ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ δεύτερος τόμος τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιλαμβάνει τὰ βιβλία V, VI, VII, VIII καὶ IX. Τὸ V βιβλίον περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, ἡ ὁποία θεωρεῖται ἔργον τοῦ διασήμου Κνιδίου μαθηματικοῦ Εὐδόξου, κατὰ τὴν ὁμόφωνον γνώμην τῶν παλαιῶν σχολιαστῶν τῶν Στοιχείων. Ἡ κατανόησις τῶν θεωρημάτων τοῦ V βιβλίου ἐμφανίζει δυσκολίας τινὰς ὀφειλομένας εἰς τὴν λεκτικὴν αὐτῶν διατύπωσιν. Ἕνεκα τούτου ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ ἐπεξηγήσωμεν καὶ τὰ 25 θεωρήματα τοῦ βιβλίου τούτου, χωρὶς ὅμως ν' ἀπομακρυνθῶμεν τοῦ ἀρχαίου κειμένου. Ὁ αὐτὸς λόγος ὡδήγησεν ἡμᾶς εἰς τὴν ἐπεξήγησιν τῶν περισσοτέρων θεωρημάτων τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν περιλαμβάνουσι τὰ βιβλία VII, VIII καὶ IX. Τὸ καθαρῶς γεωμετρικὸν βιβλίον τοῦ τόμου τούτου εἶναι τὸ VI, ἔνθα σπουδάζεται ἡ ὁμοιότης τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου. Ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου ἐπεξηγοῦμεν τὸ θεώρημα 27, τὰ προβλήματα 28, 29, ὡς καὶ τὸ συναφὲς πρὸς ταῦτα πρόβλημα 44 τοῦ I βιβλίου. Ταῦτα θεωροῦνται εὑρήματα τῶν Πυθαγορείων καὶ πραγματεύονται περὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν ἐν ἐπιπέδῳ, κατὰ τὴν ὁμολογίαν τοῦ Πρόκλου. Παρέχουσιν ἐπίσης γεωμετρικῶς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν.

Ἡ ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας ὡς καὶ τὰ νεώτερα θεωρήματα περὶ πόλων καὶ πολικῶν, ῥιζικῶν ἀξόνων, συμμετρίας καὶ ὁμοιοθεσίας στηρίζονται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ V βιβλίου καὶ τῆς ἐφαρμογῆς ταύτης εἰς τὸ VI βιβλίον [1]*. Τὸ 8ον θεώρημα τοῦ V βιβλίου ὡς καὶ τὸ 18ον περιέχουσιν ἀποδείξεις, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πρότυπον τῶν ἀποδείξεων τῆς ἀνωτέρας μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Καὶ εἰς τὰ πέντε βιβλία κυριαρχοῦσαι μέθοδοι ἀποδεικτικαὶ εἶναι ἡ συνθετικὴ καὶ ἡ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος χρησιμοποιεῖται εἰς μίαν μόνον περίπτωσιν, εἰς τὸ 17ον θεώρημα τοῦ V βιβλίου. Εἴς τινας περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ,*

---

1. Εἰς τὰ Ἀγγλικὰ Γυμνάσια ἡ γεωμετρία διδάσκεται καθ' ὃν τρόπον ἐγράφη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου μετὰ προσθήκης εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν περὶ ἁρμονικῆς διαιρέσεως εὐθείας, πόλων καὶ πολικῶν, ῥιζικῶν ἀξόνων, συμμετρίας καὶ ὁμοιοθεσίας. Ἔχομεν ὑπ' ὄψει τὴν ἔκδοσιν τῶν H. S. Hall καὶ F.H. Stevens, London, McMillan and Co, ἡ ὁποία ἀπὸ τοῦ 1888 μέχρι τοῦ 1950 ἐσημείωσε 31 ἐκδόσεις.

ὅπως π.χ. εἰς θεωρήματα τῶν ἀναλογιῶν καὶ εἰς τὰ θεωρήματα 3, 14, 27 καὶ 35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 8, 9 καὶ 20 τοῦ IX. Ὁ πρῶτος παρατηρήσας χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὁ G. Vacca κατὰ τὸ 1910 εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου. Τινὲς τῶν νεωτέρων ἀποδίδουσι τὴν ἐπινόησιν τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς τὸν Ἰταλὸν μαθηματικὸν Peano, ὁ δὲ H. Poincaré ἐξαίρει ἰδιαιτέρως τὴν σημασίαν τούτου εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις[1]. Εἶναι ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως, ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ αὕτη μέθοδος εἶναι Ἑλληνικὴ καὶ δὴ καὶ Πυθαγορικῆς προελεύσεως, ἐφ' ὅσον τὰ συναφῆ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἔνθα κυρίως αὕτη χρησιμοποιεῖται, θεωροῦνται εὑρήματα τῶν Πυθαγορείων καὶ τοῦ Θεαιτήτου. Ἄλλο τεκμήριον, ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ εἶναι Ἑλληνική, εἶναι χωρίον τι τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων τοῦ Ἀριστοτέλους, ἔνθα οὗτος γράφει: «Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Μία δηλ. μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αὕτη ἀναφέρεται (73b 32).

Εἰς ὅλα τὰ θεωρήματα τοῦ V βιβλίου ὡς καὶ τοῦ VI (πλὴν τοῦ 21 τοῦ VI) ἐπαναλαμβάνεται μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀποδείξεως ἡ πρὸς ἀπόδειξιν τεθεῖσα πρότασις καὶ ἀκολουθεῖ τὸ μὲν « ὅπερ ἔδει δεῖξαι» διὰ τὰ θεωρήματα, τὸ δὲ « ὅπερ ἔδει ποιῆσαι » διὰ τὰ προβλήματα. Τοῦτο παρατηρεῖται καὶ εἰς ὅλα τὰ θεωρήματα τοῦ πρώτου τόμου τῶν Στοιχείων. Τὴν συνήθειαν ταύτην τοῦ Εὐκλείδου παρατηροῦμεν σῳζομένην εἰς τρία μόνα θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἰς τὸ 4ον καὶ τὸ 31ον τοῦ VII βιβλίου καὶ εἰς τὸ 14ον τοῦ VIII.

Θεωρῶ καθῆκον νὰ ἐκφράσω τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς τὸ Σον Ὑπουργεῖον Θρησκευμάτων καὶ Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ πρὸς τὸν Ὀργανισμὸν ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων διὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ τόμου τούτου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ἐλπίζω δέ, ὅτι ἡ ὠφέλεια τῆς μαθητιώσης καὶ σπουδαζούσης νεολαίας τοῦ Ἔθνους ἡμῶν θὰ εἶναι μεγάλη, ὅταν αὕτη ἀναλογίζηται, ὅτι τὰ ὑψηλότερα δημιουργήματα τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως εἶναι Ἑλληνικά.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις, κατὰ Μάρτιον 1953.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

1. *Science et hypothèse*, Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Π. Σ. Ζερβοῦ, 1912, Φέξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖ ὡς μαθηματικὸν ἀντικείμενον τὴν ἔννοιαν «μέγεθος» καὶ ὄχι τὴν ἔννοιαν «ἀριθμός».

Ἡ διάκρισις τῆς ἐννοίας « μέγεθος » ἀπὸ τῆς ἐννοίας « ἀριθμός » ὀφείλεται πιθανῶς εἰς τοὺς Πυθαγορείους, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, ἀπέδιδον εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἰδιότητας καὶ ἐννοίας διαφόρους τῶν σημερινῶν. Τὴν διάκρισιν τῶν μαθηματικῶν τούτων ἀντικειμένων διατηρεῖ καὶ ὁ Πλάτων καὶ οἱ ἐν τῇ Ἀκαδημείᾳ μαθηματικοί. Ἐκ τῶν διαλόγων ὅμως τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀριστοτέλους σχηματίζεται ἡ ἀντίληψις, ὅτι ἡ διάκρισις αὕτη δὲν ἔχει σχέσιν πρὸς τὰ ὑπό τινων νεωτέρων ὑποστηριζόμενα, καθ' ἃ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ τοὐναντίον ἀνεκάλυψαν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἀντίθετον ἐν τούτοις ἀντίληψιν διατυποῦσιν οἱ Γερμανοὶ μαθηματικοὶ Hultsch καὶ Stolz [1] καὶ ὁ Δανὸς μαθηματικὸς Zeuthen [2]. Ὁ Hultsch εἰς τὸ περισπούδαστον ἄρθρον αὐτοῦ περὶ Εὐκλείδου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν Ἐγκυκλοπαιδείαν Pauly-Wissowa, γράφει, ὅτι ὡς ὁμογενῆ μεγέθη νοοῦνται καὶ οἱ ἀριθμοὶ (als homogene Groessen sind auch die Zahlen anzusehen § 16). Καίτοι τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἔπρεπε νὰ διαπραγματευθῶμεν κατὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ τρίτου τόμου, τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ δέκατον βιβλίον τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων, ἐν τούτοις ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον, ὅπως καὶ ἐνταῦθα ἐρευνήσωμεν αὐτό, ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν περιλαμβάνει καὶ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ὡς σπουδαιότερον ἐπιχείρημα πρὸς ὑποστήριξιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, θεωρεῖται τὸ 7ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο « Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν ». Εἰς τοὺς ἀριθμοὺς δηλαδὴ ἀποκλείεται ἡ ἰδιότης τοῦ ἀσυμμέτρου. Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα : εἰς ποίους ἀριθμούς ; Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐκάλουν ἀριθμὸν πλῆθος ἀκεραίων μονάδων. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἰδιότης τοῦ ἀσυμμέτρου ἀποκλείεται εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Τοῦτο ὅμως δὲν συνεπάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἠγνόουν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ὅλη σύγχυσις ὀφείλεται καθαρῶς εἰς τὴν ὀνοματολογίαν καὶ ὄχι εἰς τὰ πράγματα. Ὅθεν θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκθέσωμεν ὡρισμένα στοιχεῖα προερχόμενα ἐκ διασωθέντων κειμένων, ἐλπίζοντες οὕτως, ὅτι θὰ συμβάλωμεν κατά τι εἰς τὴν ἑδραίωσιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον πλήρη συνείδησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους αὐτοὶ ἀνεκάλυψαν.

2. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου διεπιστώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου. Πρόκειται περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{2}$. Περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τούτου σῴζονται δύο ἀποδείξεις, τὰς ὁποίας ὁ J. Heiberg περιέλαβεν εἰς τὸ παράρτημα τοῦ 10ου βιβλίου τῶν Στοιχείων ὑπ' ἀριθ. 27. Ἡ δευτέρα δ' ἐκ τούτων σῴζεται συγκεχυμένως πως, χωρὶς ὅμως νὰ καταστρέφηται ἐκ

1. Allgemeine Arithmetik.
2. Mathematische Annalen, 1896 p. 222.

τούτου τὸ νόημα τῆς ἀποδείξεως. Ταύτην θ' ἀναπτύξωμεν μετὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ σημασία εἶναι σπουδαία εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

1η ἀπόδειξις. «Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει». (Ἔστω ὅτι τίθεται πρὸς ἀπόδειξιν, ὅτι εἰς τὰ τετράγωνα σχήματα ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἀσύμμετρος κατὰ τὸ μῆκος). [Σημ. Ἡ διαγώνιος τετραγώνου ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν ἀρχαίων διάμετρος. Φαίνεται δ' ὅτι ὁ ὅρος ἔχει ληφθῇ ἐκ τῶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένων παραλληλογράμμων. Ἐπεκράτησε δὲ γενικώτερον νὰ ὀνομάζηται ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διάμετρος. Τὸν ὅρον τοῦτον διατηροῦμεν κατωτέρω, διότι εἶναι συναφὴς καὶ πρὸς τοὺς διαμετρικοὺς ἀριθμούς].

