Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων
Σημαντικά Ψηφία
Διαστατική Ανάλυση

Εμμανουήλ Δρης

Ιούλιος 2022

Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων
Σημαντικά Ψηφία
Διαστατική Ανάλυση

Εμμανουήλ Αντ. Δρης
Ομότιμος Καθηγητής
Ε.Μ.Πολυτεχνείου
Αθήνα 2022

Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων
Σημαντικά Ψηφία
Διαστατική Ανάλυση

1η έκδοση, Ιούλιος 2022

The International System of Units
Significant Figures
Dimensional Analysis

1st edition, July 2022

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να δώσει κάποιες πληροφορίες σχετικές με τη διεθνή πρακτική που αφορά στα μεγέθη (ποσότητες), στις μονάδες μέτρησης, στο συμβολισμό των μονάδων και μεγεθών, στην ονοματολογία τους και στη Διαστατική Ανάλυση (Dimensional Analysis). Για περισσότερες πληροφορίες μπορεί κάποιος να ανατρέξει στη βιβλιογραφία που παραθέτομε.
Το περιεχόμενο αυτού του πονήματος είναι χρήσιμο στους διδάσκοντες, ώστε μέσω αυτών η σχετική γνώση να «περάσει» και στους μαθητές και φοιτητές. Ακόμη είναι χρήσιμο στους εκδοτικούς οίκους όσον αφορά στο τυπικό μέρος γραφής, δηλαδή στο συμβολισμό και στην ονοματολογία. Απευθύνεται κυρίως σε Φυσικούς αλλά και σε ανθρώπους που ασχολούνται με τις εφαρμογές της Φυσικής. Στη βιβλιογραφία που δίνομε μπορεί να βρει κάποιος, περισσότερες λεπτομέρειες που αφορούν σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους, όπως Βιολογία, Ιατρική, Γενική Σχετικότητα, Αστρονομία. Ειδικοί στα θέματα αυτά στην Ελλάδα είναι κυρίως επιστήμονες που εργάζονται στον ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης).
Για το θέμα της διαστατικής ανάλυσης, κατά κανόνα, οι πιο ειδικοί είναι επιστήμονες που ασχολούνται κυρίως με ρευστά.

Εμμανουήλ Αντ. Δρης
Αθήνα, Ιούλιος 2022

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μετρολογία είναι η επιστήμη της μέτρησης. Η ύπαρξή της χάνεται στα βάθη των αιώνων. Υπάρχει από την εποχή που οι άνθρωποι άρχισαν να κάνουν διάφορες ανταλλαγές. Αναπτύσσεται όλο και περισσότερο καθώς κατασκευάζονται πιο εξελιγμένα εργαλεία και προϊόντα. Στα παλιά χρόνια υπάρχει σχεδόν «χάος», δηλαδή υπάρχει μεγάλο πλήθος «μέτρων» των διαφόρων προϊόντων που παράγονταν και ανταλλάσσονταν.
Η σύγχρονη μετρολογία άρχισε περίπου στα μέσα του 19^{ου} αιώνα ως συνέπεια της πολύ μεγάλης ανάπτυξης της βιομηχανίας και του διεθνούς εμπορίου. Μπορούμε να πούμε ότι η πρώτη σημαντική προσπάθεια ξεκινά με τη γαλλική επανάσταση όταν προτάθηκε το μετρικό σύστημα που είναι ο πρόγονος του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων ΔΣ, (SI, Système International d' Unités, International System of Units). Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα υπήρξε πιο έντονη η ανάγκη να καθιερωθούν διεθνείς συμφωνίες όσον αφορά στις μονάδες μέτρησης και έτσι ιδρύθηκε η Συνθήκη του Μέτρου (Meter Convention) το 1875. Αυτή δίνει το πλαίσιο για διακυβερνητικές συμφωνίες σε θέματα που σχετίζονται με τη μετρολογία και τις μονάδες μέτρησης. Στη συνέχεια φτιάχτηκαν τρεις διεθνείς οργανισμοί, το Γραφείο Διεθνών Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM), η Γενική Συνδυάσκεψη για Μέτρα και Σταθμά (General Conference on Weights and Measures, CGPM) και η Διεθνής Επιτροπή για Μέτρα και σταθμά (International Committee for Weights and Measures, CIPM). Αμέσως μετά οι κυριότερες βιομηχανικές και εμπορικές χώρες έφτιαξαν τα δικά τους εθνικά εργαστήρια για πρότυπα . Στη συνέχεια πολλές χώρες έχουν Εθνικά Ινστιτούτα Μετρολογίας (National Metrology Institutes, NMI). Αυτά τα ινστιτούτα μαζί με το BIPM ασχολούνται με το παγκόσμιο σύστημα μετρήσεων, του οποίου θεμέλιο είναι το SI. Το SI είναι ένα ζωντανό εξελισσόμενο σύστημα που αλλάζει καθώς προκύπτει νέα γνώση και νέες ανάγκες μέτρησης. Τέλος, αναφέρομε τον Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (International Organization for Standardization, ISO), ο οποίος είναι μια παγκόσμια συνεργασία αποτελούμενη από οργανισμούς εθνικών προτύπων (οργανισμοί μέλη του ISO). Τις επιμέρους εργασίες προτυποποίησης τις αναλαμβάνουν τεχνικές επιτροπές του ISO.
Η τεχνική επιτροπή ISO/TC 12 έχει σκοπό την τυποποίηση των μονάδων, των συμβόλων για τις διάφορες ποσότητες και μονάδες και τα μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στις διάφορες περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Δίνει, όπου χρειάζεται, ορισμούς αυτών των ποσοτήτων και των μονάδων. Μια άλλη ευθύνη αυτής της επιτροπής είναι να δίνει τυποποιημένους συντελεστές μετατροπής μεταξύ των διαφόρων μονάδων. Ο ISO συνεργάζεται στενά με την Διεθνή Επιτροπή Ηλεκροτεχνίας (International Electrotechnical Commission, IEC). Στην Ελλάδα υπεύθυνη υπηρεσία για θέματα τυποποίησης είναι ο ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης).
Η CODATA (Committee on Data for Science and Tecnology) είναι η επιτροπή που διαχειρίζεται τα αποτελέσματα διαφόρων μετρήσεων και δημοσιεύει τις τιμές των μετρήσεων με τις αβεβαιότητές τους προς το τέλος του χρόνου κάθε τέσσερα χρόνια.

Γενικά

Στη βιβλιογραφία που παραθέτομε, υπάρχουν οι ακριβείς ορισμοί των διαφόρων εννοιών που σχετίζονται με τα μεγέθη (ποσότητες) και τη μέτρησή τους, την αβεβαιότητα στη μέτρησή τους κτλ. Οι ορισμοί είναι ένα είδος λεξιλογίου, αποτελούν μια ενιαία αναφορά χρήσιμη σε επιστήμονες και μηχανικούς, στους οποίους συμπεριλαμβάνονται φυσικοί, χημικοί, επιστήμονες της ιατρικής, επίσης διδάσκοντες και σε ανθρώπους που κάνουν μετρήσεις, κυρίως, ακριβείας. Οι ορισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι και για διακυβερνητικές επιτροπές, εμπορικές οργανώσεις, επιτροπές πιστοποίησης, κανονιστικά όργανα και επαγγελματικές εταιρείες.
Δίνομε τους διάφορους όρους στην ελληνική γλώσσα αλλά μερικές φορές τους δίνομε και στη γαλλική και στην αγγλική.
Η δημιουργία μιας διεθνούς σχετικής «γλώσσας» είναι ένα βασικό στοιχείο αυτής της προσπάθειας.
Υπάρχουν πολλά εργαστήρια μετρολογίας σε όλο τον κόσμο όπου ασχολούνται πολλοί επιστήμονες.
Τα διάφορα σχετικά διεθνή κείμενα είναι γραμμένα στα γαλλικά και στα αγγλικά. Αν υπάρχουν αμφιβολίες κυριαρχεί το γαλλικό κείμενο.
Εδώ δεν πρόκειται να αναφερθούμε με όλη τη λεπτομέρεια σε αυτό το αντικείμενο, απλώς θα κάμομε μια εισαγωγή.
Κατά καιρούς έχουν υπάρξει διάφορα συστήματα φυσικών μεγεθών (ποσοτήτων) και μονάδων μέτρησής τους. Τελικά, έχει κυριαρχήσει παγκοσμίως το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI (Le Système International d' Unités), που κατά κύριο λόγο θα μας απασχολήσει στα επόμενα.
Σημειώνομε εδώ, ότι από τις 20 Μαΐου 2019 ισχύουν οι τροποποιημένοι ορισμοί των λεγόμενων θεμελιωδών μονάδων του SI που θα δούμε παρακάτω. Αυτή η ημερομηνία επιλέχτηκε διότι είναι η ετήσια Παγκόσμια Ημέρα Μετρολογίας (World Metrology Day), είναι η ημέρα κατά την οποία υπογράφτηκε η Σύμβαση του Μέτρου (the Metre Convention) to 1875.

1. Μεγέθη και μονάδες

1.1 Μέγεθος (grandeur; quantity)

Στα Ελληνικά χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τους όρους μέγεθος και ποσότητα. Αυτή είναι ιδιότητα ενός φαινομένου, ενός σώματος ή μιας ουσίας. Αυτή η ιδιότητα, σε ειδικές περιπτώσεις, μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά με τη μορφή ενός αριθμού και μιας αναφοράς. Η αναφορά μπορεί να είναι μια μονάδα μέτρησης, μια διαδικασία μέτρησης, ένα υλικό αναφοράς ή κάποιος συνδυασμός τους.
Σημειώνομε ότι υπάρχουν τα λεγόμενα μεγέθη (ποσότητες) κατάταξης (grandeurs ordinales; ordinal quantities). Αυτά δεν θεωρούνται ότι είναι μέρος ενός συστήματος μεγεθών (που θα δούμε παρακάτω) διότι σχετίζονται με άλλα μεγέθη μόνο με εμπειρικές σχέσεις και ορίζονται με μια συμβατική διαδικασία μέτρησης. Υπάρχει μόνο κατάταξη τέτοιων μεγεθών ίδιου είδους, σύμφωνα με την αριθμητική τιμή του μεγέθους. Δεν έχουν φυσικό νόημα διαφορές και λόγοι τέτοιων μεγεθών. Ένα παράδειγμα είναι το μέγεθος που λέγεται σκληρότητα (τύπου) C (του) Rockwell (υπό φορτίο 150 kg), HRC(150 kg). Durete C de Rockwell (charge de 150 kg), HRC(150 kg); Rockwell C hardness (150 kg load), HRC(150 kg). Αυτό το μέγεθος μπορεί να σχετίζεται με τη σκληρότητα ενός δείγματος ατσαλιού. Το φορτίο (φόρτος) καταπόνησης είναι δύναμη ίση με $150\,\mathrm{kgf}$. Κατά τα γνωστά, κατά προσέγγιση, στην επιφάνεια της γης αυτό το φορτίο είναι ίσο με το βάρος μάζας $150\,\mathrm{kg}$. Εκτός από αυτό το παράδειγμα, υπάρχουν διάφοροι τρόποι καθορισμού (μέτρησης) της σκληρότητας. Για λεπτομέρειες πρέπει να ανατρέξει κάποιος στη βιβλιογραφία τη σχετική με αντοχή των υλικών. Στην κατηγορία μεγεθών κατάταξης ανήκει ο αριθμός οκτανίων των καυσίμων, η ένταση σεισμού στην κλίμακα Richter κτλ. Τέτοια μεγέθη μπορεί να μπαίνουν μόνο σε εμπειρικές σχέσεις και δεν έχουν μονάδες μέτρησης ούτε, αυτό που λέμε διαστάσεις, που θα δούμε παρακάτω.
Μια άλλη έννοια είναι η κλίμακα τιμών μεγέθους (échelle de valeurs, échelle de mesure ; quantity-value scale, measurement scale). Πρόκειται για σύνολο διατεταγμένων τιμών μεγεθών για δεδομένου είδους μέγεθος, που χρησιμοποιείται για κατάταξη, σύμφωνα με αριθμητική τιμή μεγεθών αυτού του συγκεκριμένου είδους. Παραδείγματα είναι, η κλίμακα θερμοκρασίας Κελσίου, η κλίμακα του χρόνου, η κλίμακα σκληρότητας Rockwell C. Σημειώνομε ότι δεν έχει νόημα (για παράδειγμα) το πηλίκο θερμοκρασιών Κελσίου ή/και θερμοκρασιών Φαρενάιτ. Έχουν νόημα τα πηλίκα διαφορών θερμοκρασίας. Επίσης στην κάθε κλίμακα έχει νόημα η κατάταξη θερμοκρασιών, μεγαλύτερη ή μικρότερη θερμοκρασία από μια άλλη.
Εδώ θα ασχοληθούμε με φυσικά μεγέθη που εκφράζονται ποσοτικά ως γινόμενα αριθμού επί μονάδα μέτρησης, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση η αναφορά είναι η μονάδα μέτρησης. Δηλαδή θα ασχοληθούμε με μεγέθη που δεν είναι μεγέθη κατάταξης.
Σύμβολα για τις ποσότητες (μεγέθη) δίνονται στις σειρές ISO 80000 και IEC 80000 υπό τον τίτλο Quantities and Units. Η ποσότητα, όπως την ορίσαμε, είναι βαθμωτή (μονόμετρη) ποσότητα. Εν τούτοις, ένα διάνυσμα ή ένας τανυστής, οι συνιστώσες των οποίων είναι βαθμωτές ποσότητες με την παραπάνω έννοια, θεωρούνται επίσης ότι είναι ποσότητες. Η γενική έννοια μέγεθος (ποσότητα) μπορεί να χωριστεί σε διάφορα επίπεδα

ειδικών εννοιών. Ακόμη έχομε διαχωρισμούς όπως, φυσικό μέγεθος, χημική ποσότητα και βιολογική ποσότητα, θεμελιώδες μέγεθος και παράγωγο μέγεθος.
Υπάρχει η έννοια που αναφέρεται ως είδος (κατηγορία) μεγέθους (nature de grandeur; kind of quantity).
Πρόκειται για χαρακτηρισμό που είναι κοινός για συγκρίσιμες μεταξύ τους ποσότητες. Αυτός ο διαχωρισμός είναι λίγο πολύ αυθαίρετος. Συνηθίζεται η διάμετρος, η περιφέρεια και το μήκος κύματος, να θεωρούνται ποσότητες (μεγέθη) ίδιου είδους, ίδιας κατηγορίας, συγκεκριμένα, του είδους που αναφέρεται ως μήκος. Οι ποσότητες θερμότητα, κινητική ενέργεια και δυναμική ενέργεια θεωρούνται ότι είναι του ίδιου είδους, συγκεκριμένα του είδους μεγέθους που λέγεται ενέργεια. Χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον όρο μέγεθος χωρίς τις επιμέρους διακρίσεις, υποτίθεται ότι αποφεύγεται η σύγχυση από τα συμφραζόμενα στο κείμενο. Οι ποσότητες του ίδιου είδους έχουν ίδιες διαστάσεις (που θα δούμε παρακάτω), όμως δεν ισχύει το αντίστροφο. Τα μεγέθη ροπή δύναμης και ενέργεια, συμβατικά, δε θεωρούνται ότι είναι του ίδιου είδους παρόλο που έχουν ίδιες διαστάσεις. Υπάρχει και η έννοια της επιμέρους (ή συγκεκριμένης) ποσότητας (individual quantity). Τέτοια μεγέθη είναι: η ακτίνα r_{A} του κύκλου A , η κινητική ενέργεια T_i του σωματίου i . Πολλές φορές παραλείπομε τους δείκτες αλλά από το κείμενο φαίνεται πως αναφερόμαστε σε συγκεκριμένο μέγεθος, δηλαδή μέγεθος για μια ειδική περίπτωση. Τα επιμέρους μεγέθη έχουν αντίστοιχα γενικά μεγέθη. Συγκεκριμένα, στο (γενικό) μέγεθος ενέργεια υπάγεται το (επίσης γενικό) μέγεθος κινητική ενέργεια και σε αυτό υπάγεται η επιμέρους κινητική ενέργεια που έχει συγκεκριμένο υλικό σημείο.

1.2 Σύστημα μεγεθών (système de grandeurs ; system of quantities)

Αυτό είναι ένα σύνολο μεγεθών μαζί με ένα σύνολο εξισώσεων που δεν είναι αντιφατικές μεταξύ τους, οι οποίες συνδέουν αυτά τα μεγέθη. Αυτό λέγεται συνεπές σύστημα μεγεθών.
Σε ένα σύστημα μεγεθών ορίζεται η έννοια θεμελιώδες μέγεθος ή μέγεθος αναφοράς (grandeur de base; base quantity). Πρόκειται για μέγεθος (ποσότητα) που ανήκει σε ένα υποσύνολο του δεδομένου συστήματος μεγεθών, αυτό το υποσύνολο έχει επιλεγεί συμβατικά. Σε αυτό το υποσύνολο κανένα μέγεθος του υποσυνόλου δε μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άλλων μεγεθών του υποσυνόλου.
Το υποσύνολο αυτό λέγεται «σύνολο θεμελιωδών μεγεθών» (ή μεγεθών αναφοράς). Με άλλα λόγια, αυτές οι θεμελιώδεις ποσότητες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το μέγεθος «πλήθος οντοτήτων» θεωρείται ως θεμελιώδης ποσότητα σε οποιοδήποτε σύστημα μεγεθών. Παράδειγμα είναι το πλήθος των σπειρών πηνίου. Στο σύστημα μεγεθών ορίζεται και η έννοια παράγωγο μέγεθος (grandeur dérivée; derived quantity).
Αυτό είναι μέγεθος του συστήματος μεγεθών που ορίζεται ως προς τα θεμελιώδη μεγέθη του συστήματος. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα μεγεθών το οποίο έχει ως θεμελιώδη μεγέθη το μήκος και τη μάζα, η πυκνότητα μάζας είναι παράγωγο μέγεθος (ποσότητα) η οποία ορίζεται από την εξίσωση του συστήματος μεγεθών που θεωρείται ότι είναι

πυκνότητα ίση με το πηλίκο της μάζας δια του όγκου. Ο όγκος με τη σειρά του, είναι παράγωγο μέγεθος που θεωρείται ότι ορίζεται ως μήκος στην τρίτη δύναμη (στον κύβο).

1.3 Διεθνές Σύστημα Μεγεθών (Systéme International de grandeurs, ISQ ; International System of Quantities, ISQ)

Αυτό είναι σύστημα μεγεθών βασισμένο σε επτά θεμελιώδεις ποσότητες (μεγέθη) που είναι τα εξής: χρόνος, μήκος, μάζα, ηλεκτρικό ρεύμα, θερμοδυναμική θερμοκρασία, ποσό ουσίας και ένταση φωτοβολίας. Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (International System of Units (SI) βασίζεται στο ISQ. Θα δούμε παρακάτω λεπτομέρειες για το SI.

1.4 Διάσταση μεγέθους (dimension , dimension d' une grandeur ; dimension of a quantity, dimension)

Θα αναφερθούμε παρακάτω στις διαστάσεις με περισσότερες λεπτομέρειες, πιο εκτεταμένα. Διάσταση μεγέθους είναι η έκφραση της εξάρτησης μιας ποσότητας από τις θεμελιώδεις ποσότητες ενός συστήματος μεγεθών. Πρόκειται για γινόμενο δυνάμεων παραγόντων που αποτελούνται από θεμελιώδεις ποσότητες, παραλείποντας αριθμητικούς συντελεστές που μπορεί να υπάρχουν στις μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών. Για παράδειγμα στο ISQ, η διάσταση του μεγέθους κινητική ενέργεια που για υλικό σημείο δίνεται από τη σχέση $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m\upsilon^2$, παριστάνεται με $\dim E_\mathrm{k} = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^2\mathsf{M}$. Θα δούμε παρακάτω τα σχετικά με το συμβολισμό.

Υπάρχει και η έννοια μέγεθος διάστασης ένα , που για ιστορικούς λόγους, λέγεται και αδιάστατο μέγεθος (grandeur sans dimension, grandeur de dimension un; quantity of dimension one, dimensionless quantity). Πρόκειται για μέγεθος για το οποίο όλοι οι εκθέτες των παραγόντων που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις ποσότητες, στη σχέση για τη διάστασή του, είναι μηδέν. Μερικά μεγέθη με διάσταση ένα, ορίζονται ως λόγοι δυο μεγεθών (πηλίκο μεγεθών ίδιου είδους). Παραδείγματα είναι η επίπεδη γωνία, η στερεά γωνία, ο συντελεστής τριβής, ο αριθμός Mach. Υπάρχουν και μεγέθη που δε μπορούν να εκφραστούν σε σχέση με τις επτά θεμελιώδεις ποσότητες του SI. Για παράδειγμα, το πλήθος οντοτήτων, όπως το πλήθος μορίων, ο αριθμός (το πλήθος) των σπειρών ενός πηνίου κτλ. Λέμε ότι και αυτές οι ποσότητες έχουν διάσταση ένα και η μονάδα μέτρησής τους (βλέπε παρακάτω) είναι το ένα που έχει ως σύμβολο τον αριθμό 1, παρόλο που συνήθως το σύμβολο δε γράφεται. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση, θεωρούμε ότι αυτή η μονάδα μέτρησης είναι θεμελιώδης μονάδα για κάθε σύστημα μονάδων. Οι επίπεδες και οι στερεές γωνίες, όταν εκφράζονται σε radian και steradian αντίστοιχα, χρησιμοποιούνται στο SI ως μεγέθη με μονάδα το ένα. Σε αυτές τις δυο περιπτώσεις προτιμάται να χρησιμοποιούνται τα ειδικά σύμβολα rad και sr, αντί του 1, ώστε να φαίνεται ότι αναφερόμαστε σε επίπεδες ή στερεές γωνίες αντίστοιχα. Τα radian και steradian θεωρούνται παράγωγες μονάδες.

1.5 Μονάδα μέτρησης (unité de mesure, unité; measurement unit; unit of measurement)

Αυτή είναι μια πραγματική (όχι μιγαδική) βαθμωτή (μονόμετρη) συγκεκριμένη ποσότητα (η οποία ορίστηκε και έγινε δεκτή συμβατικά) με την οποία μπορεί να συγκριθεί κάθε άλλη ποσότητα ίδιου είδους ώστε ο λόγος των δυο ποσοτήτων να εκφραστεί ως ένας αριθμός. Μερικές φορές χρησιμοποιείται ορολογία όπως «μονάδα μάζας» κτλ
Υπάρχει και η έννοια θεμελιώδης μονάδα ή μονάδα αναφοράς (unité de base; base unit).
Αυτή είναι μονάδα μέτρησης ενός θεμελιώδους μεγέθους η οποία έχει γίνει αποδεκτή συμβατικά. Σε κάθε σύμφωνο (coherent) σύστημα μονάδων (που θα δούμε παρακάτω), υπάρχει μόνο μια θεμελιώδης μονάδα για κάθε μια θεμελιώδη ποσότητα. Για παράδειγμα, στο SI το μέτρο είναι η θεμελιώδης μονάδα για το μήκος. Στα συστήματα τύπου CGS η θεμελιώδης μονάδα μήκους είναι το εκατοστόμετρο (εκατοστό).
Μια άλλη έννοια είναι η παράγωγη μονάδα (unité dérivée; derived unit). Αυτή είναι μονάδα μέτρησης για μια παράγωγη ποσότητα. Για παράδειγμα, το μέτρο ανά δευτερόλεπτο ($\mathrm{m/s}$) και το εκατοστό ανά δευτερόλεπτο ($\mathrm{cm/s}$) είναι παράγωγες μονάδες για την ταχύτητα στο SI. Το χιλιόμετρο την ώρα ($\mathrm{km/h}$) είναι μονάδα μέτρησης ταχύτητας εκτός (δεν ανήκει στο) SI αλλά έχει γίνει αποδεκτό να χρησιμοποιείται με το SI. Το knot (ο κόμβος) που σημαίνει ένα ναυτικό μίλι ανά ώρα, είναι μονάδα μέτρησης ταχύτητας εκτός SI (θα δούμε παρακάτω τα σχετικά).
Θα αναφερθούμε τώρα στη σύμφωνη παράγωγη μονάδα, (unité dérivée cohérent; coherent derived unit). Αυτή είναι παράγωγη μονάδα για ένα σύστημα μεγεθών και για ένα επιλεγμένο σύνολο θεμελιωδών μονάδων. Η μονάδα είναι γινόμενο δυνάμεων θεμελιωδών μονάδων χωρίς άλλους αριθμητικούς πολλαπλασιαστές (συντελεστές) που δεν είναι ίσοι με τη μονάδα.
Για παράδειγμα, αν το μέτρο και το δευτερόλεπτο είναι θεμελιώδεις μονάδες, τότε το μέτρο ανά δευτερόλεπτο είναι η σύμφωνη παράγωγη μονάδα για την ταχύτητα, όταν για την ταχύτητα ισχύει η σχέση $\upsilon = \mathrm{d}r / \mathrm{d}t$. Το χιλιόμετρο ανά (την) ώρα δεν είναι σύμφωνη παράγωγη μονάδα σε ένα τέτοιο σύστημα μεγεθών.
Το εκατοστό ανά δευτερόλεπτο είναι η σύμφωνη παράγωγη μονάδα στο σύστημα μονάδων CGS (centimeter, gram, second) αλλά δεν είναι σύμφωνη παράγωγη μονάδα στο SI. Σημειώνομε ότι είναι παράγωγη μονάδα στο πλήρες σύστημα SI διότι είναι δεκαδικό υποπολλαπλάσιο της (σύμφωνης) παράγωγης μονάδας του, που είναι $\mathrm{m/s}$, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.6 Σύστημα μονάδων (système d'unités; system of units).

Θα μπορούσαν να οριστούν μονάδες μέτρησης για κάθε περίπτωση χωριστά. Αυτό θα οδηγούσε σε πληθώρα σχέσεων μεταξύ μεγεθών με κατάλληλους κάθε φορά πολλαπλασιαστικούς συντελεστές, οπότε θα είχαμε μια τέλεια αναρχία. Για να είναι τα πράγματα πιο απλά έχει επινοηθεί η έννοια σύστημα μονάδων. Αυτό είναι σύστημα που περιλαμβάνει τις θεμελιώδεις μονάδες, τις σύμφωνες παράγωγες μονάδες μαζί με τα

δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά τους. Αυτά αναφέρονται σε σύστημα μεγεθών όπου υπάρχουν και οι μεταξύ των μεγεθών σχέσεις.
Σημειώνομε την έννοια σύμφωνο σύστημα μονάδων (système cohérent d'unités; coherent system of units). Πρόκειται για σύστημα μονάδων, βασισμένο σε δεδομένο σύστημα μεγεθών, στο οποίο η μονάδα μέτρησης για την κάθε παράγωγη μονάδα είναι μια σύμφωνη παράγωγη μονάδα.
Σε ένα σύμφωνο σύστημα μονάδων, οι εξισώσεις αριθμητικών τιμών έχουν την ίδια μορφή όπως οι αντίστοιχες εξισώσεις μεγεθών, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών συντελεστών αν υπάρχουν.
Μερικές φορές, χωρίς αυστηρότητα, λέμε ότι σε κάποιες σχέσεις χρησιμοποιούνται μονάδες του SI, ενώ στην πραγματικότητα εννοούμε ότι χρησιμοποιούνται σύμφωνες παράγωγες ή/και θεμελιώδεις μονάδες του SI.
Υπάρχουν και μονάδες μέτρησης εκτός συστήματος μονάδων (unité hors système; off-system measurement unit). Μια τέτοια μονάδα μέτρησης δεν ανήκει στο συγκεκριμένο σύστημα μονάδων. Για παράδειγμα, το ηλεκτρονιοβόλτ (electronvolt) που είναι ίσο με $1{,}602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ J (ακριβώς), είναι μονάδα μέτρησης της ενέργειας που δεν ανήκει στο SI. Επίσης η ημέρα, η ώρα και το λεπτό δεν ανήκουν στο SI.

1.7   Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI (Système international d'unités, SI; International System of Units, SI)

Αυτό είναι σύστημα μονάδων, βασισμένο στο Διεθνές Σύστημα Μεγεθών (ISQ), τα ονόματά τους και τα σύμβολά τους, συμπεριλαμβανομένων μια σειρά από (δεκαδικά) προθέματα με τα ονόματά τους και τα σύμβολά τους, μαζί με κανόνες που έχουν καθιερωθεί για τη χρήση τους.
Θα δούμε αργότερα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα περί SI. Εδώ απλώς αναφέρομε ότι αυτό   βασίζεται στις επτά θεμελιώδεις ποσότητες (μεγέθη) του ISQ . Τα ονόματα και σύμβολα των αντίστοιχων θεμελιωδών μονάδων φαίνονται στον Πίνακα 5 που υπάρχει παρακάτω στην ειδική παράγραφο περί SI. Οι θεμελιώδεις μονάδες μαζί με τις σύμφωνες παράγωγες μονάδες του SI αποτελούν ένα σύμφωνο σύνολο μονάδων, που λέγεται σύνολο σύμφωνων μονάδων SI. Το μέγεθος «πλήθος οντοτήτων» θεωρείται ότι είναι θεμελιώδης ποσότητα με θεμελιώδη μονάδα το ένα, σύμβολο 1.
Τα προθέματα των μονάδων του SI φαίνονται παρακάτω στον Πίνακα 2.
Το χιλιόμετρο είναι δεκαδικό πολλαπλάσιο του μέτρου. Το χιλιοστόμετρο είναι δεκαδικό υποπολλαπλάσιο του μέτρου. Η ώρα είναι μη δεκαδικό πολλαπλάσιο του δευτερολέπτου. Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια είναι μονάδες μέτρησης που προέρχονται από άλλες με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση με θετικό ακέραιο.
Το σύμφωνο σύνολο μονάδων SI μαζί με τα (δεκαδικά) πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια τους με τα προθέματα του Πίνακα 2, αποτελούν το πλήρες σύστημα μονάδων SI.

