ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

ΥΠΟ

Π. Ε. ΠΡΩΤΟΠΑΠΑΔΑΚΗ

ΤΟΜΟΣ Α΄.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΤΟΥ

ΣΗΜΕΙΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΝΕΣΤΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΟΥ
1890

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ καταστήματος εἶναι κλοπιμαῖον.

ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ
ΑΝΕΣΤΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΟΥ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ.

Ἡ παντελὴς ἔλλειψις βιβλίου πραγματευομένου τὰς βάσεις τῆς θεωρητικῆς καὶ ἐφηρμοσμένης μηχανικῆς ἐν τῇ γλώσσῃ μας, μ' ἐνεθάρρυνε νὰ δημοσιεύσω τὰ μαθήματα, ἅτινα διδάσκω ἀπὸ δύο ἤδη ἐτῶν ἐν τῷ Στρατιωτικῷ Σχολείῳ τῶν Εὐελπίδων, τῇ Σχολῇ τῶν Ναυτικῶν δοκίμων καὶ τῷ Μετσοβείῳ Πολυτεχνείῳ, περιλαμβάνοντα τὴν Θεωρητικὴν μηχανικὴν (Κινητικήν, Δυναμικὴν καὶ Στατικὴν τῶν στερεῶν ἰδίᾳ σωμάτων, τὴν Ὑδροστατικὴν καὶ τὰ στοιχεῖα τῆς Ὑδροδυναμικῆς), καὶ τὴν Ἐφηρμοσμένην, ἀφορῶσαν ἰδίᾳ τὰς ἐν τῇ Οἰκοδομικῇ ἐν γένει τέχνῃ ἐφαρμογὰς τῆς Μηχανικῆς (Ἀντοχὴν τῶν ὑλικῶν, Γραφοστατικήν, Ὑδραυλικήν, Μηχανολογίαν ἐν γένει καὶ ἰδίᾳ τὰς Ἀτμομηχανάς).

Ὁ ἀνὰ χεῖρας πρῶτος τόμος περιλαμβάνει τὴν κινητικὴν καὶ δυναμικὴν τοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἣν ἔγραψα ἔχων ὑπ' ὄψει κυρίως τὰ μαθήματα τοῦ σοφοῦ καθηγητοῦ μου κυρίου Resal, *καὶ τὰ ἔργα τῶν Ἄγγλων σοφῶν* Maxwell *καὶ* Thomson-Tait.

Π. Ξ. ΠΡΩΤΟΠΑΠΑΔΑΚΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

§ 1. Ὁρισμοί.

Σῶμά τι *μετατοπίζεται* ὅταν ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις αὐτοῦ μεταβάλλεται ἐν σχέσει πρὸς τὰ περικυκλοῦντα τοῦτο λοιπὰ σώματα.

Τὴν *μετατόπισιν* ταύτην τοῦ σώματος ἢ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τῆς θέσεως A_1 εἰς ἑτέραν A_2 δὲν δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν, εἰμὴ συνεχῆ καὶ ἀδιάκοπον. Τὸ σῶμα δηλ. ὅπερ ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ κατέχει ἐν τῷ διαστήματι τὴν θέσιν A_1 δὲν δύναται νὰ καθέξῃ τὴν θέσιν A_2 χωρὶς νὰ διαβῇ, διὰ συνεχοῦς σειρᾶς μετατοπίσεων, ἐν τῷ μεταξὺ τῶν θέσεων A_1 καὶ A_2 χώρῳ.

κίνησις

Τὴν συνεχῆ ταύτην μετατόπισιν τοῦ σώματος σχετιζομένην πρὸς τὸ χρονικὸν διάστημα ἐν ᾧ ἐκτελεῖται αὕτη καλοῦμεν *κίνησιν* αὐτοῦ, καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς μηχανικῆς, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τῆς κινήσεως ἐν γένει τῶν σωμάτων, *ἀνεξαρτήτως τῶν αἰτίων εἰς ἃ ὀφείλεται αὕτη*, καλοῦμεν *κινητικήν*.

ὑλικὸν σημεῖον

Ὀνομάζομεν *ὑλικὸν σημεῖον*, σῶμα ὑλικὸν τόσῳ μικρὸν ὥστε ἐν τῇ κινήσει αὐτοῦ αἱ ὑπὸ τῶν γεωμετρικῶν σημείων τοῦ χώρου ὃν κατέχει τοῦτο διαγραφόμεναι τροχιαὶ νὰ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, καὶ ἡ κίνησις τοῦ σώματος νὰ θεωρῆται ἁπλῶς ὡς μεταβατικὴ κίνησις· ἄλλως θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἐν τῇ κινήσει παντὸς σώματος δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐν αὐτῷ σημεῖόν τι, τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν ὑποθέσωμεν συγκεντρωμένην ἐν αὐτῷ ἅπασαν τὴν ὕλην ἐξ ἧς σύγκειται τὸ ἐν μεταβατικῇ κινήσει κινούμενον σῶμα, τὸ σημεῖον τοῦτο φέρεται ὑπὸ τῆς αὐτῆς κινήσεως ὑφ' ἧς καὶ τὸ σῶμα, καὶ δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν μεταβατικὴν κίνησιν τοῦ σώματος, οἱουδήποτε ὄγκου καὶ μορφῆς, διὰ τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ τούτου σημείου, ἔνθα *ὑποθέτομεν συγκεντρωμένην ἅπασαν τὴν ἐν τῷ κινουμένῳ σώματι ἐμπεριεχομένην ὕλην.*

σῶμα στερεόν.

Τὰ στερεὰ σώματα, περὶ τῆς κινήσεως τῶν ὁποίων θὰ πραγματευθῶμεν ἐνταῦθα ἀποκλειστικῶς, θεωροῦμεν ὡς συγκείμενα ἐξ *ὑλικῶν σημείων* συνδεδεμένων πρὸς ἄλληλα, οὕτως, ὥστε αἱ σχετικαὶ αὐτῶν ἀποστάσεις ἐν τῷ διαστήματι νὰ μένωσι σταθεραὶ καὶ ἀμετάβλητοι.

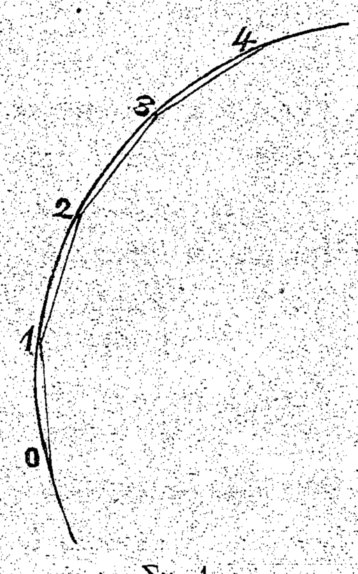
Ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεως, ἣν κατέχουσιν ἐν τῷ διαστήματι τὰ ὑλικὰ σημεῖα σώματος στερεοῦ, προσδιορίζει καὶ τὴν θέσιν αὐτοῦ τοῦ σώματος. Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν σπουδὴν τῆς κινητικῆς διὰ τῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου, δι' ἧς διευκολύνεται κατόπιν ἡ σπουδὴ τῆς γενικῆς κινήσεως οἱουδήποτε στερεοῦ σώματος.

τροχιά

Σημεῖον κινούμενον διαγράφει γραμμὴν (*τροχιὰ τοῦ κινητοῦ*), τὴν ὁποίαν, ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν δι' εὐθυγράμμου πολυγωνικῆς γραμμῆς 1,2,3,4...... ἀπείρου ἀριθμοῦ πλευρῶν ἐλαχίστου μήκους.

φορὰ κινήσεως

Φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ, ἐν ᾗ στιγμῇ συμπίπτει τοῦτο μὲ τὸ σημεῖον 2 τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, καλοῦμεν τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς 2, 3 (ἥτις, ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν, συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς παρὰ τῷ σημείῳ 2 ἐφαπτομένης) ἣν διαγράφει τὸ κινητὸν ἀφοῦ διέλθῃ τοῦ σημείου 2.



Σχ. 1.

§ 2. Συστήματα συντεταγμένων καὶ μετασχηματισμὸς αὐτῶν.

καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι

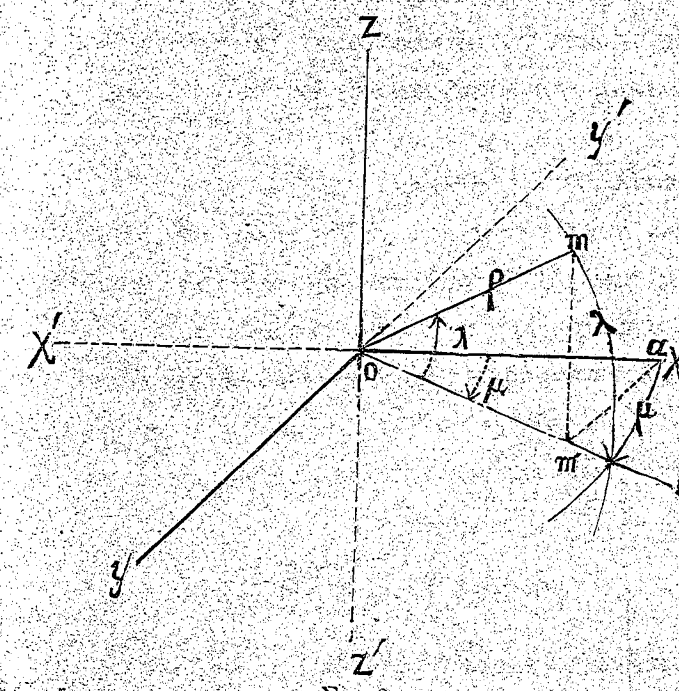
Ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐν τῷ διαστήματι ὁρίζεται ἐντελῶς διὰ τῶν ἀπὸ τριῶν ἀμεταστάτως ἐν τῷ διαστήματι κειμένων ἐπιπέδων

$$yoz, \quad zox, \quad xoy$$

(ἅτινα ὑποθέτομεν κάθετα ἀλλήλοις) ἀποστάσεων αὐτοῦ

$$\begin{aligned} oa &= x = om.\ \alpha \\ am' &= y = om.\ \beta \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ m'm &= z = om.\ \gamma \end{aligned}$$

ἔνθα α, β, γ εἶναι τὰ συνημίτονα (ἰθύνοντα συνημίτονα) τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $om = \rho$ μετὰ τῶν ἀξόνων $x'x$, $y'y$ καὶ $z'z$· αἱ ἀποστάσεις x, y, z τὰς ὁποίας καλοῦμεν *καρτεσιανὰς συντεταγμένας* τοῦ σημείου m λογίζονται θετικῶς κατὰ τὰς φορὰς ox, oy, oz, καὶ ἀρνητικῶς κατὰ τὰς φορὰς ox', oy' καὶ oz'.



Σχ. 3.

σφαιρικαὶ συντεταγμέναι

Ἡ θέσις τοῦ σημείου m ἐν τῷ διαστήματι δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἐπίσης ἐντελῶς ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν μ, ἣν σχηματίζουσι τὰ ἐπίπεδα moz καὶ xoz, τὴν γωνίαν λ, ἣν σχηματίζει τὸ τμῆμα om μετὰ τοῦ ἐπιπέδου xoy καὶ τὴν ἀπόστασιν $om = \rho$· τὸ σύστημα τοῦτο τῶν συντεταγμένων καλοῦμεν **σφαιρικόν,** διότι δι' αὐτῶν προσδιορίζεται συνήθως ἡ θέσις σημείου τινὸς ἐπὶ σφαίρας ἀκτῖνος ρ. Ἐὰν τῷ ὄντι λάβωμεν ὡς ἰσημερινὸν ἐπίπεδον τὸ xoy βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι, λ εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος καὶ μ τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τοῦ σημείου m.

μετάβασις ἐκ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἕτερον σύστημα

Δοθεισῶν τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων δι' ὧν ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ σημείου m ἐν τῷ διαστήματι εὑρεῖν τὰς καρτεσιανὰς αὐτοῦ συντεταγμένας καὶ τἀνάπαλιν.

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ oam' ἔχομεν

$$x = oa = om'\,\text{συν}\mu \qquad y = am' = om'\,\text{ημ}\mu$$

ἐν δὲ τῷ τριγώνῳ omm' ὀρθογωνίῳ καὶ τούτῳ ἔχομεν

$$z = m'm = om\,\text{ημ}\lambda = \rho\,\text{ημ}\lambda \qquad om' = \rho\,\text{συν}\lambda$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ om' ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$x = \rho\,\text{συν}\lambda\,\text{συν}\mu \qquad y = \rho\,\text{συν}\lambda\,\text{ἡμ}\mu \qquad z = \rho\,\text{ἡμ}\lambda \ldots \quad (2)$$

δι' ὧν λύεται τὸ προταθὲν πρόβλημα.

ἐπίπεδοι πολικαὶ συντεταγμέναι

Ἐὰν τὸ σημεῖον m εὑρίσκεται διαρκῶς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoz ἡ γωνία μ ἰσοῦται τῷ μηδενὶ καὶ τὸ σημεῖον m ὁρίζεται διὰ τῶν δύο μόνον συντεταγμένων ρ καὶ λ, τὰς ὁποίας ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει καλοῦμεν ἐπιπέδους **πολικὰς** συντεταγμένας· ἐκ τῶν προηγουμένων δὲ σχέσεων ἔχομεν

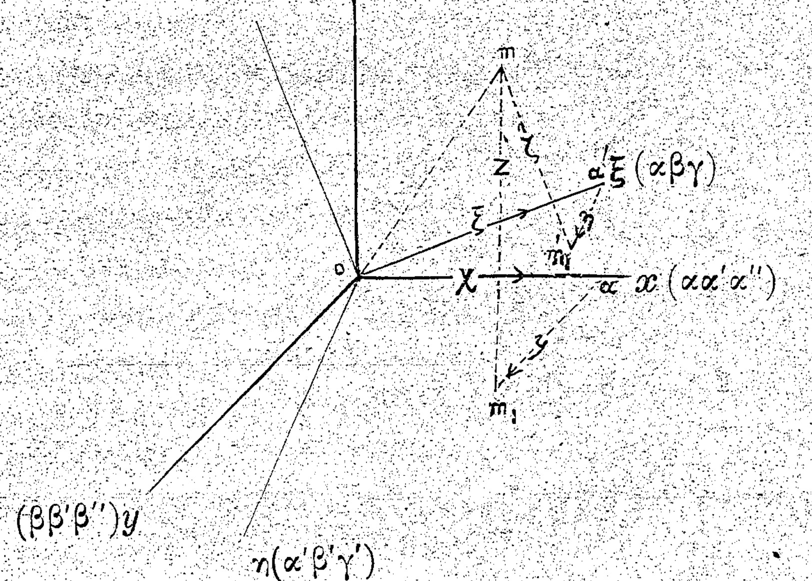
$$x = \rho\,\text{συν}\lambda \qquad z = \rho\,\text{ἡμ}\lambda \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

μετασχηματισμὸς τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων

Δοθεισῶν τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων $x\ y\ z$ τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ox, oy καὶ oz, ὁρίσαι τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας ξ,η,ζ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας οξ, οη, οζ, ὧν τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα ὡς πρὸς τοὺς πρώτους εἶναι ἀμοιβαίως

$$\alpha\ \beta\ \gamma \qquad \alpha'\ \beta'\ \gamma' \qquad \alpha''\ \beta''\ \gamma''$$

ἐνῷ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῶν ἀξόνων οξ, οη, οζ ὡς πρὸς τοὺς ox, oy, oz εἶναι $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ $\quad \beta\ \beta'\ \beta''$ $\quad \gamma\ \gamma'\ \gamma''$



Σχ. 3.

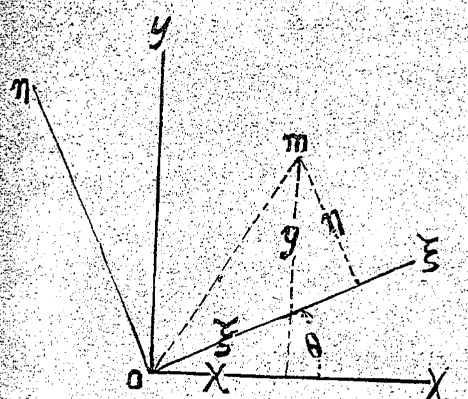
Προβάλλοντες τὰς τεθλασμένας γραμμὰς $oa\ m_1, m$, $oa'm'_1m$ καὶ τὴν συνισταμένην αὐτῶν om ἀμοιβαίως ἐπὶ τῶν ἀξόνων οξ, οη, οζ καὶ ox, oy, oz ἔχομεν

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \ldots (4) \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta \\ y &= \beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta \ldots (5) \\ z &= \gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta \end{aligned}$$

μετασχηματισμὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας οξ οη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy ἔχομεν

$$\alpha'' = \beta'' = 0 \qquad \gamma = \gamma' = 0 \qquad \gamma'' = 1$$



Σχ. 4.

καὶ αἱ ἄνω σχέσεις μετατρέπονται εἰς

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y \\ \xi &= z \\ x &= \alpha\xi + \alpha'\eta \\ y &= \beta\xi + \beta'\eta \\ z &= \zeta \end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν θ τὴν γωνίαν τοῦ ἄξονος οξ μετὰ τοῦ ἄξονος ox ἔχομεν

$$\alpha = \text{συν}\theta \qquad \alpha' = \text{συν}\theta\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\,\text{ἡμ}\theta$$

$$\beta = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{ἡμ}\theta \qquad \beta' = \text{συν}\theta$$

καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς ἄνω σχέσεις, δι' ὧν ἐπιτυγχάνεται ὁ μετασχηματισμὸς τῶν συντεταγμένων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned} \xi &= x\,\text{συν}\theta + y\,\text{ἡμ}\theta \\ \eta &= -x\,\text{ἡμ}\theta + y\,\text{συν}\theta \end{aligned} \quad (6) \qquad \begin{aligned} x &= \xi\,\text{συν}\theta - \eta\,\text{ἡμ}\theta \\ y &= \xi\,\text{ἡμ}\theta + \eta\,\text{συν}\theta \end{aligned} \ldots (7)$$

σχέσεις συνδέουσαι τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν προφανῆ ταὐτότητα

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

πορίζόμεθα ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων (4 καὶ 5) τὰς ταὐτότητας

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)^2 + (\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)^2 + (\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$

ὧν ἡ πρώτη δίδει

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 \ldots (8) \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0 \ldots (9) \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0 \end{aligned}$$

καὶ ἡ δευτέρα

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1 \ldots (10) \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0 \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0 \ldots (11) \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' &= 0 \end{aligned}$$

συντεταγμέναι καὶ σχέσεις τοῦ Euler.

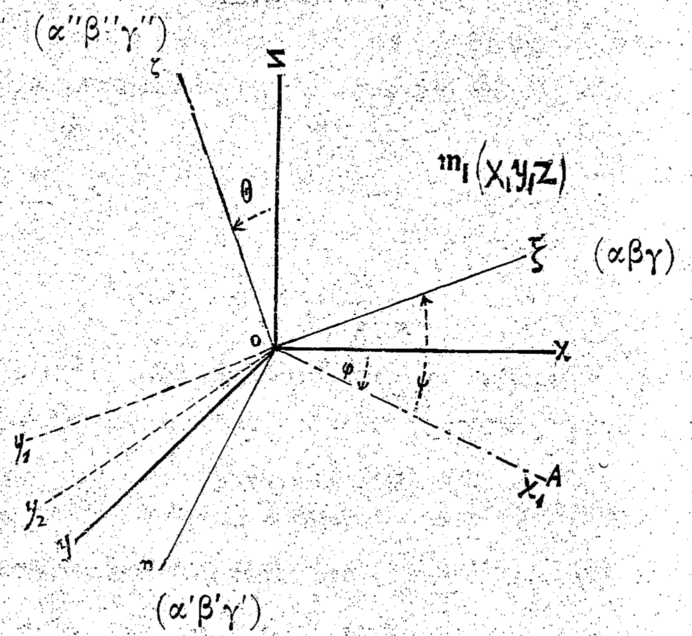
Ὡς ἐκ τῶν ἓξ τούτων σχέσεων τρία μόνον ἐκ τῶν ἐννέα συνημιτόνων δύνανται νὰ ληφθῶσιν αὐθαιρέτως, καὶ συναρτήσει τούτων νὰ προσδιορισθῶσι τὰ λοιπὰ ἒξ ἢ γενικώτερον, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ἐννέα συνημίτονα συναρτήσει τριῶν οἱωνδήποτε μεταβλητῶν, καὶ ὡς τοιαύτας λαμβάνομεν

τὴν γωνίαν φ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τομὴ oA τῶν ἐπιπέδων xoy καὶ ξοη, μετὰ τοῦ ἄξονος ox

τὴν γωνίαν ψ τοῦ ἄξονος οξ μετὰ τῆς εὐθείας oA. καὶ

τὴν γωνίαν θ τῶν ἀξόνων oz καὶ οζ. —

τὰς συντεταγμένας φ, ψ καὶ θ καλοῦσιν συντεταγμένας τοῦ Euler.



Σχ. 5.

Ἵνα μεταβῶμεν ἐκ τοῦ συστήματος ox, oy oz εἰς τὸ σύστημα οξ, οη, οζ στρέφομεν πρῶτον τοὺς ἄξονας ox καὶ oy ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy κατὰ γωνίαν φ· τότε αἱ συντεταγμέναι x_1, y_1, z_1 σημείου τινὸς m ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας συνδέονται πρὸς τὰς συντεταγμένας τοῦ αὐτοῦ σημείου ὡς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας ox, oy καὶ oz διὰ τῶν σχέσεων (7)

$$x = x_1\,\text{συν}\varphi - y_1\,\text{ἡμ}\varphi$$
$$y = x_1\,\text{ἡμ}\varphi + y_1\,\text{συν}\varphi$$
$$z = z_1$$

οἱ τρεῖς ἄξονες oy_1, oz καὶ οζ εἶναι ἤδη κάθετοι ἐπὶ τῆς εὐθείας oA, ὥστε ἐὰν στρέψωμεν τοὺς ἄξονας oz καὶ oy_1 ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $zo\zeta$ κατὰ γωνίαν θ, oz θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ οζ καὶ oy_1 θὰ λάβῃ τὴν θέσιν oy_2 καὶ ἔχομεν (7)

$$x_1 = x_2$$
$$y_1 = y_2\,\text{συν}\theta - z_2\,\text{ἡμ}\theta$$
$$z_1 = y_2\,\text{ἡμ}\theta + z_2\,\text{συν}\theta$$

ἀλλ' ὁ ἄξων oy_2 ὢν κάθετος ἐπὶ τοῦ οζ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ξοη,

ὥστε ἐὰν στρέψωμεν τοὺς ἄξονας oy_2 καὶ ox_1 κατὰ γωνίαν ψ θὰ πέσωσιν οὗτοι ἐπὶ τῶν ἀξόνων οη καὶ οξ· ἔχομεν δὲ (7)

$$x_2 = \xi\,\text{συν}\psi - \eta\,\text{ἡμ}.\psi$$
$$y_2 = \xi\,\text{ἡμ}.\psi + \eta\,\text{συν}\psi$$
$$z_2 = \zeta$$

ἐὰν ἤδη ἀπαλείψωμεν x_1, y_1, z_1, καὶ x_2, y_2, z_2 ἔχομεν

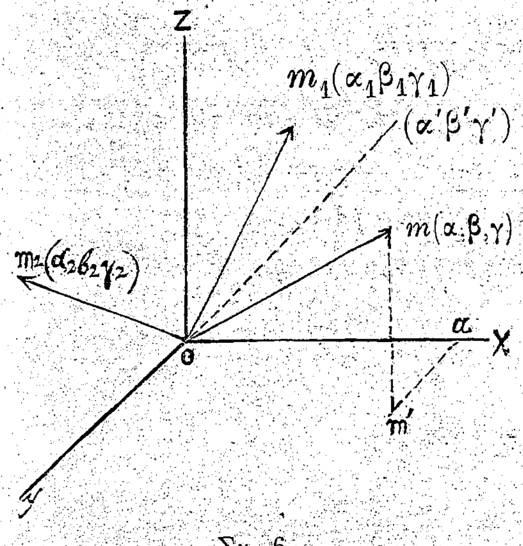
$$\begin{aligned} x &= \xi[\text{συν}\varphi\,\text{συν}\psi - \text{ἡμ}\varphi\,\text{ἡμ}\psi\,\text{συν}\theta] + \eta[-\text{ἡμ}\psi\,\text{συν}\varphi - \text{συν}\psi\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\theta] + \zeta\,\text{ἡμ}\theta\,\text{ἡμ}\varphi \\ y &= \xi[\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\psi + \text{συν}\varphi\,\text{ἡμ}\psi\,\text{συν}\theta] + \eta[-\text{ἡμ}\psi\,\text{ἡμ}\varphi + \text{συν}\psi\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}\theta] - \zeta\,\text{ἡμ}\theta\,\text{συν}\varphi \quad (12) \\ z &= \xi\,\text{ἡμ}\psi\,\text{ἡμ}\theta + \eta\,\text{συν}\psi\,\text{ἡμ}\theta + \zeta\,\text{συν}\theta \end{aligned}$$

ἀνατρέχοντες ἤδη εἰς τὰς προηγουμένας σχέσεις [5] πορίζόμεθα

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{συν}\varphi\,\text{συν}\psi - \text{ἡμ}\varphi\,\text{ἡμ}\psi\,\text{συν}\theta \\ \beta &= \text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\psi + \text{ἡμ}\psi\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}\theta \\ \gamma &= \text{ἡμ}\psi\,\text{ἡμ}\theta \\ \alpha' &= -\text{συν}\varphi\,\text{ἡμ}\psi - \text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\psi\,\text{συν}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13) \\ \beta' &= -\text{ἡμ}\varphi\,\text{ἡμ}\psi + \text{συν}\varphi\,\text{συν}\psi\,\text{συν}\theta \\ \gamma' &= \text{συν}\psi\,\text{ἡμ}\theta \\ \alpha'' &= \text{ἡμ}\varphi\,\text{ἡμ}\theta \\ \beta'' &= -\text{συν}\varphi\,\text{ἡμ}\theta \\ \gamma'' &= \text{συν}\theta \end{aligned}$$

ἐκ τούτων δὲ πορίζόμεθα εὐκόλως τὰς σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' & \alpha' &= \beta''\gamma - \gamma''\beta & \alpha'' &= \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \beta &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' & \beta' &= \gamma''\alpha - \alpha''\gamma & \beta'' &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \quad (14) \\ \gamma &= \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' & \gamma' &= \alpha''\beta - \beta''\alpha & \gamma'' &= \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{aligned}$$



Σχ. 6.

γωνία V δύο τμημάτων

Ἔστωσαν om καὶ om_1, δύο εὐθύγραμμα τμήματα καὶ (α, β, γ) $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῶν· προβάλλοντες τὴν τεθλασμένην γραμμὴν $oam'm$ καὶ τὴν συνισταμένην αὐτῆς om ἐπὶ τῆς om_1, ἔχομεν

$$x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 = om\,\text{συν}V$$

καὶ ἐκ τῶν σχέσεων (1)

$$om\alpha\alpha_1 + om\beta\beta_1 + om\gamma\gamma_1 = om\,\text{συν}V$$

ἢ $$\text{συν}V = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 \quad .(15)$$

ἐκ τούτου ἐξάγομεν

$$\eta\mu^2 V = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 V = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2) - (\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2 \quad (16)$$
$$= (\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2 + (\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2 + (\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2$$

Ἐὰν τὰ δύο τμήματα εἶναι κάθετα ἀλλήλοις ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu V = \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (17)$$

ὅπερ μᾶς ἦτο ἤδη γνωστὸν [9 καὶ 11].

Ἐὰν τὰ δύο τμήματα εἶναι παράλληλα

$$\eta\mu^2 V = (\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2 + (\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2 + (\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2 = 0 \quad (18)$$

ἢ $\alpha\beta_1-\beta\alpha_1=0 \qquad \beta\gamma_1-\gamma\beta_1=0 \qquad \gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1=0$

ἢ (18δὶς) $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$

τμῆμα κάθετον ἐπὶ δύο ἄλλων

Ἐὰν καλέσωμεν $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ τὰ συνημίτονα τοῦ τμήματος om_2 [σχ. 6] καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου mom_1 ἔχομεν

$$\alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1$$

ὑποθέτοντες $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\end{vmatrix} \gtrless 0$ ἐξάγομεν ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων

$$\alpha_2 = \gamma_2\,\frac{\beta\gamma_1-\gamma\beta_1}{\alpha\beta_1-\beta\alpha_1} \qquad \beta_2 = \gamma_2\,\frac{\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1}{\alpha\beta_1-\beta\alpha_1}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τρίτῃ εὑρίσκομεν

$$\gamma_2^2 = \frac{(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2}{\eta\mu^2 V}$$

ὥστε

$$\alpha_2 = \frac{\beta\gamma_1-\gamma\beta_1}{\eta\mu V} \qquad \beta_2 = \frac{\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1}{\eta\mu V} \qquad \gamma_2 = \frac{\alpha\beta_1-\beta\alpha_1}{\eta\mu V} \quad (19)$$

καὶ ἐὰν τὰ δύο τμήματα om καὶ om_1 κεῖνται καθέτως ἔχομεν

$$\alpha_2 = \beta\gamma_1-\gamma\beta_1 \qquad \beta_2 = \gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1 \qquad \gamma_2 = \alpha\beta_1-\beta\alpha_1 \quad (19^{\delta\grave{\iota}\varsigma})$$

σχέσεις, ἃς εὕρομεν ἤδη καὶ προηγουμένως (14).

διχοτομοῦσα δύο τμημάτων

Τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα $\alpha'\beta'\gamma'$ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν mom_1, εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

ἔχομεν

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = \sigma\upsilon\nu\frac{V}{2}$$
$$\alpha_1\alpha'+\beta_1\beta'+\gamma_1\gamma' = \sigma\upsilon\nu\frac{V}{2}$$

ἀφαιροῦντες

$$(\alpha-\alpha_1)\alpha'+(\beta-\beta_1)\beta'+(\gamma-\gamma_1)\gamma' = 0$$
$$\alpha_2\alpha'+\beta_2\beta'+\gamma_2\gamma' = 0$$
$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = 0$$

ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξάγομεν

$$\alpha' = \gamma'\,\frac{(\gamma-\gamma_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\gamma_2}{(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2} \qquad \beta' = \gamma'\,\frac{(\alpha-\alpha_1)\gamma_2-(\gamma-\gamma_1)\alpha_2}{(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τρίτῃ εὑρίκομεν

$$\gamma'^2\Big|[(\gamma-\gamma_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\gamma_2]^2+[(\alpha-\alpha_1)\gamma_2-(\gamma-\gamma_1)\alpha_2]^2+[(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2]^2\Big| = [(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2]^2$$

$$\gamma'^2\Big|(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)[(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2+(\gamma-\gamma_1)^2]\Big| = [(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2]^2$$

ἢ $\gamma'^2(2-2\sigma\upsilon\nu V) = [(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2]^2$

ἀλλ' ἔχομεν (19)

$$\beta_2 = \frac{\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1}{\eta\mu V} \qquad \alpha_2 = \frac{\beta\gamma_1-\gamma\beta_1}{\eta\mu V}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος

$$\eta\mu V[(\alpha-\alpha_1)\beta_2-(\beta-\beta_1)\alpha_2] = [(\alpha-\alpha_1)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)-(\beta-\beta_1)(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)]$$
$$= (\gamma+\gamma_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)-\gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2)-\gamma_1(\alpha^2+\beta^2) = (\gamma+\gamma_1)[\sigma\upsilon\nu V-1]$$

ὥστε

$$2\gamma'^2(1-\sigma\upsilon\nu V) = (\gamma+\gamma_1)^2\frac{(\sigma\upsilon\nu V-1)^2}{\eta\mu^2 V} \quad \text{ἢ} \quad \gamma'^2 = \frac{(\gamma+\gamma_1)^2}{4\sigma\upsilon\nu^2\frac{V}{2}}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha+\alpha_1}{2\sigma\upsilon\nu\frac{V}{2}} \qquad \beta' = \frac{\beta+\beta_1}{2\sigma\upsilon\nu\frac{V}{2}} \qquad \gamma' = \frac{\gamma+\gamma_1}{2\sigma\upsilon\nu\frac{V}{2}} \ldots\ldots (20)$$

τὴν δευτέραν διχοτομοῦσαν ὁρίζουσι τὰ συνημίτονα

$$\alpha'' = \frac{\alpha-\alpha_1}{2\eta\mu\frac{V}{2}} \qquad \beta'' = \frac{\beta-\beta_1}{2\eta\mu\frac{V}{2}} \qquad \gamma'' = \frac{\gamma-\gamma_1}{2\eta\mu\frac{V}{2}} \ldots\ldots (20^{\delta\grave{\iota}\varsigma})$$

§ 3. Ἐπιφάνειαι.

Ἐὰν αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι $x\ y\ z$ τοῦ σημείου m πληρῶσι τὴν σχέσιν

$$f(x,y,z) = 0$$

τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ ἐπιφανείας ὁριζομένης διὰ τῆς ἄνω σχέσεως τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω $\xi\ \eta\ \zeta$ ὡρισμένον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ταύτης, πληροῦν δηλαδὴ τὴν σχέσιν

$$f(\xi,\eta,\zeta)=0$$

τὴν ἄνω ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$f(x,y,z)=f(\xi+x-\xi,\ \eta+y-\eta,\ \zeta+z-\zeta)=0$$

καὶ ἀναπτύσσοντες τὸ πρῶτον μέλος κατὰ τὴν σχέσιν τοῦ Taylor

$$f=f(\xi,\eta,\zeta)+(x-\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi}+(y-\eta)\frac{\partial f}{\partial \eta}+(z-\zeta)\frac{\partial f}{\partial \zeta}+\mathrm{R}=0$$

ἔνθα R εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ διώνυμα $(x-\xi)$.....

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην ἀρκούντως μικρὰν ὥστε νὰ παραλείψωμεν τὸ R βλέπομεν, ὅτι, ἡ ἐπιφάνεια f περὶ τὸ σημεῖον $\xi,\ \eta,\ \zeta$ συμπίπτει μετὰ τῆς πρωτοβαθμίου ἐπιφανείας

$$(x-\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi}+(y-\eta)\frac{\partial f}{\partial \eta}+(z-\zeta)\frac{\partial f}{\partial \zeta}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἥτις παριστᾷ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας f παρὰ τῷ σημείῳ ξ,η,ζ.—

Ἐπίπεδον.

ἐξισώσεις τοῦ ἐπιπέδου

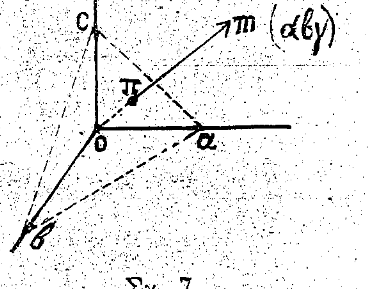
Τὰ ἐπαληθεύοντα τὴν σχέσιν

$$tx+uy+vz+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1^{\delta\iota\varsigma})$$

σημεῖα κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει τὸν ἄξονα ox εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τοῦ 0 ἴσην μὲ $-\frac{1}{t}$

τὸν oy εἰς ἀπόστασιν $b=-\frac{1}{u}$

τὸν oz εἰς ἀπόστασιν $c=-\frac{1}{v}$



Σχ. 7.

καὶ τὴν ἄνω σχέσιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν οὕτω

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου o φέρωμεν τὴν om κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $a\ b\ c$, om εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς πa καὶ ἔχομεν

$$oa=a=\frac{o\pi}{\alpha}=\frac{p}{\alpha} \qquad b=\frac{p}{\beta} \qquad c=\frac{p}{\gamma}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (2) εὑρίσκομεν

$$x\alpha+y\beta+z\gamma=p \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ἔνθα $(\alpha\beta\gamma)$ εἶναι τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τοῦ τμήματος om ἢ τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον abc μετὰ τῶν ἐπιπέδων $yoz,\ zox,\ xoy$,

Ἔστωσαν $x_0y_0z_0$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου π· εἰς τὴν σχέσιν (3) δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὴν μορφὴν

ἐπίπεδον ὁριζόμενον ὑπὸ σημείου καὶ 2 τμημάτων

$$(3^{\delta\iota\varsigma}) \qquad (x-x_0)\alpha+(y-y_0)\beta+(z-z_0)\gamma=0$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις (19) βλέπομεν ὅτι τὸ διὰ τῶν τμημάτων $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ καὶ τοῦ σημείου $(x_0y_0z_0)$ διερχόμενον ἐπίπεδον εἶναι

$$(x-x_0)[\beta\gamma_1-\gamma\beta_1]+(y-y_0)[\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1]+(z-z_0)[\alpha\beta_1-\beta\alpha_1]=0 \ldots (4)$$

ἰθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἐπιπέδου

Αἱ σχέσεις $(1^{\delta\iota\varsigma})$ καὶ (3) παριστῶσι τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὥστε

$$\frac{\alpha}{t}=\frac{\beta}{u}=\frac{\gamma}{v}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}$$

ὅθεν

$$\alpha=\frac{t}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}} \quad \beta=\frac{u}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}} \quad \gamma=\frac{v}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}} (5)$$

Ἔστω καὶ ἕτερον ἐπίπεδον τὸ

$$t_1x+u_1y+v_1z+1=0$$

τὰ συνημίτονα τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου 0 καθέτου om' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι

$$\alpha_1=\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2+u_1^2+v_1^2}} \quad \beta_1=\frac{u_1}{\sqrt{t_1^2+u_1^2+v_1^2}} \quad \gamma_1=\frac{v_1}{\sqrt{t_1^2+u_1^2+v_1^2}}$$

τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας $mom'=V$ ἥτις εἶναι καὶ ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι

γωνία δύο ἐπιπέδων

$$\text{συν}V=\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=\frac{tt_1+uu_1+vv_1}{\sqrt{(t^2+v^2+u^2)(t_1^2+u_1^2+v_1^2)}} (6)$$

Ἐὰν τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἔχομεν

$$tt_1+uu_1+vv_1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ἐὰν εἶναι παράλληλα ἔχομεν

$$(t^2+u^2+v^2)\ (t_1^2+u_1^2+v_1^2)-(tt_1+uu_1+vv_1)^2=0$$

ἢ

$$\frac{t}{t_1}=\frac{u}{u_1}=\frac{v}{v_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου

Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου o ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου $a\,b\,c$ οὖσα p ἐκ τῶν σχέσεων (1δὶς) καὶ (3) πορίζόμεθα

$$-p=\frac{\alpha}{t}=\frac{\beta}{u}=\frac{\gamma}{v}=\frac{1}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}$$

ὅθεν

$$p=\frac{-1}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}\ldots\ldots\ldots(9)$$

ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $x_1y_1z_1$ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (t,u,v) εὑρίσκεται διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων

$$p_1=-\frac{tx_1+uy_1+vz_1+1}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}\ldots\ldots\ldots(9^{\delta\acute{\iota}\varsigma})$$

ἢ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις (5) καὶ (9)

$$\pm p_1=x_1\alpha+y_1\beta+z_1\gamma-p$$

§ 4. Εὐθεῖα γραμμή.

ἐξισώσεις τῆς εὐθείας

Αἱ δύο ὁμοῦ σχέσεις

$$\begin{matrix} tx+uy+vz+1=0 \\ t_1x+u_1y+v_1z+1=0\end{matrix}\ldots(1)\qquad\text{ἢ}\qquad \begin{matrix}x=rz+\rho\\ y=sz+\sigma\end{matrix}\ldots\ldots(2)$$

παριστῶσιν εὐθεῖαν γραμμήν, τῆς ὁποίας τὰς ἐξισώσεις δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$z=\frac{x-\rho}{r}=\frac{y-\sigma}{s}$$

ἢ ἐπὶ τὸ συμμετρικώτερον

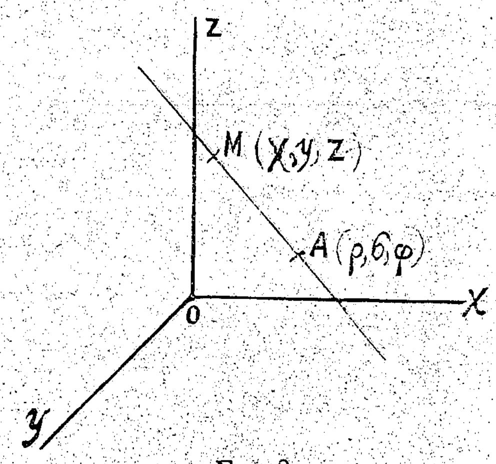
$$\frac{x-\rho}{r}=\frac{y-\sigma}{s}=\frac{z-\varphi}{f}\ldots\ldots\ldots(3)$$

ρ,σ,φ εἶναι προφανῶς αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Α τῆς εὐθείας. Ἡ διὰ τῶν σημείων $(x_1y_1z_1)$ καὶ $(x_2y_2z_2)$ διερχομένη εὐθεῖα εἶναι

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ἰθύνοντα συνημίτονα

Ἔστωσαν α β γ τὰ μετὰ τῶν ἀξόνων συνημίτονα τῆς εὐθείας (3) ἔχομεν



Σχ. 8.

$$x-\rho=\mathrm{AM}\alpha\qquad y-\sigma=\mathrm{AM}\beta\qquad z-\varphi=\mathrm{AM}\gamma$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς σχέσεις (3)

ὅθεν

$$\frac{\alpha}{r}=\frac{\beta}{s}=\frac{\gamma}{f}=\frac{1}{\pm\sqrt{r^2+s^2+f^2}}$$

$$\alpha=\frac{r}{\sqrt{r^2+s^2+f^2}}\qquad \beta=\frac{s}{\sqrt{r^2+s^2+f^2}}\qquad \gamma=\frac{\varphi}{\sqrt{r^2+s^2+f^2}}\;(4)$$

γωνία δύο εὐθειῶν

Ἡ γωνία V δύο εὐθειῶν r,s,f καὶ $r_1\,s_1\,f_1$ προσδιορίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\text{συν}\,V=\frac{rr_1+ss_1+ff_1}{\sqrt{(r^2+s^2+f^2)\,(r_1^2+s_1^2+f_1^2)}}\ldots\ldots(5)$$

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἔχομεν

$$rr_1+ss_1+ff_1=0\ldots\ldots\ldots(6)$$

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι ἔχομεν

$$\frac{r}{r_1}=\frac{s}{s_1}=\frac{f}{f_1}\ldots\ldots\ldots(7)$$

βραχυτάτη ἀπόστασις δύο εὐθειῶν

Ἡ βραχυτάτη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν

$$(x_1\,y_1\,z_1)\,(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)\qquad\text{καὶ}\qquad(x_2\,y_2\,z_2)\,(\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2)$$

εἶναι

$$(x_1-x_2)\lambda+(y_1-y_2)\mu+(z_1-z_2)\nu\ldots\ldots(8)$$

ἔνθα $\lambda=\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2\qquad \mu=\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2\qquad \nu=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2$

ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας

Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $x_0y_0z_0$ ἀπὸ τῆς εὐθείας

$$\frac{x-\rho}{r}=\frac{y-\sigma}{s}=\frac{z-\varphi}{f}$$

εἶναι

$$\delta^2=\frac{U^2+V^2+W^2}{r^2+s^2+f^2}\ldots\ldots\ldots(9)$$

ἔνθα

$$U=r(y_0-\sigma)-s(x_0-\rho)$$
$$V=s(z_0-\varphi)-f(y_0-\sigma)$$
$$W=f(x_0-\rho)-r(z_0-\varphi)$$

Διὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ἰδίᾳ ἔχομεν

$$x_0=y_0=z_0=0$$

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $x\,z$ ἔχομεν

$$s=0\qquad\sigma=0$$

καὶ

$$\delta=\frac{f\rho-r\varphi}{r^2+f^2}\ldots\ldots\ldots(9^{\delta\acute{\iota}\varsigma})$$

γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου

Γωνία V τῆς εὐθείας

$$0m\equiv\frac{x-\rho}{r}=\frac{y-\sigma}{s}=\frac{z-\varphi}{f}$$

μετὰ τοῦ ἐπιπέδου

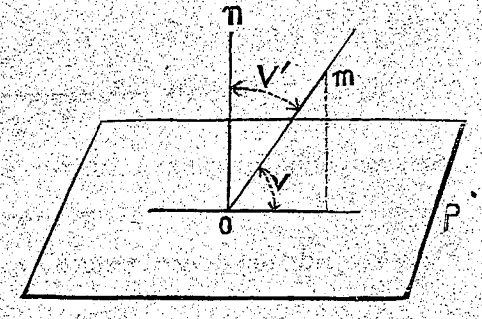
$$P \equiv tx+uy+vz+1=0$$

ἔστωσαν

$$\alpha=\frac{r}{\pm\sqrt{r^2+s^2+f^2}}\qquad \beta=\frac{s}{\pm\sqrt{r^2+s^2+f^2}}\qquad \gamma=\frac{f}{\pm\sqrt{r^2+s^2+f^2}}$$

τὰ συνημίτονα τῆς εὐθείας om·

τὰ συνημίτονα τῆς εὐθείας on εἶναι (§ 3. 5)



Σχ. 9.

$$\alpha'=\frac{t}{\pm\sqrt{t^2+u^2+v^2}}$$

$$\beta'=\frac{u}{\pm\sqrt{t^2+u^2+v^2}}$$

$$\gamma'=\frac{v}{\pm\sqrt{t^2+u^2+v^2}}$$

ἔχομεν λοιπὸν [§ 2. 15]

$$\text{συν}\, V'=\text{ἡμ}\, V=\frac{tr+us+vf}{\sqrt{(t^2+u^2+v^2)(r^2+s^2+f^2)}}\ldots(10)$$

$$\text{καὶ}\quad \text{συν}^2 V=1-\text{ἡμ}^2 V=\frac{(ts-ur)^2+(uf-vs)^2+(vr-tf)^2}{(t^2+u^2+v^2)(r^2+s^2+f^2)}\ (11)$$

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ἔχομεν

$$tr+us+vf=0\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ, ἔχομεν

$$\frac{t}{r}=\frac{u}{s}=\frac{v}{f}\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς καθέτου παρὰ τῷ σημείῳ $0\ (x_0y_0z_0)$ εἶναι

$$\frac{x-x_0}{t}=\frac{y-y_0}{u}=\frac{z-z_0}{v}\ldots\ldots(14)$$

§ 3. Στρεβλαὶ γραμμαί.

Τὸ σημεῖον $x=f(t)\quad y=\varphi(t)\quad z=\psi(t)$

διαγράφει ἐν τῷ διαστήματι τὴν γραμμὴν 1—2—3—4...

διαφορικὸν τοῦ τόξου

Ἐὰν καλέσωμεν x,y,z τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου 1 τὸ τόξον 1—2$=ds$ προσδιορίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\ldots\ldots\ldots(1)$$

καὶ ἐν σφαιρικαῖς συντεταγμέναις (§ 2.2)

$$(ds)^2=(d\rho)^2+\rho^2(d\lambda)^2+\rho^2\text{συν}^2\lambda(d\varphi)^2\ldots\ldots(2)$$

Τὰ συνημίτονα α,β,γ τοῦ τόξου ds μετὰ τῶν ἀξόνων ox, oy, oz προσδιορίζονται διὰ τῶν σχέσεων

ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης

$$\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

Σχ. 10.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης παρὰ τῷ σημείῳ $x.y.z$ εἶναι λοιπὸν

ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}\ldots\ldots\ldots(4)$$

Τὸ κάθετον ταύτῃ ἐπίπεδον εἶναι

κάθετον ἐπίπεδον

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0\ldots\ldots(5)$$

Τὰ μετὰ τῶν ἀξόνων συνημίτονα τῆς ἀμέσως ἀκολούθου ἐφαπτομένης 2—3 εἶναι

$$\alpha_1=\frac{d(x+dx)}{\sqrt{[d(x+dx)]^2+[d(y+dy)]^2+[d(z+dz)]^2}}$$

$$\beta_1=\frac{d(y+dy)}{\sqrt{[d(x+dx)]^2+[d(y+dy)]^2+[d(z+dz)]^2}}$$

$$\gamma_1=\frac{d(z+dz)}{\sqrt{[d(x+dx)]^2+[d(y+dy)]^2+[d(z+dz)]^2}}$$

Τὴν γωνίαν $d\theta$ προσδιορίζομεν διὰ τῆς σχέσεως [§ 2. 16]

γωνία $d\theta$ συνεπαφῆς

$$d\theta^2=\text{ἡμ}^2\theta=(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2+(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2+(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2\ldots(6)$$

$$=\frac{[dyd^2z-dzd^2y]^2+[dzd^2x-dxd^2z]^2+[dxd^2y-dyd^2x]^2}{[dx^2+dy^2+dz^2]^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{ds^4}$$

ἔνθα

$$A=dyd^2z-dzd^2y\quad B=dzd^2x-dxd^2z\quad C=dxd^2y-dyd^2x$$

εὐκόλως δὲ ἐπαληθεύομεν καὶ τὰς σχέσεις

$$Adx+Bdy+Cdz=0$$

$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0\ldots\ldots\ldots(7$$

$$dA\,dx+dBdy+dCdz=0$$

Τὸ ἄθροισμα $A^2+B^2+C^2=D^2$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ὡς ἑξῆς:

$$A^2+B^2+C^2=[dx^2+dy^2+dz^2]\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]$$
$$-[dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z]^2=ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-ds^2(d^2s)^2$$

ἢ τέλος

$$A^2+B^2+C^2=ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]\ldots\ldots(8)$$

ἀλλὰ

$$dx=\frac{dx}{ds}ds \qquad d^2x=\frac{d^2x}{ds^2}ds^2+\frac{dx}{ds}d^2s$$

ὅθεν

$$(d^2x)^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 ds^4+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2(d^2s)^2+2\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds}(ds^2)d^2s$$

ὥστε

$$(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2=ds^4\left|\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right|$$
$$+(d^2s)^2\left|\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right|$$
$$+2(ds^2)d^2s\left|\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\right.$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$
$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0$$

μένει

$$(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2=ds^4\left|\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right|+(d^2s)^2 \quad (9)$$

ὥστε

$$A^2+B^2+C^2=ds^6\left|\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right|\cdot \quad (10)$$

καὶ τότε ἡ γωνία $d\theta$ ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$d\theta^2=ds^2\left|\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right|\ldots\ldots(11)$$

καμπυλότης τῆς γραμμῆς — Καμπυλότητα τῆς γραμμῆς παρὰ τῷ σημείῳ x,y,z καλοῦμεν τὸν λόγον

$$\frac{d\theta}{ds}=\left|\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots(12)$$

Ἀκτῖνα καμπυλότητος καλοῦμεν τὸ μετὰ τῆς πρωτευούσης καθέτου συμπίπτον εὐθύγραμμον τμῆμα, οὗτινος τὸ μῆκος εἶναι — ἀκτὶς καμπυλότητος

$$R=\frac{ds}{d\theta}=\left|\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right|^{-\frac{1}{2}}\ldots\ldots(13)$$

Ἐκ προηγουμένων σχέσεων (9. 11) πορίζόμεθα ἐπίσης

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{ds^2}[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}}{ds^3} \quad (14)$$

Ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως (12) βλέπομεν ὅτι, αἱ προβολαὶ τοῦ ἀντιστρόφου $\frac{1}{R}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος ἐπὶ τῶν ἀξόνων ox,oy,oz εἶναι — ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος

$$\frac{d^2x}{ds^2} \quad \frac{d^2y}{ds^2} \quad \frac{d^2z}{ds^2}$$

Ἔχομεν λοιπὸν

$$\frac{1}{R}\text{συν}(R,x)=\frac{d^2x}{ds^2} \quad \frac{1}{R}\text{συν}(R,y)=\frac{d^2y}{ds^2} \quad \frac{1}{R}\text{συν}(R,z)=\frac{d^2z}{ds^2}$$

ἢ

$$\text{συν}(R,x)=R\frac{d^2x}{ds^2} \quad \text{συν}(R,y)=R\frac{d^2y}{ds^2} \quad \text{συν}(R,z)=R\frac{d^2z}{ds^2}\ldots\ (15)$$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος εἶναι — κέντρον καμπυλότητος

$$X=x+R^2\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} \quad Y=y+R^2\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} \quad Z=z+R^2\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} \quad (16)$$

Τὸ ὑπὸ δύο διαδοχικῶν ἐφαπτομένων 1—2 καὶ 2—3 ὁριζόμενον ἐπίπεδον καλοῦμεν *ἐγγύτατον ἐπίπεδον* (plan osculateur) τῆς τροχιᾶς παρὰ τῷ σημείῳ x,y,z· ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶναι (§ 3. 4) — ἐγγύτατον ἐπίπεδον

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0\ldots\ldots\ldots(17)$$

Τὸν διὰ τοῦ σημείου x,y,z διερχόμενον καὶ ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ κείμενον κύκλον ἀκτῖνος R, οὗτινος τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου, καλοῦμεν ἐγγύτατον τῇ καμπύλῃ κύκλον παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ. — ἐγγύτατος κύκλος

Ἡ διὰ τοῦ σημείου x,y,z κάθετος τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ εἶναι — ἰθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

τὰ συνημίτονα τῶν μετὰ τῶν ἀξόνων γωνιῶν αὐτῆς εἶναι

$$\lambda=\frac{A}{D} \quad \mu=\frac{B}{D} \quad \nu=\frac{C}{D}\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

ἢ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος (14)

$$\frac{\lambda}{R}=\frac{A}{ds^3}\qquad \frac{\mu}{R}=\frac{B}{ds^3}\qquad \frac{\nu}{R}=\frac{C}{ds^3}\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

ἢ ὅπερ ταὐτὸν

$$\frac{\lambda}{R}=\frac{\frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$\frac{\mu}{R}=\frac{\frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}d\frac{dz}{ds}}{ds}\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

$$\frac{\nu}{R}=\frac{\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}}{ds}$$

γωνία στρέψεως

Τὴν γωνίαν $d\varphi$ δύο διαδοχικῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων, ὧν τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα εἶναι

$$\lambda \qquad \mu \qquad \nu$$

καὶ

$$\lambda+d\lambda \qquad \mu+d\mu \qquad \nu+d\nu$$

εὑρίσκομεν διὰ τοῦ τύπου (§ 1.16)

$$\text{ἡμ}^2 d\varphi=d\varphi^2=(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2)-(\lambda d\lambda+\mu d\mu+\nu d\nu)^2=d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2$$

ὅθεν

$$d\varphi=[d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{Ad^3x+Bl^3y+Cd^3z}{D^2}ds\ldots(22)$$

στρέψις τῆς γραμμῆς

Ἡ στρέψις ἢ δευτέρα καμπυλότης $\tau=\frac{d\varphi}{ds}$ ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\tau=\frac{d\varphi}{ds}=\left|\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots(23)$$

καὶ ἐπειδὴ (§ 1.16)

$$\frac{d\lambda}{ds}=\mu\frac{d\nu}{ds}-\nu\frac{d\mu}{ds}\qquad \frac{d\mu}{ds}=\ldots\ldots\qquad \frac{d\nu}{ds}=\ldots\ldots(24)$$

ἔχομεν

$$\tau=\left|\left(\mu\frac{d\nu}{ds}-\nu\frac{d\mu}{ds}\right)^2+\left(\nu\frac{d\lambda}{ds}-\lambda\frac{d\nu}{ds}\right)^2+\left(\lambda\frac{d\mu}{ds}-\mu\frac{d\lambda}{ds}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}\ldots(25)$$

§ 6. Ἐπίπεδοι γραμμαί.

ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς

Ἐὰν τὸ ἐγγύτατον τῇ καμπύλῃ ἐπίπεδον παρὰ τοῖς διαφόροις αὐτῆς σημείοις εἶναι σταθερόν, ἔχομεν (§ 5. 22) $d\varphi=0$ ἢ

$$Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z=\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z\\ d^3x & d^3y & d^3z\end{vmatrix}=0\ldots(1)$$

καὶ ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος· ὁρίζεται δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ της διὰ δύο μόνον σχέσεων

$$x=f(t)\qquad y=\varphi(t)$$

ὁδηγούμενοι ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι ἔχομεν καὶ ἐνταῦθα τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου

διαφορικὸν τοῦ τόξου

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

καὶ ἐν πολικαῖς συντεταγμέναις

$$ds^2=(d\rho)^2+\rho^2(d\lambda)^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ἐφαπτομένη

τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης εἶναι

$$\alpha=\frac{dx}{ds}\qquad \beta=\frac{dy}{ds}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

γωνία μετὰ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος

ἡ γωνία β τῆς πολικῆς ἀκτῖνος μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\text{εφ}\beta=\frac{\rho d\lambda}{d\rho}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{συν}\beta=\frac{d\rho}{ds}\qquad \text{ἡμ}\beta=\frac{p}{\rho}$$

ἀπόστασις τοῦ πόλου ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης

Ἔστω p ἡ ἀπόστασις τοῦ πόλου 0 ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης· ἔχομεν

$$p=\rho\,\text{ἡμ}\beta$$

ἢ θέτοντες

$$u=\frac{1}{\rho}$$ καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$$p^2u^2=\text{ἡμ}^2\beta$$

ἐκ τῆς ἄνω δὲ σχέσεως (6)

$$\text{εφ}\beta=\frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)}=-\frac{u}{\left(\frac{du}{d\lambda}\right)}$$

πορίζόμεθα $\quad ἡμ^2β = \dfrac{εφ^2β}{1+εφ^2β} = \dfrac{u^2}{u^2+\left(\dfrac{du}{dλ}\right)^2}$

καὶ ἀντικαθιστῶντες $\quad p^2u^2 = \dfrac{u^2}{u^2+\left(\dfrac{du}{dλ}\right)^2}$

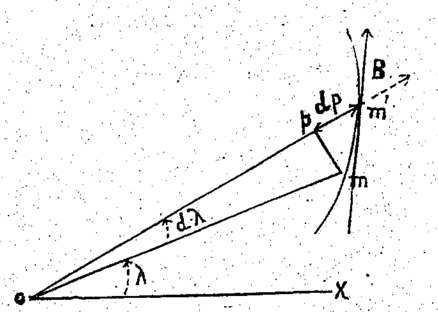
ἢ
$$\frac{1}{p^2} = u^2+\left(\frac{du}{dλ}\right)^2 \dots\dots\dots\dots (7)$$

κάθετος — Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἶναι

$$(X-x)dx+(Y-y)dy=0 \dots (8)$$

γωνία συνεπαφῆς — Ἡ γωνία δύο διαδοχικῶν ἐφαπτομένων ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$dθ^2 = ἡμ^2θ = \frac{(dxd^2y-dyd^2x)^2}{dx^2+dy^2} \quad (9)$$



Σχ. 11.

καμπυλότης — Ἡ καμπυλότης εἶναι

$$\frac{dθ}{ds} = \frac{dxd^2y-dyd^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left|1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right|^{\frac{3}{2}}} \dots (10)$$

Ἐν πολικαῖς συντεταγμέναις ἔχομεν

$$θ = λ+β \qquad καὶ \quad dθ = dλ+dβ$$

ὅθεν
$$\frac{1}{R} = \frac{dθ}{ds} = \frac{dλ}{ds}+\frac{dβ}{ds} \dots\dots\dots\dots (10^{δὶς})$$

τὴν δὲ γωνίαν β ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως (6)

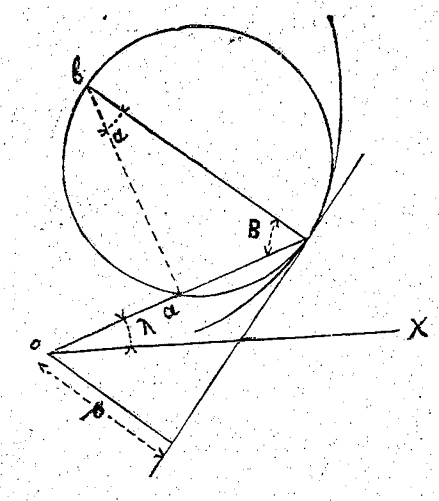
$$β = τοξ.\ εφ\left(ρ\frac{dλ}{dρ}\right)$$

κύκλος καμπυλότητος — Τὸν διὰ τοῦ σημείου xy καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γραμμῆς κείμενον κύκλον ἀκτῖνος R, οὗτινος τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου, καλοῦμεν ἐγγύτατον τῇ καμπύλῃ κύκλον.

κέντρον καμπυλότητος — Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος παρὰ τῷ σημείῳ x,y εἶναι

$$X = x-R\frac{dy}{ds} = x-\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)} \dots\dots (11)$$

$$Y = y+R\frac{dx}{ds} = y+\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}$$



Σχ. 12.

πολικὴ χορδὴ καμπυλότητος — Ἐν τῷ ἔναντι σχήματι ἔχομεν

$$p = ρἡμ.β$$

$$am = mbἡμ.α = 2Rἡμ(π-β) = 2Rἡμ.β$$

ὥστε χορδὴ $\quad am = \dfrac{2Rp}{ρ} \dots\dots (12)$

§ 7. Γραμμαὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

Θεωρήσωμεν ἐπιφάνειαν τὴν

$$F(x,y,z)=0$$

δι' ἑνὸς σημείου ταύτης m διέρχονται ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν γραμμαὶ κείμεναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· δυνάμεθα δὲ νὰ ἀντικαταστήσωμεν ταύτας παρὰ τῷ σημείῳ m διὰ τῶν ἐπιπέδων γραμμῶν ἐν αἷς τέμνουσι τὴν ἐπιφάνειαν τὰ ἐγγύτατα τῶν πρώτων ἐπίπεδα. Ἐκείνας ἐκ τῶν τομῶν, ὧν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον ἐμπεριέχει τὴν κάθετον τῇ ἐπιφανείᾳ, καλοῦμεν ὀρθὰς τομάς.

Θεωρήσωμεν δύο τομάς, ὧν ἡ μὲν abc' ὀρθή, ἡ δὲ abc σχηματίζουσα μετὰ τῆς καθέτου γωνίαν θ, καὶ ἔστωσαν ab, bc καὶ ab, bc' δύο διαδοχικὰ στοιχειώδη τόξα τῶν γραμμῶν τούτων. Ἔστω bd ἡ προεκβολὴ τῆς ab· ἐὰν καλέσωμεν R καὶ ρ τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τῶν γραμμῶν abc' καὶ abc ἔχομεν

$$\frac{\widehat{dbc'}}{ab} = \frac{1}{R} \qquad καὶ \quad \frac{\widehat{dbc}}{ab} = \frac{1}{ρ}$$

ἢ ἐὰν διὰ τοῦ σημείου b νοήσωμεν σφαῖραν ὁρίζουσαν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν bd, bc', bc τὰ σημεῖα c, c', d ἔχομεν

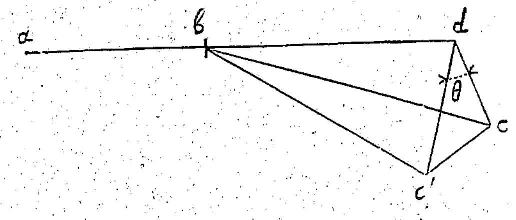
$$\frac{τοξ\ c'd}{ab} = \frac{1}{R} \qquad \frac{τοξ\ cd}{ab} = \frac{1}{ρ}$$

ἀλλ' ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ $cc'd$ ἔχομεν

$$cd=c'd.\frac{1}{\text{συν}\theta} \qquad cd=c'c\frac{1}{\text{ημ}\theta}$$

ὅθεν

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R\,\text{συν}\theta}$$



Σχ. 13.

Θεώρημα τοῦ Meunier

Τὸ κέντρον δηλαδὴ τῆς καμπυλότητος τῆς πλαγίας τομῆς εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ταύτης προβολὴ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος τῆς ὀρθῆς τομῆς (Meunier).

ὁ λόγος $\frac{cc'}{ab}=\frac{1}{R'}$ καλεῖται γεωδετικὴ καμπυλότης καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{\rho}\,\text{ημ}\theta$$

γεωδετικαὶ γραμμαί

Ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ Meunier βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ γραμμή, ἧς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὁρίζει τὴν συντομωτέραν ὁδὸν μεταξὺ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας.

Τὸ στοιχειῶδες τόξον $mm'=ds$ οἱασδήποτε γραμμῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δυνάμεθα τῷ ὄντι ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ τόξου τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου, ὅπερ εἶναι προφανῶς ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῇ ἀκτῖνι τῆς καμπυλότητος· ἀλλ' ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Meunier ἡ μεγαλειτέρα ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι ἡ τῆς ὀρθῆς τομῆς· εἰς ταύτην λοιπὸν ἀντιστοιχεῖ καὶ ἡ συντομωτέρα ὁδὸς μεταξὺ τῶν σημείων m καὶ m'.

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ.

1. Ἡ σπουδὴ τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου σκοπεῖ

1ον) Τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως, ἣν κατέχει ἐν τῷ διαστήματι τὸ κινούμενον σημεῖον ἐν ὡρισμένῃ τινὶ στιγμῇ· ἢ

2ον) Δοθείσης τῆς θέσεως ταύτης προσδιορίσαι τὴν ἀντιστοιχοῦσαν στιγμήν.

Τὸ διπλοῦν τοῦτο πρόβλημα λύομεν ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἐὰν ὁρίσωμεν τὰς συντεταγμένας x,y,z τοῦ κινητοῦ συναρτήσει τοῦ χρόνου t διὰ τῶν σχέσεων

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad z=\chi(t) \ldots\ldots\ldots (1)$$

ὡς πρὸς τὸ ἀμεταστάτως κείμενον σύστημα $O(x,y,z)$.

Αἱ τρεῖς αὗται σχέσεις ὁρίζουσι γραμμήν, τὴν τροχιὰν τοῦ κινητοῦ. Τῆς τροχιᾶς ὁρισθείσης οὕτω, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν καὶ τὴν θέσιν, ἣν κατέχει τὸ κινητὸν ἐπ' αὐτῆς διὰ τῆς σχέσεως

$$s=f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἥτις συνδέει τὰ τόξα αὐτῆς 01,02,03,04 ..... (ἅτινα παριστῶμεν διὰ τοῦ s ὑπολογιζόμενα ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου 0 θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τούτου), πρὸς τὰ χρονικὰ διαστήματα $t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots\ldots$ ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν.

Σημειώσεις. Ἐν τῇ σχέσει $s=f(t)$, s καὶ t δὲν παριστῶσιν αὐτὰ τὰ τόξα καὶ τὸν χρόνον, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν δύο ποσότητας διαφόρου φύσεως, οἷαι εἰσὶ τὸ διάστημα καὶ ὁ χρόνος, s καὶ t εἶναι δύο ἀριθμοὶ ἐμφαίνοντες, ὁ μὲν s τὸν λόγον τῶν διανυομένων τόξων πρὸς τὴν καταμετροῦσαν αὐτὰ μονάδα (τὸ μέτρον), ὁ δὲ t τὸν λόγον τῶν κατὰ τὴν πορείαν τοῦ κινητοῦ παρερχομένων χρονικῶν διαστημάτων πρὸς τὴν καταμετροῦσαν καὶ ταῦτα μονάδα (τὸ δευτερόλεπτον).

Ἡ μονὰς διὰ τῆς ὁποίας μετροῦμεν τὰ μήκη, *τὸ μέτρον*, ἰσοῦται μὲ 0,0000001 τοῦ τετάρτου ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γηΐνου σφαίρας· τὸ μῆκος 90° τοῦ μεσημβρινοῦ ἰσοῦται λοιπὸν μὲ 10000000 μέτρα.

Ἐν τῇ ναυτιλίᾳ ὡς μονὰς λαμβάνεται τὸ μίλιον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος

$$\frac{10000000}{90^0\times 60'}=1851{,}8 \text{ μέτρα}$$

ἑνὸς λεπτοῦ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Ἡ λεύγα ἰσοῦται μὲ τρία ναυτικὰ μίλια, τουτέστι 5555,4 μέτρα.

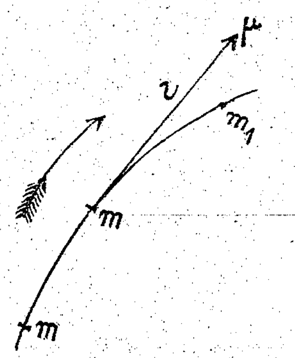
Εἰς τὰς ἀστρονομικὰς καταμετρήσεις ὡς μονὰς λαμβάνεται ἡ διάρκεια τῆς περὶ τὸν ἄξονά της περιστροφῆς τῆς γῆς (**jour sidéral**)· μετρεῖται δὲ αὕτη ἐν ἑκάστῳ σημείῳ τῆς γηΐνου ἐπιφανείας ἀπὸ τῆς διαβάσεως τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ σημείου τούτου δι' ὡρισμένου σημείου τοῦ οὐρανοῦ γ (τομὴ τῆς ἐκλειπτικῆς μετὰ τοῦ ἰσημερινοῦ), ὅπερ καλοῦσιν ἐαρινὸν ἰσημερινὸν σημεῖον. Ἡ μονὰς αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα εἰς 60 λεπτὰ καὶ ἕκαστον λεπτὸν εἰς 60 δευτερόλεπτα, οὕτως ὥστε 24 ὧραι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς γωνίαν 360^0, μία ὥρα εἰς 15^0, ἓν λεπτὸν εἰς 15′ καὶ ἓν δευτερόλεπτον εἰς 15″.

Ἐν τῇ μηχανικῇ ὡς μονὰς καταμετρήσεως τοῦ χρόνου λαμβάνεται τὸ *δευτερόλεπτον*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Περὶ ταχύτητος.

2. Εἴπομεν ἤδη ἀνωτέρω τί ἐννοοῦμεν μὲ τὴν φράσιν *φορὰ κινήσεως*, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ἀδιακρίτως καὶ *φορὰν ταχύτητος*. ἀφοῦ πρῶτον ὁρίσωμεν ἀκριβῶς τὴν ἔννοιαν ἣν ἀποδίδομεν εἰς τὴν λέξιν *ταχύτης*, καὶ ὑποδείξωμεν τὸν τρόπον τῆς καταμετρήσεως αὐτῆς καὶ παραστάσεως δι' ἀριθμοῦ τινος, τὸν ὁποῖον μόνον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, ὧν θὰ κάμωμεν χρῆσιν ἐν τῇ σπουδῇ τῆς κινήσεως. Τὴν πρώτην ἰδέαν τῆς κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ταχείας κινήσεως τοῦ κινητοῦ m, κατὰ τὴν μετάβασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς θέσεως m_0 εἰς τὴν θέσιν m_1, σχηματίζομεν παραβάλλοντες τὸ μῆκος m_0mm_1 τοῦ διανυθέντος ὑπ' αὐτοῦ τόξου πρὸς τὸν χρόνον t_1-t_0, ἐν ᾧ τοῦτο διηνύθη, καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν λόγον τοῦτον



Σχ. 14.

$\dfrac{\text{τοξ. } m_0mm_1}{t_1-t_0}$ ὡς μέτρον τῆς *μέσης ταχύτητος* μεθ' ἧς τὸ κινητὸν διήνυσε τὸ τόξον m_0mm_1.

3. Ἐὰν δὲ τὸ κινητὸν m διήνυσεν *ἰσοταχῶς* τὸ τόξον τοῦτο, τουτέστιν, ἐὰν τὰ ἐν ἴσοις χρόνοις διανυθέντα τόξα εἶναι ἴσα ὁπουδήποτε τοῦ τμήματος m_0mm_1 τῆς τροχιᾶς καὶ ἂν θεωρηθῶσι ταῦτα, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι σταθερά, καὶ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ δια-

νυόμενα τόξα πρὸς τοὺς χρόνους ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν, λαμβάνει τὴν ἁπλουστάτην μορφὴν

$$\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=v \quad \text{ἢ} \quad s_1=s_0+v(t_1-t_0)\ldots\ldots\ldots(1)$$

ἐν ᾗ καταφαίνεται ἀμέσως, ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰ διανυόμενα ἐπὶ τῆς τροχιᾶς τόξα s_1-s_0 μεταβάλλονται ὁμοιομόρφως προϊόντος τοῦ χρόνου $\substack{\text{αὐξανόμενα}\\ \text{ἐλαττούμενα}}$ κατὰ μήκη ἴσα ἐν ἴσοις χρονικοῖς διαστήμασιν, ἐὰν ἡ ποσότης v εἶναι $\substack{\text{θετική}\\ \text{ἀρνητική}}$, καὶ εἶναι διαρκῶς ἀνάλογα τῶν χρόνων ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν.

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὸ μῆκος τοῦ διανυθέντος τόξου σ κατὰ τὸν χρόνον $t+1$ βλέπομεν ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ

$$\sigma=s_0+v(t_1-t_0+1)=s_0+v(t_1-t_0)+v=s+v$$

οὕτως ὥστε ἡ $\substack{\text{αὔξησις}\\ \text{ἐλάττωσις}}$, ἣν ὑφίστανται ἐν μιᾷ μονάδι χρόνου τὰ διανυόμενα διαστήματα, ἰσοῦται τῇ ποσότητι v, ἥτις διὰ τὸν λόγον τοῦτον δύναται νὰ ληφθῇ ὡς μέτρον τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ ἐν τῇ ἁπλῇ ταύτῃ κινήσει, ἣν ὀνομάζομεν *ἰσοταχῆ κίνησιν*, ἐπὶ τῆς ὡρισμένης τροχιᾶς m_0mm_1.

Τὴν ποσότητα $v=\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$, ἥτις μᾶς χρησιμεύει ὡς μέτρον ἁπλῶς τῆς ταχύτητος ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει καλοῦμεν, πρὸς συντομίαν, *ταχύτητα* τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ. ταχύτης ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει

Οὕτως ὥστε, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ ταχύτης κινητοῦ κινουμένου ἰσοταχῶς ἐπὶ ὡρισμένης τροχιᾶς ἰσοῦται μὲ ± 5, ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ κινητὸν φέρεται ὑπὸ κινήσεως, δι' ἧς τὰ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς διανυόμενα διαστήματα $\substack{\text{αὐξάνουσιν}\\ \text{ἐλαττοῦνται}}$ κατὰ πέντε μέτρα ἐν χρονικῷ διαστήματι ἑνὸς δευτερολέπτου.

Ἀλλ' ἐν τῇ κινήσει ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ δυνατὸν νὰ μεταβάλληται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, καὶ τότε ὁ λόγος μέση ταχύτης ἐν ἀνισοταχεῖ κινήσει
$\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$ μετρεῖ τὴν *μέσην* μόνον *ταχύτητα*, μεθ' ἧς, φερόμενον ἰσοταχῶς ἕτερον κινητὸν θὰ διέγραφεν ἐν τῷ αὐτῷ μὲ τὸ πρῶτον χρόνῳ, τὸ μῆκος τοῦ τόξου m_0m_1, χωρὶς ὅμως νὰ συμπίπτῃ μετ' αὐτοῦ διαρ-

κῶς κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου m_0 εἰς τὸ m_1 μετάβασιν, οὐχὶ δὲ καὶ τὴν ἀπόλυτον ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν συμπίπτει τοῦτο μετὰ σημείου οἱουδήποτε m τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ m_0mm_1, τὴν ταχύτητα δηλαδὴ μεθ' ἧς διανύεται κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην τὸ στοιχειῶδες τόξον ds, ἧς τὸ μέτρον δέον νὰ ζητήσωμεν ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς κινήσεως $s=f(t)$, ἥτις συνδέει τὰ διανυόμενα διαστήματα πρὸς τοὺς χρόνους ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ σχέσις $s=f(t)$ δὲν εἶναι τόσῳ ἁπλῆ, ὅσῳ ἡ προσδιορίζουσα τὴν ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσαν ἰσοταχῆ κίνησιν· ἡ ἐξεύρεσις τῆς ποσότητος, ἥτις μετρεῖ τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς φέρεται τὸ κινητὸν ἐν ὡρισμένῳ τινὶ σημείῳ τῆς τροχιᾶς του, εἶναι ἐνταῦθα τὸ ὅριον v πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος $\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$ ὅταν τὸ σημεῖον m_1 εὑρίσκεται εἰς ἀπειροστὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου m_0· γνωρίζομεν δὲ ἐκ τῆς ἀλγέβρας, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ λόγου τούτου εἶναι

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ταχύτης ἐν τῇ ἀνισοταχεῖ κινήσει

ὅπερ πρὸς συντομίαν καλοῦμεν *ταχύτητα τοῦ κινητοῦ*, καθ' ἣν στιγμὴν διέρχεται τοῦτο διὰ τοῦ σημείου m_0 τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ.

Ἡ σχέσις αὕτη μᾶς δίδει ἁπλῶς τὸ μῆκος $ds=vdt$ τοῦ τόξου **1 2**. τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ, ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος ἔχομεν ἐκ τῆς τροχιᾶς διὰ τῶν συνημιτόνων

$$\text{συνα}=\frac{dx}{ds}=\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}\qquad \text{συνβ}=\frac{dy}{ds}=\frac{1}{v}\frac{dy}{dt}\qquad \text{συνγ}=\frac{dz}{ds}=\frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.\ (3)$$

τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ τόξον **1 2** μετὰ τῶν ἀξόνων ox, oy καὶ oz.

παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος

Τὸ ἀλγεβρικὸν μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ ὡρίσαμεν οὕτω ἀκριβῶς ἐν οἱαδήποτε κινήσει, καὶ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ταύτην ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν δι' εὐθυγράμμου τμήματος $m\mu$ μεγέθους v (*παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος*) καὶ συμπίπτοντος μετὰ τῆς ἐφαπτομένης.

ὁμοιόμορφος κίνησις

4. Ἐὰν ἐν ἰσοταχεῖ τινὶ κινήσει διατηρῆται καὶ ἡ φορὰ τῆς ταχύτητος ἀμετάβλητος, ἡ τροχιὰ εἶναι εὐθύγραμμος καὶ ἡ κίνησις καλεῖται *ὁμοιόμορφος*· ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι

$$x-x_0=v(t-t_0)$$

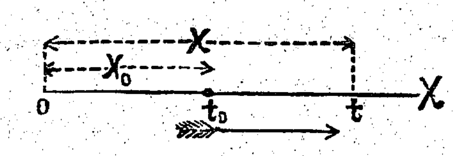
ἔνθα v εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς χαρακτηρίζων τὴν ὁμοιόμορφον ταύτην κίνησιν.

Ἐὰν ἡ φορὰ τῆς ταχύτητος μένῃ ἀμετάβλητος, ἀλλ' ἡ κίνησις δὲν εἶναι ἰσοταχής, ἔχομεν τὴν μεταβαλλομένην εὐθύγραμμον κίνησιν· ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι ἐνταῦθα.

$$x=\varphi(t)$$

καὶ τὸ ἀλγεβρικὸν μέγεθος τῆς ταχύτητος

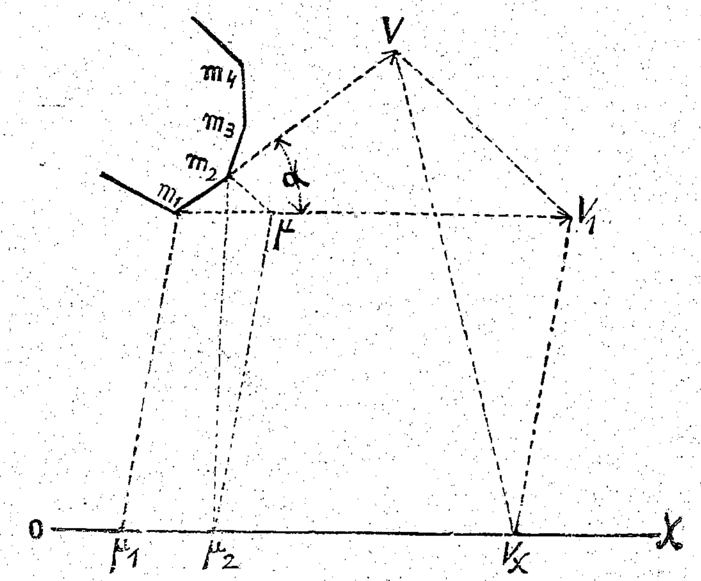
$$v=\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$$



Σχ. 15.

προβολὴ τῆς ταχύτητος ἐπὶ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου

5. Ἔστω $m_1m_2m_3m_4\ldots\ldots$ ἡ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ m διαγραφομένη τροχιὰ καὶ m_1v τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ παρὰ τῷ σημείῳ m_1· προβάλλοντες τὸ σχῆμα παραλλήλως



Σχ. 16.

ἐπιπέδῳ τινὶ $m_2\mu\mu_2$ ἐπὶ τοῦ $\substack{\text{ἄξονος}\\ \text{ἐπιπέδου}}$ ox, βλέπομεν ὅτι, ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $m_1\mu m_2$ καὶ m_1v_1v ἔχομεν

$$\frac{m_1m_2}{m_1v}=\frac{m_1\mu}{m_1v_1}=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1v_x}$$

ἀλλὰ

$$m_1m_2=m_1v.dt$$

ὥστε

$$dt=\frac{m_1m_2}{m_1v}=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1v_x}$$

ἢ

$$\mu_1\mu_2=\mu_1v_x\cdot dt$$

$\mu_1 v_x$ εἶναι λοιπὸν τὸ παραστατικὸν τμῆμα α τοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας / τοῦ ἐπιπέδου ox κινουμένου κινητοῦ μ_1, ὅπερ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ κινητοῦ m_1 ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης· / τοῦ ἐπιπέδου τούτου· ἀλλὰ καὶ ἡ εὐθεῖα $\mu_1 v_x$ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ παραστατικοῦ τμήματος $m_1 v$ τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ παρὰ τῷ σημείῳ m_1, ὥστε

ἡ ταχύτης v_x τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου ox προβολῆς μ τοῦ κινητοῦ m ἰσοῦται τῇ προβολῇ v συν α τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ m

$$v_x = v \,\text{συν}\, \alpha$$

ἢ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\text{συν}\,\alpha.$$

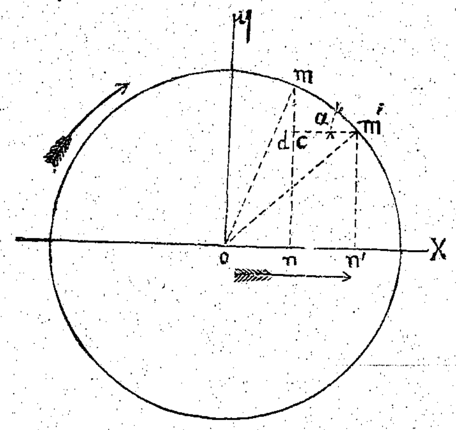
Εἰς τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν ἀμέσως, διότι

$$\text{συν}\,\alpha = \frac{dx}{ds} \quad \text{καὶ} \quad \frac{ds}{dt}\text{συν}\,\alpha = \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἰσοταχῶς κινούμενον κινητὸν m καὶ τὴν προβολὴν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ox.

Ἔστω mm' τὸ ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt διανυθὲν τόξον· ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι $\frac{mm'}{dt}$, ἡ ταχύτης τῆς προβολῆς εἶναι $\frac{nn'}{dt}$. τὰ τρίγωνα $mm'c$ καὶ omn εἶναι ὅμοια καὶ ἔχομεν

$$\frac{m'c}{mn} = \frac{mm'}{\rho} \quad \text{ἢ} \quad v_x = v\frac{mn}{\rho}$$



Σχ 17.

ἀλλὰ

$$\frac{mn}{\rho} = \text{συν}\alpha$$

ὥστε

$$v_x = v\,\text{συν}\alpha.$$

σύνθεσις παραλλήλων εὐθυγράμμων ταχυτήτων

6. Ὑποθέσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν στιγμὴν t τὸ κινητὸν φέρεται συγχρόνως ὑπὸ δύο παραλλήλων ταχυτήτων v_0 καὶ v_1, ὡς ἐκ τῶν ὁποίων διανύει κατὰ τὸν χρόνον dt τμήματα μήκους

$$v_0 dt \quad \text{καὶ} \quad v_1 dt$$

ἤτοι ἐν ὅλῳ εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους $(v_0+v_1)dt$· τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμῆμα θὰ διήνυε τὸ κινητὸν ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι ἐὰν ἐφέρετο μὲ ταχύτητα $v=v_0+v_1$· ὅθεν

αἱ σύγχρονοι ταχύτητες v_0 καὶ v_1 ἐν εὐθυγράμμῳ κινήσει ἰσοδυναμοῦσι πρὸς μίαν μόνην ταχύτητα v ἴσην τῷ ἀλγεβρικῷ τούτων ἀθροίσματι v_0+v_1.

σύνθεσις εὐθυγράμμων ὀρθογωνίων ταχυτήτων

7. Ὑποθέσωμεν, ὅτι κινητόν τι φέρεται ἐν τῷ διαστήματι μὲ κίνησιν προκύπτουσαν ἐκ τριῶν συγχρόνων ταχυτήτων v_x v_y v_z παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox, oy καὶ oz· ἡ πραγματικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι μία καὶ μόνη, τῆς ὁποίας προτιθέμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος καὶ τὴν φοράν.

Ἐὰν καλέσωμεν α, β, γ τὰς μετὰ τῶν ἀξόνων γωνίας τῆς ταχύτητος v ἔχομεν ἐκ τῶν προηγουμένων

$$v\,\text{συν}\alpha = v_x \qquad v\,\text{συν}\beta = v_y \qquad v\,\text{συν}\gamma = v_z$$

ἢ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀθροίζοντες

$$v^2(\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma) = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

ἀλλὰ

$$\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma = 1$$

ὅθεν

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

σχέσις, ἥτις μᾶς δίδει τὸ ἀλγεβρικὸν μέγεθος τῆς ταχύτητος· τὴν φορὰν αὐτῆς εὑρίσκομεν ἤδη ἐκ τῶν πρώτων σχέσεων, διότι

$$\text{συν}\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\text{συν}\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\text{συν}\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν καὶ γεωμετρικῶς τ' ἀποτελέσματα ταῦτα βλέπομεν, ὅτι

Ὅταν κινητόν τι τείνει νὰ κινηθῇ συγχρόνως κατὰ τρεῖς ὀρθογωνίους διευθύνσεις μὲ ἀμοιβαίας ταχύτητας v_x v_y v_z, ἡ πραγματικὴ αὐτοῦ ταχύτης συμπίπτει κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν τμημάτων v_x, v_y, v_z ὁριζομένου παραλληλεπιπέδου· καὶ τἀνάπαλιν τὴν ταχύτητα v δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἰσοδύναμον ταῖς τρισὶ ταχύτησιν

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

ἃς καλοῦμεν συνιστώσας τῆς ταχύτητος v

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θεωρήσωμεν κινητὸν κινούμενον ἐν ἐπιπέδῳ οὕτως ὥστε αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος παραλλήλως τοῖς ἄξοσι νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τῶν ἀξόνων· τουτέστιν

$$\frac{dx}{dt}=\alpha y \qquad \frac{dy}{dt}=\beta x$$

ἡ τροχιὰ εἶναι δευτεροβάθμιος παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας αἱ κύριοι διάμετροι συμπίπτουσι μετὰ τῶν ἀξόνων·
διαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{x}{y} \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha y dy=\beta x dx$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\alpha y^2-\beta x^2=\text{σταθ.}$$

σύνθεσις ταχυτήτων οἱωνδήποτε

8. Θεωρήσωμεν ἤδη ταχύτητας v_1 v_2 ...... οἵας δήποτε σχηματιζούσας μετὰ τῶν ἀξόνων γωνίας

$$\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1 \qquad \lambda_2\ \mu_2\ \nu_2 \ \ldots\ldots$$

ἑκάστην τούτων δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν *ox*, *oy*, καὶ *oz* εἰς τρεῖς ἄλλας

$$\begin{array}{ccc} v_1\text{συν}\lambda_1 & v_1\text{συν}\mu_1 & v_1\text{συν}.\nu_1 \\ v_2\text{συν}\lambda_2 & v_2\text{συν}\mu_2 & v_2\text{συν}.\nu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

καὶ ἀντικαταστήσωμεν (6) διὰ τριῶν ὀρθογωνίων ταχυτήτων

$$\begin{aligned} v_x &= v_1\text{συν}\lambda_1+v_2\text{συν}\lambda_2+\ldots\ldots \\ v_y &= v_1\text{συν}\mu_1+v_2\text{συν}\mu_2+\ldots\ldots \\ v_z &= v_1\text{συν}.\nu_1+v_2\text{συν}.\nu_2+\ldots\ldots \end{aligned}$$

τὰς τρεῖς δὲ ταύτας ὀρθογωνίους ταχύτητας δυνάμεθα (7) ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ μιᾶς μόνης

$$v= v_x\text{συν}\alpha+v_y\text{συν}\beta+v_z\text{συν}\gamma$$

ἢ

$$\begin{aligned} v=\text{συν}\alpha[v_1\text{συν}\lambda_1+v_2\text{συν}\lambda_2+\ldots\ldots]&+\text{συν}\beta[v_1\text{συν}\mu_1+v_2\text{συν}\mu_2+\ldots\ldots] \\ &+\text{συν}\gamma[v_1\text{συν}\,\nu_1+v_2\text{συν}\,\nu_2+\ldots\ldots] \end{aligned}$$

ἢ τέλος

$$\begin{aligned} v=&v_1[\text{συν}\alpha\text{συν}\lambda_1+\text{συν}\beta\text{συν}\mu_1+\text{συν}\gamma\text{συν}.\nu_1+\ldots\ldots] \\ &+v_2[\text{συν}\alpha\text{συν}\lambda_2+\text{συν}\beta\text{συν}\mu_2+\text{συν}\gamma\text{συν}.\nu_2+\ldots\ldots] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ἀλλὰ

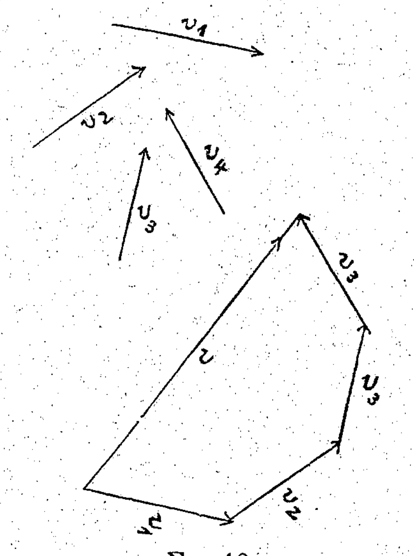
$$\begin{aligned} \text{συν}\alpha\,\text{συν}\lambda_1+\text{συν}\beta\,\text{συν}\mu_1+\text{συν}\gamma\,\text{συν}\,\nu_1&=\text{συν}(v,v_1) \\ \text{συν}\alpha\,\text{συν}\lambda_2+\text{συν}\beta\,\text{συν}\mu_2+\text{συν}\gamma\,\text{συν}\,\nu_2&=\text{συν}(v,v_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ὥστε

$$v=v_1\text{συν}(v,v_1)+v_2\text{συν}(v,v_2)+\ldots\ldots\ldots$$

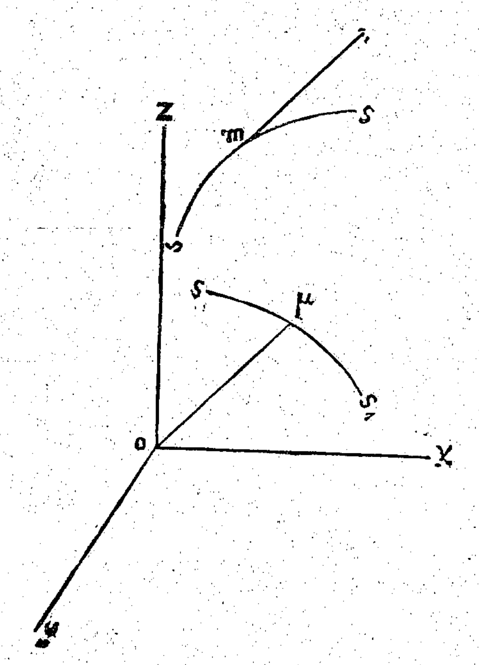
βλέπομεν οὕτω, ὅτι ἡ σύνθεσις ταχυτήτων οἱωνδήποτε γίνεται ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ὀρθογωνίων ταχυτήτων ἀλλὰ διὰ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, καὶ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν συμβολικῶς, ὅτι *αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπενεργοῦσαι ταχύτητες $v_1,v_2,v_3,v_4\ldots$ προστίθενται γεωμετρικῶς καὶ δίδουσιν ἄθροισμα τὴν ταχύτητα v.*
ἢ πρὸς συντομίαν περὶ τὴν ἔκφρασιν

Η συνισταμένη v οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ταχυτήτων $v_1,v_2,v_3,v_4\ldots\ldots$ ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν.


Σχ. 18.

9. Τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, ὅταν τοῦτο εὑρίσκηται εἰς τὸ σημεῖον *m* τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, ὅπως ὡρίσαμεν ταύτην ἀνωτέρω ὡς πρὸς τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς, παριστῶμεν διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος *mv* ἢ διὰ τοῦ oμ παραλλήλου καὶ ἀναλόγου τῷ ἀλγεβρικῷ αὐτῆς μεγέθει, ὅπερ ὀνομάζομεν *παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος v.* Τοῦ σημείου *m* διατρέχοντος τὴν τροχιὰν *s*, τὸ τμῆμα oμ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον O καὶ τὸ σημεῖον μ, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἶναι

ὁδογράφος γραμμή


Σχ. 19.

$$\xi=\frac{dx}{dt} \qquad \eta=\frac{dy}{dt} \qquad \zeta=\frac{dz}{dt}$$

διαγράφει ὡρισμένην καμπύλην s_1, τὴν ὁποίαν ὁ Ἄγγλος γεωμέτρης

Hamilton ὠνόμασεν *ὁδογράφον γραμμὴν* τοῦ κινητοῦ m· ἡ γραμμὴ αὕτη προσδιορίζει τῷ ὄντι ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ διὰ τῆς ἀκτῖνος $o\mu$ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ m·

Παραδειγματα 1) Ἐν τῇ ἐπὶ κύκλου ἰσοταχεῖ κινήσει ἔχομεν

$$x=\rho\,\text{συν}\lambda \qquad y=\rho\,\text{ἡμ}\lambda$$

$$\frac{dx}{dt}=-\rho\,\text{ἡμ}\lambda\frac{d\lambda}{dt} \qquad \frac{dy}{dt}=\rho\,\text{συν}\lambda\frac{d\lambda}{dt}$$

ὅθεν θέτοντες $\frac{d\lambda}{dt}=\omega$

$$\frac{dx}{dt}=-\omega y \qquad \frac{dy}{dt}=\omega x$$

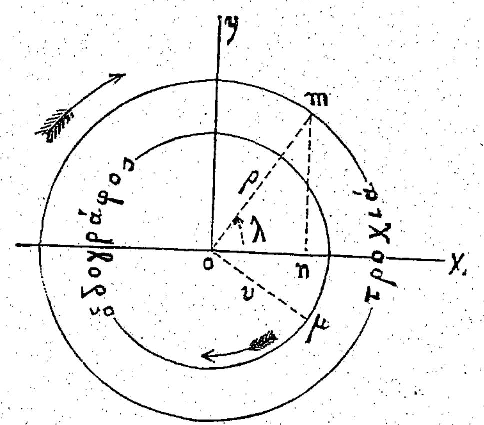
ἡ ὁδογράφος καμπύλη εἶναι

$$\xi=-\omega y \qquad \eta=\omega x$$

Ὅθεν

$$\xi^2+\eta^2=\omega^2(x^2+y^2)=\omega^2\rho^2=\upsilon^2$$

κύκλος δηλαδή, οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι $\omega\rho.=\upsilon$



Σχ. 20.

2) Καὶ τἀνάπαλιν, ἐὰν τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος κινητοῦ τινος εἶναι σταθερὸν τὸ μέγεθος, ἀλλὰ στρέφεται ὁμοιομόρφως, ἐὰν δηλαδὴ ἡ ὁδογράφος καμπύλη τοῦ κινητοῦ εἶναι κύκλος, τὸν ὁποῖον τὸ σημεῖον μ διατρέχει ἰσοταχῶς, λέγω, ὅτι καὶ τὸ κινητὸν διατρέχει κύκλον ἰσοταχῶς· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\xi=\frac{dx}{dt}=\upsilon\,\text{συν}\omega t \qquad \eta=\frac{dy}{dt}=\upsilon\,\text{ἡμ}\omega t$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$x=\frac{\upsilon}{\omega}\text{ἡμ}\omega t+\alpha \qquad y=-\frac{\upsilon}{\omega}\text{συν}\omega t+\beta$$

ὅθεν

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{\upsilon^2}{\omega^2}$$

3) Ὑποθέσωμεν τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος σταθερὸν τὸ μέγεθος ἀλλὰ διαγράφον ὀρθογώνιον κυκλικὸν κῶνον ἐν τῷ διαστήματι· λέγω, ὅτι τὸ κινητὸν διαγράφει κυκλικὴν ἕλικα, ἧς ὁ ἄξων συμπίπτει μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου.

ὁ κῶνος εἶναι

$$\xi=\frac{dx}{dt}=-\omega\rho\,\text{ἡμ}\omega t \qquad \eta=\frac{dy}{dt}=\omega\rho\,\text{συν}\omega t \qquad \zeta=\frac{dz}{dt}=\omega h$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$x=\rho\,\text{συν}\omega t+\alpha \qquad y=\rho\,\text{ἡμ}\omega t+\beta \qquad z=\omega h t+\gamma$$

αἵτινες εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῆς ἕλικος.

4) Ὁ κύκλος om κυλινδοῦται ἐπὶ τῆς εὐθείας ox, οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς o νὰ διατρέχῃ ταύτην ὁμοιομόρφως μὲ ταχύτητα a· ὡρισμένον σημεῖον m τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου διαγράφει κυκλοειδῆ γραμμήν· ζητεῖται ἡ σχετικὴ τῇ κινήσει τοῦ σημείου m ὁδογράφος γραμμή.

