ΒΙΒΛΙΟΝ Ι.

Ὁρισμοί.

1. Σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος.

2. Γραμμὴ δὲ εἶναι μῆκος ἄνευ πλάτους.

3. Γραμμῆς δὲ πέρατα εἶναι σημεῖα.

4. Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰ ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖα.

5. Ἐπιφάνεια δὲ εἶναι ὅ,τι ἔχει μόνον μῆκος καὶ πλάτος.

6. Τῆς δὲ ἐπιφανείας τὰ πέρατα εἶναι γραμμαί.

7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείας.

8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία εἶναι ἡ εἰς ἐπίπεδον κλίσις πρὸς ἀλλήλας δύο γραμμῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, αἱ ὁποῖαι ἅπτονται μεταξύ των.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖαι, ἡ γωνία καλεῖται εὐθύγραμμος.

10. Ὅταν δὲ εὐθεῖα, ἀφοῦ σταθῇ ἐπ' εὐθείας, σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ σταθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται κάθετος ἐπὶ ἐκείνην, ἐπὶ τὴν ὁποίαν ἐστάθη.

11. Ἀμβλεῖα γωνία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς.

12. Ὀξεῖα δὲ ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς.

13. Ὅριον εἶναι ὅ,τι εἶναι πέρας τινός.

14. Σχῆμα εἶναι τὸ περιεχόμενον ὑπό τινος ὁρίου ἢ τινων ὁρίων.

15. Κύκλος εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς (ἡ ὁποία καλεῖται περιφέρεια), πρὸς τὴν ὁποίαν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκ τῶν κειμένων ἐντὸς τοῦ σχήματος ὅλαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι (πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου) εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

16. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται κέντρον τοῦ κύκλου.

17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.

18. Ἡμικύκλιον καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διάμετρον. Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κύκλου.

19. Σχήματα εὐθύγραμμα εἶναι τὰ περιεχόμενα ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν,

τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ περισσοτέρων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν.

20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον ἴσας τὰς τρεῖς πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ἔχον μόνον τὰς δύο πλευρὰς ἴσας, σκαληνὸν δὲ τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους.

21. Ἀκόμη δὲ ἐκ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ ἔχον τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας.

22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ὀρθογώνιον ἀλλ' ὄχι ἰσόπλευρον, ῥόμβος δὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ἰσόπλευρον ἀλλ' ὄχι ὀρθογώνιον, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, τὸ ὁποῖον οὔτε ἰσόπλευρον εἶναι οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ ἐκτὸς τούτων τετράπλευρα ἂς καλοῦνται τραπέζια.

23. Παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ προεκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον ἀπὸ τὰ δύο μέρη δὲν συμπίπτουν ἀπὸ κανὲν μέρος.

Αἰτήματα.

1. Ἂς αἰτῆται ὅτι ἀπὸ παντὸς σημείου εἰς πᾶν σημεῖον δύναται ν' ἄγεται εὐθεῖα γραμμή.

2. Καὶ ὅτι πεπερασμένη εὐθεῖα δύναται νὰ προεκτείνεται συνεχῶς καὶ εὐθυγράμμως.

3. Καὶ ὅτι μὲ πᾶν κέντρον καὶ πᾶσαν ἀκτῖνα δύναται νὰ γράφεται κύκλος.

4. Καὶ ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

5. Καὶ ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα δύο εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι προεκταθοῦν ἐπ' ἄπειρον, θὰ συμπίπτουν πρὸς τὰ μέρη ὅπου σχηματίζονται αἱ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν γωνίαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

2. Καὶ ἐὰν εἰς ἴσα προστεθοῦν ἴσα, τὰ προκύπτοντα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθοῦν ἴσα, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

[4. Καὶ ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθοῦν ἴσα, τὰ προκύπτοντα εἶναι ἄνισα.

5. Καὶ τὰ διπλάσια τοῦ αὐτοῦ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

6. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση εἶναι μεταξύ των ἴσα.]

7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα εἶναι ἴσα μεταξύ των.

8. Καὶ τὸ ὅλον (εἶναι) μεγαλύτερον τοῦ μέρους.

9. Καὶ δύο εὐθεῖαι δὲν περικλείουν ἐπιφάνειαν.

1.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ἔστω ἡ πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Μὲ κέντρον μὲν τὸ Α ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος, ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον μὲν τὸ Β, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΒΑ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται μεταξύ των οἱ κύκλοι ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΒ, ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΑΕ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ κατεσκευάσθη ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας τῆς ΑΒ.

(Ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας κατεσκευάσθη ἰσόπλευρον τρίγωνον)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Ἐπὶ δοθέντος σημείου νὰ τοποθετηθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· ζητεῖται νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ.

Διότι ἂς ἑνωθῇ τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ σημεῖον Β διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΗ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΗΚΛ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΗΘ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΚΛ, ἡ ΔΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, τὰ μέρη δὲ τούτων ΔΑ, ΔΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι ΑΛ, ΒΗ θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΛ, ΒΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου Α κεῖται ἡ εὐθεῖα ΑΛ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Ἐὰν δοθοῦν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τῆς μεγαλυτέρας εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, τῶν ὁποίων ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ· ζητεῖται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν εὐθεῖαν τὴν Γ.

