ΒΙΒΛΙΟΝ XIII.

1.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας.

Διότι ἄς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι $(ΑΓ + ΑΔ)^2 = 5\ ΔΑ^2$.

Διότι ἄς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ ἄς κατασκευασθῶσι τὰ ἐν τῷ σχήματι ΔΖ, καὶ ἄς προεκταθῇ ἡ ΖΓ μέχρι τοῦ Η. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ \times ΒΓ$ τὸ ὀρθογώνιον ΓΕ, τὸ δὲ $ΑΓ^2 = ΖΘ$· εἶναι ἄρα $ΓΕ = ΖΘ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ = 2ΑΔ$, εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΒΑ = ΚΑ$, ἡ δὲ $ΑΔ = ΑΘ$, εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΚΑ = 2ΑΘ$. Ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ (VI. 1)· εἶναι ἄρα $ΓΚ = 2ΓΘ$. Εἶναι δὲ καὶ $ΛΘ + ΘΓ = 2ΓΘ$ (I. 43). Εἶναι ἄρα $ΚΓ = ΛΘ + ΘΓ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΓΕ = ΘΖ$· ὅλον ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΒΑ = 2ΑΔ$, εἶναι $ΒΑ^2 = 4ΑΔ^2$, τουτέστι τὸ $ΑΕ = 4ΔΘ$. Εἶναι δὲ τὸ ΑΕ ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ· καὶ ὁ γνώμων ἄρα ΜΝΞ εἶναι $= 4ΑΟ$· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ εἶναι $= 5ΑΟ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΔΖ = ΔΓ^2$, τὸ δὲ $ΑΟ = ΔΑ^2$· ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5\ ΔΑ^2$.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τμήματος αὐτῆς, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ εἰρημένου τμήματος

τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Διότι ἔστω ὅτι τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒ εἶναι πενταπλάσιον τετραγώνου τμήματος αὐτῆς τοῦ ΑΓ, ἔστω δὲ ἡ ΓΔ = 2ΑΓ· λέγω, ὅτι ὅταν ἡ ΓΔ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΓΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσιν ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἐν τῷ σχήματι ΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ^2 = 5\ ΑΓ^2$, τὸ ΑΖ = 5 ΑΘ. Ὁ γνώμων ἄρα ΜΝΞ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΓ = 2 ΓΑ, εἶναι ἄρα $ΔΓ^2 = 4\ ΓΑ^2$, τουτέστι τὸ ΓΗ = 4 ΑΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ γνώμων ΜΝΞ τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· εἶναι ἄρα ὁ γνώμων ΜΝΞ = ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΓ = 2 ΓΑ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΔΓ = ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ = ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῆς ΓΘ], εἶναι ἄρα διπλάσιον καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ (VI. 1). Εἶναι δὲ καὶ ΛΘ + ΘΒ = 2 ΘΒ (I. 43)· εἶναι ἄρα τὸ ΚΒ = ΛΘ + ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ γνώμων ΜΝΞ ἴσος πρὸς τὸ ΓΗ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΘΖ = ΒΗ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΒΗ = ΓΔ × ΔΒ· διότι ἡ ΓΔ = ΔΗ· τὸ δὲ $ΘΖ = ΓΒ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΓΔ \times ΔΒ = ΓΒ^2$. Εἶναι ἄρα ὡς ΔΓ : ΓΒ = ΓΒ : ΒΔ (VI. 17). Εἶναι δὲ ἡ ΔΓ > ΓΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΓΒ > ΒΔ (V. 14). Ὅταν ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τμήματος αὐτῆς, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ εἰρημένου τμήματος τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ 2ΑΓ > ΒΓ, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, ΒΓ = 2ΑΓ. Εἶναι ἄρα $ΒΓ^2 = 4\ ΑΓ^2$· ἄρα $ΒΓ^2 + ΓΑ^2 = 5\ ΓΑ^2$. Ἐλήφθη δὲ καὶ τὸ $ΒΑ^2 = 5\ ΓΑ^2$· εἶναι ἄρα $ΒΑ^2 = ΒΓ^2 + ΓΑ^2$· ὅπερ ἀδύνατον (II. 4). Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία τῆς ΑΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἡ μικροτέρα τῆς ΓΒ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑ· διότι κατὰ μείζονα λόγον θὰ ἦτο τοῦτο ἄτοπον.

Ἡ διπλασία ἄρα τῆς ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μικροτέρου τμήματος σὺν τῷ ἡμίσει τοῦ μεγαλυτέρου, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ διπλοῦν σχῆμα. Ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ = 2\ ΔΓ$, εἶναι ἄρα $ΑΓ^2 = 4\ ΔΓ^2$, τουτέστι τὸ $ΡΣ = 4\ ΖΗ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17), καὶ εἶναι τὸ $ΑΒ \times ΒΓ = ΓΕ$, τὸ ΓΕ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΣ. Εἶναι δὲ τὸ $ΡΣ = 4ΖΗ$· ἄρα τὸ $ΓΕ = 4\ ΖΗ$. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ = ΔΓ$, εἶναι καὶ ἡ $ΘΚ = ΚΖ$. Ὥστε καὶ τὸ $ΗΖ^2 = ΘΛ^2$. Εἶναι ἄρα ἡ $ΗΚ = ΚΛ$, τουτέστιν ἡ $ΜΝ = ΝΕ$· ὥστε καὶ τὸ $ΜΖ = ΖΕ$. Ἀλλὰ τὸ $ΜΖ = ΓΗ$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΓΗ = ΖΕ$. Ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΓΝ· ὁ γνώμων ἄρα $ΞΟΠ = ΓΕ$. Ἀλλ' ἐδείχθη τὸ $ΓΕ = 4\ ΗΖ$· καὶ ὁ γνώμων ἄρα $ΞΟΠ = 4\ ΖΗ$. Ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ καὶ τὸ τετράγωνον ΖΗ εἶναι πενταπλάσια τοῦ ΖΗ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΞΟΠ καὶ τὸ τετράγωνον ΖΗ εἶναι τὸ ΔΝ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΔΝ = ΔΒ^2$, τὸ δὲ $ΗΖ = ΔΓ^2$. Εἶναι ἄρα τὸ $ΔΒ^2 = 5\ ΔΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3\ ΓΑ^2$.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ \times ΒΓ$ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ $ΑΓ^2$