«Ἔστω διάμετρος τετραγώνου ΑΓ, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ διάμετρος ΑΓ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ κατὰ τὸ μῆκος.

Διότι—ἐὰν εἶναι δυνατὸν τοῦτο—ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος. Τότε θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ εἶναι συγχρόνως ἄρτιος καὶ περιττός. Εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωμεν $(\mathrm{ΑΓ})^2 = 2(\mathrm{ΑΒ})^2$ (1). Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη ἡ διάμετρος σύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν, αὗται θὰ ἔχωσι κοινὸν μέτρον καὶ ὁ λόγος αὐτῶν θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦσιν αὐτάς, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΑΒ}} = \frac{\mathrm{ΕΖ}}{\mathrm{Η}}$, ἐὰν ΕΖ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὴν ΑΓ καὶ Η ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὴν ΑΒ (Χ. 6). Τὸν λόγον $\frac{\mathrm{ΕΖ}}{\mathrm{Η}}$ δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ἀνάγωγον, ἐὰν δὲν εἶναι (VII 33). Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα ΕΖ, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Ὁ ἀριθμὸς ΕΖ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, διότι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ (Ι. 19). Ἐπειδὴ $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΑΒ}} = \frac{\mathrm{ΕΖ}}{\mathrm{Η}}$, ἕπεται ὅτι $\frac{(\mathrm{ΑΓ})^2}{(\mathrm{ΑΒ})^2} = \frac{(\mathrm{ΕΖ})^2}{\mathrm{Η}^2}$ (VI. 20. πόρ., VIII. 11). Καὶ κατὰ τὴν (1) ἔχομεν $(\mathrm{ΕΖ})^2 = 2\mathrm{Η}^2$ (2). Τὸ $(\mathrm{ΕΖ})^2$ ἄρα εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· συνεπῶς καὶ ὁ ΕΖ εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· διότι, ἂν ὁ ΕΖ ἦτο περιττός, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ ἦτο περιττὸς (ΙΧ. 23). [$(2α+1)^2 = 4α^2 + 4α + 1 = 2(2α^2 + 2α) + 1$]. Ἀφοῦ ὅμως ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος, ὁ Η εἶναι περιττός· διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ κλάσμα $\frac{\mathrm{ΕΖ}}{\mathrm{Η}}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί. Ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς ΕΖ εἶναι τῆς μορφῆς 2 (ΕΘ), καὶ ἀφοῦ ΕΖ=2 (ΕΘ), θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{ΕΖ})^2 = 4(\mathrm{ΕΘ})^2$. Καὶ κατὰ τὴν (2) θὰ εἶναι $2\mathrm{Η}^2 = 4(\mathrm{ΕΘ})^2$ ἢ $\mathrm{Η}^2 = 2(\mathrm{ΕΘ})^2$. Συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς $\mathrm{Η}^2$ εἶναι ἄρτιος· καὶ ὁ Η εἶναι ἄρα ἄρτιος. Ἀνωτέρω ὅμως ἐδείχθη, ὅτι ὁ Η εἶναι περιττός· ὅθεν εἶναι ἀδύνατον ὁ Η νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ ἄρτιος. Ἡ διάμετρος ἄρα ΑΓ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Εἶναι δηλ. ἀσύμμετροι κατὰ τὸ μῆκος». Εἰς τὴν ἀντίφασιν περιεπέσαμεν, διότι ἐδέχθημεν, ὅτι ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην φαίνεται, ὅτι εἶχεν ὑπ' ὄψει ὁ Ἀριστοτέλης γράφων *«ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης»* [ἡ διάμετρος εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν, διότι, ἂν δεχθῶμεν ταύτην σύμμετρον, περιπίπτομεν εἰς τὴν ἀντίφασιν νὰ δεχθῶμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς ἄρτιον καὶ περιττὸν] (Ἀναλυτικὰ Πρότερα 41 α 26).

3. Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί. Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰ μήκη πλευρῶν τετραγώνων. Διαμετρικοὶ δὲ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (διαγωνίων) τῶν τετραγώνων τούτων.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον [1] οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται

1. Θέ. Σμυρν. 42 - 45 (E. Hiller, Leipzig, 1878).

ὡς ἑξῆς· θεωροῦμεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ διάμετρος ἐπίσης. [Τοῦτο εἰς τὴν σημερινὴν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν λέγεται, θεωροῦμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν]. Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον μεγαλυτέρου τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Εἰς τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τετραγώνου προσθέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον τοιαύτης κατασκευῆς μεγαλυτέρων τετραγώνων ἐπ' ἄπειρον. Διατί ἀκολουθεῖται οὗτος ὁ δρόμος κατασκευῆς τῶν μεγαλυτέρων τετραγώνων, παραμένει ἄγνωστον. Κατὰ τὸν Θέωνα λοιπὸν θὰ ἔχωμεν :

Ἀριθμοὶ πλευρικοί			Ἀριθμοὶ διαμετρικοί		
Πλευρὰ	πρώτου τετραγώνου	1	Διάμετρος	πρώτου τετραγώνου	1
»	δευτέρου »	1 + 1 = 2	»	2ου τετρ.	2. 1 + 1 = 3
»	τρίτου »	2 + 3 = 5	»	3ου »	2. 2 + 3 = 7
»	τετάρτου »	5 + 7 = 12	»	4ου »	2. 5 + 7 = 17
»	πέμπτου »	12 + 17 = 29	»	5ου »	2. 12 + 17 = 41
»	ἕκτου »	29 + 41 = 70	»	6ου »	2. 29 + 41 = 99
»	ἑβδόμου »	70 + 99 = 169	»	7ου »	2. 70 + 99 = 239
»	ὀγδόου »	169 + 239 = 408	»	8ου »	2.169 + 239 = 577

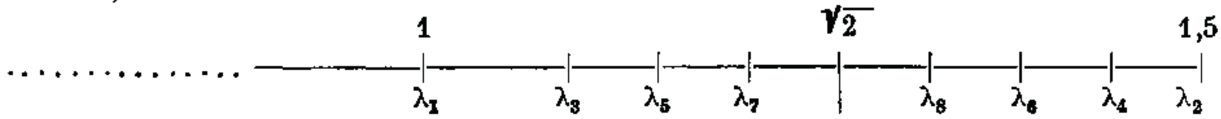
Καλοῦντες α τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διάμετρον τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ ἔχωμεν :

Ἀριθμοὶ πλευρικοί	Ἀριθμοὶ διαμετρικοί
α	δ
$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
$\alpha_2 + \delta_2 = \alpha_3$	$2.\alpha_2 + \delta_2 = \delta_3$
$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$.

Πρὸς αἰτιολογίαν τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὁ Θέων γράφει : *«ἐπειδὴ ὅσον ἡ πλευρὰ δὶς δύναται ἡ διάμετρος ἅπαξ»* (ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ἰσοῦται πρὸς δύο τετράγωνα τῆς πλευρᾶς). Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων πρὸς τὰς πλευράς, ὡς ἐκθέτει αὐτὰς ὁ Θέων, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad = \lambda_1$$
$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000 \ldots\ldots\ldots = \lambda_2$$
$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000 \ldots\ldots\ldots = \lambda_3$$
$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666 \ldots\ldots\ldots = \lambda_4$$
$$\frac{41}{29} = 1{,}4137913 \ldots\ldots\ldots = \lambda_5$$
$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857 \ldots\ldots\ldots = \lambda_6$$
$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011 \ldots\ldots\ldots = \lambda_7$$
$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156 \ldots\ldots\ldots = \lambda_8$$
$$\delta_\nu : \alpha_\nu \qquad = \sqrt{2}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι αὐξάνονται συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Ἔχομεν δηλ. δύο ἀκολουθίας ἀριθμῶν, προκυπτούσας ἐξ ἑνὸς νόμου σχηματισμοῦ, τὴν μὲν αὔξουσαν, τὴν δὲ φθίνουσαν, αἱ ὁποῖαι ὅταν τὸ $\nu \rightarrow \infty$ συμπίπτουσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' εὐθυγράμμου τμήματος, ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι παράστασιν τῶν λόγων, τῶν ὁποίων ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν θὰ γίνεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5.



Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἡ περιττῆς τάξεως ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ ἀρτίας τάξεως ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ φράγμα εἶναι κοινόν, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$. Διὰ τῶν λόγων δηλ. τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἐγκιβωτίζεται, συλλαμβάνεται ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$, δηλ. ἡ $\sqrt{2}$, ὅταν $\nu \rightarrow \infty$. Φρονοῦμεν, ὅτι οὐδεὶς δύναται νὰ ὑποστηρίξῃ σοβαρῶς, ὅτι ὁλόκληρος ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας εἶναι μέγεθος καὶ ὄχι ἀριθμός. Βεβαίως ὁ Θέων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων αὐξούσης καὶ φθινούσης ἀκολουθίας ἀριθμῶν οὔτε περὶ ἐγκιβωτισμοῦ (Intervallschachtelung) τῆς $\sqrt{2}$. Δὲν χρησιμοποιεῖ δηλ. ὁ Θέων τὴν σημερινὴν ὀνοματολογίαν, διέσωσεν ὅμως τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα ὁμιλοῦσιν ἀφ' ἑαυτῶν. Ἐνταῦθα βλέπομεν ὅτι χρησιμοποιοῦνται δύο θεμελιώδεις ἔννοιαι τῶν μαθηματικῶν, ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας καὶ ἡ ἔννοια τοῦ δυνάμει ἀπείρου, ὡς αὗται διετυπώθησαν μαθηματικῶς ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου μὲν ἡ πρώτη καὶ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ἡ δευτέρα καὶ ὡς αὗται χρησιμοποιοῦνται καὶ σήμερον καὶ ἀποτελοῦσι τὸ θεμέλιον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Διὰ τὴν δευτέραν ἔννοιαν τοῦ δυνάμει ἀπείρου ὑπενθυμίζομεν τὴν διατύπωσιν τοῦ Ἀριστοτέλους : «οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον» (Φυσικῆς ἀκροάσεως Γ 206 b). Ἡ ἐπ' ἄπειρον δηλ. ἐνταῦθα λῆψις τῶν λόγων $\delta_\nu : \alpha_\nu$ δὲν δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὴν ὑπέρβασιν τοῦ φράγματος $\sqrt{2}$. Τὰ ἀνωτέρω ὅμως ἐκτεθέντα ἠρευνήθησαν καὶ διετυπώθησαν ὑπὸ τῶν πρώτων Πυθαγορείων, πρὶν ἢ ἀκόμη διατυπωθῶσι μαθηματικῶς αἱ ἔννοιαι τῆς συνεχείας καὶ τοῦ ἀπείρου. Τοὺς λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἀναπτύσσουσιν οἱ σύγχρονοι ἑρμηνευταὶ διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

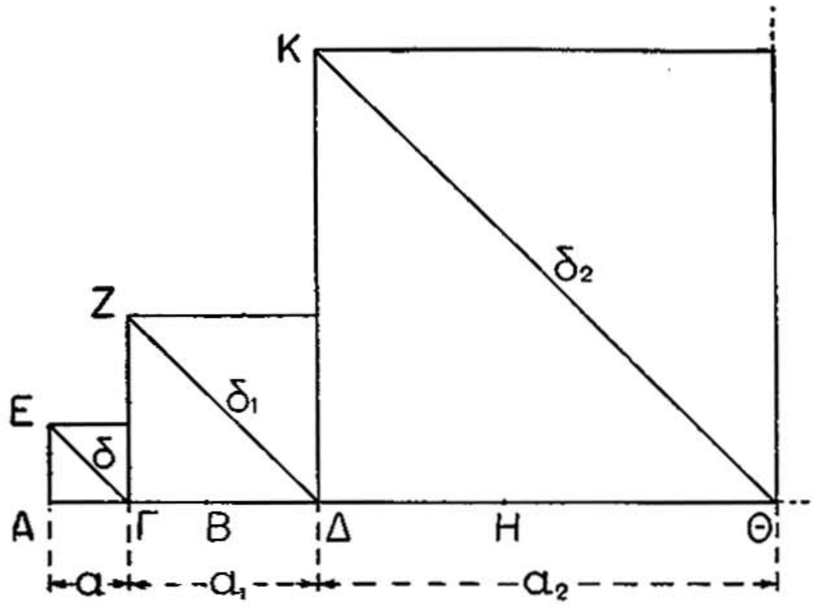
$$\frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

$$\frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

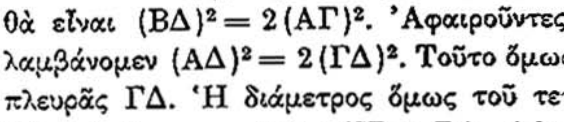
$$\vdots$$

Ὁ Θέων καὶ ὁ Πρόκλος, ὅστις διατυπώνει ἐπίσης τὸν νόμον σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, δὲν μνημονεύουσί τι περὶ κριτηρίου συγκλίσεως τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν. Ὡς τοιοῦτον ὅμως θεωρεῖται τὸ 2ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων, καθ' ὃ, ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, δὲν ὑπάρχει τελικὸν ὑπόλοιπον μετροῦν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ (προκειμένου περὶ ἀσυμμέτρων). Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ὑποδηλοῖ ὁ Πρόκλος, καθιστᾷ φανερὰν τοιαύτην σύγκλισιν.

4. Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἐτέθη τὸ πρόβλημα, δοθέντος τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ζητουμένου τετραγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἕκαστον δὲ εὑρισκόμενον τετράγωνον νὰ θεωρῆται δοθὲν καὶ νὰ συνεχίζηται ἐπ' ἄπειρον ἡ κατασκευὴ τετραγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω νόμου.



Σχ. 1.



Σχ. 2.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΑΓ = α καὶ διαμέτρου ΓΕ = δ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΓΒ = α καὶ ἐν συνεχείᾳ τούτου τμῆμα ΒΔ = δ. Τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν ΓΔ = α + δ. Ἀπομένει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΔΖ.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς διαμέτρου ΔΖ χρησιμοποιεῖται, ὡς λέγει ὁ Πρόκλος [1], τὸ 10ον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ, καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις τῆς ΑΒ, ἡ ΒΔ, τότε εἶναι $(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2 + 2(ΓΔ)^2$, (1) (σχ. 2) (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία I.II.III.IV., Ε. Σταμάτη, 1952). Ἐν προκειμένῳ εἶναι ΑΓ = α, ΓΒ = α καὶ ΒΔ = δ (σχ. 1) καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις (1). Ἐπειδὴ ΒΔ = ΓΕ καὶ $(ΓΕ)^2 = 2(ΑΓ)^2$, θὰ εἶναι $(ΒΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2$. Ἀφαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2 = 2(ΓΔ)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ διάμετρος ὅμως τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα ΔΖ = ΑΔ. Ἡ ΑΔ ὅμως = ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ, ἔνθα ΒΔ = ΓΕ καὶ συνεπῶς ΑΔ = 2α + δ. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθη ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμετρος δ ἑνὸς τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι $α + δ = α_1$ καὶ ἡ διάμετρος $2α + δ = δ_1$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΔΗ = ΓΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ΗΘ = ΔΖ (σχ. 1). Κατὰ τὸ αὐτὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν $(ΓΘ)^2 + (ΗΘ)^2 = 2(ΓΔ)^2$

1. Πρόκλου Σχόλια εἰς Πλάτωνος Πολιτείαν, τόμ. II σ. 24 κέ. 393 κέ. (ἑρμηνεία Hultsch - Kroll, Teubner).

$+2(ΔΘ)^2\cdot(2)$. Ἐπειδὴ $ΗΘ = ΔΖ$ καὶ $(ΔΖ)^2 = 2(ΓΔ)^2$, θὰ εἶναι καὶ $(ΗΘ)^2 = 2(ΓΔ)^2$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῆς (2) ἔχομεν $(ΓΘ)^2 = 2(ΔΘ)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ διάμετρος δὲ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα $ΓΘ = ΘΚ$. Ἀλλὰ ἡ $ΔΘ = ΔΗ + ΗΘ = α_1 + δ_1$ καὶ $ΘΚ = ΓΔ + ΔΗ + ΗΘ = 2α_1 + δ_1$. Καὶ ἑπομένως τοῦ νυοστοῦ νέου τετραγώνου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι $α_ν = α_{ν-1} + δ_{ν-1}$, ἡ δὲ διάμετρος $δ_ν = 2.α_{ν-1} + δ_{ν-1}$.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς εὑρεθείσας πλευρὰς καὶ διαμέτρους τῶν συνεχῶν τετραγώνων :

	πλευρὰ	διάμετρος
Δοθέντος τετραγώνου	$α$	$δ$
πρώτου νέου τετραγώνου	$α + δ = α_1$	$2.α + δ = δ_1$
δευτέρου νέου τετραγώνου	$α_1 + δ_1 = α_2$	$2.α_1 + δ_1 = δ_2$
. . . .	. . . .	. . . .
νυοστοῦ νέου τετραγώνου	$α_{ν-1} + δ_{ν-1} = α_ν$	$2.α_{ν-1} + δ_{ν-1} = δ_ν$.

Ἐὰν λάβωμεν $α = 1$ καὶ $δ = 1$, ἔχομεν τότε τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀναφέρουσιν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Πρόκλος καὶ τοὺς ὁποίους ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω. Ἐὰν ἡ κατασκευὴ τετραγώνων συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, τότε ὁ λόγος $\frac{δ_ν}{α_ν}$ $(ν \rightarrow \infty)$ προσδιορίζει τὴν $\sqrt{2}$.

Ἀπομένει νὰ ἐξετασθῇ, διατί ἔχομεν τὸ δικαίωμα νὰ λάβωμεν $α = 1$ καὶ $δ = 1$. Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· « *ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτω καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται* » (καθὼς λοιπὸν πάντων τῶν σχημάτων ἄρχει ἡ μονὰς κατὰ τὸν πρωταρχικὸν καὶ σπερματικὸν λόγον, οὕτω καὶ ὡς λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν ἀνευρίσκομεν τὴν μονάδα). Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἀποδίδομεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ Θέωνος, καθ' ἣν « ὁ λόγος » τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἡ μονὰς καὶ ὄχι ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν $= 1$.

Ἡ λέξις « σπερματικόν » ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ « δυνάμει ». Ὁ Θέων παρομοιάζει τὴν ἱκανότητα τῆς μονάδος νὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου πρὸς τὸν βιολογικὸν νόμον, καθ' ὃν τὸ σπέρμα ἑνὸς φυτικοῦ ἢ ζωϊκοῦ ὀργανισμοῦ ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ μετέπειτα ζῶντος ὀργανισμοῦ. Ἐνταῦθα ὅμως πρόκειται περὶ μιᾶς καθαρῶς γεωμετρικῆς προτάσεως, χρησιμοποιούσης τὴν ἔννοιαν τῶν ὁρίων, τοῦ ἀπείρου καὶ τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ὁ Θέων παρομοιάζει, κατὰ τοὺς Πυθαγορείους πιθανόν, ὑπὸ βιολογικὴν ἔκφρασιν. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος πορεία κατασκευῆς τετραγώνων, ἐκείνης τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν Πρόκλον, ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω καὶ ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς $\sqrt{2}$. Ἔστω δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΘΔ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν ΘΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΘΚ, γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ εἴς τι σημεῖον Γ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Τοῦτο τὸ θεωροῦμεν δοθὲν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἤτοι μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΔΖ γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἴς τι σημεῖον Α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς· Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου $ΘΚ = ΘΓ$ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὴν ΘΔ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ. Ἐπίσης πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΓΑ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου $ΔΖ = ΔΑ$ τὴν πλευρὰν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΔΖ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἑπομένας κατασκευὰς τετραγώνων. [Ἐπὶ πλέον δὲ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ΘΔ, ἡ διάμετρος

ΔΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς διαμέτρου ΘΚ κλπ. Ἡ ἀπόδειξις τούτου παρέχεται ἐκ τῆς σχέσεως $\sqrt{2} < 1{,}5$ ἢ γεωμετρικῶς]. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων δυνάμεθα, συνεχίζοντες οὕτω τὴν κατασκευὴν τετραγώνων, νὰ λάβωμεν πλευρὰν τετραγώνου (καὶ διάμετρον) μικροτέραν πάσης δοθείσης πλευρᾶς ὁσονδήποτε μικρᾶς. Μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν $\nu \to \infty$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαμέτρου καὶ πλευρᾶς τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ. $(\delta_\nu - \alpha_\nu) = 0$, καὶ συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Ἄρα ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$. Καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ἀρίθμησις ἀρχίζει ἀπὸ τὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\alpha_\nu = 1$, $\delta_\nu = 1$.

Οὔτε ὁ Πρόκλος οὔτε ὁ Θέων ὁμιλοῦσι περὶ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς, ἡ ὁποία συνάγεται ἐκ τῆς ἀτελῶς πως σωθείσης δευτέρας ἀποδείξεως, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

2α ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ἔστω ὅτι $\delta : \alpha = \sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος, ἤτοι ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ δ καὶ α κοινὸν μέτρον σταθερόν, ἀπειροελαχίστως μικρὸν ἔστω ε. Τότε μετὰ ν κατασκευὰς τετραγώνων ($\nu \to \infty$) θὰ φθάσωμεν εἰς στιγμήν τινα, καθ' ἣν $\delta^\nu < \varepsilon$ καὶ $\alpha_\nu < \varepsilon$, ὁπότε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ε θὰ μετρῇ τοὺς μικροτέρους δ_ν καὶ α_ν καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· δὲν ὑπάρχει ἄρα κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ἡ φράσις « ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος » δὲν ἀπαντᾷ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις. Κατὰ τοὺς δεχομένους, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, θὰ πρέπει νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι μέγεθος ἀσύμμετρον. Τοῦτο ὅμως δὲν μεταβάλλει τὸ πρᾶγμα.