1.8 Τιμή μεγέθους, τιμή (valeur d'une grandeur, valeur ; quantity value ,value of a quantity , value)

Τιμή μεγέθους είναι συνδυασμός ενός αριθμού και μιας αναφοράς που μαζί αποτελούν την ποσοτική έκφραση ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Παραδείγματα είναι,

1) το μήκος μιας ράβδου: $5{,}34\,\mathrm{m}$ ή 534 cm,

2) η θερμοκρασία Κελσίου κάποιου σώματος: $-5\ ^\circ\mathrm{C}$,

3) η ηλεκτρική εμπέδηση (ολική αντίσταση ή σύνθετη αντίσταση) ενός στοιχείου κυκλώματος: $(7-3\mathrm{j})\,\Omega$, j είναι η φανταστική μονάδα,

4) η σκληρότητα τύπου C του Rockwell ορισμένου δείγματος (υπό φορτίο $150\,\mathrm{kg}$): 43,5HRC(150 kg),

5) ο δείκτης διάθλασης ορισμένου δείγματος γυαλιού: 1,32 ,

6) κλάσμα μάζας καδμίου μέσα σε ορισμένο δείγμα χαλκού: $3\,\mu\mathrm{g/kg}$ ή 3×10^{-9}.

Σημειώνομε ότι ο αριθμός μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή μιγαδικός.
Για αυτό τον αριθμό συνηθίζεται να χρησιμοποιείται ο όρος μέτρο (στα αγγλικά magnitude). Στην περίπτωση που λέμε μέτρο διανύσματος θεωρούμε θετική ποσότητα, απόλυτη τιμή, $\left|\vec{A}\right| = \left\|\vec{A}\right\| > 0$. Όμως εδώ βλέπομε ότι μέτρο δε σημαίνει θετικός αριθμός.
Επίσης ο όρος μέτρο (στα αγγλικά magnitude) χρησιμοποιείται πολλές φορές για να δηλώσει την αριθμητική τιμή μαζί με τη μονάδα μέτρησης, δηλαδή την τιμή ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Για παράδειγμα, λέμε ότι το μέτρο μιας συγκεκριμένης δύναμης είναι F , όπου $F = -21{,}8\ \mathrm{N}$. Δε χρησιμοποιήσαμε δείκτη παρόλο που αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη δύναμη. Προφανώς στην περίπτωση αυτή το μείον δηλώνει ότι υπάρχει θετική και αρνητική φορά για τη δύναμη αλλά δε συμβολίζομε τη δύναμη με το σύμβολο του διανύσματος αλλά τη συμβολίζομε ως μονόμετρο μέγεθος. Υπάρχει και εδώ πρόβλημα με τους όρους μέτρο ή magnitude. Σε αυτή την περίπτωση το F είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{F}$ πάνω σε άξονα (ευθεία) παράλληλη ή συγγραμμική στην $\vec{F}$, που έχει καθορισμένη θετική φορά. Είναι ευνόητο ότι μπορεί η προβολή να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Παρόλα αυτά χρησιμοποιείται ως σύμβολο για το μέτρο διανύσματος (εδώ της δύναμης) το F. Σε τέτοια περίπτωση είναι αναγκαίο να δίνεται σχετική διευκρίνιση στο κείμενο.
Αξίζει να πούμε το εξής: η τιμή μεγέθους αναφέρεται σε συγκεκριμένη ποσότητα, όπως το μήκος της ράβδου Α. Αυτό σημαίνει ότι για την περίπτωση 1) μπορούμε να γράψομε τη σχέση $l_\mathrm{A} = 5{,}34\ \mathrm{m}$. Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να δεχτούμε ότι και το σύμβολο l_A παριστάνει την τιμή αυτού του συγκεκριμένου μεγέθους που είναι το $5{,}34\ \mathrm{m}$. Για να αποφεύγονται η παραπάνω ασάφειες είναι καλύτερα αντί για μέτρο να λέμε αριθμητική τιμή αν δεν υπάρχουν μονάδες ή τιμή (μεγέθους) αν υπάρχουν και μονάδες. Επίσης καλό είναι να μιλούμε για απόλυτη τιμή όταν αναφερόμαστε σε θετική ποσότητα ώστε να μην υπάρχει σύγχυση με τη χρήση του όρου μέτρο. Όπως καταλάβαμε από τα προηγούμενα, στα μαθηματικά το μέτρο διανύσματος είναι θετική ποσότητα. Στη Φυσική θα μπορούσαμε να αναφερόμαστε στο μέτρο του διανύσματος της δύναμης και να εννοούμε

το $\left|\vec{F}\right| = |F|$, που ισχύει ακόμη και αν $F < 0$. Είναι κατανοητό πως είναι καλύτερα να αποφεύγεται η χρήση της λέξης μέτρο και στα αγγλικά του όρου magnitude. Επίσης η λέξη μέτρο εκφράζει και άλλες έννοιες όπως μπορεί κάποιος να διαπιστώσει σε ελληνικά λεξικά.

1.9 Αριθμητική τιμή μεγέθους (valeur numérique, valeur numérique d'une grandeur; numerical quantity value, numerical value of a quantity, numerical value)

Πρόκειται για αριθμό που υπάρχει στην τιμή του μεγέθους, εκτός από τους αριθμούς που σχετίζονται με την αναφορά. Παραδείγματα για τις προηγούμενες περιπτώσεις, είναι τα παρακάτω,
1) 5,34 ή 534 αντιστοίχως
2) -5
3) 7-3j
4) 43,5
5) 1,32
6) Σε αυτή την περίπτωση αν γράψομε 3 μg/kg τότε η αριθμητική τιμή είναι 3, παρόλο που η μονάδα μg/kg ισούται αριθμητικά με 10^{-9}, διότι αυτός ο αριθμός είναι μέρος της αναφοράς που εδώ είναι η μονάδα μέτρησης.
Αν γράψομε 3×10^{-9} τότε η αριθμητική τιμή είναι 3×10^{-9}. Ανάλογο ισχύει για την περίπτωση 1.

1.10 Εξίσωση μεγεθών (équation aux grandeurs; quantity equation)

Εξισώσεις μεγεθών είναι μαθηματικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (μεγεθών) ενός συστήματος μεγεθών. Αυτές είναι ανεξάρτητες από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης.

1.11 Εξίσωση αριθμητικών τιμών (équation aux valeurs numériques; numerical value equation, numerical quantity value equation)

Αυτή είναι μαθηματική σχέση μεταξύ αριθμητικών τιμών ποσοτήτων, που στηρίζεται σε δεδομένη εξίσωση μεγεθών και καθορισμένες μονάδες μέτρησης, θα δούμε παρακάτω τα σχετικά με το συμβολισμό.

2. Συστήματα μεγεθών και μονάδων

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με φυσικά μεγέθη (φυσικές ποσότητες) που ανήκουν σε (συνήθη) συστήματα μεγεθών, δηλαδή δεν είναι μεγέθη κατάταξης, οπότε η αναφορά είναι η μονάδα μέτρησης, και επομένως χαρακτηρίζονται από αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης. Η αριθμητική τιμή και η μονάδα μέτρησης αποτελούν την τιμή του μεγέθους. Για παράδειγμα, η τιμή της επιτάχυνσης συγκεκριμένου υλικού σημείου είναι $a = -45,2\ \mathrm{m/s^2}$, όπου η αριθμητική τιμή της επιτάχυνσης είναι $-45,2$. Σύμφωνα με όσα είπαμε για την αποφυγή της χρήσης του όρου μέτρο στα ελληνικά, θα δεχόμαστε ότι το σύμβολο a μπορεί να παριστάνει το συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος ή την τιμή του. Τονίζομε ξανά ότι η αριθμητική τιμή είναι καθαρός αριθμός ενώ η τιμή του μεγέθους έχει και μονάδα μέτρησης. Αναφέρομε από την αρχή ότι τα σύμβολα των φυσικών μεγεθών (και των τιμών τους) είναι πλάγια ενώ τα σύμβολα των μονάδων είναι όρθια. Το μέγεθος (ή η τιμή του για συγκεκριμένη περίπτωση), A ισούται με το γινόμενο της αριθμητικής τιμής του επί την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης

$$A = \{A\}[A].$$

A είναι η φυσική ποσότητα ή η τιμή της, $\{A\}$ είναι η αριθμητική τιμή της και $[A]$ η μονάδα μέτρησής της. Για την ανωτέρω περίπτωση της επιτάχυνσης έχομε

$$A = a,\quad \{a\} = -42,2\ ,\ [a] = \mathrm{m/s^2}\,.$$

Κατά τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση μεγεθών ισχύουν οι γνωστοί κανόνες της άλγεβρας για τις αριθμητικές τιμές και για τις μονάδες, δηλαδή

$$AB = \{A\}[A]\{B\}[B] = \{A\}\{B\}[A][B] = \{AB\}[AB]$$

και

$$\frac{A}{B} = \frac{\{A\}[A]}{\{B\}[B]} = \left\{\frac{A}{B}\right\}\left[\frac{A}{B}\right]$$

Για παράδειγμα, $\upsilon = -8,1\ \mathrm{m/s},\ t = 21\ \mathrm{s},\ \upsilon t = (-8,1 \times 21) \times (\mathrm{m/s}) \times \mathrm{s} = -1,7 \times 10^2\ \mathrm{m}$.
Η αριθμητική τιμή $\{A\}$ του μεγέθους A δίνεται από τη σχέση $\{A\} = A/[A]$.

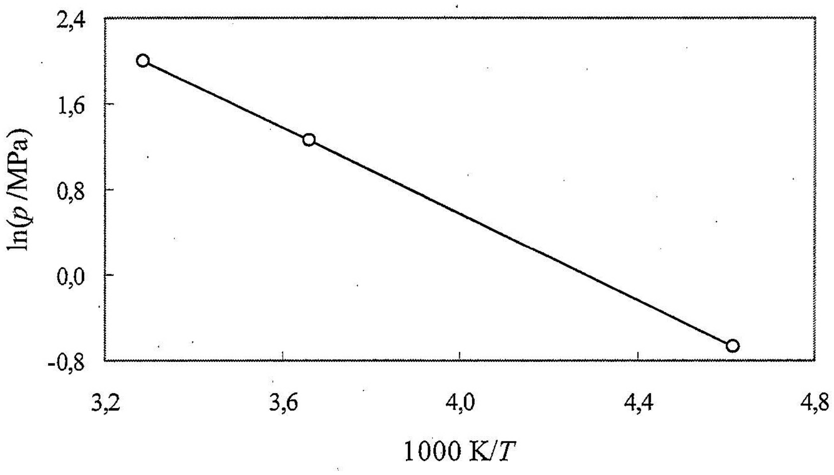
Στην παραπάνω περίπτωση με την επιτάχυνση έχομε
$\{a\} = (-42,2\ \mathrm{m/s^2})/(\mathrm{m/s^2}) = -42,2$.

Τα τελευταία σε συνδυασμό με το γεγονός ότι μεταξύ μονάδων και αριθμητικών τιμών επιτρέπονται οι συνήθεις αλγεβρικές πράξεις όπως πολλαπλασιασμός, διαίρεση κτλ, μας οδηγούν να χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό σε πίνακες και σε γραφικές παραστάσεις. Αυτό είναι σε αρμονία με το γεγονός ότι στους άξονες και στους πίνακες εμφανίζονται αριθμητικές τιμές μεγεθών και όχι μεγέθη. Στον Πίνακα 1 που ακολουθεί δίνονται στοιχεία για την πίεση ατμού σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία και ο φυσικός λογάριθμος της πίεσης ατμού σε συνάρτηση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας.

Πίνακας 1

T/K	10^3 K/T	p/MPa	ln(p/MPa)
216,55	4,6179	0,5180	−0,6578
273,15	3,6610	3,4853	1,2486
304,19	3,2874	7,3815	1,9990

Το γράφημα στο Σχήμα 1 που ακολουθεί, είναι για το φυσικό λογάριθμο της πίεσης ατμού σε συνάρτηση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας.



Σχήμα 1

2.1 Σχέσεις μεταξύ μεγεθών και σχέσεις μεταξύ αριθμητικών τιμών

Έχομε εξισώσεις μεταξύ μεγεθών όπως η σχέση

$$\upsilon = l / t .$$

Τέτοιες εξισώσεις είναι ανεξάρτητες από το ποιες είναι οι θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης.
Επίσης έχομε εξισώσεις αριθμητικών τιμών όπως η παρακάτω που αντιστοιχεί στην προηγούμενη,

$$\{\upsilon\}_{\mathrm{km/h}} = 3{,}6\{l\}_{\mathrm{m}} / \{t\}_{\mathrm{s}} .$$

Το 3,6 λέγεται εμπειρικός συντελεστής (πολλαπλασιαστής). Το l μετριέται σε μέτρα ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και η ταχύτητα σε km/h . Τέτοιες σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων εξαρτώνται από τις μονάδες που χρησιμοποιούνται κάθε φορά για τις διάφορες ποσότητες. Οι μονάδες πρέπει να δηλώνονται ως δείκτες ή να γίνεται σαφής σχετική αναφορά στο κείμενο.
Σημειώνομε ξανά ότι έχομε σύμφωνο (coherent) σύστημα μονάδων αν η επιλογή των μονάδων είναι τέτοια που οι σχέσεις μεταξύ των αριθμητικών τιμών να είναι ακριβώς ίδια με τη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων φυσικών μεγεθών, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών συντελεστών αν υπάρχουν. Αυτή την ιδιότητα έχουν όλα τα συστήματα μονάδων που έχουν χρησιμοποιηθεί ή χρησιμοποιούνται, δηλαδή όλα είναι σύμφωνα συστήματα. Δείτε ότι αυτό ισχύει για τις προηγούμενες σχέσεις αν θεμελιώδεις μονάδες είναι για το μήκος το m και για το χρόνο το s, τότε η σύμφωνη μονάδα ταχύτητας είναι το m/s. Φυσικά το ίδιο ισχύει αν θεμελιώδεις μονάδες είναι cm, s αντιστοίχως.
Τονίζομε ξανά ότι γενικώς θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιεί οποιεσδήποτε ανεξάρτητες μονάδες για κάθε μια ποσότητα, αυτό όμως θα οδηγούσε στην εμφάνιση πρόσθετων συντελεστών στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, έτσι θα είχαμε μια ανεξέλεγκτα πολύπλοκη κατάσταση.

2.2 Διάσταση ή διαστάσεις μεγέθους

Σε κάθε σύστημα φυσικών μεγεθών, υπάρχουν μαθηματικές σχέσεις που τα συνδέουν. Αυτές οι σχέσεις μπορεί να περιλαμβάνουν πολλαπλασιαστικές σταθερές. Τα διάφορα συστήματα φυσικών μεγεθών μπορεί να έχουν σχέσεις που διαφέρουν ως προς τις σταθερές. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι πολλές σχέσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού στο γκαουσιανό (gaussian) σύστημα και στο SI. Ως παράδειγμα, για τη δύναμη Lorentz έχομε αντιστοίχως τις σχέσεις $\vec{F} = q\vec{E} + q\frac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}$ και $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$.

Σημειώνομε ότι η εξάρτηση από τα φυσικά μεγέθη φορτίο, πεδίο $\vec{E}$, ταχύτητα και πεδίο $\vec{B}$, είναι φυσιολογικό να είναι η ίδια και για τα δυο συστήματα, αλλά υπάρχει διαφορά στους πολλαπλασιαστικούς συντελεστές. Η ίδια εξάρτηση που βλέπομε, είναι γεγονός αναμενόμενο γιατί η «φυσική» που διέπει τη σχέση, το φαινόμενο, δε μπορεί να εξαρτάται από το σύστημα περιγραφής. Στην παραπάνω περίπτωση για την ηλεκτρική δύναμη η σχέση είναι ακριβώς η ίδια για τα δυο συστήματα,δηλαδή $q\vec{E}$, ενώ για τη μαγνητική δύναμη έχομε $q\frac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}$ και $q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ αντιστοίχως.

Όπως είπαμε προηγουμένως, λαμβάνεται αυθαίρετα ένα κατάλληλο πλήθος από τα μεγέθη του συστήματος (μεγεθών) τα οποία θεωρούνται ως ανεξάρτητα και λέγονται θεμελιώδη μεγέθη (ή μεγέθη αναφοράς) ενώ οι αντίστοιχες μονάδες τους είναι οι θεμελιώδεις μονάδες (μονάδες αναφοράς). Όλα τα άλλα μεγέθη αυτού του συστήματος

και οι μονάδες τους είναι παράγωγα μεγέθη και παράγωγες μονάδες αντιστοίχως. Τα παράγωγα μεγέθη σχετίζονται με τα θεμελιώδη με τις μαθηματικές σχέσεις που αναφέραμε προηγουμένως. Γενικώς δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσα και πια μεγέθη μπορεί να θεωρηθούν ως θεμελιώδη, αρκεί να μην οδηγούν σε ασυνέπειες (αντιφάσεις). Μια χαρακτηριστική περίπτωση είναι η περιοχή των Στοιχειωδών Σωματιδίων όπου συνήθως όλα τα μεγέθη μετριούνται με μια μόνο μονάδα υψωμένη σε κάποια δύναμη, για παράδειγμα τη μονάδα της ενέργειας που συνήθως είναι το eV ή δεκαδικά πολλαπλάσιά του MeV, GeV κτλ. Σε αυτή την περίπτωση οι διάφορες σχέσεις παίρνουν κατάλληλη μορφή και οι σταθερές ταχύτητα του φωτός στο κενό και η ανηγμένη σταθερά του Planck, θεωρούνται αδιάστατες με τιμή ίση με τη μονάδα. Τέτοια συστήματα λέγονται φυσικά συστήματα μονάδων.
Κάθε μέγεθος Q μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα όρων που είναι γινόμενα άλλων μεγεθών. Ο κάθε όρος μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο των θεμελιωδών μεγεθών $A, B, C, ...$ δηλαδή έχομε άθροισμα όρων της μορφής

$$Q = \xi A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} ... + ...$$

τα ξ είναι αριθμητικοί (αδιάστατοι) συντελεστές (παράγοντες). Ένεκα της ομογένειας που αναφέρεται παρακάτω, τα $\alpha, \beta, \gamma, ...$ είναι τα ίδια για όλους τους προσθετέους. Η διάσταση ή διαστάσεις του Q είναι

$$\dim Q = \mathsf{A}^{\alpha}\mathsf{B}^{\beta}\mathsf{C}^{\gamma}...$$

χωρίς τον αριθμητικό παράγοντα ξ. Τα $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, ...$ είναι οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών και τα $\alpha,\ \beta,\ \gamma, ...$ είναι οι διαστατικοί εκθέτες του φυσικού μεγέθους Q. Σημειώνομε ότι τα σύμβολα που παριστάνουν τις διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών είναι όρθια και sans serif (εδώ χρησιμοποιούμε τη γραμματοσειρά calibri light). Μια ποσότητα έχει διάσταση 1 αν οι διαστατικοί εκθέτες της είναι όλοι μηδέν. Για ιστορικούς λόγους η ποσότητα λέγεται αδιάστατη ενώ στην πραγματικότητα έχει διάσταση 1. Πράγματι έχομε

$$\text{διάσταση} = \mathsf{A}^0\mathsf{B}^0 ... = 1 \times 1 \times .... = 1 .$$

Οι διαστάσεις εξαρτώνται από το σύστημα μεγεθών που χρησιμοποιείται.
Όταν τα μεγέθη χρόνος T, μήκος L, μάζα M, (ηλεκτρικό) ρεύμα I, θερμοδυναμική θερμοκρασία (απόλυτη θερμοκρασία) Θ, γραμμομόριο N, φωτεινή ένταση J, λαμβάνονται ως θεμελιώδη, τότε η διάστασή τους παριστάνεται με τα εξής αντίστοιχα σύμβολα $\mathsf{T}, \mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{I}, \Theta, \mathsf{N}, \mathsf{J}$. Αυτή η επιλογή ισχύει για το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI).

Στον Πίνακα 2 φαίνονται οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών του SI και οι μονάδες τους.

Πίνακας 2

Διάσταση $\rightarrow$ μονάδα

$\mathsf{T} \rightarrow \mathrm{s}$

$\mathsf{L} \rightarrow \mathrm{m}$

$\mathsf{M} \rightarrow \mathrm{kg}$

$\mathsf{I} \rightarrow \mathrm{A}$

$\Theta \rightarrow \mathrm{K}$

$\mathsf{N} \rightarrow \mathrm{mol}$

$\mathsf{J} \rightarrow \mathrm{cd}$

Το σύμφωνο σύστημα μονάδων επιτυγχάνεται με τον καθορισμό της μονάδας μέτρησης των παράγωγων μεγεθών από την εξίσωση για τις διαστάσεις του παράγωγου μεγέθους. Για παράδειγμα, από τη γνωστή σχέση για την κινητική ενέργεια υλικού σημείου, $E = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ καταλήγομε στην εξίσωση διαστάσεων $\dim E = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^2\mathsf{M}$, οπότε η μονάδα της κινητικής ενέργειας είναι $1\ \mathrm{kg\,m^2/s^2} = 1\ \mathrm{J} = 1\,\mathrm{joule}\,(\text{τζουλ})$.

Πίνακας 3
Παραδείγματα διαστάσεων μεγεθών στο SI

Μέγεθος	Διάσταση
Ταχύτητα	$\mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}$
Γωνιακή ταχύτητα	T^{-1}
Δύναμη	$\mathsf{T}^{-2}\mathsf{LM}$
Γραμμομοριακή εντροπία	$\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^2\mathsf{M}\Theta^{-1}\mathsf{N}^{-1}$
Σχετική πυκνότητα	1

Οι σωστές εκφράσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών ενός σύμφωνου συστήματος είναι ομογενείς (ή ομοιογενείς), δηλαδή πρέπει το αριστερό και το δεξιό μέλος να έχουν ίδιες διαστάσεις. Στη διαστατική ανάλυση (dimensional analysis) μια εξίσωση είναι διαστατικά ομογενής αν η μορφή της δεν εξαρτάται από τις θεμελιώδεις μονάδες. Η ομογένεια μας επιτρέπει να ελέγχομε τα αποτελέσματά μας, δηλαδή, αν μια σχέση που

βρήκαμε δεν είναι ομογενής τότε σίγουρα είναι λάθος, δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο.
Μπορούν να προστεθούν και αφαιρεθούν μόνο μεγέθη και εκφράσεις μεγεθών με ίδια διάσταση, δεν προστίθενται πορτοκάλια με χταπόδια.
Υπάρχουν 22 σύμφωνες παράγωγες μονάδες που έχουν ειδικά ονόματα, π.χ. η μονάδα πίεσης pascal (Pa), $1\ \mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2} = 1\,\mathrm{kg/(m\,s^2)}$. Στον Πίνακα 4 φαίνονται αυτές οι 22 παράγωγες μονάδες. Δίνεται το μέγεθος στο οποίο αναφέρεται η μονάδα στα ελληνικά, το όνομα της μονάδας στα αγγλικά και στα ελληνικά, επίσης δίνεται το (διεθνές) σύμβολο της μονάδας και ισοδύναμες μορφές της μονάδας. Τονίζομε ξανά ότι τα σύμβολα των μεγεθών είναι με πλάγια γράμματα ενώ τα σύμβολα των μονάδων είναι με όρθια γράμματα και δεν έχουν πληθυντικό. Τα ονόματα των μεγεθών και των μονάδων είναι γενικώς διαφορετικά στις διάφορες γλώσσες. Δίνονται ενδεικτικά (διεθνή) σύμβολα για τα διάφορα μεγέθη τα οποία δεν είναι υποχρεωτικά. Όμως αν χρησιμοποιούνται διαφορετικά σύμβολα πρέπει αυτό να τονίζεται στο κείμενο. Όμως τα σύμβολά των μονάδων είναι υποχρεωτικά και είναι τα ίδια σε όλες τις γλώσσες.

Πίνακας 4

Οι 22 σύμφωνες παράγωγες μονάδες του SI που έχουν ειδικά ονόματα και σύμβολα

	Σύμφωνες παράγωγες μονάδες του SI			
	Όνομα	Σύμβολο	Έκφραση ως προς άλλες μονάδες του SI	Έκφραση ως προς θεμελιώδεις μονάδες του SI
επίπεδη γωνία	radian, ακτίνιο	rad	1	m/m
στερεά γωνία	steradian, στερακτίνιο	sr	1	$\mathrm{m^2/m^2}$
συχνότητα	hertz, χερτζ	Hz		$\mathrm{s^{-1}}$
δύναμη	newton, νιούτον	N		$\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$
πίεση, (μηχανική) τάση	pascal, πασκάλ	Pa	$\mathrm{N/m^2}$	$\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}$
ενέργεια, έργο, ποσό θερμότητας	joule, τζουλ	J	N m	$\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$

ισχύς, ροή (ισχύς) ακτινοβολίας	watt, βατ	W	J/s	kg m^2 s^{-3}
ηλεκτρικό φορτίο	coulomb, κουλόμπ	C		A s
(ηλεκτρική) διαφορά δυναμικού, (ηλεκτρική) τάση, ηλεκτρεγερτική δύναμη	volt, βολτ	V	W/A	kg m^2 s^{-3} A^{-1}
χωρητικότητα	farad, φαράντ	F	C/V	kg^{-1} m^{-2} s^4 A^2
ηλεκτρική αντίσταση	ohm, ωμ	Ω	V/A	kg m^2 s^{-3} A^{-2}
ηλεκτρική αγωγιμότητα	siemens, ζήμενς	S	A/V	kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2
μαγνητική ροή	weber, βεμπερ	Wb	V s	kg m^2 s^{-2} A^{-1}
πυκνότητα μαγνητικής ροής	tesla, τέσλα	T	Wb/m^2	kg s^{-2} A^{-1}
επαγωγή (συντελεστής)	henry, χένρυ	H	Wb/A	kg m^2 s^{-2} A^{-2}
θερμοκρασία Κελσίου	degree Celsius, βαθμός Κελσίου	°C		K
φωτεινή ροή, φωτεινή ισχύς	lumen, λούμεν	lm	cd sr	cd sr
φωτισμός, φωτεινότητα	lux, λουξ	lx	Lm/m^2	cd sr m^{-2}
ενεργότητα (ραδιονουκλίδιου)	becquerel, μπεκερέλ	Bq		s^{-1}
απορροφούμενη δόση	gray, γκρέυ	Gy	J/kg	m^2 s^{-2}
ισοδύναμη δόση	sievert, σίβερτ	Sv	J/kg	m^2 s^{-2}
καταλυτική ενεργότητα (δραστικότητα)	katal, κατάλ	kat		mol s^{-1}

Η Διεθνής Επιτροπή Ηλεκτροτεχνίας ί (International Electrotechnical Commission, IEC) έχει εισαγάγει το var (σύμβολο var) ως ειδικό όνομα για τη μονάδα της άεργης ισχύος (reactive power). Σε σχέση με τις σύμφωνες μονάδες του SI , το var είναι ίδιο με το volt ampere. Είναι ευνόητο τι σημαίνει το όνομα στα αγγλικά, volt ampere reactive, var.

3. Ορισμοί των μονάδων του SI

Πριν την καθιέρωση των νέων ορισμών κατά το έτος 2018 (μπήκαν σε χρήση από τις 20 Μαΐου 1919), το SI (Système International d' Unités, Διεθνές Σύστημα μονάδων) ορίζονταν με βάση επτά θεμελιώδεις μονάδες (μονάδες αναφοράς). Από αυτές τις θεμελιώδεις μονάδες φτιάχνονταν οι σύμφωνες παράγωγες μονάδες ως γινόμενα δυνάμεων των θεμελιωδών μονάδων. Μετά τον Μάιο του 2019 το σύστημα μονάδων του SI ορίζεται με τη χρήση επτά σταθερών ορισμού, των οποίων οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται να είναι ακριβώς καθορισμένες, χωρίς αβεβαιότητα. Θα μπορούσε να δοθούν αυθαίρετες τιμές στις σταθερές και να οριστούν καινούργιες μονάδες μέτρησης με καινούργια ονόματα. Όμως ενδιαφέρει σε κάθε τέτοια αλλαγή να μην διαταραχτεί το προηγούμενο χρησιμοποιούμενο σύστημα. Αυτή είναι η αιτία που οι σταθερές ορισμού πήραν τις ακριβέστερες τιμές που υπήρχαν για αυτές κατά το χρόνο της μετάβασης, έγινε έτσι μια ομαλή μεταβολή που δεν έγινε αισθητή για τις πλείστες περιπτώσεις.

Η χρήση σταθερών αντί για μονάδες ορισμού (θεμελιώδεις), έχει ως αποτέλεσμα να μην χρειάζεται η διάκριση μεταξύ θεμελιωδών και παράγωγων μονάδων, διότι όλες οι μονάδες είναι δυνατόν να φτιαχτούν άμεσα από τις σταθερές ορισμού. Παρόλα αυτά, διατηρείται η έννοια των θεμελιωδών και των παράγωγων μονάδων διότι αυτό είναι χρήσιμο και επίσης είναι καλά καθιερωμένο ιστορικά, οπότε είναι αναγκαίο για να διατηρηθεί η συνέπεια με το Διεθνές Σύστημα Μεγεθών (ISQ, International System of Quantities) το οποίο έχει οριστεί στις σειρές ISO/IEC 80 000 του Διεθνούς Οργανισμού Τυποποίησης (ISO, International Organization of Standardization). Εκεί ορίζονται θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη στα οποία κατ' ανάγκη αντιστοιχούν οι θεμελιώδεις και παράγωγες μονάδες του SI.

Αναφέρομε ότι, χρησιμοποιούνται μονάδες για μεγέθη που περιγράφουν φαινόμενα της βιολογίας και της φυσιολογίας οι οποίες δεν ανήκουν στο SI. Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις. Για την περίπτωση της βιολογικής δράσης ουσιών που χρησιμοποιούνται για ιατρική διάγνωση και θεραπεία, μέχρι σήμερα δεν είναι δυνατόν να οριστούν μονάδες που να σχετίζονται με τις μονάδες του SI. Η βιολογική δράση αυτών των ουσιών στους οργανισμούς είναι πολύπλοκη και δεν είναι δυνατή η ποσοτικοποίησή της σε σχέση με φυσικοχημικές παραμέτρους. Το θέμα όμως είναι πολύ σπουδαίο για την ανθρώπινη υγεία και ασφάλεια οπότε ο Διεθνής Οργανισμός Υγείας (World Health Organization, WHO) έχει την υπευθυνότητα να καθορίζει Διεθνείς Μονάδες (WHO International Units, IU) για τη βιολογική δράση τους.

Αξίζει να τονίσομε ότι στα πλαίσια του SI γίνεται χρήση της επίδρασης της σχετικότητας. Ένα παράδειγμα είναι το ότι για πρότυπα συχνότητας, που βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις, είναι δυνατό να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ τους με χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί η γενική θεωρία της σχετικότητας, διότι εκτός των άλλων, υπάρχει μια σχετική μετατόπιση συχνότητας για πρότυπα που είναι τοποθετημένα σε διαφορετικά ύψη μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης.

Σημειώνομε εδώ ότι ανεξάρτητα από το πώς ορίζονται οι διάφορες μονάδες, ακόμη και από την αρχαιότητα, οι άνθρωποι προσπαθούσαν να στηρίζουν τις μετρήσεις τους σε κάτι που θεωρούσαν ως «πρότυπο», ως «σταθερό». Ακόμη και το πόδι του βασιλιά λαμβάνονταν ως κάτι «σταθερό» αποδεκτό από πολλούς. Επίσης η μέτρηση της απόστασης με την ώρα, μιας ώρας δρόμος, υπονοούσε πως ένας άνθρωπος περπατούσε με δεδομένο, «σταθερό» ρυθμό, ταχύτητα. Μπορεί να αναφερθεί κάποιος σε πλήθος τέτοιων μονάδων. Με το σημερινό SI αυτή η ιδέα φτάνει σε υψηλό επίπεδο εφαρμογής, ίσως το πιο τέλειο με τα σημερινά επιστημονικά δεδομένα για τις διάφορες σταθερές.

3.1 Ορισμοί των θεμελιωδών μονάδων

Δίνομε τους ορισμούς των θεμελιωδών μονάδων (base units) ως προς τις σταθερές ορισμού.

Το δευτερόλεπτο

Το δευτερόλεπτο, σύμβολο s, είναι η μονάδα χρόνου στο SI. Ορίζεται λαμβάνοντας την αριθμητική τιμή της συχνότητας, $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$, της μη διαταραγμένης μετάπτωσης μεταξύ των δυο υπέρλεπτων σταθμών της θεμελιώδους κατάστασης του κελσίου 133, ίση με $9\,192\;\;631\,770$ ακριβώς, όταν εκφράζεται στη μονάδα Hz η οποία ισούται με s^{-1}.

Μη διαταραγμένη μετάπτωση σημαίνει ότι το κέσιο είναι σε κατάσταση ατμών και το άτομό του δεν διαταράσσεται από εξωτερικά πεδία.

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού :

$$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\,192\;\;631\,770\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Η αντιστροφή αυτής της σχέσης δίνει μια σχέση του δευτερολέπτου ως προς τη σταθερά ορισμού $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{s}\ = \frac{9\ 139\ 631\ 770}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}.$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι το δευτερόλεπτο ισούται με τη διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων της ανωτέρω ακτινοβολίας.

Το μέτρο

Το μέτρο, σύμβολο m, είναι η μονάδα μήκους του SI. Ορίζεται λαμβάνοντας την αριθμητική τιμή της ταχύτητας του φωτός στο κενό, c (σταθερά ορισμού), ίση με 299 792 458 ακριβώς, όταν εκφράζεται σε ms^{-1}. Το δευτερόλεπτο ορίζεται σύμφωνα με τα προηγούμενα από την σταθερά ορισμού $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$. Αυτός ο ορισμός του μέτρου υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Η αντιστροφή αυτής της σχέσης δίνει, τελικώς μετά από κάποιες πράξεις, μια έκφραση για το μέτρο ως προς τις σταθερές ορισμού c και $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{m} = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{299\ 792\ 458}\frac{c}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}} \approx 30,663\ 319\ \frac{c}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}.$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι το μέτρο είναι το μήκος που διανύει το φως στο κενό κατά το χρονικό διάστημα $1/299\ 792\ 458$ του δευτερολέπτου.

Το χιλιόγραμμο

Το χιλιόγραμμο, σύμβολο kg, είναι η μονάδα μάζας του SI. Ορίζεται παίρνοντας την αριθμητική τιμή της σταθεράς του Planck h ίση με $6{,}626\ 070\ 15\times10^{-34}$ ακριβώς, όταν εκφράζεται σε Js που ισούται με $\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}$ όπου το δευτερόλεπτο και το μέτρο έχουν οριστεί σύμφωνα με τα προηγούμενα. Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$h = 6{,}626\ 070\ 15\times10^{-34}\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}}.$$

Η αντιστροφή της δίνει, τελικώς μετά από κάποιες πράξεις, μια ακριβή έκφραση για το χιλιόγραμμο ως προς τις σταθερές ορισμού h, $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ και c:

$$1\ \mathrm{kg} = \frac{(299\ 792\ 458)^2}{(6{,}626\ 070\ 15\times10^{-34})(9\ 192\ \ 631\ 770)}\ \frac{h\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}{c^2} \approx 1,475\ 5214\times10^{40}\ \frac{h\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}{c^2}.$$

Το αμπέρ

Το αμπέρ, σύμβολο A, είναι η μονάδα ηλεκτρικού ρεύματος του SI. Ορίζεται παίρνοντας την αριθμητική τιμή του στοιχειώδους φορτίου ίση με $1,602\ 176\ 634\times10^{-19}$ ακριβώς, όταν εκφράζεται στη μονάδα C, η οποία μονάδα ισούται με $\mathrm{A\ s}$, όπου το δευτερόλεπτο έχει οριστεί σύμφωνα με τα προηγούμενα. Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$e = 1,602\ 176\ 634\times10^{-19}\,\mathrm{A\ s}\,.$$

Η αντιστροφή της δίνει, τελικώς μετά από πράξεις, μια ακριβή έκφραση για το αμπέρ ως προς τις σταθερές ορισμού e και $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{A} = \frac{1}{(9\ 192\ \ 631\ 770)(1,602\ 176\ 634\times10^{-19})}\ \Delta\nu_{\mathrm{Cs}}e \approx 6,789\ 687\times10^{8}\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}e\,.$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι το ένα αμπέρ είναι το ηλεκτρικό ρεύμα που αντιστοιχεί στη ροή $1/(1,602\ 176\ 634\times10^{-19})$ στοιχειωδών φορτίων ανά δευτερόλεπτο.

Το κέλβιν

Το κέλβιν, σύμβολο K, είναι η μονάδα της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του SI. Ορίζεται λαμβάνοντας την αριθμητική τιμή της σταθεράς Boltzmann k (σταθερά ορισμού) ίση με $1,380\ 649\times10^{-23}$ ακριβώς, όταν εκφράζεται στη μονάδα $\mathrm{J\ K^{-1}}$ η οποία ισούται με $\mathrm{kg\ m^2s^{-2}\ K^{-1}}$, όπου το χιλιόγραμμο, το μέτρο και το δευτερόλεπτο ορίστηκαν σύμφωνα με τα προηγούμενα. Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$k = 1,380\ 649\times10^{-23}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-2}K^{-1}}\,.$$

Η αντιστροφή της δίνει μια ακριβή σχέση του κέλβιν ως προς τις σταθερές ορισμού $k,\ h$ και $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{K} = \frac{1,380\ 649\times10^{-23}}{(6,626\ 070\ 15\times10^{-34})(9\ 192\ \ 631\ 770)}\ \frac{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}h}{k} \approx 2,266\ 6653\ \frac{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}h}{k}\,.$$

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι ένα κέλβιν ισούται με τη μεταβολή της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας η οποία προκύπτει από μεταβολή της θερμικής ενέργειας kT κατά $1,380\ 649\times10^{-23}\mathrm{J}$.

Το μολ ή γραμμομόριο

Το γραμμομόριο, σύμβολο mol, είναι η μονάδα ποσού ουσίας στο SI. Ένα γραμμομόριο περιέχει $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ στοιχειώδεις οντότητες ακριβώς. Αυτός ο αριθμός είναι η αριθμητική τιμή της σταθεράς (σταθερά ορισμού) Avogadro, N_A, όταν η σταθερά εκφράζεται στη μονάδα mol^{-1} η αριθμητική τιμή της λέγεται αριθμός Avogadro. Το ποσό ουσίας, σύμβολο n, ενός συστήματος είναι ένα μέτρο του αριθμού συγκεκριμένων στοιχειωδών οντοτήτων. Μια στοιχειώδης οντότητα μπορεί να είναι άτομο, μόριο, ιόν, ηλεκτρόνιο, κάθε άλλο σωματίδιο ή συγκεκριμένη ομάδα σωματιδίων. Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει για τη σταθερά ορισμού την ακριβή σχέση:

$$N_A = 6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}\ .$$

Η αντιστροφή της δίνει μια ακριβή έκφραση για το γραμμομόριο ως προς την σταθερά ορισμού, N_A:

$$1\ \mathrm{mol} = 6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}\ \frac{1}{N_A}\ .$$

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι το γραμμομόριο είναι το ποσό ουσίας ενός συστήματος που περιέχει ακριβώς $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ συγκεκριμένες στοιχειώδεις οντότητες.

Στο όνομα «ποσό ουσίας» η λέξη «ουσία» θα αντικαθίσταται με λέξεις που προσδιορίζουν τη συγκεκριμένη ουσία στην οποία αναφερόμαστε . Για παράδειγμα, «ποσό υδροχλωρίου, HCl" ή «ποσό ηλεκτρονίων» κτλ. Πολλές φορές αντί του πλήρους «ποσό ουσίας» μπορεί να χρησιμοποιείται ο όρος «ποσό» , π.χ. «ποσό υδροχλωρίου, HCl».

Η καντήλα

Η καντήλα, σύμβολο cd είναι η μονάδα φωτοβολίας ή φωτεινής έντασης, σε δεδομένη κατεύθυνση. Ορίζεται παίρνοντας την αριθμητική τιμή της φωτεινής απόδοσης μονοχρωματικής ακτινοβολίας συχνότητας 540×10^{12} Hz ακριβώς, η οποία συμβολίζεται με K_{cd}, να είναι 683 όταν εκφράζεται στη μονάδα $\mathrm{lm\ W^{-1}}$, η οποία ισούται με $\mathrm{cd\ sr\ kg^{-1}m^{-2}s^{3}}$. Το χιλιόγραμμο, το μέτρο και το δευτερόλεπτο ορίζονται ως προς τα h, c και $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$, σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Σημειώνομε ότι $\mathrm{lm} = \mathrm{cd\ sr}$, είναι η φωτεινή ροή που εκπέμπει φωτεινή πηγή φωτοβολίας $1\ \mathrm{cd}$ μέσα σε στερεά γωνία $1\ \mathrm{sr}$.

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη φωτεινή απόδοση, σταθερά ορισμού:

$$K_{\mathrm{cd}} = 683\ \mathrm{cd\ sr\ kg^{-1}m^{-2}s^{3}}$$

για μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $\nu = 540\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$.

Αντιστρέφοντας την προ τελευταία σχέση παίρνομε, τελικώς, μια ακριβή έκφραση για την καντήλα ως προς τις σταθερές ορισμού K_{cd}, h και $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{cd} = \frac{1}{(6{,}626\ 070\ 15\times10^{-34})(9\ 192\ \ 631\ 770)^{2}\,683}\,(\Delta\nu_{\mathrm{Cs}})^{2}\,h\,K_{\mathrm{cd}}$$
$$\approx 2{,}614\ 830\times10^{10}\ (\Delta\nu_{\mathrm{Cs}})^{2}\,h\,K_{\mathrm{cd}}\ .$$

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι μια καντήλα είναι η φωτοβολία, σε ορισμένη κατεύθυνση, μιας πηγής που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $540\times10^{12}\ \mathrm{Hz}$ και έχει ένταση ακτινοβολίας σε αυτή την κατεύθυνση $\left(\frac{1}{683}\right)\mathrm{W\ sr^{-1}}$.

Είναι εύκολο να εκφραστούν και οι παράγωγες μονάδες ως συνάρτηση των σταθερών ορισμού. Ας πάρομε ως παράδειγμα την μονάδα της ενέργειας το τζουλ, joule (J).

Ισχύει

$$1\ \mathrm{J} = \mathrm{kg\ m^{2}\ s^{-2}} = (299\ 792\ 458)(6{,}626\ 070\ 154\times10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)\ \frac{h}{c\ \Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$
$$\approx 1{,}826\ 066\ 53\times10^{-15}\ \frac{h}{c\ \Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}\ .$$

Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος πραγματοποίησης των μονάδων. Βέβαια υπάρχουν στη βιβλιογραφία έντυπα που περιγράφουν συγκεκριμένους τρόπους. Το θέμα αφήνεται ανοικτό ώστε όσο η τεχνολογία εξελίσσεται θα εξελίσσονται και οι τρόπου πραγματοποίησης ενώ οι ορισμοί θα παραμένουν οι ίδιοι. Θα αναφερθούμε παρακάτω μόνο στην περίπτωση του χιλιόγραμμου που είναι η μονάδα μάζας.

Κάνομε εδώ μια παρένθεση που σχετίζεται με ονοματολογία. Επειδή ο όρος «ένταση» στη Φυσική χρησιμοποιείται για να δηλώσει συγκεκριμένα φυσικά μεγέθη, τα οποία σχετίζονται με κάποιο υπόθεμα, όπως π.χ. η ένταση ηλεκτρικού πεδίου η οποία είναι δύναμη ανά υπόθεμα, που εδώ είναι φορτίο, ($E = F / q$), δεν συνιστάται η ορολογία «ένταση (ηλεκτρικού) ρεύματος I» αλλά να γίνεται χρήση του όρου (ηλεκτρικό) ρεύμα I.

Στον Πίνακα 5 φαίνονται οι θεμελιώδεις μονάδες του SI. Δίνεται το είδος του μεγέθους το οποίο εκφράζει η κάθε μονάδα, το αγγλικό και το ελληνικό όνομά της, το (διεθνές) σύμβολό της και το σύμβολο της διάστασής της.

Πίνακας 5

Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι θεμελιώδεις μονάδες του SI

Θεμελιώδες μέγεθος		Θεμελιώδης μονάδα	
Όνομα σύμβολο	Συνιστώμενο (ενδεικτικό) σύμβολο	Όνομα	Υποχρεωτικό
χρόνος (time)	t	δευτερόλεπτο (second)	s
μήκος (length)	l, x, r κτλ	μέτρο (meter)	m
μάζα (mass)	m	χιλιόγραμμο (kilogram)	kg
ηλεκτρικό ρεύμα (electric current)	I, i	αμπέρ (ampere)	A

θερμοδυναμική θερμοκρασία (thermodynamic temperature)	T	κέλβιν (kelvin)	K
ποσό ουσίας (amount of substance)	n	μολ (mole)	mol
φωτοβολία ή φωτεινή ροή (luminous intensity)	I_V	καντήλα (candela)	cd

Επιλέγεται αυτή η διάταξη των θεμελιωδών μονάδων ώστε κάθε μονάδα να εξαρτάται από προηγούμενες μονάδες αλλά όχι από επόμενες. Αυτή η διάταξη μπορεί να τηρείται στη γραφή της διάστασης φυσικού μεγέθους, αλλά δεν είναι αυστηρός κανόνας οπότε δεν ακολουθείται πάντοτε.

3.2 Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια μονάδων

Οι μονάδες πολλές φορές είναι πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες για χρήση σε διάφορες περιπτώσεις. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των μονάδων του SI , όπου οι πολλαπλασιαστές (παράγοντες πολλαπλασιασμού) είναι δυνάμεις του 10, όπως δείχνει ο Πίνακας 6. Οι πολλαπλασιαστές λέγονται προθέματα. Οι μονάδες που είναι δεκαδικά πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια των θεμελιωδών μονάδων του SI (ανάλογα ισχύουν και για τα άλλα σύμφωνα συστήματα μονάδων), είναι μέρος των μονάδων του SI. Για παράδειγμα, το $1\ \mathrm{km} = 1 \times 10^3\ \mathrm{m}$ είναι μονάδα του SI. Υπάρχουν και πολλαπλασιαστές που δεν είναι δεκαδικοί. Οι προκύπτουσες μονάδες χρησιμοποιούνται από παράδοση (ιστορικοί λόγοι), αλλά είναι εκτός SI, π.χ. το πρώτο λεπτό (1 min) ισούται με 60 δευτερόλεπτα, $(1\ \mathrm{min} = 60\ \mathrm{s})$, η ώρα, $1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$.
Στον Πίνακα 6 δίνεται το όνομα του προθέματος στα αγγλικά, μια απόδοση στα ελληνικά και το (διεθνές) σύμβολό του. Σημειώστε ότι τα σύμβολα είναι με κεφαλαία γράμματα μέχρι και το πρόθεμα mega (M), τα υπόλοιπα δηλώνονται με πεζά γράμματα. Τα ονόματα των προθεμάτων είναι γενικώς διαφορετικά στις διάφορες γλώσσες όμως το σύμβολο είναι διεθνώς υποχρεωτικά το ίδιο (και με όρθια γράμματα).
Τα ονόματα των προθεμάτων προέρχονται από ελληνικές, λατινικές και άλλες γλώσσες.

Προσέξτε ότι οι δυνάμεις του 10 που είναι τα προθέματα, διαφέρουν η μια από την άλλη κατά 3, με εξαίρεση κάποιες στη μέση του καταλόγου. Δηλαδή τα πλείστα προθέματα είναι της μορφής 10^{3k} όπου k ακέραιος. Τα ονόματά τους για τις διάφορες τιμές του k σχετίζονται με τη λέξη που χαρακτηρίζει το k σε κάποια γλώσσα. Για παράδειγμα το peta (P) προέρχεται από το ελληνικό πέντε και σημαίνει πολλαπλασιαστή με $k = 5$, ο παράγοντας είναι $10^{3\times 5} = 10^{15}$. Τα προθέματα γράφονται πριν από τις μονάδες χωρίς κενό μεταξύ τους. Δεν χρησιμοποιούνται δυο προθέματα μαζί το ένα μετά το άλλο.

Πίνακας 6

Προθέματα του SI

Παράγοντας πολλαπλασιασμού	Όνομα	Σύμβολο
10^{24}	yotta γυοτα	Y
10^{21}	zetta ζητα	Z
10^{18}	exa εξα	E
10^{15}	peta πετα	P
10^{12}	tera τερα	T
10^{9}	giga γιγα	G
10^{6}	mega μεγα	M
10^{3}	kilo χιλιο	k
10^{2}	hecto εκατο	h
10^{1}	deca ή deka δεκα	da
10^{-1}	deci δεκατο, ντεσι	d
10^{-2}	centi εκατοστο, σεντι	c
10^{-3}	milli χιλιοστο, μιλι	m
10^{-6}	micro μικρο	μ
10^{-9}	nano νανο	n
10^{-12}	pico πικο	p
10^{-15}	fempto φεμπτο	f
10^{-18}	atto ατο	a
10^{-21}	zepto ζεπτο	z
10^{-24}	yocto γυοκτο	y

Καλό είναι να αναφερθεί ότι στις αγγλόφωνες χώρες, γενικώς σήμερα, το δισεκατομμύριο (billion) θεωρείται ότι είναι το 10^{9} και το τρισεκατομμύριο (trillion) 10^{12}. Παρόλα αυτά σε μερικά κείμενα κάποιοι μπορεί να θεωρούν ότι το billion σημαίνει 10^{12} και το trillion 10^{18}. Χρειάζεται προσοχή.

Σημειώνομε ότι γράφομε $\mathrm{km}, \mathrm{km}^2, \mathrm{km}^3$ αλλά όχι Mm^3. Τα προθέματα χρησιμοποιούνται με τις μονάδες του SI (δε χρησιμοποιούνται με τη μονάδα του χρόνου

στο SI). Όμως τα προθέματα χρησιμοποιούνται σε πολλές περιπτώσεις και εκτός SI, παραδείγματα είναι:
Mpc (μέγαπαρσέκ), με τους κωδικούς νομισμάτων όπως kEUR, kGBP, MUSD, GSEK .
Για πληρότητα αναφέρομε ότι, η Διεθνής Ηλεκτροχημική Επιτροπή (International Electrochemical Commission, IEC) έχει εγκρίνει τον Πίνακα 7 για προθέματα που είναι πολλαπλασιαστές στο δυαδικό σύστημα. Δίνεται μόνο το αγγλικό όνομα. Αυτά τα προθέματα είναι για χρήση στις επιστημονικές περιοχές επεξεργασίας δεδομένων και μετάδοσης δεδομένων. Αυτά δεν ανήκουν στο SI αλλά όπως φαίνεται παρακάτω έχει γίνει δανεισμός χαρακτηριστικών από τα προθέματα του SI.
Στην περιοχή αυτής της τεχνολογίας χρησιμοποιούνται και τα προθέματα του SI τα οποία έχουν τη συνήθη τους σημασία.

Πίνακας 7

Προθέματα του δυαδικού

Παράγοντας πολλαπλασιασμού	Αγγλικό όνομα	Σύμβολο	Προέλευση	Παραγωγή
2^{10}	kibi	Ki	kilobinary: $\left(2^{10}\right)^1$	kilo: $\left(10^3\right)^1$
2^{20}	mebi	Mi	megabinary: $\left(2^{10}\right)^2$	mega: $\left(10^3\right)^2$
2^{30}	gibi	Gi	gigabinary: $\left(2^{10}\right)^3$	giga: $\left(10^3\right)^3$
2^{40}	tebi	Ti	terabinary: $\left(2^{10}\right)^4$	tera: $\left(10^3\right)^4$
2^{50}	pebi	Pi	petabinary: $\left(2^{10}\right)^5$	peta: $\left(10^3\right)^5$
2^{60}	exbi	Ei	exabinary: $\left(2^{10}\right)^6$	exa: $\left(10^3\right)^6$

Στα αγγλικά η πρώτη συλλαβή προφέρεται όπως και στην περίπτωση του SI και η δεύτερη ως bee. Ανάλογα μπορεί κάποιος να προτείνει και για τα ελληνικά γλώσσα όπου η δεύτερη συλλαβή μπορεί να προφέρεται μπι.

Σημειώνομε ότι κάποτε οι ειδικοί των υπολογιστών, επειδή είδαν ότι το 2^{10} ήταν περίπου ίσο με το 1000 και έτσι χρησιμοποιούσαν το πρόθεμα kilo να σημαίνει 1024. Σήμερα υπάρχει ακόμη αυτή η σύγχυση που μπορεί να λυθεί με την χρήση των δυαδικών προθεμάτων.

Στον Πίνακα 8 φαίνονται μερικές συγκρίσεις των προθεμάτων του δυαδικού με τα προθέματα του SI που είναι δεκαδικά προθέματα.

Πίνακας 8
Παραδείγματα και συγκρίσεις προθεμάτων δυαδικού και SI

1 kibibit	1 Kibit = 2^{10} bit = 1024 bit
1 kilobit	1 kbit = 2^{3} bit = 1000 bit
1 mebibyte	1 MiB = 2^{20} B = 1 048 576 B
1 megabyte	1 MB = 2^{6} B = 1 000 000 B
1 gibibyte	1 GiB = 2^{30} B = 1 073 741 824 B
1 gigabyte	1 GB = 2^{9} B = 1 000 000 000 B

3.3 Μονάδες εκτός SI

Στον Πίνακα 9 φαίνονται οι μονάδες που δεν ανήκουν στο SI αλλά έχει γίνει αποδεκτό να χρησιμοποιούνται με το SI. Δίνεται το ελληνικό και το αγγλικό τους όνομα.

Πίνακας 9
Μονάδες εκτός SI που είναι αποδεκτές για χρήση μαζί με τις μονάδες του SI

Μέγεθος	Όνομα μονάδας	Σύμβολο	Τιμή σε μονάδες του SI
χρόνος	minute λεπτό hour ώρα day ημέρα	min h d	1 min = 60 s 1 h = 60 min = 3600 s 1 d = 24 h = 86 400 s
επίπεδη γωνία	degree βαθμός minute πρώτο λεπτό second δεύτερο λεπτό	o ′ ′′	$1^{\circ} = (\pi/180)$ rad $1' = (1/60)^{\circ} = (\pi/10\,800)$ rad $1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000)$ rad

επιφάνεια	hectare εκτάριο	ha	$1\,\text{ha} = 1\ \text{hm}^2 = 10^4\ \text{m}^2$
όγκος	litre λίτρο	L, l	$1\,\text{L} = 1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3 = 10^3\ \text{cm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$
μάζα	tonne τόνος	t	10^3 kg
μήκος	astronomical unit αστρονομική μονάδα	au	$1\,\text{au} = 149\ 597\ 870\ 700$ m

Πολλές φορές δίνομε την τιμή ενός ειδικού μεγέθους μαζί με την αβεβαιότητά του. Για παράδειγμα για τη μάζα του πρωτονίου γράφομε,

$$m_{\text{p}} = 1,672\ 621\ 923\ 69(51) \times 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Τα δυο ψηφία στην παρένθεση δείχνουν την αβεβαιότητα στα δυο τελευταία ψηφία της αριθμητικής τιμής. Για παράδειγμα η αβεβαιότητα στο παράδειγμά μας είναι ίση με $0,000\ 000\ 000\ 51 \times 10^{-19}$ kg .

Υπάρχουν κάποιες μονάδες εκτός SI που από συνήθεια χρησιμοποιούνται σε κλάδους όπως είναι η Μετεωρολογία, η Ναυσιπλοΐα κτλ και γι αυτό παραθέτομε τον Πίνακα 11. Δίνομε την τιμή τους σε μονάδες του SI και το αγγλικό και το ελληνικό όνομα.

Πίνακας 10

Άλλες μονάδες εκτός SI σε ευρεία χρήση

μέγεθος	Όνομα		Σύμβολο	Τιμή στο SI
πίεση	bar	μπαρ	bar	1 bar = 0,1 MPa = 100 kPa = 10^5 Pa
	millimeter of mercury	χιλιοστό υδραργύρου	mmHg	1 mmHg = 133,322 Pa
μήκος	angstrom	άνγκστρομ	Å	1 Å = 0,1 nm = 100 pm = 10^{-10}m
απόσταση	nautical mile	ναυτικό μίλι	M	1 M = 1852 m
επιφάνεια	barn	μπαρν	b	1 b = 100 fm^2 = $(10^{-12}\ \text{cm})^2 = 10^{-28}\ \text{m}^2$
ταχύτητα	knot	κόμβος	kn	1 kn = (1852 / 3600) m/s
μεγέθη	neper	νέπερ	Np	

λογάριθμοι	bel	μπελ	B
λόγων	decibel	ντεσιμπέλ	dB

Η μονάδα bar για την πίεση θεωρείται σήμερα ως η κανονική πίεση (standard pressure) για τη θερμοδυναμική. Για το ναυτικό μίλι δεν υπάρχει μοναδικό σύμβολο, συνηθίζονται τα εξής σύμβολα M, NM, Nm και nmi.

Στη συνέχεια κάνομε μερικές διευκρινήσεις σχετικές με τα μεγέθη που είναι λογάριθμοι λόγων.

Η διατύπωση $L_A = n$ Np, όπου n είναι αριθμός, σημαίνει ότι για δυο τιμές A_2, A_1 του μεγέθους A, ισχύει $n = \ln(A_2 / A_1)$. Αν $L_A = 1\ \mathrm{Np}$, τότε $A_2 / A_1 = \mathrm{e}$.

