶν Στοιχείων ὡς 5ον αἴτημα. 'Απὸ συναφῆ διαμνημόνευσιν τοῦ 'Αριστοτέλους φαίνεται, ὅτι ὑπῆρχον μαθηματικοὶ προσπαθοῦντες ν' ἀποδείξουν τὸ αἴτημα τοῦτο καὶ συνεπῶς ν' ἀναγάγουν αὐτὸ εἰς θεώρημα. Οὗτοι ὅμως περιέπιπτον εἰς τὸ σφάλμα νὰ χρησιμοποιοῦν ὡς ἀποδεικτικὸν μέσον τὴν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας, ἐκείνην δηλ. τὴν ὁποίαν ἤθελον ν' ἀποδείξουν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντιστρατεύεται εἰς τοὺς νόμους τῆς λογικῆς. Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Ἀριστοτέλους ἔχει ὡς ἑξῆς: «...ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων» (ἀναλυτ. πρότερα II 16, 65 α 4) (...τὸ ὁποῖον κάμνουν οἱ νομίζοντες, ὅτι ἀποδεικνύουν τὸ αἴτημα τῶν παραλλήλων, διότι οὗτοι ὑποπίπτουν εἰς σφάλμα χρησιμοποιοῦντες ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀποδείξουν, ἂν δὲν ὑπῆρχεν ἡ ἔννοια τῶν παραλλήλων).

Ἡ ἔρευνα ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ἢ μὴ τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων διαρκέσασα περὶ τὰ 2000 ἔτη ὡδήγησε τοὺς νεωτέρους εἰς τὴν δημιουργίαν ἄλλων γεωμετριῶν, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι, καὶ εἰς τὴν ἄποψιν, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι θεώρημα, ἀλλ' ἀξίωμα. Κατὰ τοὺς νεωτέρους, οἱ ὁρισμοὶ καὶ τὰ ἀξιώματα (διὰ τοῦ ὅρου τούτου νοοῦνται τὰ αἰτήματα, αἱ κοιναὶ ἔννοιαι καὶ τὰ λήμματα τῶν Στοιχείων) ἄνευ τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων ἀποτελοῦν τὴν ἀπόλυτον λεγομένην γεωμετρίαν. Προσθήκη εἰς ταύτην τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν Στοιχείων δίδει τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Μεταβολὴ τοῦ αἰτήματος τούτου δίδει τὰς ἄλλας, μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὴν ὑπερβολικὴν γεωμετρίαν τῶν Bolyai—Lobatschefskij καὶ τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν τοῦ Riemann. Εἰς τὴν ὑπερβολικὴν γεωμετρίαν, ἀντὶ τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν Στοιχείων χρησιμοποιεῖται τὸ ἑξῆς: «ἐκ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἄγονται πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἄπειροι παράλληλοι», ἐνῷ εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν χρησιμοποιεῖται ἀντιστοίχως «ἐκ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, οὐδεμία παράλληλος ἄγεται». Κατὰ τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν δὲν γίνεται δεκτόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ προεκτείνεται ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἐπ' ἄπειρον καὶ συνεπῶς γίνεται δεκτόν, ὅτι ὁ χῶρος εἶναι πεπερασμένος (ἐλλιπής), ἐν συμφωνίᾳ πρὸς τὸν Ἀριστοτέλη, ὑποστηρίζοντα τὸ πεπερασμένον τοῦ χώρου, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει κατὰ τοῦτον ἐνεργείᾳ ἄπειρον.

Κατὰ τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, κατὰ τὴν ὑπερβολικὴν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ κατὰ τὴν ἐλλειπτικὴν εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν.