ΒΙΒΛΙΟΝ IX.

1.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσιν ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι τετράγωνος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ. Ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, ἄρα μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (VIII. 18). Ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀριθμοί, ὅσοι παρεμβάλλονται εἰς αὐτούς, τόσοι θὰ παρεμβάλλωνται καὶ μεταξὺ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον (VIII. 8)· ὥστε καὶ μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός. Καὶ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος (VIII. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι τετράγωνον, εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν τετράγωνον Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ· ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος, ἀλλ' εἶναι καὶ ὁ Γ, οἱ Δ, Γ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Ἄρα μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος (VIII. 18). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος (VIII. 8)· ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι (VIII. 20)· οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ἂς δίδῃ ὁ κύβος ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του τὸν Β· λέγω, ὅτι ὁ Β εἶναι κύβος.

Διότι ἂς ληφθῇ πλευρὰ τοῦ Α ὁ Γ καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του, ἂς δίδῃ τὸν Δ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Δ, ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας (VII. ὁρ. 16). Ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (VII. ὁρ. 21). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α, ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Μεταξὺ ἄρα τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Α παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Γ, Δ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπαλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Μεταξὺ δὲ τῆς μονάδος καὶ τοῦ Α παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί· ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι κύβος (VIII. 23). Καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ὁ κύβος ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν κύβον ἀριθμὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι κύβος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ· ἄρα ὁ Δ εἶναι κύβος (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α τὸν ἑαυτόν του μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι κύβοι, οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 19)· ὥστε καὶ μεταξὺ τῶν Δ, Γ θὰ παρεμβληθῶσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι κύβος (VIII. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας δίδῃ κύβον, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς θὰ εἶναι κύβος.

Διότι κύβος ἀριθμὸς ὁ Α πολλαπλασιάσας ἀριθμόν τινα τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν κύβον Γ· λέγω, ὅτι ὁ Β εἶναι κύβος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ· ἄρα ὁ Δ εἶναι κύβος (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Δ, Γ εἶναι κύβοι, εἶναι ὅμοιοι στερεοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 19). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Καὶ εἶναι ὁ Α κύβος· ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος (VIII. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ κύβον, καὶ αὐτὸς θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ὁ ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ κύβον τὸν Β· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α εἶναι κύβος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, ἄρα ὁ Γ εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως εἶναι ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Β, Γ εἶναι κύβοι, εἶναι ὅμοιοι στερεοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Β, Γ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 19). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Καὶ εἶναι ὁ Β κύβος· ἄρα καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας ἀριθμόν τινα δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι στερεός.

Διότι ὁ σύνθετος ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας ἀριθμόν τινα τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι στερεός.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. Ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ Δ, καὶ ὅσας φορὰς ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ δὲ Α εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε, ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσαν τὸν Β δίδει τὸν Γ. Ἄρα ὁ Γ εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Δ, Ε, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος θὰ εἶναι τετράγωνος καὶ οἱ ἕνα παραλείποντες, ὁ δὲ τέταρτος θὰ εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο, ὁ δὲ ἕβδομος θὰ εἶναι συγχρόνως κύβος καὶ τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες πέντε.

Ἔστωσαν ἀπὸ τῆς μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β εἶναι τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες ἕνα, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ εἶναι συγχρόνως κύβος καὶ τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες πέντε.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Α τὸν Β (VII. ὁρ. 21).

Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β (VII. ὁρ. 16)· ἄρα ὁ Β εἶναι τετράγωνος. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ Β εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ζ εἶναι τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ οἱ παραλείποντες ἕνα εἶναι ὅλοι τετράγωνοι. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ εἶναι κύβος καὶ ὅλοι (ἀπ 'αὐτοῦ) οἱ παραλείποντες δύο. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, ἄρα ὁ Γ εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ Γ εἶναι κύβος, καὶ ὁ Ζ ἄρα εἶναι κύβος (VIII. 23). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ τετράγωνος· ἄρα ὁ ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι καὶ κύβος καὶ τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ (ἀπὸ τοῦ ἑβδόμου) παραλείποντες πέντε εἶναι καὶ κύβοι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι τετράγωνος, καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι θὰ εἶναι τετράγωνοι. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι κύβος, καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι θὰ εἶναι κύβοι.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι θὰ εἶναί τετράγωνοι.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β εἶναι τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες ἕνα, ἀπεδείχθη (θεώρ. 8)· λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι τετράγωνοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Γ ἄρα εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Πάλιν ἐπειδὴ καὶ οἱ Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι τετράγωνοι.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι.
Ὅτι μὲν λοιπὸν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο, ἀπεδείχθη (θεώρ. 8)· λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι. Διότι, ἐπειδὴ ὡς εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως εἶναι ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β. Καὶ εἶναι ὁ Α κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος εἶναι κύβος (θεώρ. 3)· καὶ ὁ Β ἄρα εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α εἶναι κύβος, καὶ ὁ Δ ἄρα εἶναι κύβος (VIII. 23). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε εἶναι κύβος καὶ ὁμοίως ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα δὲν εἶναι τετράγωνος, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι τετράγωνος ἐξαιρέσει τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ὅλων, οἱ ὁποῖοι παραλείπουσιν ἕνα. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα δὲν εἶναι κύβος, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι κύβος ἐξαιρέσει τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ὅλων, οἱ ὁποῖοι παραλείπουσι δύο.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ , ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α ἂς μὴ εἶναι τετράγωνος· λέγω, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι τετράγωνος ἐξαιρέσει τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι παραλείπουσιν ἕνα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Εἶναι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος (θεώρ. 8)· οἱ Β, Γ ἄρα ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β · οἱ Α, Β ἄρα ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι (VIII. 26)· καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος· τετράγωνος ἄρα εἶναι καὶ ὁ Α· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Γ τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς εἶναι τετράγωνος ἐξαιρέσει τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν παραλειπόντων ἕνα.
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ὁ Α κύβος. Λέγω, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι κύβος ἐξαιρέσει τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν παραλειπόντων δύο.
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος· εἶναι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος· διότι εἶναι τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς

τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει κύβος πρὸς κύβον· καὶ εἶναι ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα εἶναι κύβος (VII. 13, VIII. 25). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, καὶ ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β κύβον. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ κύβον, καὶ αὐτὸς θὰ εἶναι κύβος (θεώρ. 6). Ἄρα καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Δ κύβος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς εἶναι κύβος ἐξαιρέσει τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν παραλειπόντων δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ μικρότερος μετρεῖ τὸν μεγαλύτερον κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω, ὅτι ἐκ τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β μετρεῖ τὸν Ε κατά τινα τῶν Γ, Δ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Α μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ μονὰς Α μετρεῖ τὸν Δ καὶ ὁ Β τὸν Ε (VII. 15). Ἡ δὲ μονὰς Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· ὥστε ὁ μικρότερος ὁ Β μετρεῖ τὸν μεγαλύτερον τὸν Ε κατά τινα ἀριθμὸν ἐκ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Πόρισμα.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἣν τάξιν ἔχει ὁ μετρῶν ἀπὸ τῆς μονάδος, τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει, ἀναδρομικῶς ὅμως, ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὑφ' ὅσων τυχὸν πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται ὁ τελευταῖος, ὑπὸ τῶν αὐτῶν θὰ μετρηθῇ καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ

Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι ὑφ' ὅσων πρώτων ἀριθμῶν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρῆται ὁ Δ, ὑπὸ τῶν αὐτῶν θὰ μετρηθῇ καὶ ὁ Α.

Διότι ἂς μετρῆται ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α. Διότι ἔστω, ὅτι δὲν τὸν μετρεῖ. Καὶ εἶναι ὁ Ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος (VII. 29)· ἄρα οἱ Ε, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ἂς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν ἀριθμὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας, ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἔδωσε τὸν Δ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Ε, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ (VII. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21)· οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ. Ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Γ. Ἀλλ' ὅμως κατὰ τὸ προηγούμενον (θεώρ. 11. πόρ.) καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Ε, Η. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β (VII. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις (VII. 20) καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Β. Ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Β. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν ἔδωσε τὸν Β (θεώρ. 8)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Ε, Θ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Α. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ (VII. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις (VII. 20) καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἄρα μετρεῖ ὁ Ε τὸν Α ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Ἀλλὰ καὶ δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα οἱ Ε, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα εἶναι σύνθετοι. Οἱ δὲ σύνθετοι μετροῦνται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ (VII. 15). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως πρῶτος, ὁ δὲ πρῶτος δὲν μετρεῖται ὑπ' ἄλλου ἀριθμοῦ ἢ τοῦ ἑαυτοῦ του (VII. ὁρ. 12), ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Ε· ὥστε ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἐξ ὅσων πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται ὁ Δ, ὑπὸ τῶν αὐτῶν θὰ μετρηθῇ καὶ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ

ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι πρῶτος, ὁ μέγιστος δὲν θὰ μετρῆται ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου ἐκτὸς ὑπὸ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α ἔστω πρῶτος· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν ὁ Δ δὲν μετρεῖται ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ Ε καὶ ὁ Ε ἂς μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα ἐκ τῶν Α, Β, Γ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Ε δὲν εἶναι πρῶτος. Διότι ἐὰν ὁ Ε εἶναι πρῶτος καὶ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (θεώρ. 12), ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος, μὴ ὢν πρὸς αὐτὸν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Ε πρῶτος. Ἄρα εἶναι σύνθετος. Πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ (VII. 32)· ὁ Ε ἄρα μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ· λέγω τώρα, ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου θὰ μετρῆται πλὴν τοῦ Α. Διότι, ἐὰν ὁ Ε μετρῆται ὑπὸ ἄλλου, ὁ δὲ Ε μετρῇ τὸν Δ, καὶ ἐκεῖνος ἄρα θὰ μετρῇ τὸν Δ· ὥστε θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος (θεώρ. 12) μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Ζ. Λέγω, ὅτι ὁ Ζ πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἐὰν ὁ Ζ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ καὶ μετρῇ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, καὶ εἷς ἄρα τῶν Α, Β, Γ, θὰ μετρῇ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. Ἀλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 11)· καὶ ὁ Ε ἄρα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Ζ ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Ζ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α, ἀποδεικνύοντες πάλιν, ὅτι ὁ Ζ δὲν εἶναι πρῶτος. Διότι, ἐὰν εἶναι καὶ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (θεώρ. 12) πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ὁ Ζ δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα εἶναι σύνθετος. Πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ (VII. 32)· ὁ Ζ ἄρα μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ. Λέγω τώρα, ὅτι ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου θὰ μετρηθῇ πλὴν τοῦ Α. Διότι, ἐὰν ἄλλος τις πρῶτος μετρῇ τὸν Ζ, ὁ δὲ Ζ μετρῇ τὸν Δ, καὶ ἐκεῖνος ἄρα θὰ μετρῇ τὸν Δ· ὥστε θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (θεώρ. 12) πρῶτον ὄντα μὴ ὢν πρὸς αὐτὸν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ζ, ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ (θεώρ. 11)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Ε, Ζ. Ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ (VII. 19). Ὁ δὲ Α μετρεῖ τὸν Ε· καὶ ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Γ. Ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Η. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β εἶναι ὁ αὐτός καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὸν Η, ὁ Ζ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Γ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ (θεώρ. 11)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γινόμενον τῶν Ζ, Η. Ὑπάρχει ἄρα ἡ ἀναλογία ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β (VII. 19). Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Ἃς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Θ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Η μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν Θ, ὁ Η ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Β. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β (θεώρ. 8)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Θ, Η εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Α. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η (VII. 19). Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ μετρῆται ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς μετρῆται ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν, ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ θὰ μετρῆται ἐκτὸς τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Διότι ἃς μετρῆται ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς Α ὑπὸ τῶν πρώτων Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ θὰ μετρῆται ἐκτὸς τῶν Β, Γ, Δ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς μετρῆται ὑπὸ πρώτου τινὸς τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε νὰ μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Β, Γ, Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α, ἃς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Α. Καὶ ὁ Α μετρεῖται ὑπὸ τῶν πρώτων ἀριθμῶν Β, Γ, Δ. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι γινόμενόν τι, τὸ δὲ γινόμενον τοῦτο μετρῇ ἀριθμός τις πρῶτος, θὰ μετρῇ καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς (VII. 30). Ἄρα οἱ Β, Γ, Δ θὰ μετρήσωσιν ἕνα τῶν Ε, Ζ. Ὅμως δὲν θὰ μετρήσωσι τὸν Ε· διότι ὁ Ε εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς οὐδένα τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός. Ἄρα μετροῦσι τὸν Ζ, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ Α· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ Α εἶναι ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὸν Α πρῶτος ἀριθμὸς ἄλλος ἐκτὸς τῶν Β, Γ, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, δύο οἱοιδήποτε προστεθέντες εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτοι.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι δύο οἱοιδήποτε ἐκ τῶν Α, Β, Γ προστεθέντες θὰ εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτοι, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α καὶ ἀκόμη οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, οἱ ΔΕ, ΕΖ (VIII. 2). Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ μὲν ΔΕ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Α, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β καὶ ἀκόμη ὁ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Γ (VIII. 2). Καὶ ἐπειδὴ οἱ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἐλάχιστοι, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πρὸς ἕκαστον ἀντιστοίχως θὰ εἶναι πρῶτος (VII. 28). Καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτος. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ ΔΕ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ΕΖ· ἄρα οἱ ΔΖ, ΔΕ εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν ΕΖ. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρός τινα ἀριθμόν, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτος (VII. 24)· ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ΖΔ, ΔΕ εἶναι πρὸς τὸν ΕΖ ἀριθμὸς πρῶτος· ὥστε καὶ τὸ γινόμενον τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ΕΖ εἶναι πρῶτος (VII. 25). [Διότι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ γινόμενος ἐκ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν (δηλ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνός) εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἄλλον]. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν ΖΔ, ΔΕ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΕ σὺν τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ (II. 3)· τὸ τετράγωνον ἄρα τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ΕΖ. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τοῦ ΔΕ εἶναι ὁ Α, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι ὁ Β, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ΕΖ εἶναι ὁ Γ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ εἶναι πρῶτοι. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Β,Γ πρὸς τὸν Α εἶναι πρῶτοι. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Γ πρὸς τὸν Β εἶναι πρῶτοι. Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΔΖ εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΕ, ΕΖ, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτος (VII. 25). Ἀλλὰ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΖ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ τὰ τετράγωνα ἄρα τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι. Δι' ἀφαιρέσεως (τοῦ ΔΕ$\times$ΕΖ), τὰ τετράγωνα τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ληφθέντος γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοι. Καὶ δι' ἄλλης ἀφαιρέσεως (τοῦ ΔΕ$\times$ΕΖ), τὰ τετράγωνα ἄρα τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι. Καὶ εἶναι τὸ μὲν τετράγωνον τοῦ ΔΕ ὁ Α, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ΕΖ ὁ Γ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν Α, Γ πρὸς τὸν Β εἶναι πρῶτοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν θὰ εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Διότι ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Β εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν θὰ εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ τελευταῖος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε (VII. 13). Οἱ δὲ Α, Δ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20). Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ (VII. ὁρ. 21)· ὥστε καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Γ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ (VII. 21)· Ἀλλ' ὁ Α ἐμέτρει τὸν Γ· ὥστε ὁ Α μετρεῖ καὶ τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Δ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τρίτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ἔστω, ὅτι πρέπει νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τρίτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς.