Η διατύπωση $L_X = m\ \mathrm{dB} = (m/10)\ \mathrm{B}$, όπου m είναι αριθμός, σημαίνει ότι για δυο τιμές X, X_0 του σχετικού μεγέθους, ισχύει $\lg(X / X_0) = m/10$. Αν $L_X = 1\ \mathrm{B}$, τότε $X / X_0 = 10$. Αν $L_X = 1\ \mathrm{dB}$, τότε $X / X_0 = 10^{1/10}$.

Υπάρχουν μονάδες που χρησιμοποιούνται από μερικούς σε συγγράμματα, οι οποίες ανήκουν στα συστήματα CGS κυρίως στο γκαουσιανό (gaussian). Μπορεί να τις βρει κάποιος στη βιβλιογραφία που δίνομε στο τέλος.

Στον Πίνακα 11 δίνομε και άλλες μονάδες εκτός SI που μπορεί να συναντήσει κάποιος σε μερικά συγγράμματα. Δίνομε τα ελληνικά ονόματα.

Πίνακας 11

Μερικές άλλες μονάδες εκτός SI

Μέγεθος	Όνομα και σύμβολο		Τιμή στο SI
δύναμη	χιλιόγραμμο δύναμης (κιλοπόντ)	kgf (kp)	$1\ \mathrm{kgf} = 9{,}806\ 65\ \mathrm{N}$ (ακριβώς)
πίεση	κανονική ατμόσφαιρα	atm	$1\ \mathrm{atm} = 101\ 325\ \mathrm{Pa}$ (ακριβώς)
	τορ	Torr	$1\ \mathrm{Torr} = (1/760)\ \mathrm{atm}$ (ακριβώς) $\approx 133{,}322\ \mathrm{Pa}$
	τεχνητή ατμόσφαιρα	at	$1\ \mathrm{atm} = 1\ \mathrm{kgf/cm^2}$ $= 98\ 066{,}5\ \mathrm{Pa}$ (ακριβώς) $= 0{,}967\ 841\ \mathrm{atm}$

ισχύς	μετρικός ίππος	CV, PS	1 CV = 75 kgf m/s (ακριβώς) = $735,498\ 75$ W (ακριβώς)
	ίππος (ιπποδύναμη)	hp	1 hp = $745,6999$ W (ακριβώς)
πυκνότητα μαγνητικής ροής	γκάους	Gs (στη Φυσική G)	$1\ \mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{T}$

Στον Πίνακα 12 δίνομε μετατροπές μεταξύ διαφόρων μονάδων παρόλο που δεν συνιστάται η χρήση πολλών από αυτές. Κυρίως για κάποιες από αυτές, δε συνιστάται η χρήση τους σε επιστημονικά κείμενα, όμως θα εξακολουθήσουν να χρησιμοποιούνται για πολύ ακόμη στην καθημερινή ζωή σε μερικές χώρες.

Πίνακας 12

Μετατροπές διαφόρων μονάδων

1 in (ίντσα) $= 2,54$ cm (ακριβώς)
1 ft (πόδι) $= 12$ in (ακριβώς) $= 0,3048$ m (ακριβώς)
1 yd (γυάρδα, πήχυς) $= 3$ ft (ακριβώς) $= 0,9144$ m (ακριβώς)
1 mile (μίλι) $= 5280$ ft (ακριβώς) $= 1,609\ 344$ m (ακριβώς)
1 L (λίτρο) $= 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ (ακριβώς)
1 min (λεπτό) $= 60$ s
1 h (ώρα) $= 60$ min=3600 s
1 d (ημέρα) $= 24$ h $= 86\ 400$ s
1 a (annum, έτος) ή 1 $\mathrm{a}_{\mathrm{trop}}$ (τροπικό έτος) $\approx 365,242\ 20$ d $\approx 31\ 556\ 926$ s
1 g_{n} (κανονική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας) $= 9,806\ 65\ \mathrm{m/s^2}$ (ακριβώς)
1 lb (πάουντ, λίμπρα) $= 0,453\ 592\ 37$ kg (ακριβώς)
1 acre $= 4840\ \mathrm{yd}^2$ (ακριβώς) $= 4064,856\ \mathrm{m}^2$
1 barrel,USA (βαρέλι,ΗΠΑ) $= 9702\ \mathrm{in}^3 = 158,9873$ L
1 lbf (πάουντ δύναμης) $= 4,448\ 222$ N
1 Btu (βρετανική μονάδα θερμότητας) $= 788,169\ \mathrm{ft\cdot lbf} = 1055,056$ J

Το a για τη μονάδα έτος προέρχεται από το annum που θα πει έτος στα λατινικά. Στα αγγλικά για το έτος χρησιμοποιούνται και τα σύμβολα 1 y και 1 yr.

Αναφέρομε εδώ ότι υπάρχουν σε χρήση οι λεγόμενοι χαρακτηριστικοί αριθμοί οι οποίοι είναι αδιάστατοι συνδυασμοί φυσικών μεγεθών. Αναφέρομε δυο από αυτούς,

Α) ο αριθμός Reynolds ο οποίος έχει ως σύμβολο το Re, ορίζεται από τη σχέση $Re = \frac{\rho \upsilon l}{\eta} = \frac{\upsilon l}{\nu}$, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ = κινηματικό ιξώδες . Ο αριθμός αυτός χρησιμοποιείται στη μελέτη της ροής ρευστών. Το υ είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα, ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, l είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος και η είναι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους (συντελεστής εσωτερικής τριβής).

Β) ο αριθμός Mach (Μαχ) ο οποίος έχει ως σύμβολο το Ma, ορίζεται από τη σχέση

$Ma = \frac{\upsilon}{c}$, υ είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα κάποιου αντικειμένου, π.χ. η ταχύτητα πυραύλου ή αεροπλάνου και c είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσον που γίνεται η

κίνηση του αντικειμένου. Τονίζομε ότι Mach δεν είναι μονάδα, γι αυτό πρέπει να μπαίνει πριν τον αριθμό. Δηλαδή λέμε το υπερηχητικό αεροπλάνο κινείται με Mach = 3.

Αυτό σημαίνει ότι κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 3\ c$, δηλαδή με ταχύτητα ίση με τρεις φορές την ταχύτητα του ήχου. Επίσης λέμε ότι κινείται με αριθμό Mach 3.

3.4 Μερικά προτεινόμενα σύμβολα για φυσικά μεγέθη

Στον Πίνακα 13 φαίνονται μερικά μεγέθη και τα προτεινόμενα σύμβολά τους, όχι υποχρεωτικά.

Πίνακας 13

Προτεινόμενα σύμβολα μερικών φυσικών μεγεθών

Μέγεθος	Σύμβολο	Μέγεθος	Σύμβολο
στροφορμή	L, J	θερμοδυναμική θερμοκρασία	T, Θ
ποσότητα ουσίας (ύλης)	$n, (\nu)$	θερμοκρασία Κελσίου	t, θ
ορμή	P	θερμοκρασία Φαρενάιτ	t_F
σταθερά Avogadro	L, N_A	ηλεκτρικό φορτίο	q, Q
ροπή αδράνειας	$I,\ J$	ηλεκτρικό ρεύμα	i, I

γραμμομοριακή μάζα	M	πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	j, J
βάρος	F_g, G, W, P	ηλεκτρικό δυναμικό	V, Φ
ροπή (δύναμης)	M	διαφορά δυναμικού	V, U
ροπή (ζεύγους)	M, T	ηλεκτρική ροή	Φ_E, Ψ
πίεση	p, P	μαγνητική ροή	Φ_B
αριθμός σωματιδίων	N	σχετική επιτρεπτότητα	ε_r, K
πυκνότητα αριθμού	n	(ή διηλεκτρική σταθερά)	
σωματιδίων		σχετική διαπερατότητα	μ_r
σχετική ατομική μάζα	A_r	μαγνητική σταθερά	μ_0
σχετική μοριακή μάζα	M_r	(διαπερατότητα του κενού)	
έργο	W	ηλεκτρική σταθερά	ε_0
ισχύς	P, N	(ή επιτρεπτότητα του κενού)	
ένταση ηλεκτρικού πεδίου	E	ένταση μαγνητικού πεδίου	H
		(ή μαγνητική διέγερση)	

3.5 Μερικά προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα

Στον Πίνακα 14 φαίνονται προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα για χρήση στις επιστήμες Μηχανικού και στη Φυσική.

Πίνακας 14

Προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα

Σύμβολο	Εφαρμογή	Σημασία
$:=, \overset{\text{def}}{=}, \overset{\text{d}}{=}$	$a := b$	το a είναι εξ ορισμού ίσο με το b, π.χ. $p := m\upsilon$
$\triangleq$	$a \triangleq b$	το a αντιστοιχεί στο b, π.χ. αν $E = kT$,

		1 eV $\triangleq$ 11 604,5 K
$\equiv$	$a \equiv b$	το πρώτο μέλος είναι ταυτοτικά ίσο με το δεύτερο,
		π.χ. $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
$\approx$	$a \approx b$	το a είναι περίπου ίσο με το b
$\simeq$	$a \simeq b$	το a είναι ασυμπτωτικά ίσο με το b
$\sim, \propto$	$a \sim b$	το a είναι ανάλογο του b
sgn	sgn z	πρόσημο του z ,
	(z γενικώς μιγαδικό)	sgn $z = z / \lvert z \rvert \quad z \neq 0$, sgn $z = 0, z = 0$
$\bar{a}$, $\langle a \rangle$		μέση τιμή του a

Στον Πίνακα 15 για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις φαίνεται το (διεθνές) σύμβολο, το όνομα στα ελληνικά και η σημασία και κάποια σχόλια

Πίνακας 15

Κυκλικές (τριγωνομετρικές) και υπερβολικές συναρτήσεις

Σύμβολο	Όνομα, σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
π	λόγος περιφέρειας κύκλου δια της διαμέτρου του	π = 3,141 592 6...
$\sin x$	ημίτονο του x	Γράφομε $(\sin x)^n$ ή $\sin^n x$.
$\cos x$	συνημίτονο του x	Γράφομε $(\cos x)^n$ ή $\cos^n x$.
$\tan x$	εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{tg}\, x$.
$\cot x$	συνεφαπτομένη του x	$\cot x = 1 / \tan x$
$\sec x$	τέμνουσα του x	$1 / \cos x$
$\csc x$	συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{cosec}\, x$. $\csc x = 1 / \sin x$
$\arcsin x$	τόξο ημιτόνου x	Αν $y = \arcsin x$ τότε $x = \sin y$ και $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.
$\arccos x$	τόξο συνημιτόνου x	Αν $y = \arccos x$ τότε $x = \cos y$ και $0 \leq y \leq \pi$.
$\arctan x$	τόξο εφαπτομένης x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{arctg}\, x$. Αν $y = \arctan x$ τότε $x = \tan y$ και $-\pi/2 < y < \pi/2$.
$\mathrm{arccot}\, x$	τόξο συνεφαπτομένης x	Αν $y = \mathrm{arccot}\, x$ τότε $x = \cot y$ και $0 < y < \pi$.

$\operatorname{arcsec} x$	τόξο τέμνουσας του x	Αν $y = \operatorname{arcsec} x$ τότε $x = \sec y$ και $0 \le y \le \pi$, $y \ne \pi/2$.
$\operatorname{arccsc} x$	τόξο συντέμνουσας x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{arccosec} x$. Αν $y = \operatorname{arccsc} x$ τότε $x = \csc y$ και $-\pi/2 \le y \le \pi/2, y \ne 0$.
$\sinh x$	υπερβολικό ημίτονο του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{sh} x$.
$\cosh x$	υπερβολικό συνημίτονο του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{ch} x$.
$\tanh x$	υπερβολική εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{th} x$.
$\coth x$	υπερβολική συνεφαπτομένη του x	$\coth x = 1 / \tanh x$
$\operatorname{sech} x$	υπερβολική τέμνουσα του x	$\operatorname{sech} x = 1 / \cosh x$
$\operatorname{csch} x$	υπερβολική συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{cosech} x$. $\operatorname{csch} x = 1 / \sinh x$
$\operatorname{arsinh} x$	αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο	Χρησιμοποιούνται και τα $\operatorname{arsh} x, \operatorname{argsh} x$.
$\operatorname{arcosh} x$	αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο του x	Χρησιμοποιούνται και τα $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{argch} x$. Αν $y = \operatorname{arcosh} x$ τότε $x = \cosh y$, $y \ge 0$.
$\operatorname{artanh} x$	αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιούνται και τα $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{argth} x$.
$\operatorname{arcoth} x$	αντίστροφη υπερβολική συνεφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{argcoth} x$. Αν $y = \operatorname{arcoth} x$ τότε $x = \coth y$ και $y \ne 0$.
$\operatorname{arsech} x$	αντίστροφη υπερβολική τέμνουσα του x	Αν $y = \operatorname{arsech} x$ τότε $x = \operatorname{sech} y$ και $y \ge 0$.
$\operatorname{arcsch} x$	αντίστροφη υπερβολική συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{arcosech} x$. Αν $y = \operatorname{arcsch} x$ τότε $x = \operatorname{csch} y$ και $y \ne 0$.

Στον Πίνακα 16 δίνονται οι εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.

Πίνακας 16

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Σύμβολο	Σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
a^x	εκθετική συνάρτηση του x με βάση το a	
e	βάση των φυσικών λογαρίθμων	$\mathrm{e} = 2,718\,281\,8...$
e^x, $\exp x$	εκθετική συνάρτηση του x με βάση το e	
$\log_a x$	λογάριθμος του x με βάση το a	Το $\log x$ χρησιμοποιείται μόνο όταν δεν χρειάζεται ο καθορισμός της βάσης.
$\ln x$	$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$, φυσικός λογάριθμος του x	
$\lg x$	$\lg x = \log_{10} x$, κοινός (δεκαδικός) λογάριθμος	
$\mathrm{lb}\, x$	$\mathrm{lb}\, x = \log_2 x$, δυαδικός λογάριθμος του x	

Σημειώνομε ότι τα ορίσματα μαθηματικών συναρτήσεων όπως των τριγωνομετρικών, των υπερβολικών τον λογαρίθμων των εκθετικών και άλλων πρέπει να είναι (καθαροί) αριθμοί, δηλαδή αδιάστατα μεγέθη, επίσης οι τιμές τους είναι καθαροί αριθμοί. Μερικές φορές μπορεί να εμφανίζεται κάπου ο λογάριθμος φυσικού μεγέθους το οποίο δεν είναι αδιάστατο, τότε όμως σίγουρα (πρέπει να) υπάρχει και άλλος λογάριθμος που αφαιρείται από τον πρώτο, ο οποίος επίσης έχει όρισμα με τις ίδιες διαστάσεις που έχει το όρισμα του προηγούμενου λογαρίθμου. Ένα παράδειγμα είναι η εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC που περιγράφεται από τη σχέση

$$V = V_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)} \quad .$$

Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\ln \frac{V}{V_0} = -\frac{t}{RC} \quad .$$

Η γραφή $\ln V = \ln V_0 - \dfrac{t}{RC}$ πρέπει να αποφεύγεται. Με χρήση της μονάδας μέτρησης της τάσης V (έστω volt, V) μπορούμε να γράψομε

$\ln\frac{V}{\mathrm{V}}$ διότι το πηλίκο $\frac{V}{\mathrm{V}}$ είναι καθαρός αριθμός.

Αντιστοίχως, για την ενέργεια μετρούμενη σε joule (J) μπορούμε να γράψομε $\ln(E/\mathrm{J})$, αν η μονάδα είναι GeV γράφομε, $\ln\left(E/\mathrm{GeV}\right)$ κτλ.

Επισήμανση: Έστω η σχέση $y = f(x)$ μεταξύ δυο φυσικών μεγεθών x, y. Η παράγωγος $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ είναι η κλίση στη θέση $x, f(x)$ τις καμπύλης που παριστάνει αυτή τη σχέση. Γενικώς αν τα x, y έχουν διαφορετικές διαστάσεις, η κλίση δεν είναι εφαπτομένη κάποιας γωνίας. Σε αυτή την περίπτωση η κλίση έχει διαστάσεις και από αυτό και μόνον δε μπορεί να είναι εφαπτομένη γωνίας, η εφαπτομένη γωνίας ($\tan\varphi$) είναι αδιάστατο μέγεθος όπως είναι και η ίδια η γωνία. Για να μπορεί η κλίση να είναι ίση με εφαπτομένη γωνίας πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω. Τα δυο μεγέθη x, y πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις, οπότε η κλίση είναι αδιάστατος αριθμός, τότε αν οι κλίμακες των αξόνων όπου γίνεται η γραφική παράσταση είναι ίδιες, η κλίση είναι η εφαπτομένη τις γωνίας που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη, στο σημείο $x, y = f(x)$, με τον άξονα x. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι η έκφραση $y = f(x)$ παριστάνει τη διαδρομή σημείου στο επίπεδο x,y και τα x, y μετριούνται σε km. Υποθέτομε ότι οι άξονες έχουν την ίδια κλίμακα (π.χ. 1 cm στον κάθε άξονα αντιστοιχεί σε 1 km μετατόπισης) , τότε η κλίση τις καμπύλης σε ένα σημείο ισούται με την εφαπτομένη τις γωνίας που αναφέραμε προηγουμένως. Στην περίπτωση γραμμικής σχέσης, $y = a\,x + b$, a, b σταθερές, η $a = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ είναι η κλίση τις σχετικής καμπύλης και είναι εφαπτομένη τις γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x όταν ισχύουν τα παραπάνω. Σημειώνομε ότι η γωνία (και η εφαπτομένη της) πρέπει να είναι αναλλοίωτα μεγέθη, δηλαδή να μην εξαρτώνται από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι αν τα μεγέθη δεν έχουν ίδιες διαστάσεις και ίδιες μονάδες μέτρησης, και κάποιος επιχειρήσει να σχεδιάσει την καμπύλη λαμβάνοντας υπόψη τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών θα διαπιστώσει ότι η κλίση και επομένως και η παραπάνω γωνία θα εξαρτώνται από τις μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών.

Στον Πίνακα 17 φαίνονται τα περί διανυσμάτων και τανυστών.

Πίνακας 17

Διανύσματα και τανυστές

Σύμβολο	Σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
$\boldsymbol{a}, \vec{a}$	διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ ($\vec{a}$)	Το $\vec{a}$ είναι βολικό για γράψιμο με το χέρι.
$a, \lvert\boldsymbol{a}\rvert$	μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	Χρησιμοποιείται και το $\lVert\boldsymbol{a}\rVert$.

$\boldsymbol{e}_a, \vec{e}_a, \hat{\boldsymbol{a}}$	μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{a}/a, \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_a$
$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{e}_i$	μοναδιαίο διάνυσμα στις κατευθύνσεις των καρτεσιανών αξόνων συντεταγμένων	
a_x, a_y, a_z a_i	καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$ $a_x\boldsymbol{e}_x$, κτλ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ είναι το διάνυσμα θέσης
∇ ή $\vec{\nabla}$	τελεστής ανάδελτα	$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ή $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$
$\nabla\varphi$, $\mathbf{grad}\ \varphi$	κλίση του φ	
$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$, $\mathrm{div}\ \boldsymbol{a}$	απόκλιση του $\boldsymbol{a}$	
$\nabla\times\boldsymbol{a}$, $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}$, $\mathbf{curl}\ \boldsymbol{a}$	στροβιλισμός του $\boldsymbol{a}$	
∇^2, Δ	λαπλασιανή	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\boldsymbol{T}$, $\vec{\vec{T}}$	τανυστής $\boldsymbol{T}$ δεύτερης τάξης	
$T_{xx}, T_{xy}, \ldots, T_{zz}$ ή T_{ij}	καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή $\boldsymbol{T}$	
$\boldsymbol{ab}$ $\quad \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$	δυαδικό γινόμενο ή τανυστικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$	
$\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$	τανυστικό γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$	εσωτερικό γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης	

$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$	εσωτερικό γινόμενο του τανυστή $\boldsymbol{T}$ δεύτερης τάξης και του διανύσματος $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S}$	βαθμωτό (scalar) γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης

Σημειώνομε εδώ ότι όταν ένα διάνυσμα είναι ίσο με μηδέν αυτό δηλώνεται με τη σχέση $\vec{A} = \vec{0}$ ή $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. Αυτό όμως δε χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές στην πράξη.

\

Στον Πίνακα 18 φαίνονται τα σχετικά με τα ποιο συνήθη συστήματα συντεταγμένων.

Πίνακας 18

Συνήθη συστήματα συντεταγμένων

Σύμβολο και όνομα	Διάνυσμα θέσης και το διαφορικό του	Σχόλια όλα τα μοναδιαία διανύσματα σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα
καρτεσιανές x, y, z	$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	
κυλινδρικές ρ, φ, z	$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$ $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$
σφαιρικές r, ϑ, φ	$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$	$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\vartheta, \varphi), \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi),$ $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$

Στον Πίνακα 19 φαίνονται τα σχετικά με τις μήτρες (πίνακες).

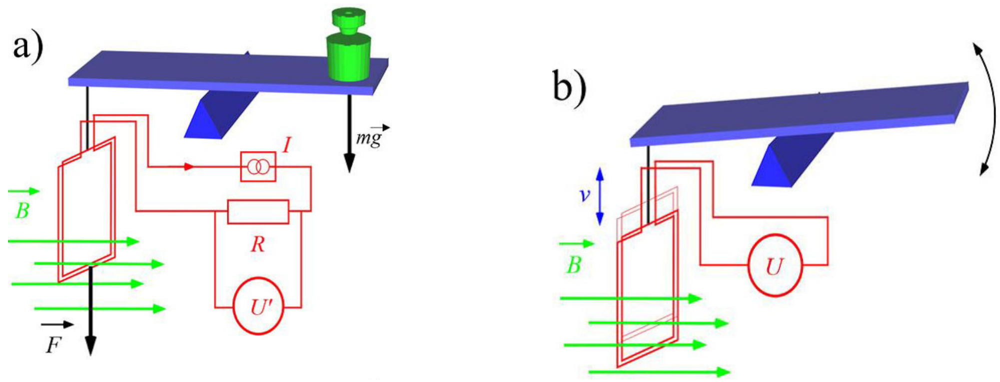
Πίνακας 19

Μήτρες ή Πίνακες

Σύμβολο	Σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
		Μπορεί να χρησιμοποιούνται κεφαλαία και πεζά γράμματα. Μπορεί να χρησιμοποιούνται αντί για παρενθέσεις αγκύλες [ ].
$\boldsymbol{A}$ ή $\begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{1n} \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ A_{m1} \ldots A_{mn} \end{pmatrix}$	μήτρα $\boldsymbol{A}$ τύπου m επί n	Χρησιμοποιείται και $\boldsymbol{A} = \left(A_{ij}\right)$.
$\boldsymbol{AB}$	γινόμενο των μητρών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$	$\left(\boldsymbol{AB}\right)_{ik} = \sum_{j} A_{ij} B_{jk}$
$\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{I}$	μοναδιαία μήτρα	
$\boldsymbol{A}^{-1}$	αντίστροφη τετραγωνικής μήτρας	
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ $\tilde{\boldsymbol{A}}$	ανάστροφη της $\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A}^{*}$	συζυγής μιγαδική της $\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ $\boldsymbol{A}^{\dagger}$	συζυγής ερμιτιανή της $\boldsymbol{A}$	
$\det \boldsymbol{A}$ ή $\begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1n} \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ A_{n1} \ldots A_{nn} \end{vmatrix}$	ορίζουσα της ορθογώνιας μήτρας $\boldsymbol{A}$	
$\mathrm{tr}\ \boldsymbol{A}$	ίχνος της τετραγωνικής μήτρας $\boldsymbol{A}$	
$\lVert \boldsymbol{A} \rVert$	νόρμ της μήτρας $\boldsymbol{A}$	μπορεί να οριστεί η νορμ με πολλούς τρόπους π.χ. $\lVert \boldsymbol{A} \rVert = \left(\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\right)^{1/2}$

3.6 Το χιλιόγραμμο και ο ζυγός του Kibble

Ο ζυγός του Kibble αρχικά λεγότανε ζυγός του watt (με την έννοια της μονάδας ισχύος watt). Είχε επινοηθεί το 1975 από τον Bryan Kibble και γι' αυτό αργότερα του έδωσαν το όνομα του. Πρόκειται για μια πολύπλοκη διάταξη που έχει υποστεί πλήθος βελτιώσεων στη διάρκεια πολλών ετών. Με τη χρήση του ζυγού συνδέεται η μονάδα μάζας με τη σταθερά του Planck, το μέτρο και το δευτερόλεπτο. Οι μονάδες μέτρο και δευτερόλεπτο έχουν ήδη οριστεί προηγουμένως ανεξάρτητα από τη μονάδα μάζας και την σταθερά του Planck. Μπορεί κάποιος να βρει λεπτομέρειες για τη συσκευή και τη λειτουργία της στη βιβλιογραφία. Εδώ θα αναφερθούμε μόνο στην αρχή λειτουργίας της, με τον πιο απλό τρόπο. Θα χρησιμοποιήσομε το πολύ απλοποιημένο Σχήμα 2 της διάταξης.



Σχήμα 2

Τα διάφορα σύμβολα είναι ευνόητο τι παριστάνουν. Ο ζυγός του Kibble έχει δυο τρόπους λειτουργίας. Στο Σχήμα 2a φαίνεται σχηματικά ο λεγόμενος στατικός τρόπος και στο Σχήμα 2b ο δυναμικός τρόπος. Στο Σχήμα 2a η μαγνητική δύναμη (δύναμη Laplace) που ασκείται στο πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, εξισορροπείται από το βάρος $m\vec{g}$ της μετρούμενης μάζας. Στο Σχήμα 2b το πηνίο κινείται κατακόρυφα με ταχύτητα $\vec{v}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και μετριέται η επαγόμενη τάση U.

Για την περίπτωση 2a έχομε

$mg = IBl$. Το l είναι το μήκος της οριζόντιας πλευράς του ορθογώνιου πηνίου.

Στην πραγματική διάταξη η γεωμετρία είναι διαφορετική, το μαγνητικό πεδίο είναι ακτινικό και το πηνίο είναι κυκλικός δακτύλιος. Για την περίπτωση 2b έχομε $U = vBl$. Το Bl είναι το ίδιο και για τις δυο περιπτώσεις, οπότε βρίσκομε τη σχέση

$UI = mgv$. Αυτό σημαίνει ότι η διάταξη οδηγεί στη σύγκριση ηλεκτρικής ποσότητας με διαστάσεις ισχύος, UI , με αντίστοιχη μηχανική ποσότητα, mgv . Η εμφάνιση του γινομένου UI εξηγεί την αρχική ονομασία ζυγός του βατ (watt). Το ρεύμα I , Σχήμα 2a, προσδιορίζεται από την τάση U' που μετριέται στα άκρα της αντίστασης R , $I = U'/R$, οπότε καταλήγομε στη σχέση

$$m = UU'/(Rgv) \ .$$

Χωρίς να μπούμε στις λεπτομέρειες απλά αναφέρομε ότι οι μετρήσεις των U, U', R γίνονται με κβαντικά πρότυπα. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση του φαινομένου Josephson όπου γίνεται χρήση μεγάλου πλήθους διεπαφών (junctions) Josephson σε σειρά για τη δημιουργία προτύπου τάσης. Θυμίζομε ότι αν μια διεπαφή Josephson ακτινοβοληθεί με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας f_{J} , στα άκρα της εμφανίζεται τάση

$U = f_{\mathrm{J}}/K_{\mathrm{J}}$, όπου $K_{\mathrm{J}} = 2e/h$ είναι η σταθερά Josephson που εξαρτάται από τις δυο σταθερές, το στοιχειώδες φορτίο e και τη σταθερά του Planck h . Επίσης γίνεται χρήση του κβαντικού φαινομένου Hall. Θυμίζομε ότι όταν εμφανίζεται αυτό το φαινόμενο η αντίσταση είναι ίση με $R = R_{\mathrm{K}}/k$, όπου R_{K} είναι η σταθερά Klitzing, $R_{\mathrm{K}} = h/e^2$ και k (στην περίπτωσή μας) είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Παρατηρούμε πως αυτή η αντίσταση δεν εξαρτάται από το υλικό. Στην περίπτωσή μας

ισχύουν οι σχέσεις, $U = nf_{\mathrm{J}}/K_{\mathrm{J}}$, $U' = n'f'_{\mathrm{J}}/K_{\mathrm{J}}$, $R = R_{\mathrm{K}}/k$, n, n' δηλώνουν το πλήθος των διεπαφών Josephson σε σειρά για να επιτευχθεί η απαιτούμενη τάση. Τελικώς έχομε τη σχέση για τη μάζα,

$$m = \frac{knn'}{4}\frac{f_{\mathrm{J}}f'_{\mathrm{J}}}{gv}h \ .$$

Γίνεται χρήση της τιμής του πεδίου βαρύτητας από μετρήσεις μεγάλης ακριβείας.

4. Σημαντικά ψηφία

Θεωρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές (οι αριθμοί) είναι γραμμένοι όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 20.

Πίνακας 20

Γραφή αριθμών

α) $\pm$**...**XXX XXX,XXX XXX...

β) $\pm$ XXX XXX XXX...

γ) $\pm$...XXX XXX, XXX XXX... $\times\ 10^n \quad n =$ ακέραιος

δ) $\pm$ XXX XXX XXX...$\times 10^n \quad n =$ ακέραιος.

Δηλαδή πρόκειται για α) ένα δεκαδικό αριθμό ή β) ακέραιο ή γ) δεκαδικό με πολλαπλασιαστή δύναμη του δέκα ή δ) ακέραιο με πολλαπλασιαστή δύναμη του δέκα.

Τα σημαντικά ψηφία του αριθμού είναι αυτά που σημειώνονται στον Πίνακα 20 με ...XXX....

Με τον όρο σημαντικά θεωρούνται γενικώς εκείνα από τα ψηφία ...XXX... του αριθμού τα οποία είναι λίγο πολύ «γνωστά». Δεν θα σχολιάσομε περισσότερο αυτό το θέμα. Θα θεωρούμε ότι οι δεδομένοι αριθμοί είναι γραμμένοι με όλα τα **...**XXX... που είναι τα σημαντικά τους ψηφία.

Υπάρχουν οι εξής συμβατικοί κανόνες σχετικά με τα σημαντικά ψηφία.

α) Όλα τα μη μηδενικά ψηφία ενός αριθμού είναι σημαντικά ψηφία.

β) Τα μηδέν μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά.

γ) Τα μηδέν πριν από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεν είναι σημαντικά ψηφία.

δ) Τα μηδέν μετά το τελευταίο ψηφίο που δεν είναι ίσο με μηδέν είναι σημαντικά μόνον αν υπάρχει το σημάδι των δεκαδικών στον αριθμό. Αυτός ο κανόνας είναι καλό να τηρείται διότι στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει γενικώς ασάφεια ως προς πόσα από τα τελευταία μηδενικά είναι σημαντικά. Συνιστάται η χρήση κατάλληλου πολλαπλασιαστή που είναι δύναμη του δέκα.

Σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες έχομε για τους αριθμούς που ακολουθούν το αντίστοιχο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

1,35	3 σημαντικά ψηφία
-0,107	3 σημαντικά ψηφία
0,050 20	4 σημαντικά ψηφία
-500	1 σημαντικό ψηφίο
500,0	4 σημαντικά ψηφία
50×10^1	1 σημαντικό ψηφίο
5×10^2	1 σημαντικό ψηφίο
$1,520\times10^5$	4 σημαντικά ψηφία
152 000	3 σημαντικά ψηφία
$-1,7\times10^{-4}$	2 σημαντικά ψηφία

Μερικές φορές, για ευκολία, αναφέρεται στο κείμενο ότι τα σημαντικά ψηφία είναι (π.χ.) 3 και δεν τηρούνται ακριβώς οι παραπάνω κανόνες γραφής. Επίσης μερικές φορές για ευκολία (κακώς) τα μηδενικά στο τέλος θεωρούνται ότι είναι πάντοτε σημαντικά ψηφία.

Η ομαδοποίηση ανά τρία ψηφία είναι θέμα επιλογής. Δεν ακολουθείται σε μερικές ειδικές εφαρμογές όπως σε σχέδια μηχανικών, σε κείμενα οικονομικών και σε γραπτά που πρόκειται να διαβαστούν από υπολογιστή.

Στην περίπτωση αριθμών που υπάρχουν σε κάποιο πίνακα καλό είναι να μην αλλάζει ο τρόπος γραφής μέσα σε μια στήλη. Συνήθως αν η στήλη περιέχει μόνο ακέραιους τα τελικά ψηφία του αριθμού κάθε σειράς βρίσκονται το ένα κάτω από το άλλο. Αν έχομε δεκαδικούς το πρόσημο των δεκαδικών είναι το ένα κάτω από το άλλο.

Ένα άλλο που αξίζει να σημειώσομε είναι η περίπτωση αριθμών που σημειώνονται σε άξονες συστημάτων συντεταγμένων όπου απεικονίζονται γραφικές παραστάσεις. Οι αριθμοί που σημειώνονται θεωρούνται ακριβείς, χωρίς αβεβαιότητα. Τέλος αν αναφέρεται ότι κάποια (αριθμητική) τιμή είναι ακριβής δεν παίζει ρόλο η γραφή της. Ένα παράδειγμα είναι ότι η τεχνική σταθερά είναι $K_{\mathrm{cd}} = 683\ \mathrm{lm\,W^{-1}}$ ακριβώς, δηλαδή αυτή η γραφή δε σημαίνει ότι τα σημαντικά ψηφία είναι μόνο τρία. Θα έλεγε κάποιος ότι η αριθμητική τιμή είναι γνωστή με «άπειρα» σημαντικά ψηφία, τα οποία μετά το 3 είναι όλα μηδέν.

Αν έχομε τον αριθμό 0,516 784 252 και θέλομε να τον στρογγυλοποιήσομε ώστε να έχει τρία σημαντικά ψηφία τότε τον αντικαθιστούμε με τον «πλησιέστερό» του αριθμό με τρία σημαντικά. Αυτός είναι ο 0,517. Αυτή είναι στρογγυλοποίηση προς τα άνω διότι ο τελικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του αρχικού. Ο αριθμός 1,723 στρογγυλοποιείται σε αριθμό με δυο σημαντικά που είναι ο 1,7. Τώρα έχομε στρογγυλοποίηση προς τα κάτω διότι ο τελικός αριθμός είναι μικρότερος του αρχικού. Αν έχομε τον αριθμό 1,75 και πρέπει να τον στρογγυλέψομε σε δυο σημαντικά, τότε μπορούμε να τον στρογγυλέψομε προς τα πάνω και να πάρομε τον 1,8 ή προς τα κάτω και να πάρομε τον 1,7. Συνήθως προτιμούμε την πρώτη λύση η οποία έχει καθιερωθεί να γίνεται στους υπολογιστές. Μια άλλη μέθοδος είναι να κάνομε τη στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο αριθμό με το τελευταίο ψηφίο ζυγό. Αυτό βοηθά σε περιπτώσεις όπως όταν έχομε να επεξεργαστούμε σειρά από πολλά δεδομένα οπότε η διαδικασία αυτή οδηγεί σε μικρότερα σφάλματα στρογγυλοποίησης διότι (σχεδόν) οι μισές στρογγυλοποιήσεις θα είναι προς τα πάνω και οι άλλες μισές προς τα κάτω.

Πολλές φορές έχομε αριθμητικές τιμές που είναι γνωστές με άπειρα σημαντικά ψηφία. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι ο αριθμός είναι (π.χ.) 2 ακριβώς. Συνήθως αυτό φαίνεται από τα «συμφραζόμενα» π.χ. $2L$, εδώ το 2 είναι ακριβώς και όχι με μόνο ένα σημαντικό ψηφίο όπως φαίνεται εκ πρώτης όψεως. Το π θεωρείται γνωστό με άπειρα σημαντικά ψηφία, παρόλο που σε πράξεις μπορεί να χρησιμοποιούμε λίγα σημαντικά ψηφία του. Στις περιπτώσεις που η γραφή δεν ακολουθεί όσα είπαμε για σημαντικά ψηφία στηριζόμαστε στην «κοινή» λογική μας για την κατανόηση του τι εννοείται.

Θα πούμε δυο λόγια για το πλήθος των σημαντικών ψηφίων που έχει ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση δυο ή περισσοτέρων αριθμών οι οποίοι δίνονται με συγκεκριμένα σημαντικά ψηφία. Ο ένας αριθμός έχει το ελάχιστο πλήθος από σημαντικά ψηφία από τους άλλους, ο αριθμός που προκύπτει δε μπορεί να έχει περισσότερα σημαντικά από αυτό το ελάχιστο πλήθος. Στην πράξη λαμβάνεται να έχει αυτό το ελάχιστο πλήθος σημαντικών. Προφανώς μπορεί περισσότεροι του ενός να έχουν το ελάχιστο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Παραδείγματα

$0,851 \times 0,80 = 0,68$
$-3,25 \times 0,21 \,/\, 0,8 = -0,9$
$0,0752 \,/\, 0,012 = 6,3$
$1,35 \times 10^4 \times (0,73 \,/\, (0,2 \times 10^1)) \times 10^2 = 0,5 \times 10^2$.

Τώρα θα μιλήσομε για τον αριθμό που προκύπτει από την πρόσθεση και αφαίρεση δυο ή περισσότερων δεδομένων αριθμών. Ξέρομε τα σημαντικά ψηφία του κάθε αριθμού. Στη συνέχεια, ανεξάρτητα από πόσα και ποια είναι τα σημαντικά ψηφία του αριθμού τον γράφομε ως δεκαδικό (ή ακέραιο) χωρίς πολλαπλασιαστή. Ο γραμμένος αριθμός διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά. Το πρώτο σημαντικό ψηφίο ενός αριθμού το οποίο είναι και το ψηφίο της ανώτερης τάξης είναι το πιο αριστερό του σημαντικό ψηφίο, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του αριθμού είναι το πιο δεξιό του σημαντικό ψηφίο και είναι το ψηφίο της κατώτερης τάξης.

Σε αυτή την περίπτωση αυτό που χρειάζεται να εξετάσομε είναι η τάξη του τελευταίου σημαντικού ψηφίου κάθε αριθμού (ελάχιστη τάξη ψηφίων του αριθμού). Βρίσκομε τελικώς την μέγιστη από αυτές τις ελάχιστες τάξεις για όλους τους αριθμούς. Ο αριθμός που είναι το αποτέλεσμα των προσθέσεων και αφαιρέσεων δε μπορεί να έχει ψηφία με μικρότερη τάξη από αυτή τη μέγιστη τάξη. Στην πράξη παίρνομε ψηφία μέχρι και τη μέγιστη τάξη.

Παραδείγματα

10,001 ελάχιστη τάξη 10^{-3} (χιλιοστά)

0,0003 ελάχιστη τάξη 10^{-4} (δέκατα του χιλιοστού)

0,85 ελάχιστη τάξη 10^{-2} (εκατοστά)

Μέγιστη τάξη μεταξύ αυτών είναι η 10^{-2} (εκατοστά),

άρα 10,001 + 0,0003 - 0,85 = 9,15

124 ελάχιστη τάξη 10^{0} (μονάδες)

$5,0 \times 10^2$ ελάχιστη τάξη 10^1 (δεκάδες), βλέπε παρακάτω

7,8 ελάχιστη τάξη 10^{-1} (δέκατα)

Μέγιστη τάξη αυτών των αριθμών είναι 10^1 (δεκάδες) άρα

$124 - 5{,}0 \times 10^2 + 7{,}8 = -3{,}7 \times 10^2$.

Εξηγούμε τι συμβαίνει με τον αριθμό $5{,}0 \times 10^2$. Σε αυτόν τον αριθμό υπάρχουν δυο σημαντικά ψηφία το 5 και το διπλανό του, προς τα δεξιά μας, 0.

Ο αριθμός σε μορφή δεκαδικού, εδώ ακέραιου, είναι 500. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μόνο τα δυο πρώτα ψηφία είναι σημαντικά, άρα η ελάχιστη τάξη είναι η τάξη του μηδενός που είναι δίπλα στο 5, δηλαδή η τάξη των δεκάδων οπότε

$5{,}0 \times 10^2$ ελάχιστη τάξη 10^1 (δεκάδες).

Όταν κάνομε πολλές πράξεις στρογγυλοποιούμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα όχι τους αριθμούς στα ενδιάμεσα βήματα.

5. Συνοπτικός πρακτικός οδηγός χρήσης του SI

Η τυποποίηση έχει σκοπό να αποτελέσει μια διεθνή γλώσσα της επιστήμης και της τεχνολογίας, την οποία να καταλαβαίνουν όλοι ανεξάρτητα από τη γλώσσα που χρησιμοποιούν και τη γραφή της γλώσσας τους. Η τυποποίηση δεν είναι υποχρεωτική σε όλη της την έκταση, απλά αποτελεί μια σύσταση. Όμως, ειδικά τα σύμβολα των μονάδων είναι ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ τα ίδια ανεξάρτητα του πως προφέρεται το όνομα της μονάδας και πως γράφεται στις διάφορες γλώσσες.

Ξεκινούμε με τη γραφή αριθμών. Το σύμβολο των δεκαδικών είναι το κόμμα (,) ή η κάτω τελεία (.) . Στις διάφορες γλώσσες γίνεται χρήση του ενός ή του άλλου. Στην Ελλάδα (στα Ελληνικά) έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιείται το κόμμα. Συνηθίζεται στα Αγγλικά κείμενα (σίγουρα σε Βρετανία και ΗΠΑ) να χρησιμοποιείται η τελεία. Ειδικά για αριθμούς με πολλά ψηφία, συνηθίζεται χωρίς να είναι υποχρεωτικό, ομάδες τριών ψηφίων να διαχωρίζονται με κενά. Συνιστάται για αυτό το διαχωρισμό να μη χρησιμοποιείται κανένα σύμβολο. Δηλαδή να μην χρησιμοποιούνται κάτω τελείες στις γραφές με το κόμμα ως σύμβολο των δεκαδικών, ούτε κόμματα στις γραφές με κάτω τελεία ως δεκαδικό σύμβολο. Όταν δεν ακολουθείται αυτή η πρακτική μπορεί να οδηγηθούμε σε σύγχυση και αμφιβολία όσον αφορά στο τι παριστάνει ο αριθμός. Για παράδειγμα συνιστάται να γράφομε στην ελληνική γραφή, 345 784 655

579,438 675

$306{,}370 \times 10^3$

Επειδή όταν γράφομε με το χέρι είναι δύσκολο να βάζομε κενά, κάποιοι χρησιμοποιούν στο πάνω μέρος το σημάδι του μαρκαρίσματος δηλαδή γράφουν $57^{\vee}782^{\vee}890{,}508^{\vee}59$, δηλαδή

$57^{\vee}782^{\vee}890{,}508^{\vee}59$

Αυτό μέχρι σήμερα δεν έχει υιοθετηθεί διεθνώς. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιείται κάτι πολύ διαφορετικό που να μην είναι ούτε η κάτω τελεία ούτε το κόμμα. Πολλές φορές γράφουν όλα τα ψηφία το ένα δίπλα στο άλλο χωρίς κενό, τότε στην περίπτωση πολλών ψηφίων είναι αδύνατο να καταλάβει κάποιος τι παριστάνει ο αριθμός, για παράδειγμα 42962006722369437801,25 . Οι ομαδοποίηση ανά τρία ψηφία ξεκινά από το δεκαδικό σύμβολο, αν υπάρχει, και προχωρούν προς τα μεγαλύτερης τάξης και προς τα μικρότερης τάξης ψηφία. Σε έναν ακέραιο οι τριάδες ξεκινούν από το μικρότερης τάξης ψηφίο 35 894 653.

Αν ο αριθμός είναι ακέραιος με τέσσερα ψηφία αυτά μπορεί να μην χωρίζονται σε μια τριάδα ψηφίων και σε ένα ψηφίο, αλλά μπορεί να γράφονται και ως τετράδα

π.χ. 3475 ή 3 475 .

Ανεξάρτητα αν ακολουθείται αυτός ο κανόνας ή όχι πάντα γράφομε τις χρονολογίες με τα τέσσερα ψηφία μαζί, για παράδειγμα 1821 ή 2022, όχι 1 821 ή 2 022.

Επίσης, αν στον αριθμό υπάρχει σημάδι δεκαδικών και τέσσερα μόνο ψηφία μετά από αυτό, τότε μπορεί να γράφονται και ως τετράδα, π.χ. 23 692,7041 ή 23 692,704 1 . Το ίδιο ισχύει αν υπάρχουν μόνο τέσσερα ψηφία πριν το σημάδι των δεκαδικών, δηλαδή μπορούμε να γράψομε 3482,556 ή 3 482,556. Μερικοί βάζουν τα τέσσερα τελευταία ψηφία αριθμού μαζί.

Είπαμε ότι μεταξύ αριθμητικής τιμής και μονάδας μέτρησης υπάρχει διάστημα (κενό). Αυτό ισχύει και για τα μαθηματικά σύμβολα $=$, $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $\times$, $\cdot$., π.χ. $l = 35$ m . Αυτό δεν ισχύει για το πρόσημο αριθμών, π.χ. $+65$, -32, ± 76 .

Επίσης γράφομε 75 % .

Στους βαθμούς Κελσίου κτλ, γράφομε τη μονάδα ως εξής

$^{\circ}\mathrm{C}$, οπότε έχομε $t = \ -32\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Το kelvin έχει ως σύμβολο το K και δεν αναφέρεται ως βαθμοί Κέλβιν, απλώς λέμε

35 kelvin (κέλβιν), 35 K .

Εξαίρεση του κανόνα του διαστήματος (κενού) υπάρχει στις περιπτώσεις των παρακάτω μονάδων γωνιών όπως φαίνεται στα αντίστοιχα παραδείγματα.

5° , $4'$, $8''$.

Τα σύμβολα των μεγεθών (ποσοτήτων) είναι συνήθως ένα γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου ανεξάρτητα από τη γλώσσα του κειμένου, με πλάγια γραφή. Μπορεί τα σύμβολα να έχουν δείκτες ή άλλα σημάδια διαφοροποίησης. Αν ο δείκτης αντιπροσωπεύει μια φυσική ποσότητα είναι γραμμένος ως πλάγιο σύμβολο, οι άλλοι δείκτες είναι με όρθια γραφή. Οι αριθμοί δείκτες είναι όρθιοι, όμως γράμματα δείκτες που παριστάνουν αριθμούς γράφονται πλάγια. Παραδείγματα φαίνονται παρακάτω

C_{g} (g: gas)	C_p (p: pressure)
g_{n} (n: normal)	$\sum_n a_n \theta_n$ (n: τρέχων δείκτης)
μ_{r} (r: relative)	$\sum_x a_x \theta_x$ (x: τρέχων δείκτης)
E_{k} (k: kinetic)	g_{ik} (i,k: τρέχοντες δείκτες)
χ_{e} (e: electric)	p_x (x: συντεταγμένη $-x$)
$T_{1/2}$ (1/2: μισό)	I_λ (λ: πλάγιο διότι είναι το μήκος κύματος)

Γινόμενα (βαθμωτών, μονόμετρων) ποσοτήτων γράφονται όπως παρακάτω.

$ab,\ a\,b,\ a \cdot b,\ a \times b$.

Για διανύσματα έχομε τα γνωστά $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Η διαίρεση δυο ποσοτήτων μπορεί να δείχνεται ως εξής

$\frac{a}{b},\ a/b,\ ab^{-1}$. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί σε περιπτώσεις που οι ποσότητες είναι πηλίκα ή γινόμενα άλλων ποσοτήτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις το σημάδι / της διαίρεσης δεν πρέπει να ακολουθείται από σημάδι πολλαπλασιασμού ή σημάδι διαίρεσης στην ίδια γραμμή εκτός αν χρησιμοποιηθεί παρένθεση για την αποφυγή ασάφειας.

Παραδείγματα είναι τα παρακάτω.

$$\frac{ab}{c} = ab/c = abc^{-1}$$

$$\frac{a/b}{c} = (a/b)/c = ab^{-1}c^{-1}, \text{ όχι } a/b/c$$

όμως γράφομε $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{ad}{bc}$

$$\frac{a}{bc} = a/(b \cdot c) = a/bc \text{ αλλά όχι } a/b \cdot c$$

Όταν μπορεί να υπάρξουν αμφιβολίες καλό είναι να χρησιμοποιούνται κατάλληλα παρενθέσεις.

Όπως είπαμε τα διεθνή σύμβολα των μονάδων είναι υποχρεωτικά. Τα σύμβολα των μονάδων με ειδικό όνομα (και ειδικό σύμβολο) είναι υποχρεωτικά όρθια γράμματα πεζά και δεν γράφονται στον πληθυντικό. Εξαίρεση για λόγους ιστορικούς είναι ότι η θεμελιώδης μονάδα για τη μάζα είναι το χιλιόγραμμο με σύμβολο που αποτελείται από δυο πεζά γράμματα kg , επίσης χρησιμοποιούνται δυο ή περισσότερα γράμματα όταν υπάρχει και άλλη μονάδα με το ίδιο σύμβολο και γενικώς για αποφυγή παρανοήσεων.

Τα δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια (τα προθέματα) του χιλιογράμμου σχηματίζονται με το σύμβολο του γραμμαρίου.

Κατ' εξαίρεση το πρώτο γράμμα στο σύμβολο της μονάδας είναι με κεφαλαίο αν προέρχεται από κύριο όνομα. Προφανώς στην αρχή της πρότασης το πρώτο γράμμα συμβόλου ή ονόματος είναι κεφαλαίο όπως και σε τίτλους κεφαλαίων.

Επίσης για το λίτρο μπορεί να χρησιμοποιείται και το κεφαλαίο L αντί του μικρού l για να μην υπάρχει σύγχυση με τον αριθμό ένα, 1.

Τα ονόματα των μονάδων γράφονται με μικρά γράμματα ακόμη και αν προέρχονται από κύρια ονόματα. Παρακάτω φαίνονται διάφορα πολύ γνωστά παραδείγματα.

m (meter, μέτρο)
s (second, δευτερόλεπτο)
A (ampere, αμπέρ)
Wb (weber, βέμπερ)
W (watt, βατ έχει επικρατήσει στα ελληνικά αντί του αγγλικού ουάτ)
kg (kilogram, χιλιόγραμμο)
V (volt, βολτ)
Ω (ohm, ωμ)
S (siemens, ζήμενς)
H (henry, χένρυ)
J (joule, τζουλ)
L,l (liter, λίτρο)
lm (lumen, λούμεν)
lx (lux, λουξ)
rad (radian, ακτίνιο)
sr (steradian, στερακτίνιο)
N (newton, νιούτον)

Γράφομε $V = 240\ \mathrm{V}$, που σημαίνει ότι η τάση V (φυσικό μέγεθος με πλάγιο σύμβολο) ισούται με 240 V, η μονάδα είναι το volt (βολτ) με σύμβολο V όρθιο γράμμα. Για διανυσματικά μεγέθη μπορούμε να γράψομε
$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (3\ \mathrm{N},\ -2\ \mathrm{N},\ 5\ \mathrm{N}) = (3, -2,\ 5)\ \mathrm{N}$.

Στην περίπτωση συνδυασμού συμβόλων μονάδων, ισχύουν τα παρακάτω.

$\mathrm{N \cdot m}$ $\mathrm{N\ m}$ ή και Nm. Η τελευταία περίπτωση θέλει προσοχή διότι για παράδειγμα αν γράψομε mN αυτό σημαίνει millinewton και όχι μέτρο επί νιούτον.

Έχομε και εκφράσεις μονάδων όπως οι παρακάτω.

$\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ \mathrm{m/s},\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Τα σύμβολα των προθεμάτων είναι όρθια και κολλητά με την μονάδα που ακολουθεί.

Δεν χρησιμοποιούνται δυο προθέματα μαζί.

Η αριθμητική τιμή και το σύμβολο της μονάδας είναι αλγεβρικό γινόμενο και ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της άλγεβρας. Διάφορα παραδείγματα είναι,

$1\ \mathrm{nm} = 10^{-9}\ \mathrm{m}$ όχι $1\mathrm{m\mu m}$

$1\ \mathrm{cm}^3 = \left(10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^3 = 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$

$1\ \mu\mathrm{s}^{-1} = \left(10^{-6}\ \mathrm{s}\right)^{-1} = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$

$1\ \mathrm{kA/m} = \left(10^3\ \mathrm{A}\right)/\mathrm{m} = 10^3\ \mathrm{A/m}$

Οι εκφράσεις για αθροίσματα και διαφορές γράφονται ως εξής

$l = 12\,\mathrm{m} - 7\,\mathrm{m} = (12-7)\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$

$t = 28{,}4\ {}^\circ\mathrm{C} \pm 0{,}2\ {}^\circ\mathrm{C} = (28{,}4 \pm 0{,}2)\ {}^\circ\mathrm{C}$

(όχι $28{,}4 \pm 0{,}2\ {}^\circ\mathrm{C}$)

$\lambda = 220 \times (1 \pm 0{,}02)\ \mathrm{W/(m\cdot K)}$

Το σύμβολο % υποδηλώνει τον αριθμό 0,01 επομένως έχομε

$R_1 = R_2(1 + 0{,}5\ \%) = R_2(1+0{,}5 \times 0{,}01) = R_2(1 + 0{,}005) = 1{,}005R_2$

Καλό είναι να αποφεύγεται η χρήση ονομάτων των μονάδων στις περιπτώσεις που γίνονται πράξεις μεταξύ των τιμών των φυσικών μεγεθών. Όταν είναι αναγκαία η χρήση ονομάτων των μονάδων αντί των διεθνών συμβόλων τους, τα ονόματα αν είναι στη γλώσσα του υπόλοιπου κειμένου μπορεί να είναι και στον πληθυντικό. Αν στην ελληνική, χρησιμοποιείται το όνομα με προφορά ή γραφή άλλης γλώσσας από την ελληνική το όνομα δεν κλίνεται, ούτε χρησιμοποιείται στον πληθυντικό.

Σημειώνομε ότι οι μονάδες lux, hertz, siemens που δεν έχουν πληθυντικό.

Οι διάφοροι κανόνες φαίνονται στα παρακάτω.

Στα ελληνικά λέμε και γράφομε 5 αμπέρ ανά δευτερόλεπτο ή στα αγγλικά 5 amperes per second . Πολλές φορές χρησιμοποιούνται εκφράσεις και γραφές όπως 5 αμπερ / δευτερόλεπτο ή 5 amperes / second. Καλό είναι, όσο το δυνατόν, να μη γίνεται χρήση τέτοιων εκφράσεων. Δηλαδή, γράφομε 60 μέτρα ανά (ή το) λεπτό αλλά καλό είναι να αποφεύγεται το 60 μέτρα / λεπτό κτλ.

Μπορεί σε ελληνικό κείμενο να γράψομε 65 χιλιόγραμμα ή 65 kilogram, το τελευταίο χωρίς πληθυντικό.

Λέμε και γράφομε σε όλες τις γλώσσες 200 W. Στα αγγλικά μπορούμε να γράψομε 200 watt , ή 200 watts. Στα ελληνικά γράφομε 200 watt ή 200 βατ, χωρίς πληθυντικό .

Όταν οι μονάδες χρησιμοποιούνται με το πλήρες όνομα σε κάποια γλώσσα, τα προθέματα γράφονται «ολογράφως» με πεζά γράμματα, δηλαδή χιλιόμετρο ή kilometer , επίσης μεγαπασκάλ ή megapascal .

Για παράγωγες μονάδες όπως η $\mathrm{Pa\,s} = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ επιτρέπονται εκφράσεις όπως pascal second ή pascal-second ή πασκάλ δευτερόλεπτο και πασκάλ-δευτερόλεπτο .

Επίσης στα αγγλικά χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως meter per second squared, square centimeter, ampere per square meter, kilogram per cubic meter. Τα αντίστοιχα στα ελληνικά είναι μέτρα ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο, τετραγωνικό εκατοστό ή εκατοστό στο τετράγωνο, κυβικό χιλιοστό, αμπέρ ανά τετραγωνικό μέτρο, χιλιόγραμμο ανά κυβικό μέτρο .

Τονίζομε τα παρακάτω σχετικά με μαθηματικά σύμβολα. Τα σύμβολα των μεταβλητών όπως x, y κτλ, επίσης τα σύμβολα που παριστάνουν τρέχοντες ακέραιους αριθμούς όπως το i στο $\sum_i x_i$, γράφονται με πλάγια. Επίσης παράμετροι όπως *a,b,* κτλ που μπορεί να θεωρηθούν σταθερές σε κάποιες περιπτώσεις, συμβολίζονται με πλάγια γραφή. Το ίδιο ισχύει για συναρτήσεις με τη γενική έννοια της συνάρτησης, π.χ. f, g κτλ.

Όμως μια καθορισμένη μαθηματική συνάρτηση γράφεται με όρθια γραφή. Παραδείγματα, sin, cos, exp, ln, Γ .

Επίσης μαθηματικές σταθερές των οποίων η τιμή δεν αλλάζει γράφονται με όρθια σύμβολα, π.χ. $\mathrm{e} = 2{,}718\ 281\ 8...$, $\pi = 3{,}141\ 592\ 6...$, i (ή j) όπου $\mathrm{i}^2 = -1$.

Επίσης τελεστές γράφονται με όρθια γραφή, π.χ. div, ∇ , δ στο δx και τα d στις παραγώγους, όπως $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Παρόλο που δεν είναι απαραίτητο είναι καλό πολλές φορές να μπαίνουν παρενθέσεις στα ορίσματα συναρτήσεων για να μη δημιουργούνται αμφιβολίες, για παράδειγμα $\sin \pi x$ και $\sin(\pi x)$. Στην πρώτη περίπτωση καλό είναι να υπάρχει το μικρό διάκενο που φαίνεται. Οι ειδικές συναρτήσεις όπως οι $\mathrm{J}_l(x)$, $\mathrm{N}_l(x)$, $\mathrm{P}_l(x)$ κτλ γράφονται με όρθια σύμβολα.

Καλό είναι, παρόλο που όπως αναφέραμε ξανά δεν είναι υποχρεωτικό, να χρησιμοποιούνται όσο γίνεται τα συνιστώμενα σύμβολα και για τα μεγέθη. Όμως μπορεί να υπάρχουν αποκλίσεις, διότι διάφορα μεγέθη μπορεί να έχουν το ίδιο σύμβολο. Αν υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση από τα προτεινόμενα σύμβολα καλό είναι να υπάρχει σαφής υπόδειξη στο κείμενο. Στην περίπτωση των μονάδων τα σύμβολα έχουν οριστεί μονοσήμαντα, υποχρεωτικά.

Τέλος, αναφέρομε ότι λέμε λόγος δυο φυσικών μεγεθών αν τα μεγέθη που διαιρεί το ένα το άλλο είναι όμοια οπότε ο λόγος είναι αδιάστατο μέγεθος (είναι αριθμός), αντιστοίχως λέμε πηλίκο δυο μεγεθών αν διαιρούμε ανόμοια μεγέθη οπότε το πηλίκο έχει διαστάσεις. Ο λόγος είναι ειδική περίπτωση του πηλίκου.

Στη συνέχεια λέμε λίγα λόγια για τα σύμβολα τα σχετικά με τα χημικά στοιχεία, τα νουκλίδια και τα στοιχειώδη σωματίδια. Τα σύμβολα των χημικών στοιχείων και των νουκλιδίων γράφονται με όρθια γράμματα, το πρώτο είναι κεφαλαίο. Παραδείγματα είναι,

$$\mathrm{Ca}\,(\text{ασβέστιο}), \mathrm{C}\,(\text{άνθρακας}), \mathrm{H}\,(\text{υδρογόνο}), \mathrm{He}\,(\text{ήλιο}), \mathrm{N}\,(\text{άζωτο}), \mathrm{Be}\,(\text{βηρύλιο}), \mathrm{B}\,(\text{βόριο}).$$

Ο αριθμός νουκλεονίων (μαζικός αριθμός, βαρυονικός αριθμός) ενός νουκλιδίου γράφεται ως αριστερός πάνω δείκτης, π.χ. ${}^{14}\mathrm{N}$, ${}^{16}\mathrm{O}$. Χρησιμοποιείται αριστερός κάτω δείκτης για να δηλωθεί ο αριθμός των πρωτονίων, π.χ. ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Μερικές φορές στα νουκλίδια δηλώνεται με κάτω δεξιό δείκτη και ο αριθμός των νετρονίων τους. Αυτός ο αριθμός υπολογίζεται από τους δυο προηγούμενους αλλά μερικές φορές είναι χρήσιμο να υπάρχει, έτσι έχομε ${}^{235}_{92}\mathrm{U}_{143}$.

Η σύσταση του ISO είναι, όλα τα σωματίδια, να συμβολίζονται όπως τα νουκλίδια και τα χημικά στοιχεία με όρθια γράμματα. Τα σύμβολα μπορεί να είναι πεζά ή κεφαλαία. Μερικά σύμβολα και ονόματα στα ελληνικά και αγγλικά είναι αυτά που φαίνονται παρακάτω.

φωτόνιο photon	γ	νουκλεόνιο nucleon	N
νετρίνο neutrino	$\nu, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	νετρόνιο neutron	n
ηλεκτρόνιο electron	e, β	πρωτόνιο proton	p $({}^{1}\mathrm{H}^{+})$
μιόνιο muon	μ	δευτέριο deuteron	d $({}^{2}\mathrm{H}^{+})$
ταόνιο tauon	τ	τρίτιο triton	t $({}^{3}\mathrm{H}^{+})$
σωματίδιο ταυ		ήλιο helion	h $({}^{3}\mathrm{He}^{2+})$
πιόνιο pion	π	σωματίδιο άλφα alpha particle	α $({}^{4}\mathrm{He}^{2+})$

Ο δεξιός άνω δείκτης δείχνει το φορτίο σε μονάδες του στοιχειώδους φορτίου το οποίο ισούται με το φορτίο του πρωτονίου. Ανάλογα ισχύουν και για τα άλλα σωματίδια.

Όμως αυτός ο συμβολισμός δεν έχει γίνει καθολικά αποδεκτός από την κοινότητα των Φυσικών Στοιχειωδών Σωματιδίων (ή Φυσικών Υψηλών Ενεργειών, ΦΥΕ). Για παράδειγμα, στις επίσημες δημοσιεύσεις του CERN δεν τηρείται αυτός ο συμβολισμός, με την έννοια ότι τα σύμβολα γράφονται με πλάγια γράμματα. Η πιο ολοκληρωμένη δημοσίευση που περιέχει όλα τα σχετικά με τα Στοιχειώδη Σωματίδια είναι το Review of Particle Physics , particle data group (PDG) που εκδίδεται περιοδικά από το Institute of Physics. Μερικά βιβλία σε αυτό το αντικείμενο ακολουθούν τον συμβολισμό που συνιστά ο ISO.

Ας αναφερθούμε λίγο στην ονοματολογία διαφόρων εννοιών.

Μερικά από όσα ακολουθούν σχετίζονται λίγο πολύ με κανόνες γραμματικής και συντακτικού διαφόρων γλωσσών, αλλά είναι δικές μας απόψεις.

Λέμε και γράφομε Joule effect και στα ελληνικά φαινόμενο Τζουλ . Το αρχικό γράμμα είναι κεφαλαίο επειδή στο φαινόμενο έχει δοθεί ως όνομα το όνομα κάποιου προσώπου, συνήθως προς τιμή του ανθρώπου που ανακάλυψε το φαινόμενο. Το ίδιο ισχύει για περιπτώσεις όπως Lagrange equations, εξισώσεις Λαγκρανζ. Compton effect, φαινόμενο Κόμπτον. Μπορούμε όμως να πούμε και εξισώσεις του Λαγκράνζ, φαινόμενο του Compton κτλ

Αν κάνομε το ίδιο στα ελληνικά με ελληνικά ονόματα προσώπων τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά, δε μπορούμε να πούμε το φαινόμενο Παπαδόπουλος, είναι πιο αποδεκτή η έκφραση το φαινόμενο του Παπαδόπουλου, δηλαδή το φαινόμενο που τιμητικά έχει το όνομά του αφού εκείνος το ανακάλυψε. Μπορούμε να πούμε Papadopoulos effect. Δε μπορούμε να πούμε η εξίσωση Παπαδόπουλος αλλά η εξίσωση του Παπαδόπουλου, όμως λέμε Papadopoulos equation, κτλ.

Όταν από τη ρίζα του ονόματος προσώπου δημιουργείται όνομα φυσικού μεγέθους τότε το όνομα του φυσικού μεγέθους γράφεται με το πρώτο γράμμα πεζό. Για παράδειγμα λέμε lagrangian, λαγκρανζιανή.

Τα ονόματα των χημικών στοιχείων, των νουκλιδίων και των σωματιδίων γράφονται με το πρώτο γράμμα τους πεζό. Αυτό ισχύει και αν ακόμη το όνομα προέρχεται από όνομα προσώπου. Το σύμβολο γράφεται με το διεθνή συμβολισμό του, με όρθια γράμματα, και το πρώτο του γράμμα (αν υπάρχουν περισσότερα από ένα στο σύμβολο) είναι κεφαλαίο. hydrogen υδρογόνο, H , helium ήλιο, He , fermium φέρμιο, Fm, mendelevium μεντελέβιο, Md, americium αμερίκιο, Am, pion πιόνιο, π, proton πρωτόνιο, p, επίσης κατηγορίες σωματιδίων όπως fermion φερμιόνιο, boson μποζόνιο.

5.1 Για το σωματίδιο χιγγς

Θα πούμε δυο λόγια για το σωματίδιο higgs εκφράζοντας κυρίως και δικές μας απόψεις. Το καθιερωμένο σύμβολο είναι το H. Αν αναφερόμαστε σε περισσότερα από ένα τέτοια σωματίδια χρησιμοποιείται για τα επιπλέον και το h. Το σωματίδιο έχει πάρει το όνομά του από τον επιστήμονα Peter Higgs. Σε αυτή την περίπτωση δεν ακολουθήθηκε ο κανόνας που ακολουθείται για τα νουκλίδια και τα χημικά στοιχεία όπου το όνομα του προσώπου αποτελεί τη ρίζα για το όνομα που προκύπτει. Αν γίνονταν αυτό, το σωματίδιο θα μπορούσε να λέγεται higgson και στα ελληνικά χιγγσόνιο. Στην περίπτωσή μας το όνομα του προσώπου έγινε όνομα του σωματιδίου. Έχει επικρατήσει διεθνώς το όνομα του σωματιδίου στη μορφή Higgs, με το πρώτο γράμμα κεφαλαίο. Δηλαδή έχει επικρατήσει ότι ισχύει για φαινόμενα που αναφέραμε προηγουμένως Όμως αυτό είναι όνομα σωματιδίου δεν είναι όνομα φαινομένου και καλό είναι να μην γίνεται εξαίρεση σε σχέση με όλα τα άλλα σωματίδια, επομένως αναλογικά καλό είναι να γράφεται higgs, ελληνικά χιγγς, με το πρώτο γράμμα πεζό.

Η ανακάλυψή του από τα πειράματα ATLAS και CMS στο CERN το 2012 οδήγησε στο να δοθεί το Νόμπελ Φυσικής (2013) στους François Englert και Peter Higgs. Συνεργάτης του Englert ήταν ο Robert Brout ο οποίος όταν έγινε η επιλογή για το Νόμπελ είχε πεθάνει. Σίγουρα αν ζούσε το Νόμπελ θα δίνονταν και στους τρεις.

Είναι γεγονός ότι έχει καθιερωθεί μεταξύ των επιστημόνων το όνομα higgs, όμως αξίζει να δούμε την ανακοίνωση της επιτροπής για το Νόμπελ που λέει γιατί δόθηκε στους δυο ανωτέρω επιστήμονες το βραβείο. Η ανακοίνωση λέει “ for the theoretical discovery of the mechanism that contributes to our understanding of the origin of mass of subatomic particles, and which recently was confirmed through the discovery of the predicted fundamental particle, by the ATLAS and CMS experiments at CERN’s Large Hadron Collider”. Στην ανακοίνωση στους δημοσιογράφους χρησιμοποιείται η έκφραση «the so called Higgs particle», δηλαδή «το λεγόμενο σωματίδιο Χιγγς». .

Η καθιέρωση αυτού του ονόματος αδικεί τους άλλους δυο επιστήμονες. Γι’ αυτό το λόγο μερικοί επιστήμονες δίνουν στο σωματίδιο και τα τρία ονόματα μαζί, δηλαδή Brout Engler Higgs (BEH), αλλά αυτό δεν έχει επικρατήσει. Η θεωρία στην οποία στηρίζεται η ύπαρξη του σωματιδίου οφείλεται στην ερευνητική δουλειά, κυρίως των ανωτέρω τριών επιστημόνων (όμως υπάρχουν και άλλοι που έχουν σημαντική συμβολή). Αυτό το όνομα επικράτησε από πολύ νωρίς, για διάφορους λόγους. Ενδιαφέροντα είναι όσα έχει αναφέρει σχετικά με αυτό το θέμα ο Frank Close.

Είναι καλό που, τουλάχιστο, για το σχετικό μηχανισμό, σήμερα τείνει να επικρατήσει ο όρος Brout-Englert-Higgs (BEH) mechanism . Επίσης χρησιμοποιείται η έκφραση Brout-Englert-Higgs (BEH) field, πεδίο Brout-Englert-Higgs (πεδίο BEH). Αυτό είναι παρόμοιο με αυτό που έχει καθιερωθεί και στην περίπτωση των Glashow- Iliopoulos-Maiani, με τη χρήση του όρου GIM mechanism.

Θα ήταν καλύτερα, το σωματίδιο να είχε όνομα που να σχετίζεται με την κύρια δουλειά που κάνει στη φύση, δηλαδή σχετίζεται με τη μάζα στοιχειωδών σωματιδίων. Μια επιλογή για το όνομα θα ήταν να λέγεται heavyon (χέβιον, βαρόνιο) που σημαίνει ότι σχετίζεται με τη μάζα θεμελιωδών σωματιδίων και επίσης αρχίζει με το γράμμα h που είναι αυτό που έχει καθιερωθεί. Όμως αυτό είναι προσωπική μας άποψη και επομένως δε νομίζομε πως μπορεί να καθιερωθεί διεθνώς.

5.2 Σχόλια για το ισχύον Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI)

Αυτό το SI το οποίο στηρίζεται σε σταθερές ορισμού, είναι κατά κάποιο τρόπο ένα πιο θεμελιώδες σύστημα σε σχέση με άλλα συστήματα μονάδων. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσομε ότι ενώ υπάρχει κάποια αυθαιρεσία στην επιλογή των φυσικών σταθερών που μπορεί να χρησιμοποιηθούν, υπάρχει το ερώτημα αν ένα ειδικό σύνολο σταθερών που επιλέγεται είναι επαρκές για να ορίσει ένα σύστημα μονάδων. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί γραμμική άλγεβρα για να ελεγχθεί η πληρότητα ενός συγκεκριμένου συνόλου σταθερών και για να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών συνόλων σταθερών και μονάδων.

Αυτό έχει γίνει για το σημερινό SI, το οποίο πράγματι είναι επαρκές για τον ορισμό συστήματος μονάδων και αναφέρεται στη βιβλιογραφία.

Αναφέρομε επίσης ότι μπορεί να γίνει μέτρηση μαζών της τάξης μεγέθους του χιλιόγραμμου βασισμένη σε κβαντικές σταθερές και στους ορισμούς του ισχύοντος SI, όπου οι σταθερές h, e και επομένως και οι K_J, R_K έχουν ακριβείς τιμές. Αυτό, όπως είπαμε, μπορεί να γίνει με χρήση του ζυγού βατ (watt balance), σήμερα λέγεται ζυγός του Kibble (Kibble balance).

Σημειώνομε επίσης ότι κάποιες σταθερές που είχαν τιμές ακριβώς στο παλιό SI, στο σημερινό έχουν τιμές κοντά στις παλιές αλλά αυτές προσδιορίζονται από μετρήσεις άρα δεν είναι ακριβώς, έχουν αβεβαιότητες. Άλλες σταθερές, που εξαρτώνται μόνο από κάποιες από τις επτά σταθερές αναφοράς, έχουν τιμές ακριβώς, χωρίς αβεβαιότητες. Στον Πίνακα 21 δίνομε ενδεικτικά τις σημερινές (Μάιος 2022) τιμές κάποιων σταθερών που ήταν ακριβώς στο παλιό SI ενώ στο ισχύον έχουν τιμές με αβεβαιότητες. Αυτές οι τιμές θα αλλάξουν στο μέλλον, όταν γίνουν καινούργιες, καλύτερες μετρήσεις.

Θυμίζομε ότι στο παλιό SI η μαγνητική σταθερά ορίζονταν ως $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$ ακριβώς. Σήμερα μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση $\mu_0 = \dfrac{4\pi\alpha\hbar}{e^2 c}$, όπου έχομε σταθερές με τιμές ακριβώς και τη σταθερά α η οποία είναι η σταθερά λεπτής υφής που (είναι καθαρός αριθμός και) σχετίζεται με την «ισχύ, ένταση» της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης και καθορίζεται πειραματικά υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Η σημερινή της τιμή είναι $7{,}297\ 352\ 569\ 3(11) \times 10^{-3} = 1/137{,}035\ 999\ 084(21)$. Στη συνέχεια η ηλεκτρική σταθερά μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right)$. Η θερμοδυναμική θερμοκρασία δεν ορίζεται με βάση τη θερμοκρασία T_{TPW} του τριπλού σημείου του νερού την οποία θεωρούσαν ίση με 273,16 K ακριβώς. Σήμερα η θερμοδυναμική θερμοκρασία ορίζεται με βάση τη σταθερά Boltzmann, οπότε η θερμοκρασία του τριπλού σημείου του νερού προσδιορίζεται πειραματικά και έχει αβεβαιότητα. Η γραμμομοριακή μάζα του $^{12}\mathrm{C}$ λαμβάνονταν ίση με 12 g / mol ακριβώς. Στο σημερινό SI το ποσό ουσίας ορίζεται με βάση τη σταθερά Avogadro που θεωρείται γνωστή ακριβώς. Αυτό έχει ως συνέπεια η παραπάνω γραμμομοριακή μάζα να βρίσκεται πειραματικά και η τιμή της να έχει αβεβαιότητα. Παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητες είναι πολύ μικρές και δεν επηρεάζουν την καθημερινή χρήση των μονάδων.

Πίνακας 21

Σταθερά	Τιμή και αβεβαιότητα
$\mu_0/(4\pi\times10^{-7})$	$1{,}000\ 000\ 000\ 55(15)\ \mathrm{N\,A^{-2}}$
$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8{,}854\ 187\ 812\ 8(13)\times10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$
T_{TPW}	$273{,}160\ 00(25)\,\mathrm{K}$
γραμμομοριακή μάζα του $^{12}\mathrm{C}$	
$M(^{12}\mathrm{C})$	$11{,}999\ 999\ 995\ 8(36) \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}$

6. Διαστατική ανάλυση

Με τη διαστατική ανάλυση μπορούμε να βρούμε λύση ενός προβλήματος ή να ανάγομε ένα πρόβλημα σε απλούστερο ακόμη και όταν δεν έχομε θεωρία που να μας λύνει το πρόβλημα και να μας οδηγεί στις κατάλληλες εξισώσεις.

Θα σχολιάσομε την επιλογή των θεμελιωδών μεγεθών (ή μεγέθη αναφοράς) και των αντίστοιχων θεμελιωδών μονάδων τους (ή μονάδες αναφοράς). Για τον κλάδο της Μηχανικής θεμελιώδη μεγέθη με τις αντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες τους έχουν θεωρηθεί από παλιά η μάζα, M , το μήκος , L , και ο χρόνος, T . Αυτά χαρακτηρίζονται από τις αντίστοιχες διαστάσεις $\mathsf{M}, \mathsf{L}, \mathsf{T}$. Οι ερωτήσεις που προκύπτουν είναι,

1. Η παραπάνω επιλογή είναι ικανή για την περιγραφή της δομής των μονάδων όλων των φυσικών ποσοτήτων της Μηχανικής;

2. Γιατί επιλέξαμε αυτά τα μεγέθη ως θεμελιώδη;

Σχετικά με το 1 αναφέρομε ότι, έχει προκύψει εμπειρικά πως όλη η δομή της Κλασικής Μηχανικής μπορεί να αναπτυχθεί με την παραπάνω επιλογή, ενώ όλα τα άλλα (παράγωγα) μεγέθη μπορεί να καθοριστούν από τις γνωστές μαθηματικές σχέσεις που τα συνδέουν με τα παραπάνω θεμελιώδη μεγέθη. Οι διαστάσεις τους (ή η διάστασή τους) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των $\mathsf{M}, \mathsf{L}, \mathsf{T}$. Επίσης οι μονάδες των παράγωγων μεγεθών της Μηχανικής μπορεί να εκφραστούν ως συναρτήσεις των μονάδων των παραπάνω θεμελιωδών μεγεθών. Αυτή η επιλογή είναι ικανή.

Όμως η επιλογή αυτή δεν είναι αναγκαία, μπορεί να επιλεγούν τρεις άλλες ποσότητες ως θεμελιώδεις. Για παράδειγμα μπορεί να επιλεγεί η τριάδα δύναμη, F , μήκος, L , και χρόνος, T . Οι διαστάσεις θα είναι τότε $\mathsf{F}, \mathsf{L}, \mathsf{T}$. Αν επεκταθούμε και σε άλλες περιοχές της Φυσικής όπως της θερμότητας, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, τότε είναι βολικό να εισαχθούν και άλλα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη και αντίστοιχες μονάδες, δηλαδή έχομε εκτεταμένες ομάδες θεμελιωδών μεγεθών. Αυτό δεν είναι γενικώς αναγκαίο διότι μπορεί να γραφτούν σχέσεις που συνδέουν αυτές τις νέες ποσότητες με τις τρεις θεμελιώδεις που αναφέραμε. Όμως υπάρχουν διάφοροι λόγοι που οδηγούν στη χρήση εκτεταμένων ομάδων θεμελιωδών μεγεθών. Μια από τις αιτίες είναι ότι συστήματα μονάδων με λίγες θεμελιώδεις μονάδες είναι στείρα με την έννοια ότι δεν είναι πρόσφορα για τη διαστατική ανάλυση. Επίσης διαστατικοί εκθέτες σε συστήματα με λίγα θεμελιώδη μεγέθη μπορεί να μην είναι ακέραιοι, πράγμα που δεν είναι καταδικαστέο αλλά προτιμούμε να έχομε όσο γίνεται περισσότερους ακέραιους διαστατικούς εκθέτες, αυτό μας φαίνεται πιο φυσιολογικό.

Είδαμε ότι στα πλαίσια της Μηχανικής η επιλογή των συγκεκριμένων θεμελιωδών μεγεθών M, L, T είναι εμπειρική, αλλά δεν είναι ούτε αναγκαία ούτε στηρίζεται σε κάποια βαθύτερα θεωρητικά αίτια. Όμως πρέπει να τονιστεί ότι η επιλογή των τριών θεμελιωδών μεγεθών δε μπορεί να είναι τελείως αυθαίρετη. Για παράδειγμα αν διαλέξομε ως θεμελιώδη μεγέθη το μήκος, L, το χρόνο, T, και την ταχύτητα, V, τότε σε ένα τέτοιο σύστημα δεν θα μπορούσαμε να ορίσομε μεγέθη που περιέχουν μάζα. Πρέπει οι επιλεγόμενες θεμελιώδεις ποσότητες να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και να μην είναι δυνατόν να εκφραστούν συναρτήσει των άλλων με τους μαθηματικούς τύπους που χαρακτηρίζουν το σύστημα των φυσικών μεγεθών με το οποίο εργαζόμαστε. Ας εξετάσομε την περίπτωση με τα προηγούμενα τρία θεμελιώδη μεγέθη. Έστω ότι τα νέα θεμελιώδη μεγέθη είναι τα P,Q,R με διαστάσεις αντιστοίχως $\mathsf{P},\mathsf{Q},\mathsf{R}$. Έστω ότι συνδέονται με τα (ανεξάρτητα) θεμελιώδη μεγέθη M,L,T με τις σχέσεις

$$P = \xi_1 M^a L^b T^c$$
$$Q = \xi_2 M^d L^e T^f$$
$$R = \xi_3 M^g L^h T^i$$

όπου ξ_1, ξ_2, ξ_3 (καθαροί) αριθμοί .

Οι σχέσεις διαστάσεών τους είναι,

$$\mathsf{P} = \mathsf{M}^a \mathsf{L}^b \mathsf{T}^c$$
$$\mathsf{Q} = \mathsf{M}^d \mathsf{L}^e \mathsf{T}^f$$
$$\mathsf{R} = \mathsf{M}^g \mathsf{L}^h \mathsf{T}^i$$

Οι εκθέτες είναι οι διαστατικοί εκθέτες. Μπορούμε επίσης να γράψομε για τις αντίστοιχες μονάδες τους

$$[P] = [M^a L^b T^c]$$
$$[Q] = [M^d L^e T^f]$$
$$[R] = [M^g L^h T^i] \ .$$

Αποδεικνύεται με επιχειρηματολογία της γραμμικής άλγεβρας, ότι για να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους τα νέα θεμελιώδη μεγέθη P,Q,R και οι μονάδες τους, πρέπει να ισχύει για την παρακάτω ορίζουσα των διαστατικών εκθετών η σχέση

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Αν η ορίζουσα είναι μηδέν τότε τα νέα μεγέθη δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως θεμελιώδη διότι συνδέονται με κάποιες σχέσεις μεταξύ τους. Με άλλα λόγια δε μπορούν τα παλιά μεγέθη να εκφραστούν συναρτήσει των νέων, δηλαδή οι παραπάνω σχέσεις δεν αντιστρέφονται. Στην περίπτωση που τα τρία μεγέθη είναι το μήκος (διάσταση L) , ο χρόνος (διάσταση T) και η ταχύτητα (διάσταση V) τότε

$$\mathsf{L} = \mathsf{M}^0\mathsf{L}^1\mathsf{T}^0$$
$$\mathsf{T} = \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^1$$
$$\mathsf{V} = \mathsf{M}^0\mathsf{L}^1\mathsf{T}^{-1}$$

Άρα $a = 0,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 0,\ e = 0,\ f = 1,\ g = 0,\ h = 1,\ i = -1$.

Οπότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως αυτές οι ποσότητες δεν είναι ανεξάρτητες. Αυτό είναι προφανές από το γεγονός ότι έχομε δεχτεί ότι ισχύει η γνωστή σχέση, δηλαδή υπάρχει η εξάρτηση, $\upsilon = l/t$. Πάντα σε ένα σύστημα μεγεθών υπάρχουν συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των φυσικών μεγεθών.

Μπορούμε να πούμε ότι η επιλογή του συνόλου των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να είναι τέτοια που,

Α) κανένα μέλος του συνόλου δε μπορεί να παραχθεί από άλλο ή άλλα μέλη του συνόλου αυτού και

Β) κάθε ποσότητα που δεν ανήκει στο σύνολο αυτό μπορεί να παραχθεί από αυτό το σύνολο.

Τότε αυτό το σύνολο των μεγεθών λέγεται πλήρες σύνολο φυσικών μεγεθών.

Οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ φυσικών μεγεθών είναι (διαστατικά) ομογενείς (ομοιογενείς). Αυτό σημαίνει ότι όταν περιέχονται αθροίσματα ή διαφορές διαφόρων όρων πρέπει οι όροι να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Επίσης αν έχομε μια εξίσωση μεταξύ εκφράσεων που περιέχουν διάφορες φυσικές ποσότητες πρέπει το πρώτο και το δεύτερο μέλος να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Αυτή είναι η αρχή της (διαστατικής) ομογένειας (ομοιογένειας). Σε αυτή την αρχή βασίζεται σε γενικές γραμμές η διαστατική ανάλυση.

Αν μετά από διάφορους υπολογισμούς καταλήξομε σε μια σχέση μεταξύ φυσικών μεγεθών και βρούμε ότι η σχέση δεν είναι ομογενής με την ανωτέρω έννοια, τότε σίγουρα είναι λάθος σχέση. Αντιστρόφως, αν είναι (διαστατικά) ομογενής δεν θα πει ότι είναι και σωστή.

Μπορεί να γραφτούς σχέσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών που είναι σωστές αλλά δεν είναι ομογενείς (δηλαδή είναι σαν να προσθέτουν πρόβατα και αυγά). ένα παράδειγμα είναι:

$s + \upsilon = \frac{1}{2}gt^2 + gt$. Ουσιαστικά πρόκειται για δυο εξισώσεις που η κάθε μια από μόνη της είναι ομογενής, δεν είναι όμως το άθροισμά τους. Πράγματι ομογενείς είναι οι δυο σχέσεις:

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad \upsilon = gt.$$

Μπορεί να κατανοήσει κάποιος γιατί στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης πρέπει το όρισμα να είναι αδιάστατο δηλαδή (καθαρός) αριθμός. Έχομε

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ Αν το x δεν είναι αδιάστατο δε μπορούμε να προσθέσομε τους όρους της σειράς γιατί έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Ανάλογα ισχύουν και για διάφορες άλλες συγκεκριμένες (ειδικές) μαθηματικές συναρτήσεις.

Στη διαστατική ανάλυση έχομε να απαντήσομε στο πρόβλημα που ακολουθεί.

Σε ένα σύστημα μεγεθών, πως εξαρτάται η τιμή μιας (παράγωγης) ποσότητας από τις τιμές άλλων ποσοτήτων οι οποίες θεωρούνται ως θεμελιώδεις; Δηλαδή πρέπει να βρούμε μια σχέση της μορφής $Q = \phi(Q_1, Q_2, \ldots Q_n)$. Αρχικά θεωρούμε ότι η συνάρτηση ϕ μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή. Όμως υπάρχουν διάφορες μαθηματικές διαδικασίες που μας οδηγούν στο ότι η εξάρτηση είναι της μορφής $Q_\alpha = \xi_\alpha Q_1^{\alpha 1}, Q_2^{\alpha 2}, \ldots Q_\nu^{\alpha \nu}$.

Οι διαδικασίες είναι λίγο διαφορετικές η μια από την άλλη, αλλά η ουσία στο βάθος είναι πως πρέπει οι σχέσεις να έχουν ομοιογένεια. Η ομοιογένεια ορίζεται μαθηματικά ως η απαίτηση οι σχέσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών να είναι ίδιες ανεξάρτητα από ποιες είναι οι θεμελιώδεις μονάδες. Αποδεικνύεται μαθηματικά ότι αν μια φυσική ποσότητα είναι άθροισμα πολλών όρων, τότε πρέπει ο κάθε όρος να έχει τις ίδιες διαστάσεις ίδιες με αυτές της φυσικής ποσότητας. Αυτό εξασφαλίζει την ομοιογένεια της σχέσης.