5. Τελειώνων ὁ Θέων τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἐπάγεται : *« αἱ δὲ διάμετροι τῶν πλευρῶν ἐναλλὰξ παρὰ μίαν ποτὲ μὲν μονάδι μείζους ἢ διπλάσιαι δυνάμει ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι ὁμαλῶς· πᾶσαι οὖν αἱ διάμετροι πασῶν τῶν πλευρῶν γενήσονται δυνάμει διπλάσιαι, τοῦ ἐναλλὰξ πλείονος καὶ ἐλάττονος τῇ αὐτῇ μονάδι ἐν πάσαις ὁμαλῶς τιθεμένη ἰσότητα ποιοῦντος εἰς τὸ μήτε ἐλλείπειν μήτε ὑπερβάλλειν ἐν ἁπάσαις τὸ διπλάσιον· τὸ γὰρ τῇ προτέρᾳ διαμέτρῳ λεῖπον δυνάμει τῇ ἐφεξῆς ὑπερβάλλει »* (ἑρμ. αἱ δὲ διάμετροι ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦνται ἐναλλὰξ ἄλλοτε μὲν πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς (ἀντιστοίχου) πλευρᾶς σὺν μίαν μονάδα καὶ ἄλλοτε πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς μεῖον μίαν μονάδα καὶ τοῦτο γίνεται συνεχῶς (ὁμαλῶς)· τὰ τετράγωνα λοιπὸν ὅλων τῶν διαμέτρων (τῶν διαμετρικῶν δηλ. ἀριθμῶν) θὰ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν πλευρῶν (τῶν πλευρικῶν δηλ. ἀριθμῶν), διότι ἡ ἐναλλὰξ καὶ συνεχῶς πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀποκαθιστᾷ ἰσότητα, ὥστε εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις νὰ μὴ ἐλλείπῃ οὔτε νὰ ὑπερβάλλῃ ἀπὸ τὸ διπλάσιον· διότι ὅ,τι ἐλλείπει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς προηγουμένης διαμέτρου, ὑπερβάλλει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ἑπομένης.

Ἔστωσαν πάλιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1	1
2	3
5	7
12	17

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα τούτων

$1^2 = 1$	$1^2 = 1$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀπόσπασμα τοῦ Θέωνος θὰ εἶναι :

$$1^2 = 2.\ 1^2 - 1 = 1$$
$$3^2 = 2.\ 2^2 + 1 = 9$$
$$7^2 = 2.\ 5^2 - 1 = 49$$
$$17^2 = 2.12^2 + 1 = 289$$

καὶ γενικῶς $\delta^2{}_\nu = 2.\ \alpha^2{}_\nu \mp 1$ (α πλευρά, δ διάμετρος).

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου δὲν ἐσώθη, ἀληθεύει ὅμως τοῦτο διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ὡς γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω. Ὁ Πλάτων ἐγνώριζε τὸ θεώρημα, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς Πολιτείας (546 c), ἔνθα οὗτος γράφει « ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν ». Νοεῖ δηλ. τετράγωνον πλευρᾶς 5, τοῦ ὁποίου ἡ ἄρρητος διάμετρος $\sqrt{50}$ γίνεται ῥητή, ὅταν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 2.5^2 ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, ἤτοι ληφθῇ $\sqrt{50\text{-}1} = 7$.

6. Ἡ θεωρία τοῦ Ἀρχύτου. Ὁ Ἀρχύτας [1] ἀνέλυσε τὸ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα $\frac{3}{2}$ (μιᾶς πέμπτης) εἰς τὸ διάστημα $\frac{5}{4}$ (μεγάλης τρίτης) καὶ τὸ διάστημα $\frac{6}{5}$ (μικρᾶς τρίτης), ὥστε $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$ (1). Ἡ σχέσις (1) ὅμως προκύπτει ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι 2 καὶ 3. Αὕτη ἐν προκειμένῳ εἶναι :

$2 : \frac{2+3}{2}$ (ἀριθμ. μέσον) $= \frac{2.\,2.\,3}{2+3}$ (ἁρμον. μέσον): 3, καὶ μετασχηματίζεται εἰς $2 \times 3 = \frac{5}{2} \times \frac{12}{5}$ ἢ $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$.

Ἐὰν τὸν ἐπιμόριον ἀριθμὸν (ἐπιμόριος λόγος λέγεται τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρανομαστοῦ κατὰ μονάδα) παραστήσωμεν γενικῶς ὡς $\frac{\nu+1}{\nu}$, τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἔλυσεν ὁ Ἀρχύτας διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ εἰς γινόμενον δύο μουσικῶν διαστημάτων, δοθέντων τῶν φθόγγων συχνότητος ν καὶ ν + 1. Καὶ ἡ μὲν μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι $\nu : \frac{2\nu+1}{2} = \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} : \nu+1$ (2), τὸ δὲ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα ἀναλύεται εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{\nu+1}{\nu} = \frac{2\nu+1}{2\nu} \times \frac{2(\nu+1)}{2\nu+1} \quad (3).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἡ ὁποία ἐκφράζει μουσικὴν ἀναλογίαν, ἐτέθη τὸ πρόβλημα, ἂν εἶναι δυνατὸν οἱ δύο μέσοι ὅροι νὰ γίνωνται ἢ νὰ εἶναι ἴσοι. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν μουσικὴν πραγματείαν αὐτοῦ « Κατατομὴ Κανόνος » περιλαμβάνει ὡς τρίτον θεώρημα τὴν πρότασιν, ὅτι μεταξὺ τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, μεταξὺ τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῶν ν καὶ ν + 1, εἶναι ἀδύνατον νὰ παρεμβληθῶσιν εἷς ἢ περισσότεροι μέσοι ἀνάλογοι (ῥητοὶ ἀριθμοί).

Παρομοίαν πρὸς τὴν Εὐκλείδειον ἀπόδειξιν διέσωσεν ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς Βοήθιος (Boethius, 5ος αἰὼν μ.Χ.), ὅστις ἀποδίδει ταύτην εἰς τὸν Ἀρχύταν [2]. Ἐὰν τοῦτο ἤ-

1. P. Tannery, Mémoires scientifiques III σ. 68 καὶ 244.
2. De institutione arithmetica III. 11, σ. 285, Friedlein, Teubner, 1867.

το δυνατόν, θὰ ἐσήμαινε τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt{\nu(\nu+1)}$, λαμβανομένης ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\nu+1}{x}$ $= \frac{x}{\nu}$, $x^2 = \nu(\nu+1)$. Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου (ἀπὸ μουσικῆς θεωρητικῆς ἀπόψεως) δὲν κατέχομεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα, ἵνα συναγάγωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς παρεμβολῆς μέσων ἀναλόγων, μὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐσώθη ὅμως ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως σπουδαῖον στοιχεῖον, περιεχόμενον εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Μετρικὰ» (τόμ. III, σ. 18—20, Schoene, Leipzig 1903). Κατὰ τὸ στοιχεῖον τοῦτο εἶναι δυνατὸν ἡ σχέσις ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $\nu : \frac{2\nu+1}{2} = \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} : \nu+1$, ἡ $\nu(\nu+1) = \frac{2\nu+1}{2} \times \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$ νὰ δώσῃ ἰσότητα τῶν δύο παραγόντων, τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\frac{2\nu+1}{2}$ καὶ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου $\frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἀπείρων μουσικῶν ἀναλογιῶν, κατὰ τὴν ἀκόλουθον μέθοδον. Ἄς καλέσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας α_1 καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον β_1. Σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς α_1, β_1 καὶ ἔστω τὸ ἀριθμ. μέσον α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_2. Μὲ ἄκρους τοὺς α_2, β_2 σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμ. μέσον ἔστω β_3. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ὅτε τῆς νυοστῆς μουσικῆς ἀναλογίας τὸ ἀριθμ. μέσον θὰ εἶναι α_ν καὶ τὸ ἁρμ. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu \to \infty$, τότε $\alpha_\nu = \beta_\nu$ καὶ ἐλύθη τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ ν καὶ $\nu+1$ ἑνὸς μέσου ἀναλόγου, ὁ ὁποῖος βεβαίως δὲν εἶναι ἀκέραιος, διότι τοῦτο ἀποκλείεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχύτου. Ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{3}{2}$ εἰς τὸ γινόμενον $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχύταν. Δὲν ἐσώθη ὅμως στοιχεῖόν τι, ἐξ οὗ νὰ φαίνηται, ὅτι ὁ Ἀρχύτας ὠνόμασε τὸ $\alpha_\nu = \beta_\nu$ $(\nu \to \infty)$ ἀριθμόν, ἀσύμμετρον δηλ. ἀριθμόν. Στερούμεθα δηλ. καὶ ἐνταῦθα τῆς συναφοῦς ὀνοματολογίας, ὅπως καὶ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος τοῦ Ἀρχύτου ἀφορᾷ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου. Πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου ἐκ δύο παραγόντων. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι οἱ παράγοντες οὗτοι νὰ καταστῶσιν ἴσοι. Ἀλλ' ἂς ἐκθέσωμεν τὸ σωθὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος συναφὲς στοιχεῖον. Πρόκειται κατὰ τοῦτο νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. (Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις σῴζεται μὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, εἶναι ὅμως εὕρημα τοῦ Ἀρχιμήδους) [1]. «Ἔστω ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 7,8,9. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{aligned}
7+8+9 &= 24\\
24 : 2 &= 12\\
12-7 &= 5\\
12-8 &= 4\\
12-9 &= 3\\
12 \times 5 &= 60\\
60 \times 4 &= 240\\
240 \times 3 &= 720
\end{aligned}
$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 δίδει τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

1. T. Heath, A history of Greek mathematics, II. σ. 322, 1921.

Ἐπειδὴ τώρα ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὑπολογίζομεν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν 720 τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 729, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 27, διαιροῦμεν τὸν 720 διὰ τοῦ 27 καὶ λαμβάνομεν $26\frac{2}{3}$. Τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $26\frac{2}{3}$ σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι: $\frac{1}{2}\left(27+26\frac{2}{3}\right)=26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (α_1). Ὥστε ἡ $\sqrt{720}$ κατὰ προσέγγισιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν εἶναι $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, διότι $\left(26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=720\ \frac{1}{36}$. Ἐὰν ὅμως ἀποβλέπωμεν εἰς μεγαλυτέραν προσέγγισιν, τότε ἀντὶ 729 λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $720\frac{1}{36}$ καὶ ἐργαζόμενοι δμοίως εὑρίσκομεν διαφορὰν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{36}$. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ κάτωθι......... ».