Τὸ σημεῖον m στρεφόμενον ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν περὶ τὸ σημεῖον o ἔχει ταχύτητα ἀνάλογον τῇ ἀκτῖνι om καὶ κάθετον ταύτῃ· ἡ ὁδογράφος γραμμὴ στρεφομένη κατὰ 90^0 θὰ συμπέσῃ λοιπὸν μετὰ τοῦ κύκλου om. ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ omb ἔχομεν $om^2=0b.om''=2r.m'm$· τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος εἶναι λοιπὸν ἀνάλογον τοῦ ὕψους $m'm$.

ἄλλως· ἔχομεν ἐν τῷ σχήματι ἐὰν θέσωμεν $\varphi=\widehat{ocm}$

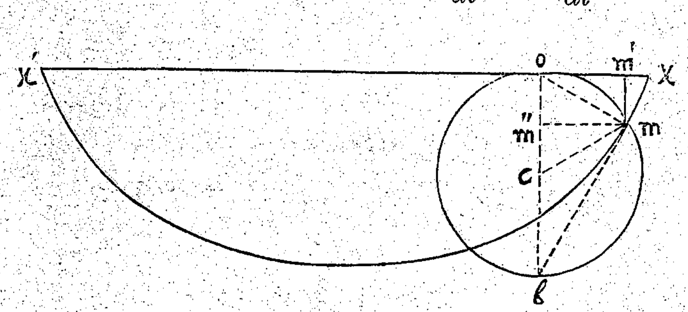
$$x=m'x=xo-m'o=\text{τοξ}mo-m''m=r\varphi-r\,\text{ἡμ}\varphi=r(\varphi-\text{ἡμ}\varphi)$$

$$y=m'm=oc-m''c=r-r\,\text{συν}\varphi=r(1-\text{συν}\varphi)$$

αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος εἶναι

$$\xi=\frac{dx}{dt}=r\frac{d\varphi}{dt}(1-\text{συν}\varphi)$$

$$\eta=\frac{dy}{dt}=r\frac{d\varphi}{dt}\text{ἡμ}\varphi$$



Σχ. 21.

ἔνθα ξ, η εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν τῷ σημείῳ m σημεῖον μ τῆς ὁδογράφου γραμμῆς. Ἀλλὰ

$$r\varphi=\text{τοξ}.om=xo=at.$$

ὅθεν

$$r\frac{d\varphi}{dt}=a$$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\xi=a(1-\text{συν}\varphi) \qquad \eta=a\,\text{ἡμ}\varphi$$

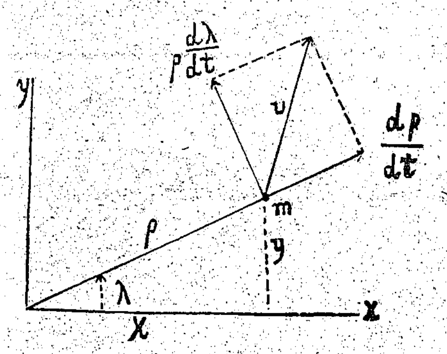
ὅθεν ὁ κύκλος

$$(\xi-a)^2+\eta^2=a^2$$

Ἐὰν καλέσωμεν λ τὴν γωνίαν xom ἔχομεν $\varphi=2\lambda$ ὅθεν

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{a}{r}=2\frac{d\lambda}{dt}$$

$\frac{d\lambda}{dt}$ εἶναι λοιπὸν σταθερὸν καὶ τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος στρέφεται ὁμοιομόρφως περὶ τὸν πόλον.



Σχ. 22.

10. Αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι ρ, λ τοῦ σημείου m συνδέονται πρὸς τὰς καρτεσιανὰς x, y τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ τῶν σχέσεων συνιστῶσαι παραλλήλως καὶ καθέτως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι

$$x=\rho\,\text{συν}\lambda \qquad y=\rho\,\text{ἡμ}\lambda$$

αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox καὶ oy εἶναι

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\text{συν}\lambda - \rho\,\text{ἡμ}\lambda.\frac{d\lambda}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\text{ἡμ}\lambda + \rho\,\text{συν}\lambda.\frac{d\lambda}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τούτων ἐπὶ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος εἶναι

$$v_\rho = v_x\text{συν}\lambda + v_y\text{ἡμ}\lambda = \frac{d\rho}{dt}\,(\text{συν}^2\lambda + \text{ἡμ}^2\lambda) = \frac{d\rho}{dt}$$

τὸ ἄθροισμα τῶν αὐτῶν προβολῶν καθέτως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι εἶναι

$$v_c = -v_x\text{ἡμ}\lambda + v_y\text{συν}\lambda = \rho\,\frac{d\lambda}{dt}(\text{ἡμ}^2\lambda + \text{συν}^2\lambda) = \rho\,\frac{d\lambda}{dt}$$

αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι εἶναι λοιπὸν

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{καὶ} \quad v_c = \rho\,\frac{d\lambda}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ὅθεν

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς·

τὸ στοιχειῶδες τόξον mm' (Σχ. 11) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνιστάμενον τῶν mp καὶ pm'. ὥστε

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mp}^2 + \overline{pm'}^2$$

ἀλλὰ

$$mm' = ds\; mp = \rho d\lambda \quad \text{καὶ} \quad pm' = d\rho$$

ὅθεν

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

περιστροφικὴ ταχύτης

Τὸν λόγον $\frac{d\lambda}{dt}$ ὅστις ἐμφαίνει τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς στρέφεται ἡ πολικὴ ἀκτὶς ρ περὶ τὸ σημεῖον 0 καλοῦμεν *περιστροφικὴν ταχύτητα* τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τὸν πόλον 0 καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ ω. Συνδέεται δὲ ἡ γραμμικὴ ταχύτης v τοῦ σημείου m πρὸς τὴν περιστροφικὴν αὐτοῦ ταχύτητα διὰ τῆς σχέσεως

$$v^2 = \omega^2\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Παραδειγματα 1) Ἄς ζητήσωμεν λ. χ. τὴν τροχιὰν ἐν ᾗ τὸ κινητὸν m κινεῖται οὕτως ὥστε

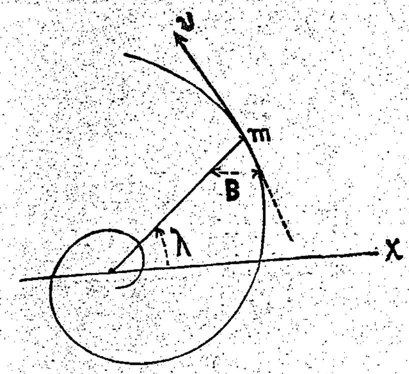
$$\frac{d\rho}{dt} = a \quad \text{καὶ} \quad \rho\frac{d\lambda}{dt} = b$$

ἐκ τούτων πορίζόμεθα

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{a}{b}d\lambda$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{a}{b}(\lambda - \lambda_0)}$$



Σχ. 23.

ἥτις παριστᾷ λογαριθμικὴν ἕλικα.

Ἡ γωνία β τῆς ταχύτητος μετὰ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος εἶναι σταθερά· ἔχομεν τῷ ὄντι [Εἰσ. § 6, 5]

$$\text{εφ}\beta = \rho\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{b}{a}$$

Ὁδογράφος γραμμή· ἀναφερόμενοι εἰς τὰς σχέσεις (1) ἔχομεν διὰ τὰς συντεταγμένας ξ η τῆς ὁδογράφου γραμμῆς

$$\xi = \frac{dx}{dt} = a\,\text{συν}\lambda - b\,\text{ἡμ}\lambda$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} = a\,\text{ἡμ}\lambda + b\,\text{συν}\lambda$$

ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες ἔχομεν τὸν κύκλον

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2$$

μὲ κέντρον τὸν πόλον, ὅπερ ἦτο προφανές, διότι ἡ ταχύτης (3)

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho\frac{d\lambda}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

εἶναι σταθερὰ τὴν ἔντασιν.

Ἡ περὶ τὸν πόλον o περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ παραστατικοῦ τμήματος τῆς ταχύτητος εἶναι

$$\omega = \frac{d(\lambda + \beta)}{dt}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία β εἶναι σταθερὰ ἔχομεν

$$\omega = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{b}{\rho}$$

εἶναι δηλαδὴ αὕτη ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς πολικῆς ἀκτῖνος, ὅπερ ἦτο προφανὲς ὡς ἐκ τῆς ἑλικοειδοῦς φύσεως τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἀμεταβλήτου τῆς ταχύτητος.

2) Ἐὰν τὸ κινητὸν m διαγράφῃ τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα, οὕτως ὥστε ἡ πολικὴ ἀκτὶς om νὰ στρέφηται ὁμοιομόρφως περὶ τὸν πόλον o ἔχομεν

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sigma\tau.\ \sigma$$

ἀλλὰ καὶ

$$\rho\frac{d\lambda}{d\rho} = \rho\frac{d\lambda}{dt}\frac{dt}{d\rho} = \varepsilon\varphi\beta = \sigma\tau.\ \sigma' \quad \text{ὅθεν}\ \frac{d\rho}{dt} = \sigma''\rho$$

καὶ ἡ ταχύτης v εἶναι ἀνάλογος (3) τῇ πολικῇ ἀκτῖνι $\rho = om$· ἡ ὁδογράφος γραμμὴ εἶναι λοιπὸν ἑτέρα λογαριθμικὴ ἕλιξ ἴση τῇ πρώτῃ, ἐστραμμένη κατὰ γωνίαν β περὶ τὸν πόλον o (Σχ. 35).

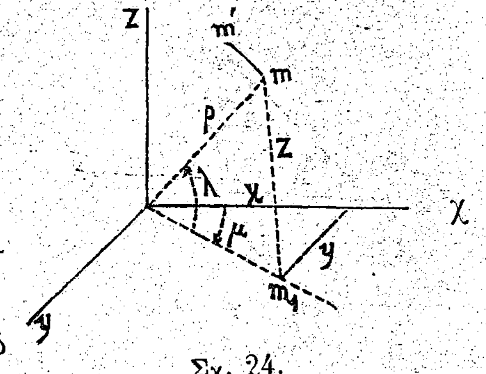
ταχύτης ἐν σφαιρικαῖς συντεταγμέναις

11. Τὸ ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt διανυθὲν τόξον mm' δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν γραμμῶν

1) $d\rho$ παραλλήλως τῇ ἀκτῖνι om

2) $\rho d\lambda$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ mom' καθέτως τῇ ἀκτῖνι om καὶ

3) $om_1.d\mu = \rho\sigma\upsilon\nu\lambda.d\mu$ καθέτως τῷ ἐπιπέδῳ mom'



Σχ. 24.

Ἡ ταχύτης ἐκφράζεται τότε διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\lambda\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2}$$

Εἰς τὴν σχέσιν ταύτην ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀναλυτικῶς ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν σχέσεων [Εἰσ. § 2. 2]

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\lambda\sigma\upsilon\nu\mu \qquad y = \rho\sigma\upsilon\nu\lambda\eta\mu\mu \qquad z = \rho\eta\mu\lambda$$

ὅπως ἐπράξαμεν τοῦτο προηγουμένως διὰ τὰς ἐπιπέδους πολικὰς συντεταγμένας, ἔνθα ἐφθάσαμεν εἰς ἀποτελέσματα συμπίπτοντα μετὰ τῶν προηγουμένων ἐν ᾗ περιπτώσει μ εἶναι σταθερόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θεωρήσωμεν κινητὸν m κινούμενον ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἧς τὴν ἀκτῖνα λαμβάνομεν ἴσην μὲ τὴν μονάδα, καὶ ζητήσωμεν τὴν καμπύλην ἐπὶ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ κινηθῇ τοῦτο, οὕτως ὥστε αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος παραλλήλως πρὸς τὸν μεσημβρινὸν καὶ τὸν ἰσημερινὸν νὰ εἶναι σταθεραί.

Τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τοῦ κινητοῦ εἶναι μ, τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶναι λ, ἔχομεν δὲ ἐὰν καλέσωμεν α τὴν κλίσιν τῆς ταχύτητος v ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ

$$v\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{καὶ} \quad v\eta\mu\alpha = \frac{d\mu}{dt}\sigma\upsilon\nu\lambda \ldots\ldots (1)$$

δέον λοιπὸν νὰ ἔχωμεν

$$\frac{d\lambda}{dt} = a \quad \text{καὶ} \quad \frac{d\mu}{dt}\sigma\upsilon\nu\lambda = b \ldots\ldots (2)$$

ἐκ τῶν σχέσεων (1) ὁριζόμεθα

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{b}{a}$$

ὥστε τὸ κινητὸν τέμνει τοὺς διαφόρους μεσημβρινοὺς ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.
ἐκ τῶν (2)

$$\frac{d\lambda}{\sigma\upsilon\nu\lambda} = \sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi\alpha.\ d\mu$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\lambda_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{(\mu-\mu_0)\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi.\alpha}$$

τὴ καμπύλην ταύτην, τῆς ὁποίας γίνεται μεγάλη χρῆσις ἐν τῇ ναυτιλίᾳ, καλοῦσι λοξόδρομον καμπύλην, ἢ ἁπλῶς *λοξοδρομίαν*.

ἀνακεφαλαίωσις

12. Ἀνακεφαλαιοῦντες ἤδη τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ ἀποδειχθέντα βλέπομεν, ὅτι

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $s = f(t)$ τὴν σχέσιν τὴν συνδέουσαν τὰ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ διανυόμενα τόξα πρὸς τοὺς χρόνους, ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν

1) Ἡ ταχύτης v τοῦ κινητοῦ, ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ, μετρεῖται διὰ τοῦ λόγου $\frac{ds}{dt}$, τοῦ ἐν τῷ βραχυτάτῳ χρονικῷ διαστήματι dt διανυθέντος τόξου ds πρὸς τὸν χρόνον τοῦτον, καὶ ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀλγέβρας ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον $f'(t)$ τῆς συναρτήσεως $f(t)$

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

2) Ἡ ἐπὶ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου προβολὴ τῆς ταχύτητος v σημείου κινουμένου ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ἰσοῦται τῇ ταχύτητι v_x τῆς διατρεχούσης τὸν ἄξονα ἢ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αὐτοῦ ἢ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\sigma\upsilon\nu\alpha$$

3) Ἐὰν ὑλικὸν σημεῖον τείνῃ νὰ κινηθῇ συγχρόνως κατὰ δύο διαφόρους διευθύνσεις οα καὶ οβ μὲ ταχύτητας ἴσας τοῖς τμήμασι τού–

τοις, ἡ προκύπτουσα φορὰ τῆς κινήσεώς του ἔσεται ἡ διαγώνιος τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων oa καὶ $o\beta$ ὁριζομένου παραλληλογράμμου, καὶ τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος ἰσοῦται τῇ διαγωνίῳ ταύτῃ. Καὶ ἐν γένει, ἡ συνισταμένη v οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ταχυτήτων $v_1 v_2 \dots v_4 \dots$, μεθ' ὧν φέρεται ταυτοχρόνως κινητόν τι σημεῖον, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν.

4) Ἐὰν ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ προσδιορίζηται δι' εὐθυγράμμων συντεταγμένων x y z, αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος $\frac{ds}{dt}$ παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν εἰσὶ

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

τὸ δὲ μέγεθος καὶ ἡ φορὰ ταύτης ἐν συστήματι ὀρθογωνίων συντεταγμένων, ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\text{συν}\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\text{συν}\beta \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\text{συν}\gamma$$

ἔνθα α, β, γ παριστῶσι τὰς μετὰ τῶν ἀξόνων ox, oy, oz γωνίας τοῦ παραστατικοῦ τμήματος τῆς ταχύτητος.

5) αἱ συντεταγμέναι ξ, η, ζ τῆς ὁδογράφου καμπύλης δι' ἧς προσδιορίζομεν τὴν ταχύτητα εἶναι

$$\xi = \frac{dx}{dt} \qquad \eta = \frac{dy}{dt} \qquad \zeta = \frac{dz}{dt}$$

6) συναρτήσει τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων ρ λ καὶ μ ἡ ταχύτης ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \rho^2\text{συν}^2\lambda\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2}$$

καὶ ἐν ᾗ περιπτώσει $\mu =$ σταθερᾷ, ἐν ταῖς ἐπιπέδοις δηλαδὴ πολικαῖς συντεταγμέναις ἔχομεν

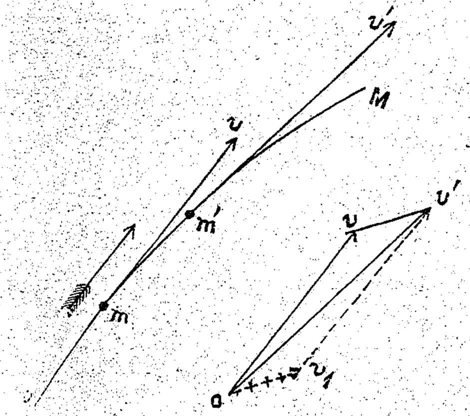
$$v = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ'.

Περὶ ἐπιταχύνσεως.

13. Γνωσθέντος ἤδη τοῦ τρόπου, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην δύο διαφόρων ταχυτήτων, δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς, μεταβολή, ἥτις ἐπιφέρει τὴν καμπυλότητα τῆς τροχιᾶς καὶ τὴν ἐπ' αὐτῆς ἐπιταχυνομένην ἢ βραδύνουσαν κίνησιν.

Ἔστω πρὸς τοῦτο οΜ ἡ τροχιὰ τοῦ κινητοῦ καὶ m, m' δύο διαδοχικαὶ θέσεις αὐτοῦ, κατὰ τὰς ἐποχὰς t καὶ $t+dt$· ov καὶ ov' τὰ παραστατικὰ τμήματα τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ παρὰ τοῖς σημείοις m καὶ m'. ἐπιτάχυνσις



Σχ. 25.

Ἡ διὰ τοῦ τμήματος ov παρισταμένη ταχύτης, μεθ' ἧς ἐφέρετο τὸ κινητὸν παρὰ τῷ σημείῳ m τῆς τροχιᾶς του, μετεβλήθη ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φοράν, εἰς τὴν διὰ τοῦ τμήματος ov' παρισταμένην ταχύτητα· ἀλλ' ἡ μεταβολὴ αὕτη δὲν ἠδύνατο νὰ ἐπέλθῃ ἄνευ ἐξωτερικῆς τινος ἐπιδράσεως, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἡ κίνησις τοῦ κινητοῦ ἐτροποποιήθη διὰ τῆς εἰσαγωγῆς προσθέτου τινὸς ταχύτητος v_1, ἧς τὸ παραστατικὸν τμῆμα ov_1 εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον τῇ τρίτῃ πλευρᾷ vv' τοῦ τριγώνου ovv'. Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς δὲ συνθέσεως τῆς προσθέτου ταύτης ταχύτητος καὶ τῆς ταχύτητος v παρὰ τῷ σημείῳ m, προκύπτει ἡ τελικὴ ταχύτης v παρὰ τῷ σημείῳ m'.

Τὴν ὑπὸ τοῦ κινητοῦ κτηθεῖσαν ταύτην ταχύτητα v_1, κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου m εἰς τὸ σημεῖον m' μετάβασιν ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt, θεωρουμένην ὡς πρὸς τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς, καλοῦμεν **στοιχειώδη ὁλικὴν ἐπιτάχυνσιν** *τοῦ κινητοῦ* **παρὰ τῷ σημείῳ** *m, τὸ δὲ ὅριον τῆς αὐτῆς ποσότητος διαιρεθείσης διὰ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt,* **ὁλικὴν ἐπιτάχυνσιν** *τοῦ κινητοῦ* **παρὰ τῷ σημείῳ** *m.*

Ἐκ τοῦ σχήματος δὲ καὶ τῶν πρὶν ἀποδειχθέντων καταφαίνεται ὅτι, ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις φ κινουμένου ὑλικοῦ σημείου εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ τῆς τροχιᾶς, καὶ ἰσοῦται τῇ γεωμετρικῇ παραγώγῳ $\frac{dv}{dt}$ τῆς ταχύτητος· ἡ φορὰ τῆς ἐπιταχύνσεως κατὰ τὸ σημεῖον m εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ὁδογράφου καμπύλης (Σχ. 19) παρὰ τῷ σημείῳ μ· ἂν δὲ ἡ τροχιὰ εἶναι εὐθύγραμμος, ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις ἔχει τὴν φορὰν τῆς ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαγραφομένης εὐθείας, καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ αὐτῆς τιμὴ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varphi=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{vdv}{ds}=\frac{d\frac{v^2}{2}}{ds}$$

ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη κίνησις

14. Ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φοράν, ἡ ταχύτης $v=v_0+\varphi t$ μεταβάλλεται ὁμοιομόρφως, καὶ ἡ κίνησις καλεῖται *ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη*·

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰ διανυόμενα διαστήματα ὁρίζονται διὰ τῆς σχέσεως

$$ds=vdt$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν

$$s=\int vdt=\int(v_0+\varphi t)dt=s_0+v_0t+\frac{1}{2}\varphi t^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

ἥτις εἶναι ἡ γενικωτέρα ἐξίσωσις τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως. Τὴν σχέσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$\frac{s-s_0}{t}=v_0+\varphi\frac{t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἀλλ' ἡ ταχύτης κατὰ τὴν στιγμὴν t εἶναι

$$\frac{ds}{dt}=v=v_0+\varphi t$$

καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν $\frac{t}{2}$

$$v_0+\varphi\frac{t}{2}$$

ὅθεν· *ἡ μέση ταχύτης* $\frac{s-s_0}{t}$ *τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t ἰσοῦται μὲ τὴν πραγματικὴν αὐτοῦ ταχύτητα κατὰ τὴν στιγμὴν* $\frac{t}{2}$

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (2) $\varphi\frac{t}{2}$ διὰ τοῦ $\frac{v-v_0}{2}$ ἔχομεν

$$\frac{s-s_0}{t}=\frac{v+v_0}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Τουτέστι· *τὰ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἴσα ἐκείνοις, ἃ θὰ διήνυε τοῦτο κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα, ἐὰν ἐφέρετο μὲ ταχύτητα* $\frac{v+v_0}{2}$ *ἐν ἰσοταχεῖ κινήσει.*

Ἐκ τῆς σχέσεως $\varphi=v\frac{dv}{ds}$ ποριζόμεθα δι' ὁλοκληρώσεως τὴν σχέσιν

$$\varphi(s-s_0)=\frac{1}{2}(v^2-v_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ἥτις μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα συναρτήσει τοῦ διανυθέντος διαστήματος.

α. 1) **Πτῶσις.**—Ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι, τὰ ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος πίπτοντα ἐν τῷ κενῷ σώματα διαγράφουσι κατακορύφους εὐθείας ἐν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένῃ κινήσει, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\varphi=9{,}8088$, ἣν συνήθως παριστῶσι διὰ τοῦ g. Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν ἐνταῦθα τὰς ἰδιότητας, ἃς εὕρομεν ἀνωτέρω ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, ἔχομεν

κατακόρυφος κίνησις τῶν σωμάτων ἐν τῷ κενῷ

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{καὶ} \qquad v=\frac{dh}{dt}=gt$$

ὅθεν

$$h=\frac{v^2}{2g}$$

καὶ

$$v=\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

οὕτω

ἡ κτηθεῖσα ταχύτης v σώματος πίπτοντος ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐκ τοῦ ὕψους h ἰσοῦται τῇ $\sqrt{2hg}$.

Τὸ διανυθὲν ὕψος h κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t εἶναι

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

τὸ διανυθὲν ὕψος h_1 κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t+1$ εἶναι

$$h_1=\frac{1}{2}g(t+1)^2$$

ὅθεν

$$h_1 - h = \frac{1}{2} g (2t + 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἤτοι· τὰ κατὰ τὰς διαδοχικὰς μονάδας τοῦ χρόνου διανυόμενα διαστήματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 1,3,5 . . . . 2t+1.

2) **Ἄνοδος.**—Ἐὰν τὸ σῶμα ἀνέρχηται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 ἔχομεν

Σχ. 26.

$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

τὸ μέγιστον ὕψος H, εἰς ὃ ἀνέρχεται τὸ σῶμα ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ ταχύτητος v_0, ἀντιστοιχεῖ τῷ σημείῳ ἐν ᾧ $v = o$ ὥστε

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

τουτέστι· τὸ ὕψος H ἰσοῦται τῷ ὕψει ἀφ' οὗ πίπτον τὸ σῶμα θ' ἀπέκτα τὴν ταχύτητα v_0

Ἔστω v_1 ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν διαβαίνει τοῦτο διὰ τοῦ σημείου m κατὰ τὴν ἄνοδον αὐτοῦ, καὶ v_2 ἡ ταχύτης αὐτοῦ ὅτε κατερχόμενον τοῦτο διαβαίνει διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου· ἐκ τῶν προαποδειχθέντων ἔχομεν

$$v_2^2 = 2g(H - h)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως [14.4]

$$v_1^2 - v_0^2 = -2gh \qquad \text{ἢ} \qquad v_1^2 = 2gH - 2gh = 2g(H - h)$$

ὥστε

$$v_1^2 = v_2^2$$

ἡ ταχύτης δηλαδή, ἣν κέκτηται τὸ κινητὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου m κατὰ τὴν ἄνοδον αὐτοῦ, ἰσοῦται τῇ ταχύτητι, ἣν κέκτηται τοῦτο, ὅτε κατερχόμενον διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου m.

πτῶσις ἀπὸ μεγάλου ὕψους

3) Τὴν ἐπιτάχυνσιν τῶν ἐλευθέρως πιπτόντων βαρέων σωμάτων δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν σταθεράν, ὡς ἐπράξαμεν τοῦτο ἀνωτέρω, εἰμὴ ἐν ὅσῳ τὸ ὕψος τῆς πτώσεως εἶναι μικρὸν σχετικῶς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς. Ἐὰν τὸ σῶμα πίπτῃ ἀπὸ μεγάλου ὕψους, δέον νὰ λάβωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς.

Ἔστω g ἡ ἐπιτάχυνσις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπὸ

τοῦ κέντρου της, φ εἰς ὕψος h ὑπεράνω τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας καὶ εἰς ἀπόστασιν $\rho + h$ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἔχομεν

$$\frac{\varphi}{g} = \left(\frac{\rho}{\rho + h}\right)^2 \qquad \text{ὅθεν} \qquad \varphi = g\left(\frac{\rho}{\rho + h}\right)^2$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι οὕτω

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g\left(\frac{\rho}{\rho + h}\right)^2$$

ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{d^2h}{dt^2}\frac{dh}{dt} = -g\left(\frac{\rho}{\rho + h}\right)^2 \frac{dh}{dt} = -g\rho^2(\rho + h)^{-2}\frac{dh}{dt}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = -g\rho^2 \int_{h_0}^{h} (\rho + h)^{-2} dh = g\rho^2\left(\frac{1}{\rho + h} - \frac{1}{\rho + h_0}\right)$$

Ἡ ταχύτης v εἰς τὸ ὕψος h ὁρίζεται λοιπὸν διὰ τῆς σχέσεως

$$v^2 = 2g\rho^2\left(\frac{1}{\rho + h} - \frac{1}{\rho + h_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως ἐξάγομεν

$$dt = \frac{1}{\rho\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{\frac{1}{\rho + h} - \frac{1}{\rho + h_0}}} = \frac{1}{\rho\sqrt{2g}} \frac{dh\sqrt{\rho + h}}{\sqrt{1 - \frac{\rho + h}{\rho + h_0}}}$$

δυνάμεθα δὲ πάντοτε νὰ θέσωμεν

$$\frac{\rho + h}{\rho + h_0} = \text{ἡμ}^2\varphi \qquad \text{ὅθεν} \qquad dh = 2\,\text{ἡμ}\varphi\,\text{συν}\varphi\, d\varphi(\rho + h_0)$$

καὶ

$$\frac{dh\sqrt{\rho + h}}{\sqrt{1 - \frac{\rho + h}{\rho + h_0}}} = \frac{2\,\text{ἡμ}^2\varphi\,\text{συν}\varphi\, d\varphi(\rho + h_0)^{\frac{3}{2}}}{\text{συν}\varphi} = 2(\rho + h_0)^{\frac{3}{2}}\,\text{ἡμ}^2\varphi\, d\varphi$$

ἢ τέλος

$$dt = \frac{(\rho + h_0)^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{2g}}(1 - \text{συν}2\varphi)\, d\varphi$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$t = \frac{(\rho+h_o)^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{2g}}(\varphi-\tfrac{1}{2}\text{ἡμ}2\varphi+c)$$

κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς πτώσεως εἴχομεν

$$h=h_0 \qquad t=o \qquad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἄνω σχέσει εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς $c=\frac{\pi}{2}$, ὥστε

$$t=\frac{(\rho+h_o)^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{2g}}\left|\varphi-\tfrac{1}{2}\text{ἡμ}2\varphi-\frac{\pi}{2}\right|$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες $\text{ἡμ}\varphi=\sqrt{\frac{\rho+h}{\rho+h_o}}$ ἔχομεν τέλος

$$t=\frac{(\rho+h_o)^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{2g}}\left|\text{τοξ. ἡμ.}\sqrt{\frac{\rho+h}{\rho+h_o}}-\sqrt{\frac{\rho+h}{\rho+h_o}}\sqrt{1-\frac{\rho+h}{\rho+h_o}}-\frac{\pi}{2}\right| \quad (2)$$

ἥτις μᾶς δίδει τὰ διανυόμενα διαστήματα συναρτήσει τοῦ χρόνου.

κατακόρυφος κίνησις τῶν σωμάτων ἐν τῷ ἀέρι *

6. Ἐξητάσαμεν προηγουμένως τὴν κίνησιν τῶν βαρέων σωμάτων ὑποθέτοντες ὅτι κινοῦνται ταῦτα ἐν χώρῳ κενῷ πάσης ἄλλης ὕλης, ἐνῷ πραγματικῶς κινοῦνται ἐν τῷ ἀέρι, ὅστις ἀνθίσταται εἰς τὴν κίνησιν ταύτην παρεισάγων πρόσθετον ἐπιτάχυνσιν, ἧς τὸ μέγεθος εἶναι συνάρτησις τῆς ταχύτητος ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν καὶ ἡ φορὰ ἀντίρροπος τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος.

Τὴν ἀνθισταμένην ταύτην ἐπιτάχυνσιν λαμβάνομεν ἴσην τῇ $g\frac{v^n}{k^n}$, καὶ τότε

Πτῶσις. 1) Ἐν τῇ εὐθυγράμμῳ κατακορύφῳ πτώσει ἔχομεν

$$\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=g-g\frac{v^n}{k^n}=g\left(1-\frac{v^n}{k^n}\right)$$

Ἐὰν ἡ ταχύτης δὲν ὑπερβαίνῃ τὰ 200 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ τὰ πειράματα τοῦ στρατηγοῦ *Didion* $n=2$. Ἐὰν ἡ ταχύτης ὑπερβαίνῃ τὰ 325 μέτρα, λαμβάνομεν $n=3$.

Ἂς ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $n=2$· ἔχομεν

$$\frac{dv}{dt}=g\left|1-\left(\frac{v}{k}\right)^2\right| \quad \text{ἢ} \quad \frac{dv}{1-\frac{v^2}{k^2}}=gdt$$

* ληφθὲν ἐκ τῶν μαθημάτων τοῦ καθηγητοῦ κ. Resal.

ἢ ἔτι

$$\frac{dv}{2}\left|\frac{1}{1-\frac{v}{k}}+\frac{1}{1+\frac{v}{k}}\right|=gdt$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\frac{k}{2}\text{λογ}\frac{1+\frac{v}{k}}{1-\frac{v}{k}}=gt+c$$

ἀλλὰ διὰ $v=o$ ἔχομεν $t=o$ ὅθεν $c=o$· καὶ οὕτω

$$\text{λογ}\frac{1+\frac{v}{k}}{1-\frac{v}{k}}=2\frac{g}{k}t$$

ἢ ἄλλως

$$e^{\frac{2gt}{k}}=\frac{1+\frac{v}{k}}{1-\frac{v}{k}} \qquad \text{ὅθεν}\ \frac{v}{k}=\frac{e^{\frac{2gt}{k}}-1}{e^{\frac{2gt}{k}}+1}$$

ἢ ἔτι

$$v=k\frac{e^{\frac{gt}{k}}-e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

καὶ βλέπομεν ὅτι, *ἐὰν λάβωμεν t ἀρκούντως μέγα, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν* $e^{-\frac{gt}{k}}$ *ἡ ταχύτης τείνει πρὸς τὸ σταθερὸν ὅριον k.*

Τὸ ὕψος τῆς πτώσεως h ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$dh=vdt=k\frac{e^{\frac{gt}{k}}-e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}dt=\frac{k^2}{g}\frac{e^{\frac{gt}{k}}-e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}d\left(\frac{gt}{k}\right)$$

Βλέπομεν δέ, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τοῦ παρονομαστοῦ, ὥστε ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$h=\frac{k^2}{g}\left|\text{λογ}\left(e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}\right)+c\right|$$

'Αλλὰ διὰ $t=o$ ἔχομεν $h=o$ ὥστε $c=-$λογ.2 καὶ οὕτω

$$h=\frac{k^2}{g}\,\text{λογ}\,\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}}-e^{-\frac{gt}{k}}\right)\dots\dots\dots\dots(2)$$

Τὴν ταχύτητα v ὑπολογίζομεν συναρτήσει τοῦ διαστήματος ὡς ἑξῆς· ἔχομεν ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως (2)

$$e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}=2e^{\frac{gh}{k^2}}$$

καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$$e^{\frac{2gt}{k}}+e^{-\frac{2gt}{k}}+2=4e^{\frac{2gh}{k^2}}$$

ἀλλὰ ἐκ τῶν προηγουμένων

$$e^{\frac{2gt}{k}}=\frac{k+v}{k-v}\qquad e^{-\frac{2gt}{k}}=\frac{k-v}{k+v}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας

$$4e^{\frac{2gh}{k^2}}=\frac{k+v}{k-v}+\frac{k-v}{k+v}+2=\frac{(2k)^2}{k^2-v^2}$$

ὅθεν

$$e^{-\frac{2gh}{k^2}}=\frac{k^2-v^2}{k^2}$$

καὶ τέλος

$$v^2=k^2\left|1-e^{-\frac{2gh}{k^2}}\right|\dots\dots\dots\dots(3)$$

2) **Ἄνοδος.** Ἐν τῇ ἀνόδῳ τοῦ σώματος ἡ βαρύτης καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ ἀέρος ἐπενεργοῦσι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἔχομεν.

$$\frac{d^2h}{dt^2}=-g\left(1+\frac{v^2}{k^2}\right)=\frac{dv}{dt}$$

ὅθεν

$$\frac{dv}{1+\frac{v^2}{k^2}}=-gdt\qquad\text{ἢ}\qquad\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1+\frac{v^2}{k^2}}=-\frac{gdt}{k}$$

ὁλοκληροῦντες καὶ παριστῶντες διὰ v_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα ἔχομεν

$$\text{τοξ. εφ}\frac{v}{k}-\text{τοξ. εφ}\frac{v_0}{k}=-\frac{gt}{k}$$

ἢ

$$\text{τοξ. εφ}\frac{v}{k}=\text{τοξ. εφ}\frac{v_0}{k}-\frac{gt}{k}$$

ὅθεν λαμβάνοντες τὰς ἐφαπτομένας

$$\frac{v}{k}=\frac{\frac{v_0}{k}-\text{εφ}\frac{gt}{k}}{1+\frac{v_0}{k}\,\text{εφ}\,\frac{gt}{k}}=\frac{\frac{v_0}{k}\,\text{συν}\,\frac{gt}{k}-\text{ἡμ}\,\frac{gt}{k}}{\text{συν}\,\frac{gt}{k}+\frac{v_0}{k}\text{ἡμ}\,\frac{gt}{k}}\dots\dots(5)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες v διὰ τοῦ $\frac{dh}{dt}$ ἔχομεν

$$dh=\frac{k^2}{g}.\frac{v_0\text{συν}\,\frac{gt}{k}-k\text{ἡμ}\,\frac{gt}{k}}{k\text{συν}\frac{gt}{k}+v_0\,\text{ἡμ}\,\frac{gt}{k}}\,d\left(\frac{gt}{k}\right)$$

ὁλοκληροῦντες ἤδη, καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι διὰ $t=o$ ἔχομεν $h=o$ εὑρίσκομεν

$$h=\frac{k^2}{g}\,\text{λογ}\,\frac{k\text{συν}\,\frac{gt}{k}+v_0\text{ἡμ}\,\frac{gt}{k}}{k}\dots\dots\dots\dots(5)$$

Ὅταν τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του θὰ ἔχομεν $v=o$ καὶ ὁ χρόνος t μᾶς δίδεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\text{εφ}\frac{gt}{k}=\frac{v_0}{k}$$

τὸ δὲ ὕψος Η εἰς ὃ ἀνῆλθε τὸ κινητὸν ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\text{Η}=\frac{k^2}{g}\,\text{λογ}\sqrt{\frac{{v_0}^2+k^2}{k^2}}\dots\dots\dots\dots(1)$$

15. Ὡς εἴδομεν τοῦτο ἀνωτέρω (13) ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι γεωμετρικὸν μέγεθος τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὴν ταχύτητα, καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ προβλητικαὶ ἰδιότητες αὐτῆς ἐπὶ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου, ὡς καὶ ἡ σύνθεσις δύο διαφόρων ἐπιταχύνσεων ἐπενεργουσῶν συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔσονται αἱ αὐταὶ μὲ τὰς ἐν τῷ προηγουμένῳ κεφαλαίῳ ἀποδειχθείσας διὰ τὴν ταχύτητα.

Ἔστω τῷ ὄντι mm' ἡ τροχιὰ τοῦ κινητοῦ καὶ παρασταθήτωσαν διὰ τῶν εὐθειῶν mv, $m'v'$ αἱ ταχύτητες αὐτοῦ παρὰ τοῖς σημείοις m προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ ἄξονος καὶ m', ἀχθήτω δὲ ἡ εὐθεῖα $m'\upsilon_1$ ἴση καὶ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $m\upsilon$· ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ παρὰ τῷ σημείῳ m παρίσταται διὰ τοῦ τμήματος $\upsilon_1\upsilon'$· προβάλλοντες ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox παραλλήλως πρὸς ἐπίπεδόν τι, καὶ καλοῦντες υ_x καὶ υ'_x τὰς προβολὰς τῶν ταχυτήτων $m'\upsilon_1$ καὶ $m'\upsilon'$ ἔχομεν

$$\text{προβ. τοῦ } m'\upsilon_1 + \text{προβ. τοῦ } \upsilon_1\upsilon' = \text{προβ. τοῦ } m'\upsilon'$$

ὅθεν $$\upsilon_x + \text{προβ. τῆς ἐπιταχύνσεως} = \upsilon'_x$$

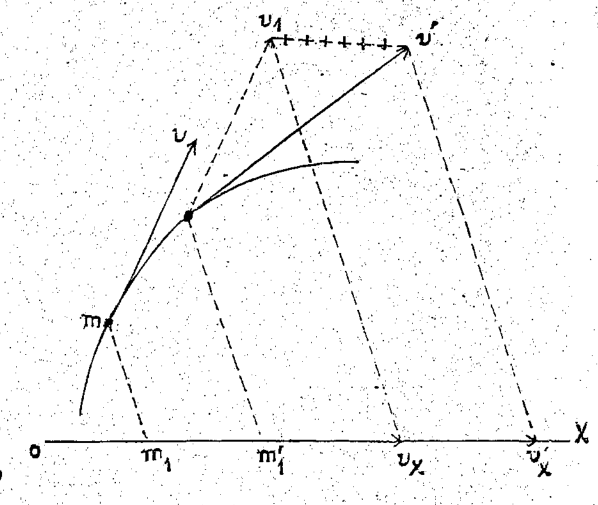
ἢ τέλος $$\text{προβ. τῆς ἐπιταχύσεως} = \upsilon'_x - \upsilon_x$$

ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος παριστᾷ ἀκριβῶς (13) τὴν στοιχειώδη ἐπιτάχυνσιν

$$d\upsilon_x = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox κινήσεως τῆς προβολῆς τοῦ κινητοῦ· ὅθεν,

ἡ ἐπὶ ἄξονος προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως κινουμένου σημείου ἰσοῦται τῇ ἐπιταχύνσει τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου προβολῆς αὐτοῦ.



Σχ. 27.

Αἱ προβολαὶ τῆς ἐπιταχύνσεως κινητοῦ ὁριζομένου δι' εὐθυγράμμων συντεταγμένων x,y,z παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν εἶναι λοιπὸν

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

ἡ δὲ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ μεγέθους τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως φ ἐν συστήματι ὀρθογωνίων ἀξόνων εἶναι

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

ἴσον δηλαδὴ (9) κατὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν τῷ στοιχειώδει τόξῳ $d\sigma$ τῆς ὁδογράφου καμπύλης διαιρεθέντι διὰ τοῦ διαλείμματος dt.

Εἰς τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀναλυτικῶς ὡς ἑξῆς· αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος $m\upsilon$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶναι

$$\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dz}{dt}$$

αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος $m'\upsilon'$ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀξόνων εἶναι

$$\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right) \qquad \frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right) \qquad \frac{dz}{dt} + d\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

αἱ προβολαὶ τοῦ τμήματος $\upsilon_1\upsilon'$ εἶναι λοιπὸν

$$\left|\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)\right| - \frac{dx}{dt} = d\left(\frac{dx}{dt}\right), \qquad d\left(\frac{dy}{dt}\right), \qquad d\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

ἢ

$$\frac{d^2x}{dt^2}dt \qquad \frac{d^2y}{dt^2}dt \qquad \frac{d^2z}{dt^2}dt$$

ἀλλὰ $\frac{\upsilon_1\upsilon'}{dt}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις, καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῆς ἐπὶ τῶν τριῶν ἀξόνων εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Παραδειγμα. Ἂς ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν ἐπὶ κύκλου ἰσοταχῆ κίνησιν καὶ τὴν προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τῆς διαμέτρου ox (Σχ. 17)· ἡ ὁδογράφος γραμμὴ τοῦ κινητοῦ εἶναι (§ 9. 1) ἕτερος κύκλος διαγραφόμενος ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα $\upsilon\frac{d\lambda}{dt}$· ἡ προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τούτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox εἶναι

$$\upsilon\,\text{συν}\lambda\,\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\upsilon\,\text{ἡμ}\lambda)$$

ἀλλὰ (§ 5) $\upsilon\,\text{ἡμ}\lambda$ εἶναι ἡ ταχύτης τῆς προβολῆς n τοῦ κινητοῦ m ἐπὶ τῆς διαμέτρου x, καὶ $\frac{d}{dt}(\upsilon\,\text{ἡμ}\lambda)$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς αὐτῆς προβολῆς.

Τὰ ὁρίζοντα τὴν φορὰν τῆς ἐπιταχύνσεως φ συνημίτονα εἶναι

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2}$$

τὰ ὁρίζοντα τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος υ συνημίτονα εἶναι ἐπίσης

$$\frac{1}{\upsilon}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{1}{\upsilon}\frac{dy}{dt} \qquad \frac{1}{\upsilon}\frac{dz}{dt^2}$$

καὶ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο τούτων τμημάτων εἶναι [Εἰσ. § 2. 19)

ἐπίπεδον ταχύτητος καὶ ἐπιταχύνσεως

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{\left[(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \text{ κλπ.}$$

συμπίπτει δηλαδὴ τοῦτο [Εἰσ. § 5. 19] πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης.

γωνία ταχύτητος καὶ ἐπιταχύνσεως

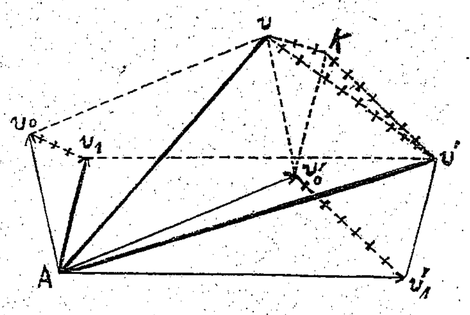
Ἡ γωνία θ τῆς ταχύτητος καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως ὁρίζεται [Εἰσ. § 2. 16] διὰ τῆς σχέσεως

$$\dot{\eta}\mu\theta = \frac{\left[(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\upsilon\varphi dt^3} \quad (3)$$

σύνθεσις ἐπιταχύνσεων

16. Κινητόν τι σημεῖον Α φέρεται ταυτοχρόνως ὑπὸ δύο ἀνισοταχῶν κινήσεων· ζητεῖται ἡ ἐκ τῶν δύο συγχρόνων ἐπιταχύνσεων προκύπτουσα τελικὴ ἐπιτάχυνσις.

Ἔστωσαν $A\upsilon_0$ καὶ $A\upsilon'_0$ τὰ παραστατικὰ τμήματα τῶν ταχυτήτων τῶν δύο κινήσεων κατὰ τὴν ἐποχὴν t, ἅτινα, ὡς ἐκ τῶν προαποδειχθέντων γνωρίζομεν, ἰσοδυναμοῦσι τῇ συνισταμένῃ τούτων $A\upsilon$ καὶ $A\upsilon_1, A\upsilon'_1$ αἱ αὐταὶ ταχύτητες κατὰ τὴν ἐποχὴν $t+dt$, αἵτινες ἰσοδυναμοῦσιν ἐπίσης τῇ συνισταμένῃ τούτων $A\upsilon'$. Τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι $\upsilon\upsilon'$, ὅπερ ὡς ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων $A\upsilon_0\upsilon_1$ καὶ $\upsilon'_0\upsilon k$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τμημάτων υk καὶ $k\upsilon'$, ὧν τὸ μὲν $k\upsilon'$ ἴσον καὶ παράλληλον τῷ $\upsilon'_0\upsilon'_1$ παριστᾷ τὴν ἐκ τῆς μιᾶς τῶν κινήσεων προερχομένην ἐπιτάχυνσιν, τὸ δὲ ἕτερον υk ἴσον καὶ παράλληλον τῷ $\upsilon_0\upsilon_1$ τὴν ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν κινήσεων προερχομένην ἐπίσης ἐπιτάχυνσιν. Ὅθεν



Σχ. 28.

Ἡ ἐκ δύο συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὑφισταμένων ἀνισοταχῶν κινήσεων προκύπτουσα ἐπιτάχυνσις ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκ τῶν συγχρόνων τούτων κινήσεων προερχομένων μερικῶν ἐπιταχύνσεων, καὶ ἐν γένει, ἡ συνισταμένη Φ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπιταχύνσεων $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_4$, μεθ' ὧν φέρεται συγχρόνως κινητόν τι σημεῖον, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τούτων

$$\overline{\Phi} = \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2} + \cdots + \overline{\varphi_4}$$

ἐφαρμογὴ ἐν τῇ κυκλικῇ κινήσει

17. Θεωρηθήτω κινητὸν m διργράφον περιφέρειαν κύκλου ἀνισοταχῶς, καὶ ἔστωσαν $o\upsilon$ καὶ $o\upsilon'$ τὰ παραστατικὰ τμήματα τῶν ταχυτήτων τοῦ κινητοῦ παρὰ τοῖς σημείοις m καὶ m' δι' ὧν διέρχεται τοῦτο κατὰ τὰς ἐποχὰς t καὶ $t+dt$.

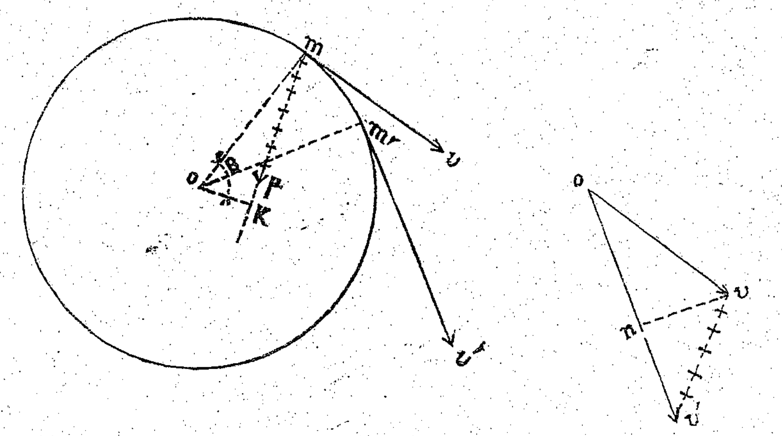
Τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι $\upsilon\upsilon' = \varphi dt$ καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ αὕτη ὡς συνισταμένη δύο ἄλλων ἐπιταχύνσεων $n\upsilon'$ παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ $n\upsilon$ καθέτως ταύτῃ.

Ἡ τιμὴ τῆς $\frac{n\upsilon'}{dt}$, ἣν ὀνομάζομεν καὶ *ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν* ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ

ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις

$$\frac{\upsilon'-\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \varphi_\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

καὶ ἐπιταχύνει τὴν κίνησιν ἐπὶ τῆς τροχιᾶς.



Σχ. 29.

Ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων omm' καὶ $o\upsilon n$ μᾶς δίδει

$$\frac{\upsilon n}{mm'} = \frac{o\upsilon}{om}$$

ὅθεν

$$\upsilon n = mm'\frac{o\upsilon}{R} = \upsilon dt\frac{o\upsilon}{R} = \frac{\upsilon^2 dt}{R}$$

ὥστε ἡ πρὸς τὸ κέντρον φερομένη ἐπιτάχυνσις, ἣν καλοῦμεν *κεντρομόλον* εἶναι

κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις

$$\varphi_u = \frac{\upsilon n}{dt} = \frac{\upsilon^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

καὶ ἐπιφέρει τὴν καμπυλότητα τῆς τροχιᾶς.

Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν ἄνω τύπων

Ἐὰν ἐκ τοῦ m φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $m\mu$ ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ἐπιταχύνσει $\upsilon\upsilon' = \varphi dt$ καὶ καταβιβάσωμεν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτῆς τὴν ok ἔχομεν

$$\text{κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις} = \varphi\eta\mu\beta = \frac{\upsilon^2}{R}$$

ὅθεν

$$\varphi = \frac{v^2}{R\eta\mu\beta}$$

ἀλλὰ

$$mk = R\eta\mu.\beta$$

καὶ

$$\varphi = \frac{v^2}{mk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Οὕτω. *Ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις παρὰ τῷ σημείῳ m ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς ταχύτητος παρὰ τῷ αὐτῷ σημείῳ, διὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ τῆς φορᾶς αὐτῆς ὁριζομένης ἐν τῷ κύκλῳ χορδῆς.*

κυκλικὴ ἰσοταχὴς κίνησις

Ἐὰν ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου κίνησις εἶναι ἰσοταχὴς $dv=o$ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις εἶναι κεντρομόλος καὶ ἴση τῇ $\frac{v^2}{R}$ (Huyghens). Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην πρότασιν ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν ἀμέσως παρατηροῦντες, ὅτι ἡ ὁδογράφος μ. τοῦ κινητοῦ m εἶναι περιφέρεια κύκλου, [§ 9. 1] διαγραφομένη ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα ωv (ἔνθα $\omega = \frac{v}{R}$) κάθετον ἐπὶ τῆς $o\mu$ καὶ συνεπῶς παράλληλον τῇ om. ἀλλ' ἡ ταχύτης αὕτη συμπίπτει πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν, ἥτις φέρεται οὕτω πρὸς τὸ κέντρον o καὶ ἔχει ἔντασιν

$$\varphi = \omega v = \frac{v^2}{R}$$

Παραδειγμα. Τὸ σημεῖον m πίπτει ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς βαρύτητος. Ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμώσωμεν ἐπ' αὐτοῦ, ἵνα διαγράψῃ τοῦτο κυκλικὴν τροχιὰν μὲ δοθεῖσαν ἰσοταχῆ κίνησιν.

Ἔστω v ἡ ταχύτης τοῦ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἰσοταχῶς κινουμένου σημείου m· ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ, συνισταμένη τῆς κατακορύφου ἐπιταχύνσεως g καὶ τῆς ζητουμένης ἐπιταχύνσεως φ, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου o καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{v^2}{R}$· ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις φ εἶναι λοιπὸν πλευρὰ παραλληλογράμμου, οὗτινος ἡ ἑτέρα πλευρὰ mg εἶναι κατακόρυφος καὶ ἴση τῇ g, ἡ δὲ διαγώνιος συμπίπτει μετὰ τῆς ἀκτῖνος om καὶ εἶναι ἴση τῇ $\frac{v^2}{R} = ma$· ἔχομεν οὕτω τὴν φορὰν καὶ τὸ μέγεθος τῆς ἐπιταχύνσεως φ.

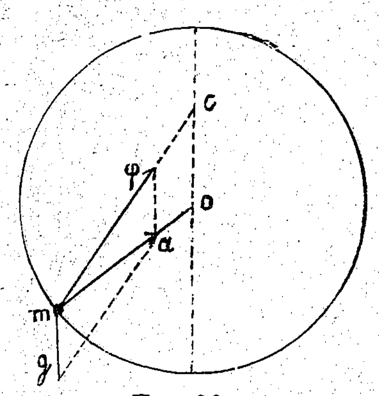
Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $ma\varphi$ καὶ moc πορίζόμεθα

$$oc = a\varphi \, \frac{mo}{ma} = g \cdot \frac{R}{\left(\frac{v^2}{R}\right)} = g\left(\frac{R}{v}\right)^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις φ διέρχεται λοιπὸν διαρκῶς διὰ σταθεροῦ σημείου c.

ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων ἔχομεν

$$m\varphi = \varphi = mc\,\frac{ma}{mo} = mc\,\frac{v^2}{R^2} = mc.\ \sigma\tau\alpha\theta.$$



Σχ. 30.

τουτέστιν, *ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου c.*

Καὶ ἀναλυτικῶς. Τὸ κινητὸν διαγράφει τὸν κύκλον

$$x^2 + (y - a)^2 = R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἔνθα a εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς c τῶν συντεταγμένων· ἡ ταχύτης εἶναι

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Διαφοροῦντες δὶς τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν

$$x\,\frac{dx}{dt} + (y - a)\,\frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$x\,\frac{d^2x}{dt^2} + (y - a)\,\frac{d^2y}{dt^2} = -v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

διαφοροῦντες καὶ τὴν σχέσιν (2) ἔχομεν

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ἐκ τῶν (3) καὶ (5) πορίζόμεθα τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{x}\,\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{y-a}\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

ἥτις μετὰ τῆς (4) δίδει

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{R^2}\,x \qquad \text{καὶ} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{R^2}\,(y - a)$$

ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν φ_x καὶ φ_y τὰς ἐπὶ τῶν ἀξόνων προβολὰς τῆς ζητουμένης ἐπιταχύνσεως φ ἔχομεν

$$\varphi_x = -\frac{v^2}{R^2}\,x \qquad \varphi_y = -\frac{v^2}{R^2}\,(y - a) - g$$

ἢ ἐὰν λάβωμεν $a = g\frac{R^2}{v^2}$

$$\varphi_x = -\frac{v^2}{R^2}x \quad \text{καὶ} \quad \varphi_y = -\frac{v^2}{R^2}y$$

ὅθεν

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{y}{x}$$

ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις διέρχεται λοιπὸν διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου c καὶ φέρεται πρὸς τοῦτο.

Ἐκ τῶν αὐτῶν σχέσεων ἔχομεν

$$\varphi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \frac{v^2}{R^2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v^2}{R^2}cm$$

κίνησις ἐπὶ οἵας δήποτε γραμμῆς

18. Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν κινητὸν κινούμενον ἐπὶ οἱασδήποτε καμπύλης, γνωρίζομεν ἐκ τῆς γεωμετρίας, ὅτι παρὰ τῷ σημείῳ m τὸ τόξον τῆς καμπύλης δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ τόξου τοῦ ἐγγυτάτου τῇ καμπύλῃ κύκλου, οὕτως ὥστε τὸ κινητὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κινούμενον ἐπὶ τοῦ κύκλου παρὰ τῷ σημείῳ m· ὅθεν ἡ κεντρομόλος καὶ ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις παρὰ τῷ σημείῳ m τῆς καμπύλης τροχιᾶς ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων

$$\varphi_\varepsilon = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{καὶ } \varphi_u = \frac{v^2}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις

ἔνθα R ἐμφαίνει τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος παρὰ τῷ σημείῳ m, *καὶ βλέπομεν ἤδη διατὶ ὠνομάσαμεν τὴν γεωμετρικὴν ποσότητα $\frac{dv}{dt}$ ὁλικὴν ἐπιτάχυνσιν, διότι αὕτη δὲν συμπίπτει μὲ τὴν κυρίως ἐπιτάχυνσιν, τὴν ἐν τῇ τροχιᾷ κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως παρατηρουμένην, ἥτις ἰσοῦται τῇ $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ καὶ ἀποτελεῖ μίαν μόνον τῶν συνιστωσῶν τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως τὴν ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν· αὕτη ἐπηρεάζει καθὼς βλέπομεν ἁπλῶς τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος ἐπιταχύνουσα ἢ ἐπιβραδύνουσα τὴν κίνησιν τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του.*

κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις

Τοὐναντίον ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις $\frac{v^2}{R}$ οὐδόλως ἐπηρεάζει τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος, ἀλλὰ μόνον τὴν φορὰν αὐτῆς, ἐπιφέρουσα

οὕτω τὴν **παρεκτροπὴν** (déviation) *τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς, ἣν τείνει ν' ἀκολουθήσῃ τοῦτο ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν.*

Εἰς τὴν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ ἑτέραν μορφήν, ἐνίοτε χρήσιμον.

Ἔστω $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τοῦ διανύοντος τὴν ὁδογράφον γραμμὴν κινητοῦ μ. Ἡ στοιχειώδης κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις ἰσοῦται τῇ συνισταμένῃ $vd\theta$ τοῦ τόξου $d\sigma$ τῆς ὁδογράφου γραμμῆς καθέτως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι $o\mu = v$· ὥστε

$$\text{κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις} = v\frac{d\theta}{dt} = v\omega$$

ἔκφρασις, ἣν ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως παρατηροῦντες, ὅτι

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\,v$$

καὶ οὕτω

$$\frac{v^2}{R} = v\frac{d\theta}{dt} = v\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Τὴν στοιχειώδη ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν θὰ εὑρίσκομεν ἐπίσης εὐκόλως παρατηροῦντες, ὅτι εἶναι αὕτη ἡ συνιστῶσα dv τοῦ τόξου τῆς ὁδογράφου γραμμῆς παραλλήλως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι $o\mu = v$· ὥστε

$$\text{ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις} = \frac{dv}{dt}.$$

19. Ἡ ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως προκύπτουσα παρεκτροπὴ μετρεῖται διὰ τοῦ στοιχειώδους τμήματος $m'q$ (Σχ. 31) ἔνθα mq ἰσοῦται μὲ vdt, καὶ mm' εἶναι τὸ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt διανυθὲν τόξον· ἔχομεν δὲ [§ 14. 1]

παρεκτροπὴ ὀφειλομένη τῇ ἐπιταχύνσει

$$qm' = \varphi\,\frac{dt^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν σταθερὰν κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt, καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τμῆμα qm' ὡς διανυθὲν ἐν κινήσει ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένῃ.

Ἀλλ' ἰδοὺ καὶ ἑτέρα ἀπόδειξις τούτου, οὐδὲν προϋποθέτουσα περὶ τῆς φύσεως τῆς ἐπιταχύνσεως.

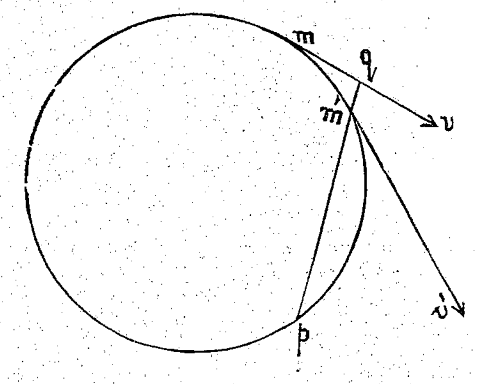
Ἀντικαθιστῶντες τὴν τροχιὰν διὰ τοῦ ἐγγυτάτου αὐτῆς κύκλου παρὰ τῷ σημείῳ m, παριστῶντες διὰ v καὶ v' τὰς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ παρὰ τοῖς σημείοις m καὶ m' καὶ φέροντες $m'qp$ παράλληλον τῇ ἐπιταχύνσει ἔχομεν [§ 17. 3]

$$\varphi = 2\,\frac{v^2}{m'p}$$

ἀλλ' ἐν τῷ κύκλῳ

$$\overline{mq}^2 = m'q.m'p$$

καὶ περιοριζόμενοι εἰς τὰς πρωτοβαθμίους τιμὰς τῶν ἐλαχίστων ποσοτήτων $m'q$ mq... δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν mq διὰ τοῦ $mm' = vdt$, καὶ ἔχομεν οὕτω



Σχ. 31.

$$v^2dt^2 = m'q.m'p = m'q.\frac{2v^2}{\varphi}$$

ὅθεν

$$qm' = \varphi\frac{dt^2}{2}\dots\dots(1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ ἐπιτάχυνσις φέρεται πρὸς τὸ κέντρον o ἔχομεν

$$\overline{mp}^2 = m'q.\,m'p$$

ἢ

$$ds^2 = \varphi\frac{dt^2}{2}.2R$$

ὅθεν καὶ ἡ τιμὴ τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως

$$\varphi = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

ἐφαρμογὴ ἐν τῇ περὶ τὴν γῆν κινήσει τῆς σελήνης

Ἐκ τῆς ὀφειλομένης τῇ ἐπιταχύνσει τῆς σελήνης παρεκτροπῆς ὁ Νεύτων ἐπηλήθευσε τὸν νόμον τῆς παγκοσμίου ἕλξεως· ἐξ ἀστρονομικῶν ὑπολογισμῶν γνωρίζομεν τῷ ὄντι ὅτι ἐν ἑνὶ λεπτῷ ἡ σελήνη διαγράφει τόξον 61020 μέτρων μήκους. ἡ ἀντιστοιχοῦσα πτῶσις τῆς σελήνης ἐπὶ τῆς γῆς, ἣν ὠνομάσαμεν παρεκτροπήν, εἶναι

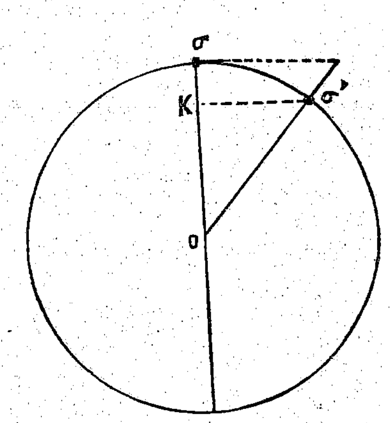
$$\sigma k = 4^{\mu},87$$

ἀλλὰ

$$\sigma k = \varphi\frac{t^2}{2}$$

ἔνθα $t = 60''$

ἔχομεν λοιπὸν



Σχ. 32.

$$4^{\mu},87 = \varphi.\frac{\overline{60}^2}{2}$$

ἢ

$$\varphi.\overline{60}^2 = 9^{\mu}.74 = \text{κατὰ προσέγγισιν τῇ } g$$

ὅθεν

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{1}{\overline{60}^2}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις ρ τῆς σελήνης ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς εἶναι $60\,r$ ἔνθα r παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τῆς γηΐνου σφαίρας ἔχομεν

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{r^2}{\rho^2}$$

τουτέστιν· *αἱ ἐπιταχύνσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων.*

κεντρομόλος καὶ ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις ἀναλυτικῶς

20. Τὴν κεντρομόλον καὶ ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν, ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως παρατηροῦντες, ὅτι ἡ γωνία θ τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως [§ 15. 3]

$$\text{ημ}\theta = \frac{\left[(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{v\varphi dt^3}$$

καὶ ὡς ἐκ τῆς σχέσεως [Εἰσ. § 5. 10 καὶ 13] ἔχομεν

$$\text{ημ}\theta = \frac{ds^3}{Rv\varphi dt^3} = \frac{v^3}{Rv\varphi} = \frac{v^2}{R\varphi}$$

ὅθεν

$$\varphi\,\text{ημ}\theta = \text{κεντρομόλῳ ἐπιταχύνσει} = \frac{v^2}{R}$$

ἀφ' ἑτέρου

$$\text{συν}\theta = \frac{1}{v\varphi}\left|\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right| = \frac{dsd^2s}{v\varphi dt^3} = \frac{d^2s}{\varphi dt^2}$$

ὅθεν

$$\varphi\,\text{συν}\theta = \text{ἐφαπτομένῃ ἐπιταχύνσει} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ἄλλως· ἐκ τῶν ταυτοτήτων

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt}$$

πορίζόμεθα διὰ διαφορήσεως

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dy}{ds}\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dz}{ds}$$

καὶ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη ἐκ δύο ἄλλων, ὧν αἱ ὀρθογώνιοι προβολαὶ εἶναι

$$\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad \frac{d^2y}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad \frac{d^2z}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \ldots\ldots (2)$$

καὶ

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

γνωρίζομεν δὲ [Εισ. § 5. 15] ὅτι τὰ συνημίτονα τῶν μετὰ τῶν ἀξόνων γωνιῶν λ μ ν τῆς πρωτευούσης καθέτου εἶναι

$$\text{συν}\lambda = R\frac{d^2x}{ds^2} \qquad \text{συν}\mu = R\frac{d^2y}{ds^2} \qquad \text{συν}.\nu = R\frac{d^2z}{ds^2}$$

τὰς συνιστώσας (2) δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν οὕτω

$$\frac{v^2}{R}\text{συν}\lambda \qquad \frac{v^2}{R}\text{συν}\mu \qquad \frac{v^2}{R}\text{συν}.\nu$$

καὶ βλέπομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις (2) εἶναι ἡ κεντρομόλος συνιστῶσα, καὶ ἡ τιμὴ αὐτῆς εἶναι

$$\frac{v^2}{R}$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ συνιστῶσα (3) εἶναι ἡ ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις, καὶ ἡ τιμὴ αὐτῆς εἶναι

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων (1) ἀπαλείψωμεν τὰς $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ καὶ $\frac{d^2s}{dt^2}$ ἔχομεν

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = 0$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις δηλαδὴ κεῖται ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ

21. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1.) Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν ἐπὶ κύκλου ἰσοταχῆ κίνησιν· εἴδομεν, [§ 9. 1] ὅτι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος εἶναι κυκλικὴ ἰσοταχὴς κίνησις

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y = -\frac{v}{\rho}y \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x = \frac{v}{\rho}x$$

αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega\frac{dy}{dt} = -\omega^2 x \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega\frac{dx}{dt} = -\omega^2 y$$

ἡ ὁλικὴ δὲ ἐπιτάχυνσις εἶναι

$$\varphi = \sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} = \sqrt{\omega^4\rho^2} = -\omega^2\rho = -\frac{v^2}{\rho^2}\rho = -\frac{v^2}{\rho}$$

ἥτις εἶναι καὶ ἡ προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος

$$\varphi_\rho = \frac{d^2x}{dt^2}\text{συν}\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\text{ἡμ}\theta = -\omega^2(x\,\text{συν}\theta + y\,\text{ἡμ}\theta) = -\omega^2\rho = -\frac{v^2}{\rho}$$

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι λοιπὸν κεντρομόλος καὶ σταθερὰ τὸ μέγεθος.

α.) Ἐὰν ἀφομοιώσωμεν τὰς τροχιάς τῶν πλανητῶν μὲ κύκλους διαγραφομένους ἰσοταχῶς καὶ καλέσωμεν T τὴν χρονικὴν περίοδον τῆς περὶ τὸν ἥλιον περιφορᾶς τοῦ πλανήτου ἔχομεν ἐφαρμογὴ ἐν τῇ κινήσει τῶν πλανητῶν

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ὅθεν} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες $\varphi = -\frac{4\pi^2}{T^2}\rho$

δι' ἕτερον πλανήτην θὰ εἴχομεν

$$\varphi_1 = -\frac{4\pi^2}{T_1^2}\rho_1 \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{T_1^2}{T^2}\,\frac{\rho}{\rho_1}$$

ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ τρίτου νόμου τοῦ Kepler [ἴδε κατωτέρω IV] ἔχομεν

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{\rho^3}{\rho_1^3}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\rho_1^{\,3}}{\rho^3}\,\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\rho_1^{\,2}}{\rho^2}$$

ὅθεν

$$\varphi\rho^2 = \varphi_1\rho_1^{\,2} = \mu \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi = \frac{\mu}{\rho^2} \qquad \varphi_1 = \frac{\mu}{\rho_1}$$

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι δηλαδὴ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ πλανήτου ἀπὸ τὸν Ἥλιον.

ἐφαρμογὴ ἐν τῇ κινήσει τῆς σελήνης

β) Τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ νόμου τούτου ἔκαμεν ὁ Νεύτων ἐν τῇ περὶ τὴν γῆν κινήσει τῆς Σελήνης, παραβάλλων τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτῆς φ πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος g, καὶ παραθέτομεν ἐνταῦθα τὸν διάσημον ὑπολογισμόν του·

εἴδομεν ὅτι

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2}\rho \qquad \text{ὅθεν} \quad \frac{\varphi}{g} = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{\rho}{g}$$

ἀλλὰ

$$T = 27,^{\text{ἡμ.}}322 \qquad \text{καὶ} \qquad g = 9,^{\mu}809$$

ὥστε

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{60r}{g} = \frac{2\pi.60}{T^2}\ \frac{40.000.000^{\mu}}{9,809} = \frac{1}{3624}$$

δηλαδὴ κατὰ μεγάλην προσέγγισιν

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{r^2}{\rho^2}$$

ἰσοταχὴς κίνησις ἐπὶ ἕλικος

2) ἔστω κυκλικὸς κύλινδρος καὶ ἕλιξ ἐπ' αὐτοῦ. Τοὺς ἄξονας λαμβάνομεν οὕτως ὥστε ox συναντᾷ τὴν ἕλικα, καὶ oy εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς· αἱ ἐξισώσεις τῆς ἕλικος εἶναι τότε

$$x = \rho\,\text{συν}\lambda \quad y = \rho\,\text{ημ}\lambda \quad z = h\lambda$$

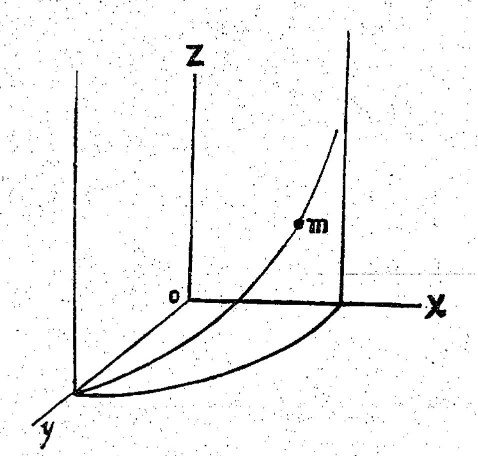
ἔνθα h ἐμφαίνει τὸ ἀπόλυτον (reduit) βῆμα τῆς ἕλικος.

Ὑποθέτοντες τὴν κίνησιν ἰσοταχῆ ἔχομεν

$$\lambda = \omega t$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἄνω σχέσεις

$$x = \rho\,\text{συν}\omega t \quad y = \rho\,\text{ημ}\omega t \quad z = h\omega t$$



Σχ. 33.

ὅθεν διὰ διπλῆς διαφορήσεως

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\rho\,\text{ημ}\omega t \qquad \frac{dy}{dt} = \omega\rho\,\text{συν}\omega t \qquad \frac{dz}{dt} = \omega h$$

καὶ

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\rho\,\text{συν}\omega t = -\omega^2 x \quad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2\rho\,\text{ημ}\omega = -\omega^2 y \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι παράλληλος τῇ ὀρθῇ τομῇ τοῦ κυλίνδρου.

ἔχομεν δὲ

$$\frac{\varphi_x}{x} = \frac{\varphi_y}{y} = -\omega^2$$

ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις συναντᾷ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα ταύτης εἶναι ἀνάλογα πρὸς

$$-\rho\omega^2\text{συν}\omega t \qquad -\rho\omega^2\text{ημ}\omega t \qquad \text{καὶ } 0$$

τὰ τῆς καθέτου εἶναι

$$\text{συν}\omega t \qquad \text{ημ}\omega t \qquad \text{καὶ } 0$$

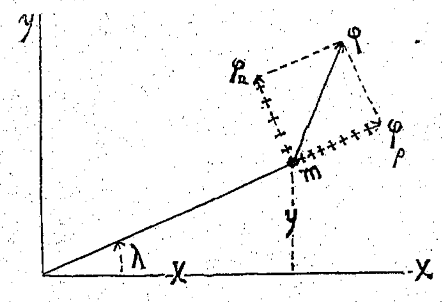
Ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι λοιπὸν κάθετος τῷ κυλίνδρῳ, καὶ κατὰ συνέπειαν *κεντρομόλος*

$$\varphi = \sqrt{\varphi_x + \varphi_y} = \omega^2\rho = \frac{v^2}{R}$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἕλικος· καὶ ἐπειδὴ $v^2 = \omega^2(\rho^2 + h^2)$ ἕπεται

$$R = \frac{\rho^2 + h^2}{\rho}$$

Τὰ ἄνω ἀποτελέσματα πορίζόμεθα εὐκόλως καὶ ἐκ τῆς ὁδογράφου γραμμῆς· τῷ ὄντι ἀφοῦ ἡ κίνησις εἶναι ἰσοταχὴς τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος εἶναι σταθερόν· ἀλλ' ὡς ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἕλικος ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης (ταχύτητος) ἐπὶ τοῦ ἄξονος oz εἶναι σταθερά· τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ταχύτητος διαγράφει λοιπὸν ὀρθὸν κῶνον περὶ τὸν ἄξονα oz, καὶ ἡ ὁδογράφος εἶναι κύκλος κάθετος τῷ ἄξονι oz. (§ 9.3) Ὥστε καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις, ἥτις συμπίπτει μετὰ τῶν στοιχειωδῶν τόξων $d\sigma$ τοῦ κύκλου εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς ἕλικος. ἀλλ' ὡς ἐκ τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως $\frac{dv}{dt} = o$ καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι κεντρομόλος, κάθετος δηλαδὴ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ συναντᾷ οὕτω τὸν ἄξονα oz.



Σχ. 34.

συνιστῶσαι τῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως καὶ καθέτως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι

22. Εὕρομεν ἀνωτέρω (§ 10.1) ἐν ἐπιπέδῳ κινήσει.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\text{συν}\lambda - \rho\,\text{ημ}\lambda\,\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\text{ημ}\lambda + \rho\,\text{συν}\lambda\,\frac{d\lambda}{dt}$$

καὶ διὰ διαφορήσεως

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] \text{συνλ} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + \rho\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right] \text{ἡμλ}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] \text{ἡμλ} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + \rho\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right] \text{συνλ} \quad \ldots(1)$$

ἔχομεν δὲ τὰς σχέσεις

$$\varphi_\rho = \frac{d^2x}{dt^2}\,\text{συνλ} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\text{ἡμλ} = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\varphi_u = -\frac{d^2x}{dt^2}\,\text{ἡμλ} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\text{συνλ} = 2\,\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + \rho\,\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\lambda}{dt}\right)$$

αἵτινες μᾶς δίδουσι τὰς ζητουμένας συνιστώσας·

ἡ ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις εἶναι $\varphi_\rho\text{συνβ} + \varphi_u\text{ἡμβ} = \varphi_\varepsilon$

ἔνθα β ἐμφαίνει τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\varphi_u = 0$ ἔχομεν

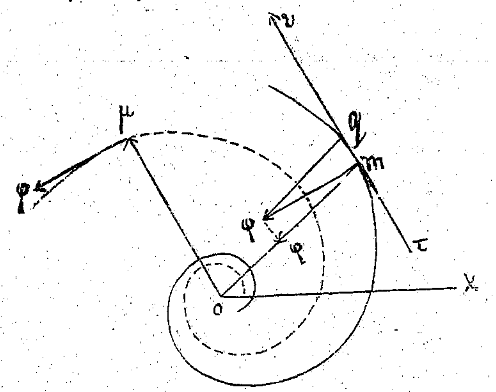
$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi\,\text{συνβ} \quad \text{καὶ} \quad \frac{v^2}{R} = \varphi\,\text{ἡμβ}$$

καὶ ἀνατρέχοντες εἰς τὰ προηγούμενα [Εἰσ. § 6. 6]

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi\frac{d\rho}{ds} \quad \text{καὶ} \quad \frac{v^2}{R} = \varphi\frac{p}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Παραδειγμα. Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ παράδειγμα (§ 11. 2) καὶ ἄς ζητήσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν. om εἶναι ἡ πολικὴ ἀκτὶς τῆς ἀρχικῆς τροχιᾶς, ομ ἡ πολικὴ ἀκτὶς τῆς ὁδογράφου καμπύλης· δι' ὃν λόγον ἡ ταχύτης mv τοῦ κινητοῦ m εἶναι ἀνάλογος τῇ πολικῇ ἀκτῖνι om, καὶ ἡ ταχύτης μφ τοῦ κινητοῦ μ εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀκτῖνι ομ, ἢ τῇ ἀκτῖνι om, ἀλλ' ἡ ταχύτης μφ τοῦ κινητοῦ μ ἰσοῦται κατὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν τῇ ἐπιταχύνσει $m\varphi$ τοῦ κινητοῦ m. εἶναι λοιπὸν καὶ αὕτη ἀνάλογος τῇ πολικῇ ἀκτῖνι $om = \rho$ καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς ομ γωνίαν ἴσην τῇ β.

Ἡ ὁδογράφος εἶναι λοιπὸν τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὴν τροχιὰν m.



Σχ. 35.

Ἐὰν ἀναλύσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν $m\varphi$ παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ πολικῇ ἀκτῖνι ἔχομεν τὰ συνιστώσας mq καὶ mp. ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία $\widehat{\varphi m\tau} = \widehat{\varphi\mu o} = \beta$, ἕπεται $\widehat{\varphi mv} = \widehat{pm\tau}$· τὸ τρίγωνον $pm\varphi$ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ αἱ συνιστῶσαι mq καὶ mp ἔχουσι σταθερὸν λόγον πρὸς τὴν $m\varphi$ καὶ κατὰ συνέπειαν πρὸς τὴν om καὶ mv. ὥστε

Ἡ συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι εἶναι ἀνάλογος ταύτῃ. Ἡ συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ εἶναι ἀνάλογος τῇ ταχύτητι v.

(ἀποδεῖξαι τ' ἀποτελέσματα ταῦτα διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἄνω σχέσεων).

23. Ἀνακεφαλαιοῦντες ἤδη τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ ἀποδειχθέντα, βλέπομεν ὅτι ἀνακεφαλαίωσις

1. Ἡ ἐπιτάχυνσις φ κινουμένου ἐν τῷ διαστήματι σημείου m, τουτέστιν ἡ γεωμετρικὴ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸ βραχύτατον χρονικὸν διάστημα dt, καθ' ὃ τοῦτο μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ σημείου m εἰς τὸ ἀμέσως κατόπιν m', παρίσταται διὰ τῆς γεωμετρικῆς διαφορικῆς $\overline{dv}$ τῆς ταχύτητος διαιρουμένης διὰ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. Ἐὰν δὲ ἡ τροχιὰ εἶναι εὐθύγραμμος διὰ

τῆς ἀλγεβρικῆς διαφορικῆς $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

οὕτω $\varphi = \dfrac{\overline{dv}}{dt}$ καὶ ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς $\varphi = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

2. Ἡ ἐπὶ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως φ σημείου κινουμένου ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ἰσοῦται τῇ ἐπιταχύνσει φ_x τῆς διατρεχούσης τὸν ἄξονα ἢ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ προβολὴ γίνῃ ὀρθογωνίως ἔχομεν

$$\varphi_x = \varphi\,\text{συνα} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

3. Τὸ ἀλγεβρικὸν μέγεθος τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

ἡ φορὰ δὲ ταύτης ἐμπεριέχεται ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ τῆς τροχιᾶς, καὶ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονά της εἶναι

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2}$$

4. Ἡ ἐκ δύο συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὑφισταμένων ἀνισοταχῶν κινήσεων προκύπτουσα ἐπιτάχυνσις, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκ τῶν συγχρόνων κινήσεων προκυπτουσῶν μερικῶν ἐπιταχύνσεων.

Καὶ ἐν γένει ἡ συνισταμένη Φ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπιταχύνσεων $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_4$, μεθ' ὧν φέρεται συγχρόνως κινητόν τι σημεῖον, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν.

5. Αἱ συνιστῶσαι τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς τροχιᾶς (φορὰ τῆς κινήσεως), καὶ τῇ ἀκτῖνι τῆς καμπυλότητος, ἃς καλοῦμεν ἐφαπτομένην καὶ κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν, ἔχουσι τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς

$$\varphi_\varepsilon = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) \quad \text{καὶ} \quad \varphi_u = \frac{v^2}{R}$$

ἔνθα R ἐμφαίνει τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος παρὰ τῷ σημείῳ m.

6. Ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις κινητοῦ, καθ' ὃν χρόνον συμπίπτει τοῦτο πρὸς τὸ σημεῖον m τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς ταχύτητος παρὰ τῷ σημείῳ m διαιρουμένῳ διὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ τῆς φορᾶς αὐτῆς ὁριζομένης ἐν τῷ παρὰ τῷ σημείῳ m ἐγγυτάτῳ κύκλῳ χορδῆς.

$$\varphi = \frac{2v^2}{\chi\text{ορδῆς}}$$

7. Αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐπιταχύνσεως φ_ρ καὶ φ_u παραλλήλως καὶ καθέτως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι εἶναι.

$$\varphi_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_u = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

γενικαὶ σχέσεις ἀφορῶσαι τὴν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου

24. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι αἱ ὀρθογώνιοι συνιστῶσαι $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, τῆς ἐπιταχύνσεως σημείου τινὸς συνδέονται πρὸς τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ τῶν σχέσεων

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ἃς καλοῦμεν καὶ *ἐξισώσεις τῆς κινήσεως* αὐτοῦ.

Ὁλοκληροῦντες δὶς τὰς σχέσεις ταύτας εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα καὶ

τὴν διανυομένην τροχιάν, ὥστε τὸ πρόβλημα τῆς κινήσεως μετατρέπεται ἤδη εἰς πρόβλημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Δυνάμεθα δὲ νὰ εὕρωμεν γενικάς τινας σχέσεις διευκολυνούσας ἐνίοτε τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, διότι διὰ τούτων ἀποφεύγομεν τὴν μίαν τοὐλάχιστον τῶν ὁλοκληρώσεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα. Οὕτω

α) πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῆς κινήσεως ἀμοιβαίως ἐπὶ y καὶ x καὶ ἀφαιροῦντες ἔχομεν

$$x\varphi_y - y\varphi_x = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(xv_y - yv_x)$$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως ἡ σχέσις

$$\left[xv_y - yv_x\right]_0^t = \int_0^t (x\varphi_y - y\varphi_x)dt$$

καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου $\left[yv_z - zv_y\right]_0^t = \int_0^t (y\varphi_z - z\varphi_y)dt \dots (1)$

$$\left[zv_x - xv_z\right]_0^t = \int_0^t [z\varphi_x - x\varphi_z]dt$$

β) Εὕρομεν ἀνωτέρω [§ 18. 1] τὴν σχέσιν

$$\frac{dv}{dt} = \varphi = \varphi\,\text{συν}(\varphi.ds)$$

πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ $vdt = ds$ ἔχομεν

$$vdv = \varphi\,\text{συν}(\varphi,ds)ds$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{v^2 - v_0{}^2}{2} = \int_{s_0}^{s} \varphi\,\text{συν}(\varphi,ds)ds \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

εἰς ἣν ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ διὰ τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως· πολλαπλασιάζοντες τῷ ὄντι τὴν πρώτην τούτων ἐπὶ dx τὴν δευτέραν ἐπὶ dy τὴν τρίτην ἐπὶ dz καὶ ἀθροίζοντες ἔχομεν

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz$$

$$= \frac{1}{2}\,d\left|\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right| = \frac{1}{2}\,d(v^2)$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\varphi_x \frac{dx}{ds} + \varphi_y \frac{dy}{ds} + \varphi_z \frac{dz}{ds} = \varphi\, συν(\varphi, ds)$$

ἔχομεν τέλος

$$\varphi\, συν(\varphi,ds)\, ds = \frac{1}{2} d(v^2)$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} \varphi\, συν(\varphi,ds)\,ds.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{s_0}^{s} \varphi\, συν(\varphi,ds)\,ds$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως ἐν ταῖς ἑξῆς περιπτώσεσι.

1) Ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερὰ καὶ ἐφάπτηται διαρκῶς τῆς τροχιᾶς ἔχομεν

$$συν(\varphi,ds) = 1 \text{ καὶ } \int_{s_0}^{s}\varphi\, συν(\varphi,ds)\,ds = \varphi\int_{s_0}^{s} ds = \varphi(s-s_0) \cdots\cdots (3)$$

2) Ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερὰ καὶ παράλληλος ὡρισμένῃ τινὶ διευθύνσει OZ ἔχομεν

$$συν(\varphi,ds) = συν(z,ds) = \frac{dz}{ds} \text{ καὶ } \int_{s_0}^{s}\varphi\, συν(\varphi,ds)\,ds = \varphi\int_{z_0}^{z}dz = \varphi(z-z_0) \cdots (4)$$

3) Ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις φέρηται πρὸς τὸ σταθερὸν κέντρον Ο καὶ εἶναι συνάρτησις τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τούτου ἀποστάσεως ρ τοῦ κινητοῦ ἔχομεν

$$\varphi = f(\rho) \qquad συν(\varphi,ds).ds = d\rho$$

καὶ

$$\int_{s_0}^{s}\varphi\, συν(\varphi,ds)\,ds = \int_{\rho_0}^{\rho} f(\rho)\,d\rho \cdots\cdots (5)$$

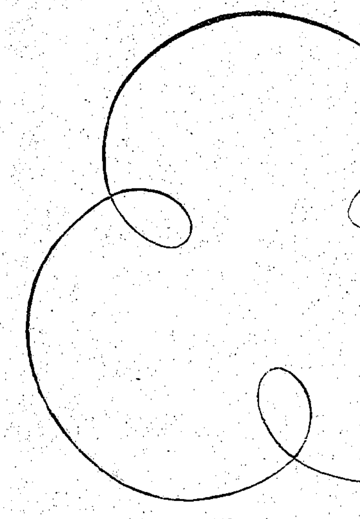
σχετικαὶ κινήσεις τῶν σημείων

25. Μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν τὴν κίνησιν σημείου τινὸς ἐν σχέσει πρὸς ἕτερα σταθερὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος, καὶ ὡρίσαμεν ἐν ἑκάστῃ στιγμῇ τὴν ὑπὸ τοῦ κινητοῦ κατεχομένην θέσιν διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ ὡς πρὸς τρεῖς ὀρθογωνίους ἄξονας, τοὺς ὁποίους ὑπεθέσαμεν ἐπίσης σταθεροὺς καὶ ἀμεταστάτως κειμένους ἐν τῷ διαστήματι.

Τοιαῦτα ὅμως ἀκίνητα σημεῖα, τοιούτους σταθεροὺς καὶ ἀκινήτους ἄξονας, φανταζόμεθα ἁπλῶς ἀλλὰ καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν, διότι τὸ πᾶν κινεῖται περὶ ἡμᾶς. Τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς

γῆς σώματα, τὰ ὁποῖα συνήθως θεωροῦμεν ὡς ἀκίνητα, παρασύρονται ἐν τῷ διαστήματι μετὰ τῆς γῆς φερομένης ὑπὸ διπλῆς κινήσεως περὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς καὶ περὶ τὸν ἥλιον. Κατὰ πᾶσαν δὲ πιθανότητα καὶ ὁ ἥλιος κινεῖται ἐν τῷ διαστήματι παρασύρων καὶ τὴν γῆν μετὰ τῶν λοιπῶν πλανητικῶν σωμάτων, τῶν ὁποίων τὴν κίνησιν διέπει οὗτος.

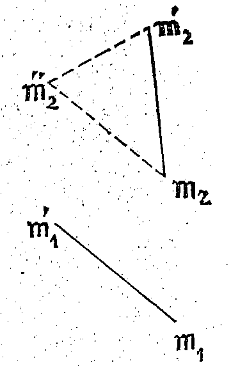
Αἱ κινήσεις λοιπὸν τὰς ὁποίας παρατηροῦμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς καὶ ἐν τοῖς οὐρανίοις διαστήμασιν εἶναι ὅλως σχετικαὶ καὶ διάφοροι τῶν πραγματικῶν, τῶν ἀπολύτων κινήσεων τῶν σωμάτων τούτων. Οὕτω λ. χ. κατωτέρω θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν περὶ τὸν ἥλιον εἶναι ἐλλείψεις, ὧν οὗτος κατέχει τὴν ἑτέραν τῶν ἑστιῶν, καὶ τοιαῦται θ' ἀπεκαλύπτοντο εἰς ἡμᾶς ἐὰν ἠδυνάμεθα ν' ἀκολουθήσωμεν τοὺς διαγράφοντας ταύτας ἀστέρας ἐξ ἀκινήτου τινὸς σημείου τοῦ διαστήματος· ἐνῷ παρατηροῦντες αὐτὴν ἀπὸ τῆς γῆς μεθ' ἧς φερόμεθα ἐν τῷ διαστήματι, παρουσιάζεται ἡμῖν ὑπὸ τὴν ἔναντι μορφήν, ἥτις πᾶν ἄλλο εἶναι ἢ ἔλλειψις.



Σχ. 36.

Πρέπει λοιπὸν νὰ ὑποδείξωμεν τὸν τρόπον δι' οὗ, δοθέντων δύο σημείων m_1 καὶ m_2 (Σχ. 37) κινουμένων ὅπως δήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ὁρίζομεν τὴν σχετικὴν κίνησιν τοῦ ἑνὸς m_2 ὡς πρὸς τὸ ἕτερον m_1· λέγοντες δὲ σχετικὴν κίνησιν τοῦ σημείου m_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον m_1 ἐννοοῦμεν τὴν κίνησιν τοῦ σημείου τούτου, οἵα ἀποκαλύπτεται αὕτη εἰς παρατηρητὴν συμμετέχοντα τῆς κινήσεως τοῦ σημείου m_1 καὶ φερόμενον μετ' αὐτοῦ ἐν τῷ διαστήματι· καὶ τἀνάπαλιν, γνωστῆς οὔσης τῆς σχετικῆς ταύτης κινήσεως τοῦ σημείου m_2 καὶ τῆς ἀπολύτου ἐν τῷ διαστήματι κινήσεως τοῦ σημείου m_1, εὑρεῖν τὴν ἀπόλυτον κίνησιν τοῦ σημείου m_2.

Ἔστωσαν m'_1 καὶ m'_2 αἱ θέσεις ἃς κατέχουσι τὰ κινητὰ μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt· τὸ πρῶτον διήνυσε τὸ τόξον $m_1m'_1$, τὸ δεύτερον τὸ τόξον $m_2m'_2$· τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνιστάμενον ἐκ δύο ἄλλων, τοῦ $m_2m''_2$ ἴσου καὶ παραλλήλου τῷ $m_1m'_1$, καὶ τοῦ $m''_2m'_2$. Τὸ πρῶτον $m_2m''_2$ μένει ἐντελῶς ἀπαρατήρητον ὑπὸ τοῦ παρατηρητοῦ ὅστις φέρεται ἐν τῷ διαστήματι μετὰ τοῦ κινητοῦ m_1· ἀποκαλύπτεται δὲ εἰς αὐτὸν τὸ κινητὸν m_2 ὡς διανύσαν ἁπλῶς τὸ τόξον $m''_2 m'_2$, ὅπερ ἰσοῦται τῇ γεωμετρικῇ διαφορᾷ τοῦ τόξου $m_2 m'_2$ καὶ τοῦ τόξου $m_2 m''_2 = m_1 m'_1$ ὥστε ἐὰν καλέσωμεν σ τὰ τόξα τῆς σχετικῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου m_2, s_1 τὰ τόξα τῆς ἀπολύτου τροχιᾶς τοῦ σημείου m_1 καὶ s_2 τὰ τόξα τῆς ἀπολύτου ἐπίσης τροχιᾶς τοῦ σημείου m_2 ἔχομεν



Σχ. 37.

$$\overline{d\sigma} = \overline{ds_2} - \overline{ds_1}$$

καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος χρονικοῦ διαστήματος dt

$$\frac{\overline{d\sigma}}{dt} = \frac{\overline{ds_2}}{dt} - \frac{\overline{ds_1}}{dt}$$

ἢ

$$\overline{v}_{2.\sigma} = \overline{v}_{2.\alpha} - \overline{v}_{1.\alpha} \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

σχετικὴ ταχύτης

ὅθεν· *ἵνα εὕρωμεν τὴν σχετικὴν ταχύτητα $v_{2.\sigma}$ τοῦ σημείου m_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον m_1 δέον νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς ἀπολύτου ταχύτητος $v_{2.\alpha}$ μεθ' ἧς φέρεται ἐν τῷ διαστήματι, ἑτέραν ταχύτητα $v_{1.\alpha}$ ἴσην καὶ ἀντίρροπον τῇ ἀπολύτῳ ταχύτητι $v_{1.\alpha}$ τοῦ κινητοῦ m_1.*

Τὴν ἄνω γεωμετρικὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ τριῶν ἀλγεβρικῶν σχέσεων

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \text{ καὶ } \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \cdots\cdots (2)$$

ἔνθα $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ τόξου $d\sigma$ ἐπὶ τριῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων ἀμεταστάτως κειμένων ἐν τῷ διαστήματι, καὶ ἀναλόγως διὰ τὰ dx_1 dx_2.....

σχετικὴ τροχιά

Ἐὰν ἤδη ὁλοκληρώσωμεν ταύτας, καὶ λάβωμεν καταλλήλως τὰς ἀρχὰς τῶν χρόνων καὶ τῶν διαστημάτων ἔχομεν

$$\xi = x_2 - x_1 \qquad \eta = y_2 - y_1 \qquad \zeta = z_2 - z_1 \ldots\ldots (3)$$

σχέσις προφανὴς ἀφ' ἑαυτῆς, ἥτις μᾶς δίδει τὰς συντεταγμένας ξ, η, ζ τοῦ σημείου m_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον m_1 συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων $x_2\, y_2\, z_2$, $x_1\, y_1\, z_1$, ὡς πρὸς τοὺς ἀμεταστάτως ἐν τῷ διαστήματι κειμένους ἄξονας ox, oy καὶ oz.

Ἠδυνάμεθα δὲ ν' ἀναχωρήσωμεν ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν καταφανῶν τούτων σχέσεων (3) καὶ διὰ διπλῆς διαφορήσεως νὰ εὕρωμεν τὰς σχέσεις (2) αἵτινες μᾶς δίδουσι τὴν ταχύτητα, καὶ τὰς σχέσεις

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2} \text{ καὶ } \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2z_2}{dt^2} - \frac{d^2z_1}{dt^2} \quad (4)$$

σχετικὴ ἐπιτάχυνσις

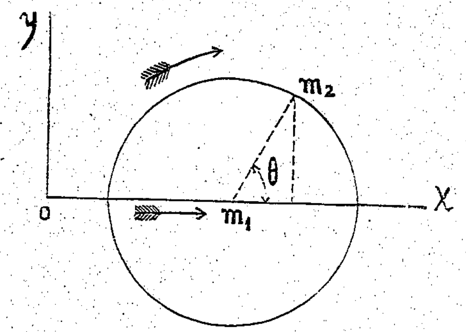
αἵτινες μᾶς δίδουσι τὴν ἐπιτάχυνσιν.

Παραδείγματα. 1) Ὑποθέσωμεν ὅτι κινητόν τι m_1 διαγράφει τὴν εὐθεῖαν ox μὲ ἰσοταχῆ κίνησιν, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$x_1 = v_1 t$$

ἐνῷ ἕτερον κινητὸν m_2 διαγράφει ἰσοταχῶς καὶ τοῦτο μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ κυκλικὴν τροχιὰν περὶ τὸ πρῶτον ὡς κέντρον.

Ζητεῖται ἡ ἀπόλυτος κίνησις τοῦ σημείου m_2.



Σχ. 38.

Κατὰ τὴν στιγμὴν t αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου m_1 εἶναι

$$x_1 = v_1 t \qquad y_1 = 0$$

αἱ σχετικαὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου m_2 κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἶναι

$$\xi = R\text{συν}\theta = R\text{συν}\omega t$$

καὶ $\eta = y_2 = R\text{ἡμ}\omega t$

καὶ αἱ ἀπόλυτοι (3)

$$x_2 = x_1 + \xi = v_1 t + R\text{συν}\omega t \quad \text{καὶ} \quad y_2 = y_1 + \eta = R\text{ἡμ}\omega t$$

Βλέπομεν οὕτω, ὅτι ἡ τροχιὰ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν τῶν κυκλοειδῶν γραμμῶν. Ἐὰν δὲ ἔχομεν $v_1 = \omega R$ ἡ τροχιὰ εἶναι ἡ κοινὴ κυκλοειδής

$$x_2 = R(\theta + \text{συν}\theta) \qquad y_2 = R\text{ἡμ}\theta$$

Ἡ σχετικὴ κίνησις τοῦ σημείου m_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον m_1 ὁρίζεται ἐκ τῆς ἀπολύτου κινήσεως διὰ τῶν σχέσεων (3)

$$\xi = x_2 - x_1 = R\text{συν}\theta$$

$$\eta = y_2 - y_1 = R\text{ἡμ}\theta$$

ὅθεν ἡ κυκλικὴ τροχιὰ

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2$$

περὶ τὸ m_1 ὡς κέντρον,

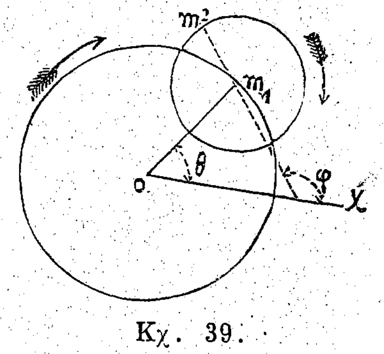
Ἡ σχετικὴ ταχύτης εἶναι

$$\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega = \sigma\tau.$$

καὶ ἡ σχετικὴ κίνησις εἶναι οὕτω ἰσοταχής.

2) Θεωρήσωμεν σημεῖον σταθερὸν τὸ 0 καὶ περὶ τοῦτο ἕτερον σημεῖον τὸ m_1 διαγράφον ἰσοταχῶς τὴν κυκλικὴν τροχιὰν om_1 μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα ω_1· ἕτερον σημεῖον τὸ m_2 κινεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ διαγράφον ἰσοταχῶς καὶ τοῦτο περιφέρειαν κύκλου περὶ τὸ m_1 ὡς κέντρον, μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα ω_2.

Ζητεῖται ἡ ἀπόλυτος κίνησις τοῦ σημείου m_2·



Κχ. 39.

αἱ ἀπόλυτοι συντεταγμέναι τοῦ κινητοῦ m_1 εἶναι

$$x_1 = R_1\sigma\upsilon\nu\theta \qquad y_1 = R_1\acute{\eta}\mu\theta$$

αἱ σχετικαὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου m_2 εἶναι

$$\xi = R_2\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad \eta = R_2\acute{\eta}\mu\varphi$$

καὶ αἱ ἀπόλυτοι συντεταγμέναι τοῦ κινητοῦ m_2 εἶναι

$$x_2 = x_1+\xi = R_1\sigma\upsilon\nu\theta + R_2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$y_2 = y_1+\eta = R_1\acute{\eta}\mu\theta + R_2\acute{\eta}\mu\varphi$$

ἀλλὰ

$$\theta = \theta_0+\omega_1 t \qquad \varphi=\varphi_0+\omega_2 t$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\begin{aligned} x_2 &= R_1\sigma\upsilon\nu(\theta_0+\omega_1 t)+R_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_0+\omega_2 t)\\ y_2 &= R_1\acute{\eta}\mu(\theta_0+\omega_1 t)+R_2\acute{\eta}\mu.(\varphi_0+\omega_2 t)\end{aligned} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

αἵτινες συμπίπτουσι μὲ τὰς γενικὰς ἐξισώσεις τῶν λεγομένων ἐπικυκλοειδῶν καὶ ὑποκυκλοειδῶν γραμμῶν.

Ἐὰν θέσωμεν $\omega_1=\omega_2$ καὶ $R_1=R_2$ αἱ ἄνω σχέσεις (1) μετατρέπονται εἰς

$$x_2=R_1\sigma\upsilon\nu(\theta_0+\omega_1t)+R_1\sigma\upsilon\nu(\varphi_0+\omega_1t)=2R_1\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_0-\varphi_0}{2}\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta_0+\varphi_0}{2}+\omega_1 t\right)$$

$$y_2=R_1\acute{\eta}\mu(\theta_0+\omega_1t)+R_1\acute{\eta}\mu.(\varphi_0+\omega_1t)=2R_1\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_0-\varphi_0}{2}\ \acute{\eta}\mu\left(\frac{\theta_0+\varphi_0}{2}+\omega_1 t\right)$$

τουτέστι τὸ σημεῖον m_2 διαγράφει ἐν τῇ ἀπολύτῳ κινήσει του κύκλον

περὶ τὸ σημεῖον 0 μὲ ἀκτῖνα $R=2R_1\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta_0-\varphi_0}{2}$ καὶ περιστροφικὴν ταχύτητα $\omega=\omega_1$

Ἐὰν θέσωμεν $\omega_1=-\omega_2$ καὶ $R_2=R_1$ ἔχομεν

$$x_2 = 2R_1\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta_0+\varphi_0}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta_0-\varphi_0}{2}+\omega_1 t\right)$$

$$y_2 = 2R_1\acute{\eta}\mu\,\frac{\theta_0+\varphi_0}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta_0-\varphi_0}{2}+\omega_1 t\right)$$

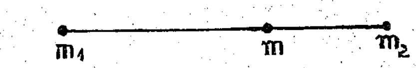
ὅθεν

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2} = 2R_1\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta_0-\varphi_0}{2}+\omega_1 t\right) \text{ καὶ } \psi = \widehat{m_2ox} = \frac{\theta_0+\varphi_0}{2}$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος παλινδρομική· ἀρκούμενοι εἰς τὰ ὀλίγα ταῦτα ἀφορῶντα τὰς σχετικὰς κινήσεις τῶν σημείων καταλήγομεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀκολούθου χρησιμοτάτης προτάσεως.

26. *Αἱ τροχιαὶ δύο κινητῶν m_1 καὶ m_2 θεωρούμεναι ἐν σχέσει πρὸς ἑκάτερον τούτων ἢ πρὸς τρίτον m, διαιροῦν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα m_1m_2 κατὰ δοθέντα λόγον σ, εἶναι γραμμαὶ ἴσαι ἢ ὅμοιαι.*

Ἡ τροχιὰ τοῦ κινητοῦ m_1 περὶ τὸ m_2 εἶναι προφανῶς ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τροχιὰν τοῦ m_2 περὶ τὸ m_1 διότι ἀμφότεραι ὁρίζονται διὰ τῶν αὐτῶν ἀκτίνων m_1m_2. Αἱ τροχιαὶ δὲ ἀμφοτέρων τῶν κινητῶν τούτων περὶ τὸ σημεῖον m ὁρίζονται διὰ τῶν ἀκτίνων mm_1 καὶ mm_2, ὧν ὁ λόγος εἶναι σταθερὸς καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ τροχιαὶ ὅμοιαι γραμμαί.



Σχ. 40.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

1. Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ κενῷ.

27. Βλῆμά τι βάλλεται ἀπὸ τοῦ σημείου 0 μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα ov_0, ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος καὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων τῆς κινήσεως αὐτοῦ.

Ἡ τροχιὰ ἐμπεριέχεται ἐν τῷ διὰ τῆς εὐθείας ov_0 φερομένῳ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, διότι μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς βολῆς, ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα τῆς ταχύτητος εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ov_0 καὶ gdt (κατακόρυφος ταχύτης ὀφειλομένη τῇ ἐπιταχύνσει τῆς βαρύτητος) καὶ εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο τούτων τμημάτων.

Ἐὰν ὁρίσωμεν τὴν τροχιὰν διὰ τῶν ὀρθογωνίων αὐτῆς συντεταγμένων ἔχομεν

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -g \ldots (1)$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος

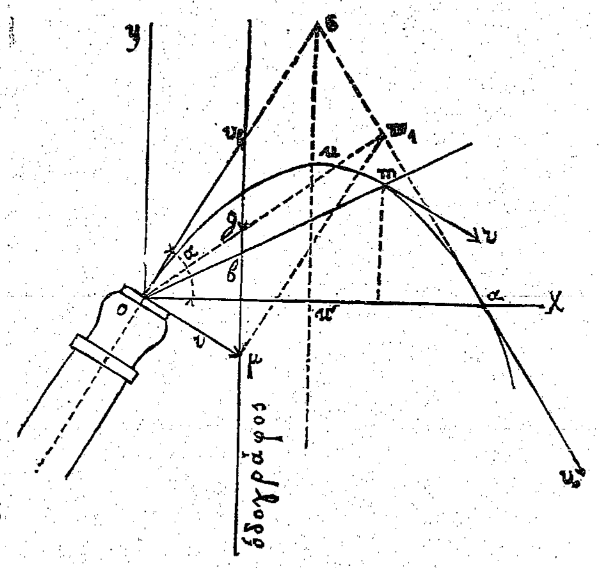
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \text{σταθ.} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + \text{σταθ.}$$

ἀλλ' αἱ συνιστῶσαι αὗται κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς τοῦ βλήματος εἰσὶ v_0συνα καὶ v_0ἡμα· ὥστε

$$v_x = v_0\text{συν}\alpha \qquad v_y = -gt + v_0\text{ημ}\alpha \quad \ldots (2)$$

ὁλοκληροῦντες καὶ παρατηροῦντες ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κινητοῦ ἰσοῦνται τῷ μηδενὶ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$x = tv_0\text{συν}\alpha \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + tv_0\text{ημ}\alpha. \quad (3)$$



Σχ. 41.

αἵτινες ὁρίζουσι τὴν κίνησιν τοῦ βλήματος.

τροχιὰ τοῦ βλήματος

Διὰ τῆς ἀπαλειφῆς τοῦ χρόνου t ἐκ τῶν σχέσεων τούτων εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς

$$y = x\,\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2\text{συν}^2\alpha} = x\text{εφ}\alpha - \frac{x^2}{4h\text{συν}^2\alpha} \ldots\ldots (4)$$

ὅπου $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$ ἐμφαίνει τὸ ἀντιστοιχοῦν τῇ ταχύτητι v_0 ὕψος.

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$y.4h\text{συν}^2\alpha = 4hx\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha - x^2$$

ἢ

$$(x - h\text{ημ}2\alpha)^2 = 4h\text{συν}^2\alpha(h\text{ημ}^2\alpha - y)$$

ἢ θέτοντες

$$\xi = x - h\text{ημ}2\alpha$$
$$\eta = -y + h\text{ημ}^2\alpha$$

ἔχομεν εἰς ἁπλουστέραν μορφὴν τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς τῆς κινήσεως

$$\xi^2 = 4h\text{συν}^2\alpha.\eta$$

καὶ βλέπομεν ὅτι αὕτη παριστᾷ παραβολὴν ἧς ἄξων εἶναι ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα $x = h\text{ημ}2\alpha$.

ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ὁριζοντείου εὐθείας $y = h\text{ημ}^2\alpha = \dfrac{\varepsilon u'}{2}$. ἡ τιμὴ τοῦ παραμέτρου αὐτῆς p εἶναι $2h\text{συν}^2\alpha$ καὶ ἡ διευθύνουσα εἶναι ἡ ὁριζόντειος $y = h$

Τὸ βλῆμα κρούει τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον $o\alpha$ παρὰ τῷ σημείῳ a κειμένῳ εἰς ἀπόστασιν $oa = 2h\text{ημ}2\alpha$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς

Τὸ μῆκος τοῦτο ὀνομάζεται βεληνεκές, μεταβάλλεται δὲ μετὰ τῆς κλίσεως α τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος· ἡ μεγαλειτέρα τιμὴ αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ τῇ κλίσει $\alpha = 45^0$ καὶ εἶναι $2h$· βεληνεκές

ὁ ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος oa

Τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς ὃ φθάνει τὸ βλῆμα εἶναι $uu' = h\text{ημ}^2\alpha$ καὶ καλεῖται ὕψος τῆς βολῆς· τὸ ὕψος τοῦτο μεταβάλλεται μετὰ τῆς κλίσεως τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος· ἡ μεγαλειτέρα τιμὴ τούτου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κλίσιν $\alpha = 90^0$ καὶ εἶναι h. μέγιστον ὕψος

Ἀντικαθιστῶντες ἐν ταῖς σχέσεσιν (3)

x καὶ y ἀλληλοδιαδόχως διὰ $2h\text{ημ}.2a$ καὶ o, o καὶ $h\text{ημ}^2\alpha$, βλέπομεν ὅτι ὁ διὰ τὴν μετάβασιν τοῦ βλήματος ἀπὸ τοῦ σημείου o εἰς τὸ σημεῖον a ἀπαιτούμενος χρόνος $\dfrac{2v_0\text{ημ}\alpha}{g}$ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀπαιτουμένου $\dfrac{v_0\text{ημ}\alpha}{g}$ διὰ τὴν μετάβασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου o εἰς τὸ σημεῖον u.

βεληνεκὲς ὡρισμένης φορᾶς

28. Ζητήσωμεν ἐν γένει τὸ σημεῖον m ἔνθα τὸ βλῆμα διαπερᾷ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν β·
ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας om εἶναι

$$y = x\varepsilon\varphi\beta$$

ἡ τετμημένη τοῦ σημείου m ὁρίζεται λοιπὸν διὰ τῆς σχέσεως

$$x_1\varepsilon\varphi\beta = x_1\varepsilon\varphi\alpha - \frac{x_1^2}{4h\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

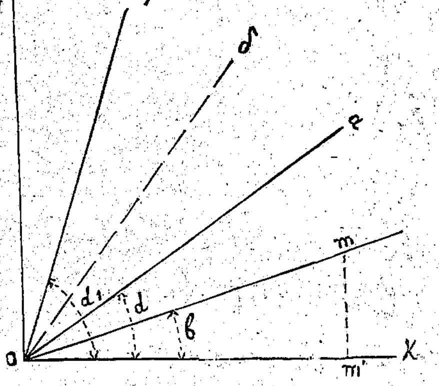
ὅθεν

$$om' = x_1 = \frac{4h}{\sigma\upsilon\nu\beta}\,\sigma\upsilon\nu\alpha.\dot{\eta}\mu(\alpha-\beta)$$

μέγιστον βεληνεκὲς ὡρισμένης φορᾶς

τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ μέγιστον βεληνεκὲς κλίσιν α εὑρίσκομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{d\,om'}{d\alpha} = \sigma\upsilon\nu(2\alpha-\beta) = 0$$



Σχ. 42.

ἥτις μᾶς δίδει

$$2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \text{ ἢ } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$$

καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ τηλεβόλον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ διευθύνεται κατὰ τὴν $o\delta$ διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν yom.
λέγω δὲ ὅτι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου m δυνάμεθα νὰ βάλωμεν δίδοντες εἰς τὸ τηλεβόλον ἀντὶ τῆς ἀρχικῆς διευθύνσεως oa τὴν oa_1 συμμετρικὴν τῆς oa ὡς πρὸς τὴν διχοτομοῦσαν $o\delta$.
ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις om δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν α διὰ τῆς α_1
ἐν τῷ σχήματι ἔχομεν

$$\alpha_1 = xoa_1 = \frac{\pi}{2} - yoa_1 \quad \text{ἀλλὰ} \quad yoa_1 = aom = \alpha - \beta$$

ὥστε

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει α διὰ τοῦ α_1 ἔχομεν

$$\xi_1 = om = \frac{4h}{\sigma\upsilon\nu\beta}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right)\dot{\eta}\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{4h}{\sigma\upsilon\nu\beta}\dot{\eta}\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ὥστε

$$\xi_1 = x_1$$

29. Ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ ὁρίζεται διὰ τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς (2) ταχύτης τοῦ βλήματος

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad \eta = \frac{dy}{dt} = -gt + \upsilon_0\dot{\eta}\mu\alpha$$

αἵτινες εἰσὶ καὶ αἱ συντεταγμέναι τῆς ὁδογράφου καμπύλης· ἐκ τῆς σχέσεως $\xi = \upsilon_0\sigma\upsilon\nu\alpha$
βλέπομεν, ὅτι ἡ ὁδογράφος καμπύλη εἶναι ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα $g\mu$ (Σχ. 41)· προσδιορίζοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης τὸ σημεῖον $\mu\,(\xi,\eta)$ ὁρίζομεν διὰ τοῦ τμήματος $o\mu$ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος υ παρὰ τῷ σημείῳ m.
Τὸ σημεῖον μ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ σημείου m διὰ τῆς ἀκολούθου γεωμετρικῆς κατασκευῆς· ἀπὸ τοῦ σημείου υ_0 φέρομεν τὴν κατακόρυφον $\upsilon_0 g =$ τῇ ἐπιταχύνσει g, ἑνοῦμεν og, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου m_1 ἔνθα ἡ εὐθεῖα og συναντᾷ τὴν κατακόρυφον τοῦ σημείου m φέρομεν τὴν $m_1\mu$ παράλληλον τῇ $o\upsilon_0$· τὸ ἐπὶ τῆς ὁδογράφου σημεῖον μ ἀντιστοιχεῖ τῷ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς m, καὶ ἡ ταχύτης υ παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ ὁρίζεται κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν διὰ τοῦ τμήματος $o\mu$.
Ἀλγεβρικῶς ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\upsilon^2 = \xi^2 + \eta^2 = \upsilon_0^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + (\upsilon_0\dot{\eta}\mu\alpha - gt)^2 = \upsilon_0^2 - 2gy$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}$$

Οὕτω ἡ ταχύτης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ὕψος μόνον y, εἰς ὃ εὑρίσκεται τὸ βλῆμα, ὅπερ κατὰ συνέπειαν διαπερᾷ μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος τὰ αὐτὰ ὁριζόντεια ἐπίπεδα.

30. Ἴδωμεν νῦν ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸ τηλεβόλον ἵνα βάλωμεν ἐπὶ ὡρισμένου σημείου $m(x_1y_1)$ τοῦ διαστήματος. Δέον πρὸς τοῦτο τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τηλεβόλου κατακόρυφον ἐπίπεδον νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου m καὶ αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ (x_1y_1) νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν

$$y_1 = x_1\varepsilon\varphi\alpha - \frac{x_1^2}{4h\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = x_1\varepsilon\varphi\alpha - \frac{x_1^2}{4h}(1 + \varepsilon\varphi^2\alpha)$$

ἥτις ὁρίζει τὴν κλίσιν τοῦ τηλεβόλου διὰ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hy_1 - x_1^2}}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

οὕτω ἐπὶ τοῦ σημείου m δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ὑπὸ δύο διαφόρους διευθύνσεις (§ 28)

Ἀλλ' ἵνα ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης τῆς κλίσεως α ᾖ πραγματικὴ δέον νὰ ἐπαληθεύῃ ἡ συνθήκη

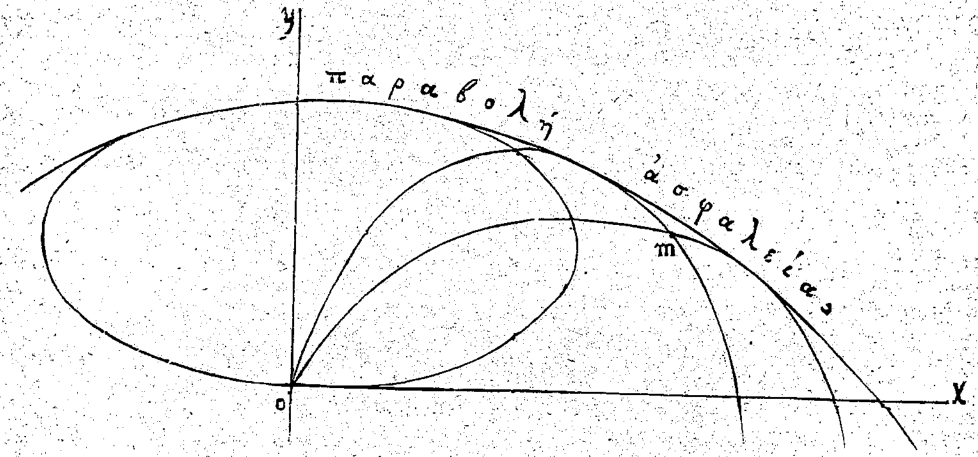
$$4h^2 - 4hy_1 - x_1^2 \geqslant o$$

παραβολὴ ἀσφαλείας

Ἐὰν ἤδη ὁρίσωμεν ἐν τῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ τῆς βολῆς τὴν διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

παρισταμένην καμπύλην, ἥτις εἶναι παραβολὴ ἔχουσα ἄξονα τὴν



Σχ. 43.

κατακόρυφον oy, ἑστίαν τὸ σημεῖον o καὶ κορυφὴν $c\,(h = y)$ βλέπομεν ὅτι, δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς ταύτης ἡ ἐφαπτομένη τῆς κλίσεως ἔχει μίαν μόνην τιμὴν καὶ κατὰ συνέπειαν ὑπὸ μίαν μόνον γωνίαν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπ' αὐτῶν.

Ἐὰν τὸ σημεῖον m εὑρίσκηται ἐντὸς τῆς παραβολῆς ταύτης

$$x_1^2 + 4hy_1 - 4h^2 > o$$

ἡ ἐφαπτομένη τῆς κλίσεως ἔχει δύο τιμὰς καὶ δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου ὑπὸ δύο διαφόρους γωνίας α καὶ α_1 *.

* Σημειωσεις. Ἡ ἀπόστασις om ἰσοῦται μὲ $4h$συνα ἡμ(α—β) (Σχ. 42) ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ δύο ῥίζαι ἐπαληθεύουσι τὴν σχέσιν ταύτην ἔχομεν

$$συνα\,ημ(\alpha-\beta) = συνα_1\,ημ(\alpha_1-\beta)$$

ἢ

$$ημ(2\alpha-\beta) = ημ(2\alpha_1-\beta)$$

Ἀλλ' ἐὰν τὸ σημεῖον m εὑρίσκηται ἐκτὸς τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος παραβολῆς

$$x_1^2 + 4hy_1 - 4h^2 < o$$

καὶ ὑπὸ οὐδεμίαν γωνίαν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπ' αὐτοῦ.

Ἡ παραβολὴ

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = o$$

καλεῖται *παραβολὴ τῆς ἀσφαλείας* ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O καὶ εὐκόλως δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ περιβάλλουσα ὅλας τὰς ὑπὸ τοῦ βλήματος διαγραφομένας τροχιὰς ὅταν μεταβάλλωμεν τὴν κλίσιν τῆς βολῆς.

Οἱαδήποτε τῶν τροχιῶν τούτων δύναται τῷ ὄντι νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$y = x\beta - \frac{x^2}{4h}(1+\beta^2) \qquad \text{ἔνθα} \qquad (\beta = εφ\alpha)$$

καὶ τὴν περιβάλλουσαν αὐτῆς εὑρίσκομεν ἀπαλείφοντες β μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς παραγώγου αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ β

$$x - \frac{x^2}{2h}\beta = o$$

μετὰ τὴν ἀπαλειφὴν ἔχομεν

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = o$$

Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν τὸ ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα oy γεννώμενον παραβολοειδές, βλέπομεν ὅτι τοῦτο ὁρίζει ἐν τῷ διαστήματι δύο χώρους, ὧν ὁ ἐξωτερικὸς οὐδένα διατρέχει κίνδυνον ἐκ τῶν ἀπὸ τοῦ σημείου o βαλλομένων καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν βλημάτων· ὀνομάζομεν καὶ τοῦτο παραβολοειδὲς ἀσφαλείας ὡς πρὸς τὸ σημεῖον o.

31. Ἃς ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν τροχιὰν

$$y = x\,εφ\alpha - \frac{x}{4h}(1 + εφ^2\alpha) \quad \text{ἢ} \quad (x - hημ2\alpha)^2 = 4hσυν^2\alpha(hημ^2\alpha - y)$$

ὅθεν

$$(2\alpha-\beta) + (2\alpha_1-\beta) = \pi$$

ἢ

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$$

αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς εἶναι

$$\xi = h\eta\mu 2\alpha$$

$$\eta = h\eta\mu^2\alpha$$

καὶ ἀπαλείφοντες τὴν γωνίαν α εὑρίσκομεν

$$\xi^2 + 4\eta^2 - 4h\eta = o$$

ἥτις παριστᾷ ἔλλειψιν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου o.

Ἐὰν μετατοπίσωμεν τὸν ἄξονα ox ἀνυψοῦντες αὐτὸν κατὰ $\frac{h}{2}$ (θέσωμεν δηλ. $x=\xi \quad \eta = y + \frac{h}{2}$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶναι

$$\frac{x^2}{h^2} + 4\,\frac{y^2}{h^2} = 1$$

περιλαμβάνει δὲ αὕτη τὰ σημεῖα, ἅτινα κτυπᾷ τὸ βλῆμα ἀνερχόμενον.

32. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν οὐχὶ σταθεράν, ἀλλ' ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς θὰ εὕρωμεν ὅτι

1) *Ἡ τροχιὰ τοῦ βλήματος εἶναι ἔλλειψις, ἧς ἡ μία τῶν ἑστιῶν συμπίπτει μετὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς.*

2) *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς ἑτέρας τῶν ἑστιῶν τῆς τροχιᾶς τῶν βλημάτων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐξ ὡρισμένου σημείου μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ εἶναι κύκλος.*

3) *τὸ μέγιστον βεληνεκὲς om ἐπὶ ὡρισμένης γραμμῆς om διερχομένης διὰ τοῦ σημείου o ἐπιτυγχάνομεν, διευθύνοντες τὸ τηλέβολον κατὰ τὴν διχοτομοῦσαν $o\delta$ τῆς γωνίας yom.*

4) *ἐπὶ παντὸς ἄλλου σημείου τῆς γραμμῆς om δυνάμεθα νὰ βάλωμεν διὰ δύο κλίσεων συμμετρικῶν ἑκατέρωθεν τῆς διχοτομούσης $o\delta$.*

5) *Ἐὰν τὸ βλῆμα συναντᾷ καθέτως τὴν γραμμὴν om, τὸ σημεῖον τῆς κρούσεως συμπίπτει μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἑτέρας τῶν τροχιῶν δι' ὧν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*

6) *Ἡ περιβάλλουσα τῶν διαφόρων τροχιῶν, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν ὡρισμένῳ σημείῳ βολῆς κείμεναι ἐν ὡρισμένῳ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, εἶναι ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ἡ μία τῶν ἑστιῶν συμπίπτει μετὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, καὶ ἡ ἑτέρα μετὰ τοῦ σημείου τῆς βολῆς.*

2. Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ ἀέρι.

[*Σπουδὴ τῆς βληματικῆς τροχιᾶς (courbe balistique)*]*

33. Ἡ φύσις τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν διαγράφουσι τὰ βλήματα ἐν τῷ ἀέρι ἀφωμοιώθη κατ' ἀρχὰς πρὸς τόξα κύκλου, ἑνούμενα ἀλλήλοις συνεχῶς, μέχρις οὗ ὁ Γαλιλαῖος, ὅστις πρῶτος ἀνεκάλυψε τοὺς νόμους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, ἔδειξεν, ὅτι ἐὰν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ἡ ὑπὸ τοῦ ἀέρος ἀντιτασσομένη εἰς τὴν κίνησιν τοῦ βλήματος ἀντίδρασις, καὶ ὑποτεθῇ σταθερὰ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος, διαγράφει τοῦτο παραβολὴν [§ 27. 4]. ὁ Νεύτων εἰσήγαγεν ἐν τῇ σπουδῇ τῆς κινήσεως τῶν βλημάτων τὴν ἀντίδρασιν τοῦ ἀέρος, χωρὶς ὅμως νὰ λύσῃ ἐντελῶς τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον ἡ Ἀκαδημία τοῦ Βερολίνου ἔθεσε κατόπιν εἰς διαγωνισμόν Ὁ Borda ἐπειράθη τότε νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ πρῶτος ὁ Λέγενδρος κατώρθωσε νὰ ὁλοκληρώσῃ τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται ἡ κίνησις τοῦ βλήματος ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ περιπτώσει, ἐν ᾗ ἡ ὑπὸ τοῦ ἀέρος ἀντιτασσομένη ἀντίδρασις ὑποτίθεται ἀνάλογος τῷ τετραγώνῳ τῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος. Τέλος ὁ Jacobi ὑποθέτων τὴν ἀντίδρασιν τοῦ ἀέρος ἀνάλογον τῇ n[ιοστῇ] δυνάμει τῆς ταχύτητος κατώρθωσε νὰ ὁλοκληρώσῃ τὰς ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος, ὡς θὰ ἴδωμεν τοῦτο ἀμέσως κατωτέρω.

Βληματικὴν καμπύλην ὀνομάζομεν τὴν ὑπὸ ἐκσφενδονισθέντος ὑλικοῦ σημείου διαγραφομένην τροχιὰν ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος καὶ τῆς ὑπὸ τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἀντιτασσομένης ἀντιδράσεως. Τὸ ὑλικὸν τοῦτο σημεῖον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς τὸ κέντρον τῆς μάζης τοῦ πραγματικοῦ βλήματος, ὅπερ κινεῖται ὡς μεμονωμένον ὑλικὸν σημεῖον ἔχον μάζαν ἴσην τῇ μάζῃ τοῦ σώματος καὶ φερόμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν αὐτῶν ἐξωτερικῶν ἐπιταχύνσεων. Ἐν τῇ πραγματικῇ κινήσει τῶν βλημάτων παρατηρεῖται ἐν τούτοις πλαγία παρέκκλισις ὀφειλομένη εἰς τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τούτων.

Ἐὰν τὸ βλῆμα εἶναι σφαιρικόν, ἡ περιστροφικὴ κίνησις αὐτοῦ εἶναι ἀόριστος, καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῆς πλαγίας παρεκκλίσεως ἀδύνατος. Διὰ τῆς χρήσεως ὅμως τῶν κυλινδρο-κωνικῶν βλημάτων καὶ τῶν ῥαβδωτῶν ὅπλων, ὁρίζομεν μαθηματικῶς οὕτως εἰπεῖν τὴν περιστρο-

* Ληφθὲν ἐκ τῶν μαθημάτων τοῦ κ. Resal

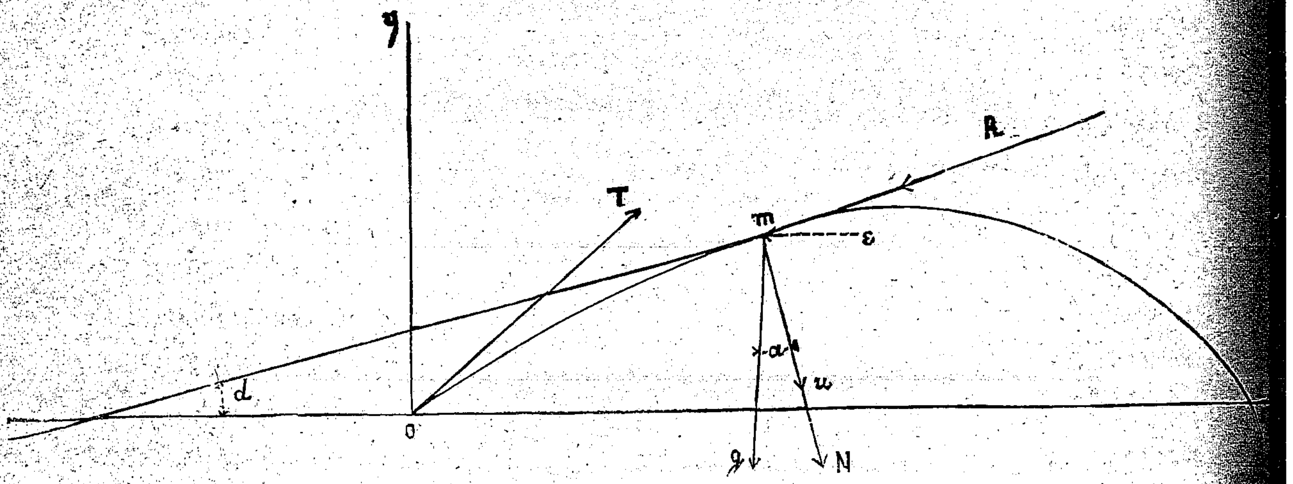
φικὴν κίνησιν τοῦ βλήματος καὶ ὑπολογίζομεν τὴν ἐκ ταύτης προκύπτουσαν πλαγίαν παρέκκλισιν αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν παραλείπομεν ἐντελῶς ἐνταῦθα.

34. Ἔστω om ἡ τροχιὰ τοῦ βλήματος καὶ m ἡ θέσις ἣν κατέχει τοῦτο κατὰ τὴν στιγμὴν t· τὸ βλῆμα κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g καὶ τῆς ἐκ τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ἀέρος ἐπιταχύνσεως R, τῆς ὁποίας ἡ φορὰ εἶναι διαρκῶς ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος v τοῦ βλήματος· ἡ τροχιὰ εἶναι λοιπὸν ἐν τῷ διὰ τῆς ἀρχικῆς φορᾶς τῆς προβολῆς OT ὁριζομένῳ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀνάγομεν αὐτὴν εἰς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας ox καὶ oy.

Ἔστω mR ἡ ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς παρὰ τῷ σημείῳ m, α ἡ μετὰ τοῦ ἄξονος ox γωνία ταύτης καὶ mN ἡ κάθετος τῇ τροχιᾷ παρὰ τῷ σημείῳ m.

Ἡ συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως τῷ ἄξονι ox ὀφείλεται ἁπλῶς τῇ ἀνθισταμένῃ ἐπιταχύνσει R καὶ ἔχομεν

$$m\varepsilon = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d(v\sigma\upsilon\nu\alpha)}{dt} = -R\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1)$$



Σχ. 44

ἀφ' ἑτέρου ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις $\frac{v^2}{\rho}$ ὀφείλεται ἁπλῶς τῇ ἐπιταχύνσει της βαρύτητος g και ἔχομεν

$$mu = \frac{v^2}{\rho} = g\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἀλλ' ἔχομεν προφανῶς $\frac{1}{\rho} = -\frac{d\alpha}{ds}$ (τὸ σημεῖον—διότι α βαίνει ἐλαττούμενον) καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\frac{v^2 d\alpha}{ds} = \frac{v^2 d\alpha}{vdt} = -g\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἢ τέλος

$$\frac{vd\alpha}{dt} = -g\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \ldots\ldots (2)$$

διαιροῦντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ἀπαλείφομεν τὸν χρόνον καὶ ἔχομεν

$$\frac{d(v\sigma\upsilon\nu\alpha)}{v.d\alpha} = \frac{R}{g}$$

Θέτοντες ἤδη μετὰ τοῦ Jacobi $R = g\frac{v^n}{k^n}$ και ἀντικαθιστῶντες

ἔχομεν

$$\frac{d(v\sigma\upsilon\nu\alpha)}{d\alpha} = \frac{v^{n+1}}{k^n} \quad \ldots\ldots (3)$$

ἢ ἀναπτύσσοντες $d(v\sigma\upsilon\nu\alpha)$ και διαιροῦντες διὰ v^{n+1}

$$\frac{1}{v^{n+1}}\frac{dv}{d\alpha}\sigma\upsilon\nu\alpha - v^{-n}\eta\mu\alpha = k^{-n}$$

ἢ τέλος

$$\frac{d(v^{-n})}{d\alpha} + nv^{-n}\varepsilon\varphi\alpha + \frac{nk^{-n}}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

διαφορικὴ ἐξίσωσις γραμμικὴ ὡς πρὸς τὸ v^{-n} καὶ γνωστὴ ὑπὸ τὴν ἐπωνυμίαν, ἐξίσωσις τοῦ Bernouilli.

Θέττοντες ταχύτης

$$v^{-n} = z$$

μετατρέπομεν ταύτην εἰς

$$\frac{dz}{d\alpha} + nz\varepsilon\varphi\alpha + \frac{nk^{-n}}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$$

τῆς ὁποίας τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι

$$z = \sigma\upsilon\nu^n\alpha \left| -nk^{-n}\int\frac{d\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{n+1}\alpha} + C\right|$$

ἢ ἀντικαθιστῶντες z διὰ τῆς τιμῆς του v^{-n}

$$\frac{1}{v^n \sigma\upsilon\nu^n \alpha} = -\,nk^{-n}\int \frac{d\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{n+1}\alpha} + C$$

Ἔστω v_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ α_0 ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει αὕτη μετὰ τοῦ ὁρίζοντος· τὴν σταθερὰν C προσδιορίζομεν διὰ τῶν δύο τούτων ποσοτήτων καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{v^n \sigma\upsilon\nu^n \alpha} - \frac{1}{v_0^{\,n} \sigma\upsilon\nu^n \alpha_0} = -\,nk^{-n}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{n+1}\alpha}$$

ἢ

$$\frac{1}{v^n \sigma\upsilon\nu^n \alpha} = \frac{1}{v_0^{\,n} \sigma\upsilon\nu^n \alpha_0}\left[1 - nk^{-n} v_0^{\,n} \sigma\upsilon\nu^n \alpha_0 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{n+1}\alpha}\right]$$

ὅθεν

$$v = \frac{v_0 \sigma\upsilon\nu\alpha_0}{\sigma\upsilon\nu\alpha \sqrt[n]{1 - \frac{n v_0^{\,n} \sigma\upsilon\nu^n \alpha_0}{k^n}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{n+1}\alpha}}} = \varphi(\alpha) \ldots\ldots \quad (5)$$

Ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸν ἀντιστοιχοῦντα τῇ θέσει m χρόνον t καὶ τὰς συντεταγμένας x καὶ y τοῦ σημείου τούτου·

ἡ ἐξίσωσις

$$v\frac{d\alpha}{dt} = -\,g\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

μᾶς δίδει

$$dt = -\frac{v\,d\alpha}{g\sigma\upsilon\nu\alpha} = -\frac{\varphi(\alpha)}{g\sigma\upsilon\nu\alpha}\,d\alpha$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\varphi(\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\,d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

τροχιὰ

Ἔχομεν εἶτα

$$dx = v\sigma\upsilon\nu\alpha\,dt$$

καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη μὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον ἔχομεν

$$dx = -\frac{1}{g}\,v^2 d\alpha = -\frac{1}{g}[\varphi(\alpha)]^2 d\alpha$$

ὅθεν

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}[\varphi(\alpha)]^2 d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

καὶ ἐπειδὴ

$$dy = dx\,\varepsilon\varphi\alpha = -\frac{1}{g}\,v^2 \varepsilon\varphi\alpha . d\alpha$$

ἔχομεν

$$y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}[\varphi(\alpha)]^2 \varepsilon\varphi\alpha . d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

καὶ ἔχομεν οὕτω ὅλας τὰς ἐξισώσεις, αἵτινες ὁρίζουσι τὴν κίνησιν τοῦ βλήματος.

Ὁ Λέγενδρος ἐλάμβανεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ἀντὶ τῆς α τὴν $\varepsilon\varphi\alpha = p$ καὶ τότε

σχέσεις τοῦ Λεγένδρου

$$dp = \frac{d\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = d\alpha(1+p^2) \qquad d\alpha = \frac{dp}{1+p^2} \quad \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἄνω σχέσεις ἔχομεν τοὺς τύπους τοῦ Λεγένδρου.

$$v = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{1+p_0^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sqrt[n]{1 - n\frac{v_0^{\,n}}{k^n}\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{n}{2}}}\int_{p_0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp}} \quad . (5')$$

$$t = -\frac{1}{g}\int_{p_0}^{p}\frac{v\,dp}{\sqrt{1+p^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{g}\int_{p_0}^{p}\frac{v^2 dp}{1+p^2} \\ y &= -\frac{1}{g}\int_{p_0}^{p}\frac{v^2 p\,dp}{1+p^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Βλέπομεν ἐν πρώτοις εὐκόλως ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς μεταβλητῆς p αὐξάνει πέραν παντὸς ὁρίου· ἔχομεν τῳ ὄντι

προϊόντος τοῦ χρόνου ἡ φορὰ τῆς ταχύτητος τείνει πρὸς τὴν κατακόρυφον

$$t = -\frac{1}{g}\int_{p_0}^{p}\frac{v\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = f(p) - f(p_0)$$

ἐὰν p εἶχε πεπερασμένον ὅριον καὶ τὸ t θὰ εἶχε ὅριον, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

προϊόντος τοῦ χρόνου ἡ ταχύτης τείνει πρὸς τὸ σταθερὸν ὅριον k.

Λέγω, ἤδη, ὅτι ὅταν p αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον ἡ ταχύτης v τείνει πρὸς ὡρισμένον ὅριον· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι ὁ παρονομαστὴς ἐν τῇ σχέσει (5') δὲν δύναται νὰ μηδενισθῇ.

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\int_{p_0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp=\int_{p_0}^{0}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp+\int_{0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp$$

τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα $\int_{0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ κατερχόμενον μέρος τῆς καμπύλης ἔνθα dp εἶναι διαρκῶς ἀρνητική· λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\int_{p_0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp$$

πέραν ὡρισμένης τινὸς τιμῆς τοῦ p εἶναι ἀρνητικόν· ἐπειδὴ δὲ ὑπὸ τὸ ῥιζικόν(5') πολλαπλασιάζεται τοῦτο ὑπὸ ἀρνητικῆς ποσότητος, τὸ γινόμενον εἶναι θετικόν, καὶ ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ποσότης εἶναι θετική. Ἡ ταχύτης v τείνει λοιπὸν πρὸς ὡρισμένον ὅριον, τὸ ὁποῖον προτιθέμεθα νῦν νὰ ζητήσωμεν.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν

$$\int_{p_0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp=\int_{p_0}^{p_1}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp+\int_{p_1}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp$$

ἔνθα p_1 εἶναι ἀρνητικὴ ποσότης μεγάλης ἀπολύτου τιμῆς, οὕτως ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν μονάδα πρὸ τῆς ποσότητος p_1^2, καὶ τῆς $p^2>p_1^2$, καὶ τότε ἔχομεν κατὰ προσέγγισιν

$$\int_{p_0}^{p}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp=\int_{p_0}^{p_1}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp+\int_{p_1}^{p}p^{n-1}dp$$

$$=\int_{p_0}^{p_1}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp+\frac{1}{n}[p_1{}^n-p^n]$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (5') ἔχομεν

$$v=\frac{v_0 p}{\sqrt[n]{\beta+\frac{v_0{}^n}{k^n}p^n}}=\frac{kv_0}{\sqrt[n]{\beta p^{-n}+v_0{}^n}}$$

ἔνθα β εἶναι σταθερὰ συνάρτησις τοῦ p_1·

διὰ $p=\infty$ ἔχομεν

$$v=k$$

ὅπως καὶ ἐν τῇ περιπτώσει τῶν κατακορύφως πιπτόντων σωμάτων.

Ἡ τροχιὰ ἔχει κατακόρυφον ἀσύμπτωτον

Ἡ βληματικὴ καμπύλη ἔχει κατακόρυφον ἀσύμπτωτον· ἐκ τῶν σχέσεων (7') βλέπομεν τῷ ὄντι, ὅτι ἐὰν p αὐξάνει πέραν παντὸς ὁρίου καὶ τὸ y αὐξάνει πέραν παντὸς ὁρίου ἐνῷ τὸ x μένει πεπερασμένον διότι

$$x-x_1=-\frac{1}{g}\int_{p_1}^{p}\frac{v^2dp}{1+p^2}$$

ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν p_1 ἀρκετὰ μεγάλον, ὥστε νὰ δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν v^2 διὰ τοῦ k^2 καὶ νὰ παραλείψωμεν τὴν μονάδα πρὸ τοῦ $p>p_1$ ἔχομεν

$$x-x_1=-\frac{1}{g}\int_{p_1}^{p}\frac{k^2dp}{p^2}=\frac{k^2}{g}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right]$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν p αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον $\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}$ τείνει πρὸς ὅριον πεπερασμένον, κατὰ συνέπειαν δὲ καὶ τὸ x.

περίπτωσις ἐκσφενδονίσεως ὑπὸ μικρὰν γωνίαν

Ἐὰν τὸ βλῆμα ἐκσφενδονίζηται ὑπὸ γωνίαν σχετικῶς μικράν, p_0 εἶναι πολὺ μικρὸν καθὼς καὶ p δι' ὅλα τὰ σημεῖα, ἅτινα κεῖνται ὑπεράνω τοῦ ἄξονος ox· παραλείποντες τότε p^2 καὶ p_0^2 πρὸ τῆς μονάδος ἔχομεν (5')

$$v=\frac{v_0}{\sqrt[n]{1-n\frac{v_0{}^n}{k^n}(p-p_0)}}=v_0\left|1-n\frac{v_0{}^n}{k^n}(p-p_0)\right|^{-\frac{1}{n}}$$

καὶ κατὰ προσέγγισιν

$$v=v_0\left|1+\frac{v_0{}^n}{k^n}(p-p_0)\right|$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς v ἐν ταῖς σχέσεσιν (6') καὶ (7') ἔχομεν t x καὶ y.

περιπτώσεις ὁλοκληρώσιμοι

Ἡ γενικὴ σχέσις (5') εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐν ταῖς περιπτώσεσι

$$n=2 \qquad \text{καὶ} \qquad n=3$$

διὰ $n = 2$ ἔχομεν

$$v = \frac{v_0\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p_0^2}\sqrt{1-2\frac{v_0^2}{k^2}\frac{1}{1+p_0^2}\int_{p_0}^{p}\sqrt{1+p^2}\,dp}} \quad \dots (5'')$$

ἀλλὰ

$$\int\sqrt{1+p^2}\,dp = p\sqrt{1+p^2}+\lambda o\gamma[p+\sqrt{1+p^2}]+C$$

ἐν τῇ περιπτώσει $n = 3$ ἔχομεν

$$v = \frac{v_0\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p_0^2}\sqrt{1-3\frac{v_0^3}{k^3}\frac{1}{(1+p_0^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{p_0}^{p}(1+p^2)dp}}$$

ἀλλὰ

$$\int_{p_0}^{p}(1+p^2)dp = p+\frac{p^3}{3}+C$$

συμπληρωματικὴ σπουδὴ τῆς βληματικῆς γραμμῆς

35. Ἡ πρακτικὴ ἐφαρμογὴ τῶν ἄνω τύπων ἐν τῇ πυροβολικῇ παρουσιάζει δυσκολίας, καὶ διὰ τοῦτο ἀντικαθιστῶσι τούτους δι' ἄλλων ἐμπειρικῶν τύπων, τοὺς ὁποίους θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα συντόμως·

εὕρομεν ἀνωτέρω τὴν ἐξίσωσιν

$$y = x\varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha_0}$$

τῆς τροχιᾶς τοῦ ἐν τῷ κενῷ κινουμένου βλήματος·

ὁ στρατηγὸς Didion ἔσχε τὴν ἰδέαν νὰ σχετίσῃ τὴν καμπύλην ταύτην πρὸς τὴν βληματικήν καμπύλην ἐν τῷ ἀέρι, γράφων τὴν ἐξίσωσιν τῆς τελευταίας ταύτης ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y = x\varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha_0}\varphi(x)$$

τὴν ἀντίστασιν δὲ τοῦ ἀέρος ὑπέθεσε τῆς μορφῆς

$$av + bv^3$$

Ὁ Hélie καθηγητὴς ἐν τῇ σχολῇ τοῦ ναυτικοῦ πυροβολικοῦ τοῦ Lorient ἔδωκε τὴν ἐξίσωσιν

$$y = x\varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{gx^2}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha_0}\left(\frac{1}{v_0^2}+kx\right)$$

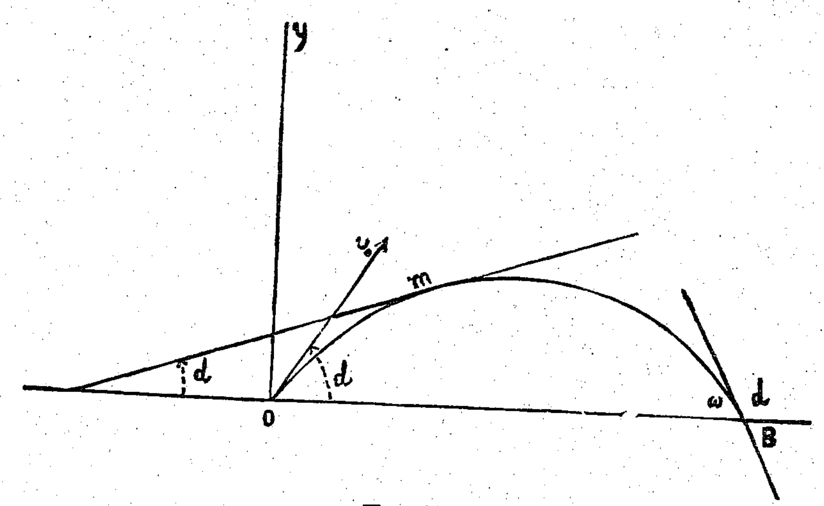
ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ βεληνεκὲς λ προσδιορίζομεν k διὰ τῆς σχέσεως

$$0 = \lambda\varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{g\lambda^2}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha_0}\left(\frac{1}{v_0^2} - k\lambda\right)$$

Ὁ συνταγματάρχης Duchène ἔδωκε τὴν σχέσιν

$$y = x\varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{gx^2}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha_0}\left(\frac{1}{v_0^2}+kx+hx^2\right)$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ k καὶ h προσδιορίζονται δι' ἰδιαιτέρων πειραμάτων.



Σχ. 45.

Τέλος ὁ ὑπολοχαγὸς τοῦ πυροβολικοῦ Vallier ἔδωκε τὴν σχέσιν

$$y = x\varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}e^{mx} \quad \dots (1)$$

ἔνθα ω παριστᾷ τὴν γωνίαν τῆς πτώσεως, τῆς συμπληρωματικῆς δηλαδὴ γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης τῷ σημείῳ Β γωνίας α.

Τὸ βεληνεκὲς λ προσδιορίζομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon\varphi\alpha_0 = \frac{g\lambda}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}e^{m\lambda} \quad \dots (2)$$

Τὴν παρὰ τῷ σημείῳ m γωνίαν α προσδιορίζομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{ge^{mx}}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}(2x+mx^2) \quad \dots (3)$$

θέτοντες $x = \lambda$ ἔχομεν $\varepsilon\varphi\alpha = -\varepsilon\varphi\omega$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (3) ἔχομεν

$$-\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{ge^{m\lambda}}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}\lambda(2+m\lambda)$$

καὶ ὡς ἐκ τῆς σχέσεως (2)

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\alpha_0 (1 + m\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

σχέσις, ἥτις μετὰ τῆς (2) προσδιορίζει τὸ βεληνεκὲς λ καὶ τὴν γωνίαν τῆς πτώσεως ω.