Ἂς ληφθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἴση πρὸς τὴν Γ καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΕΖ, ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ. Ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΕ, Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἐνῷ λοιπὸν ἐδόθησαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ ἀφῃρέθη ἐκ τῆς μεγαλυτέρας ΑΒ, ἡ ΑΕ ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἔχουν τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχουν καὶ τὰς βάσεις ἴσας καὶ τὸ ἓν τρίγωνον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τούτων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΔΕ, ΔΖ τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, ἤτοι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ τότε καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Ε, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ· ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΑΒ ἐφήρμοσε ἐπὶ τῆς ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἐπὶ τῆς ΔΖ, διότι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ σημεῖον Γ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, διότι ἐπίσης ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ. Ἀλλ' ὅμως ἔχει ἤδη τὸ σημεῖον Β ἐφαρμόσει ἐπὶ τοῦ Ε· ὥστε ἡ βάσις

ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ. Διότι, ἐὰν μὲν τὸ σημεῖον Β ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ε τὸ δὲ σημεῖον Γ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ, ἡ δὲ βάσις ΒΓ δὲν ἐφαρμοόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, δύο εὐθεῖαι περιέχουν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἀδύνατον (κοιναὶ ἔνν. 9). Ἄρα ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτὴν (κοιναὶ ἔνν. 7)· ὥστε καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ ἐφαρμόσουν ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου καὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτάς, ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ ἡ δὲ ΑΓΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχουν ἴσας καὶ τὰς βάσεις (τὴν τρίτην πλευρὰν) καὶ τὸ ἓν τρίγωνον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἐὰν προεκβληθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί, αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται κάτωθεν τῆς βάσεως εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκβολῶν τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ ἡ δὲ γωνία ΓΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΕ.

Διότι, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἡ ὁποία λαμβάνεται μεγαλυτέρα τῆς ΑΖ, ἡ ἴση πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ ΑΗ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΓ, ΗΒ (θεώρ. 3).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, αἱ δύο πλευραὶ ΖΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΗΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ περιέχουν αὗται τὴν κοινὴν γωνίαν ΖΑΗ· ἡ βάσις ἄρα ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΗΒ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴσαι, ἡ μὲν γωνία ΑΓΖ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΗ ἡ δὲ ΑΖΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ὅλη ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΗ καὶ τὰ μέρη τούτων ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη ΒΖ, ΓΗ θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των (κ. ἔνν. 3). Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΒ· αἱ δύο λοιπὸν πλευραὶ ΒΖ, ΖΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΓΗ, ΗΒ, ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΒ καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΒΓ εἶναι κοινή· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΒΖΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΒ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τῶν τριγώνων αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΓΒ ἡ δὲ ΒΓΖ πρὸς τὴν ΓΒΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὅλη ἡ γωνία ΑΒΗ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν γωνίαν ΑΓΖ καὶ τὰ μέρη τῶν γωνιῶν τούτων, ἤτοι αἱ γωνίαι ΓΒΗ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ὑπόλοιπα μέρη θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· εἶναι δὲ αὗται παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΓΒ· καὶ εἶναι αὗται ὑπὸ τὴν βάσιν.

Ἄρα τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐὰν προεκβληθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ μία ἐκ τούτων θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης. Ἔστω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας ΑΒ ἡ ΔΒ, ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν ΑΓ (θεώρ. 3) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο πλευραὶ αἱ ΔΒ, ΒΓ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ καὶ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· ἄρα ἡ βάσις ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ (θεώρ. 4), δηλ. τὸ μικρότερον τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα δὲν θὰ εἶναι ἡ ΑΒ ἄνισος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα εἶναι ἴση.

Ἐὰν ἄρα αἱ δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἔχουν ἀχθῆ πρὸς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας δύο εὐθεῖαι, δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀχθείσας, αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας καὶ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα, ὅπως αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι.

Διότι ἔστω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὴν ὁποίαν ἐκ τοῦ σημείου Γ ἔχουν ἀχθῆ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ, νὰ ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου Δ δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀχθείσας ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ ΑΔ, ΔΒ, κείμεναι ὅλαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἔχουσαι τὰ αὐτὰ πέρατα, ὥστε ἡ ΓΑ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑ, ἐνῷ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πέρας Α καὶ ἡ ΓΒ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἐνῷ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πέρας Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΔΓ (θεώρ. 5)· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΒ (κ. ἔννοιαι 8)· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ γωνία ΓΔΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΓΔΒ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΒ (θεώρ. 5). Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι αὕτη (ἡ ΓΔΒ) εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἄρα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δὲν εἶναι δυνατόν, ἐὰν ἔχουν ἀχθῆ δύο εὐθεῖαι ἐκ σημείου ἐκτὸς τῆς εὐθείας πρὸς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας, ν' ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου δύο ἄλλαι εὐθεῖαι, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἀρχικάς, αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας καὶ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὰς ἀρχικὰς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων ἀντιστοίχως πλευρῶν θὰ εἶναι ἴση.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ· ἂς ἔχουν δὲ καὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Ε, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ, τὸ σημεῖον Γ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, διότι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοίχως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Διότι, ἐὰν ἡ μὲν βάσις ΒΓ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ, αἱ δὲ πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ δὲν ἐφαρμόσουν ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΕΔ, ΔΖ, ἀλλὰ λάβουν ἄλλας θέσεις, ὡς τὰς ΕΗ, ΗΖ, τότε θὰ ἔχουν ἀχθῆ εἰς τὰ πέρατα τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐκ δύο διαφορετικῶν σημείων, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, δύο εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἄλλας δύο εὐθείας ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν (θεώρ. 7)· ἄρα ἀποκλείεται νὰ μὴ ἐφαρμόσουν αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ, ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ ἀντιστοίχως, ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ. Ἄρα θὰ ἐφαρμόσουν. Ὥστε καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας ΕΔΖ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΒΑΓ. Πρέπει νὰ διχοτομήσωμεν αὐτήν.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς ΔΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΔΑ, ΑΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΑ, ΑΖ. Καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΑΖ (θεώρ. 8).

Ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθύγραμμος γωνία ΒΑΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν ΑΒ νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διχοτομεῖται κατὰ τὸ σημεῖον Δ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, ἡ δὲ ΓΔ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΓΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ (θεώρ. 4).

Ἡ δοθεῖσα ἄρα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπ' αὐτῆς ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Γ· πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εὐθεῖα ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ ὀρθὰς γωνίας.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΖΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ (ἀχθῇ) ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Γ ἡ εὐθεῖα ΖΓ ἤχθη σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΓΖ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΔΓ, ΓΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΓ, ΓΖ· καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΕ· ἄρα ἡ γωνία ΔΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν

ΕΓΖ (θεώρ. 8)· καὶ εἶναι αὗται ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἄγεται ἐξ εὐθείας σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή (ὁρ. 10)· ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΔΓΖ, ΖΓΕ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Γ ἤχθη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΖ σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Ἐπὶ δοθείσης ἀπεριορίστου εὐθείας, ἀπὸ δοθέντος σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· πρέπει ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος.

Διότι, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους τῆς εὐθείας ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Γ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΓΔ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΕΖΗ (αἰτ. 3) καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ εὐθεῖα ΕΗ (θώρ. 10) κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν ἀπεριόριστον δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἤχθη κάθετος ἡ ΓΘ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕ, ἡ δὲ ΘΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΗΘ, ΘΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΘ, ΘΓ· καὶ ἡ βάσις ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΕ· ἄρα ἡ γωνία ΓΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΓ (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι αὗται ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀχθῇ ἐξ εὐθείας σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν ὁποίαν ἤχθη (ὅρ. 10).

Ἄρα ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἤχθη κάθετος ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι..

13.

Ἐὰν εὐθεῖα ἀγομένη ἐπὶ εὐθεῖαν σχηματίζῃ γωνίας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἢ δύο ὀρθαὶ ἢ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Διότι ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ ἂς σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς γωνίας ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΑΒΔ ἢ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί, ἢ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἐὰν μὲν ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, αὗται εἶναι δύο ὀρθαί (ὁρ. 10). Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τὴν (εὐθεῖαν) ΓΔ κάθετος ἡ ΒΕ (θεώρ. 11)· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι δύο ὀρθαί· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ γωνία ΕΒΔ· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ΔΒΕ, ΕΒΑ, ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ γωνία ΑΒΓ· ἄρα αἱ ΔΒΑ, ΑΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι πρὸς τὰς αὐτὰς τρεῖς γωνίας· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἶναι ἴσα (κ. ἔν. 1)· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΔΒΑ, ΑΒΓ· ἀλλὰ αἱ ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι δύο ὀρθαί· ἄρα καὶ αἱ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ εὐθεῖαν σχηματίζῃ γωνίας, αὗται ἢ θὰ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαὶ ἢ τὸ ἄθροισμά των θὰ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ἔκ τινος εὐθείας καὶ ἐκ σημείου ἐπ' αὐτῆς κειμένου ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας ΑΒ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, καὶ ἂς σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ΓΒ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΔ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΒΓ, ἔστω, ὅτι ἡ ΒΕ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒΕ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΕ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς (θεώρ. 13)· εἶναι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, ἄρα αἱ ΓΒΑ, ΑΒΕ εἶναι ἴσαι· πρὸς τὰς ΓΒΑ, ΑΒΔ (κ. ἔν. 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἐκ τούτων ἡ κοινὴ γωνία ΓΒΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον ΑΒΔ (κ.ἔν. 3), ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΒΕ δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ὑπάρχει πλὴν τῆς ΒΔ· ἄρα ἡ ΓΒ καὶ ἡ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα ἐκ σημείου εὐθείας τινὸς ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι, κείμεναι οὐχὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, καὶ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μὲ δύο ὀρθάς, αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, σχηματίζουν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Διότι ἂς τέμνωνται μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΒ, ἡ δὲ ΓΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ σχηματίζουσα μετ' αὐτῆς ἐφεξῆς τὰς γωνίας ΓΕΑ, ΑΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ σχηματίζουσα ἐφεξῆς τὰς γωνίας ΑΕΔ, ΔΕΒ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ ἔχουσαι ἄθροισμα δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΑΕΔ, ΔΕΒ (κ. ἐν. 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΑΕΔ· ἄρα, ἡ ὑπόλοιπος ΓΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον ΒΕΔ (κ. ἐν. 3)· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ΓΕΒ, ΔΕΑ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, σχηματίζουν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα.**

Ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, θὰ σχηματίσουν τὰς πρὸς τὴν τομὴν γωνίας ἴσας μὲ τέσσαρας ὀρθάς].

16.

Παντὸς τριγώνου ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς προεκβληθῇ μία πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τῶν ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε (θεώρ. 10), καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΕ ἂς προεκβληθῇ αὐτὴ μέχρι τοῦ σημείου Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΑΓ μέχρι τοῦ Η.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΓΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΓ· διότι εἶναι κατὰ κορυφήν (θεώρ. 15)· ἄρα ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΕΓ, καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι τούτων αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (θεώρ. 4)· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΓΖ. Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΕΓΔ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΓΖ· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΕ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ἡ ΒΓ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον καὶ ἡ γωνία ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ΑΓΔ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου, ἐὰν προεκβληθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται αὗται.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο γωνίαι, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται αὗται, εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν.

Διότι, ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τῆς ΑΒΓ (θεώρ. 16). Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας γωνίας ἡ κοινὴ γωνία ΑΓΒ· αἱ γωνίαι ἄρα ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΑΒΓ, ΒΓΑ. Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΑ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΓΒ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν καὶ τὸ αὐτὸ διὰ τὰς γωνίας ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

Διότι ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΓ μεγαλυτέραν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ΒΓΑ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ, ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 2), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἐξωτερική, εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΔΓΒ· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΔΒ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΒ· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΒ (κοιν. ἔν. 8).

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΑΒΓ μεγαλυτέραν τῆς ΒΓΑ·

λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἡ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ ἢ μικροτέρα· ἴση ὅμως δὲν εἶναι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ· διότι ἂν ἦτο ἴση, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ (θεώρ. 5)· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλ' οὔτε μικροτέρα εἶναι ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· διότι ἐὰν ἦτο μικροτέρα, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ΑΓΒ· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ ΑΓ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε ἴση εἶναι. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης.

Διότι, ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο πλευραὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διότι, ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Δ ἡ ΒΑ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ πρὸς τὴν ΑΓΔ (θεώρ. 5)· ἄρα ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΔΓ (κ.ἐν. 8)· καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΓΒ εἶναι τρίγωνον ἔχον τὴν γωνίαν ΒΓΔ μεγαλυτέραν τῆς ΒΔΓ, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά, ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΓ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΓ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΓΑ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραί, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται, αἱ ἀχθεῖσαι θὰ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ περιέχουν δὲ μεγαλυτέραν γωνίαν.

Διότι ἔστω, ὅτι ἐκ τῶν ἄκρων Β,Γ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἤχθησαν δύο εὐθεῖαι, ὥστε νὰ τέμνωνται αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι μὲν μικρότεραι, θὰ περιέχουν δὲ γωνίαν τὴν ΒΔΓ μεγαλυτέραν τῆς ΒΑΓ.

Διότι, ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΔ μέχρι τοῦ σημείου Ε. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης πλευρᾶς (θεώρ. 20), αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, αἱ ΑΒ, ΑΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΕ. Ἂς προστεθῇ εἰς ταύτας ἡ κοινὴ ΕΓ· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΕ, ΕΓ (κ. ἔν. 4). Πάλιν, ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΓΕΔ αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΓΔ, ἂς προστεθῇ εἰς ταύτας ἡ κοινὴ ΔΒ· ἄρα αἱ ΓΕ, ΕΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΓΔ, ΔΒ. Ἀλλὰ αἱ ΒΑ, ΑΓ ἐδείχθησαν μεγαλύτεραι τῶν ΒΕ, ΕΓ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΔ, ΔΓ.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι (θεώρ. 16), ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΔΓ τοῦ τριγώνου ΓΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΕΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΓΕΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΔΓ ἐδείχθη μεγαλυτέρα τῆς ΓΕΒ. ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται, αὗται θὰ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ περιέχουν δὲ μεγαλυτέραν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τρεῖς δοθείσας [εὐθείας] νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· πρέπει δὲ αἱ δύο εὐθεῖαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης [διότι αἱ δύο πλευραὶ τριγώνου καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης πλευρᾶς].

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ Α, Β, Γ τῶν ὁποίων αἱ δύο καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης, αἱ μὲν Α, Β μεγαλύτεραι τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β καὶ αἱ Β, Γ τῆς Α· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἴσων εὐθειῶν πρὸς τὰς Α,Β,Γ.