Προχωροῦμεν κατὰ τὴν ὑπόδειξιν τοῦ Ἥρωνος. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $720\frac{1}{36}=26\frac{5}{6}$. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 720 διὰ τοῦ $26\frac{5}{6}$ καὶ ἔχομεν $720:26\frac{5}{6}=\beta_1$. Τῶν $26\frac{5}{6}$ καὶ $720:26\frac{5}{6}$ λαμβάνομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 καθ' ὑπεροχὴν πάλιν, ἀλλὰ μικροτέραν τῆς προηγουμένης. Τὸ ἀριθμητικὸν τοῦτο μέσον εἶναι $\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=\alpha_2=26{,}83281573...$ Τὸ $(\alpha_2)^2=720\ \frac{1}{3732624}$, ὥστε ἀμέσως εἰς τὸ δεύτερον ἀριθμητικὸν μέσον ἡ προσέγγισις τῆς $\sqrt{720}$ εἶναι πολὺ μεγάλη. Τὸ β_1 παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $\frac{720}{27}$, ἐν ᾧ τὸ α_2 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ πρώτου ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου, ἤτοι $\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου εἶναι $\beta_1=26{,}832235....$ἤτοι τοῦτο εἶναι ἡ $\sqrt{720}$ κατ' ἔλλειψιν. Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι προφανὴς καὶ ἀκριβῶς ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου. Ἂς παραστήσωμεν γενικῶς τὴν ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος διασωθεῖσαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{A}$, ὅταν αὐτὴ δὲν εἶναι ῥητή.

Λαμβάνομεν τὴν καθ' ὑπεροχὴν ῥίζαν τοῦ Α ἔστω α. Σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο α_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ καθ' ὑπεροχήν. Σχηματίζομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο β_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ κατ' ἔλλειψιν. Τῶν α_1 καὶ β_1 σχηματίζομεν τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_2. Τῶν α_2, β_2 σχηματίζομεν τὸ ἀριθ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_3, καὶ ἔστω α_ν τὸ νυοστὸν ἀριθ. μέσον κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον σχηματισμοῦ, καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu\rightarrow\infty$ τότε $\alpha_\nu=\beta_\nu$. Καὶ ἐνταῦθα εὑρισκόμεθα πρὸ τοῦ σχηματισμοῦ δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα, καὶ ἄλλης τῶν ἁρμονικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα. Καὶ αἱ δύο ἀκολουθίαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον, τὴν $\sqrt{A}$, ἤτοι τὸ ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἁρμονικῶν μέσων συμπίπτει πρὸς τὸ κατώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀριθμητικῶν μέσων. Ἐὰν παραστήσωμεν γραφικῶς τἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν :

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \sqrt{A} \quad \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \qquad (\nu \to \infty).$$

Ὁ Ἥρων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων ἀκολουθιῶν. Ἀφίνει ὅμως νὰ ὁμιλήσῃ περὶ τούτου ἡ χρησιμοποιουμένη μέθοδος καὶ ῥητῶς λέγει, ὅτι ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὅτι δηλ. εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. «Ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ (= 720) ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα...»· ἐπειδὴ δηλ. ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν.........

Ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς, ὡς διέσωσαν τοῦτον ὁ Πρόκλος καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, καὶ τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχύτου, ὡς ἐσώθη αὕτη ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν μίαν παρατήρησιν. Πρὸς τοῦτο ἀναγράφομεν κατωτέρω τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ τὰς δύο μεθόδους.

Μέθοδος λόγων διαμέτρου πρὸς πλευράν.		$\sqrt{2}$		Μέθοδος Ἀρχύτου Ἀριθμ. καὶ ἁρμ. μέσα μεταξὺ 1,2 ($\sqrt{1.2}$).
1ος	λόγος	1 : 1		
2ος = 2^1	»	3 : 2	→	πρῶτον ἀριθμ. μέσον 3 : 2
3ος	»	7 : 5		» ἁρμ. » 4 : 3
4ος = 2^2	»	17 : 12	→	δεύτερον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ =17:12
5ος	»	41 : 29		» ἁρμ. » » » » =24:17
6ος	»	99 : 70		
7ος	»	239 : 169		
8ος = 2^3	»	577 : 408	→	τρίτον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{17}{12}, \frac{24}{17}$ =577:408
9ος	»	1393 : 985		» ἁρμ. » » » » =816 : 577
10ος	»	3363 : 2378		
11ος	»	8119 : 5741		
12ος	»	19601 : 13860		
13ος	»	47321 : 33461		
14ος	»	114243 : 80782		
15ος	»	275807 : 195025		
16ος = 2^4	»	665857 : 470832	→	τέταρτον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{577}{408}, \frac{816}{577}$ = 665857 : 470832.

Ἤτοι εἰς τὸν 2^1 λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ τὸ πρῶτον ἀριθμ. μέσον.
» » 2^2 » » » » » » » τὸ δεύτερον » »
» » 2^3 » » » » » » » τὸ τρίτον » »
» » 2^4 » » » » » » » τὸ τέταρτον » »
καὶ γενικῶς » » 2^ν » » » » » » » τὸ νυοστὸν » »

Δηλαδὴ ἡ τάξις τῶν κατ' Ἀρχύταν ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι οἱ λογάριθμοι (μὲ βάσιν τὸ 2) τῆς τάξεως τῶν λόγων τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευράν. Ἐπισημειοῦμεν δ' ὅτι ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος 1, 2^1, 2^2 2^3....... εἶναι ἐκείνη, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνονται οἱ τέλειοι ἀριθμοί, ὡς θ' ἀναπτυχθῇ κατὰ τὴν ἐπεξήγησιν τοῦ 36ου θεωρήματος τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων. Φαίνεται δὲ πιθανόν, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς ἀνωτέρω γεωμ. προόδου, ὡς παρεχούσης τοὺς τελείους ἀριθμούς.

7. Δὲν εἶναι γνωστόν, ἂν ὁ Ἀρχύτας διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον δύο ἀριθμῶν α_ν ἢ τὸ ἁρμονικὸν μέσον αὐτῶν β_ν εἶναι ἀριθμός, ὅταν $\nu \to \infty$. Γνωρίζομεν ὅμως στοιχεῖά τινα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἐκ τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀριστοτέλους. Εἰς τὸν Θεαίτητον (147 d - 148 b) γίνεται λόγος περὶ τοῦ μὴ συμμέτρου τῶν $\sqrt{3}, \ldots \ldots \sqrt{17}$, εἰς δὲ τοὺς Νόμους (Ζ' 820 c) γράφει ὁ Πλάτων, ὅτι οἱ νέοι πρέπει νὰ ἐρευνῶσιν εἰς τὰς ἀξίας πρὸς τοῦτο σχολὰς τὰ περὶ τῶν μετρητῶν καὶ ἀμέτρων, κατὰ ποῖον τρόπον γίνεται τοῦτο *(τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα, ἥτινι φύσει γέγονε.......φιλονικεῖν ἐν ταῖς τούτων ἀξίαις σχολαῖς)*. Εἰς δὲ τὴν Ἐπινομίδα (990 d - 991 a) ἀφοῦ τονίζει, ὅτι οἱ νέοι πρέπει νὰ διδάσκωνται πρῶτον τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων), συνεχίζει : « *ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρεῖς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοίᾳ ταύτῃ, ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες* » (ἑρμην. ἀφοῦ δὲ μάθει ταῦτα, ἀκολουθεῖ ἵνα μάθῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον καλοῦσι μὲ τὸ πολὺ γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν (δηλ. μέτρησιν τῆς Γῆς), τῶν ἀριθμῶν δὲ οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους (δηλ. τῶν ἀσυμμέτρων) ἐξομοίωσις πρὸς τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν (δηλ. τῶν συμμέτρων) εἶναι διαφανής· ἐκεῖνο δὲ τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἀνθρώπινον θαῦμα, ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ φανερὸν εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἐννοήσῃ αὐτό. Μετὰ δὲ ταύτην (τὴν ἐπιπεδομετρίαν) νὰ μάθῃ τοὺς εἰς τὴν τρίτην δύναμιν καὶ ὁμοίους κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τοὺς στερεοὺς ἀριθμούς, τοὺς δὲ ἀνομοίους πάλιν προκύπτοντας δι' ἄλλου τρόπου ὁμοίου πρὸς τοῦτον (τὸν ὑπολ. δηλ. τοῦ ἀσυμμέτρου $\sqrt{\alpha}$), τὸν ὁποῖον ὠνόμασαν οἱ εἰδικοὶ στερεομετρίαν).

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν (ἀκεραίων) $\alpha \times \beta = \gamma$ καλεῖται ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἢ φυσικὸς ἀριθμός. Ἡ $\sqrt{\gamma}$ (ἀσύμμετρος) διὰ τῆς γεωμετρίας ἐξομοιοῦται πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Στερεὸς φυσικὸς ἀριθμὸς καλεῖται τὸ γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν ἀκεραίων (τριῶν διαστάσεων), $\alpha \times \beta \times \gamma = \delta$. Δι' ἄλλης τέχνης ὁμοίας πρὸς τὴν προηγουμένην διδάσκει ἡ στερεομετρία τὴν ἐξομοίωσιν τῆς $\sqrt[3]{\delta}$ (ἀσυμμέτρου) πρὸς τοὺς φυσικοὺς στερεοὺς ἀριθμούς. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Πλάτων ἔχει ὑπ' ὄψει τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα περὶ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων, ὡς καὶ τὰς ἀποδείξεις τὰς γεωμετρικὰς τοῦ διδασκάλου αὐτοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου περὶ τῆς $\sqrt{3}, \ldots . \sqrt{17}$, αἱ ὁποῖαι δυστυχῶς ἀπωλέσθησαν.

Ἡ σφοδρὰ πολεμικὴ τοῦ Ἀριστοτέλους ἐναντίον τῶν εἰδητικῶν καλουμένων ἀριθμῶν τοῦ Πλάτωνος (Μετὰ τὰ φυσικὰ Μ) εἶναι φύσεως καθαρῶς γνωσιολογικῆς. Διότι, ὡς λίαν εὐστόχως σημειώνει ὁ Κ. Γεωργούλης εἰς κριτικὴν περὶ τῆς πραγματείας ἡμῶν « Ἀρχιμήδους κύκλου μέτρησις »[1], ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ « Ἠθικὰ Νικομάχεια » γράφει « *τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ* »[2] [ἑρμ. διότι ἀναλογία δὲν ὑφίσταται μόνον, ὅταν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (ἀποτελούμενος ἐξ ἀκεραίων μονάδων), ἀλλ' ὅταν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι ὅλως ἀριθμὸς (δηλ. ἀσύμμετρος ἀριθμός)]. Λέγει δηλ. ὁ Ἀριστοτέλης ὅτι ἡ σχέσις $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ δὲν ἰσχύει μόνον, ὅταν οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ καὶ ὅταν οὗτοι εἶναι ἀριθμοὶ ὑπὸ καθολικὴν ἔννοιαν, ὡς τούτους ἐννοεῖ ἀνωτέρω ὁ Πλάτων, ὅταν δηλ. εἶναι ἀσύμμετροι.

---

1. Περιοδικὸν Πλάτων, τεῦχος Α', 1950, σ. 160 κέ.
2. Βιβλίον Ε', ΙΙΙ 8, ἔκδ. Loeb, 1947.