τὸ ΘΗ· εἶναι ἄρα τὸ $AK = \Theta H$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $\Lambda Z = ZE$ (I. 43), ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΛΚ εἶναι ἴσον μὲ ὅλον τὸ ΓΕ· εἶναι ἄρα $\Lambda K + \Gamma E = 2\Lambda K$. Ἀλλὰ τὰ $\Lambda K + \Gamma E$ εἶναι ὁ γνώμων $\Lambda MN + \Gamma K^2$· ὁ γνώμων ἄρα $\Lambda MN + \Gamma K^2 = 2\ AK$. Ἀλλ' ὅμως ἐδείχθη καὶ $AK = \Theta H$· ὁ γνώμων ἄρα ΛΜΝ καὶ τὸ $\Gamma K^2 = 2\,\Theta H$· ὥστε ὁ γνώμων ΛΜΝ καὶ τὰ τετράγωνα $\Gamma K + \Theta H$ ἰσοῦνται πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΘΗ. Καὶ εἶναι ὁ μὲν γνώμων ΛΜΝ καὶ τὰ τετράγωνα $\Gamma K + \Theta H = AE + \Gamma K = AB^2 + B\Gamma^2$, τὸ δὲ $H\Theta = A\Gamma^2$. Ἄρα τὰ $AB^2 + B\Gamma^2 = 3\ A\Gamma^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ προστεθῇ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἴση πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Διότι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ πρὸς τὴν ΑΓ ἔστω ἴση ἡ ΑΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, εἶναι ἄρα $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, τὸ δὲ $A\Gamma^2 = \Gamma\Theta$· εἶναι ἄρα τὸ $\Gamma E = \Theta\Gamma$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΓΕ εἶναι ἴσον τὸ ΘΕ (I. 43), πρὸς δὲ τὸ ΘΓ εἶναι ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΕ· [ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΘΒ]. Ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΑΕ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΚ τὸ $B\Delta \times \Delta A$· διότι ἡ $A\Delta = \Delta\Lambda$· τὸ δὲ $AE = AB^2$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $B\Delta \times \Delta A = AB^2$. Εἶναι ἄρα $\Delta B : BA = BA : A\Delta$ (VI. 17). Εἶναι δὲ ἡ $\Delta B > BA$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $BA > A\Delta$ (V. 14).

Ἡ ΔΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι εὐθεῖα ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΑ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΑΔ = ΒΑ : 2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ ἔχει προστεθῇ ἡ ΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5\, ΔΑ^2$ (θ. 1). Ἄρα τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· εἶναι ἄρα σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ (Χ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΔΑ^2$· διότι ἡ ΔΑ εἶναι ῥητή, οὖσα ἥμισυ τῆς ῥητῆς ΑΒ· εἶναι ἄρα ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΔ^2$ (Χ. ὁρ. 9)· ῥητὴ ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΑ (Χ. 9)· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἀποτομὴ (Χ. 73). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἀποτομή, ἐὰν παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΑΒ, θὰ σχηματίσῃ πλάτος τὴν ΒΓ. Τὸ τετράγωνον δὲ ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει ἀποτομὴν πρώτην (Χ. 97)· εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ πρώτη ἀποτομή. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι εὐθεῖα ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἢ αἱ συνεχεῖς ἢ αἱ μὴ συνεχεῖς εἶναι ἴσαι, τὸ πεντάγωνον εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἔστω πρότερον ὅτι αἱ τρεῖς συνεχεῖς γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ Α, Β, Γ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγω, ὅτι τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΒΑ, ΑΕ, καὶ ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἡ βάσις ἄρα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, ἡ μὲν ΒΓΑ πρὸς τὴν

ΒΕΑ, ἡ δὲ ΑΒΕ πρὸς τὴν ΓΑΒ (Ι. 4)· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΖ (Ι. 6). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΒΕ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν ΖΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΖΓ, ΓΔ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΕ, ΕΔ· καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΖΔ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΖΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΔ (Ι. 8). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓΑ ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΕΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΓΔ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β· καὶ ἡ ΑΕΔ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β, Γ· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ἴσαι αἱ συνεχεῖς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ ἔχουσαι κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Γ, Δ· λέγω, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (Ι. 4) · εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΒ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΒΕΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΔΕ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ (Ι. 6). Καὶ ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΔΕ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Γ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς Α, Γ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Γ, Δ. Τὸ πεντάγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀπέναντι δύο συνεχῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου ὑπάρχωσι πλευραί, αὗται τέμνονται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὰ μεγαλύτερα τμήματα εἶναι ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Διότι ἂς εἶναι ἀπέναντι τῶν δύο συνεχῶν γωνιῶν Α, Β τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΕ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Θ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν τέμνεται κατὰ τὸ Θ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ ὅτι τὰ μεγαλύτερα τμήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Διότι ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ (IV. 14). Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (I. 4.). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΕ· εἶναι ἄρα ΑΘΕ = 2 ΒΑΘ (I. 32). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΑΓ = 2ΒΑΓ, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ τὸ τόξον ΕΔΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΓΒ (III. 28, VI. 33)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΘΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα ΘΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, τουτέστι τὴν ΑΒ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ (I. 5). Ἀλλὰ ἡ ΑΒΕ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ· καὶ ἡ ΒΕΑ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ. Καὶ ἡ ΑΒΕ εἶναι κοινὴ γωνία τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒΘ· ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία ἡ ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΑΘΒ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΘ· ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΕΒ : ΒΑ = ΑΒ : ΒΘ (VI. 4). Εἶναι δὲ ΒΑ = ΕΘ· ἄρα εἶναι ΒΕ : ΕΘ = ΕΘ : ΘΒ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μεγαλυτέρα ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. Ἡ ΒΕ ἄρα ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΘΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἔχει τμηθῆ κατὰ τὸ Θ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ ὅτι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς ἡ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου προστεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ ἐκ τῶν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἐγγραφομένων σχημάτων, ἔστω ἡ μὲν ΒΓ πλευρὰ δεκαγώνου, ἡ δὲ ΓΔ ἑξαγώνου, καὶ ἔστωσαν κείμεναι ἐπ' εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΓΔ.

Διότι ἃς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ε (III. 1), καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ ἃς προεκταθῇ ἡ ΒΕ μέχρι τοῦ Α. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου δεκαγώνου, ἄρα τὸ τόξον ΑΓΒ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τόξου ΒΓ· τὸ τόξον ἄρα ΑΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ΓΒ. Ὡς δὲ τὸ τόξον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ, οὕτως εἶναι ἡ γωνία ΑΕΓ πρὸς τὴν ΓΕΒ (VI. 33)· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕΓ = 4 ΓΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΓ = 2 ΕΓΒ (I. 32). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ (IV. 15, πόρ.)· εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΓΕΔ πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΕ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΕΓΒ = 2 ΕΔΓ (I. 32). Ἀλλ' ἐδείχθη ἡ ΑΕΓ = 2 ΕΓΒ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕΓ = 4 ΕΔΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΕΓ = 4 ΒΕΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΕΔΓ = ΒΕΓ. Ἡ δὲ γωνία ΕΒΔ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, καὶ τοῦ ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΒ (I. 32)· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΒΔ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΔΒ : ΒΕ = ΕΒ : ΒΓ (VI. 4). Εἶναι δὲ ΕΒ = ΓΔ. Εἶναι ἄρα ΒΔ : ΔΓ = ΔΓ : ΓΒ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΔ 〉 ΔΓ· ἄρα καὶ ἡ ΔΓ 〉 ΓΒ (V. 14). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΔ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΖ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΖΘ, καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΚ ἡ ΖΛ, καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Μ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΝ. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΕΔΗ, τῶν ὁποίων τὸ τόξον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΔ, τὸ λοιπὸν ἄρα τόξον ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν ΗΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΓΔ πλευρὰ πενταγώνου· ἡ ΓΗ ἄρα εἶναι δεκαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΑ = ΖΒ, καὶ ἡ ΖΘ εἶναι κάθετος, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΖΚ = ΚΖΒ (I. 5, I. 26). Ὥστε καὶ τὸ τόξον ΑΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΚΒ (III. 26). Εἶναι ἄρα τὸ τόξον ΑΒ διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΚ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΚ = 2 ΚΜ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ, εἶναι δὲ τὸ τόξον ΓΔ ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΒ, εἶναι ἄρα καὶ τὸ τόξον ΓΔ διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ. Εἶναι δὲ τὸ τόξον ΓΔ καὶ τοῦ τόξου ΓΗ διπλάσιον· τὸ τόξον ἄρα ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΒΚ. Ἀλλὰ τὸ ΒΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΚΜ, ἐπειδὴ εἶναι διπλάσιον καὶ τὸ ΚΑ· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα εἶναι διπλάσιον τοῦ ΚΜ. Ἀλλ' ὅμως καὶ τὸ τόξον ΓΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ· διότι τὸ τόξον ΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ. Καὶ ὅλον ἄρα τὸ τόξον ΗΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΜ· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΗΖΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΖΜ (VI. 33). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΖΒ διπλασία τῆς ΖΑΒ· διότι ἡ ΖΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΖ. Καὶ ἡ ΒΖΝ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΑΒ. Ἡ δὲ γωνία ΑΒΖ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, καὶ τοῦ ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΒΝΖ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΖ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΖΝ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $AB : BZ = ZB : BN$ (VI. 4)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $AB \times BN = BZ^2$ (VI. 17). Πάλιν ἐπειδὴ $A\Lambda = \Lambda K$, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΛΝ, ἡ βάσις ἄρα ΚΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΝ· καὶ ἡ γωνία ἄρα $\Lambda KN = \Lambda AN$ (I. 4). Ἀλλὰ ἡ $\Lambda AN = KBN$ (III. 29, I. 5)· ἄρα καὶ ἡ $\Lambda KN = KBN$. Καὶ ἡ παρὰ τὸ Α γωνία εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ. Ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΚΝΑ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΚΒΑ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΝΑ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $BA : AK = KA : AN$ (VI. 4). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $BA \times AN = AK^2$ (VI. 17). Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $AB + BN = BZ^2$· εἶναι ἄρα $AB \times BN + BA \times AN$, ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς $BA^2 = BZ^2 + AK^2$ (II. 2). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΑ πλευρὰ πενταγώνου, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πλευρᾶς πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἔχοντα τὴν διάμετρον ῥητὴν ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ ἔχοντα ῥητὴν τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (X. 76).

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ζ (III. 1), καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἃς προεκταθῶσι μέχρι τῶν σημείων Η, Θ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΓ, καὶ ἃς ληφθῇ ἡ $ΖΚ = \frac{1}{4}$ ΑΖ. Ἔστω δὲ ῥητὴ ἡ ΑΖ· εἶναι ἄρα ῥητὴ καὶ ἡ ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΔΗ, τῶν ὁποίων τὸ ΑΒΓ = ΑΕΔ, τὸ λοιπὸν τόξον ἄρα ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν ΗΔ. Καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΔ, αἱ γωνίαι παρὰ τὸ Λ εἶναι ὀρθαί, καὶ ΓΔ = 2 ΓΛ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ παρὰ τὸ Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ ΑΓ = 2 ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΛΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ΛΑΓ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΜΖΑ (I. 32)· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΛ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΜΖ· ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΛΓ : ΓΑ = ΜΖ : ΖΑ (VI. 4)· καὶ τῶν ἡγουμένων ὅρων τὰ διπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς 2 ΛΓ : ΓΑ = 2 ΜΖ : ΖΑ. Ὡς δὲ 2ΜΖ : ΖΑ = ΜΖ : $\frac{1}{2}$ ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ 2 ΛΓ : ΓΑ = ΜΖ : $\frac{1}{2}$ ΖΑ. Καὶ τῶν ἑπομένων ὅρων τὰ ἡμίση· εἶναι ἄρα ἡ 2 ΛΓ : $\frac{1}{2}$ ΓΑ = ΜΖ : $\frac{1}{4}$ ΖΑ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΔΓ = 2 ΛΓ, ἡ δὲ ΓΜ = $\frac{1}{2}$ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΚ = $\frac{1}{4}$ ΖΑ· εἶναι ἄρα ὡς ΔΓ : ΓΜ = ΜΖ : ΖΚ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ΔΓ + ΓΜ : ΓΜ = ΜΚ : ΚΖ (V. 18)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $(ΔΓ + ΓΜ)^2 : ΓΜ^2 = ΜΚ^2 : ΚΖ^2$. Καὶ ἐπειδή, ὅταν τμηθῇ ἡ πλευρὰ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, π.χ. ἡ ΑΓ, εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, τουτέστι τὴν ΔΓ (θ. 8), τὸ δὲ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος σὺν τῷ ἡμίσει τῆς ὅλης, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου, τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ εἶναι ἡ ΓΜ ἡμίσεια τῆς ὅλης ΑΓ, εἶναι ἄρα $(ΔΓ + ΓΜ)^2 = 5ΓΜ^2$. Ὡς δὲ τὸ $(ΔΓ + ΓΜ)^2$ πρὸς τὸ $ΓΜ^2$, οὕτως ἐδείχθη τὸ $ΜΚ^2$ πρὸς τὸ $ΚΖ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΜΚ^2 = 5ΚΖ^2$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΚΖ^2$· διότι ἡ διάμετρος εἶναι ῥητή· εἶναι ἄρα ῥητὸν καὶ τὸ $ΜΚ^2$ (X.6, ὁρ. 4)· ἡ ΜΚ ἄρα εἶναι ῥητὴ (X. ὁρ. 3). [Σημ. Τὸ « δυνάμει μόνον » οὐδὲν νόημα ἔχει·εἶναι παρεμβολή]. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΖ = 4ΖΚ, εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ = 5ΚΖ· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΚ^2 = 25ΚΖ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΜΚ^2 = 5ΚΖ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΚ^2 = 5ΚΜ^2$· τὸ $ΒΚ^2$ ἄρα πρὸς τὸ $ΚΜ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ (X. 9). Καὶ ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ῥητή. Αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (X. ὁρ. 3). Ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ἀφαιρεθῇ ῥητὴ οὖσα δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, ἡ λοιπὴ εἶναι ἄλογος (καλουμένη) ἀποτομὴ (X. 73)· ἡ ΜΒ ἄρα εἶναι ἀποτομή, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΜΚ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή. Ἔστω ὅτι $ΒΚ^2 - ΚΜ^2 = Ν^2$· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΒΚ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς ΚΜ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς Ν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα, ἡ $ΚΖ + ΖΒ = ΚΒ$ σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ (X. 15). Ἀλλὰ ἡ ΒΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΘ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΒΚ σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΘ (X. 12). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΒΚ^2 = 5ΚΜ^2$, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΒΚ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΜ, ὃν ἔχει 5 : 1. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΚ^2 : Ν^2 = 5 : 4$ (V. 19, πόρ.), ἤτοι οὐχὶ λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν Ν ἀσύμμετρος (μήκει) (X. 9)· τὸ $ΒΚ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $ΚΜ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου (μήκει) πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΚ). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης τῆς ΒΚ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς (μήκει) ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΚ), καὶ ὅλη ἡ ΒΚ εἶναι σύμμετρος (μήκει) πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΒΘ, εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ τετάρτη ἀποτομὴ (X. ὁρισμοὶ τρίτοι, 4). Τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον (ἄρρητον), καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τοῦτο τετραγώνου εἶναι ἄλογος (ἄρρητος), καλεῖται δὲ ἐλάσσων (X. 94). Εἶναι δὲ $ΘΒ \times ΒΜ = ΑΒ^2$, διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΘ, τὸ τρίγωνον ΑΒΘ γίνεται ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ καὶ εἶναι $ΘΒ : ΒΑ = ΑΒ : ΒΜ$.

Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ πενταγώνου ΑΒ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (IV.2)· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.1) τὸ Δ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, τὸ τόξον ἄρα ΒΕΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἄρα τὸ τόξον ΒΕ εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΕ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου· εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τὴν ΔΕ (IV. 15, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΕ = 2ΔΕ$, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΕ^2 = 4ΕΔ^2$, τουτέστι $= 4ΒΕ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2$ (III. 31, I. 47)· εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = 4ΒΕ^2$. Καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι τὸ $ΑΒ^2 = 3ΒΕ^2$. Εἶναι δὲ ἡ $ΒΕ = ΔΕ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 3ΔΕ^2$.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Νὰ κατασκευασθῇ πυραμὶς καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ δοθείσης σφαίρας, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἔστω ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒ (VI.10)· καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΑ· καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ ΕΖΗ ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΕΖΗ (IV. 2)· καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Θ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἂς ὑψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Θ ἡ ΘΚ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΘΚ (ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΘΚ) εὐθεῖα ἡ ΘΚ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου ΕΖΗ (XI. ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ πρὸς τὴν ΘΕ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΕ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ τριπλασία τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$, ὡς θὰ δειχθῇ ἐν συνεχείᾳ. Εἶναι ἄρα τὸ $A\Delta^2 = 3\Delta\Gamma^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ZE^2 = 3E\Theta^2$ (θ. 12), καὶ εἶναι ἡ $\Delta\Gamma = E\Theta$· εἶναι ἄρα ἴση καὶ ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἐδείχθη ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ· τὰ τέσσαρα ἄρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ εἶναι ἰσόπλευρα. Κατεσκευάσθη ἄρα πυραμὶς ἐκ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΖΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ.

Πρέπει τώρα αὕτη νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρίτα δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΘ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΘΛ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΘΛ = ΓΒ$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $ΑΓ : ΓΔ = ΓΔ : ΓΒ$ (VI. 8 πόρ.), εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΑΓ = ΚΘ$, ἡ δὲ $ΓΔ = ΘΕ$, ἡ δὲ $ΓΒ = ΘΛ$, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΚΘ : ΘΕ = ΕΘ : ΘΛ$· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΚΘ \times ΘΛ = ΕΘ^2$ (VI. 17). Καὶ εἶναι ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΚΘΕ, ΕΘΛ· τὸ ἐπὶ τῆς ΚΛ ἄρα γραφόμενον ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε. [Ἐπειδὴ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΕΛ, ἡ γωνία ΛΕΚ γίνεται ὀρθή, διότι τὸ τρίγωνον ΕΛΚ γίνεται ἰσογώνιον πρὸς ἑκάτερον τῶν τριγώνων ΕΛΘ, ΕΘΚ]. Ἐὰν λοιπὸν διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς ΚΛ τὸ ἡμικύκλιον ἀφοῦ περιστραφῇ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΖΛ, ΛΗ καὶ γίνωσιν ὁμοίως ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Ζ, Η γωνίαι· καὶ θὰ εἶναι ἡ πυραμὶς ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν. Διότι ἡ διάμετρος ΚΛ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας, ἐπειδὴ πρὸς μὲν τὴν ΑΓ εἶναι ἴση ἡ ΚΘ, πρὸς δὲ τὴν ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω τώρα, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ = 2ΓΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 3ΒΓ$· καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ἡ $ΒΑ = \frac{3}{2} ΑΓ$, (διὰ διαιρέσεως δηλ. τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη). Ὡς δὲ ἡ $ΒΑ : ΑΓ = ΒΑ^2 : ΑΔ^2$ [ἐπειδὴ βεβαίως ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΒ εἶναι ὡς ἡ $ΒΑ : ΑΔ = ΔΑ : ΑΓ$ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΔΑΓ καὶ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (δηλ. $ΒΑ : ΑΓ = ΒΑ^2 : ΑΔ^2$ (V. ὁρ. 9)]. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΒΑ^2 = \frac{3}{2} ΑΔ^2$. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΑ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας, ἡ δὲ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς πυραμίδος.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Δέον νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ὡς ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ^2 : ΔΓ^2$.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ προηγουμένως καταγραφὲν ἡμικύκλιον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν διότι τὸ τρίγωνον ΔΑΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ὡς ἡ $ΒΑ : ΑΔ = ΔΑ : ΑΓ$ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΒΑ \times ΑΓ = ΑΔ^2$ (VI. 17). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $ΑΒ : ΒΓ =$ τὸ ΕΒ : τὸ ΒΖ (VI. 1), καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΕΒ = ΒΑ \times ΑΓ$· διότι $ΕΑ = ΑΓ$· τὸ δὲ $ΒΖ = ΑΓ \times ΓΒ$, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΒΑ \times ΑΓ : ΑΓ \times ΓΒ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΒΑ \times ΑΓ = ΑΔ^2$, τὸ δὲ $ΑΓ \times ΓΒ = ΔΓ^2$· διότι ἡ κάθετος ΔΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως τῶν ΑΓ, ΓΒ (VI. 8, πόρ.), διότι ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθή. Ὡς ἄρα ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ^2 : ΔΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀκτάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ προηγουμένως, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ ἡ ΚΛ καὶ ἂς προεκταθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ πρὸς μίαν τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση, ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΚΕ = ΚΘ$, καὶ ἡ γωνία ΕΚΘ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΘΕ^2 = 2ΕΚ^2$ (Ι. 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΛΚ = ΚΕ$, καὶ ἡ γωνία ΛΚΕ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΕΛ^2 = 2ΕΚ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΘΕ^2 = 2ΕΚ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΛΕ^2 = ΕΘ^2$· ἄρα ἡ $ΛΕ = ΕΘ$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ $ΛΘ = ΘΕ$· τὸ τρίγωνον ἄρα ΛΕΘ εἶναι ἰσόπλευρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Λ, Μ, εἶναι ἰσόπλευρον· κατεσκευάσθη ἄρα ὀκτάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτὼ ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ γραφόμενον ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐάν, ἀφοῦ μείνῃ σταθερὰ ἡ ΛΜ, περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η, Θ, καὶ θὰ περιλαμβάνεται τὸ ὀκτάεδρον ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΛΚ = ΚΜ, εἶναι δὲ κοινὴ ἡ ΚΕ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΜ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΛΕΜ εἶναι ὀρθή· διότι βαίνει ἐπὶ ἡμικυκλίου (III. 31)· εἶναι ἄρα τὸ $ΛΜ^2 = 2ΛΕ^2$ (I. 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ = ΓΒ εἶναι ἡ ΑΒ = 2ΒΓ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ : ΒΓ = $ΑΒ^2 : ΒΔ^2$ (VI. 8, V. ὁρ .9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 2ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΛΜ^2 = 2ΛΕ^2$. Καὶ εἶναι τὸ $ΔΒ^2 = ΛΕ^2$· διότι ἐλήφθη ἡ ΕΘ = ΔΒ. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΑΒ^2 = ΛΜ^2$· εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = ΛΜ. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· ἡ ΛΜ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας.