χρόνος συναρτήσει τοῦ x

Εἴδομεν ἀνωτέρω (34.2) ὅτι

$$\frac{v^2 d\alpha}{ds} = -g\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἐκ τῆς σχέσεως δὲ $\dfrac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi\alpha$

ποριζόμεθα $\quad d\alpha = \dfrac{d^2y}{dx^2}\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\, dx$

καὶ ἐπειδὴ $\quad ds\,\sigma\upsilon\nu\alpha = dx$

ἔχομεν τέλος $\quad v^2 d\alpha = -g dx \quad$ ἢ $\quad v^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\dfrac{d^2y}{dx^2} = -g$

ἀλλὰ $v\,\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{dx}{dt}$ καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -g$$

ἐκ τῆς σχέσεως (1) πορίζόμεθα

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi\alpha_0 - \frac{g e^{mx}}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}\,[2x + mx^2]$$

καὶ διαφοροῦντες ἐκ νέου

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g e^{mx}}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}\,[2 + 4mx + m^2x^2]$$

ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην ἔχομεν

$$g\,\frac{e^{mx}}{2v_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega}\,[2 + 4mx + m^2x^2]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g$$

ἢ

$$\frac{dt}{dx} = \frac{e^{\frac{mx}{2}}}{\sqrt{2}\,v_0\sigma\upsilon\nu\omega}\sqrt{2 + 4mx + m^2x^2}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\,v_0\sigma\upsilon\nu\omega}\int_{x_0}^{x} e^{\frac{mx}{2}}\sqrt{2 + 4mx + m^2x^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Κεντρικαὶ ἐπιταχύνσεις καὶ κίνησις τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον.

1. *Κεντρικαὶ ἐπιταχύνσεις.*

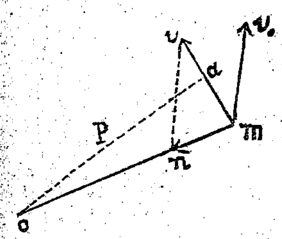
36. Τὴν ἐπιτάχυνσιν κινουμένου σημείου m καλοῦμεν *κεντρικὴν* ἐὰν φέρηται αὕτη διαρκῶς πρὸς σταθερὸν κέντρον τὸ 0.—Ἔχομεν τότε [§ 22. 2]

$$\varphi = \varphi_\rho \qquad \varphi_u = 0$$

καὶ ἡ κίνησις χαρακτηρίζεται ὑπὸ γενικῶν τινῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα.

τροχιὰ ἐπίπεδος

Ἡ τροχιὰ εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὅπερ ὁρίζουσι τὸ σταθερὸν κέντρον ο καὶ ἡ ταχύτης v_0 τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως.



Σχ. 46.

Ἡ ἀμέσως μετὰ τὴν ὤθησιν ταχύτης mv τοῦ κινητοῦ εἶναι τῷ ὄντι ἡ συνισταμένη τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος mv_0 καὶ τῆς $mn = \varphi dt$, καὶ εὑρίσκεται προφανῶς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ omv_0.

Προβάλλοντες τὴν κίνησιν τοῦ σημείου m ἐπὶ τριῶν διὰ τοῦ κέντρου ο ὀρθογωνίων ἀξόνων ἔχομεν

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\frac{x}{\rho} = \varphi\frac{\partial\rho}{\partial x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\frac{y}{\rho} = \varphi\frac{\partial\rho}{\partial y} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi\frac{z}{\rho} = \varphi\frac{\partial\rho}{\partial z} \ldots (1)$$

ὅθεν

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \ldots\ldots (2)$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \gamma \qquad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \alpha \qquad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \beta \ldots (3)$$

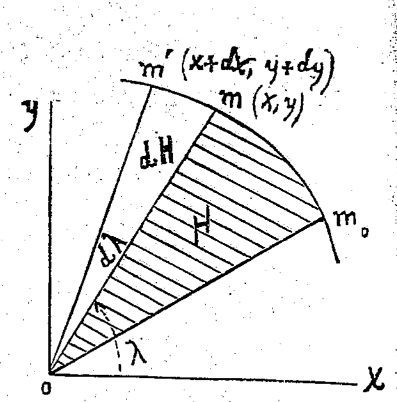
πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ z, x, y καὶ ἀθροίζοντες ἔχομεν

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου o.

ἐμβαδὰ ἀνάλογα τῶν χρόνων

Τὰ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος om διαγραφόμενα ἐμβαδὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων. λαμβάνοντες τοὺς ἄξονας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τροχιᾶς ἔχομεν τῷ ὄντι ἐν τῷ ἔναντι σχήματι



Σχ. 47.

$$\varepsilon\mu\beta.\ omm'=dH=\frac{1}{2}om.om'\eta\mu.d\lambda=\frac{1}{2}\rho(\rho+d\rho)\eta\mu d\lambda$$

ἤ

$$dH=\frac{1}{2}\rho^2 d\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ὅπερ δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ διὰ τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων τῶν σημείων m καὶ m' ὡς ἑξῆς

$$dH=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x+dx & y+dy & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\gamma dt.\ (5)$$

ὡς ἐκ τῶν προηγουμένων (3)· ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$2H=\gamma t$$

τὸν λόγον

$$\frac{omm'}{dt}=\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\lambda}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{2}(xv_y-yv_x)\ldots(6)$$

ἐμβαδομετρικὴ ταχύτης σταθερὰ

καλοῦσιν *ἐμβαδομετρικὴν ταχύτητα* (vitesse areolaire), *καὶ εἶναι αὕτη σταθερὰ ἐν τῇ περιπτώσει τῶν κεντρικῶν ἐπιταχύνσεων.*

καὶ τἀνάπαλιν. *Ἐὰν ἡ ἐμβαδομετρικὴ ταχύτης* $\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\lambda}{dt}$ *εἶναι σταθερά*, ἡ κάθετος συνιστῶσα φ_u τῆς ἐπιταχύνσεως μηδενίζεται [§22. 2], καὶ *ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις φ_ρ φέρεται πρὸς τὸ κέντρον.*

Ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων [4 καὶ 5] πορίζόμεθα

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\gamma}{\rho^2}\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

περιστροφικὴ ταχύτης

τουτέστιν· *Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης περὶ τὸν πόλον o εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς πολικῆς ἀκτῖνος.*

Τὸ ἐμβαδὸν dH ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ τριγώνου, οὗτινος βάσις εἶναι ἡ $ma=vdt$ καὶ ὕψος ἡ $oa=p$ κάθετος τῇ mv· ὥστε

$$dH=\frac{1}{2}pvdt$$

ἤ

$$pv=2\frac{dH}{dt}=\gamma\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

ταχύτης

ὅθεν· *Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου O ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς.*

ἄλλως· Ἔχομεν [Εἰσ. § 4. 9ον]

$$p=x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\qquad \text{ὅθεν}\qquad p\frac{ds}{dt}=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$$

καὶ

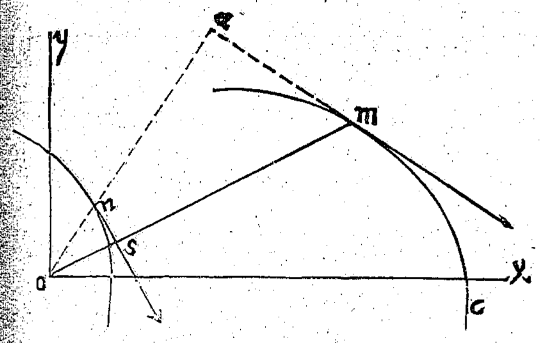
$$pv=\gamma$$

ἢ καὶ ἄλλως

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\rho^2}{p}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\gamma}{p}$$

ἡ ὁδογράφος εἶναι κύκλος ἢ εὐθεῖα

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης εἰκάζομεν ἀμέσως, ὅτι *ἐὰν τὸ κινητὸν διαγράφῃ ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολὴν ἔχουσαν τὸν πόλον ὡς ἑστίαν, ἡ ὁδογράφος γραμμὴ εἶναι κύκλος· ἐὰν δὲ ἡ τροχιὰ εἶναι παραβολὴ ἔχουσα τὴν αὐτὴν ἑστίαν ἡ ὁδογράφος γραμμὴ εἶναι εὐθεῖα* (Hamilton).



Σχ. 48.

Ἐὰν τῷ ὄντι φέρωμεν τὴν oa κάθετον ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς, γνωρίζομεν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας, ὅτι τὸ σημεῖον a διαγράφει κύκλον μὲν ἐὰν ἡ τροχιὰ εἶναι ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή, εὐθεῖαν δὲ γραμμὴν ἐὰν ἡ τροχιὰ εἶναι παραβολή. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης σημεῖον τὸ n εἰς ἀπόστασιν on πληροῦσαν τὴν σχέ–

σιν $on \cdot oa = \gamma$ ἔχομεν $on = \frac{\gamma}{oa} = \upsilon$ καὶ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος διὰ τοῦ τμήματος on ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτῆς· τὸ σημεῖον n διαγράφει λοιπὸν γραμμήν, ἥτις θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ὁδογράφου, ἐὰν στρέψωμεν ταύτην περὶ τὸν πόλον κατὰ 90^0· ἀλλ' ὡς ἐκ τῆς σχέσεως

$$on \cdot oa = \gamma$$

ἡ τροχιὰ τοῦ σημείου n εἶναι τῆς αὐτῆς μὲ τὴν τοῦ σημείου a φύσεως, δηλαδὴ κύκλος ἢ εὐθεῖα.

ταχύτης συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος

Εἰς τὴν ταχύτητα υ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ ἑτέραν ἔκφρασιν ἐνίοτε χρήσιμον.

Ἔστωσαν ρ_0 υ_0 καὶ $\beta = (\widehat{\rho_0 \upsilon_0})$ αἱ συνθῆκαι τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως· ἔχομεν

$$p_0 = \rho_0 \text{ἡμ}\beta$$

ὥστε

$$\upsilon_0 = \frac{\gamma}{\rho_0 \text{ἡμ}\beta} \qquad \text{καὶ } \gamma = \upsilon_0 \rho_0 \text{ἡμ}\beta$$

ἀλλὰ (Εἰσ.§ 6. 7)

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 \qquad \text{ἔνθα } u = \frac{1}{\rho}$$

καὶ συνεπῶς

$$\upsilon^2 = \frac{\gamma^2}{p^2} = \gamma^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots (9)$$

κεντρομόλος καὶ ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις

37. Προβάλλοντες τὴν ἐπιτάχυνσιν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος ἔχομεν

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi \frac{d\rho}{ds} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\upsilon^2}{R} = \varphi \frac{p}{\rho} \cdots\cdots\cdots (1)$$

ἐκ τῆς πρώτης τῶν σχέσεων τούτων πορίζόμεθα

$$\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} = \varphi \frac{d\rho}{dt}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \int \varphi d\rho + \text{σταθ.} C$$

ἢ

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = \int_{\rho_0}^{\rho} \varphi d\rho \cdots\cdots\cdots (2)$$

τουτέστιν (§ 24.2) *Ἡ ταχύτης ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τῆς διαγραφομένης τροχιᾶς, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως φ, τῆς ἀρχικῆς ϱ_0 καὶ τῆς νῦν ἀποστάσεως ϱ τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ πόλου o, καὶ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0.*

Ἡ δευτέρα τῶν ἄνω σχέσεων μᾶς δίδει

$$\upsilon^2 = 2\varphi . \frac{1}{4}\left(2R\frac{p}{\rho}\right) \cdots\cdots\cdots (3)$$

ἀλλὰ [Εἰσ. § 6. 12] $2R\frac{p}{\rho}$ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ κύκλου τῆς καμπυλότητος ὁριζομένη ἐπὶ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος χορδὴ καὶ φθάνομεν εἰς τὴν γνωστὴν [§ 17.3] ἤδη πρότασιν, καθ' ἥν,

Ἐὰν θεωρήσωμεν κινητὸν ἐν ἠρεμίᾳ παρὰ τῷ σημείῳ m διαγράφον τὴν πολικὴν ἀκτῖνα ϱ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν φ, ἡ κτηθεῖσα ταχύτης καθ' ἣν στιγμὴν τὸ κινητὸν διέγραψε τὸ τέταρτον τῆς χορδῆς am (Σχ. 12) ἰσοῦται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ παρὰ τῷ σημείῳ m ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του.

38. Τὴν πολικὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς εὑρίσκομεν εὐκόλως ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν σχέσεων [§ 22. 2]

πολικὴ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \varphi \qquad \text{καὶ} \qquad \rho^2\frac{d\lambda}{dt} = \gamma$$

Ἔχομεν τῷ ὄντι ἐὰν λάβωμεν

$$\frac{1}{\rho} = u$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{u}\right)}{dt^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \varphi \qquad \text{καὶ } \frac{d\lambda}{dt} = \gamma u^2$$

ἀλλὰ

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \gamma u^2 \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\lambda} = -\gamma\frac{du}{d\lambda}$$

καὶ

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{u}\right)}{dt^2} = -\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\lambda}\right) = -\gamma\frac{d^2u}{d\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} = -\gamma^2u^2\frac{d^2u}{d\lambda^2}$$

ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν τῇ προηγουμένῃ σχέσει ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς

$$-\gamma^2u^2\frac{d^2u}{d\lambda^2} - \frac{1}{u}\gamma^2u^4 = \varphi$$

ἢ ἁπλοποιοῦντες

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = -\frac{\varphi}{\gamma^2u^2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ἑτέρα μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς

εὕρομεν ἀνωτέρω [§ 37.1] τὴν σχέσιν

$$\frac{v^2}{R} = \varphi\frac{p}{\rho}$$

ἔχομεν δὲ

$$v = \frac{\gamma}{p} \qquad \text{καὶ } R = \rho\frac{d\rho}{dp}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\frac{\gamma^2 dp}{p^2\rho\, d\rho} = \varphi\frac{p}{\rho}$$

ἢ

$$\varphi = \frac{\gamma^2}{p^3}\frac{dp}{d\rho} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

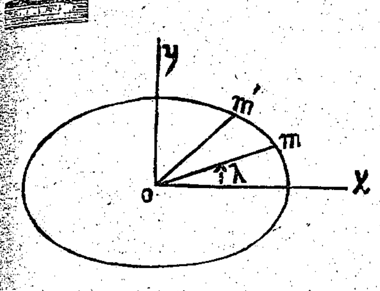
ἑτέρα μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς.

ἀψῖδες

Τὰ σημεῖα τῆς τροχιᾶς ἔνθα ἡ πολικὴ ἀκτὶς εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη καλοῦμεν ἀψῖδας, εὑρίσκομεν δὲ ταύτας διὰ τῆς συνθήκης

$$\frac{du}{d\lambda} = 0$$

Παραδείγματα. 1) Ὑποθέσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν κεντρικὴν καὶ τὸ κινητὸν



Σχ. 49.

Κίνησις ἐπὶ ἐλλείψεως ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις φέρηται πρὸς τὸ κέντρον ταύτης

κινούμενον ἐπὶ ἐλλείψεως τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶναι

$$x = a\,\text{συν}\theta$$
$$y = b\,\text{ημ}\theta$$

διαφοροῦντες ἔχομεν

$$\frac{dx}{dt} = -a\,\text{ημ}\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = b\,\text{συν}\theta\frac{d\theta}{dt}$$

ἡ ἐμβαδομετρικὴ ταχύτης εἶναι [§ 36.6]

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = ab\frac{d\theta}{dt} = \gamma \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{d\theta}{dt} = \text{σταθ}\ \mu \quad \text{καὶ} \quad \theta = \mu t$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι οὕτω

$$x = a\,\text{συν}\mu t$$
$$y = b\,\text{ημ}\mu t$$

Ἡ προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\,\text{συν}\lambda = \varphi\frac{x}{\rho} \quad \text{ἢ} \quad -a\mu^2\text{συν}\mu t = \varphi a\frac{\text{συν}\mu t}{\rho}$$

$$\text{ὅθεν} \quad \varphi = -\mu^2\rho$$

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι λοιπὸν ἀνάλογος τῇ ἀκτῖνι ρ καὶ ὡς ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου *φέρεται αὕτη πρὸς τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως.*

Καὶ τἀνάπαλιν. *Ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις τείνει πρὸς τὸ κέντρον O καὶ εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀποστάσει τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἡ τροχιὰ εἶναι ἔλλειψις ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον O.*

Προβάλλοντες τῷ ὄντι τὴν κίνησιν ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων ἔχομεν [§ 36.1]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\frac{x}{\rho} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\frac{y}{\rho}$$

ἀλλ' ἐνταῦθα

$$\varphi = -\mu^2\rho$$

ὥστε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2y$$

ἡ γενικωτέρα λύσις τῶν διαφορικῶν τούτων ἐξισώσεων εἶναι

$$x = a\,\text{συν}\mu t + a'\text{ημ}\mu t$$
$$y = b\,\text{ημ}\mu t + b'\text{συν}\mu t$$

ὅθεν

$$\eta\mu\, \mu t = \frac{ay - b'x}{ab'a'b'} \qquad \sigma\upsilon\nu.\mu t = \frac{bx - a'y}{ab - a'b'}$$

ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(ay - b'x)^2 + (bx - a'y)^2 = (ab - a'b')^2$$

ἥτις παριστᾷ ἔλλειψιν μὲ κέντρον τὸ **0**.

Αἱ συντεταγμέναι ξ,η σημείου τινὸς τῆς ὁδογράφου γραμμῆς εἶναι

$$\xi = \frac{dx}{dt} = -a\eta\mu\lambda\, \frac{d\lambda}{dt} = -a\omega\eta\mu\lambda$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} = b\sigma\upsilon\nu\lambda\, \frac{d\lambda}{dt} = b\omega\sigma\upsilon\nu\lambda$$

ὅθεν ἡ σχέσις

ὁδογράφος

$$\frac{\xi^2}{a^2\omega^2} + \frac{\eta^2}{b^2\omega^2} = 1$$

ἥτις παριστᾷ ἔλλειψιν

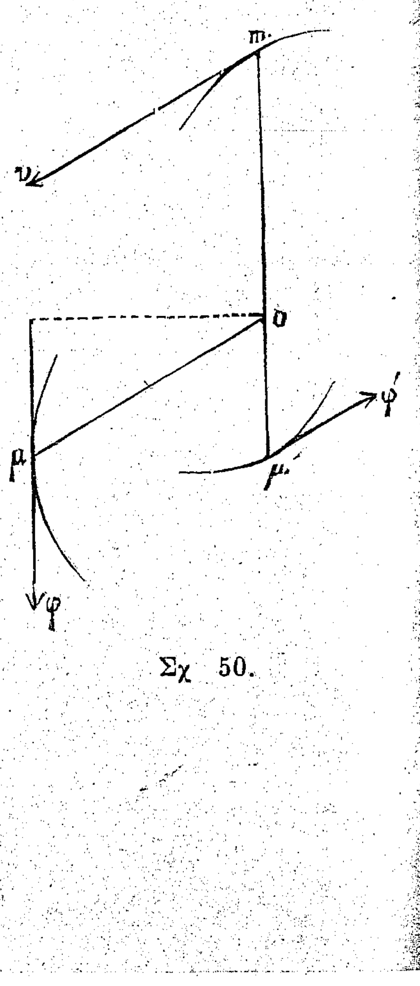
Ἡ ἐμβαδομετρικὴ ταχύτης ἐνταῦθα εἶναι

$$\xi\, \frac{d\eta}{dt} - \eta\, \frac{d\xi}{dt} = ab\omega^3(\eta\mu^2\lambda + \sigma\upsilon\nu^2\lambda) = ab\omega^3 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ διατρέχοντος τὴν ὁδογράφον γραμμὴν κινητοῦ μ εἶναι καὶ αὕτη κεντρική. Καὶ ἐν γένει

Μόνον ὅταν ἡ κεντρικὴ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀνάλογος τῇ πολικῇ ἀκτῖνι, ἡ ὁδογράφος γραμμὴ ἡ ἀναφερομένη εἰς τὴν τροχιάν, διαγράφεται καὶ αὕτη ὡς εἰ τὸ σημεῖον μ εὑρίσκετο ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς τινὸς ἐπιταχύνσεως.

Ἔστω τῷ ὄντι m τὸ ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς τινὸς ἐπιταχύνσεως φερομένης πρὸς τὸν πόλον 0 κινούμενον σημεῖον, μ τὸ ἐπὶ τῆς ὁδογράφου καμπύλης ἀντιστοιχοῦν τῷ κινητῷ m σημεῖον, μφ ἡ ταχύτης τοῦ σημείου μ, ἥτις συμπίπτει κατὰ τὴν



Σχ 50.

ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ σημείου m. εἶναι λοιπὸν παράλληλος τῇ om. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ σημεῖον μ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς ἐπιταχύνσεως φερομένης πρὸς τὸν πόλον 0, ἡ ἐφαπτομένη μ'φ' τῆς ὁδογράφου καμπύλης τοῦ κινητοῦ μ εἶναι καὶ αὕτη παράλληλος τῇ ομ καὶ κατὰ συνέπειαν τῇ mv· ἀλλ' om καὶ ομ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τροχιῶν m καὶ μ' εἶναι παράλληλοι, αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι ὅμοιαι καὶ ἡ ἀκτὶς ομ', ἴση τῇ ἐπιταχύνσει μφ τοῦ σημείου m, εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀκτῖνι om·

Σημειωσις. Εἰς τὰ ἀφορῶντα τὴν ὁδογράφον τὰ στοιχεῖα λ καὶ ω δέον ν' ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν θ καὶ μ· παρατηρητέον πρὸς τούτοις ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ταχύτης εἶναι μρ' ἔνθα ρ' εἶναι ἡ συζυγὴς τῇ ρ ἀκτίς.

2) Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν κίνησιν ἐπὶ ἐλλείψεως, ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις φέρηται πρὸς τὴν ἑστίαν ταύτης.

κίνησις ἐπὶ ἐλλείψεως ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις φέρηται πρὸς τὴν ἑστίαν αὐτῆς.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶναι

$$(1) \quad \rho = \frac{p}{1 + e\sigma\upsilon\nu\lambda} \quad \text{ἢ } p = \rho + ex \ldots\ldots\ldots (2)$$

ὅθεν διὰ διπλῆς διαφορήσεως

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + e\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ἀλλὰ

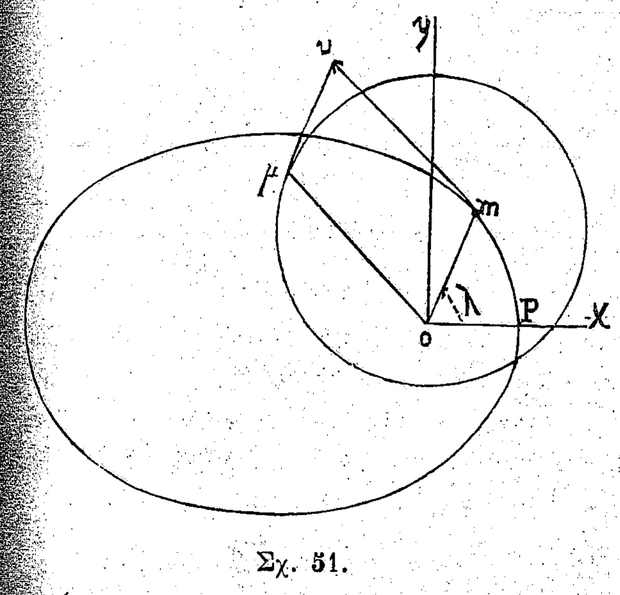
$$\varphi = \varphi_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$$

ὅθεν $\dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \varphi + \rho\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2$

πρὸς τούτοις $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \varphi\sigma\upsilon\nu\lambda$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (3) ἔχομεν

$$\varphi + \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + e\varphi\sigma\upsilon\nu\lambda = 0$$



Σχ. 51.

ἤ

$$\varphi(1+e\,\text{συν}\lambda)+\rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=0\ldots\ldots(4)$$

ἔχομεν δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς

$$1+e\,\text{συν}\lambda=\frac{p}{\rho}$$

καὶ ἐκ προηγουμένης [§36.7] σχέσεως

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\rho^4}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (4) ἔχομεν τέλος

$$\varphi\frac{p}{\rho}+\frac{\gamma^2}{\rho^3}=0 \quad \text{ἤ} \quad \varphi=-\frac{\gamma^2}{p}\frac{1}{\rho^2}$$

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι δηλαδὴ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσεως τοῦ κινητοῦ (Νεύτων).

ὁδογράφος

ἡ ὁδογράφος γραμμὴ εἶναι κύκλος [§ 36.8]· ἐὰν καλέσωμεν ξ, η τὰς συντεταγμένας σημείου τινὸς τῆς ὁδογράφου γραμμῆς ἐνθυμούμενοι καὶ τὴν σχέσιν $\rho^2\frac{d\lambda}{dt}=2\gamma$ ἔχομεν

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{x}{\rho^3}=\frac{\text{συν}\lambda}{\rho^2}=\frac{1}{2\gamma}\text{συν}\lambda\frac{d\lambda}{dt}=\frac{1}{2\gamma}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{\rho}\right)$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{y}{\rho^3}=\frac{\text{ημ}\lambda}{\rho^2}=\frac{1}{2\gamma}\text{ημ}\lambda\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{1}{2\gamma}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\xi=\frac{y}{2\gamma\rho}+\alpha \qquad \eta=-\frac{x}{2\gamma\rho}+\beta$$

ὅθεν ὁ κύκλος

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=\frac{x^2+y^2}{4\gamma^2\rho^2}=\frac{1}{4\gamma^2}$$

κίνησις ἐπὶ κύκλου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὃ φέρεται ἡ ἐπιτάχυνσις

3) Θεωρήσωμεν κινητὸν m κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἐπιταχύνσεως φερομένης πρὸς τὸ σταθερὸν κέντρον c καὶ διαγράφον περιφέρειαν κύκλου διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τούτου· ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις φ. Ἀφοῦ ἡ ἐπιτάχυνσις φέρεται πρὸς τὸ σταθερὸν κέντρον c ἡ συνιστῶσα ταύτης καθέτως τῇ πολικῇ ἀκτῖνι μηδενίζεται· ὥστε

$$\varphi_u=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\lambda}{dt}\right)=0 \qquad \text{ὅθεν}\quad \rho^2\frac{d\lambda}{dt}=\text{σταθ.}\gamma$$

ἀφ' ἑτέρου ἡ τροχιὰ εἶναι κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ κέντρου c. ὥστε

$$\overline{cm}^2=\rho^2=CA.x=2R.x$$

ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἐνταῦθα φ_ρ ὥστε

$$\varphi_\rho=\varphi=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\omega^2\ldots\ldots(1)$$

ἔχομεν δὲ

$$\omega^2=\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\rho^4}\ldots\ldots(2)$$

Διαφοροῦντες δὶς τὴν σχέσιν $\rho^2=2Rx$ ἔχομεν

$$\frac{\varphi}{2}=\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\ldots\ldots(3)$$

ἀφ' ἑτέρου ὡς ἐκ τοῦ κύκλου ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{R^2}{4}\omega^2=\rho^2\omega^2+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\ldots\ldots(4)$$

ἥτις συνδυαζομένη μετὰ τῆς (2) δίδει

$$\frac{\varphi}{2}-\frac{R^2}{4\rho}\omega^2=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\omega^2$$

καὶ ὡς ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2)

$$\varphi=-\frac{R^2}{2\rho}\omega^2=-\frac{R^2\gamma^2}{2}\frac{1}{\rho^5}$$

ὁδογράφος

Αἱ συντεταγμέναι ξ, η τῆς ὁδογράφου γραμμῆς εἶναι

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\xi=\frac{d\rho}{dt}\text{συν}\lambda-\rho\,\text{ημ}\lambda.\omega\\ \frac{dy}{dt}&=\eta=\frac{d\rho}{dt}\text{ημ}\lambda+\rho\,\text{συν}\lambda.\omega\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(5)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς φύσεως τῆς τροχιᾶς

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{R}{\rho}\xi=\frac{\xi}{2\,\text{συν}\lambda}$$

καὶ ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐπιταχύνσεως

$$\rho\omega=\frac{\gamma}{\rho}=\frac{\gamma}{2R\,\text{συν}\lambda}$$

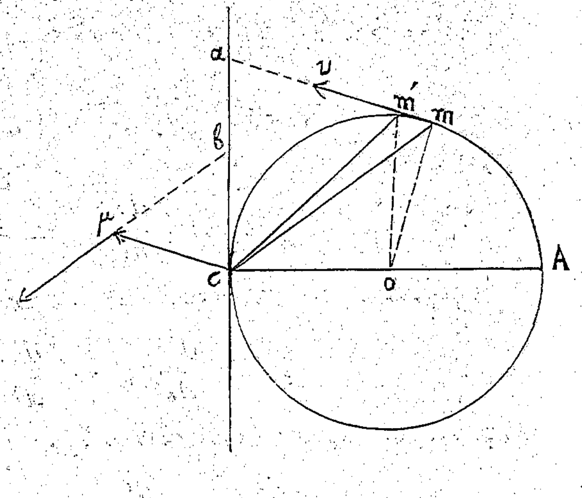
ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἄνω σχέσεις (5) ἔχομεν

$$\xi=\frac{\xi}{2}-\frac{\gamma}{2R}\text{εφ}\lambda \quad \text{καὶ} \quad \eta=\frac{\xi}{2}\text{εφ}\lambda+\frac{\gamma}{2R}$$

καὶ ἀπαλείφοντες ἐφλ ἔχομεν τὴν παραβολὴν

$$R^2\xi^2+2\gamma R\eta=\gamma^2$$

τὴν ὁποίαν ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς. φέρομεν τὴν $c\mu$ ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ταχύτητι mv. τὸ σημεῖον μ διαγράφει τὴν ὁδογράφον καμπύλην, ἧς ἡ ἐφαπτομένη παρὰ τῷ σημείῳ μ εἶναι παράλληλος τῇ ἐπιταχύνσει mc. Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν παρὰ τῷ σημείῳ c ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου ἔχομεν τὰ ὅμοια τρίγωνα cam καὶ $c\beta\mu$, ὧν τὸ πρῶτον ὡς ἐκ τοῦ κύκλου εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ δεύτερον εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελὲς καὶ ἡ ἐφαπτομένη $\mu\beta$ κλίνει ἐξ ἴσου ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος $c\mu$ καὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας $c\beta$· εἶναι δὲ αὕτη μία ἐκ τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῆς παραβολῆς. ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς ἀκτῖνος $c\mu$ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ τμήματος mv. ἡ τελευταία δ' αὕτη εἶναι ἴση τῇ περιστροφικῇ ταχύτητι τῆς ἀκτῖνος om τοῦ κύκλου, ἥτις εἶναι διπλασία τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς ἀκτῖνος cm.



Σχ. 52.

2. *Κίνησις τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον.*

39. Ἐὰν ἀκολουθήσωμεν ἐπί τινα χρόνον τὴν φαινομένην κίνησιν τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας μετροῦντες καθ' ἑκάστην τὰς γωνίας [Εἰσ. σελὶς 3] μ=ὀρθὴν ἀνάβασιν

καὶ

$$\frac{\pi}{2} - \lambda = \text{πολικὴν ἀπόστασιν } \delta$$

καὶ ὁρίσωμεν οὕτω τὰ διάφορα σημεῖα δι' ὧν διέρχεται οὗτος ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας, βλέπομεν ὅτι κεῖνται ταῦτα ἐπὶ μεγίστου κύκλου, σχηματίζοντος μετὰ τοῦ ἰσημερινοῦ γωνίαν 23°27', ὃν καλοῦσι *κύκλον ἐκλειπτικῆς*· τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου εἶναι τὸ *ἐπίπεδον τῆς ἐκλειπτικῆς*.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ Ἡλίου ἐν οἱαδήποτε ἐποχῇ διὰ τοῦ μήκους ρ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, ὅπερ ὁρίζουσι τὰ κέντρα τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς γῆς, καὶ τῆς γωνίας λ τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ τμῆμα τοῦτο μετὰ τῆς ἀκτῖνος $o\gamma$. [γ εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ θέσις τοῦ Ἡλίου, ὅταν οὗτος εἰσέρχεται ἐκ τοῦ νοτίου εἰς τὸ Βόρειον ἡμισφαίριον κατὰ τὴν ἰσημερίαν τῆς 21 Μαρτίου καλεῖται δὲ τοῦτο ἐαρινὸν ἰσημερινὸν σημεῖον].

Κατ' ἀρχὰς ἡ τροχιὰ τοῦ Ἡλίου ἐξελήφθη ὡς κύκλος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπετίθετο οὗτος φερόμενος μὲ ἰσοταχῆ κίνησιν· καὶ τότε ἡ θέσις αὐτοῦ οἱαδήποτε ἐποχῇ θὰ ὡρίζετο διὰ μόνης τῆς σχέσεως

$$\lambda = \lambda_0 + nt$$

ἔνθα λ_0 εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸν χρόνον $t=o$ γωνία, καὶ n ἡ ἡμερησία περιστροφικὴ ταχύτης τὴν ὁποίαν μᾶς δίδει ἡ σχέσις

$$n = \frac{360^0}{365,242217} = 59',8'',33$$

ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν χρόνων τὴν 1 Ἰανουαρίου ἔχομεν

$$\lambda_0 = 280^0,\ 56'$$

καὶ κατὰ τὴν $n^{\text{στὴν}}$ ἡμέραν τοῦ ἔτους

$$\lambda = 280^0.56' + nt \ldots\ldots\ldots\ldots v \quad (1)$$

Ἡ ὑπόθεσις ὅμως αὕτη τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως τοῦ Ἡλίου ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, δὲν δύναται νὰ λάβῃ ἐπιστημονικὸν κῦρος, ἐν ὅσῳ τὰ ἐξ αὐτῆς συναγόμενα δὲν συμφωνοῦσι πληρέστατα μετὰ τῶν ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεων. Τοῦτο δὲ βλέπομεν εὐκόλως ἐν τῷ κάτωθι πίνακι * ἐμφαίνοντι τὰς ἀπ' εὐθείας παρατηρηθείσας καὶ τὰς διὰ τῆς ἄνω σχέσεως (1) ὑπολογισθείσας γωνίας λ.

Ἡμερομηνία	γωνία λ		Διαφορά
	παρατηρηθεῖσα	ὑπολογισθεῖσα	
1870 1 Ἰανουαρίου	280⁰. 56	280⁰, 56'	0
» 10 Φεβρουαρίου	321. 36	321. 21	—1⁰. 15
» 22 Μαρτίου	1. 40	359. 47	—1. 57
» 11 Ἀπριλίου	21. 33	19. 30	—1. 53
» 1 Μαΐου	40. 52	39. 12	—1. 42
» 10 Ἰουνίου	79. 20	78. 38	—0. 42
» 20 Ἰουλίου	117. 30	118. 3	+0. 33
» 9 Αὐγούστου	136. 38	137. 46	+1. 8
» 18 Σεπτεμβρίου	175. 20	177. 12	+1. 52
» 8 Ὀκτωβρίου	195. 00	196. 54	+1. 56

* Ὁ πίναξ οὗτος καὶ οἱ ἀκόλουθοι ἐλήφθησαν ἐκ τῶν μαθημάτων τοῦ καθηγητοῦ Faye

Βλέπομεν οὕτως ὅτι ἡ ἄνω σχέσις (1) δὲν μᾶς δίδει τὰς παρατηρηθείσας γωνίας λ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν ἐν τῇ σχέσει

$$\lambda = \lambda_0 + nt + 1856'\,\text{ἡμ}[\lambda_0 + nt - 280^0 21']$$

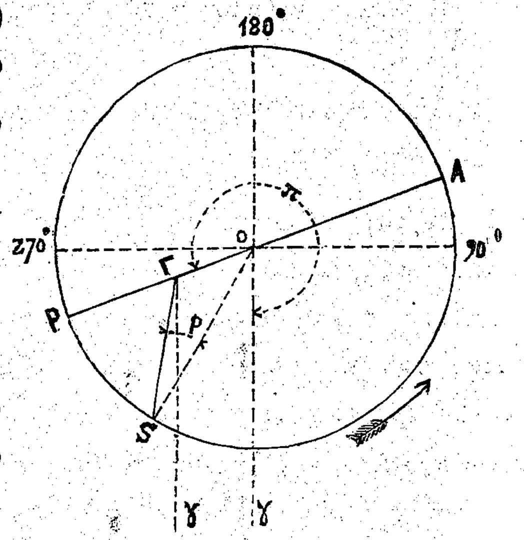
ὑπόθεσις τῆς ἐκκέντρου θέσεως τῆς γῆς

40. Οἱ ἀρχαῖοι ἀστρονόμοι, Χαλδαῖοι καὶ Αἰγύπτιοι, καὶ μετ' αὐτοὺς οἱ Ἕλληνες δὲν ἐβράδυναν ν' ἀναγνωρίσωσι τὴν ἀσυμφωνίαν ταύτην· ὁρμώμενοι ὅμως ἐκ προλήψεως περὶ κανονικότητος ἐν τῇ κινήσει τοῦ Ἡλίου, ἐξήγησαν τὴν ἀσυμφωνίαν τῶν παρατηρήσεων πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν ὑποθέτοντες (Ἵππαρχος) ὅτι ἡ γῆ δὲν κατέχει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐφ' οὗ κινεῖται ὁ Ἥλιος, ἀλλὰ κεῖται εἰς θέσιν ἔκκεντρον. Ἐν τῇ ὑποθέσει ταύτῃ τῆς ἐκκέντρου θέσεως τῆς γῆς ἡ γωνία λ εἶναι ὡς καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις ἡ

$$\gamma o s = \lambda_0 + nt$$

ἀλλ' ἐκ τῆς γῆς Γ ἡμεῖς μετροῦμεν καὶ λαμβάνομεν ἀντ' αὐτῆς τὴν γωνίαν

$$\gamma'\Gamma s = \lambda_0 + nt + p$$



Σχ. 53.

Ἐν τῷ τριγώνῳ $s\Gamma 0$ ἔχομεν θέτοντες

$$Pos = \gamma o s - \Pi = m$$

$$\frac{\Gamma s}{\text{ἡμ}m} = \frac{\Gamma 0}{\text{ἡμ}.p} \quad \text{ἢ} \quad \rho\,\text{ἡμ}p = d\,\text{ἡμ}m$$

$$os = \Gamma s\,\text{συν}p - \Gamma 0\,\text{συν}m \qquad \rho\,\text{συν}p = R - d\,\text{συν}m$$

ἢ θέτοντες

$$\frac{d}{R} = e$$

$$\text{εφ}p = \frac{e\,\text{ἡμ}m}{1 - e\,\text{συν}m} \qquad \rho = \sqrt{1 - 2e\,\text{συν}m + e^2}$$

ὅθεν παραλείποντες e^2 e^3.....

$$p = 3438' e\,\text{ἡμ}m$$

$$\rho = 1 - e\,\text{συν}m$$

ὥστε αἱ σχέσεις τὰς ὁποίας οἱ ἀρχαῖοι μετεχειρίζοντο διὰ τὴν κίνησιν τοῦ Ἡλίου ἦσαν

$$\lambda = \lambda_0 + nt + 3438' e\,\text{ἡμ}.m$$

καὶ

$$\rho = 1 - e\,\text{συν}m$$

ὧν ἡ πρώτη δίδει τὰς παρατηρηθείσας τιμὰς τοῦ λ.

Δὲν συμβαίνει ὅμως τοῦτο καὶ διὰ τὴν ἀπόστασιν ρ· αἱ ἐν τῷ ἄνω πίνακι παρατηρηθεῖσαι τιμαὶ τῶν λ δίδουσι τῷ ὄντι

$$3438' e = 1^0.56 \qquad \text{ὅθεν} \qquad e = \frac{1}{30}$$

ἐνῷ δι' ἀκριβῶν παρατηρήσεων τῆς διαμέτρου τοῦ Ἡλίου, εὑρίσκομεν διὰ τὰς ἐσχάτας τιμὰς τοῦ ρ

$$1 - \frac{1}{60} \quad \text{καὶ} \quad 1 + \frac{1}{60} \quad \text{ὥστε} \quad e = \frac{1}{60}$$

Νόμοι τοῦ Κεπλέρου

41. Ἡ ἀνωμαλία ὅμως αὕτη δὲν παρετηρήθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων, οἵτινες ἐστεροῦντο τῶν καταλλήλων ὀργάνων πρὸς ἀκριβῆ καταμέτρησιν τῶν ἀποστάσεων ρ τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς γῆς, καὶ οὕτω ἡ ὑπόθεσις αὕτη περὶ τῆς ἐκκέντρου θέσεως τῆς γῆς ἐπεκράτησε μέχρι τῆς ἀρχῆς τοῦ 17 αἰῶνος, ὁπότε ὁ Κέπλερος ἐπειράθη νὰ παραστήσῃ τὴν κίνησιν τοῦ Ἡλίου διὰ τῶν σχέσεων

$$l = l_0 + nt + 2e\,\text{ἡμ}m$$

$$\rho = 1 - e\,\text{συν}m$$

ἔνθα

$$e = \frac{1}{60}$$

Διὰ τῆς δοκιμῆς ταύτης εὗρεν ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ Ἡλίου διαγραφομένη τροχιὰ θὰ ἦτο ᾠοειδὴς καμπύλη ὁμοιάζουσα πρὸς ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας ἡ γῆ θὰ κατεῖχε τὴν ἑτέραν τῶν ἑστιῶν· τότε δ' ὑπέθεσε τὴν τροχιὰν ἀληθῆ ἔλλειψιν. Ἡ ἐξίσωσις ταύτης εἶναι, λαμβανομένης τῆς ἑστίας ὡς ἀρχῆς,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\text{συν}\lambda}$$

ἢ παραλείποντες e^2 e^3.........

$$\rho = a(1 - e\,\text{συν}\lambda)$$

ἥτις παριστᾷ ἀκριβῶς τὰς ἀποστάσεις τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς γῆς ἐὰν λάβωμεν

$$e = \frac{1}{60}$$

Ἀλλ' ἡ σχέσις

$$l = l_0 + nt + 2e\eta\mu m$$

δὲν δύναται πλέον νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἐξεύρεσιν τῆς γωνίας l, διότι ἐν τῇ ἐλλείψει αἱ κεντρικαὶ γωνίαι m δὲν αὐξάνουσιν ἀναλόγως τοῦ χρόνου καὶ ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ κίνησις τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῆς τρχιᾶς αὐτοῦ ἤθελεν ὑποτεθῇ ἰσοταχής. Ἠναγκάσθη τότε ὁ διάσημος οὗτος ἀστρονόμος νὰ ζητήσῃ ἐν τῃ κινήσει ἐπὶ τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς στοιχεῖόν τι, τὸ ὁποῖον νὰ μεταβάλληται ἀναλόγως τοῦ χρόνου, καὶ κατέληξεν εἰς τὰ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων διαγραφόμενα ἐμβαδά.

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\lambda$$

ἢ ἂν ἐκφράσωμεν τὴν γωνίαν λ εἰς λεπτὰ καὶ δευτερόλεπτα

$$\frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\lambda}{206265}$$

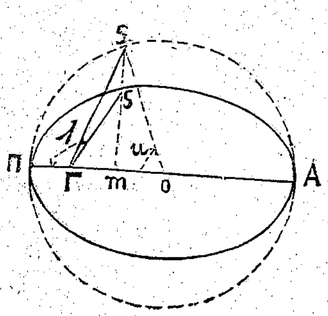
Κατεσκεύασεν οὕτω τὸν κάτωθι πίνακα ἔνθα μετεχειρίσθη τὰς ἰδίας αὐτοῦ παρατηρήσεις καὶ τὰς προγενεστέρας τοῦ Tycho-Brahé.

Ἡμερομηνία	Γωνίαι διαγραφεῖσαι ἐν διαστήματι 24 ὡρῶν (παρατηρήσεις)	πολικαὶ ἀκτῖνες ὑπολογ. διὰ τῆς σχέσ. $\rho = 1 - \frac{1}{60}\sigma\upsilon\nu\lambda$	διαγραφόμενα ἐμβαδὰ
Ἰανουαρίου 1	1⁰ 1′ 11″	0, 9833	0,008605
Μαρτίου 22	1 59 27	0, 9972	0,008600
Ἰουνίου 20	0 57 14	1, 0164	0,008600
Σεπτεμβρίου 18	0 59 0	1, 0012	0,008600
Ὀκτωβρίου 18	0 59 40	0, 9956	0,008600
Νοεμβρίου 17	0 0 49	0, 9862	0,008600

καὶ διεῖδεν ἐν αὐτῷ τὸν δεύτερον ἐκ τῶν νόμων, οἵτινες φέρουσι σήμερον τὸ ὄνομά του, ὅτι δηλαδὴ

ἡ ἑνοῦσα τὸν Ἥλιον μετὰ τοῦ πλανήτου πολικὴ ἀκτὶς διαγράφει ἴσα ἐμβαδὰ ἐν ἴσοις χρόνοις.

42. Ἔμενεν ἤδη ὁ ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας λ ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς ὡρισμένην ἐποχὴν t, ἢ εἰς ὡρισμένον ἐμβαδὸν ἐλλειπτικοῦ τομέως· ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος ἐκτελεῖται εὐκόλως ὡς ἑξῆς: Πρόβλημα τοῦ Κεπλέρου



Σχ. 54

ἔστω ΠΑ $= a$ ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς· $\frac{\Gamma 0}{\Pi 0} = e$ ἡ ἐκκεντρικότης, S ἡ θέσις ἣν κατέχει ὁ Ἥλιος κατὰ τὴν ἐποχὴν t, ὑπολογιζομένων τῶν χρόνων ἀπὸ τῆς διελεύσεως τοῦ Ἡλίου εἰς τὸ περίγαιον αὐτοῦ Π. ἔχομεν ἐν τῷ ἔναντι σχήματι

$$\text{εμβ } \Pi\Gamma S' = \text{εμβ. } \Pi 0 S' - \text{εμβ } \Gamma O S' = \frac{1}{2}a^2 u - \frac{1}{2}a.\ ae\eta\mu u$$

$$= \frac{a^2}{2}(u - e\eta\mu u)$$

ἀλλ' ὁ τομεὺς $\Pi\Gamma S$ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ τομέως $\Pi\Gamma S'$ καὶ ἔχομεν

$$\text{εμβ. } \Pi\Gamma S = \frac{a^2}{2}(u - e\eta\mu u)\sigma\upsilon\nu\varphi$$

καὶ ὡς ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν ἐμβαδῶν πρὸς τοὺς χρόνους

$$\frac{t}{T} = a^2(u - e\eta\mu u)\ \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{1}{2\pi a^2 \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

ἢ

$$\frac{t}{T} = \frac{u - e\eta\mu u}{2\pi}$$

ἢ θέτοντες $\quad T = \frac{2\pi}{n}$ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$nt - u + e\eta\mu u = 0$$

ἥτις μᾶς δίδει τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ ἐποχῇ t γωνίαν u, ἣν καλοῦσιν *ἐκκεντρικὴν ἀνωμαλίαν*, γνωστῆς οὔσης τῆς γωνίας nt, ἣν καλοῦσι *μέσην ἀνωμαλίαν*· ὑπολογίζεται δὲ αὕτη οὐχὶ πλέον περὶ τὸ σημεῖον 0 ὡς προηγουμένως, ἀλλὰ περὶ τὸ σημεῖον Γ.

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς γωνίας λ ἣν καλοῦσι *πραγματικὴν ἀνωμαλίαν* γίνεται ἤδη εὐκόλως· ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ἐὰν λάβωμεν ὡς πόλον τὴν ἑστίαν Γ εἶναι τῷ ὄντι

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,\text{συν}\lambda}$$

ἀλλὰ $\rho = a - e.om = a(1 - e\,\text{συν}u)$

ὥστε

$$\frac{1-e^2}{1+e\,\text{συν}\lambda} = 1-e\,\text{συν}u$$

καὶ

$$\text{συν}\lambda = \frac{\text{συν}u - e}{1-e\,\text{συν}u}$$

ἀλλὰ

$$\text{εφ}\,\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{συν}\lambda}{1+\text{συν}\lambda}}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ἄνω τιμὴν τοῦ συνλ ἔχομεν

$$\text{εφ}\,\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\text{εφ}\,\frac{u}{2}$$

Αἱ σχέσεις αὗται συμφωνοῦσι πληρέστατα μὲ τὰς ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις, καὶ ἠδυνήθη οὕτω ὁ Κέπλερος νὰ διατυπώσῃ τοὺς δύο πρώτους νόμους, οἵτινες φέρουσι τὸ ὄνομά του.