Εννοείται ότι αναφερόμαστε σε σύστημα φυσικών μεγεθών (δηλαδή μεγεθών που δεν είναι μεγέθη κατάταξης). Επίσης εννοείται ότι αναφερόμαστε στο ίδιο πλήθος θεμελιωδών μεγεθών για τα οποία μπορεί να ορίζονται διαφορετικές θεμελιώδεις μονάδες. Μια καθαρά μαθηματική διαδικασία στηρίζεται στο θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass. Σύμφωνα με αυτή την πρόταση, κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με όσο καλή προσέγγιση όσο θέλομε, με ένα άθροισμα όρων όπως φαίνεται παρακάτω.

$$Q = \xi_\alpha Q_1^{\alpha 1}, Q_2^{\alpha 2}, \ldots Q_\nu^{\alpha \nu} + \xi_\beta Q_1^{\beta 1}, Q_2^{\beta 2}, \ldots Q_\nu^{\beta \nu} + \xi_\gamma Q_1^{\gamma 1}, Q_2^{\gamma 2}, \ldots Q_\nu^{\gamma \nu} \ldots$$

Επειδή πρέπει ο κάθε όρος του αθροίσματος να έχει ίδιες διαστάσεις (αφού υπάρχει ομοιογένεια της σχέσης), θα έχομε

$\alpha 1 = \beta 1 = \gamma 1 \ldots \ \alpha 2 = \beta 2 = \gamma 2 \ldots \ \alpha 3 = \beta 3 = \gamma 3 \ldots$ κτλ

Τελικώς $Q = \xi Q_1^{\alpha 1}, Q_2^{\alpha 2}, \ldots Q_\nu^{\alpha \nu} \quad \xi = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k =$ καθαρός αριθμός.

Μια άλλη αντιμετώπιση είναι με χρήση της λεγόμενης απαίτησης που ο Bridgman ονόμασε αρχή της «απόλυτης σημασίας της σχετικής τιμής» (absolute significance of relative magnitude). Αυτή η αρχή λέει ότι: το πηλίκο (ο λόγος) των αριθμητικών τιμών δυο συγκεκριμένων μεγεθών ίδιου είδους είναι ανεξάρτητο από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί εύκολα σε απλές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, έστω ότι τα μήκη δυο συγκεκριμένων ράβδων μετριούνται σε μέτρα (m) και η μια έχει μήκος $l_1 = 3,4$ m και η άλλη $l_2 = 6,8$ m. Στη συνέχεια τις μετριούνται σε εκατοστόμετρα (cm) οπότε έχομε $l_1' = 3,4 \times 10^2$ cm και $l_2' = 6,8 \times 10^2$ cm.

Είναι σαφές ότι οι λόγοι των αριθμητικών τιμών είναι ίδιοι και για τις δυο περιπτώσεις: $3,4/6,8 = 3,4 \times 10^2/(6,8 \times 10^2) = 0,5$.

Αυτή η απλή απαίτηση με κάποια μαθηματική διαδικασία οδηγεί στο ότι για την ανωτέρω σχέση έχομε ξανά την παραπάνω σχέση:

$$Q = \xi Q_1^{\alpha 1}, Q_2^{\alpha 2}, \ldots Q_\nu^{\alpha \nu} \quad \xi = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k = \text{καθαρός αριθμός}.$$

Στην ουσία αυτή η αρχή είναι ίδια με την αρχή της ομοιογένειας που αναφέραμε παραπάνω.

Είναι ευνόητο ότι για τις μονάδες έχομε $[Q] = \left[Q_1^{\alpha 1} Q_2^{\alpha 2} Q_3^{\alpha 3} \ldots\right]$.

Το πρόβλημα στη διαστατική ανάλυση είναι να βρούμε από ποια μεγέθη εξαρτάται το Q. Δηλαδή ποιες ποσότητες σχετίζονται με το πρόβλημά μας. Σε αυτό το σημείο μπορεί να γίνουν σημαντικά λάθη και τότε η μέθοδος δίνει λάθος αποτέλεσμα.

Δεν πρέπει να αγνοηθεί καμιά ποσότητα που μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα ακόμη και αν στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζομε έχει σταθερή τιμή. Σε αυτές τις ποσότητες μπορεί να συμπεριλαμβάνονται ποσότητες (μεγέθη) που είναι φυσικές σταθερές και έχουν διάσταση, π.χ. η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G, η σταθερά του Planck κτλ. Από την άλλη πλευρά δεν βοηθά σε τίποτα να εισάγονται μεγέθη που δεν έχουν σχέση με το πρόβλημα που εξετάζομε. Για παράδειγμα, σε πρόβλημα που σχετίζεται με ισορροπία ρευστού δεν χρειάζεται να εισαχθεί το ιξώδες το οποίο είναι μέγεθος που σχετίζεται με κίνηση. Επίσης δε χρειάζονται μεγέθη που έχουν έμμεση σχέση με το πρόβλημα. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία μπορεί να επηρεάζει την πυκνότητα ή την (ηλεκτρική) αντίσταση όταν αυτά τα μεγέθη εισέρχονται άμεσα στο πρόβλημα, οπότε δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η θερμοκρασία. Σε άλλες περιπτώσεις που υπάρχει ροή θερμότητας η θερμοκρασία είναι απαραίτητη.

Υπάρχουν βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία μας (και στα Ελληνικά), που περιέχουν πλήθος παραδειγμάτων όπου γίνεται χρήση της διαστατικής ανάλυσης για λύση προβλημάτων που καλύπτουν όλα τα πεδία της επιστήμης από την κλασική ως την ποιο σύγχρονη.

Η διαστατική ανάλυση δε λύνει πλήρως ένα πρόβλημα αλλά το ανάγει σε απλούστερο, όπου χρειάζεται να ολοκληρωθεί με προσδιορισμό πολύ λιγότερων παραμέτρων από ότι στο αρχικό πρόβλημα. Αυτό είναι μεγάλη ευκολία για περιπτώσεις που είναι δύσκολο να βρεθούν αναλυτικοί τύποι (σχέσεις) από τη λύση δύσκολων εξισώσεων της θεωρίας, ή μπορεί να μην υπάρχει σχετική θεωρία.

6.1 Μέθοδος Rayleigh

Η μέθοδος Rayleigh είναι η μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευκολότερα από όλους τους ενδιαφερόμενους. Αυτή στηρίζεται στο ότι, όπως είπαμε, πρέπει να υπάρχει ομοιογένεια στις σχέσεις μεταξύ των φυσικών ποσοτήτων, συγκεκριμένα ισχύει γενικώς:

$$Q = \xi Q_1^{\alpha 1}, Q_2^{\alpha 2}, \ldots Q_\nu^{\alpha \nu} \quad \xi = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k = \text{καθαρός αριθμός}.$$

α) Θα ασχοληθούμε με ένα απλό πρόβλημα της Μηχανικής, το πρόβλημα του απλού εκκρεμούς του οποίου ξέρομε τη λύση. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε στη σχέση της περιόδου του εκκρεμούς συναρτήσει διαφόρων χαρακτηριστικών του εκκρεμούς.

Εικάζομε ότι τα μεγέθη που επηρεάζουν την περίοδο του εκκρεμούς, που ως φυσικό μέγεθος παριστάνεται με το σύμβολο τ, είναι το μήκος του l, η μάζα του m, η ένταση του πεδίου βαρύτητας g και το πλάτος αιώρησής του, δηλαδή η γωνία εκτροπής φ (σε μονάδες του SI, ακτίνια). Επομένως ψάχνομε για τη σχέση $\tau = \phi(l,m,g,\varphi)$. Το τ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ενώ τα άλλα μεγέθη είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, με την έννοια ότι η μεταβολή της κάθε μιας από αυτές δεν επηρεάζει τις άλλες, όσον αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα (τη σχέση που γράψαμε για το εκκρεμές). Σύμφωνα με όσα έχομε πει ο καθένας όρος από το άθροισμα που σχετίζεται με το ανάπτυγμα της παραπάνω σχέσης οδηγεί στην έκφραση για τον κάθε όρο $\tau = kl^a m^b g^c \varphi^d$.

Για τις διαστάσεις έχομε την αντίστοιχη σχέση $\mathsf{T}^1 = \mathsf{L}^a \mathsf{M}^b \left(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}\right)^c 1^d$.

Η διαστατική ομογένεια οδηγεί τελικώς στις τιμές $c=-1/2, a=1/2, b=0$. Ο εκθέτης d που σχετίζεται με το αδιάστατο μέγεθος που είναι η γωνία φ, δε μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαστατική ανάλυση. Το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Με όσα έχομε πει, καταλήγομε στο ότι η περίοδος μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα όρων δηλαδή στη μορφή:

$\tau = \left(\dfrac{l}{g}\right)^{1/2} \sum_n k_n \varphi^{d_n}$. Το άθροισμα μπορεί να γραφτεί ως μια (άγνωστη) αδιάστατη συνάρτηση $\phi_1(\varphi)$, οπότε τελικώς καταλήγομε στη σχέση για την περίοδο

$$\tau = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \phi_1(\varphi).$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από τη μάζα, βρήκαμε τη σωστή εξάρτηση από το μήκος και την ένταση της βαρύτητας, όπως δίνει και η αναλυτική λύση, αλλά με τη διαστατική ανάλυση δε μπορούμε να προσδιορίσομε την τιμή της αδιάστατης πολλαπλασιαστικής σταθεράς $\phi_1(\varphi)$. Η αναλυτική λύση του προβλήματος οδηγεί στο ότι για μεγάλου πλάτους αιωρήσεις η τιμή της σταθεράς ϕ_1 έχει πολύπλοκη εξάρτηση από τη γωνία εκτροπής, συγκεκριμένα, ισχύει:

$$\phi_1(\varphi) = 2\pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\kappa\right)^2 + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\kappa^2\right)^2 + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\kappa^3\right)^2 + \ldots\right]$$

όπου $\kappa = \sin\dfrac{1}{2}\varphi$.

Για σχετικά μικρές τιμές της γωνίας εκτροπής φ ισχύει $\phi_1 = 2\pi$, δηλαδή για μικρού πλάτους αιωρήσεις η περίοδος είναι ανεξάρτητη της γωνίας εκτροπής.

Μπορεί κάποιος να αντιμετωπίσει το πιο απλό πρόβλημα του εκκρεμούς για μικρού πλάτους αιωρήσεις, οπότε δεν συμπεριλαμβάνει στα ανεξάρτητα μεγέθη τη γωνία εκτροπής. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μόνο ένας όρος του αθροίσματος. Αυτό οδηγεί εύκολα στο ότι $\tau = K\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$, όπου K είναι απροσδιόριστη αδιάστατη σταθερά. Όπως είπαμε η τιμή της που υπολογίζεται αναλυτικά και είναι 2π. Αυτή η περίπτωση εξετάζεται ακόμη και σε βιβλία Φυσικής μέσης εκπαίδευσης.

Βλέπομε από τα προηγούμενα ότι για την περίπτωση των αιωρήσεων μικρού πλάτους μπορούμε να γράψομε τη σχέση:

$$\frac{\tau^2 g}{l} = K^2 = \text{αδιάστατη ποσότητα} \quad .$$

Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση ο νόμος για την αιώρηση του απλού εκκρεμούς μπορεί να γραφτεί στη μορφή όπου υπεισέρχεται μια αδιάστατη ποσότητα η οποία είναι συνδυασμός ποσοτήτων, που μάλιστα είναι σταθερή .

β) Ένα άλλο απλό παράδειγμα είναι η εξίσωση Torricelli.

Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία εκρέει (ασυμπίεστο) υγρό από μια μικρή τρύπα στο κάτω μέρος δεξαμενής μεγάλης διατομής σε σχέση με τη διατομή της τρύπας. Το ύψος της επιφάνειας του υγρού, στη δεξαμενή, από την τρύπα είναι δεδομένο και επίσης η επιτάχυνση (ένταση) της βαρύτητας καθώς και η πυκνότητα του υγρού.

Θεωρούμε εύλογο να υποθέσομε ότι η ταχύτητα υ εξαρτάται από τα ανωτέρω μεγέθη, δηλαδή τα h, g, ρ . Θα έχομε

$$\upsilon = k h^a g^b \rho^c \quad .$$

Θεμελιώδη μεγέθη θεωρούμε τα L, M, T . Οι διαστάσεις των h, g, ρ είναι: $\mathrm{L}, \mathrm{LT}^{-2}, \mathrm{ML}^{-3}$ και της ταχύτητας υ είναι LT^{-1}, επομένως η διαστατική εξίσωση είναι:

$\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{L}^a(\mathrm{LT}^{-2})^b(\mathrm{ML}^{-3})^c$. Από αυτήν βρίσκομε: $a = b = 1/2 \quad c = 0$.

Τελικώς $\upsilon = k\sqrt{gh}$. Η αδιάστατη σταθερά k μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά ή (εδώ) μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά και είναι $k = \sqrt{2}$.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψομε τη σχέση του Torricelli στη μορφή

$\dfrac{\upsilon^2}{gh} = k^2 =$ αδιάστατη σταθερά . Δηλαδή η έκφραση μπορεί να πάρει μορφή που εξαρτάται από συνδυασμό μεταβλητών ο οποίος είναι μια αδιάστατη ποσότητα (τέτοιες ποσότητες λέγονται χαρακτηριστικοί αριθμοί) που εδώ είναι μια σταθερά. Αυτή η αδιάστατη ποσότητα $Fr = \dfrac{\upsilon^2}{gh}$ λέγεται αριθμός Froude.

γ) Σε αυτό το παράδειγμα, θα υπολογίσομε την περίοδο περιφοράς περί το κέντρο μάζας του, δυο ουρανίων σωμάτων που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης.

Θεωρούμε τα σώματα ότι είναι υλικά σημεία. Είναι εύλογο να υποθέσομε ότι η περίοδος τ εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων m_1, m_2, από κάποια απόσταση μεταξύ τους r που είναι ένα είδος μέσης τιμής (γενικώς η μεταξύ τους απόσταση μεταβάλλεται με το χρόνο) και την παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας G (υποθέτομε ότι στο σύστημα μονάδων που εργαζόμαστε έχει διαστάσεις). Σύμφωνα με όσα είπαμε:

$\tau = k m_1^a m_2^b r^c G^d$ όπου k αδιάστατη σταθερά.

Για τις διαστάσεις της παγκόσμιας σταθεράς έχομε

$$\dim G = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2} \ .$$

Η εξίσωση διαστάσεων για την προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\mathrm{T}^1 = \mathrm{M}^a\mathrm{M}^b\mathrm{L}^c\left(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}\right)^d = \mathrm{M}^{a+b-d}\mathrm{L}^{c+3d}\mathrm{T}^{-2d} .$$

Η ομοιογένεια οδηγεί στο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.

$$1 = -2d,\ a+b-d = 0,\ c+3d = 0 \ .$$

Οι άγνωστοι είναι τέσσερις και οι εξισώσεις είναι τρεις, επομένως ο ένας άγνωστος δεν προσδιορίζεται, έστω το a .

Επομένως $d = -1/2,\ c = 3/2,\ b = -a - 1/2$.

Με αυτές τις τιμές βρίσκομε το παρακάτω άθροισμα, όπου ο κάθε όρος αντιστοιχεί σε ένα a_i και στο αντίστοιχο k_i ,

$$\tau = \frac{r^{3/2}}{G^{1/2} m_2^{1/2}} \left(k_1 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{a_1} + k_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{a_2} + k_3 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{a_3} + \ldots \right) .$$

Μπορούμε να γράψομε το άθροισμα ως μια αδιάστατη σταθερά συνάρτηση $\phi\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$.

Το πρόβλημα έχει αναλυτική λύση όπου αν r είναι ο μεγάλος ημιάξονας a της έλλειψης που διαγράφει η μια μάζα ως προς την άλλη, τότε ισχύει ,

$$\phi\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{2\pi}{\left[\frac{m_1}{m_2} + 1\right]^{1/2}} .$$

Αν $m_2 = M >> m_1 = m$ (δηλαδή η μια μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη από την άλλη), τότε

$\phi\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = 2\pi$ και βρίσκομε τη γνωστή σχέση

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}} .$$

Εύκολα μπορεί αυτή η έκφραση να μετατραπεί ώστε να εξαρτάται από συνδυασμό μεγεθών που είναι αδιάστατο μέγεθος.

δ) Στη συνέχεια θα εξετάσομε τη ροή ασυμπίεστου υγρού μέσα σε ευθύγραμμο κυλινδρικό σωλήνα κυκλικής διατομής όταν υπάρχει τριβή.

Από την αρχή θα θεωρήσομε ότι είναι γνωστό πως η «πτώση» πίεσης Δp κατά μήκος της ροής στο σωλήνα είναι ανάλογη του μήκους l στο οποίο αναφερόμαστε. Αυτό σημαίνει ότι αντί για τις δυο παραπάνω μεταβλητές έχομε μια, δηλαδή το πηλίκο $\Delta p / l$. Είναι εύλογο να υποθέσομε ότι η πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους εξαρτάται από τις εξής μεταβλητές:

τη διάμετρο της διατομής του σωλήνα d , τη μέση ταχύτητα ροής υ , το συντελεστή εσωτερικής τριβής του υγρού (ιξώδες) η και την πυκνότητα του υγρού ρ . Το φαινόμενο μπορεί να εξεταστεί χωρίς να υποθέσομε ότι έχομε εξάρτηση από το $\Delta p / l$, οπότε θα έχομε μια μεταβλητή παραπάνω.

Θα προσπαθήσομε να βρούμε σχέση μεταξύ $\Delta p / l$ και των άλλων μεταβλητών. Κατά τα γνωστά, θα έχομε τη γενική σχέση,

$$\Delta p / l = k d^{\alpha} \upsilon^{\beta} \eta^{\gamma} \rho^{\delta} \ .$$

Η διαστατική εξίσωση είναι: $\mathrm{ML^{-2}T^{-2}} = \mathrm{L}^{\alpha}\left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^{\beta}\left(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right)^{\gamma}\left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^{\delta}$

επομένως $\alpha+\beta-\gamma-3\delta=-2,\ \gamma+\delta=1,\ -\beta-\gamma=-2$.

Οι άγνωστοι είναι τέσσερις και οι αλγεβρικές εξισώσεις τρεις, επομένως ο ένας εκθέτης μένει απροσδιόριστος. Θα υποθέσομε ότι αυτός είναι ο εκθέτης γ , οπότε έχομε τη λύση:

$\alpha=-1-\gamma,\ \beta=2-\gamma,\ \delta=1-\gamma$.

Το γ παίρνει διάφορες αυθαίρετες τιμές οπότε από τα παραπάνω οδηγούμαστε στη σειρά:

$$\Delta p / l = k_1 \rho \upsilon^2 d^{-1} \left(R_e\right)^{-\gamma_1} + k_2 \rho \upsilon^2 d^{-1} \left(R_e\right)^{-\gamma_2} + k_3 \rho \upsilon^2 d^{-1} \left(R_e\right)^{-\gamma_3} \ ...$$
$$\Delta p / l = \rho \upsilon^2 d^{-1} \phi\left(R_e\right)$$

όπου $R_e = \dfrac{\upsilon d \rho}{\eta}$ είναι καθαρός αριθμός, ένας χαρακτηριστικός αριθμός, είναι ο αριθμός Reynolds, από τον οποίο εξαρτάται αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης.

Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί και στη μορφή:

$\dfrac{\Delta p\, d}{l \rho \upsilon^2} = \phi\left(R_e\right)$ όπου και το πρώτο μέλος είναι καθαρός αριθμός. Δηλαδή εδώ έχομε δυο αδιάστατους συνδυασμούς μεγεθών, χαρακτηριστικούς αριθμούς, που είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι.

Σημειώνομε ότι για στρωτή ροή (μικρές τιμές του R_e) η απροσδιόριστη έκφραση $\phi\left(R_e\right)$ υπολογίζεται αναλυτικά. Σε αυτή την περίπτωση $\phi(R_e)=16/R_e$. Αν λάβομε υπόψη ότι η παροχή όγκου (όγκος υγρού ανά μονάδα χρόνου) παριστάνεται με $Q_V = \pi r^2 \upsilon$, όπου $r = d/2$ είναι η ακτίνα του σωλήνα (υ είναι η μέση ταχύτητα), τότε βρίσκομε τη γνωστή σχέση του Poiseuille,

$$Q_V = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} r^4 \ .$$

6.2 Μέθοδος Buckingham

Στη μέθοδο Buckingham, λέγεται και Γενική Μέθοδος, γίνεται χρήση του Θεωρήματος Π (πι, the Pi Theorem, ή Buckingham Pi Theorem, το Θεώρημα Π του Buckingham). Το κεφαλαίο Ελληνικό γράμμα, Π, είναι το διεθνές σύμβολο της παράστασης γινομένου, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$, οπότε επειδή εδώ υπεισέρχονται γινόμενα γι αυτό και ο όρος Θεώρημα Π (πι).

Τονίζομε ότι αυτή η δεύτερη μέθοδος δεν επεκτείνει τη διαστατική ανάλυση σε προβλήματα που δε μπορεί να αντιμετωπίσει η μέθοδος Rayleigh, όμως αποτελεί τη βάση μιας λογικής διαδικασίας ανάλυσης και δίνει τη δυνατότητα ώστε τα αποτελέσματα μιας διερεύνησης να παρουσιαστούν στην πιο γενική μορφή. Η όλη ιδέα έχει σχέση με το γεγονός, που ήδη είδαμε στα προηγούμενα, όπου οι διάφορες εκφράσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών μπορεί να γίνουν εκφράσεις μεταξύ ανεξάρτητων αδιάστατων συνδυασμών αυτών των μεγεθών.

Η αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με τη χρήση της θεωρίας συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία που παραθέτομε. Δε θα παρουσιαστεί σε λεπτομέρειες η αλγεβρική θεωρία της διαστατικής ανάλυσης, θα αναφερθούμε μόνο σε κάποια συμπεράσματά της. Η έκφραση με αδιάστατες ομάδες φυσικών μεγεθών απλοποιεί τα πράγματα διότι ανάγει το πρόβλημα σε πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές.

Ξεκινούμε τονίζοντας αυτό που αναφέραμε και στα προηγούμενα, ότι μια εξίσωση που είναι διαστατικά ομοιογενής έχει τέτοια μορφή η οποία δεν εξαρτάται από το ποιες έχουν ληφθεί ως θεμελιώδεις μονάδες. Εξυπακούεται ότι αναφερόμαστε σε συγκεκριμένο σύστημα μεγεθών με τις δεδομένες μαθηματικές σχέσεις μεταξύ τους. Το ποια είναι τα θεμελιώδη μεγέθη είναι θέμα επιλογής.

Ένα παράδειγμα είναι η σχέση για το απλό εκκρεμές με μικρού πλάτους αιωρήσεις, $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Αν χρησιμοποιήσομε τις συνήθεις θεμελιώδεις μονάδες του SI έχομε $l = 1\ \mathrm{m},\ g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ και βρίσκομε $\tau = 1{,}99\ \mathrm{s}$. Αν υποθέσομε ότι οι θεμελιώδεις μονάδες για το μήκος και το χρόνο είναι αντιστοίχως το χιλιόμετρο, km και η ώρα, h. Τότε $l = 1\ \mathrm{m} = 10^{-3}\ \mathrm{km},\ g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 3{,}6^2 \times 10^4\ \mathrm{km\,h^{-2}}$. Εφαρμόζομε την ίδια σχέση οπότε έχομε

$\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{10^{-3}}{3,6^2 \times 10^4}}\ \mathrm{h} = 5,5192\times10^{-4}\ \mathrm{h}$. Αυτή είναι και πάλι η σωστή περίοδος διότι με τη μετατροπή σε δευτερόλεπτα ξαναβρίσκομε $\tau = 1,99\ \mathrm{s}$.

Για το Θεωρήματο Π χρειάζεται να αναφέρομε τα παρακάτω.

Ένα αδιάστατο γινόμενο μεγεθών είναι γινόμενο που αποτελείται από μεγέθη, που γενικώς είναι υψωμένα σε θετικές ή αρνητικές δυνάμεις, έτσι που το γινόμενο να είναι αδιάστατο, καθαρός αριθμός.

Από n μεγέθη μπορεί να φτιαχτεί ένα μεγάλο πλήθος αδιάστατων γινομένων. Ένα σύνολο αδιάστατων μεγεθών είναι πλήρες, αν τα μέλη του είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και κάθε άλλο αδιάστατο γινόμενο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μελών αυτού του πλήρους συνόλου.

Η διατύπωση του Θεωρήματος Π είναι:

Κάθε διαστατικά ομογενής εξίσωση που συνδέει n ποσότητες (μεγέθη), μπορεί να αναχθεί σε μια σχέση μεταξύ των μελών ενός πλήρους συνόλου αδιάστατων γινομένων.

Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί το πλήθος των αδιάστατων γινομένων ενός τέτοιου πλήρους συνόλου και να βρεθούν αυτά τα γινόμενα.

Το πλήθος των αδιάστατων γινομένων είναι $k = n - r$, όπου $r \le n$ είναι τα μεγέθη αναφοράς (θεμελιώδη μεγέθη), δηλαδή τα r μεγέθη αναφοράς που εισέρχονται στο κάθε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά με τρόπο που οι εξαρτήσεις των άλλων μεγεθών από αυτά να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα λέμε ότι αυτά είναι διακριτά. Συνήθως το r είναι ίσο με το πλήθος των μεγεθών αναφοράς που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις που αυτό δεν ισχύει, οπότε πρέπει να ληφθεί υπόψη η απαίτηση της ανεξαρτησίας που μνημονεύσαμε. Αυτό θα το δούμε παρακάτω πιο συγκεκριμένα. Συνοψίζομε λέγοντας πως κάθε ομογενής εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μια σχέση μεταξύ $k = n - r$ ανεξάρτητων αδιάστατων γινομένων.

Καλό είναι να αναφέρομε ότι ο σωστός κανόνας εύρεσης του πλήθους των αδιάστατων γινομένων που αποτελούν ένα πλήρες σύνολο είναι ο εξής:

Ο αριθμός των αδιάστατων γινομένων που αποτελούν πλήρες σύνολο είναι ίσος με τον ολικό αριθμό των μεταβλητών, n, μείον την τάξη της διαστατικής τους μήτρας που θα εισαχθεί αμέσως τώρα.

Η διαστατική μήτρα ή μήτρας διαστάσεων (στα ελληνικά η μήτρα λέγεται και πίνακας) είναι μια ορθογώνια μήτρα. Για παράδειγμα, έστω ότι οι μεταβλητές ενός προβλήματος είναι η ταχύτητα υ, το μήκος l, η δύναμη F, η πυκνότητα (μάζας) ρ, το ιξώδες η, και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Ας θεωρήσομε ότι θεμελιώδη μεγέθη της Μηχανικής είναι τα «συνήθη» M, L, T. Στο πρόβλημά μας εισέρχονται και τα τρία. Σχηματίζομε την παρακάτω διαστατική μήτρα που τα στοιχεία της είναι οι διαστατικοί εκθέτες. Για παράδειγμα, οι διαστατικοί εκθέτες για το g (αφού $g \to M^0 L^1 T^{-2}$), είναι 0,1,-2. Λαβαίνομε υπόψη τους διαστατικούς εκθέτες όλων των μεγεθών οπότε έχομε τελικώς:

Διαστατική μήτρα

	υ	l	F	ρ	η	g
M	0	0	1	1	1	0
L	1	1	1	-3	-1	1
T	-1	0	-2	0	-1	-2

Από αυτή τη μη τετραγωνική μήτρα μπορούμε να φτιάξομε διάφορες τετραγωνικές μήτρες (δηλαδή μήτρες που έχουν ίσο αριθμό στηλών και γραμμών), διαγράφοντας γραμμές ή και στήλες. Οι ορίζουσες αυτών των τετραγωνικών μητρών λέγονται ορίζουσες της αρχικής μήτρας.

Αν μια μήτρα περιέχει μια μη μηδενική ορίζουσα τάξης r ενώ όλες οι ορίζουσες τάξης μεγαλύτερης του r έχουν τιμή μηδέν, τότε λέμε ότι η τάξη της μήτρας είναι r.

Στην προηγούμενη περίπτωση οι τετραγωνικές μήτρες που φτιάχνονται έχουν μέγιστη τάξη 3. Εφόσον υπάρχει μήτρα 3×3 που είναι μη μηδενική, συμπεραίνομε ότι η τάξη της παραπάνω διαστατικής μήτρας είναι 3. Τέτοια μη μηδενική μήτρα είναι αυτή που σχηματίζεται από τις τρεις τελευταίες στήλες, πράγματι έχομε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Εδώ η τάξη της διαστατικής μήτρας συμπίπτει με το πλήθος των θεμελιωδών μεγεθών που εισέρχονται στο πρόβλημα, που είναι 3, τα M, L, T. Το θεώρημα για το πλήθος των αδιάστατων γινομένων προέρχεται από τη θεωρία περί αλγεβρικών εξισώσεων. Σχετίζεται με το πλήθος των ανεξάρτητων λύσεων ενός συστήματος (ανεξάρτητων) αλγεβρικών εξισώσεων όπου υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από το πλήθος των εξισώσεων.