Οἱ Α, Β ἢ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Καὶ ἐὰν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀπεδείχθη ἤδη (θεώρ. 16), ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς τρίτος ἀνάλογος.

Ἀλλὰ τώρα ἔστωσαν οἱ Α, Β μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Γ. Ὁ Α τώρα ἢ θὰ μετρῇ τὸν Γ ἢ δὲν θὰ τὸν μετρῇ. Ἂς τὸν μετρῇ πρῶτον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ· ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Γ· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Β. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ (VII. 19)· πρὸς τοὺς Α, Β ἄρα εὑρέθη τρίτος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Γ· λέγω, ὅτι πρὸς τοὺς Α, Β εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τρίτος ἀνάλογος ἀριθμός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ εὑρεθῇ ὁ Δ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Β (VII. 19). Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ Β εἶναι ὁ Γ. Ὥστε ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Γ· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὸν Δ· ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πρὸς τοὺς Α, Β τρίτος ἀνάλογος ἀριθμός, ὅταν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων νὰ ἐξετασθῇ πότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς τέταρτος ἀνάλογος.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἔστω, ὅτι πρέπει νὰ ἐξετασθῇ, πότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς τέταρτος ἀνάλογος.

Οὗτοι ἢ δὲν θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν δὲν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὔτε ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ θὰ εἶναι, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς ἀριθμὸς τέταρτος ἀνάλογος (θεώρ. 17). Ἂς μὴ εἶναι τώρα οἱ Α, Β, Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἐν ᾧ οἱ ἄκροι πάλιν νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς εὑρεθῇ ὁ Δ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε (VII. 14). Οἱ δὲ Α, Γ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20). Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Γ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς τοὺς Α,Β,Γ.

Ἀλλὰ πάλιν ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ Α,Γ ἂς μὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς. Διότι ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα ἢ μετρεῖ τὸν Δ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἂς τὸν μετρῇ πρῶτον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Δ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β,Γ. Ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε (VII. 19)· πρὸς τοὺς Α, Β, Γ ἄρα εὑρέθη τέταρτος ἀνάλογος ὁ Ε.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος ἀριθμὸς πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς εὑρεθῇ ὁ Ε. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Γ (VII. 19). Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Δ· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸν Δ. Ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Δ· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. Ἀλλὰ καὶ δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος ἀριθμὸς πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, ὅταν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Δ. Ἀλλὰ τέλος οἱ Α, Β, Γ ἂς μὴ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οὔτε οἱ ἄκροι νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἐὰν μὲν ὁ Α μετρῇ τὸν Δ, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς, ἐὰν δὲ δὲν τὸν μετρῇ, εἶναι ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ ὑπάρχουσι περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοί.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ (VII. 36) καὶ ἔστω ὁ ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τὸν ΔΕ ἡ μονὰς ΔΖ. Ὁ ΕΖ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἔστω προηγουμένως, ὅτι εἶναι πρῶτος· συνεπῶς ἔχομεν εὕρει πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β, Γ, ΕΖ περισσοτέρους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω, ὅτι ὁ ΕΖ δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα θὰ μετρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ (VII. 31). Ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ πρώτου Η· λέγω, ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρός τινα ὁ αὐτός. Οἱ δὲ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν ΔΕ· καὶ ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν ΔΕ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· θὰ μετρῇ συνεπῶς καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, τὴν μονάδα ΔΖ, ὁ Η ἀριθμός ὤν· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Η ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι πρῶτος. Ἄρα εὑρέθησαν περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοὶ τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ὁσοιδήποτε ἄρτιοι ἀριθμοὶ προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἄρτιοι οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΑΕ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι ἄρτιος, ἔχει μέρος ἥμισυ (VII. ὁρ. 6)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. Ὁ ἀριθμὸς δὲ ὁ διαιρούμενος διὰ δύο εἶναι ἄρτιος· ἄρα ὁ ΑΕ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΕ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι περιττός, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ἀπὸ ἑκάστου, ἕκαστος τῶν ἀπομενόντων θὰ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 21).

Εἶναι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιος. Καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι περιττός, καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος ἔστω ἀριθμὸς περιττός, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΔ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΓΔ ἡ μονὰς ΔΕ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΓΕ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7)· εἶναι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος (θεώρ. 22)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα ΑΕ εἶναι ἄρτιος. Καὶ ὁ ΔΕ εἶναι ἡ μονάς. Ἄρα ὁ ΑΔ εἶναι περιττὸς (VII. ὁρ. 7)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ὁ ἄρτιος ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΑΒ εἶναι ἄρτιος, ἔχει μέρος ἥμισυ (VII. ὁρ. 6)· ὥστε καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρα ὁ ΑΓ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ὁ περιττὸς ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΒΓ ἡ μονὰς ἡ ΓΔ· ἄρα ὁ ΔΒ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7). Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΑΔ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 24). Καὶ ὁ ΓΔ εἶναι ἡ μονάς· ὁ ΓΑ ἄρα εἶναι περιττὸς (VII. ὁρ. 7)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ περιττοῦ τοῦ ΑΒ ὁ περιττὸς ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΑΒ εἶναι περιττός, ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ΒΔ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΑΔ εἶναι ἄρτιος. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ ΓΔ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7)· ὥστε καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 24)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι περιττός.