'Αλλὰ καὶ εἰς ἕτερον χωρίον ὁ 'Αριστοτέλης γράφει τὰ ἑξῆς· *«τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται»* [1], δηλ. ἡ σχέσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον (μέγεθος) εἶναι ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως ἐξ ὁλοκλήρου ἀόριστος· ἀλλ' ἡ ἐκφώνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ὑπερέχοντος καὶ ὑπερεχομένου προϋποθέτει οὐχὶ σύμμετρον (δηλ. ἀσύμμετρον) ἀριθμόν.

'Η τοιαύτη διατύπωσις τοῦ 'Αριστοτέλους φαίνεται, ὅτι στηρίζεται εἰς τὰς ἐρεύνας καὶ τὰ συμπεράσματα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων τοῦ Εὐδόξου.

8. Ὅτε ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{2}$, ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα προσέκρουσεν εἰς ἀδιέξοδον. 'Η ἁρμονία τοῦ κόσμου ὡς συνόλου καὶ ἡ ἁρμονία τῶν ἐπὶ μέρους ἀντικειμένων ἢ φαινομένων, ἡ ὁποία ἠρευνᾶτο καὶ ἐξεφράζετο διὰ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, ἔπαυον νὰ εἶναι ἀντικείμενον μαθηματικῆς ἐρεύνης. Πρὸς ἄρσιν τοῦ ἀδιεξόδου τούτου ἐτέθησαν ὑπὸ βάσανον αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῶν μαθηματικῶν. Αἱ ἔρευναι ἐπὶ τῶν τριῶν περιφήμων προβλημάτων τῆς ἀρχαιότητος, τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῆς τριχοτομήσεως ὀξείας γωνίας εἶχον προετοιμάσει τὸ ἔδαφος, ἵνα διαλάμψῃ ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ Εὐδόξου. 'Ιδοὺ λοιπὸν πῶς ὁ Εὔδοξος ἐγεφύρωσε τὸ χάσμα μεταξὺ τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς 3, 4, 5 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐμνημονεύθη ἤδη, ὁλόκληρον ἀποδίδεται εἰς αὐτόν.

'Ο ρ ι σ μ ὸ ς 3. Λόγος δύο ὁμογενῶν (ὁμοειδῶν) μεγεθῶν εἶναι ἡ κατά τινα πηλικότητα σχέσις. 'Αδιαφόρως δηλ. ἂν τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, ὑπάρχει πάντοτε ἐκ συγκρίσεως σχέσις τις τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ ἄλλο καὶ λέγεται ἡ σχέσις αὕτη λόγος (πηλίκον διαιρέσεως).

'Ο ρ ι σ μ ὸ ς 4. Μεγέθη λέγονται, ὅτι ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχωσιν ἀλλήλων. 'Ο ὁρισμὸς οὗτος, ὡς φαίνεται, δὲν ἐσώθη σαφής. 'Η ἔννοια αὐτοῦ ὅμως συνάγεται σαφῶς ἐκ τοῦ ὀγδόου θεωρήματος τοῦ V βιβλίου καὶ εἶναι ἡ ἑξῆς:

'Εὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορὰ τούτων λαμβανομένη πολλάκις δύναται νὰ ὑπερβῇ πολὺ μέγα μέγεθος. 'Ο ὁρισμὸς οὗτος λογίζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὡς τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου, τοῦ ὁποίου ὅμως πρώτην διατύπωσιν ἔκαμεν ὁ 'Αναξαγόρας, ὡς γράφομεν εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ I τόμου τῶν Στοιχείων (σ.24) [2].

'Ο ρ ι σ μ ὸ ς 5. Μεγέθη λέγονται, ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, πρῶτον πρὸς δεύτερον ἴσον μὲ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθῶσι καταλλήλως. Θὰ εἶναι δηλ. $A : B = \Gamma : \Delta$, μόνον ἐὰν δι' οἱουσδήποτε δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων:

1) $\mu . A > \nu . B$ καὶ συγχρόνως $\mu . \Gamma > \nu . \Delta$
2) $\mu . A = \nu . B$ » » $\mu . \Gamma = \nu . \Delta$
3) $\mu . A < \nu . B$ » » $\mu . \Gamma < \nu . \Delta$.

'Η δευτέρα ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν περιπτώσεων τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Εὐδόξου καλύπτει

1. Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4, ἔκδ. Loeb.

2. Δὲν κρίνομεν ἄσκοπον νὰ ὑπενθυμίσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ λεγόμενον ἀξίωμα συνεχείας Dedekind - Cantor εἶναι θεώρημα πηγάζον ἐκ τοῦ Εὐδοξείου ἀξιώματος τῆς συνεχείας κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Baldus.

τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ συμμέτρων μεγεθῶν (μαθηματικῶν ἀντικειμένων), ἐν ᾧ ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη περιλαμβάνουσι καὶ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἵνα γίνῃ καταληπτὸς ὁ ὁρισμὸς 5 τοῦ Εὐδόξου, ἀναφέρομεν ἐφαρμογὴν αὐτοῦ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ VI βιβλίου, καθ' ὃ τρίγωνα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ὡς αἱ βάσεις, (πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος, σχῆμα τοῦ αὐτοῦ).

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΓ καὶ βάσεις ἀντιστοίχως ΒΓ, ΓΔ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΔ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ ἂς ληφθῇ ΒΓ = ΒΗ = ΗΘ καὶ ΓΔ = ΔΚ = ΚΛ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ ΓΒ = ΒΗ = ΗΘ, τὰ τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ εἶναι μεταξύ των ἴσα (I. 38). Θὰ εἶναι ἄρα ΘΓ = μ. ΒΓ καὶ τρίγωνον ΑΘΓ = μ. ΑΒΓ τρίγωνα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ΓΛ = ν. ΓΔ καὶ τρίγωνον ΑΓΛ = ν. ΑΓΔ τρίγωνα.

Καὶ ἐὰν ἡ βάσις μ.ΒΓ = βάσιν ν.ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ τρίγ. μ.ΑΒΓ = τρίγ. ν. ΑΓΔ.
» » » » μ.ΒΓ > βάσεως ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ > τριγ. ν. ΑΓΔ.
» » » » μ.ΒΓ < » ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ < τρίγ. ν. ΑΓΔ[1].

Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθησαν τέσσαρα μεγέθη, ἤτοι δύο βάσεις, αἱ ΒΓ, ΓΔ, καὶ δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ἐλήφθησαν τῆς μὲν βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μ.ΒΓ, μ.ΑΒΓ, τῆς δὲ βάσεως ΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἐλήφθησαν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ν.ΓΔ, ν.ΑΓΔ. Καὶ ἐδείχθη, ὅτι

ἐὰν ἡ βάσις μ.ΒΓ > βάσεως ν.ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ τριγ. μ.ΑΒΓ > τρίγ. ν.ΑΓΔ,
» » » μ.ΒΓ = βάσιν ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ = τρίγ. ν.ΑΓΔ,
» » » μ.ΒΓ < βάσεως ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ < τριγ. ν. ΑΓΔ.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν εἶναι μ. ΑΒΓ $\gtreqless$ ν. ΑΓΔ καὶ συγχρόνως μ. ΒΓ $\gtreqless$ ν. ΓΔ, τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 εἶναι

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}}.$$

Καὶ ἂν καλέσωμεν ΑΒΓ = Α, ΑΓΔ = Β, ΒΓ = Γ, ΓΔ = Δ, θὰ εἶναι

$$\frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὁρισμοῦ 5 κατεβλήθησαν κατὰ καιροὺς πολλαὶ προσπάθειαι. Λίαν εὐστόχως κατώρθωσε νὰ ἐκφράσῃ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ὡς καὶ τὸν συναφῆ ὁρισμὸν 7, εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς Thomas Heath κατὰ τὸ 1906[2]. Ἡ διατύπωσις αὐτὴ ἔχει γίνει ἀποδεκτή. [Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften I. 1 σ. 50, ὑπὸ A. Pringsheim (München)]. Κατὰ τὴν διατύπωσιν ταύτην τὸ κλάσμα $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$ χωρίζει τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\mu}$ εἰς τοιούτους, ὥστε μ.Α > ν.Β καὶ μ.Α $\leqq$ ν.Β. Ἡ τομὴ (κατὰ τὴν φρασεολογίαν τοῦ Dedekind) προσδιορίζει τὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$. Τὸ κλάσμα $\frac{\Gamma}{\Delta}$ χωρίζει ὁμοίως τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\mu}$ εἰς τοιούτους, ὥστε μ. Γ > ν. Δ καὶ μ. Γ $\leqq$ ν. Δ. Ἡ τομὴ

1. Τὴν ἀπόδειξιν θεωρεῖ αὐτονόητον ὁ Εὐκλείδης καὶ ἔχει παραλείψει αὐτὴν διὰ τὰς περιπτώσεις ἀνισότητος. Αὕτη γίνεται διὰ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον (ἄτοπον).

2. The thirteen books of Euclid's Elements, 2α ἔκδ., 1926, Cambridge.

προσδιορίζει τὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμόν $\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐὰν αἱ δύο τομαὶ συμπίπτωσι, τότε εἶναι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐὰν ἡ πρώτη τομὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δευτέρας, τότε $\frac{A}{B}>\frac{\Gamma}{\Delta}$ (ὁρισμ. 7).

Κατὰ τὴν γενομένην ἀποδεκτὴν ἑρμηνείαν τοῦ Τ. Heath καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς ἰσομορφίας [1] τὰ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κρατοῦντα ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Αἴρεται δηλ. αὐτομάτως ἡ γνώμη, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ὁ Α. Pringsheim σημειώνει ὅμως εἰς τὸ ἄρθρον ἐν τῇ Ἐγκυκλοπαιδείᾳ ὅτι « λείπει ἐν τούτοις ἀπὸ τοῦ Εὐδοξείου ὁρισμοῦ ἡ νεωτέρα ἀντίληψις, ὅτι ἑκάστη τομὴ παριστᾷ πραγματικὸν ἀριθμόν ἢ εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ εὐθύγραμμον γωνίαν». Φρονοῦμεν ὅτι ἡ φρασεολογία τοῦ Dedekind δὲν ἐπηρεάζει τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, ὁ ὁποῖος δὲν ἐχρησιμοποίησε τὴν λέξιν « τομή », ἵνα εἴπῃ, ὅτι ἡ τομὴ παριστᾷ ἀριθμόν. Πρὸς τούτοις γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Dedekind περὶ τῶν ἀσυμμέτρων εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, τὴν σωθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων [2]. Ὁ Μ. Zacharias εἰς τὸ περισπούδαστον ἔργον αὐτοῦ «Elementargeometrie der Ebene und des Raumes» (Goeschen B. 16, 1930) ἑρμηνεύει ὡς ἑξῆς τὸν πέμπτον ὁρισμὸν τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων: Τὰ μεγέθη a, b, c, d εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ ἤτοι $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ἐὰν p. a $\gtreqless$ q. b καὶ συγχρόνως εἶναι p.c $\gtreqless$ q. d. Εἰς τὴν σημερινὴν ἔκφρασιν τοῦτο σημαίνει : Ἐὰν ὑπάρχῃ οἱονδήποτε ῥητὸν κλάσμα $\frac{q}{p} \gtreqless \frac{a}{b}$, τὸ αὐτὸ κλάσμα εἶναι $\gtreqless \frac{c}{d}$. Εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ Dedekind τοῦτο σημαίνει : οἱ δύο ἴσοι λόγοι $\frac{a}{b}$ καὶ $\frac{c}{d}$ ὁρίζουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τομὴν εἰς τὸ πλῆθος τῶν ῥητῶν κλασμάτων. Κατὰ ταῦτα ἐλλείπει (ἀπὸ τὸν Εὐδόξειον ὁρισμὸν) τὸ κατὰ τὴν νεωτέραν διατύπωσιν βῆμα, νὰ ὁρισθῇ ἀντιστρόφως, ὅτι ἑκάστη τοιαύτη τομὴ παράγει ἕνα πραγματικὸν (σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον) ἀριθμόν. Τοῦτο τὸ βῆμα δὲν ἔκαμαν οἱ Ἕλληνες. Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ Εὐδόξειος ὁρισμὸς τῆς ἀναλογίας περιλαμβάνει τὰς δύο περιπτώσεις, τοῦ συμμέτρου καὶ τοῦ ἀσυμμέτρου λόγου (σελ. 86—87). Ὁ αὐτὸς συγγραφεὺς εἰς τὴν σελίδα 58 τοῦ αὐτοῦ ἔργου γράφει : « Εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ.......... ». Παραδέχεται δηλ. ὁ Μ. Zacharias, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, ἀλλὰ δὲν ἐχρησιμοποίησαν ὁρισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἐνταῦθα ὀφείλομεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν σκοπίμως οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπέφυγον νὰ δώσωσιν ὁρισμὸν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, ὅπως σκοπίμως δὲν ὥρισαν τὸ μηδὲν ὡς ἀριθμόν. Διότι ναὶ μὲν αἱ ἔννοιαι « συνέχεια » καὶ « ἄπειρον », ὡς αὗται διετυπώθησαν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐγένοντο παραδεκταὶ καὶ ὑπὸ τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης, ἐν τούτοις δὲν δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι αὗται ἱκανοποιοῦσιν ἀπολύτως τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα. Τὸ πρόβλημα τῶν ἐννοιῶν τού-