Τα παραπάνω $k = n - r$ αδιάστατα γινόμενα αποτελούν ένα πλήρες σύνολο από αδιάστατα γινόμενα που σχηματίζονται από το σύνολο των n μεγεθών, με την έννοια που αναφέραμε και στα προηγούμενα, δηλαδή το σύνολο είναι πλήρες αν κανένα μέλος του δεν εκφράζεται από άλλα μέλη αυτού του συνόλου ενώ όλα τα άλλα αδιάστατα γινόμενα που σχηματίζονται από τις n ποσότητες, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μελών του πλήρους συνόλου.

Στην παραπάνω περίπτωση $n = 6,\ r = 3$ επομένως το πλήθος των αδιάστατων γινομένων είναι $k = n - r = 6 - 3 = 3$.

Είναι δυνατό η διαστατική μήτρα να είναι ανώμαλη. Αυτό σημαίνει ότι κάποια σειρά της δεν είναι ανεξάρτητη από τις άλλες αλλά είναι άθροισμα άλλων σειρών της αφού πολλαπλασιαστούν επί κατάλληλες σταθερές. Σε αυτή την περίπτωση η τάξη της διαστατικής μήτρας r, είναι μικρότερη από το πλήθος των θεμελιωδών μεγεθών της μήτρας. Με άλλα λόγια τα συγκεκριμένα θεμελιώδη μεγέθη δεν είναι διακριτά για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σύμφωνα με το συμβολισμό μας πρόκειται για το πλήθος των σειρών της διαστατικής μήτρας. Με αυτή την έννοια, ανώμαλη είναι η παρακάτω διαστατική μήτρα:

$$\begin{array}{ccccc} & p & q & r & s \\ M & 2 & 1 & 3 & 4 \\ L & -1 & 6 & -3 & 0 \\ T & 1 & 20 & -3 & 8 \end{array}$$

Πράγματι, μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι όλες οι ορίζουσες τρίτης τάξης είναι μηδέν, αλλά υπάρχει δεύτερης τάξης ορίζουσα που είναι μη μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι για την τάξη της μήτρας ισχύει: $r = 2$. Σημειώνομε ότι αν πολλαπλασιάσομε επί 2 την πρώτη σειρά, τη δεύτερη επί 3 και προσθέσομε τα αποτελέσματα παίρνομε την τρίτη σειρά.

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 .$$

Εφόσον $r = 2$ μπορούμε να κρατήσομε τις δυο πρώτες γραμμές που περιέχουν αυτή τη μη μηδενική ορίζουσα, να διαγράψομε την τρίτη γραμμή της μήτρας και να προχωρήσομε στη λύση του προβλήματος.

Τετριμμένη περίπτωση όπου η διαστατική μήτρα είναι ανώμαλη εμφανίζεται αν στις θεμελιώδεις μεταβλητές συμπεριληφθούν μεταβλητές που δεν επηρεάζουν το πρόβλημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η παρακάτω διαστατική μήτρα:

$$\begin{array}{cccc} & l & t & g \\ M & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & 0 & 1 \\ T & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Εδώ η πρώτη γραμμή ισούται με το άθροισμα του γινομένου της δεύτερης γραμμής πολλαπλασιασμένης επί μηδέν και του γινομένου της τρίτης γραμμής πολλαπλασιασμένης επί μηδέν. Είναι ευνόητο ότι η ορίζουσα 3×3 είναι μηδέν ενώ υπάρχουν μη μηδενικές ορίζουσες τάξης 2. Δηλαδή $r=2$. Είναι ευνόητο πως μπορούμε να παραλείψομε την πρώτη γραμμή και να προχωρήσομε με τη νέα μήτρα στη λύση του προβλήματος.

Μια άλλη απλή περίπτωση είναι δυο γραμμές να είναι ίδιες ή η μια πολλαπλάσια της άλλης.

Οποιαδήποτε εξίσωση μεταξύ n φυσικών μεγεθών μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή.

$$\phi_1(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = 0.$$

Το θεώρημα Π μας λέει ότι, αν r είναι η τάξη της διαστατικής μήτρας , τότε η ανωτέρω σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξίσωση που εξαρτάται από $k = n-r$ αδιάστατα γινόμενα $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}$ (παριστάνονται και με $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-r}$), δηλαδή καταλήγομε σε σχέση της μορφής

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}) = 0.$$

Όπως είπαμε προηγουμένως. ένα προτέρημα αυτής της μεθόδου είναι το γεγονός ότι οι μεταβλητές έχουν μειωθεί από n σε $n-r$. Αυτό είναι χρήσιμο για τον ερευνητή διότι μειώνει το πλήθος των μεταβλητών τις οποίες πρέπει να εξετάσει, δηλαδή τις μεταβλητές που επηρεάζουν το φαινόμενο. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το συστηματικό υπολογισμό αδιάστατων γινομένων. Θα το κάμομε με ειδικά παραδείγματα και θα υποθέτομε ότι από αυτά είναι κατανοητή η χρήση των διαδικασιών και για άλλες περιπτώσεις. Σημειώνομε ότι τα αδιάστατα γινόμενα μπορεί να πολλαπλασιαστούν, να διαιρεθούν μεταξύ τους, επίσης να υψωθούν σε διάφορες δυνάμεις και να προκύψουν και πάλι αδιάστατα γινόμενα. Επίσης κάθε αδιάστατο γινόμενο επί μια αδιάστατη σταθερά οδηγεί σε αδιάστατη σταθερά. Συνηθίζεται τα αδιάστατα γινόμενα να περιλαμβάνουν καθιερωμένα τέτοια γινόμενα όπως για παράδειγμα ο πολύ γνωστός αριθμός Reynolds.

α) Μια απλοϊκή μέθοδος που μπορεί να εφαρμόσει κάποιος σε μερικές περιπτώσεις, είναι να εξετάσει το πρόβλημα λίγο πολύ εμπειρικά και να καταλήξει στα ανεξάρτητα αδιάστατα γινόμενα.

Ας δούμε την πολύ απλή περίπτωση υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κατακόρυφη κίνηση μέσα στο πεδίο βαρύτητας g , ξεκινώντας από τη θέση μηδέν με αρχική ταχύτητα u . Εκτός από αυτά τα μεγέθη, τα μεγέθη που εισέρχονται είναι το διάστημα l που διανύει το υλικό σημείο και ο χρόνος t στον οποίο το διανύει, δηλαδή $n=4$. Τα θεμελιώδη μεγέθη που εισέρχονται σε αυτό το πρόβλημα κινηματικής είναι τα L,T . Η διαστατική μήτρα είναι:

$$\begin{array}{ccccc} & u & t & l & g \\ L & 1 & 0 & 1 & 1 \\ T & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

Υπάρχουν ορίζουσες δεύτερη τάξης μη μηδενικές άρα $r=2$, επομένως υπάρχουn $k=4-2=2$ αδιάστατα γινόμενα Π_1,Π_2 . Θα επιχειρήσομε να βρούμε το ένα στη μορφή $\Pi_1=\Pi_1(utl)$ και το άλλο $\Pi_2=\Pi_2(utg)$. Διαλέγομε τρία διαφορετικά κάθε φορά από τα τέσσερα γιατί έτσι είμαστε σίγουροι ότι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Επίσης επειδή είναι χρήσιμο να βρούμε τη σχέση του διαστήματος συναρτήσει του χρόνου (όπως κάνομε συνήθως σε αυτή την περίπτωση) δε βάζομε την εξάρτηση από το μήκος και στα δυο αλλά μόνο στο ένα αδιάστατο γινόμενο. Με απλή παρατήρηση καταλαβαίνομε ότι στην περίπτωση του μεγέθους Π_1 , οι διαστάσεις του ut «αναιρούνται» από τη διάσταση του l, αν θεωρήσομε ότι:

$$\Pi_1=\frac{ut}{l}.$$

Ανάλογος συλλογισμός για το Π_2 οδηγεί στο ότι οι διαστάσεις του gt «αναιρούνται» από τις διαστάσεις του u , αν θεωρήσομε την έκφραση:

$$\Pi_2=\frac{gt}{u} .$$

Τελικώς, έχομε τη σχέση: $\phi\left(\frac{ut}{l},\frac{gt}{u}\right)=0$.

Αυτή μπορεί να γραφτεί ως $\frac{l}{ut} = \phi'\left(\frac{gt}{u}\right), \quad l = ut\phi'\left(\frac{gt}{u}\right).$

Είναι γνωστή (ακόμη και από τη Φυσική της Μέσης Εκπαίδευσης) η αναλυτική λύση: $l = ut + \frac{1}{2}gt^2$. Αυτό σημαίνει πως η απροσδιόριστη έκφραση από τη διαστατική ανάλυση είναι: $\phi'\left(\frac{gt}{u}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{gt}{u}$.

β) Στη συνέχεια αναλύομε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα και προσδιορίζομε τα αδιάστατα γινόμενα, ακολουθώντας μια πιο συστηματική διαδικασία. Χρησιμοποιούμε το ίδιο παράδειγμα που μελετήσαμε με τη μέθοδο Rayleigh, δηλαδή θα μελετήσομε τη ροή υγρού σε σωλήνα κυκλικής διατομής όταν υπάρχει τριβή.

Θα θεωρήσομε ότι οι φυσικές ποσότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα (αυτές χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως) είναι οι εξής:

$$\Delta p / l, d, \upsilon, \eta, \rho \ .$$

Επίσης, θα θεωρήσομε ως θεμελιώδη μεγέθη από τα οποία εξαρτώνται αυτά τα πέντε μεγέθη στο πρόβλημά μας, τη μάζα, M , το μήκος, L και το χρόνο, T .

Τίποτα δεν εμποδίζει να γίνει χρήση άλλων φυσικών μεγεθών που να θεωρηθούν ως θεμελιώδη, μέσα στα πλαίσια συστήματος φυσικών μεγεθών όπου υπάρχουν συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις για τα μεγέθη. Στη βιβλιογραφία μπορεί να δει κάποιος διάφορες περιπτώσεις. Εδώ περιοριζόμαστε σε θεμελιώδη μεγέθη των «γνωστών» συστημάτων μεγεθών και μονάδων.

Γενικώς, αν σε ένα πρόβλημα ένα μέγεθος, έστω το Q_1, εξαρτάται από τα $n-1$ ανεξάρτητα μεγέθη (οι τιμές τους παριστάνονται με το ίδιο σύμβολο)

$$Q_2, Q_3, \ldots Q_n$$

θα υπάρχει μεταξύ τους ομογενής εξίσωση της μορφής:

$$Q_1 = \phi_1(Q_2, Q_3, \ldots Q_n) \ .$$

Τα $Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα, δηλαδή δεν πρέπει να υπάρχουν σχέσεις που να συνδέουν αυτές τις μεταβλητές. Αυτό που εννοούμε εδώ ως ανεξαρτησία είναι πως, στο φαινόμενο που εξετάζομε η μια μεταβλητή (εδώ έστω η Q_1) εξαρτάται από τις $Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ έτσι που η μεταβολή της κάθε μιας από τις τελευταίες να επηρεάζει την Q_1 , αλλά να μην επηρεάζει τις άλλες. Οι μεταβολές τους είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η σχέση μεταξύ των φυσικών μεγεθών του προβλήματος γράφεται και στη μορφή:

$$\phi(Q_1, Q_2, ... Q_n) = 0.$$

Το θεώρημα Π λέει ότι αν r είναι το πλήθος των διακριτών θεμελιωδών μεγεθών που χρειάζονται για να εκφραστούν με διαστατικές εξισώσεις όλες οι n μεταβλητές, τότε όλα αυτά τα μεγέθη μπορούν να ομαδοποιηθούν σε $k = n - r$ ανεξάρτητα αδιάστατα γινόμενα Π.

Η διαστατική μήτρα για την περίπτωσή μας είναι η:

	$\Delta p / l$	d	υ	η	ρ
M	1	0	0	1	1
L	-2	1	1	-1	-3
T	-2	0	-1	-1	0

Μπορεί να βεβαιωθεί κάποιος ότι η τάξη της μήτρας είναι 3 άρα $r=3$ οπότε τα αδιάστατα γινόμενα θα είναι $k = n - r = 5 - 3 = 2$.

Υποθέτομε ότι $\Pi = \left(\dfrac{\Delta p}{l}\right)^{\alpha} d^{\beta} \upsilon^{\gamma} \eta^{\delta} \rho^{\varepsilon}$. Από αυτή βρίσκομε:

$$M^0 L^0 T^0 = \left(ML^{-2}T^{-2}\right)^{\alpha} L^{\beta} \left(LT^{-1}\right)^{\gamma} \left(ML^{-1}T^{-1}\right)^{\delta} \left(ML^{-3}\right)^{\varepsilon} .$$

Από αυτή τη σχέση καταλήγομε στις:

$$\alpha + \delta + \varepsilon = 0, \ -2\alpha + \beta + \gamma - \delta - 3\varepsilon = 0, \ -2\alpha - \gamma - \delta = 0 .$$

Επιλέγομε $\alpha = 1, \beta = 0$ οπότε $\delta = 1, \gamma = -3, \varepsilon = -2$.

Τελικώς έχομε το αδιάστατο γινόμενο:

$$\Pi_1 = \frac{\eta \Delta p / l}{\upsilon^3 \rho^2} .$$

Στη συνέχεια επιλέγομε:

$$\alpha = 0, \beta = 1 \text{ οπότε } \gamma = 1, \delta = -1, \varepsilon = 1 .$$

Το αδιάστατο γινόμενο είναι:

$$\Pi_2 = \frac{\upsilon d\rho}{\eta} = R_e = \text{ο αριθμός Reynolds}.$$

Οι (αυθαίρετες) επιλογές των τιμών των δυο εκθετών ήταν τέτοιες ώστε να λείπει μια μεταβλητή διαφορετική από το κάθε ένα αδιάστατο γινόμενο. Επίσης επιλέξαμε να υπάρχει το πηλίκο $\Delta p/l$ μόνο στο ένα γινόμενο ώστε να μπορούμε να δώσομε την απάντηση στη μορφή $\Delta p/l$ ως προς τις άλλες μεταβλητές. Αυτά οδήγησαν στα δυο ανεξάρτητα γινόμενα που βρήκαμε. Άρα καταλήγομε στη σχέση:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2) = \phi\left(\frac{\eta\Delta p/l}{\upsilon^3\rho^2}, \frac{\upsilon d\rho}{\eta}\right) = \phi\left(\frac{\eta\Delta p/l}{\upsilon^3\rho^2}, R_e\right) = 0$$

ή $\quad \eta\Delta p/l = \upsilon^3\rho^2\phi_1(R_e)$.

Αυτή είναι η σχέση που βρήκαμε και με τη μέθοδο Rayleigh.

γ) Θα ακολουθήσομε τώρα μια άλλη ακόμη πιο συστηματική τεχνική, για τη μελέτη του φαινομένου του κυματισμού στην επιφάνεια υγρού (ουσιαστικά νερού) μικρού βάθους. Η μέθοδος κάνει χρήση του συνόλου των επαναληπτικών μεταβλητών (recurring set, pro-basic set).

Τα φυσικά μεγέθη που εισέρχονται στο πρόβλημα είναι πέντε $(n=5)$, τα $\lambda, \upsilon, g, \rho, d$ όπου:

λ μήκος κύματος, υ ταχύτητα διάδοσης,
g επιτάχυνση της βαρύτητας ή ένταση της βαρύτητας,
ρ πυκνότητα νερού, d βάθος νερού.

Ως θεμελιώδεις ποσότητες από τις οποίες εξαρτάται το πρόβλημα θεωρούμε τις L, M, T .

Εύκολα προκύπτει ότι η διαστατική μήτρα είναι:

$$\begin{array}{cccccc} & \lambda & \upsilon & g & \rho & d \\ L & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ M & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

Εύκολα φαίνεται ότι υπάρχει ορίζουσα τρίτης τάξης που είναι μη μηδενική. Επομένως $r=3$, οπότε το πλήθος των αδιάστατων ανεξάρτητων γινομένων, Π είναι

$k = n - r = 5 - 3 = 2$. Από τις $n = 5$ μεταβλητές θα διαλέξομε $r = 3$ που θα αποτελέσουν το σύνολο των επαναληπτικών μεταβλητών. Η επιλογή δεν είναι τελείως αυθαίρετη, πρέπει στο σύνολο των $r = 3$ επαναληπτικών μεταβλητών να υπάρχουν όλες οι θεμελιώδεις μεταβλητές του προβλήματος, που είναι $r = 3$. Στην περίπτωσή μας τουλάχιστο μια από τις επιλεγείσες επαναληπτικές μεταβλητές πρέπει να περιέχει στη διαστατική της σχέση το θεμελιώδες μέγεθος μήκος, τουλάχιστο μια τη μάζα και τουλάχιστο μια το χρόνο. Μετά από την επιλογή του συνόλου των επαναληπτικών μεταβλητών, κάθε μια από τις υπόλοιπες $k = n - r = 5 - 3 = 2$ ποσότητες συνδυάζεται με τις επαναληπτικές μεταβλητές έτσι που να σχηματίζει αδιάστατο γινόμενο Π . Είναι ευνόητο ότι αν επαναληπτικές μεταβλητές, από μόνες τους, μπορεί να σχηματίσουν αδιάστατο γινόμενο, τότε μπορεί να σχηματίσουν αδιάστατο γινόμενο με άλλο μέγεθος μόνο αν αυτό είναι αδιάστατο.

Ας δούμε τι γίνεται στη συγκεκριμένη περίπτωση. Διαλέγομε ως επαναληπτικές τις $r = 3$ μεταβλητές υ, g, ρ. Αυτές είναι κατάλληλες γιατί περιέχουν η κάθε μια τουλάχιστο ένα από τα θεμελιώδη μεγέθη L, M, T . Στη συνέχεια σχηματίζομε το $\Pi_1 = \upsilon^\alpha g^\beta \rho^\gamma \lambda^\delta$.

Η διαστατική σχέση είναι $L^0 M^0 T^0 = \left(LT^{-1}\right)^\alpha \left(LT^{-2}\right)^\beta \left(ML^{-3}\right)^\gamma L^\delta$.

Από αυτή τη σχέση καταλήγομε στις εξισώσεις:

$$\alpha + \beta - 3\gamma + \delta = 0, \quad \gamma = 0, \quad -\alpha - 2\beta = 0 .$$

Μια λύση είναι: $\alpha = -2, \ \beta = 1, \ \gamma = 0, \ \delta = 1$.

Επομένως: $\Pi_1 = \dfrac{g\lambda}{\upsilon^2}$.

Σχηματίζομε το $\Pi_2 = \upsilon^\alpha g^\beta \rho^\gamma d^\delta$.

Ισχύει η σχέση $L^0 M^0 T^0 = \left(LT^{-1}\right)^\alpha \left(LT^{-2}\right)^\beta \left(ML^{-3}\right)^\gamma d^\delta$.

Αυτή οδηγεί στις ίδιες αλγεβρικές εξισώσεις για τους εκθέτες οπότε μπορούμε να δεχτούμε την ίδια λύση και έτσι να καταλήξομε στη σχέση:

$$\Pi_2 = \frac{gd}{\upsilon^2} .$$

Τα Π_1, Π_2 είναι ανεξάρτητα. Μπορούμε να θεωρήσομε ως ανεξάρτητα γινόμενα και τα $\Pi_1 = \frac{g\lambda}{\upsilon^2}$, $\pi_2 = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{d}{\lambda}$. Προφανώς ισχύει: $\phi\left(\frac{g\lambda}{\upsilon^2}, \frac{d}{\lambda}\right) = 0.$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από την πυκνότητα του υγρού.

Είναι βολικό να δίνομε τα αποτελέσματα στη μορφή πίνακα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι διαστατικοί εκθέτες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 στους οποίους, το κάθε ένα αδιάστατο γινόμενο πρέπει να είναι υψωμένα τα μεγέθη $\lambda, \upsilon, g, \rho, d$, αντιστοίχως, έχουν τις τιμές που βρήκαμε προηγουμένως. Ο πίνακας για τη δεύτερη επιλογή αδιάστατων γινομένων είναι ο παρακάτω, όπου $\Pi = \lambda^{x_1} \upsilon^{x_2} g^{x_3} \rho^{x_4} d^{x_5}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Π_1	1	-2	1	0	0
Π_2	-1	0	0	0	1

δ) Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στη δυνατότητα μείωσης του πλήθους των Π .

Θα εξετάσομε την περίπτωση πτώσης σφαίρας μέσα σε υγρό με οριακή ταχύτητα.

Σε ένα υγρό μεγάλης έκτασης αφήνεται να πέσει σφαίρα. Στη σφαίρα δρα το βάρος της, η άνωση και η τριβή ένεκα ιξώδους. Μετά από λίγο η σφαίρα αποκτά σταθερή ταχύτητα και συνεχίζει την ευθύγραμμη κίνησή της προς τα κάτω.

Η ερώτηση είναι πως εξαρτάται η οριακή ταχύτητα από τα εμπλεκόμενα στο φαινόμενο μεγέθη.

Τα σχετικά μεγέθη είναι $n = 6$, τα εξής:
υ οριακή ταχύτητα, d διάμετρος της σφαίρας, ρ πυκνότητα του υγρού,
ρ_s πυκνότητα της σφαίρας, η ιξώδες, g βάρος ανά μονάδα μάζας.

Υποθέτουμε πως ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά μικρός ώστε οι δυνάμεις που χρειάζονται για να επιταχυνθούν τα σωμάτια του υγρού γύρω από τη σφαίρα είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις τριβής (ιξώδους). Τα συνήθη διακριτά θεμελιώδη μεγέθη που χρησιμοποιούνται είναι $r = 3$, τα L, M, T . Αν ακολουθήσομε τη συνήθη πρακτική θα καταλήξομε σε $k = n - r = 6 - 3 = 3$ αδιάστατα γινόμενα.

Η διαστατική μήτρα είναι:

$$\begin{array}{ccccccc} & \upsilon & d & \rho & \rho_s & \eta & g \\ L & 1 & 1 & -3 & -3 & -1 & 1 \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ T & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

και αυτή είναι πράγματι τάξης $r = 3$.

Εύκολα βρίσκεται ότι το αποτέλεσμα μπορεί να πάρει τη μορφή:

$\upsilon = \dfrac{\eta}{\rho d}\phi\left(\dfrac{\rho^2 d^3 g}{\eta^2}, \dfrac{\rho_s}{\rho}\right)$, δηλαδή με $k = n - r = 6 - 3 = 3$ αδιάστατα μεγέθη.

Όμως σε αυτή την περίπτωση όταν η διανυσματική ταχύτητα είναι τελικώς σταθερή, δεν εισέρχεται η σχέση δύναμη ίσον μάζα επί επιτάχυνση, δηλαδή η $F = ma$. Αυτό συμβαίνει και στα προβλήματα στατικής. Έτσι το μέγεθος F μπορεί να ληφθεί ως ανεξάρτητο θεμελιώδες μέγεθος μαζί με τα συνήθη M, L, T. Δηλαδή έχομε τα θεμελιώδη μεγέθη M, L, T, F που θα δούμε ότι είναι πράγματι διακριτά. Με αυτό τον τρόπο έχομε $r = 4$ θεμελιώδη μεγέθη που είναι διακριτά. Τώρα οι διαστατικές σχέσεις για τα η, g αλλάζουν και γίνονται $FL^{-2}T$ και FM^{-1} αντιστοίχως. Δηλαδή δε γίνεται χρήση του ανωτέρω θεμελιώδους νόμου της δυναμικής του Νεύτωνα αλλά της γνωστής σχέσης για τη δύναμη «τριβής» ένεκα του ιξώδους $F = \eta \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}z}$, καθώς και της σχέσης $g = \dfrac{F}{m}$, όπου το g χαρακτηρίζει την ένταση του πεδίου βαρύτητας αντί για την επιτάχυνση. Ως συνέπεια αυτού, το πλήθος των Π μειώνεται κατά ένα, δηλαδή από 3 γίνεται 2 αφού $k = n - r = 6 - 4 = 2$. Επομένως, με αυτό τον τρόπο η διαστατική ανάλυση μας δίνει μεγαλύτερη πληροφορία για το φαινόμενο, έχομε μεγαλύτερη ακρίβεια.

Τώρα η μήτρα διαστάσεων γίνεται:

$$\begin{array}{ccccccc} & \upsilon & d & \rho & \rho_s & \eta & g \\ L & 1 & 1 & -3 & -3 & -2 & 0 \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ T & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι υπάρχει ορίζουσα 4X4 η οποία είναι μη μηδενική. Μια τέτοια είναι η :

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \; .$$

Άρα πράγματι, όπως είπαμε, $r = 4$.

Εύκολα συμπεραίνομε ότι ως ένα από τα δυο αδιάστατα γινόμενα μπορεί ληφθεί το $\Pi_1 = \dfrac{\rho_s}{\rho}$, το άλλο μπορεί να ληφθεί στη μορφή: $\Pi_2 = d^a \rho^b \eta^c g^e \upsilon$. Με το γνωστό τρόπο βρίσκομε ότι οι εκθέτες είναι δυνατόν να είναι οι: $a = -2,\ b = -1, c = 1, e = -1$. άρα:

$\phi\left(\dfrac{\rho_s}{\rho}, \dfrac{\upsilon\eta}{d^2\rho g}\right) = 0$. Τελικώς βρίσκομε $\upsilon = \dfrac{d^2\rho g}{\eta}\phi_1\left(\dfrac{\rho_s}{\rho}\right)$, που σημαίνει άγνωστη εξάρτηση από ένα μόνο αδιάστατο γινόμενο.

Βιβλιογραφία

1) INTERNATIONAL STANDARD ISO 31-0, Third edition 1992-08-01

2) SYMBOLS, UNITS, NOMENCLATURE AND FUNDAMENTAL CONSTANTS IN PHYSICS, 1987 REVISION, by E.Richard Cohen and Pierre Giacomo, International Union of Pure and Applied Physics, Document I.U.P.A.P. -25 (SUNAMCO 87-1)\

3) Le Système international d' Unités The International System of Units, SI 9e édition 2019, The International System of Units Bureau international des poids et mesures

4) JCGM 200.2012 International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM), 3rd edition 2008 version with minor corrections

Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM) 3e edition version 2008 avec corrections mineurs

5) SI : To Διεθνές Σύστημα Μονάδων, ΕΛΟΤ, Αθήνα 1999

6) GUIDE FOR METRIC PRACTICE, by Robert A. Nelson, PHYSICS TODAY, August 1998

7) Νόμιμες μονάδες μετρήσεως στην Ελλάδα, ΕΦΗΜΕΡΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ, Προεδρικό Διάταγμα, ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ, Αρ. Φύλλου 196, Αθήνα 30 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1983

8) On Electric and Magnetic Units and Dimensions, R. T. Birge, Am. Phys. Teacher 2, 41 (1934)

9) On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part I, Raymond T. Birge, Am. Phys. Teacher , Vol. 41, No. 2 (1934) pp 102-109

10) On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part II, Raymond T. Birge, Am. Phys. Teacher , Vol. 102, No. 3 (1935) pp 171-179

11) METROLOGY QUO VADIS?, by Dieter Kind and Terry Quinn, PHYSICS TODAY, August 1998

12) A more fundamental International System of Units, by David B. Newell, Physics Today, July 2014

13) Defining units in the quantum based SI, by Peter J. Mohr, Metrologia 45 (2008) 129-133

14) Redefinition of the kilogram, ampere, kelvin and mole: a proposed approach to implementing CIPM recommendation 1 (CI-2005), by Ian M. Mills, Peter J. Mohr, Terry J. Quinn, Barry N. Taylor and Edwin R. Williams, Metrologia 43 (2006) 227-246

15) The Current SI Seen From the Perspective of the Proposed New SI, by Barry N. Taylor, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 116, 797-807 (2011)

16) Resolutions adopted by the CGPM at its 25th meeting (18-20 November 2014) Résolutions adoptées par la CGPM lors de sa 25e réunion (18-20 novembre 2014)

17) The watt or Kibble balance: a technique for implementing the new SI definition of the unit of mass, by Ian A. Robinson and Stephan Schlamminger, Metrologia 53 (2016) A46-A74

18) First realization of the kilogram with the METAS Kibble balance, by A. Eichenberger, H. Baumann, A. Mortara, D. Tommasini,D. Reber, E. Klingele, B. Jeanneret and B. Jeckelmann, Metrologia 59 (2022) 025008 (9pp)

19) Realization of the kilogram by the XRCD method, by Fujii K. et al, Metrologia 53 (2016) A19

20) Dimensional Analysis, by P. W. Bridgman, Yale University Press, 1931

21) Dimensional Analysis and Theory of Models, by Henry L. Langhaar, Robert E. Krieger Publishing company, 1951

22) UNITS, DIMENSIONAL ANALYSIS AND PHYSICAL SIMILARITY, by B. S. Massey, Van Nostrand Reinhold Company, 1971

23) Dimensional Methods in Engineering and Physics, by E. de St Q. Isaacson and M. de St Q. Isaacson, Edward Arnold, 1975

24) Suppression and restoration of constants in physical equations, by Edward A. Desloge, Am. J. Phys. 52 (4), April 1984

26) Από τα κουάρκ μέχρι το Σύμπαν, Μια σύντομη περιήγηση, του Ελευθερίου Ν. Οικονόμου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012

27) ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ, του Κώστα Χριστοδουλίδη, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2009

28) ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ Τόμος Ι, του Άγγελου Θ. Παπαϊωάννου, Εκδόσεις ΚΟΡΑΛΙ, 2002