Διότι, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ περιττοῦ ΑΒ ὁ ἄρτιος ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ἡ ΑΔ· ἄρα ὁ ΔΒ εἶναι ἄρτιος. Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΔ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 24). Ἄρα ὁ ΓΑ εἶναι περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας ἄρτιον δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς δίδῃ ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν ἄρτιον Β, τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τόσων ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν Β, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες εἰς τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Καὶ εἶναι ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. Ἐὰν δὲ ὁσοιδήποτε ἄρτιοι ἀριθμοὶ προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 21). Ἄρα ὁ Γ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας περιττὸν δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς δίδῃ ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν Β, τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι περιττός.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν Β, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν Α, Β περιττός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περιττῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι περιττόν. Ὥστε ὁ Γ εἶναι περιττὸς (θεώρ. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς μετρῇ ἄρτιον ἀριθμόν, θὰ μετρῇ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ.

Διότι ἂς μετρῇ ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α τὸν ἄρτιον Β· λέγω, ὅτι θὰ μετρῇ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β, ἂς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ δὲν εἶναι περιττός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι περιττός. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν Γ, ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Β. Ὁ Β ἄρα σύγκειται ἐκ περιττῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι περιττὸν (θεώρ. 23). Ὁ Β ἄρα εἶναι περιττός· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ἄρτιος. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Γ περιττός· ἄρα ὁ Γ εἶναι ἄρτιος. Ὥστε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β ἀρτιάκις. Συνεπῶς θὰ μετρήσῃ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρός τινα ἀριθμόν, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι πρῶτος.

Διότι ἔστω ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πρῶτος πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β, τοῦ δὲ Β ἔστω διπλάσιος ὁ Γ· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν Γ.

Διότι, ἐὰν οἱ Α, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ εἶναι ὁ Α περιττός· περιττὸς ἄρα εἶναι καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ περιττὸς ὢν μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Γ εἶναι ἄρτιος, ἄρα ὁ Δ θὰ μετρῇ καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ Γ. Τοῦ δὲ Γ ἥμισυ εἶναι ὁ Β· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α. Ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα ὁ Α δὲν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Γ· οἱ Α, Γ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32.

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος.

Διότι ἂς διπλασιασθῶσιν ἀπὸ τῆς δυάδος Α ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ, Δ εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιοι.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, εἶναι φανερόν· διότι ἔχει διπλασιασθῆ ἀπὸ δυάδος (VII. ὁρ. 8). Λέγω, ὅτι καὶ μόνον. Διότι ἂς ληφθῇ ἡ μονάς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀπὸ μονάδος εὑρίσκονται ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α εἶναι πρῶτος, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου θὰ μετρῆται ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 13). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος (VII. ὁρ. 8). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστος τῶν Β, Γ εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ περιττὸν τὸν ἥμισυν, εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός.

Διότι ἂς ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς Α τὸν ἥμισυν περιττόν· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός.

Ὅτι μὲν λοιπὸν εἶναι ἀρτιάκις περιττός, εἶναι φανερόν· διότι ὁ ἥμισυς αὐτοῦ περιττὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις (VII. ὁρ. 9). Λέγω τώρα, ὅτι καὶ μόνον. Διότι, ἐὰν ὁ Α θὰ εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν (VII. ὁρ. 8)· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περιττὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον· ὁ Α ἄρα εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε εἶναι ἐκ τῶν διπλασιαζομένων ἀπὸ δυάδος μήτε ἔχῃ τὸν ἥμισυν περιττόν, εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ εἶναι ἐκ τῶν διπλασιαζομένων ἀπὸ δυάδος, μήτε νὰ ἔχῃ τὸν ἥμισυν περιττόν· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, εἶναι φανερὸν (VII. ὁρ. 8)· διότι δὲν ἔχει τὸν ἥμισυν περιττόν. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἀρτιάκις περιττός. Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν Α διὰ δύο, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ διὰ δύο καὶ συνεχίσωμεν πάντοτε, θὰ καταντήσωμεν εἴς τινα περιττὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Διότι, ἐὰν δὲν τὸν μετρῇ, θὰ καταντήσωμεν εἰς δυάδα καὶ ὁ Α θὰ εἶναι εἷς τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν (VII. ὁρ. 9). Ὥστε ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις περιττός. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. Ὁ Α ἄρα εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἀφαιρεθῶσι δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἀπὸ τοῦ τελευταίου ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον, θὰ εἶναι ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τελευταίου πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ ἑαυτοῦ.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α καὶ ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ ἴσος πρὸς τὸν Α ἕκαστος τῶν ΒΗ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ὡς εἶναι ὁ ΗΓ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, ΒΓ, Δ.