πρῶτος νόμος *Οἱ πλανῆται διαγράφουσιν ἐλλείψεις, τῶν ὁποίων τὴν ἑτέραν τῶν ἑστιῶν κατέχει ὁ Ἥλιος.*

δεύτερος νόμος *Ἡ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου πρὸς τὸν πλανήτην ἐπιβατικὴ ἀκτὶς διαγράφει ἴσα ἐμβαδὰ ἐν ἴσοις χρόνοις.*

43. Ζητῶν εἶτα ὁ Κέπλερος νὰ ἐννοήσῃ τὸν τρόπον τῆς ἑλκτικῆς ἐπιδράσεως τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῶν πλανητῶν, διὰ τῆς ὁποίας συγκρατοῦνται οὗτοι ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἤδη ἐλλειπτικῶν τροχιῶν των, καὶ τὴν ὁποίαν ὑπέθετε συνάρτησιν τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Ἡλίου, ἐδοκίμασε νὰ παραβάλῃ τὰς διαδοχικὰς ἀκεραίας δυνάμεις τῶν ἀποστάσεων τούτων, τὰς ὁποίας εἶχεν ἤδη ὑπολογίσει ὁ Κοπέρνικος, πρὸς τὴν ταχύτητα ἢ μᾶλλον πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιφορᾶς αὐτῶν; κατεσκεύασε τότε τὸν ἔναντι πίνακα

Πλανῆται	διάρκεια περιφορᾶς	a	a^2	$a^{\frac{3}{2}}$
Ἑρμῆς	0.2408 ἔτη	0.39	0.15	0.241
Ἀφροδίτη	0.6152	0.72	0.52	0.615
Γῆ	1.0000	1.00	1.00	1.000
Ἄρης	1.8810	1.52	2.32	1.874
Ζεὺς	11.8630	5,20	27.07	11.86
Κρόνος	29.4570	9.54	90.99	29.46

παρατηρήσας δὲ ὅτι ἡ διάρκεια τῆς περιφορᾶς περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ a καὶ a^2 ἐδοκίμασε καὶ τὴν κλασματικὴν δύναμιν $a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ καὶ εὗρε τὰ ἀποτελέσματα τῆς τελευταίας στήλης ἴσα μὲ τὰ τῆς πρώτης· διετύπωσε τότε τὸν τρίτον νόμον, ὅστις φέρει τὸ ὄνομά του ὡς ἑξῆς·

Τὰ τετράγωνα τῶν περιόδων τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιφορᾶς δύο οἵων δήποτε πλανητῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν κύβων τῶν μεγάλων ἀξόνων τῶν τροχιῶν αὐτῶν. τρίτος νόμος

44. Βασιζόμενος ἐπὶ τῶν νόμων τούτων ἔφθασεν εἶτα ὁ Νεύτων εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ διέποντος τὸ σύμπαν ἁπλουστάτου νόμου τῆς ἕλξεως, τὴν ἀλήθειαν τοῦ ὁποίου ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὡς ἑξῆς·

Ἔστωσαν ρ,λ αἱ πολικαὶ καὶ x, y αἱ Καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου m· ἡ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς εἶναι [Σχ. 51.]

$$\rho = \frac{p}{1+e\,\text{συν}\lambda}$$

ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν

$$x = \rho\,\text{συν}\lambda = \frac{p\,\text{συν}\lambda}{1+e\,\text{συν}\lambda} \qquad y = \rho\,\text{ημ}\lambda = \frac{p\,\text{ημ}\lambda}{1+e\,\text{συν}\lambda}$$

αἱ συντεταγμέναι τῆς ὁδογράφου καμπύλης εἶναι λοιπὸν ταχύτης

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \frac{-p\,\text{ημ}\lambda}{(1+e\,\text{συν}\lambda)^2}\,\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\rho^2\,\text{ημ}\lambda}{p}\,\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} = p\,\frac{e+\text{συν}\lambda}{(1+e\,\text{συν}\lambda)^2}\,\frac{d\lambda}{dt} = \frac{e+\text{συν}\lambda}{p}\,\rho^2\,\frac{d\lambda}{dt}$$

ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ 2ου νόμου τοῦ Κεπλέρου ἔχομεν

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = 2\gamma$$

ὥστε

$$\xi = -\frac{2\gamma}{p}\,\text{ἡμ}\lambda \qquad \eta = \frac{2\gamma}{p}(e + \text{συν}\lambda)$$

καὶ ἀπαλείφοντες τὸ λ ἔχομεν τὸν κύκλον

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{2\gamma e}{p}\right)^2 = \frac{4\gamma^2}{p^2}$$

ἡ ὁδογράφος καμπύλη τῶν πλανητῶν εἶναι λοιπὸν κύκλος οὗτινος τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος oy εἰς ἀπόστασιν $\frac{2\gamma e}{p}$ ἀπὸ τῆς ἑστίας. καὶ βλέπομεν, ὅτι τὴν μεγίστην αὐτοῦ ταχύτητα ἔχει ὁ πλανήτης παρὰ τῷ σημείῳ P (περιήλιον) καὶ τὴν ἐλαχίστην παρὰ τῷ σημείῳ A (ἀφήλιον).

ἐπιτάχυνσις τὴν ἐπιτάχυνσιν ἔχομεν διὰ τῶν σχέσεων

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2\gamma}{p}\,\text{συν}\lambda\,\frac{d\lambda}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2\gamma}{p}\,\text{ἡμ}\lambda\,\frac{d\lambda}{dt}$$

καὶ ὁ 2ος νόμος τοῦ Κεπλέρου μᾶς δίδει

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2\gamma}{\rho^2}$$

ὥστε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\gamma^2}{p}\frac{\text{συν}\lambda}{\rho^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\gamma^2}{p}\frac{\text{ἡμ}\lambda}{\rho^2}$$

καὶ

$$\varphi^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = \frac{16\gamma^4}{p^2\rho^4}(\text{συν}^2\lambda + \text{ἡμ}^2\lambda)$$

ὅθεν ἡ ἐπιτάχυνσις

$$\varphi = \frac{4\gamma^2}{p}\frac{1}{\rho^2}$$

ἐκ τῶν συνιστωσῶν δὲ ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐπιτάφυνσις σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος ox γωνίαν λ, συμπίπτει δηλαδὴ μετὰ τῆς ἀκτῖνος καὶ φέρεται πρὸς τὸν Ἥλιον. Ὅθεν

Ἐν τῇ κινήσει τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ πλανήτου ἀπὸ τὸν Ἥλιον, συμπίπτει μετὰ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸν πλανήτην μετὰ τοῦ Ἡλίου καὶ φέρεται πρὸς τὸν Ἥλιον. νόμος τῆς παγκοσμίου ἕλξεως

45. Ἄς ζητήσωμεν ἤδη τὴν λύσιν τοῦ ἀντιθέτου προβλήματος, ἔνθα δίδεται ἡ κεντρικὴ ἐπιτάχυνσις κίνησις σημείου φερομένου μὲ κεντρικὴν ἐπιτάχυνσιν $\frac{\mu}{\rho^2}$

$$\varphi = -\frac{\mu}{\rho^2}$$

ὅπου μ εἶναι σταθερὰ ποσότης, καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῆς κινήσεως τοῦ πλανήτου.

τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς εὕρομεν προηγουμένως [§ 38.1]

$$\gamma^2\left(u + \frac{d^2u}{d\lambda^2}\right) = -\frac{\varphi}{u^2}$$

καὶ ἐπειδὴ $\varphi = -\frac{\mu}{\rho^2}$ $u = \frac{1}{\rho}$ ἡ σχέσις αὕτη μετατρέπεται εἰς

$$\gamma^2\left(u + \frac{d^2u}{d\lambda^2}\right) = \mu$$

ἤ

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u - \frac{\mu}{\gamma^2} = 0$$

τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\left(u - \frac{\mu}{\gamma^2}\right) + \left(u - \frac{\mu}{\gamma^2}\right) = 0$$

ὁλοκληροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἔχομεν

$$u - \frac{\mu}{\gamma^2} = A\,\text{συν}(\lambda - \alpha)$$

ὅθεν

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{\gamma^2}[1 + e\,\text{συν}(\lambda - \alpha)] \ldots\ldots\ldots (1)$$

καὶ

$$\rho = \frac{\gamma^2}{\mu}\cdot\frac{1}{1 + e\,\text{συν}(\lambda - \alpha)} \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ δευτεροβάθμιον κωνικὴν καμπύλην τῆς ὁποίας ἡ ἑστία συμπίπτει μετὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων· ζητήσωμεν ἤδη τὰς ἀπροσδιορίστους σταθερὰς e καὶ α.

Διαφοροῦντες τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν

$$\frac{du}{d\lambda} = -e\,\frac{\mu}{\gamma^2}\,\text{ἡμ}\,(\lambda-\alpha)$$

καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως, ἐὰν καλέσωμεν β τὴν γωνίαν τῆς προβολῆς καὶ v_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα

$$u_0 = \frac{1}{\rho_0} \qquad \text{συνεφ}\beta = -\left(\frac{1}{u}\frac{du}{d\lambda}\right)_{\lambda=0}$$

ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς σχέσεις (1 καὶ 1') ἔχομεν

$$\frac{\gamma^2}{\mu\rho_0} = 1+e\,\text{συν}\alpha \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma^2}{\mu\rho_0}\,\text{συνεφ.}\beta = -e\,\text{ἡμ}\alpha$$

ὅθεν

$$\text{εφ}\alpha = \frac{\gamma^2\,\text{συνεφ}\beta}{\mu\rho_0-\gamma^2} \quad \text{καὶ} \quad e^2 = \frac{\gamma^4}{\mu^2\rho_0^2}\,\text{συνεφ}^2\beta - \frac{2\gamma^2}{\mu\rho_0}+1$$

ἀλλὰ

$$\gamma^2 = v_0^2\rho_0^2\,\text{ἡμ}^2\beta$$

ὅθεν

$$\text{εφ}\alpha = \frac{v_0^2\rho_0\,\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\beta}{\mu - v_0^2\rho\,\text{ἡμ}^2\beta}$$

$$1-e^2 = \frac{v_0^2\rho_0^2\,\text{ἡμ}^2\beta}{\mu}\left(\frac{2}{\rho_0}-\frac{v_0^2}{\mu}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

καὶ βλέπομεν ἤδη ὅτι ἐὰν

$v_0^2 > \frac{2\mu}{\rho_0}$ ἔπεται $e > 1$ καὶ ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ ὑπερβολὴν

$v_0^2 = \frac{2\mu}{\rho_0}$ ——— $e = 1$ ——— παραβολὴν

$v_0^2 < \frac{2\mu}{\rho_0}$ ——— $e < 1$ ——— ἔλλειψιν.

προσδιορισμὸς τῶν ἀξόνων τῆς τροχιᾶς

Ἐὰν ἡ τροχιὰ εἶναι ἔλλειψις δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς ἄξονας χωρὶς νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (§ 38.1)· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\gamma^2\left(u+\frac{d^2u}{d\lambda^2}\right) = \mu$$

ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{du}{d\lambda}$ καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$\gamma^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right] = 2\mu u + C = v^2$$

ἀνατρέχοντες δ' εἰς τὰς συνθήκας τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως ἔχομεν

$$C = v_0^2 - \frac{2\mu}{\rho_0}$$

ὥστε

$$\gamma^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right] = 2\mu u - \frac{2\mu}{\rho_0} + v_0^2$$

Τὰς ἀψιδικὰς ἀποστάσεις ὁρίζομεν διὰ τῆς συνθήκης $\left(\frac{du}{d\lambda}\right) = 0$

καὶ μένει ἡ ἐξίσωσις $u^2 - \frac{2\mu}{\gamma^2}\,u + \frac{2\mu}{\gamma^2\rho_0} - \frac{v_0^2}{\gamma^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

δι' ἧς προσδιορίζομεν ταύτας. Ἐὰν καλέσωμεν a τὸν μέγαν ἡμιάξονα τῆς ἐλλείψεως αἱ ἀψιδικαὶ ἀποστάσεις εἶναι

$$a(1-e) \quad \text{καὶ} \quad a(1+e)$$

καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\frac{1}{a(1-e)} + \frac{1}{a(1+e)} = \frac{2\mu}{\gamma^2}$$

ὅθεν

$$a(1-e^2) = \frac{\gamma^2}{\mu}$$

ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις μᾶς δίδει $\frac{1}{a^2(1-e^2)} = \frac{2\mu}{\gamma^2\rho_0} - \frac{v_0^2}{\gamma^2}$

ὅθεν

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\rho_0} - \frac{v_0^2}{\mu}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (5) $\frac{\mu}{a}$ διὰ $\frac{2\mu}{\rho_0} - v_0^2$ ἔχομεν

$$v^2 = \mu\left(2u - \frac{1}{a}\right)$$

χρήσιμος ἔκφρασις τῆς ταχύτητος.

Ἡ διάρκεια T τῆς περιφορᾶς εἶναι

$$T = \frac{2\,\text{εμβ. ἐλλείψεως}}{\gamma} = \frac{2\pi ab}{\gamma} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\gamma} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a(1-e)^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

ὅθεν ὁ τρίτος νόμος τοῦ Κεπλέρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Κίνησις σημείου μὴ ἐλευθέρου.

46. Μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν τὴν κίνησιν σημείου ὑποτιθεμένου ἐντελῶς ἐλευθέρου ν' ἀκολουθήσῃ τὴν τροχιάν, ἣν συνεπάγονται αἱ ἐπ' αὐτοῦ ὑφιστάμεναι ἐπιταχύνσεις· ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις περιπτώσεις ἐν αἷς τὸ σημεῖον δὲν εἶναι ἐλεύθερον ν' ἀκολουθήσῃ τὴν τροχιὰν ταύτην ἀλλ' ἄλλην, ἣν ἡμεῖς τὸ ἀναγκάζομεν να διαγράψῃ. Οὕτω λ. χ. τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς πίπτοντα ἄνωθεν σώματα ἀκολουθοῦσι κατακόρυφον εὐθύγραμμον τροχιάν, ἐν ὅσῳ δὲν ἀπαντῶσι πρόσκομμά τι, ἓν κεκλιμμένον ἐπίπεδον λ. χ., ὅπερ ἀναγκάζει ταῦτα νὰ διαγράψωσιν εὐθεῖαν κεκλιμένην ἀντὶ τῆς κατακορύφου. Ἡ ἐπὶ τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν κίνησις τῶν ἁμαξῶν μᾶς παρουσιάζει ἕτερον παράδειγμα μὴ ἐλευθέρας κινήσεως, διότι ἡ ἅμαξα ὑποχρεοῦται ν' ἀκολουθήσῃ τὴν τροχιάν, ἣν ὁρίζουσι τὰ σιδηρὰ ἐλάσματα τῆς γραμμῆς, οἷαι δήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ ἐπ' αὐτῆς ὑφιστάμεναι ἐπιταχύνσεις.

Ἐν γένει δὲ ἡ κίνησις τοῦ σημείου δὲν εἶναι ἐλευθέρα, ὁσάκις αἱ συντεταγμέναι x, y, z τούτου συνδέονται διὰ μιᾶς ἢ πλειόνων σχέσεων, ὡς ἐκ τῶν ὁποίων ἡ τροχιὰ τοῦ σημείου περιορίζεται ἀνεξαρτήτως τῶν ἐπ' αὐτοῦ ὑφισταμένων ἐπιταχύνσεων.

1) *Κίνησις ἐπὶ ἀκάμπτου ἐπιπέδου γραμμῆς.*

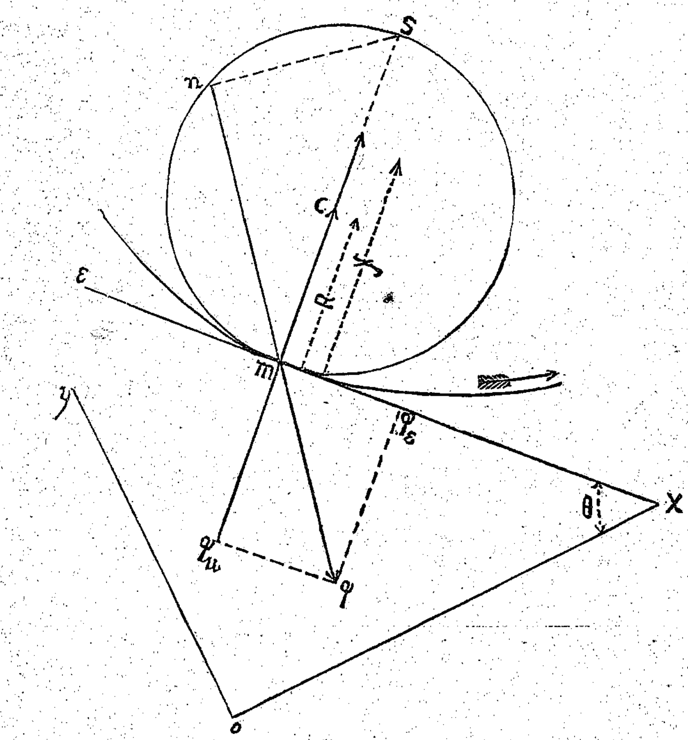
47. Θεωρήσωμεν σημεῖον m κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἐπιταχύνσεώς τινος ἐπὶ ἀκάμπτου γραμμῆς. Ἡ ἀναγκαστικὴ αὕτη τροχιὰ τὴν ὁποίαν ὑποχρεοῦται ν' ἀκολουθήσῃ τὸ κινητὸν εἶναι διάφορος ἐκείνης τὴν ὁποίαν θὰ διέγραφεν ἐλευθέρως ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐπιταχύνσεως φ. ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν πρόσθετόν τινα ἐπιτάχυνσιν f, ἥτις ἐφαρμοζομένη καταλλήλως ἐπὶ τοῦ κινητοῦ μετὰ τῆς ἀρχικῆς ἐπιταχύνσεως φ ν' ἀναγκάσῃ τὸ σημεῖον νὰ διαγράψῃ *ἐλευθέρως* τροχιὰν συμπίπτουσαν μετὰ τῆς ἀκάμπτου γραμμῆς, χωρὶς νὰ λάβωμεν ποσῶς ὑπ' ὄψιν τὴν παρουσίαν τῆς τελευταίας ταύτης. Τὴν κίνησιν τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἀκάμπτου γραμμῆς καὶ τὴν ἄγνωστον ταύτην ἐπιτάχυνσιν f, προφανῶς κάθετον ἐπὶ τῆς γραμμῆς, προτιθέμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐνταῦθα.

Ἡ ἐπιτάχυνσις Φ ἡ δυναμένη νὰ παραγάγῃ ἐλευθέρως τὴν κίνησιν τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς δοθείσης τροχιᾶς εἶναι [§ 18] ἡ συνισταμένη δύο ἐπιταχύνσεων κίνησις ἐπὶ τοῦ κοίλου μέρους τῆς γραμμῆς

$$\text{τῆς κεντρομόλου } \frac{v^2}{R} \text{ καὶ ἐφαπτομένης } \frac{dv}{dt}$$

ἔνθα v ἐμφαίνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸ σημεῖον m καὶ R τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἀναλύοντες ἤδη καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν φ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ καθέτως τῇ τροχιᾷ, ἔχομεν

$$\varphi_\varepsilon = \frac{dv}{dt} \quad \text{καὶ} \quad f - \varphi_u = mc = \frac{v^2}{R}$$



Σχ. 55

ἡ πρώτη τῶν σχέσεων τούτων μᾶς δίδει

$$\varphi_\varepsilon ds = \frac{dv}{dt} ds = dv \frac{ds}{dt} = v dv$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$\frac{v^2}{2} = \int \varphi_\varepsilon ds + \sigma\tau \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ὁρίζομεν τὸν νόμον τῆς κινήσεως τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς καμπύλης. (§ 24.2)

'Αντικαθιστῶντες ἤδη ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν ἄνω σχέσεων ὁρίζομεν καὶ τὴν ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν f διὰ τῆς σχέσεως

$$f=\varphi_u+\frac{2}{R}\left[\int\varphi_\varepsilon ds+\sigma\tau.\right]\ldots\ldots\ldots (2)$$

κίνησις ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ μέρους τῆς γραμμῆς

'Εὰν τὸ σημεῖον κινῆται ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ μέρους τῆς ἀκάμπτου γραμμῆς ἔχομεν ὡς καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις

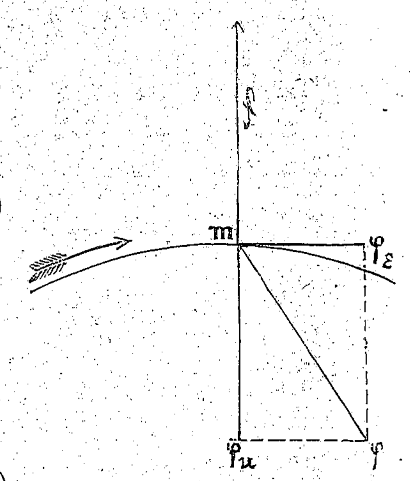
$$\frac{v^2}{2}=\int\varphi_\varepsilon ds+\sigma\tau.\ldots\ldots\ldots (1')$$

καὶ

$$\frac{v^2}{R}=\varphi_u-f$$

ὅθεν

$$f=\varphi_u-\frac{v^2}{R}=\varphi_u-\frac{2}{R}\left[\int\varphi_\varepsilon ds+\sigma\tau.\right] (2')$$



Σχ. 56.

τὰ αὐτὰ δηλαδὴ μὲ τὰ τῆς πρώτης περιπτώσεως ἀποτελέσματα, ἔνθα R ἀντικατεστάθη διὰ τοῦ $-R$.

Τ' ἀποτελέσματα ταῦτα δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ ἀναλυτικῶς ὡς ἑξῆς.

'Εὰν φέρωμεν (Σχ. 55) τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς παρὰ τῷ σημείῳ m καὶ καλέσωμεν θ τὴν μετὰ τοῦ ἄξονος ox γωνίαν ταύτης ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi_x-f\eta\mu\theta=\varphi_x-f\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\varphi_y+f\sigma\upsilon\nu\theta=\varphi_y+f\frac{dx}{ds}$$

αἵτινες συνδυαζόμεναι μετὰ τῆς καρτεσιανῆς ἐξισώσεως τῆς ἀκάμπτου γραμμῆς μᾶς δίδουσι τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην τῶν ἄνω σχέσεων ἐπὶ $\frac{dx}{dt}$, τὴν δευτέραν ἐπὶ $\frac{dy}{dt}$, ἀθροίζοντες εἶτα κατὰ μέλη καὶ παρατηροῦντες ὅτι

$$\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{dt}$$

ἔχομεν

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}=\varphi_x\frac{dx}{dt}+\varphi_y\frac{dy}{dt}$$

ὅθεν

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\varphi_x\frac{dx}{ds}+\varphi_y\frac{dy}{ds}$$

ἀλλὰ $\frac{dx}{ds}$ καὶ $\frac{dy}{ds}$ εἶναι τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς παρὰ τῷ σημείῳ m ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς· ἔχομεν λοιπὸν

$$\varphi_x\frac{dx}{ds}+\varphi_y\frac{dy}{ds}=\varphi_\varepsilon$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν ὡς καὶ προηγουμένως.

$$\frac{dv}{dt}=\varphi_\varepsilon$$

'Εὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην τῶν ἄνω σχέσεων ἐπὶ $\frac{dy}{dt}$ τὴν δευτέραν ἐπὶ $\frac{dx}{dt}$ καὶ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}=\varphi_x\frac{dy}{dt}-\varphi_y\frac{dx}{dt}-f\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{ds}\right)$$

ἀλλ' ἐπειδὴ

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy}{ds}$$

εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ταχύτητος $\frac{ds}{dt}=v$ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης

καὶ [εἰσ. § 6. 10]

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{v^3}{R}$$

ἕπεται

$$-\frac{v^3}{R}=\varphi_x\frac{dy}{dt}-\varphi_y\frac{dx}{dt}-fv$$

καὶ διαιροῦντες διὰ $v=\frac{ds}{dt}$ ἔχομεν τέλος

$$f=\varphi_x\frac{dy}{ds}-\varphi_y\frac{dx}{ds}+\frac{v^2}{R}$$

ἀλλὰ

$$\varphi_x\frac{dy}{ds}-\varphi_y\frac{dx}{ds}$$

εἶναι ἡ προβολὴ φ_u τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῆς καθέτου καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$f = \varphi_u + \frac{v^2}{R}.$$

ἣν εὕρομεν καὶ προηγουμένως

τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν γραμμὴν

48. Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν τροχιὰν εὑρίσκομεν προφανῶς διὰ τῆς σχέσεως

$$f = 0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{v^2}{R} = \varphi_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

καὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς.

Ἔστω $mn = \delta$ (Σχ. 55) ἡ ἐπὶ τῆς φορᾶς τῆς ἐπιταχύνσεως φ δια-τεμνομένη ὑπὸ τοῦ κύκλου τῆς καμπυλότητος χορδή· ἔχομεν

$$\delta = mn = ms\, \text{ἡμ}\widehat{nsm} = 2R\text{ἡμ}\widehat{nm\varepsilon}$$

ἀφ' ἑτέρου

$$\varphi_u = \varphi\, \text{ἡμ}\widehat{nm\varepsilon}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\delta = 2R\frac{\varphi_u}{\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Παρὰ τῷ σημείῳ ἔνθα τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν τροχιὰν ἔχομεν λοιπὸν (1)

$$v^2 = \frac{1}{2}\varphi\delta = 2\varphi.\frac{\delta}{4}$$

Τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει δηλαδὴ τὴν τροχιὰν καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ταχύτης του ἰσοῦται [§ 14. α. 1] *ἐκείνῃ, ἣν θ' ἀπέκτα πίπτον ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς ἐπιταχύνσεως ἴσης τῇ φ ἀπὸ ὕψους ἴσου τῷ τετάρτῳ τῆς παραλλήλου τῇ φ χορδῆς καμπυλότητος mn.*

κίνησις ἐπὶ κύκλου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς ἐπιταχύνσεως

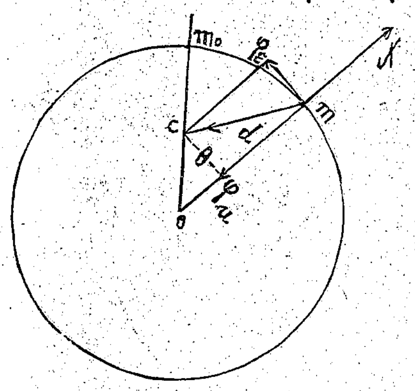
49 Παραδείγματα. 1) Ἂς ἐφαρμώσωμεν τ' ἀνωτέρω ἐν τῇ κινήσει ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ κυκλικῆς περιφερείας ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἐπιταχύνσεως φ φερομένης πρὸς τὸ κέντρον καὶ ἀναλόγου τῇ πολικῇ ἀκτῖνι $mc = \rho$.

α) κίνησις ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ μέρους τῆς περιφερείας· αἱ ἐφαρμόσιμοι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ σχέσεις εἶναι [47. 1 καὶ 2]

$$\frac{v^2}{2} = \int \varphi_\varepsilon ds \quad \text{καὶ} \quad f = \varphi_u + \frac{v^2}{R}$$

ἐνταῦθα δὲ ἔχομεν

$$\varphi_\varepsilon = \rho\text{ἡμ}\alpha \qquad \varphi_u = \rho\text{συν}\alpha$$



Σχ. 57.

τὸ τρίγωνον ocm ἔνθα θέτομεν $oc = a$ δίδει

$$\rho\text{ἡμ}\alpha = a\text{ἡμ}\theta \quad \text{καὶ} \quad \rho\text{συν}\alpha = R - a\text{συν}\theta$$

καὶ ἐν τῷ κύκλῳ ἔχομεν

$$ds = R d\theta$$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{v^2}{2} = \int_0^s \varphi_\varepsilon\, ds = aR\int_0^\theta \text{ἡμ}\theta d\theta$$

$$= \frac{v_0^2}{2} + aR(1 - \text{συν}\theta)$$

ἥτις ὁρίζει τὴν κίνησιν ἐπὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας.

Τὸ σημεῖον ἔνθα τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν περιφέρειαν ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$0 = f = \varphi_u + \frac{v^2}{R} = \rho\text{συν}\alpha + \frac{v_0}{R} + 2a(1 - \text{συν}\theta)$$

$$= R - a\text{συν}\theta + \frac{v_0^2}{R} + 2a(1 - \text{συν}\theta)$$

ἢ

$$f = \frac{R^2 + v_0^2 + 2aR}{R} - 3a\text{συν}\theta = 0$$

ὅθεν

$$\text{συν}\theta = \frac{R^2 + v_0^2 + 2aR}{3aR}$$

ἐξ οὗ καὶ ἡ συνθήκη

$$aR > R^2 + v_0^2 \qquad \text{ἢ} \qquad v_0^2 < R(R - a)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιταχύνσεως $\varphi = g$, ἔχομεν $a = \infty$ καὶ τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν περιφέρειαν καθ' ἣν στιγμὴν

$$\text{συν}\theta = \frac{2}{3}$$

β) Κίνησις ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ μέρους τῆς περιφερείας· αἱ ἐφαρμόσιμοι σχέσεις ἐνταῦθα εἶναι [47 1′ καὶ 2′]

$$\frac{v^2}{2} = \int \varphi_\varepsilon ds \quad \text{καὶ} \quad f = \varphi_u - \frac{v^2}{R}$$

ἔχομεν δὲ

$$\varphi_u = \rho\text{συν}\alpha \qquad \varphi_\varepsilon = -\rho\text{ἡμ}\alpha$$

καὶ τὰς λοιπὰς σχέσεις ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις· ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$v^2 = v_0^2 + 2aR\,(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$f = \rho\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{v_0^2}{R} + 2a\,(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)$$

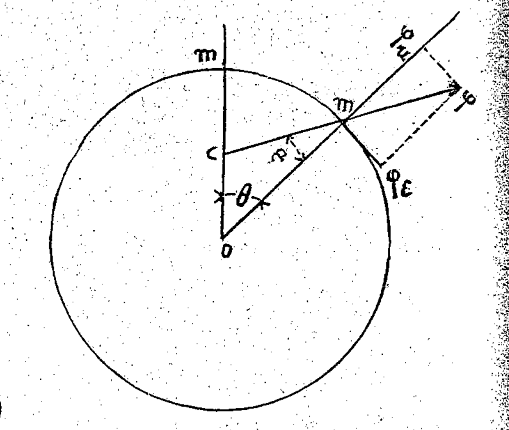
$$= \frac{R^2 - v_0^2 - 2aR}{R} + a\sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

ὅθεν

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2aR + v_0^2 - R^2}{aR}$$

ἐξ οὗ καὶ ἡ συνθήκη

$$aR < R^2 - v_0^2 \quad \text{ἢ} \quad v_0^2 < R(R-a)$$



Σχ. 58.

κίνησις ἐπὶ λογαριθμικῆς ἕλικος

2) Κίνησις ἐπὶ τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος

$$\rho = ae^{n\lambda}$$

κινητοῦ, οὗτινος ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ πόλου εἶναι r, ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν κεντρικῆς ἐπιταχύνσεως φερομένης πρὸς τὸν πόλον καὶ ἀναλόγου τῇ πολικῇ ἀκτῖνι.

Αἱ ἐφαρμόσιμοι ἐνταῦθα σχέσεις εἶναι

$$\frac{v^2}{2} = \int \varphi_\varepsilon ds \quad \text{καὶ} \quad f = \varphi_u - \frac{v^2}{R}$$

ἔχομεν δὲ

$$\varphi_\varepsilon = -\rho\frac{d\rho}{ds} \qquad \varphi_u = \rho^2\frac{d\lambda}{ds}$$

ὥστε

$$\frac{v^2}{2} = -\int_b^\rho \rho\frac{d\rho}{ds}ds = -\int_b^\rho \rho d\rho = \frac{1}{2}(b^2-\rho^2)$$

ὅθεν καὶ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{b^2-\rho^2} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2} = \frac{d\rho}{dt}\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{d\lambda}{d\rho}\right)^2}$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\rho = ae^{n\lambda}$ ἔχομεν

$$\rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

ὥστε

$$\frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}} = \frac{ndt}{\sqrt{1+n^2}}$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$\rho = b\sigma\upsilon\nu\left[\frac{nt}{\sqrt{1+n^2}} + \alpha\right]$$

ἀλλὰ διὰ $t = 0$ ἔχομεν $\rho = b$ ὥστε $\alpha = 0$ καὶ οὕτω

$$\rho = b\sigma\upsilon\nu\frac{nt}{\sqrt{1+n^2}}$$

ὅταν τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὸν πόλον θὰ ἔχωμεν $\rho = 0$ καὶ τότε

$$\sigma\upsilon\nu\frac{nt}{\sqrt{1+n^2}} = 0$$

ὅθεν

$$t = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

ἡ δευτέρα τῶν ἄνω σχέσεων μᾶς δίδει τὴν ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν

$$f = \varphi_u - \frac{v^2}{R} = \rho^2\frac{d\lambda}{ds} - \frac{b^2-\rho^2}{\rho\sqrt{1+n^2}} - \frac{b^2-2\rho^2}{\rho\sqrt{1+n^2}}$$

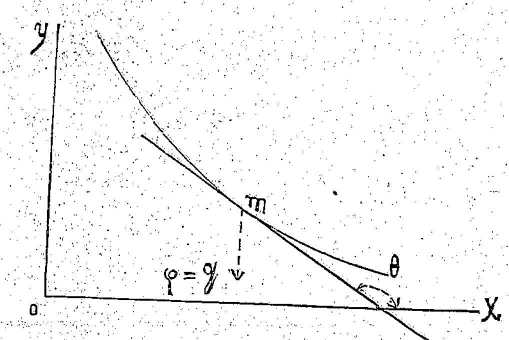
50. Ἐὰν τὸ κινητὸν κινῆται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιταχύνσεως ἔχομεν

κίνησις ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιταχύνσεως

$$\varphi = -g \qquad \varphi_\varepsilon = -\varphi\frac{dy}{ds} = g\frac{dy}{ds} \quad \text{καὶ} \quad \varphi_u = g\frac{dx}{ds}$$

ὅθεν (§ 47. 1 καὶ 2)

$$\frac{v^2}{2} = g\int dy \quad \text{καὶ} \quad f = g\frac{dx}{ds} + \frac{v^2}{R} \cdots\cdots\cdots (1)$$



Σχ. 59.

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων 0 παρὰ τῷ σημείῳ τῆς ἀφετηρίας τοῦ κινητοῦ ἔχομεν

ταχύτης

$$\int dy = \int_0^y dy = y \quad \text{καὶ} \quad v^2 = 2gy$$

τὸ σημεῖον ἔνθα τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν τροχιὰν εὑρίσκομεν διὰ τῆς σχέσεως

τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν γραμμήν

$$\frac{v^2}{R} = \pm\varphi_u = \pm g\frac{dx}{ds} \cdots\cdots\cdots (2)$$

Τὴν διάρκειαν τῆς πτώσεως εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τῆς ταχύτητος· ἔχομεν τῷ ὄντι

διάρκεια τῆς πτώσεως

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad \text{ὅθεν} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{dy}{\frac{dy}{ds}\sqrt{2gy}}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων παρὰ τῷ σημείῳ τῆς ἀφετηρίας τοῦ κινητοῦ, καὶ τὸν ἄξονα oy πρὸς τὰ κάτω, ἔχομεν δι᾽ ὁλοκληρώσεως τῆς προηγουμένης σχέσεως

$$t_1 = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\frac{dy}{ds}\sqrt{2gy}} \dots\dots\dots\dots (3)$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων παρὰ τῷ κατωτάτῳ σημείῳ τῆς τροχιᾶς καὶ τὸν ἄξονα τῶν y φερόμενον πρὸς τὰ ἄνω· ἔχομεν

$$t_1 = \int_{y_1}^{0} \frac{dy}{-\frac{dy}{ds}\sqrt{2g(y_1-y)}} = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\frac{dy}{ds}\sqrt{2g(y_1-y)}}$$

ἔνθα y_1 εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τῆς ἀφετηρίας τοῦ κινητοῦ.

κίνησις ἐπὶ παραβολῆς

Παραδειγματα, 1) Κίνησις ἐπὶ παραβολῆς ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιταχύνσεως· ὁ ἄξων τῆς παραβολῆς εἶναι κατακόρυφος φερόμενος πρὸς τὰ κάτω· ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς εἶναι

$$x^2 = 4\alpha y \dots\dots\dots\dots (1)$$

αἱ ἐφαρμόσιμοι ἐνταῦθα σχέσεις εἶναι

$$v^2 = 2gy + v_0^2 \qquad f = g\frac{dx}{ds} - \frac{v^2}{R} \dots\dots (2)$$

ἐὰν ὑποθέσωμεν $v_0^2 = 2gh$ ἔχομεν

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(h+y) \dots\dots\dots (3)$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ τῆς παραβολῆς ἔχομεν διαφοροῦντες καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$$y\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \alpha\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

ἀλλὰ

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{y}{\alpha+y} \dots\dots\dots\dots (4)$$

πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (3 καὶ 4) ἔχομεν

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2gy(h+y)}{\alpha+y} \quad \text{ἢ} \quad dt = \frac{dy\sqrt{\alpha+y}}{\sqrt{2gy(h+y)}}$$

καὶ δι᾽ ὁλοκληρώσεως

$$t_\eta = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\eta \frac{dy\sqrt{\alpha+y}}{\sqrt{y(h+y)}}$$

τοῦ σημείου τῆς ἀφετηρίας συμπίπτοντος μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς τροχιᾶς· τὴν κάθετον ἐπιτάχυνσιν f ἔχομεν διὰ τῆς δευτέρας τῶν ἄνω σχέσεων (2)

$$-f = \frac{v^2}{R} - g\frac{dx}{ds} = \frac{2g(h+y)}{2\alpha\left(\frac{\alpha+y}{\alpha}\right)^{3/2}} - g\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+y}}$$

$$= g\frac{\sqrt{\alpha(h-\alpha)^2}}{\sqrt{(\alpha+y)^3}} = g\frac{(h-\alpha)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\alpha+y)^3}}$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι ἐν $h = \alpha$ ἔχομεν $f = 0$ τουτέστιν·

Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0 εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ὕψει h, ἰσοῦται δηλαδὴ ἐκείνῃ, ἣν θ᾽ ἀπέκτα τὸ κινητὸν πῖπτον ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ τῆς ἰθυνούσης τῆς παραβολῆς, θὰ διαγράψῃ τοῦτο ἐλευθέρως ὡς ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος τὴν τροχιὰν ταύτην.

2) Θεωρήσωμεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν α καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος· ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων ἔχομεν

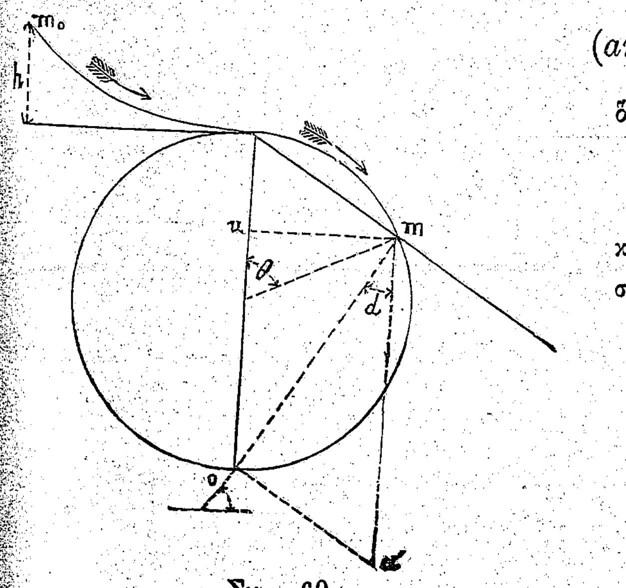
κίνησις ἐπὶ κεκλιμένης εὐθείας

$$v^2 = 2gy \qquad f = g\,\text{συν}\alpha$$

καὶ

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\text{ἡμ}\alpha\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\text{ἡμ}\alpha\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{2y}{g\,\text{ἡμ}^2\alpha}}$$

Ἐὰν παρὰ τῷ σημείῳ m φέρωμεν τὴν κάθετον mo ἐπὶ τῆς κεκλιμένης εὐθείας ἔχομεν ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ amo



Σχ. 60.

$$(am)^2 = \frac{y^2}{\text{ἡμ}^2\alpha} = oa.y$$

ὅθεν

$$\frac{2y}{g\,\text{ἡμ}^2\alpha} = \frac{2oa}{g}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει ἔχομεν

$$t = \sqrt{\frac{2.oa}{g}}$$

τουτέστιν· Ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως εἶναι ἡ αὐτὴ δι᾽ ὅλας τὰς χορδὰς τοῦ ἐπὶ τοῦ τμήματος oa διαγραφομένου κύκλου (Γαλιλαῖος).

Ἢ ἄλλως. Ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀφεθῶσι συγχρόνως διάφορα κινητὰ ἐπὶ διαφόρων κεκλιμένων εὐθειῶν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς βαρύτητος, τὰ κινητὰ ταῦτα εὑρίσκονται ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Ἡ χορδὴ mo δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸν κύκλον ma' ἴσον τῷ ao ὥστε ἡ διάρκεια τῆςπτώσεως τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς χορδῆς ταύτης εἶναι

$$\sqrt{\frac{2ma'}{g}} = \sqrt{\frac{2oa}{g}}$$

τουτέστι· Δύο συμπληρωματικαὶ χορδαὶ τοῦ κύκλου oa διανύονται ἐν ἴσοις χρόνοις (Γαλιλαῖος).

Κίνησις ἐπὶ κύκλου

Θεωρήσωμεν ἤδη κινητὸν κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ μέρους τῆς κυκλικῆς περιφερείας oa (Σχ. 59).

Ἔχομεν ἐκ προηγουμένων σχέσεων (§ **50**.1)

$$v^2 = 2g(h + au) = 2g(h + R - R\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$f = \varphi_u - \frac{v^2}{R} = g\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{2g}{R}(h + R - R\sigma\upsilon\nu\theta) = 3g\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{2g}{R}(h+R)$$

παρὰ τῷ σημείῳ ἔνθα τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὴν περιφέρειαν ἔχομεν

$$f = 3g\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{2g}{R}(h+R) = 0$$

ὅθεν

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2(h+R)}{3R}$$

Ἐὰν τὸ ὕψος h πληροῖ τὴν σχέσιν

$$2(h+R) \geqslant 3R$$

τὸ κινητὸν ἐγκαταλείπει τὸν κύκλον ἐπὶ τῆς κορυφῆς a.

Ἐὰν τὸ κινητὸν ἀναχωρῇ ὑπὸ γωνίαν θ_0 ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐγκαταλείπει τὸν κύκλον παρὰ τῷ σημείῳ ἔνθα

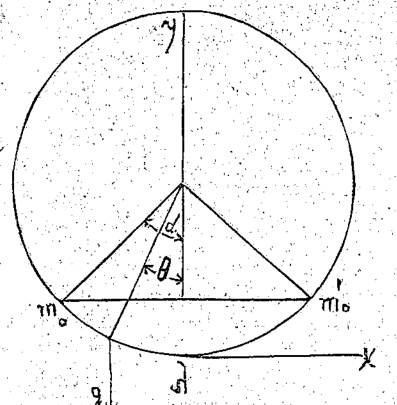
$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2}{3}\,\sigma\upsilon\nu\theta_0$$

β') Ἐὰν τὸ κινητὸν κινῆται ἐπὶ τοῦ κοίλου μέρους τῆς περιφερείας ἔχομεν ἐκ τῶν σχέσεων (§ 50.1)

$$v^2 = 2g(y_0 - y) = 2gR(\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha)$$

$$f = \varphi_u + \frac{v^2}{R} = 3g\sigma\upsilon\nu\theta - 2g\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\frac{dy}{ds}\sqrt{2gR(\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha)}}$$



Σχ. 61.

καὶ ἐπειδὴ

$$dy = R\eta\mu\theta d\theta \quad \text{καὶ} \quad \frac{dy}{ds} = \eta\mu\theta$$

ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha}}$$

51. Ἐν τῇ πρώτῃ τῶν σχέσεων τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ αὐξάνει μέχρι τῆς διαβάσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ κατωτάτου σημείου Α, ὁπόθεν ἄρχεται ἐλαττουμένη αὕτη κατὰ τὴν ἀνάβασιν τοῦ κινητοῦ μέχρι τοῦ σημείου m'_0 συμμετρικοῦ τοῦ m_0 ὡς πρὸς τὸ Α, ἔνθα μηδενίζεται αὕτη· ἐκεῖθεν ἄρχεται πάλιν καταπίπτον τὸ σημεῖον καὶ ἐξακολουθεῖ οὕτω αἰωρούμενον ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Α.

ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς

Τὴν διάρκειαν Τ τῆς αἰωρήσεως ἢ περίοδον μᾶς δίδει ἡ σχέσις

$$T = \sqrt{\frac{2R}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha}} \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ἔνθα τὸ ὁλοκλήρωμα ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων. Δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν περίοδον Τ κατὰ προσέγγισιν οὕτω.

Θέτομεν $\sigma\upsilon\nu\theta = 1 - \psi \quad \sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - \psi_0$

ὅθεν $$d\theta = \frac{d\psi}{\eta\mu\theta} = \frac{d\psi}{\sqrt{2\psi\left(1 - \frac{\psi}{2}\right)}} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha = \psi_0 - \psi$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει (1)

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}}\left|1 - \frac{\psi}{2}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

καὶ ἐπειδὴ $\left(1 - \frac{\psi}{2}\right) < 1$ δυνάμεθα ν' ἀναπτύξωμεν τὸ διώνυμον

$\left(1 - \frac{\psi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ κατὰ τὴν σχέσιν τοῦ Νεύτωνος καὶ ἔχομεν

$$\left(1 - \frac{\psi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\psi}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots\ldots 2n}\left(\frac{\psi}{2}\right)^n + \ldots$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{2}\right) + \ldots\right]$$

ἔχομεν οὕτω νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$\int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}} = \int \frac{\psi^{n-1}\psi d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}}$$

$$= \int \frac{\psi^{n-1} d(\psi^2)}{2\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}} = -\int \frac{\psi^{n-1} d(\psi_0\psi - \psi^2 - \psi_0\psi)}{2\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}}$$

ἢ $$\int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}} = -\int \frac{\psi^{n-} d(\psi_0\psi - \psi^2)}{2\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}} + \int \frac{\psi^{n-1} d(\psi_0\psi)}{2\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}}$$

$$= -\int \psi^{n-1} d\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2} + \tfrac{1}{2}\psi_0 \int \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}}$$

ὁλοκληροῦντες κατὰ μέρη τὸ πρῶτον τῶν ἄνω ὁλοκληρωμάτων ἔχομεν

$$-\int \psi^{n-1} d\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2} = -\psi^{n-1}\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2} + (n-1)\int \sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}\, \psi^{n-2} d\psi$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\int \sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}\, \psi^{n-2} d\psi = \int \frac{\psi_0\psi - \psi^2}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}} \psi^{n-2} d\psi$$

$$= \psi_0 \int \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}} - \int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$\int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi\psi_0 - \psi^2}} = -\psi^{n-1}\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}$$

$$+ (n-1)\,\psi_0 \int \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

$$-(n-1)\int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi_9\psi - \psi^2}} + \tfrac{1}{2}\,\psi_0 \int \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

$$-\psi^{n-1}\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2} + \left(n - \tfrac{1}{2}\right)\psi_0 \int \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

$$-(n-1)\int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

ἢ τέλος

$$\int \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}} = -\frac{1}{n}\psi^{n-1}\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2} + \frac{2n-1}{2n}\psi_0 \int \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

καὶ

$$\int_0^{\psi_0} \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}} = \frac{2n-1}{2n}\psi_0 \int_0^{\psi_0} \frac{\psi^{n-1} d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$$

ὥστε ἐὰν θέσωμεν $A_n = \int_0^{\psi_0} \frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}}$ ἔχομεν

$$A_n = \frac{2n-1}{2n}\psi_0 A_{n-1}$$

$$A_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)}\psi_0 A_{n-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_1 = \frac{\psi_0}{2} A_0$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}\psi_0^n A_0$$

ἔχομεν δὲ

$$A_0 = \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi_0\psi - \psi^2}} = \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{\psi_0^2}{4} - \left(\frac{\psi_0}{2} - \psi\right)^2}} \int_0^{\psi_0} \frac{2d\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)}{\sqrt{1 - 2\frac{\frac{\psi_0}{2} - \psi}{\psi_0}}}$$

$$= \left| \text{τοξ.συν}\, 2\left(\frac{\psi - \frac{\psi_0}{2}}{\psi_0}\right) \right|_0^{\psi_0} = \pi$$

ὅθεν

$$A_n = \frac{1.3,5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}\pi\psi_0^n$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τιμῇ τοῦ T ἔχομεν

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \left| 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\psi_0}{2} + \left(\frac{1.2}{2.4}\right)^2 \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3\ldots\ldots 2n_{-1}}{2.4\ldots\ldots 2n}\right)\left(\frac{\psi_0}{2}\right)^n + \ldots\ldots \right|$$

ἡ ἐν τῇ παρενθέσει σειρὰ εἶναι λίαν συγκλίνουσα, καὶ δυνάμεθα διὰ τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς ν' ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν προσέγγισιν τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ νὰ γράψωμεν

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\psi_0}{2}\right) = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \frac{1}{8}\psi_0\right)$$

ἔχομεν δὲ

$$\psi_0 = 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

ἐὰν ὑποθέσωμεν α ἀρκούντως μικρόν, ὥστε νὰ παραλείψωμεν τὴν τετάρτην δύναμιν τοῦ α· καὶ τότε

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἀποτέλεσμα εἰς τὸ ὁποῖον ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν ταχύτερον οὕτω· ἐν τῇ ἄνω σχέσει

$$T = 2\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha}}$$

ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\left(\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\theta}{2}\right)$$

θέτοντες δὲ

$$\eta\mu\frac{\theta}{2} = \eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\psi$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\eta\mu^2\psi}}$$

ἢ ἂν ὑποθέσωμεν α ἀρκούντως μικρὰν ὥστε νὰ παραλείψωμεν τὴν τετάρτην δύναμιν ἔχομεν

$$\frac{1}{\sqrt{1-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\eta\mu^2\psi}} = 1+\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu^2\psi$$

ἀλλὰ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2\psi d\psi = \frac{\pi}{4}$$

καὶ ἡ τιμὴ τῆς διαρκείας τῆς αἰωρήσεως εἶναι

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\right) = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν γωνίαν α ἔτι μικροτέραν ὥστε νὰ παραλείψωμεν καὶ τὸ α^2 ἔχομεν ἁπλῶς τὴν διάρκειαν τῆς αἰωρήσεως διὰ τῆς σχέσεως

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

52. Ἐκ τῶν σχέσεων [50.2 καὶ 51.3] βλέπομεν ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κύκλου γραμμὴ ἧς
τὸ κινητὸν κατέρχεται ταχύτερον ἢ ἐπὶ τῆς χορδῆς. Ἴδωμεν, ἐὰν ὑπάρχῃ τὰ τόξα καὶ
γραμμὴ τοιαύτη, ὥστε τὸ κινητὸν ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς βαρύτητος νὰ αἱ χορδαὶ
διανύῃ ἐν ἴσοις χρόνοις τὰ τόξα καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας χορδὰς αὐτῆς. διανύονται ἐν ἴσοις χρόνοις
Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον α ὡς πόλον καὶ τὴν κατακόρυφον ὡς πολικὸν ἄξονα, αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος ἐκφράζονται [50.3] διὰ τῆς σχέσεως

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\frac{ds}{d\theta}d\theta}{\sqrt{2g\rho\sigma\upsilon\nu\theta}} = \sqrt{\frac{2\rho}{g\sigma\upsilon\nu\theta}}$$

καὶ διαφοροῦντες ὡς πρὸς τὸ θ

$$\frac{\frac{ds}{d\theta}}{\sqrt{2\rho\sigma\upsilon\nu\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{\frac{d\rho}{d\theta}}{\sqrt{\rho\sigma\upsilon\nu\theta}} + \frac{\sqrt{\rho}\,\eta\mu\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^3\theta}}\right|$$

ὅθεν

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} + \rho\varepsilon\varphi\theta$$

ἀλλὰ

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$$

ἀπαλείφοντες ἤδη ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων $\frac{ds}{d\theta}$ ἔχομεν

$$2\frac{d\rho}{\rho} = 2\frac{\sigma\upsilon\nu2\theta}{\eta\mu2\theta}d\theta$$

καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν τὴν γραμμὴν

$$2\lambda o\gamma.\rho = \lambda o\gamma k\eta\mu2\theta$$

ἢ

$$\rho^2 = k^2\eta\mu2\theta$$

ἥτις συμπίπτει μὲ τὸν λημνίσκον τοῦ Bernouilli.