1. H. Hasse, Höhere Algebra I σ. 25, 59. II σ. 62, Berlin—Leipzig 1926—1927.

2. Διεξοδικὴν ἔρευναν ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου καὶ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις παρέχει ἡ πραγματεία τῶν H. Hasse καὶ H. Scholz « Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik », Charlottenburg 1928 καὶ Leipzig 1940. Ἡ πρώτη ἔκδοσις μετεφράσθη εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ τῶν Φ. Βασιλείου καὶ Χρ. Καπνουκάγια, ἐκδοθεῖσα ὑπὸ τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (τόμ. ΙΔ′ α′, β′ καὶ ΙΕ′ α′) τῷ 1934.

των παραμένει καθαρῶς ὑπερβατικὸν καὶ ἀντικείμενον φιλοσοφικῆς ἐρεύνης. Αἱ πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῶν μαθηματικῶν δὲν δύναται νὰ θεωρηθῶσιν, ὅτι δίδουσιν ἱκανοποιητικὴν ἀπάντησιν ἐπὶ τῆς ἑρμηνείας τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν. Αὗται κατὰ τὸν Ζήνωνα τὸν 'Ελεάτην ἐκφεύγουσι τῆς νοητικῆς δυνάμεως τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ εἰς τὴν ἀποφυγὴν τῆς ὀνομασίας τοῦ μηδενὸς ὡς ἀριθμοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, σημειοῦμεν, ὅτι οὗτοι δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ δεχθῶσιν ἀριθμὸν ὑπὸ περιορισμὸν (διὰ τοῦ ὁποίου δὲν γίνεται διαίρεσις).

Τελειώνοντες ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κύκλου (ὁ π) εἶναι μεταξὺ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$. Μεγαλυτέραν προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης τιμῆς εὗρον ὁ 'Απολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος. Θὰ εἶναι δὲ οὐχὶ λογικὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης, ὁ 'Απολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἐνόουν τὸν π ὡς μέγεθος καὶ ὄχι ὡς ἀριθμόν.

Β, Γ, Δ, ἄλλοι τόσοι ἂς ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ Ε (μὲ λόγον 2) οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καὶ εἶναι $\mathrm{B} : \Gamma = \mathrm{E} : \Theta\mathrm{K}$,

$\Gamma : \Delta = \Theta\mathrm{K} : \Lambda$. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\mathrm{B} : \Delta = \mathrm{E} : \Lambda$.

Ἄρα $\mathrm{B} \times \Lambda = \Delta \times \mathrm{E}$. Ἄρα ἐκ τῆς (3) $\Pi \times \mathrm{O} = \mathrm{B} \times \Lambda$. Ἄρα $\frac{\Pi}{\mathrm{B}} = \frac{\Lambda}{\mathrm{O}}$.

Καὶ ἐλήφθη $\Pi = \mathrm{B}$. Ἄρα $\mathrm{O} = \Lambda$· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἐλήφθη ὁ αὐτός. Ἄρα οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μετρεῖ τὸν ΖΗ πλὴν τῶν 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ. Καὶ ἐδείχθη, ὅτι ὁ $\mathrm{ZH} = 1 + \mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E} + \Theta\mathrm{K} + \Lambda + \mathrm{M}$. Δηλαδὴ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του· καλεῖται δὲ τέλειος ἀριθμὸς ὁ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του· ἄρα ὁ ΖΗ εἶναι τέλειος.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κειμένου.

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, λόγον τὸν 2 καὶ ἀπεριόριστον ἀριθμὸν ὅρων, ἡ $1, 2, 2^2, \cdots\cdots$ Καὶ ἔστω ὅτι μερικὸν ἄθροισμα ν ὅρων ἐκ ταύτης, ἤτοι $1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{\nu-3} + 2^{\nu-2} + 2^{\nu-1} = \sigma_\nu = 2^\nu - 1$, εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον $2^{\nu-1} \times (2^\nu - 1)$ εἶναι ἀριθμὸς τέλειος (ἴδε ἐπεξήγησιν, Τέλειοι ἀριθμοί, μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀποδείξεως).

Διότι ἂς λάβωμεν τοὺς $(\nu - 1)$ ὅρους τῆς ἀνωτέρω προόδου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου, τοὺς $2, 2^2, \cdots\cdots 2^{\nu-2}, 2^{\nu-1}$ (1) καὶ ἂς σχηματίσωμεν νέαν γεωμ. πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον τὸν $2^\nu - 1$, λόγον τὸν 2 καὶ $(\nu - 1)$ ὅρους, τὴν $(2^\nu - 1)$, $2.(2^\nu - 1), \cdots\cdots$, $2^{\nu-3}.(2^\nu - 1)$, $2^{\nu-2}.(2^\nu - 1)$, (2).

Οἱ ὅροι τῆς (1) εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς (2), ἤτοι εἶναι

$$\begin{aligned} 2 : 2^2 &= 2^\nu - 1 : 2(2^\nu - 1) \\ 2^2 : 2^3 &= 2(2^\nu - 1) : 2^2(2^\nu - 1). \\ &\vdots \\ 2^{\nu-2} : 2^{\nu-1} &= 2^{\nu-3}(2^\nu - 1) : 2^{\nu-2}(2^\nu - 1). \end{aligned}$$

Λαμβάνοντες τοὺς δι' ἴσου λόγους (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ ἔχωμεν $2 : 2^{\nu-1} = (2^\nu - 1) : 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$. Καὶ ἐκ ταύτης $2^{\nu-1}(2^\nu - 1) = 2.\, 2^{\nu-2}(2^{\nu 2} - 1)$. Θεωροῦμεν τώρα τὴν πρόοδον (2) μὲ ν ὅρους, ἤτοι $(2^\nu - 1)$, $2(2^\nu - 1) \cdots\cdots 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$, $2^{\nu-1}(2^\nu - 1)$ καὶ ἐφαρμόζομεν τὸ προηγούμενον θεώρημα (καθ' ὃ ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τὸν δεύτερον πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ τελευταίου πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ τοῦ τελευταίου ὅρων), ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{2.(2^\nu - 1) - (2^\nu - 1)}{2^\nu - 1} = \frac{2^{\nu-1}(2^\nu - 1) - (2^\nu - 1)}{(2^\nu - 1) + 2(2^\nu - 1) + \ldots\ldots + 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)}$$ ἢ

$$1 = \frac{2^{\nu-1}(2^\nu - 1) - (2^\nu - 1)}{(2^\nu - 1) + 2(2^\nu - 1) + \dots . 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)} \text{ ἢ}$$

$2^{\nu-1}(2^\nu - 1) - (2^\nu - 1) = (2^\nu - 1) + 2(2^\nu - 1) + \dots + 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ $(2^\nu - 1)$, ὅτε λαμβάνομεν (εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἀναπτύσσομεν τὸ $(2^\nu - 1)$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{\nu-1}$),

$2^{\nu-1}(2^\nu - 1) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{\nu-1} + (2^\nu - 1) + 2(2^\nu - 1) + \dots + 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$, (3).

[Οἱ προσθετέοι τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι πάντα τὰ δυνατὰ πηλίκα τοῦ πρώτου μέλους, διαιρεθέντος τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν του, πλὴν τῆς μονάδος. Πρέπει ὅμως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι μόνον οἱ προσθετέοι τοῦ δευτέρου μέλους καὶ μόνον αὐτοὶ διαιροῦσι τὸ πρῶτον μέλος].

Λέγω, ὅτι ὁ $2^{\nu-1}(2^\nu - 1)$ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν $1, 2, 2^2, \dots 2^{\nu-1}, (2^\nu - 1), 2(2^\nu - 1), \dots, 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$ καὶ μόνον ὑπ' αὐτῶν.

Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλος διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς (3) ἐκτὸς τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους αὐτῆς, ὁ Ο, καὶ ὅτι ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν ὅρων $2, 2^2, \dots 2^{\nu-2}, 2^{\nu-1}, (2^\nu - 1), 2(2^\nu - 1) \dots 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$, (4) εἶναι ὁ αὐτός. Τότε θὰ εἶναι $2^{\nu-1}(2^\nu - 1) = O \times \Pi$, (5), ἐὰν Π κληθῇ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ Ο. Ἐκ τῆς ἰσότητος (5) λαμβάνομεν $\frac{(2^\nu - 1)}{\Pi} = \frac{O}{2^{\nu-1}}$, (6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γεωμ. πρόοδος $1, 2, 2^2, \dots, 2^{\nu-1}$ ἔχει πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, ὁ τελευταῖος αὐτῆς ὅρος, ὁ $2^{\nu-1}$, ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου διαιρεῖται παρὰ μόνον ὑπὸ τῶν $2, 2^2, \dots 2^{\nu-3}, 2^{\nu-2}$ (θεώρ. 13). Καὶ ἐλήφθη ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν $2, 2^2, 2^3 \dots 2^{\nu-2} \dots$ ὁ αὐτὸς (ἐκ τῆς 4). Συνεπῶς εἰς τὴν (6) ὁ Ο δὲν μετρεῖ τὸν $2^{\nu-1}$. Ἄρα οὔτε ὁ $(2^\nu - 1)$ μετρεῖ τὸν Π. Καὶ εἶναι ὁ $(2^\nu - 1)$ πρῶτος. Πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος. Ἄρα οἱ $(2^\nu - 1)$, Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Οἱ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶναι οἱ ἐλάχιστοι πρὸς τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς καὶ μετροῦσιν ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα εἰς τὴν (6) ἰσάκις ὁ $(2^\nu - 1)$ μετρεῖ τὸν Ο καὶ ὁ Π τὸν $2^{\nu-1}$. Ὁ δὲ $2^{\nu-1}$ ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἢ ὑπὸ τῶν $2, 2^2, \dots 2^{\nu-2}$. Ἄρα ὁ Π εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν $2, 2^2, \dots 2^{\nu-2}$. Ἔστω ὅτι εἶναι $\Pi = 2^2$. Καὶ ἀπὸ ὅσους ὅρους ἀποτελεῖται ἡ γεωμ. πρόοδος $2^2, 2^3, \dots 2^{\nu-1}$, (7) (ἀπὸ (ν—2) ὅρους), ἀπὸ τόσους ὅρους ἂς σχηματισθῇ γεωμ. πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸν $(2^\nu - 1)$ καὶ λόγον τὸν 2, ἡ $(2^\nu - 1), 2(2^\nu - 1), \dots, 2^{\nu-3}(2^\nu - 1)$, (8). Οἱ ὅροι τῶν (7) καὶ (8) εὑρίσκονται ἀντιστοίχως εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι εἶναι

$$\begin{array}{rcl} 2^2 : 2^3 = & (2^\nu - 1) : 2\,(2^\nu - 1) & \\ 2^3 : 2^4 = & 2\,(2^\nu - 1) : 2^2\,(2^\nu - 1\,) & \\ \vdots & \vdots & \\ 2^{\nu-2} : 2^{\nu-1} = & 2^{\nu-4}\,(2^\nu - 1) : 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1). & \end{array}$$

Δι' ἴσου ἄρα (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ εἶναι $2^2 : 2^{\nu-1} = (2^\nu - 1) : 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1)$.

Ἄρα $2^2.\,2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1) = 2^{\nu-1}\,(2^\nu - 1)$, (9). Συνεπῶς ἐκ τῆς (5) ἔχομεν $2^2.\,2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1) = \mathrm{O} \times \Pi$. Ἀλλὰ ὁ Π ἐλήφθη ἴσος μὲ 2^2. Συνεπῶς $2^2.\,2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1) = \mathrm{O} \times 2^2$. Ἄρα $\mathrm{O} = 2^{\nu-3}\,(\,2^\nu - 1)$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν $2, 2^2, \cdots 2^{\nu-1} \cdots 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$ ἐλήφθη ὁ αὐτός. Ἄρα οὐδεὶς ἄλλος διαιρεῖ τὸν $2^{\nu-1}\,(\,2^\nu - 1\,)$ παρὰ οἱ $1, 2, 2^2, \cdots\cdots 2^{\nu-1}$, $(2^\nu - 1)$, $2\,(2^\nu - 1)$, $\cdots\cdots$, $2^{\nu-2}\,(2^\nu - 1)$. Καὶ ἐδείχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων εἶναι ὁ $2^{\nu-1}\,(2 - 1)$. Ἄρα εἶναι οὗτος τέλειος.

Οἱ τέλειοι ἀριθμοί.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 23 τοῦ VII βιβλίου τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του. Ἐὰν δηλ. ἀριθμὸς διαιρεθῇ διὰ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν του καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, πλὴν τῆς μονάδος, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκ τῶν διαιρέσεων τούτων λαμβανομένων πηλίκων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν, τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται τέλειος.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τελείων ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικῶς ἡ γεωμ. πρόοδος 1, 2, 4, 8, 16.......... καὶ σχηματίζονται κατὰ σειρὰν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς προόδου ταύτης. Ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος, τῆς τάξεως τῶν προσθετέων τοῦ μ. ἀθροίσματος λογιζομένης ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, δίδει ἀριθμὸν τέλειον. Π.χ.

$\sigma_1 = 1$ (ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων θεωροῦνται δι' ἄλλους λόγους ἡ μονάς, ὁ 3 καὶ ὁ 10 τέλειοι ἀριθμοί)

$\sigma_2 = 1 + 2 = 3$. Ὁ 3 εἶναι πρῶτος· ἄρα $3 \times 2 = 6$ εἶναι τέλειος. Διότι $6 : 6 = 1$, $6 : 3 = 2$, $6 : 3 = 2$. Ἤτοι $1 + 2 + 3 = 6$.

$\sigma_3 = 1 + 2 + 4 = 7$. Ὁ 7 εἶναι πρῶτος· ἄρα $7 \times 4 = 28$ εἶναι τέλειος. Διότι $28 : 28 = 1$, $28 : 14 = 2$, $28 : 7 = 4$, $28 : 4 = 7$, $28 : 2 = 14$. Ἤτοι $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

$\sigma_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Ὁ 15 δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα δὲν δίδει τέλειον ἀριθμόν..

$\sigma_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Ὁ 31 εἶναι πρῶτος· ἄρα $31 \times 16 = 496$ εἶναι τέλειος. Πρὸς εὕρεσιν τῶν μερῶν τοῦ 496 ἀναλύομεν τοῦτον εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων, ὅτε θὰ ἔχωμεν 2. 2. 2. 2. 31.

Οἱ δυνατοὶ διαιρέται τοῦ 496.	*Τὰ μέρη ἢ τὰ δυνατὰ πηλίκα τοῦ 496.*
$2 \times 1 = 2$	$496 : 496 = 1$
$2 \times 2 = 4$	$496 : 248 = 2$
$2 \times 2 \times 2 = 8$	$496 : 124 = 4$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$496 : 62 = 8$
$1 \times 31 = 31$	$496 : 31 = 16$
$2 \times 31 = 62$	$496 : 16 = 31$
$2 \times 2 \times 31 = 124$	$496 : 8 = 62$
$2 \times 2 \times 2 \times 31 = 248$	$496 : 4 = 124$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 31 = 496$	$496 : 2 = 248$

Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$. Ἄρα ὁ 496 εἶναι τέλειος ἀριθμός.

$\sigma_6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Ὁ 63 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_7 = 63 + 64 = 127$. Ὁ 127 εἶναι πρῶτος· ἄρα $127 \times 64 = 8128$, τέλειος.

$\sigma_8 = 127 + 128 = 255$. Ὁ 255 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_9 = 255 + 256 = 511$. Ὁ 511 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{10} = 511 + 512 = 1023$. Ὁ 1023 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{11} = 1023 + 1024 = 2047$. Ὁ 2047 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{12} = 2047 + 2048 = 4095$. Ὁ 4095 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{13} = 4095 + 4096 = 8191$. Ὁ 8191 εἶναι πρῶτος· ἄρα $8191 \times 4096 = 33.550.336$ εἶναι τέλειος.

Ὁ γενικὸς τύπος λήψεως τῶν τελείων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ ταῦτα $\sigma^{\nu} . 2^{\nu-1}$ ἢ $(2^{\nu} - 1) . 2^{\nu-1}$, ὅταν ὁ σ_{ν} εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάχου[1] γράφει, ὅτι ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἷς τέλειος ἀριθμός, ἀπὸ 11 ἕως 100, 101 ἕως 1000, 1001 ἕως 10.000 ἀνὰ εἷς. Ἐὰν δὲ ἀπὸ $10^4 + 1$ ἕως 10^8, $10^8 + 1$ ἕως 10^{12} κ. ο. κ. διαπιστωθῇ ὕπαρξις τελείου ἀριθμοῦ, τότε εἰς ἑκάστην τοιαύτην περιοχὴν θὰ ὑπάρχῃ μόνον εἷς τέλειος ἀριθμός. Ἡ παρατήρησις τοῦ Ἰαμβλίχου εἶναι ἀληθὴς μέχρι τοῦ 10^8, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ὑπολογίσει καὶ τὸν πέμπτον τέλειον ἀριθμόν. Ὁ Ἰάμβλιχος προσθέτει ἀκόμη, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων παντὸς τελείου ἀριθμοῦ λήγῃ εἰς 6 ἢ 8. Τοῦτο εἶναι ἀληθές, ἡ ἀπόδειξις ὅμως δὲν ἐσώθη.

Κατὰ τὸ Εὐκλείδειον θεώρημα ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ὑπάρξεως τελείου ἀριθμοῦ εἶναι 1) ἡ χρησιμοποίησις ἀποκλειστικῶς τῆς γεωμ. προόδου 1, 2, 4, 8, 16,···· καὶ 2) ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα τῆς προόδου ταύτης εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου τούτου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος.

---

1. Pistelli 1894 σ. 38. Teubner.

Κατὰ τὸν L. Kronecker[1] « ὁ Euler ἀπέδειξεν, ὅτι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου λαμβάνονται ὅλοι οἱ ἄρτιοι τέλειοι ἀριθμοὶ καὶ ὅτι οἱ περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοί, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην τῆς μορφῆς $(4m+1)^{4n+1}.\chi^2$, ὅπου $4m+1=p$ θὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς καὶ χ περιττὸς μὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ p. Οὐδεὶς ὅμως εὑρέθη περιττὸς τέλειος ἀριθμός. Ἐξ ἄλλου δὲν κατωρθώθη ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοί ».

Ἡ ἔρευνα, ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα σ_ν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, δὲν εἶναι εὔκολος. Ὁ Fermat ἀνεκοίνωσε δύο θεωρήματα ἄνευ ἀποδείξεων εὐκολύνοντα τὴν ἔρευναν, ἂν μερικόν τι ἄθροισμα σ_ν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Πρὸς τοῦτο γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν (β) τὰ μερικὰ ἀθροίσματα. Ἄνωθεν ταύτης εἰς σειρὰν (α) γράφομεν τοὺς ἐκθέτας τοῦ 2, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (β), ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων προσθέσωμεν τὴν μονάδα (ἤτοι τοὺς ἐκθέτας τοῦ 2^ν ($\nu = 1, 2, 3 \cdots$). Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

(α)	1	2	3	4	5	6	7 ········ ν
(β)	1	3	7	15	31	63	127 ········ $2^\nu - 1$.

Θεώρημα 1ον. Ἐὰν ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (α) δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε τὸ κάτωθεν τούτου ἐπὶ τῆς σειρᾶς (β) εὑρισκόμενον μερικὸν ἄθροισμα θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\kappa.\lambda}-1$, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ $2^\kappa - 1$ καὶ διὰ τοῦ $2^\lambda - 1$, ἤτοι τὸ $2^\nu - 1 = 2^{\kappa.\lambda} - 1$ δὲν εἶναι πρῶτος.

Θεώρημα 2ον. Ἐὰν ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (α) εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε μερικόν τι ἀντίστοιχον ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (β) εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $2\,m.\,n+1$. Ἐὰν τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα δὲν ἔχῃ διαιρέτην τῆς μορφῆς ταύτης, δὲν ἔχει γενικῶς διαιρέτην, ἤτοι εἶναι τοῦτο ἀριθμὸς πρῶτος. (Ἐπιστολὴ Fermat πρὸς Mersenne. Varia opera mathem. Tolosae 1679. fol. p. 177).

1. L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie I σ. 24, 1901. Teubner.