Διότι ἃς ληφθῇ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, πρὸς δὲ τὸν Δ ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΖΚ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΒΓ, ἐν ᾧ ὁ ΖΘ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΒΗ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΘΚ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΗΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α (VII. 13), ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ πρὸς τὸν ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΖΚ, ὁ δὲ Α πρὸς τὸν ΖΘ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΖΛ, οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸν ΖΘ. Καὶ δι' ἀφαιρέσεως (VII. 11 καὶ 13) ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ. Εἶναι ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ὅλοι οἱ ἡγούμενοι πρὸς ὅλους τοὺς ἑπομένους (VII. 12)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ, οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ. Εἶναι δὲ ἴσος ὁ μὲν ΚΘ πρὸς τὸν ΓΗ, ὁ δὲ ΖΘ πρὸς τὸν Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α· εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τελευταίου πρὸς ὅλους τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ (τὸ ἄθροισμά των)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀνα-

λογίᾳ μὲ λόγον ἕν πρὸς δύο, μέχρις ὅτου τὸ ἄθροισμα ὅλων γίνῃ πρῶτος καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν τελευταῖον δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι τέλειος.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἕν πρὸς δύο, μέχρις ὅτου τὸ ἄθροισμα ὅλων γίνῃ πρῶτος, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμά των ὁ Ε, καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν ΖΗ. Λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ εἶναι τέλειος.

Διότι ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Α, Β, Γ, Δ ἂς ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ Ε μὲ λόγον ἕν πρὸς δύο ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ (VII. 14). Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Ε, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Α, Μ (VII. 19). Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Μ εἶναι ὁ ΖΗ. Ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει τὸν ΖΗ· ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν ΖΗ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Καὶ εἶναι δυὰς ὁ Α· ἄρα εἶναι διπλάσιος ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἶναι δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε καὶ ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ λόγον ἕν πρὸς δύο. Ἂς ἀφαιρεθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ τελευταίου τοῦ ΖΗ ἴσος πρὸς τὸν πρῶτον Ε ἕκαστος τῶν ΘΝ, ΖΞ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τελευταίου πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ ἑαυτοῦ (θεώρ. 35). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Μ, Λ, ΚΘ, Ε. Καὶ εἶναι ὁ ΝΚ ἴσος πρὸς τὸν Ε· καὶ ὁ ΞΗ ἄρα εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Μ, Λ, ΘΚ, Ε. Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΖΞ ἴσος πρὸς τὸν Ε, ὁ δὲ Ε ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ τὴν μονάδα. Ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ εἶναι ἴσος καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ τὴν μονάδα· καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἐκτὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῇ τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο ἂς μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ. Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Ο μετρεῖ τὸν ΖΗ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Π· ὁ Π ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ο δίδει τὸν ΖΗ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἔδωσε τὸν ΖΗ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ (VII. 19). Καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ μονάδος ὑπάρχουσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα δὲν θὰ μετρῆται ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ πλὴν τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 13). Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ Ο δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ· δὲν θὰ μετρῇ ἄρα ὁ Ο τὸν Δ. Ἀλλ' ὡς εἶναι ὁ Ο πρὸς τὸν Δ, οὕτως εἶναι ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὔτε ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Π (VII. ὁρισμ. 21). Καὶ εἶναι ὁ Ε πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος (VII. 29). Οἱ Ε, Π ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· καὶ εἶναι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Ο καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Ἔστω, ὅτι εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Β. Καὶ ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Β, Γ, Δ, τόσοι ἂς ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ Ε οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καὶ εἶναι οἱ Ε, ΘΚ, Λ πρὸς τοὺς Β, Γ, Δ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Λ (VII. 14). Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Β, Λ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε (VII. 19)· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Π, Ο· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Π, Ο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Λ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. Καὶ εἶναι ὁ Π ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Β καὶ ὁ Λ ἄρα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Ο· ὅπερ ἀδύνατον· διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν ληφθέντων εἶναι ὁ αὐτός. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τὸν ΖΗ ἀριθμός τις ἄλλος ἐκτὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Τέλειος δὲ ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὰ μέρη του (VII. ὁρ. 23) τέλειος ἄρα εἶναι ὁ ΖΗ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.