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ μὲν ΔΖ ἴση πρὸς τὴν Α, ἡ δὲ ΖΗ ἴση πρὸς τὴν Β, ἡ δὲ ΗΘ ἴση πρὸς τὴν Γ· καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ Ζ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΖΔ, ὁ ΔΚΛ· μὲ κέντρον πάλιν τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν ΗΘ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΚΛΘ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν (τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΘ) τῶν ἴσων πρὸς τὰς Α, Β, Γ κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον ΚΖΗ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΚΛ, ἡ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (κ. ἔν. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΛΚΘ, ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ. ἀλλὰ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ· ἄρα καὶ ἡ ΚΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΗ ἴση πρὸς τὴν Β· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς Α,Β,Γ.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας, τὰς Α,Β,Γ, κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

23.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ ἐκ δοθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμος γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΔΓΕ· πρέπει ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Α νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμος γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΔΓΕ.

Ἃς ληφθοῦν ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν τῶν ΓΔ, ΓΕ τὰ τυχόντα σημεῖα Δ, Ε καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΔΕ· καὶ ἃς κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἡ μὲν ΓΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ δὲ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἡ ΔΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΗ (θεώρ. 22).

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΔΓ, ΓΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΖΑ, ΑΗ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΑΗ (θεώρ. 8).

Ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ δοθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου Α, κατεσκευάσθη εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΖΑΗ, ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΔΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

24.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωνία τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ βάσις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης βάσεως.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ ἃς εἶναι ἡ γωνία Α μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ, ἃς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Δ γωνία ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ, ἡ ΕΔΗ, καὶ ἃς ληφθῇ ἡ ΔΗ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΖ καὶ ἃς ἐπιζευχθοῦν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΗ, αἱ δύο πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο ΕΔ, ΔΗ· καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΗ· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, ἡ γωνία ΔΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΗ· ἄρα ἡ γωνία ΔΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΗΖ (κ. ἔν. 8)· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ γωνία ΕΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΕΖΗ εἶναι τρίγωνον ἔχον τὴν γωνίαν ΕΖΗ μεγαλυτέραν τῆς ΕΗΖ, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά (θεωρ. 19), ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΗ ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωνία τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ βάσις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης βάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης γωνίας.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ· ἂς εἶναι δὲ ἡ βάσις ΒΓ μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα· ἴση ὅμως δὲν εἶναι ἡ γωνία ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ· διότι ἐὰν ἦτο ἴση, θὰ ἦτο ἴση καὶ ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (θεώρ. 4)· ἀλλὰ δὲν εἶναι. Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ· ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ μικροτέρα ἡ ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ· διότι, ἐὰν ἦτο, καὶ ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς βάσεως ΕΖ (θεώρ. 24)· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΔΖ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε ἴση εἶναι· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν πλευρὰν εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἢ μίαν πλευρὰν ἴσην κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας [ἀντιστοίχως] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ΔΕΖ, ΕΖΔ· τὴν μὲν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ ἴσην πρὸς τὴν ΕΖΔ· ἄς ἔχουν δὲ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἐν πρώτοις τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΕΖ, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι· λέγω, ὅτι θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν, ἤτοι τὴν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω ἡ ΑΒ μεγαλυτέρα καὶ ἄς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΗΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΒΗ, ΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΔΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ καὶ τὸ τρίγωνον ΗΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (θεώρ. 4)· ἄρα ἡ γωνία ΗΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ (κ. ἔν. 1), ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν (κ. ἔν. 8)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕ. Ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· δύο λοιπὸν πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν τὴν ΕΔΖ (θεώρ. 4).

Ἀλλὰ πάλιν ἔστωσαν αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ἴσαι ὅπως ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἄλλας, ἡ μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΒΓ, καὶ ἄς ληφθῇ ἡ ΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσαι πρὸς ἄλλας δύο ἀντιστοίχως τὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ περιέχουν αὗται γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ συνεπῶς αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, ἐκεῖναι ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραί· ἄρα ἡ γωνία ΒΘΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖΔ. Ἀλλὰ ἡ ΕΖΔ εἶναι ἴση πρὸς ΒΓΑ· ἤτοι τοῦ τριγώνου ΑΘΓ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΘΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὴν ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον (θεώρ. 16). Ἄρα δὲν εἶναι ἄνισος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ. Ὑπάρχουν δὲ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ περιέχουν γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν πλευρὰν εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἢ μίαν πλευρὰν ἴσην κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

Διότι, ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἂς γίνωνται αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, προεκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ θὰ συμπέσουν ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Α, Γ. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ εἰς τὸ σημεῖον Η. Τότε, τοῦ τριγώνου ΗΕΖ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΕΖΗ· ὅπερ ἀδύνατον (θεώρ. 16)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ προεκβαλλόμεναι δὲν θὰ συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν θὰ συμπέσουν οὐδὲ πρὸς τὸ μέρος τῶν Α, Γ· αἱ εὐθεῖαι ὅμως αἱ ὁποῖαι δὲν συμπίπτουν πρὸς κανὲν μέρος εἶναι παράλληλοι· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε ἡ ἐκτὸς γωνία νὰ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Διότι ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἂς γίνεται ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΗΒ ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι (καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη) τὴν ΗΘΔ ἢ ἂς γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΘ (θεώρ. 15), ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 1)· αὗται ὅμως εἶναι ἐναλλάξ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, ἐπίσης δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13), ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 1)· ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ γωνία ΒΗΘ· ἄρα ἡ λοιπὴ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 3)· αὗται ὅμως εἶναι ἐναλλάξ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θεώρ. 27).