Περιελήφθη ἄρα τὸ ὀκτάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας. Καὶ συναπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Νὰ κατασκευασθῇ κύβος καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὅπως καὶ ἡ πυραμίς, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ = 2ΓΒ (VI. 10), καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἔχον τὴν πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ πρὸς μίαν τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κατεσκευάσθη ἄρα κύβος ὁ ΖΝ περιεχόμενος ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων. Πρέπει τώρα αὐτὸς νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΗ, ΕΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΚΕΗ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΚΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΗ δηλαδὴ καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΗ (XI. ὁρ. 3), τὸ ἡμικύκλιον ἄρα τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΚΗ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΗΖ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, εἶναι ἄρα κάθετος ἡ ΗΖ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΚ (XI. 4)· ὥστε καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ζ. Ὁμοίως θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ κύβου. Ἐὰν λοιπόν, παραμενούσης σταθερᾶς τῆς ΚΗ, ἀφοῦ περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴ θέσιν, ἀφ' ἧς ἤρξατο στρεφόμενον, ὁ κύβος θὰ ἔχῃ περιληφθῆ ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ $HZ = ZE$, καὶ ἡ παρὰ τὸ Z γωνία εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $EH^2 = 2EZ^2$ (I. 47). Εἶναι δὲ ἡ $EZ = EK$· εἶναι ἄρα τὸ $EH^2 = 2EK^2$· ὥστε τὰ $HE^2 + EK^2$, τουτέστι τὸ $HK^2 = 3EK^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $AB = 3B\Gamma$, εἶναι δὲ $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$, εἶναι ἄρα τὸ $AB^2 = 3B\Delta^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $HK^2 = 3KE^2$. Καὶ ἐλήφθη ἡ $KE = \Delta B$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $KH = AB$. Καὶ εἶναι ἡ AB διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ ἡ KH ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας.

Ὁ κύβος ἄρα περιελήφθη ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ συναπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Νὰ κατασκευασθῇ εἰκοσάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἄς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ AB καὶ ἄς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι $A\Gamma = 4\Gamma B$, καὶ ἄς γραφῇ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν AB ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἄς ληφθῇ κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἔστω ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ (IV. 11), καὶ ἄς τμηθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Εἶναι ἄρα ἰσόπλευρον καὶ τὸ πεντάγωνον ΛΜΝΞΟ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΟ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου. Καὶ ἄς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, Κ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ, αἵτινες νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα ἡ ΕΠ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΥ (XI. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν· αἱ ἑνοῦσαι δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εὐθείας εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Ἡ ΠΥ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΚ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΚ πλευρὰ πενταγώνου ἰσοπλεύρου· καὶ ἡ ΠΥ ἄρα εἶναι πλευρὰ πενταγώνου ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ ἐγγραφομένου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου πενταγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΠΡΣΤΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΠΕ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ

ΕΟ δεκαγώνου, καὶ εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία ΠΕΟ, ἡ ΠΟ ἄρα εἶναι πλευρὰ πενταγώνου· διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΟΥ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πλευρὰ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΠΟΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ ἐδείχθη πλευρὰ πενταγώνου, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πλευρὰ πενταγώνου, εἶναι ἄρα ἰσόπλευρον τὸ τρίγωνον ΠΛΟ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν τριγώνων ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ τὸ σημεῖον Φ (III. 1)· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ ἂς ἀνυψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ἡ ΦΩ, καὶ ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ, ὥστε νὰ εἶναι ἑξαγώνου μὲν πλευρὰ ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΠΕ (XI. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Εἶναι δὲ ἡ ΕΦ πλευρὰ ἑξαγώνου· καὶ ἡ ΠΧ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΠΧ εἶναι ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΧΩ δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΠΧΩ εἶναι ὀρθὴ (XI. ὁρ. 3, I. 29), εἶναι ἄρα ἡ ΠΩ πλευρὰ πενταγώνου (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΥΩ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου, ἐπειδὴ βεβαίως, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, θὰ εἶναι ἀπέναντι καὶ ἴσαι, καὶ ἡ ΦΚ ὡς ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΧΥ πλευρὰ ἑξαγώνου. Ἡ δὲ ΧΩ εἶναι δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΥΧΩ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΥΩ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πλευρὰ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΠΥΩ εἶναι ἰσόπλευρον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ω, εἶναι ἰσόπλευρον. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΦΛ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΦΨ δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΛΦΨ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα ἡ ΛΨ πλευρὰ πενταγώνου (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΦ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΜΨ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΛΜΨ εἶναι ἰσόπλευρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ψ, εἶναι ἰσόπλευρον. Κατεσκευάσθη ἄρα εἰκοσάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΦΧ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΧΩ δεκαγώνου, ἡ ΦΩ ἄρα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΦΧ (θ. 9)· εἶναι ἄρα ὡς ΩΦ : ΦΧ = ΦΧ : ΧΩ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΦΧ πρὸς τὴν ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ πρὸς τὴν ΦΨ· εἶναι ἄρα ὡς ΩΦ : ΦΕ = ΕΦ : ΦΨ. Καὶ εἶναι αἱ γωνίαι ΩΦΕ, ΕΦΨ ὀρθαί· ἐὰν ἄρα φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΕΩ, ἡ γωνία ΨΕΩ εἶναι ὀρθὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΨΕΩ, ΦΕΩ (VI. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΩΦ : ΦΧ = ΦΧ : ΧΩ, καὶ εἶναι ἴση ἡ μὲν ΩΦ πρὸς τὴν ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΠ, εἶναι ἄρα ὡς ΨΧ : ΧΠ = ΠΧ : ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΠΨ, ἡ γωνία παρὰ τὸ Π θὰ εἶναι ὀρθὴ (VI. 8)· τὸ ἡμικύκλιον ἄρα τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΨΩ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Π (I. 31). Καὶ ἐὰν παραμενούσης σταθερᾶς τῆς ΨΩ ἀφοῦ περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, ἀφ' ἧς ἤρξατο στρεφόμενον, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ θὰ ἔχῃ περιληφθῇ τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι ἄς τμηθῇ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α′. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΦΩ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΩΧ, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΩΧ σὺν τῷ ἡμίσει τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος τὸ ΧΑ′, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος (θ. 3)· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΩΑ′ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς Α′Χ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν $ΩΨ = 2\ ΩΑ'$, ἡ δὲ $ΦΧ = 2Α'Χ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΩΨ^2 = 5 \times Φ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ = 4\ ΓΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 5ΒΓ$. Ὡς δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΔ^2$ (VI. 8, V. ὁρ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 5ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΩΨ^2 = 5ΦΧ^2$. Καὶ εἶναι ἡ $ΔΒ = ΦΧ$· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ = ΨΩ$. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας. Περιελήφθη ἄρα τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (Χ. 76). Διότι, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ῥητή, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ, εἶναι ἄρα ῥητὴ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι ῥητή. Ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ἔχοντα τὴν διάμετρον ῥητὴν ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (Ο. 11). Ἡ πλευρὰ δὲ τοῦ πενταγώνου ΕΖΗ ΘΚ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Πόρισμα.

Ὅθεν ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀναγραφῇ τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας σύγκειται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο πλευρῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Νὰ κατασκευασθῇ δωδεκάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῶσι τοῦ προειρημένου κύβου (Ο. 15) δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ σημεῖα Ρ, Σ, Τ, καὶ ἔστω μεγαλύτερα τμήματα αὐτῶν τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ρ, Σ, Τ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τοῦ κύβου ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἴσαι πρὸς τὰς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. Λέγω, ὅτι τὸ πεντάγωνον ΥΒΧΓΦ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ εἰς ἓν ἐπίπεδον καὶ ἀκόμη ὅτι εἶναι ἰσογώνιον. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΝΟ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΡΟ, εἶναι ἄρα τὰ τετράγωνα $ΟΝ^2 + ΝΡ^2 = 3ΡΟ^2$ (Ο. 4). Εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΟΝ = ΝΒ$, ἡ δὲ $ΟΡ = ΡΥ$· ἄρα $ΒΝ^2 + ΝΡ^2 = 3ΡΥ^2$. Πρὸς δὲ τὰ $ΒΝ^2 + ΝΡ^2$ εἶναι ἴσον τὸ $ΒΡ^2$ (Ι. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΡ^2 = 3ΡΥ^2$· ὥστε τὰ $ΒΡ^2 + ΡΥ^2 = 4ΡΥ^2$. Πρὸς δὲ τὰ $ΒΡ^2 + ΡΥ^2$ εἶναι ἴσον τὸ $ΒΥ^2$