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας ὥστε ἡ ἐκτὸς γωνία νὰ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει παραλλήλους εὐθείας σχηματίζει καὶ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἂς τμήσῃ ἡ εὐθεῖα ΕΖ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αὕτη σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΕΗΒ ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΗΘΔ καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΗΘ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΗΘΔ, τότε μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, ὅτι μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΑΗΘ· ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην ἐκ τούτων ἡ γωνία ΒΗΘ· ἄρα αἱ ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13).

Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, ὅταν προεκβληθοῦν εἰς τὸ ἄπειρον συμπίπτουν (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον θὰ συμπέσουν· ἀλλὰ δὲν συμπίπτουν, διότι ἐλήφθησαν παράλληλοι· ἄρα ἡ γωνία ΑΗΘ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΗΘΔ· ἄρα εἶναι ἴση. Ἀλλὰ ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗΒ (θεώρ. 15)· ἄρα καὶ ἡ ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 1). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΒΗΘ· ἄρα αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13)· ἄρα καὶ αἱ ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἄρα, ὅταν εὐθεῖα τέμνῃ παραλλήλους εὐθείας, σχηματίζει καὶ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας καὶ τὴν ἐκτὸς ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἔστω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἂς τμήσῃ αὐτὰς ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΕΖ, ἡ γωνία ΑΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΖ (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΖ, ΓΔ, ἡ γωνία ΗΘΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚΔ (θεώρ. 29). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΗΚ ἴση πρὸς τὴν ΗΘΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΑΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚΔ (κ. ἔν. 1)· καὶ εἶναι αὗται ἐναλλάξ. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θεώρ. 27).

[Αἱ παράλληλοι ἄρα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Διὰ δοθέντος σημείου, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· πρέπει διὰ τοῦ σημείου Α ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΑ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Α ἡ γωνία ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΔΓ (θεώρ. 23)· καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΕΑ ἡ εὐθεῖα ΑΖ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ τέμνει τὰς δύο εὐθείας ΒΓ, ΕΖ καὶ σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας, ἕπεται, ὅτι ἡ ΕΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 27).

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α ἤχθη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

32.

Εἰς πᾶν τρίγωνον, ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία πλευρά, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας, τὰς ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΕ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΒΑΓ, ΑΓΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΑΒΓ (θεώρ. 29). Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΓΔ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὰς ΒΑΓ, ΑΒΓ (κ. ἔν. 2).

Ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ ΑΓΒ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13)· ἄρα καὶ αἱ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Παντὸς ἄρα τριγώνου, ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία πλευρά, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι καὶ αὗται ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἂς ἑνώνουν αὐτὰς πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΒΔ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΓ τέμνουσα τὰς εὐθείας ΑΓ, ΒΔ σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ· (θεώρ. 27). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἴση πρὸς αὐτήν.

Ἄρα, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας καὶ παραλλήλους εὐθείας εἶναι καὶ αὗται ἴσαι καὶ παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

Τῶν παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἡ διαγώνιος τέμνει αὐτὰ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΔΒ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29)· Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΓΒ, ΓΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς δύο γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ΒΓΔ, ΓΒΔ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν κοινὴν πλευρὰν ἐφ' ἧς πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι τὴν ΒΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν (θεώρ. 26)· ἄρα ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ προσέτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΒ. Καὶ ἐπειδή, ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ, ἡ δὲ ΓΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ, ἕπεται, ὅτι ὅλη ἡ ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΓΔ (κ. ἔν. 2). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΓΔΒ.

Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ἡ διαγώνιος τέμνει αὐτὰ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΓΔ, ΒΓ ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ (θεώρ. 29). Ἄρα καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ. Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ (θεώρ. 4).

Ἄρα ἡ διαγώνιος ΒΓ τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς δύο ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 34). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ (κ. ἔν. 1)· καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κοινή· ἄρα ὅλη ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ (κ.ἔν. 2). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΓ (θεώρ. 34)·

δύο λοιπὸν πλευραί, αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΔ, ΔΓ· καὶ ἡ γωνία ΖΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΑΒ, ἡ ἐκτὸς πρὸς τὴν ἐντός (θεώρ. 29). ἄρα ἡ βάσις ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΓ (θεώρ. 4)· ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τρίγωνον ΔΗΕ· ἄρα τὸ ἀπομένον τραπέζιον ΑΒΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπομένον τραπέζιον ΕΗΓΖ (κ. ἔν. 3)· ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν τρίγωνον ΗΒΓ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἔχοντα τὰς ἴσας βάσεις ΒΓ, ΖΗ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ (κ. ἔν. 1). Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι. Καὶ ἑνώνουν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ ἑνοῦσαι ὅμως πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι [ἄρα καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι] (θεώρ. 33). Ἄρα τὸ ΕΒΓΘ εἶναι παραλληλόγραμμον (θεώρ. 34). Καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ· διότι ἔχει πρὸς αὐτὸ τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ, καὶ εἶναι μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΓ, ΑΘ (θεώρ. 35). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ ΕΒΓΘ (θεώρ. 35)· ὥστε καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ (κ. ἔν. 1).

Ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ.

Ἂς προεκβληθῇ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἡ ΑΔ πρὸς τὰ Ε, Ζ καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ (θεώρ. 31). Ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· καὶ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΕΖ (θεώρ. 35)· καὶ εἶναι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου ΕΒΓΑ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἥμισυ· διότι ἡ διαγώνιος ΑΒ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34)· τοῦ δὲ παραλληλογράμμου ΔΒΓΖ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ· διότι ἡ διαγώνιος ΔΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη [Τὰ δὲ ἡμίση τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΕΖ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διότι, ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΔ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς μέχρι τῶν σημείων Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ (θεώρ. 31). Ἄρα ἕκαστον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον· καὶ τὸ ΗΒΓΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΕΖΘ· διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΕΖ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ΒΖ, ΗΘ (θεώρ. 36)· καὶ εἶναι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΓΑ. Διότι ἡ διαγώνιος ΑΒ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34). τὸ δὲ τρίγωνον ΖΕΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΕΖΘ· διότι ἡ διαγώνιος ΔΖ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη [τὰ ἡμίση δὲ τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς βάσεως κείμενα, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἔστω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς· λέγω, ὅτι ταῦτα εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 31) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ· διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτό, τὴν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (θεώρ. 37). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ΔΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΒΓ (κ. ἔν. 1), ἤτοι τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΑΕ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη τις παράλληλος, πλὴν τῆς ΑΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἄρα τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἔστω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ ἔχοντα ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΓΕ καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τούτων. Λέγω, ὅτι εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ΑΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΕ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΓΕ· διότι ταῦτα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰς ΒΓ, ΓΕ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΕ, ΑΖ (θεώρ. 38). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΕ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΓΕ (κ. ἔνν. 1), ἤτοι τὸ μεγαλύτερον, ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΑΖ δὲν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδεμία ἄλλη παράλληλος ὑπάρχει πλὴν τῆς ΑΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ.

Ἄρα τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τρίγωνον καὶ εἶναι ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου.

Διότι, ἂς ἔχῃ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, τὴν ΒΓ καὶ ἂς εἶναι ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΕΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΕ (θεώρ. 37). Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· διότι ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34). Ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΒΓ.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τρίγωνον καὶ εὑρίσκονται ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ κατασκευασθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐπὶ δοθείσης εὐθυγράμμου γωνίας.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθυγράμμου γωνίας Δ.

Ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε (θεωρ. 10), καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ ἄς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΓ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Ε γωνία ἴση πρὸς τὴν Δ, ἡ ΓΕΖ (θεώρ. 23), καὶ διὰ μὲν τοῦ Α ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ (θεώρ. 31), διὰ δὲ τοῦ Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα τὸ σχῆμα ΖΕΓΗ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΓ· διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΒΕ, ΕΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΗ (θεώρ. 38)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΓΗ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ· διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (θεώρ. 41)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Καὶ ἔχει τὴν γωνίαν ΓΕΖ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Δ.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ κατεσκευάσθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΕΓΗ, ὑπὸ τὴν γωνίαν ΓΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

43.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, συναφῆ παραπληρώματα δὲ τούτων τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι τὸ παραπλήρωμα ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα ΚΔ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι διαγώνιος αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (θεώρ. 31). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΕΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, τὸ τρίγωνον ΑΕΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ τρίγωνον ΚΖΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΑΕΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ, τὸ δὲ ΚΖΓ ἴσον πρὸς τὸ ΚΗΓ, τὸ τρίγωνον ΑΕΚ μετὰ τοῦ ΚΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ μετὰ τοῦ ΚΖΓ (κ. ἔν. 2)· εἶναι δὲ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΑΔΓ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον παραπλήρωμα ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον παραπλήρωμα ΚΔ (κ. ἔν. 3).

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει, παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ, ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Δ. Ἂς κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ τὸ ΒΕΖΗ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΕΒΗ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ (θεώρ. 42)· καὶ ἂς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΑΒ καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΖΗ μέχρι τοῦ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΘ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΗ, ΕΖ (θεώρ. 31), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΘ, ΕΖ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΘΖ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΘΖ, ΘΖΕ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (θεώρ. 29). Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΘΗ, ΗΖΕ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, προεκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον συναντῶνται (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΘΒ, ΖΕ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντηθοῦν. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συναντηθοῦν κατὰ τὸ Κ· καὶ διὰ τοῦ σημείου Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ, παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΑ, ΖΘ, καὶ ἂς προεκλβηθοῦν αἱ ΘΑ, ΗΒ μέχρι τῶν σημείων Λ, Μ. Ἄρα τὸ ΘΛΚΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ εἶναι παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τούτων τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἄρα τὸ ΛΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΖ (θεώρ. 43). Ἀλλὰ τὸ ΒΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ· ἄρα καὶ τὸ ΛΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ (κ. ἔν. 1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΗΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΜ (θεώρ. 15), ἀλλὰ ἡ ΗΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΒΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, παρεβλήθη τὸ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΛΒ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

45.

Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα, ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Ε· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Ε.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΘΚΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε (θεώρ. 42)· καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΗΘΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε (θεώρ. 44). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Ε εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚΖ, ΗΘΜ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΘΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΜ (κ. ἔν. 1). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην ἐκ τούτων ἡ κοινὴ ΚΘΗ· ἄρα αἱ ΖΚΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΚΘΗ, ΗΘΜ. Ἀλλὰ αἱ ΖΚΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 29)· ἄρα καὶ αἱ ΚΘΗ, ΗΘΜ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (κ. ἔν. 2). Ἔχουν δὲ ἔκ τινος εὐθείας τῆς ΗΘ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Θ ἀχθῇ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ ΚΘ καὶ ΘΜ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14)· καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΚΜ, ΖΗ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΜΘΗ, ΘΗΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (θεώρ. 29). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΘΗΛ· ἄρα αἱ ΜΘΗ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΘΗΖ, ΘΗΛ (κ. ἔνν. 2). Ἀλλὰ αἱ ΜΘΗ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 29)· ἄρα καὶ αἱ ΘΗΖ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (κ. ἔν. 1)· ἄρα αἱ ΖΗ, ΗΛ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΗ (θεώρ. 34), ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΜΛ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΛ· καὶ συνδέουν αὐτὰς αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΖΛ· ἄρα καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (κ. ἔν. 11, θεώρ. 30)· ἄρα τὸ ΚΖΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΘ, τὸ δὲ ΔΒΓ πρὸς τὸ ΗΜ, ἕπεται, ὅτι ὅλον τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΚΖΛΜ (κ. ἔν. 2).

Ἄρα κατεσκευάσθη πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΚΖΛΜ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΖΚΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

46.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ν' ἀναγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ν' ἀναγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ ΑΓ κάθετος ἐπ' αὐτήν (θεώρ. 11), καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 2)· καὶ διὰ μὲν τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διὰ δὲ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ (θεώρ. 31). Ἄρα τὸ ΑΔΕΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΕ (θεώρ. 34). Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (κ. ἔν. 1)· ἄρα τὸ παραληλλόγραμμον ΑΔΕΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΔΕ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΑΔΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΔΕ εἶναι ὀρθή. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των (θεώρ. 34)· ἄρα εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑκάστη τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τῶν ΑΒΕ, ΒΕΔ· ἄρα τὸ ΑΔΕΒ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Ἄρα εἶναι τετράγωνον· καὶ ἔχει ἀναγραφῆ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

47.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα ἀναγράφονται ἀπὸ τὰς πλευρὰς αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν (Πυθαγόρειον θεώρημα).

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΒΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

Διότι, ἂς ἀναγραφῆ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ΗΒ, ΘΓ (θεώρ. 46) καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΛ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔ, ΓΕ (θεώρ. 31)· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΒΑΗ εἶναι ὀρθή, ἐκ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Α ἔχουν ἀχθῆ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ κείμεναι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΗ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΒΑ, ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΑ· διότι ἑκάστη εἶναι ὀρθή· ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΑΒΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΖΒΓ (κ. ἐν. 2). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΑ, αἱ δύο πλευραὶ ΔΒ, ΒΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΖΒ, ΒΓ· καὶ ἡ γωνία ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΓ· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΒΓ (θεώρ. 4)· καὶ εἶναι τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΛ διπλάσιον· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΒΔ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΔ, ΑΛ (θεώρ. 41)· τοῦ δὲ τριγώνου ΖΒΓ τὸ τετράγωνον ΗΒ εἶναι διπλάσιον· διότι πάλιν ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΖΒ καὶ εὑρίκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τῶν ΖΒ, ΗΓ [τὰ δὲ διπλάσια τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΗΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θ' ἀποδειχθῇ, ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ΑΕ, ΒΚ, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΓΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΘΓ· ἄρα ὅλον τὸ τετράγωνον ΒΔΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς δύο τετράγωνα, τὰ ΗΒ, ΘΓ (κ. ἐν. 2). Καὶ τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἔχει ἀναγραφῆ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48.

Ἐὰν τριγώνου τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή.

Διότι, ἔστω τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τῆς ΒΓ, ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, κάθετος ἡ ΑΔ (θεώρ. 11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΔΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφόμενον τετράγωνον. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων τὸ κοινὸν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀναγραφόμενον τετράγωνον· ἄρα τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΔΓ· διότι ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ὀρθή (θεώρ. 47)· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τετράγωνον· διότι ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (κ. ἔν. 1)· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραί, αἱ ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΑ, ΑΓ· καὶ ἡ βάσις ΔΓ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ (θεώρ. 8). Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΔΑΓ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἐὰν ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀναγραφόμενα, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.