(I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $BY^2 = 4YP^2$· ἄρα εἶναι $BY = 2PY$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $\Phi Y = 2YP$, ἐπειδὴ βεβαίως εἶναι καὶ ἡ $\Sigma P = 2OP$, τουτέστι $2PY$· εἶναι ἄρα ἡ $BY = Y\Phi$. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν BX, XΓ, ΓΦ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν BY, YΦ. Τὸ πεντάγωνον ἄρα BYΦΓX εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ O πρὸς ἑκατέραν τῶν PY, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου κειμένη ἡ OΨ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΨΘ, ΘX· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘX εἶναι εὐθεῖα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΘΠ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ T, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΠT, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Theta\Pi : \Pi T = \Pi T : T\Theta$. Εἶναι δὲ ἡ μὲν $\Theta\Pi = \Theta O$, ἡ δὲ $\Pi T = TX = O\Psi$· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Theta O : O\Psi = XT : T\Theta$. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ μὲν ΘO πρὸς τὴν TX· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον BΔ (XI. 6)· ἡ δὲ TΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν OΨ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον BZ. Ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨOΘ, ΘTX, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς δύο πλευράς, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (VI. 32)· εἶναι ἄρα ἐπ' εὐθείας ἡ ΨΘ καὶ ἡ ΘX. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα κεῖται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου (XI. 1)· εἰς ἓν ἄρα ἐπίπεδον κεῖται τὸ πεντάγωνον YBXΓΦ.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Διότι ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ NO τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ P καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ OP [εἶναι ἄρα ὡς $NO + OP : ON = NO : OP$], εἶναι δὲ ἡ $OP = O\Sigma$ [εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Sigma N : NO = NO : O\Sigma$], ἡ NΣ ἄρα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ O, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ NO (θ. 5)· εἶναι ἄρα τὰ $N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν NO πρὸς τὴν NB, ἡ δὲ OΣ πρὸς τὴν ΣΦ· ἄρα τὰ $N\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3NB^2$· ὥστε τὰ $\Phi\Sigma^2 + \Sigma N^2 + NB^2 = 4NB^2$. Πρὸς δὲ τὰ $\Sigma N^2 + NB^2$ εἶναι ἴσον τὸ ΣB^2 (I. 47)· εἶναι ἄρα τὰ $B\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2$, τουτέστι τὸ $B\Phi^2$ (διότι ἡ γωνία ΦΣB εἶναι ὀρθὴ) τετραπλάσιον τοῦ NB^2 (XI. ὁρ. 3)· εἶναι ἄρα ἡ $\Phi B = 2BN$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $B\Gamma = 2BN$, εἶναι ἄρα ἡ $B\Phi = B\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ BY, YΦ πρὸς δύο τὰς BX, XΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ βάσις BΦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν BΓ (I. 8), ἡ γωνία ἄρα BYΦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν BXΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία YΦΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν BXΓ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι BXΓ, BYΦ, YΦΓ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ἐὰν δὲ ἰσοπλεύρου πενταγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ πεντάγωνον θὰ εἶναι ἰσογώνιον (θ. 7)· εἶναι ἄρα τὸ πεντάγωνον BYΦΓX ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ πεντάγωνον ἄρα BYΦΓX εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, καὶ εἶναι ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ κύβου τῆς ΒΓ. Ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν δώδεκα πλευρῶν τοῦ κύβου κατασκευάσωμεν τὰ αὐτά, θὰ συσταθῇ στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων πενταγώνων, τὸ ὁποῖον καλεῖται δωδεκάεδρον.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω κατὰ τὴν ΨΩ· συναντᾷ ἄρα ἡ ΟΩ τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· διότι τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὸ προτελευταῖον θεώρημα τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου (XI. 38). Ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα εἶναι κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΣ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΝΟ, εἶναι ἄρα τὰ $\mathrm{Ν Σ}^2 + \mathrm{Σ Ο}^2 = 3\ \mathrm{Ν Ο}^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἡ μὲν $\mathrm{ΝΣ} = \mathrm{ΨΩ}$, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ ἡ μὲν $\mathrm{ΝΟ} = \mathrm{ΟΩ}$, ἡ δὲ $\mathrm{ΨΟ} = \mathrm{ΟΣ}$. Ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ $\mathrm{ΟΣ} = \mathrm{ΨΥ}$, ἐπειδὴ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΡΟ· εἶναι ἄρα τὰ $\mathrm{ΩΨ}^2 + \mathrm{ΨΥ}^2 = 3\ \mathrm{ΝΟ}^2$. Πρὸς δὲ τὰ $\mathrm{ΩΨ}^2 + \mathrm{ΨΥ}^2$ εἶναι ἴσον τὸ $\mathrm{ΥΩ}^2$ (I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{ΥΩ}^2 = 3\ \mathrm{ΝΟ}^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· διότι προαπεδείχθη, νὰ κατασκευασθῇ κύβος καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου (θ. 15). Ἐὰν δὲ ὅλον (τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου εἶναι τριπλάσιον) τοῦ ὅλου (τετραγώνου τῆς πλευρᾶς), εἶναι καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος· καὶ εἶναι ἡ ΝΟ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· ἡ ΥΩ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ σημεῖον ἄρα Υ εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· περιελήφθη ἄρα τὸ δωδεκάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομὴ (X. 73).

Διότι ἐπειδὴ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς ΝΟ, ἡ ὁποία ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, εἶναι ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ, ἡ ὁποία ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΟΣ, εἶναι ἄρα ὅλης τῆς ΝΞ τεμνομένης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΡΣ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὡς ἡ $\mathrm{ΝΟ} : \mathrm{ΟΡ} = \mathrm{ΟΡ} : \mathrm{ΡΝ}$, ἰσχύει τοῦτο καὶ διὰ τὰ διπλάσια· διότι τὰ μέρη ἔχουσι πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τὸν αὐτὸν λόγον (V. 15)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\mathrm{ΝΞ} : \mathrm{ΡΣ} = \mathrm{ΡΣ} : \mathrm{ΝΡ} + \mathrm{ΣΞ}$ (V. 14). Εἶναι δὲ ἡ $\mathrm{ΝΞ} > \mathrm{ΡΣ}$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $\mathrm{ΡΣ} > \mathrm{ΝΡ} + \mathrm{ΣΞ}$· τέμνεται ἄρα ἡ ΝΞ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΡΣ. Εἶναι δὲ ἡ ΡΣ = ΥΦ· τῆς ΝΞ ἄρα τεμνομένης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, εἶναι ἄρα ῥητὴ ἡ ΝΞ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ κύβου. Ἐὰν δὲ ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἄρρητος (ἡ καλουμένη) ἀποτομὴ (θ. 6).

Ἡ ΥΦ ἄρα, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου, εἶναι ἄρρητος ἀποτομή.

Πόρισμα.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου ὅτι, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Νὰ ἐκτεθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν πέντε σχημάτων καὶ νὰ συγκριθῶσι πρὸς ἀλλήλας.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΓ = ΓΒ$, κατὰ δὲ τὸ Δ, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΔ = 2ΔΒ$, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ = 2ΔΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 3ΔΒ$. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ἡ $ΒΑ = \frac{3}{2} ΑΔ$. Εἶναι δὲ ἡ $ΒΑ : ΑΔ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$· διότι τὸ τρίγωνον ΑΖΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΖΔ (VI. 8) (καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων εἶναι $ΒΑ : ΑΖ = ΑΖ : ΑΔ$ καὶ V. ὁρισ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΑ^2 = \frac{3}{2} ΑΖ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος (θ. 13). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ = 2ΔΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 3ΒΔ$. Εἶναι δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΔ = ΑΒ^2 : ΒΖ^2$ (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΖ, ΒΖΔ, καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως $ΑΒ : ΒΖ = ΒΖ : ΒΔ$, καὶ V. ὁρισ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 3ΒΖ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου (θ. 15). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΒΖ ἄρα εἶναι πλευρὰ τοῦ κύβου.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ = ΓΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 2ΒΓ$. Εἶναι δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΕ^2$ (VI. 8, V. ὁρ. 9, ὡς ἀνωτέρω)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 2ΒΕ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου (θ. 14). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΒΕ ἄρα εἶναι πλευρὰ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἂς ἀχθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΑΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΑΗ = ΑΒ$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΗΑ = 2ΑΓ$· διότι ἡ $ΗΑ = ΑΒ$· εἶναι δὲ $ΗΑ : ΑΓ = ΘΚ : ΚΓ$ (VI. 4), εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΘΚ = 2ΚΓ$. Ἄρα εἶναι τὸ $ΘΚ^2 = 4ΚΓ^2$· εἶναι ἄρα τὰ $ΘΚ^2 + ΓΚ^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $ΘΓ^2 = 5ΚΓ^2$ (I. 47). Εἶναι δὲ ἡ $ΘΓ = ΓΒ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΒ = 2ΓΒ$, ἐξ ὧν ἡ $ΑΔ = 2ΔΒ$, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι διπλασία τῆς λοιπῆς τῆς ΔΓ. Εἶναι ἄρα ἡ $ΒΓ = 3ΓΔ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΓ^2 = 9\ ΓΔ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΓΚ^2 >$ τοῦ $ΓΔ^2$. Εἶναι ἄρα ἡ $ΓΚ > ΓΔ$. Ἂς ληφθῇ ἡ $ΓΛ = ΓΚ$, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΛΜ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$, καὶ εἶναι τῆς μὲν ΒΓ διπλασία ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλασία ἡ ΚΛ, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 5ΚΛ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον (θ. 16 πόρ.). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον· ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου ἐγγραφομένου εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον (4. 15, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας σύγκειται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο πλευρῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον (θ. 16 πόρ.), καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ΚΛ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, καὶ ἡ $ΑΚ = ΛΒ$, εἶναι ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΛΒ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΛΒ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ, ἐπειδὴ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΘΚ· διότι ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ εἶναι ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασία τῆς ΚΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ πενταγώνου (θεώρ. Χ καὶ I. 47). Ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου (θ. 16)· εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ εἰκοσαέδρου.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΒ εἶναι πλευρὰ κύβου, ἂς τμηθῇ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα εἶναι πλευρὰ δωδεκαέδρου (θ. 17. πόρ.).

Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα μὲν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΑΖ τῆς πυραμίδος, διπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΒΕ τοῦ ὀκταέδρου, τριπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΖΒ τοῦ κύβου, ἐὰν εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἴσον μὲ ἓξ τετράγωνα, τὸ τετράγωνον μὲν τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρα τοιαῦτα τετράγωνα, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου ἴσον μὲ τρία τοιαῦτα τετράγωνα, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου ἴσον μὲ δύο τοιαῦτα τετράγωνα. Εἶναι ἄρα τὸ μὲν τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος τὰ τέσσαρα τρίτα μὲν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου, διπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Αἱ μὲν λοιπὸν εἰρημέναι πλευραὶ τῶν τριῶν σχημάτων, ἐννοῶ δηλαδὴ τῆς πυραμίδος, καὶ τοῦ ὀκταέδρου καὶ τοῦ κύβου, εἶναι πρὸς ἀλλήλας εἰς ῥητοὺς λόγους. Αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, ἐννοῶ δηλαδὴ καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὴν τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἶναι εἰς λόγους ῥητούς· διότι εἶναι ἄρρητοι, ἡ μὲν ὡς ἐλάσσων (θ. 16), ἡ δὲ ὡς ἀποτομὴ (θ. 17).

Ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου ἡ ΜΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΖΔΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΑΒ, (VI. 8), ἰσχύει ἡ ἀναλογία $\Delta B : BZ = BZ : BA$ (VI. 4). Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (V. ὁρ. 9)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Delta B : BA = \Delta B^2 : BZ^2$· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ $AB : B\Delta = ZB^2 : B\Delta^2$. Εἶναι δὲ ἡ $AB = 3\ B\Delta$· εἶναι ἄρα τὸ $ZB^2 = 3\ B\Delta^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $A\Delta^2 = 4\ \Delta B^2$· διότι ἡ $A\Delta = 2\Delta B$· εἶναι ἄρα τὸ $A\Delta^2 > $ τοῦ ZB^2· εἶναι ἄρα $A\Delta > ZB$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι ἡ $A\Lambda > ZB$. Καὶ ὅταν μὲν ἡ ΑΛ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΚΛ, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΛΚ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΚΑ πλευρὰ δεκαγώνου (θ. 9)· ὅταν δὲ ἡ ΖΒ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΝΒ· εἶναι ἄρα ἡ $K\Lambda > NB$. Εἶναι δὲ ἡ $K\Lambda = \Lambda M$· εἶναι ἄρα ἡ $\Lambda M > NB$ [τῆς δὲ ΛΜ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΜΒ]. Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ ΜΒ οὖσα πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΝΒ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω τώρα, ὅτι ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πέντε σχημάτων οὐδὲν ἄλλο σχῆμα κατασκευάζεται περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων ἴσων πρὸς ἄλληλα.

Διότι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων ἢ ἐν γένει ἐπιπέδων δὲν κατασκευάζεται (τρίεδρος) στερεὰ γωνία (XI. ὁρισ. 11). Ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων κατασκευάζεται ἡ στερεὰ γωνία τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων συνερχομένων πρὸς ἓν σημεῖον δὲν ὑπάρχει στερεὰ γωνία· διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι δύο τρίτα ὀρθῆς, θὰ εἶναι αἱ ἓξ ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον· διότι πᾶσα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ μικροτέρων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν (XI. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους οὐδὲ ὑπὸ περισσοτέρων τῶν ἓξ ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία. Ὑπὸ τριῶν δὲ τετραγώνων περιέχεται ἡ γωνία τοῦ κύβου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· διότι θὰ εἶναι πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν περιέχεται ἡ γωνία τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων εἶναι ἀδύνατον νὰ περιέχεται· διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου εἶναι μία καὶ ἓν πέμπτον ὀρθῆς, θὰ εἶναι αἱ τέσσαρες γωνίαι μεγαλύτεραι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὅμως οὐδὲ ὑπὸ ἑτέρων πολυγώνων σχημάτων εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Δὲν κατασκευάζεται ἄρα ἄλλο στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων σχημάτων ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πέντε σχημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ὅτι δὲ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου εἶναι μία καὶ ἓν πέμπτον ὀρθῆς, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Διότι ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ (IV. 14), καὶ ἂς ληφθῇ αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ (III. 1), καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. Ἄρα τέμνουσιν αὗται τὰς παρὰ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε γωνίας τοῦ πενταγώνου δίχα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὸ Ζ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἰσοῦνται πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, μία ἄρα ἐξ αὐτῶν, ὡς ἡ ΑΖΒ εἶναι μία ὀρθὴ μεῖον ἓν πέμπτον· αἱ λοιπαὶ ἄρα αἱ ΖΑΒ + ΑΒΖ εἶναι μία ὀρθὴ καὶ ἓν πέμπτον. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΑΒ πρὸς τὴν ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου εἶναι μία ὀρθὴ καὶ ἓν πέμπτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.