53. Μία ἐκ τῶν γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων τῆς κυκλοειδοῦς τὴν ὁποίαν θ' ἀποδεί- κίνησις ἐπὶ τῆς
ξωμεν κατωτέρω εἶναι ὅτι τὸ τόξον om (Σχ. 62) ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ κυκλοειδοῦς
τῆς χορδῆς cm τοῦ γενήτορος κύκλου amc.

$$om = s = 2cm = 2\sqrt{cm'.ca} = 2\sqrt{y.2a} = 2\sqrt{2ay}$$

ἔνθα a εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου amc.

Αἱ ἐφαρμόσιμοι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ σχέσεις εἶναι

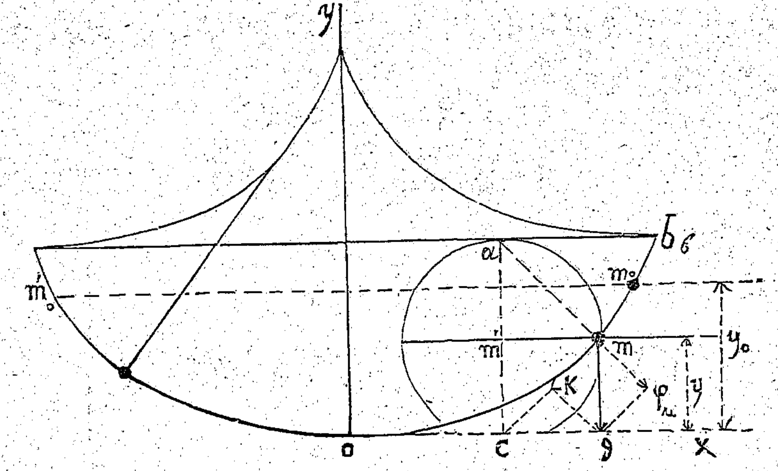
$$v^2 = 2g(y_0 - y) \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad t = \int_0^{y_0}\frac{\frac{ds}{dy}dy}{\sqrt{2g(y_0-y)}}$$

ἔνθα y_0 εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως m_0.

Ἐκ τῆς πρώτης σχέσεως

$$v^2 = 2g(y_0 - y)$$

βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ταχύτης ἐξαρτᾶται ἁπλῶς ἐκ τοῦ ὕψους h τοῦ κινητοῦ ὑπεράνω τοῦ κατωτάτου σημείου o τῆς κυκλοειδοῦς γραμμῆς· ἀφι-



Σχ. 62.

κνεῖται εἰς τὸ μέγιστον αὐτῆς παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ o, ὁπόθεν τὸ κινητὸν ἀνέρχεται ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τῆς καμπύλης μέχρι τοῦ σημείου m'_0 ἔνθα ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y_0)} = 0$$

ἐκεῖθεν καταπίπτει ἐκ νέου καὶ ἐξακολουθεῖ αἰωρούμενον ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου 0.

Ἐκ τῆς ἄνω τιμῆς $s = \sqrt{2ay}$ πορίζόμεθα διὰ διαφορήσεως

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y}}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν ἄνω σχέσεων ἔχομεν

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{yy_0 - y^2}}$$

τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εὕρομεν ἀνωτέρω [51] ἴσον τῷ π ὥστε

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

ἀποτέλεσμα, εἰς ὃ ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας παρατηροῦντες ὅτι τὴν ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν ὁρίζει ἡ σχέσις

$$\frac{d^2s}{dt^2} = mk$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα amc καὶ mkg εἶναι ὅμοια ἔχομεν

$$\frac{mk}{mg} = \frac{mc}{ac} = \frac{mo}{2ac} = \frac{s}{4a}$$

ὅθεν

$$mk = -\frac{gs}{4a}$$

καὶ

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a}s$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ $\frac{ds}{dt}$ καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$s = s_0\,\text{συν}\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right)$$

ὅταν τὸ κινητὸν διέρχηται διὰ τοῦ σημείου 0 ἔχομεν

$$s = 0$$

ὅθεν

$$\text{συν}\left(t\sqrt{\frac{g}{4a}}\right) = 0 \quad \text{ἢ} \quad t\sqrt{\frac{g}{4a}} = \frac{\pi}{2}$$

καὶ

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ὅθεν ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητος τοῦ πλάτους αὐτῆς· ὁ χρόνος δηλαδὴ τὸν ὁποῖον ἀπαιτεῖ τὸ κινητὸν ἵνα κατέλθῃ ἀπὸ τοῦ σημείου b εἰς τὸ σημεῖον m τῆς κυκλοειδοῦς εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀπαιτούμενον ἵνα τὸ κινητὸν ἀφιέμενον ἀφ' ἑτέρου οἱουδήποτε σημείου τῆς αὐτῆς γραμμῆς κατέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον· ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἡ κυκλοειδὴς καλεῖται ἰσόχρονος γραμμή. Ἴδωμεν ἐὰν ὑπάρχωσι καὶ ἄλλαι ἰσόχρονοι γραμμαί. Ἰσόχρονον τῆς κυκλοειδοῦς

Ἐκ τῆς σχέσεως (47. 1) ἔχομεν

$$\frac{v^2}{2} = \int \varphi_\varepsilon\, ds$$

Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἰσοχρόνων ἐπιπέδων γραμμῶν

ὑποθέτομεν δὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοιαύτην, ὥστε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int\varphi_\varepsilon ds$ νὰ εἶναι συνάρτησίς τις $-f(\xi)$ μιᾶς μόνον μεταβλητῆς ξ, καὶ τότε

$$v^2 = 2[f(\xi_0) - f(\xi)] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

καὶ ἐὰν ξ_0 καὶ ξ_1 εἶναι αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰ σημεῖα a_0 καὶ a_1 τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ξ τὸ κινητὸν χρειάζεται χρόνον

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}}\int_{\xi_1}^{\xi_0}\frac{ds}{\sqrt{[f(\xi_0)-f(\xi)]}}$$

ὅπως διανύσῃ τὸ τόξον a_0a_1· πρέπει δὲ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα νὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου a_0 τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ κινητοῦ, δηλαδὴ τοῦ ξ_0· ἵνα ἐκφράσωμεν τὴν συνθήκην ταύτην θέτομεν

$$f(\xi_0)-f(\xi_1) = h$$
$$f(\xi)-f(\xi_1) = x$$
$$f(\xi_0)-f(\xi) = h-x$$

διὰ $\xi=\xi_1$ ἔχομεν $x=0$ καὶ διὰ $\xi=\xi_0$ ἔχομεν $x=h$.
τὸ τόξον s τῆς ζητουμένης καμπύλης εἶναι συνάρτησις τοῦ ξ καὶ κατὰ συνέπειαν τοῦ x. Ἔστω $\sigma(x)$ ἡ ἐκφράζουσα τὴν παράγωγον $\frac{ds}{dx}$ ἄγνωστος συνάρτησις

$$ds = \sigma(x)dx$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ ὁλοκληρώματι ἔχομεν

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^h \frac{\sigma(x)dx}{\sqrt{h-x}}$$

δέον νῦν νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι t εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ h· ἢ ὅτι $\frac{dt}{dh}=0$ θέτομεν πρὸς τοῦτο

$$x= uh \qquad dx = hdu$$

ἔνθα u μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρις 1 καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sigma(uh)\sqrt{uh}\,\frac{du}{\sqrt{u(-u)}}$$

καὶ

$$\frac{dt}{dh}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{d}{dh}\left\{\sigma(uh)\sqrt{uh}\right\}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

ἢ

$$\frac{d}{dh}[\sigma(uh)\sqrt{uh}]=0$$

ὅθεν

$$\sigma(uh)\sqrt{uh}= \sigma\tau.\ K \qquad \text{ἢ}\ \sigma(x)\sqrt{x}= K$$

$$\sigma(x)=\frac{K}{\sqrt{x}}=\frac{ds}{dx}$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$s = 2K\sqrt{x} = 2K\sqrt{f(\xi)-f(\xi_1)}$$

ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐπιπέδων ἰσοχρόνων καμπύλων εἶναι λοιπὸν

$$ds=\frac{Kf'(\xi)d\xi}{\sqrt{f(\xi)-f(\xi_1)}}$$

καὶ τὸ χρονικὸν διάστημα t ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$t=\frac{K}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}=\frac{K}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{2du}{\sqrt{1-(2u-1)^2}}=\frac{K}{\sqrt{2}}\Big(\text{τοξ.ἡμ}(2u-1)\Big)_0^1$$

ἢ τέλος

$$t=\frac{K\pi}{\sqrt{2}}$$

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος ἔχομεν

$$f(\xi)=g$$

ἔνθα ξ εἶναι τὸ ὕψος τῆς πτώσεως τοῦ κινητοῦ καὶ κατὰ συνέπειαν

$$s = 2c\sqrt{g\xi}$$

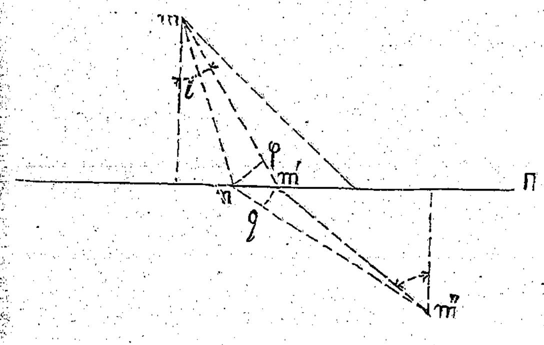
ἡ σχέσις αὕτη ἀνήκει εἰς κυκλοειδῆ καμπύλην [53]· ἡ μόνη ἰσόχρονος ἐπίπεδος γραμμὴ εἶναι λοιπὸν ἡ κυκλοειδής.

54. Ἡ γραμμὴ αὕτη ἔχει καὶ ἑτέραν ἀξιοσημείωτον ἰδιότητα βραχύχρονοι γραμμαὶ
ἥτις καταφαίνεται εὐκόλως διὰ τῆς παραβολῆς τῶν σχέσεων[3 καὶ 1] τῶν παραγράφων[51 καὶ 53]· βλέπομεν τῷ ὄντι ὅτι ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς γραμμῆς τὸ κινητὸν κατέρχεται ταχύτερον ἢ ἐπὶ τῆς χορδῆς· παρουσιάζεται οὕτω τὸ ζήτημα τῆς ἐξευρέσεως γραμμῆς, ἣν ἀκολουθοῦν κινητόν τι ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν ὡρισμένης ἐπιταχύνσεως θὰ μεταβῇ ταχύτερον ἐξ ὡρισμένου τινὸς σημείου Α εἰς ἕτερον Β. τὴν καμπύλην ταύτην καλοῦσι βραχύχρονον.

1) Οἱονδήποτε τόξον mn τῆς βραχυχρόνου καμπύλης ΑΒ εἶναι καὶ τοῦτο βραχύχρονον μενταξὺ τῶν σημείων m καὶ n.
διότι ἄλλως θὰ ἠδυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τοῦτο διὰ τοῦ βραχυχρόνου τόξου $mm'n$ καὶ ἡ βραχύχρονος καμπύλη μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β θὰ ἦτο ἡ $Amm'nb$ καὶ οὐχὶ ἡ $AmnB$.

2) Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα m καὶ m'' ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π, καὶ κινητὸν κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ταχύτητα v ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου καὶ v' κάτωθεν τούτου· ἵνα τὸ κινητὸν διαβῇ ἀπὸ τοῦ σημείου m εἰς τὸ σημεῖον m'' δέον ν' ἀκολουθήσῃ τὴν τροχιὰν $mm'm''$ κειμένην ἐν τῷ διὰ τῆς mm'' καθέτῳ τῷ Π ἐπιπέδῳ καὶ τοιαύτην ὥστε

$$\frac{\text{ἡμ}\,i}{v}=\frac{\text{ἡμ}\,r}{v'}$$



Σχ. 63.

τῷ ὄντι ἐὰν ἡ τροχιὰ δὲν εὑρίσκεται ἐν τῷ καθέτῳ τῷ Π ἐπιπέδῳ, προβάλοντες τὸ σημεῖον m' αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἰς m'_1 θὰ ἔχωμεν

$$mm'_1 < mm' \quad m'_1m'' < m'm'$$

ἢ

$$mm'_1 + m'_1m'' < mm' + m'm''$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ ταχύτητες v καὶ v' εἶναι σταθεραὶ βλέπομεν ὅτι ἡ τροχιὰ mm'_1m'' θὰ διανυθῇ ταχύτερον τῆς τροχιᾶς $mm'm''$.
ἡ τροχιὰ κεῖται λοιπὸν ἐν τῷ διὰ τῆς mm'' καθέτῳ τῷ Π ἐπιπέδῳ.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ σημεῖον n εἰς ἀπειροστὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου m' ὁ χρόνος t_1 ἐν ᾧ διανύεται ἡ τροχιὰ $mm'm''$ εἶναι

$$t=\frac{mm'}{v}+\frac{m'm''}{v'}$$

ὁ χρόνος t'_1 ἐν ᾧ διανύεται ἡ τροχιὰ mnm'' εἶναι

$$t=\frac{mn}{v}+\frac{nm''}{v'}=\frac{mm'-pm'}{v}+\frac{nq+m'm''}{v'}$$

ὅθεν
$$t-t'=\frac{pm'}{v'}-\frac{nq}{v'}$$

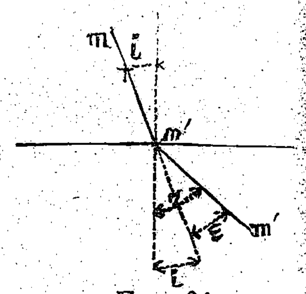
καὶ ἐπειδὴ παρὰ τῷ σημείῳ m,t εἶναι ἐλάχιστον ἡ ἄνω διαφορὰ μηδενίζεται καὶ ἔχομεν

$$\frac{pm'}{v}-\frac{nq}{v'}=0$$

ἀλλὰ
$$pm'=m'n\,\text{ἡμ}i \qquad nq=m'n\,\text{ἡμ}r$$

ὅθεν ἕπεται
$$\frac{\text{ἡμ}i}{v}=\frac{\text{ἡμ}r}{v'}$$

Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι $mm'+m'm''$ εἶναι δύο στοιχειώδη τόξα τῆς ζητουμένης βραχυχρόνου γραμμῆς καὶ καλέσωμεν ε τὴν γωνίαν τῶν διαδοχικῶν ἐφαπτομένων mm' καὶ mm'' ἔχομεν



Σχ. 64.

$$r=i+\varepsilon \qquad v'=v+dv$$

καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\frac{\text{ἡμ}r}{\text{ἡμ}i}=\frac{\text{ἡμ}(i+\varepsilon)}{\text{ἡμ}i}=\frac{\text{ἡμ}i+\varepsilon\,\text{συν}i}{\text{ἡμ}i}=\frac{v'}{v}=\frac{v+dv}{v}$$

ἢ τέλος
$$\text{εφ}i\,\frac{dv}{v}=\varepsilon$$

ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου
$$\varepsilon=\frac{ds}{R}$$

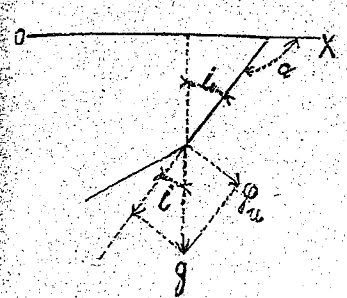
ἔνθα R παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς βραχυχρόνου γραμμῆς· καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\text{εφ}i\,\frac{dv}{v}=\frac{ds}{R}=\frac{vdt}{R}$$

ἢ τέλος
$$\frac{v^2}{R}=\frac{dv}{dt}\,\text{εφ}i \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

ἀλλὰ
$$\frac{dv}{dt}=g\,\text{συν}i$$

καὶ
$$\frac{dv}{dt}\,\text{εφ}i=g\,\text{ἡμ}i=\varphi_u=g\,\text{συν}(\pi-\alpha)=-g\,\text{συν}\alpha$$



Σχ. 65.

Ἡ κάθετος τῇ καμπύλῃ ἐπιτάχυνσις φ_u ἰσοῦται λοιπὸν τῇ κεντρομόλῳ ἐπιταχύνσει $\frac{v^2}{R}$ (Euler).

ἐνταῦθα ἔχομεν

$$v^2=2gy \qquad \frac{dv}{dt}\,\text{εφ}i=-g\,\text{συν}\alpha \qquad \frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει [1]

$$2gy\,\frac{d\alpha}{ds}=-g\,\text{συν}\alpha$$

καὶ ἐπειδὴ $dy=ds\,\text{ἡμ}\alpha$ ἔχομεν τέλος

$$\frac{1}{2}\,\frac{dy}{y}=\frac{-\text{ἡμ}\alpha}{\text{συν}\alpha}\,d\alpha$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\text{λογ}\sqrt{y}=\text{λογ.συν}\alpha+\text{στ}K$$

ἢ

$$\text{συν}\alpha=K\sqrt{y}$$

ἥτις παριστᾷ κυκλοειδῆ γραμμήν.

Ἐὰν τῷ ὄντι φέρωμεν (Σχ. 62) τὴν κάθετον ma παρὰ τῷ σημείῳ m, ἀπὸ τοῦ σημείου a φέρομεν τὴν κατακόρυφον ac καὶ προεκβάλωμεν τὴν ἐφαπτομένην μέχρι τοῦ σημείου c ἔχομεν

$$ma=\frac{am'}{\text{συν}\alpha}=\frac{y}{\text{συν}\alpha}=\sqrt{am'.ac}=\sqrt{ac.y}$$

ὅθεν

$$\frac{\sqrt{y}}{\text{συν}\alpha}=\sqrt{ac}=\frac{1}{K}$$

ac εἶναι λοιπὸν σταθερὰ ποσότης $=2a$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς βραχυχρόνου καμπύλης εἶναι

$$\text{συν}\alpha=\sqrt{\frac{y}{2a}}$$

ἢ ἐὰν λάβωμεν τὸν ἄξονα τῶν x διὰ τοῦ σημείου c

$$\text{συν}\alpha=\sqrt{\frac{2a-\eta}{2a}} \quad \text{ὅθεν} \quad \text{ἡμ}\alpha=\sqrt{1-\text{συν}^2\alpha}=\sqrt{\frac{\eta}{2a}}$$

ἔχομεν δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ cma

$$cm=2a\,\text{ἡμ}\alpha=2a\sqrt{\frac{\eta}{2a}}=\sqrt{2a\eta}$$

ἥτις εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς κυκλοειδοῦς γραμμῆς.

2) *Κίνησις ἐπὶ ἀκάμπτου στρεβλῆς γραμμῆς.*

55. Ἐὰν ἡ ἄκαμπτος τροχιὰ ἣν ἀκολουθεῖ τὸ κινητὸν εἶναι στρεβλὴ δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν φ εἰς τρεῖς ἄλλας

φ_ε κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς

φ_n κατὰ τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος καὶ

φ_p καθέτως τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ.

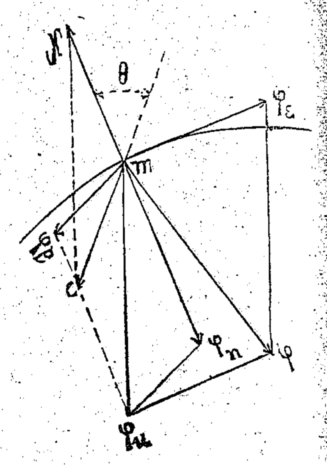
Δυνάμεθα ἤδη ν' ἀναλύσωμεν καὶ τὴν ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν f εἰς δύο ἄλλας

f_n κατὰ τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος καὶ

f_p καθέτως τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ

καὶ τότε θεωροῦντες ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τὴν κίνησιν ὡς ἐκτελουμένην ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ ἔχομεν

ἐὰν τὸ κινητὸν κινῆται ἐπὶ τοῦ κοίλου μέρους τῆς γραμμῆς [47. 1,2]



Σχ. 66.

$$\varphi_\varepsilon = \frac{dv}{dt} \quad \text{καὶ} \quad f_n = \frac{v^2}{R} + \varphi_n \quad \ldots\ldots (1)$$

ἐὰν κινῆται τοῦτο ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ μέρους τῆς γραμμῆς [47. 1',2']

$$\varphi_\varepsilon = \frac{dv}{dt} \quad \text{καὶ} \quad f_n = -\frac{v^2}{R} + \varphi_n \quad \ldots\ldots (1')$$

Καθέτως τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ ἔχομεν

$$\varphi_p = f_p \quad \ldots\ldots (2)$$

Τὸ μέγεθος τῆς ἀγνώστου ἐπιταχύνσεως f ἔχομεν ἤδη διὰ τῆς σχέσεως

$$f = \sqrt{f_n^2 + f_p^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς διὰ τῆς γωνίας θ, ἣν σχηματίζει μετὰ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ σχέσις

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{f_p}{f_n} \quad \ldots\ldots (4)$$

Ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις φ μᾶς δοθῇ διὰ τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς παραλλήλως πρὸς τρεῖς ὀρθογωνίους ἄξονας εἰς οὓς ἀνάγομεν τὸ κινητὸν διὰ τῶν συντεταγμένων τούτου x, y, z, ἡ ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις φ_ε ἐκφράζεται [Εἰσ. § 53] διὰ τῆς σχέσεως

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{ds}\left(\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

ἡ κατὰ τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος συνιστῶσα φ_n διὰ τῆς σχέσεως [Εἰσ. § 5,15]

$$\varphi_n = \frac{R}{ds^2}\left[\varphi_x d^2x + \varphi_y d^2y + \varphi_z d^2z\right] + \ldots\ldots (6)$$

καὶ ἡ συνιστῶσα φ_p καθέτως τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς σχέσεως [Εἰσ. § 5. 20]

$$\varphi_p = \frac{R}{ds^3}\left[A\varphi_x + B\varphi_y + C\varphi_z\right] \ldots\ldots (7)$$

Παράδειγμα. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἄνω σχέσεων, θεωρήσωμεν σημεῖον κινούμενον ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἕλικος [§ 21.2] κίνησις ἐπὶ στερεᾶς ἕλικος

$$x = \rho\,\text{συν}\lambda \qquad y = \rho\,\text{ἡμ}.\lambda \qquad z = h\lambda$$

ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιταχύνσεως $\varphi = g$.

Ἔχομεν ἐνταῦθα

$$\varphi_x = 0 \qquad \varphi_y = 0 \qquad \varphi_z = g$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἕλικος πορίζομεθα [21.2]

$$R = \frac{\rho^2 + h^2}{\rho} = \frac{\delta^2}{\rho} \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{h}{\delta} \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{CR}{\widetilde{ds^3}} = \frac{\rho}{\delta}$$

ὥστε αἱ σχέσεις (5), (6) καὶ (7) δίδουσι

$$\varphi_\varepsilon = g\frac{dz}{ds} = g\frac{h}{\delta} \qquad \varphi_n = 0 \qquad \varphi_p = g\frac{\rho}{\delta}$$

καὶ ἀνατρέχοντες εἰς τὰς σχέσεις (1) ἔχομεν

$$\frac{v^2}{2} = \int_{s_0}^{s} \varphi_\varepsilon\, ds = g\frac{h}{\delta}(s - s_0) = gh(\lambda - \lambda_0) = g(z - z_0)$$

ἡ σχέσις αὕτη ὁρίζει τὴν κίνησιν ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἕλικος.

Τὴν ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν f μᾶς δίδει ἡ σχέσις (3)

$$f = \sqrt{f_n^2 + f_p^2} = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + g^2\frac{\rho^2}{\delta^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{v^4 + g^2\rho R}$$

καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς ἔχομεν (4) διὰ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{g\rho R}{\delta v^2} = \frac{\rho^2 + h^2}{2h(s - s_0)} = \frac{\delta}{2h(\lambda - \lambda_0)} = \frac{\delta}{2(z - z_0)}$$

3) *Κίνησις ἐπὶ ἀκάμπτου ἐπιφανείας.*

56. Θεωρήσωμεν ἤδη κινητόν σημεῖον m κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἐξωτερικῆς τινὸς ἐπιταχύνσεως φ οὕτως ὥστε αἱ συντεταγμέναι τούτου νὰ πληρῶσι τὴν σχέσιν

$$\psi(x, y, z) = 0$$

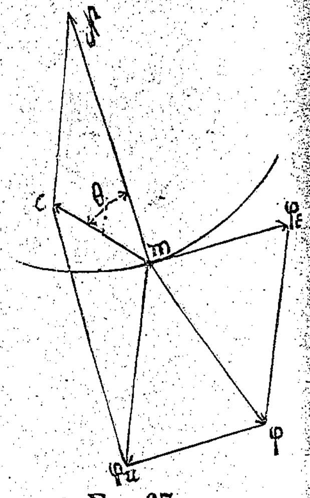
Ἡ τροχιὰ τοῦ σημείου εὑρίσκεται κατ' ἀνάγκην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἣν παριστᾷ ἡ ἄνω σχέσις καὶ δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν δι' αὐτήν, ὅτι εἴπομεν καὶ προηγουμένως [§ 47] σχετικῶς πρὸς τὴν ἐπὶ ἀκάμπτου γραμμῆς κίνησιν.

τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιτάχυνσιν φ ἀναλύομεν εἰς δύο ἄλλας

φ_ε **κατὰ τὴν** ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς καὶ

φ_u **ἐν τῷ καθέτῳ** τῇ τροχιᾷ ταύτῃ ἐπιπέδῳ·

ἀφ' ἑτέρου ἡ κάθετος ἐπιτάχυνσις φ_u συντεθειμένη μετὰ τῆς (καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ) προσθέτου ἐπιταχύνσεως f, ἣν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ κινητοῦ διὰ νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸ ὡς ἐλευθέρως κινούμενον, δίδει τὴν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν $mc = \frac{v^2}{R}$



Σχ. 67.

Ἡ πρωτεύουσα κάθετος mc τῇ τροχιᾷ κεῖται λοιπὸν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $mf\varphi_u$.

Ἐὰν ἀναλύσωμεν (Σχ. 66) καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν φ_u εἰς δύο τὴν μὲν

φ_n καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ, τὴν δὲ

φ_p καθέτως τῷ ἐπιπέδῳ $\varphi_\varepsilon mf$

καὶ καλέσωμεν θ τὴν γωνίαν τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς μετὰ τῆς καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ παρὰ τῷ σημείῳ m, ἔχομεν προβάλλοντες ἐπὶ τῶν ἀξόνων $m\varphi_\varepsilon$, mf καὶ $m\varphi_p$

$$\frac{dv}{dt}=\varphi_\varepsilon \qquad \frac{v^2}{R}\,\text{συν}\theta=\varphi_n-f \quad \text{καὶ} \quad \frac{v^2}{R}\,\text{ἡμ}\theta=\varphi_p$$

ἢ ἀναφερόμενοι εἰς τὰς σχέσεις [Εἰσ. § 7]

$$\frac{dv}{dt}=\varphi_\varepsilon \qquad \frac{v^2}{R_1}=\varphi_n-f \quad \text{καὶ} \quad \frac{v^2}{R_2}=\varphi_p$$

ἔνθα R_1 εἶναι ἡ πρωτεύουσα ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας καὶ R_2 ἡ ἀκτὶς τῆς γεωδαιτικῆς καμπυλότητος.

Εἰς τὰ ἄνω ἀποτελέσματα ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀναλυτικῶς ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν λ μ ν αἱ γωνίαι τῆς καθέτου παρὰ τῷ σημείῳ x, y, z τῇ ἐπιφανείᾳ

$$\psi(x,y,z)=0$$

μετὰ τριῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων εἰς οὓς ἀνάγομεν τὴν ἐπιφάνειαν· τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν τούτων ὁρίζουσιν αἱ σχέσεις [Εἰσ. § 3]

$$\text{συν}\lambda=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\Delta} \qquad \text{συν}\mu=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\Delta} \qquad \text{συν}\,\nu=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial z}}{\Delta}$$

ἔνθα $$\Delta=\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}$$

Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν φ_x, φ_y, φ_z τὰς προβολὰς τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιταχύνσεως φ ἐπὶ τῶν τριῶν ἀξόνων, ἡ κίνησις τοῦ σημείου ὁρίζεται διὰ τῶν σχέσεων

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi_x+f\,\text{συν}\lambda \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\varphi_y+f\,\text{συν}\mu \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\varphi_z+f\,\text{συν}\,\nu \ldots\ldots (1)$$

ἵνα εὕρωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δέον ν' ἀπαλείψωμεν ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων τὴν ἄγνωστον f· πολλαπλασιάζομεν πρὸς τοῦτο τὰς ἄνω σχέσεις ἀμοιβαίως ἐπὶ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. καὶ προσθέτομεν·

οὕτω
$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$=\varphi_x\frac{dx}{dt}+\varphi_y\frac{dy}{dt}+\varphi_z\frac{dz}{dt}+f\left[\frac{dx}{dt}\text{συν}\lambda+\frac{dy}{dt}\text{συν}\mu+\frac{dz}{dt}\text{συν}\nu\right]$$

ἀλλὰ $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{dt}$ καὶ $\frac{dz}{dt}$ εἶναι ἀνάλογα τοῖς συνημιτόνοις τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς, ἥτις εἶναι κάθετος τῇ f· ὅθεν

$$\frac{dx}{dt}\text{συν}\lambda+\frac{dy}{dt}\text{συν}\mu+\frac{dz}{dt}\text{συν}\,\nu=0$$

καὶ

$$\varphi_x\frac{dx}{dt}+\varphi_y\frac{dy}{dt}+\varphi_z\frac{dz}{dt}=v\left(\varphi_x\frac{dx}{ds}+\varphi_y\frac{dy}{ds}+\varphi_z\frac{dz}{ds}\right)=v\varphi_\varepsilon$$

ὅθεν

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)=v\varphi_\varepsilon \quad \text{ἢ} \quad v\frac{dv}{dt}=v\varphi_\varepsilon$$

καὶ

$$\frac{dv}{dt}=\varphi_\varepsilon$$

ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην τῶν ἄνω σχέσεων.

Τὴν ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν f εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὰς σχέσεις [1] ἐπὶ συνλ, συνμ, συν ν, καὶ προσθέττοντες· οὕτω

$$\frac{d^2x}{dt^2}\text{συν}\lambda+\frac{d^2y}{dt^2}\text{συν}\mu+\frac{d^2z}{dt^2}\text{συν}\,\nu=\varphi_x\text{συν}\lambda+\varphi_y\text{συν}\mu+\varphi_z\text{συν}\,\nu+f$$

ἀλλὰ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

καὶ
$$\frac{d^2x}{dt^2}\text{συν}\lambda + \frac{d^2y}{dt^2}\text{συν}\mu + \frac{d^2z}{dt^2}\text{συν }\nu$$
$$= v^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\text{συν}\lambda + \frac{d^2y}{ds^2}\text{συν}\mu + \frac{d^2z}{ds^2}\text{συν }\nu\right)$$
$$+ \frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{dx}{ds}\text{συν}\lambda + \frac{dy}{ds}\text{συν}\mu + \frac{dz}{ds}\text{συν }\nu\right)$$

Ἔστω ἤδη R ἡ πρωτεύουσα ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας, ἧς ἡ φορὰ συμπίπτει μετὰ τῆς f καὶ ρ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς f γωνίαν θ. κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Meunier [Εἰσ. § 7] ἔχομεν
$$\rho = R\,\text{συν}\theta$$
ἀλλὰ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς ἀκτῖνος ρ εἶναι [Εἰσ. § 5.15]
$$\rho\frac{d^2x}{ds^2} \qquad \rho\frac{d^2y}{ds^2} \qquad \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$
ὥστε
$$\text{συν}\theta = \rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\text{συν}\lambda + \frac{d^2y}{ds^2}\text{συν}\mu + \frac{d^2z}{ds^2}\text{συν }\nu\right) = \frac{\rho}{R}$$
ὅθεν καὶ
$$\frac{d^2x}{ds^2}\text{συν}\lambda + \frac{d^2y}{ds^2}\text{συν}\mu + \frac{d^2z}{ds^2}\text{συν}.\nu = \frac{1}{R}$$
ἀφ' ἑτέρου
$$\frac{dx}{ds}\text{συν}\lambda + \frac{dy}{ds}\text{συν}\mu + \frac{dz}{ds}\text{συν}\nu = 0$$
καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς
$$\frac{v^2}{R} = \varphi_x\text{συν}\lambda + \varphi_y\text{συν}\mu + \varphi_z\text{συν }\nu + f = \varphi_n + f$$
ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν δευτέραν τῶν ἄνω σχέσεων.

Τὴν τροχιὰν τοῦ κινητοῦ εὑρίσκομεν διὰ τῆς σχέσεως
$$\psi(x,y,z) = 0$$
καὶ τῶν
$$\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2} - \varphi_x}{\text{συν}\lambda} = \frac{\dfrac{d^2y}{dt^2} - \varphi_y}{\text{συν}\mu} = \frac{\dfrac{d^2z}{dt^2} - \varphi_z}{\text{συν }\nu}$$
τὰς ὁποίας πορίζόμεθα ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων [1] διὰ τῆς ἀπαλειφῆς τῆς f.

γεωδαιτικαὶ τροχιαὶ

57. Θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιτάχυνσις φ ἐκλείπει· τότε ἡ ὁρίζουσα τὸ ἐγγύτατον τῇ γραμμῇ ἐπίπεδον πρωτεύουσα κάθετος mc (Σχ. 67) συμπίπτει μετὰ τῆς καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ mf, καὶ τὸ ἐγγύτατον τῇ καμπύλῃ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον τῇ

ἐπιφανείᾳ· ἡ τροχιὰ τοῦ κινητοῦ εἶναι δηλαδὴ γεωδαιτικὴ γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας.

ἄλλως· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς εἶναι
$$\psi(x,y,z) = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\text{συν}\lambda} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\text{συν}\mu} = \frac{d^2z}{dt^2}\frac{1}{\text{συν}\nu}$$
ἀλλὰ $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + \dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2s}{dt^2}$ κλπ.

καὶ ἐπειδὴ $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 0$ καὶ $\dfrac{ds}{dt} = \alpha$

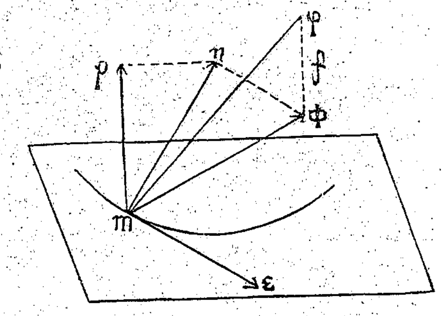
ἔχομεν
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2\frac{d^2x}{ds^2}$$
ἀντικαθιστῶντες ἐν ταῖς ἄνω σχέσεσιν ἔχομεν
$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{1}{\text{συν}\lambda} = \frac{d^2y}{ds^2}\frac{1}{\text{συν}\mu} = \frac{d^2z}{ds^2}\frac{1}{\text{συν }\nu}$$
ἥτις μᾶς δεικνύει, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς συμπίπτει μετὰ τῆς καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ.

58. Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν, ὅτι ὑποθέτοντες τὴν ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν f κάθετον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, παραδεχόμεθα ἁπλῶς, ὅτι ἔχει αὕτη τὴν ἐλαχίστην πασῶν τῶν τιμῶν ἃς ἠδύνατο νὰ λάβῃ. Ἔστω τῷ ὄντι v_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ· ἡ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις εἶναι $mn = \dfrac{v_0^2}{R}$ καὶ ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τῆς καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ $mp = \dfrac{v_0^2}{R}\text{συν}\theta$. ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς διὰ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος mv_0 καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς ἔχομεν [Εἰσ. § 7]

ἡ ἐπιτάχυνσις f εἶναι ἐλαχίστη

$$R = \rho\,\text{συν}\theta$$
ὥστε
$$mp = \frac{v_0^2}{\rho}$$
ἔχομεν οὕτω τὸ μῆκος τοῦ τμήματος mp, ὅπερ παριστᾷ τὴν συνιστῶσαν τῆς ἐπιταχύνσεως Φ καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ· τὸ ἄκρον τοῦ παραστατικοῦ τμήματος τῆς ἐπιταχύνσεως Φ εὑρίσκεται λοιπὸν ἐν τῷ διὰ τοῦ σημείου p φερομένῳ ἐπιπέδῳ παραλλήλως τῷ ἐφαπτομένῳ τῆς ἐπιφανείας ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ σημεῖον m· ἀλλ' ἡ ἐπιτάχυνσις Φ εἶναι συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως φ καὶ τῆς ἀγνώστου ἐπιταχύνσεως f, ὧν ἡ τελευταία ὁρίζεται διὰ τμήματος ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ σημείου m καὶ περατουμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $pn\Phi$· τὴν ἐλαχίστην δὲ τιμὴν αὐτοῦ λαμβάνει τὸ τμῆμα $\varphi\Phi$, ὅταν εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $pn\Phi$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς κινήσεως ἐπὶ ἀκάμπτου γραμμῆς ἡ κεντρομό-

λος ἐπιτάχυνσις εἶναι $mn = \frac{v_0^2}{R}$ ἥτις εἶναι καὶ ἡ προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως Φ καθέτως τῇ γραμμῇ· ὥστε τὸ ἄκρον Φ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας $n\Phi$ παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ $m\varepsilon$ τῆς τροχιᾶς· ἀλλὰ Φ εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ἐπιταχύνσεως φ καὶ τῆς ἀγνώστου ἐπιταχύνσεως f· ἡ τελευταία αὕτη ὁρίζεται λοιπὸν δι' εὐθυγράμμου τμήματος ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ σημείου φ καὶ



Σχ. 68.

περατουμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας $n\Phi$· λαμβάνει δὲ τὸ βραχύτατον αὐτοῦ μῆκος τὸ τμῆμα τοῦτο ὅταν εἶναι κάθετον τῇ εὐθείᾳ $n\Phi$ καὶ κατὰ συνέπειαν τῇ τροχιᾷ.

κίνησις ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας

Παραδειγματα 'Υποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας

$$\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιταχύνσεως. Τὸν ἄξονα oz λαμβάνομεν κατακορύφως καὶ ἔχομεν

$$\text{συν}\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{1}{\Delta} = \frac{x}{l} \qquad \text{σύν}\mu = \frac{y}{l} \qquad \text{συν}\,\nu = \frac{z}{l}$$

$$\varphi_x = 0 \qquad \varphi_y = 0 \qquad \varphi_z = -g$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι οὕτω

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{x}{l} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -f\frac{y}{l} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g - f\frac{z}{l}$$

ἁπλοῦν κωνικὸν ἐκκρεμές

59. Τὰς σχέσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ ὁλοκληρώσωμεν ἀμέσως ἐὰν ὑποθέσωμεν

$$z = \text{σταθερᾷ}\ z_0$$

ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ κινητὸν διαγράφει κύκλον ἐν ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἔχομεν $g - f\frac{z_0}{l} = 0$ ὅθεν $f = \frac{lg}{z_0}$

Αἱ δύο ἕτεραι ἐξισώσεις τῆς κινήσεως μετατρέπονται εἰς

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{z_0}x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{z_0}y$$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως

$$x = \sqrt{l^2 - z_0^2}\,\text{συν}\left(t\sqrt{\frac{g}{z_0}} + C\right)$$

$$y = \sqrt{l^2 - z_0^2}\,\text{ἡμ}\left(t\sqrt{\frac{g}{z_0}} + C\right)$$

ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως εἶναι ἐνταῦθα

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}$$

ἀνάλογος δηλαδὴ τοῦ ὕψους τοῦ σημείου ἐξ οὗ κρέμαται τὸ ἐκκρεμές

ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς ἐν γένει

60. Ἄς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν. Ἐφαρμόζοντες τὰς ἄνω [56] σχέσεις ἔχομεν ἀμέσως

$$\frac{dv}{dt} = \varphi_\varepsilon = g\frac{dz}{ds}$$

ὅθεν

$$\frac{dv}{dt}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = g\frac{dz}{dt}$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - \zeta) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \ldots\ldots (1)$$

ἔνθα v_0 καὶ ζ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τοῦ σημείου m.
Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῆς κινήσεως πορίζόμεθα

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

ὅθεν δι' ὁλοκηρώσεως

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{σταθ. } \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) μετὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ὁρίζουσι τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ συναρτήσει τοῦ χρόνου.
ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔχομεν διὰ διαφορήσεως

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

Ἐὰν ἤδη ἀπαλείψωμεν ἐκ τῶν σχέσεων (1), (2) καὶ (3') $\frac{dx}{dt}$ καὶ $\frac{dy}{dt}$ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$t = \int \frac{l\,dz}{\sqrt{(l^2 - z^2)\left[v_0^2 - 2g(\zeta - z)\right] - \gamma^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ἥτις ὁρίζει τὸν χρόνον διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων.
Ἐὰν ἀντὶ τῶν καρτεσιανῶν λάβωμεν τὰς σφαιρικὰς συντεταγμένας

$$x = l\,\text{συν}\lambda\ \text{συν}\mu \qquad z = l\,\text{συν}\lambda\ \text{ἡμ}\mu \qquad y = l\,\text{ἡμ}\lambda$$

καὶ καλέσωμεν $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ τὴν γωνίαν moz, ἔχομεν

$$x = l\,\text{ἡμ}\theta\ \text{συν}\mu \qquad y = l\,\text{ἡμ}\theta\ \text{ἡμ}\mu \qquad z = l\,\text{συν}\theta$$
$$dx = l\,\text{συν}\theta\ \text{συν}\mu . d\theta - l\,\text{ἡμ}\theta\ \text{ἡμ}.\mu d\mu$$
$$dy = l\,\text{συν}\theta\ \text{ἡμ}\mu . d\theta + l\,\text{ἡμ}\theta\ \text{συν}\mu\ d\mu$$
$$dz = -l\,\text{ἡμ}\theta\ d\theta$$

ὅθεν

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = l^2[d\theta^2 + \text{ἡμ}^2\theta d\mu^2]$$
$$x dy - y dx = l^2\text{ἡμ}^2\theta d\mu$$

καὶ αἱ ἄνω σχέσεις (1) καὶ (2) μετατρέπονται εἰς

$$l^2[d\theta^2 + \text{ἡμ}^2\theta d\mu^2] = [v_0^2 + 2gl(\text{συν}\theta - \text{συν}\theta_0)]dt^2$$

καὶ

$$l^2\text{ἡμ}^2\theta d\mu = \gamma dt$$

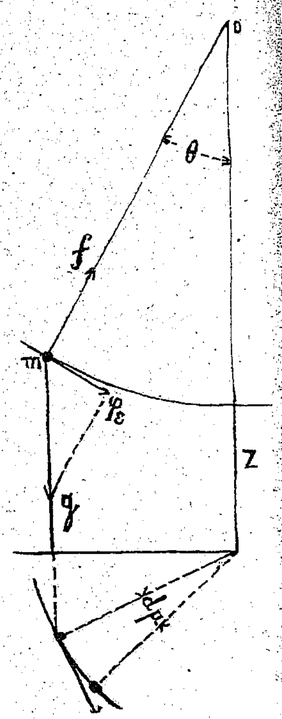
ἔνθα θ_0 ἐμφαίνει τὴν ἀρχικὴν τιμὴν τῆς γωνίας θ.
Εἰς τὰς δύο ταύτας σχέσεις ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς.

Τὸ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαγραφόμενον στοιχειῶδες τόξον ds δύναται νὰ ληφθῇ ὡς συνιστάμενον ἐκ δύο ἄλλων τόξων καθέτων ἀλλήλοις, ὧν τὸ ἓν $ld\theta$ κάθετον τῇ ἀκτῖνι om καὶ τὸ ἕτερον lἡμ$\theta d\mu$ ἐν τῷ διὰ τοῦ m ὁριζοντείῳ ἐπιπέδῳ· ὥστε

$$ds^2 = l^2 d\theta^2 + l^2 \text{ἡμ}^2\theta d\mu$$

ἀλλὰ

$$ds^2 = v^2 dt^2 = [v_0^2 + 2gl(\text{συν}\theta - \text{συν}\theta_0)]dt^2$$



Σχ. 69.

Τὴν δευτέραν τῶν ἄνω σχέσεων εὑρίσκομεν παρατηροῦντες, ὅτι ὡς ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως ἡ ὁριζόντειος προβολὴ τοῦ σημείου κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς ἐπιταχύνσεως καὶ τότε

$$l^2 \text{ἡμ}^2\theta d\mu = \gamma dt$$

συνδυάζοντες τὰς δύο ταύτας σχέσεις ἔχομεν

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\text{συν}\theta - \text{συν}\theta_0)^2 - \frac{\gamma^2}{l^4 \text{ἡμ}^2\theta}$$

σχέσις ὁλοκληρώσιμος διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 ὁριζόντειον, ἔχομεν

$$v_0 = l\text{ἡμ}\theta_0\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_0$$

καὶ ἐπειδὴ $l^2\text{ἡμ}\theta_0\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_0 = \gamma$ ἔχομεν $\gamma = l\text{ἡμ}\theta_0 v_0$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει μετατρέπεται αὕτη εἰς

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v_0^2}{l^2}\left(1 - \frac{\text{ἡμ}^2\theta_0}{\text{ἡμ}^2\theta}\right) + \frac{2g}{l}[\text{συν}\theta - \text{συν}\theta_0]$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὰς αἰωρήσεις ἀρκούντως μικρὰς ὥστε νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν

$$\text{συν}\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{συν}\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2} \quad \text{ἡμ}\theta = \theta \text{ καὶ } \text{ἡμ}\theta_0 = \theta_0$$

ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\frac{(\theta_0^2-\theta^2)(\theta^2-\beta^2)}{\theta}$

ἔνθα $\beta^2 = \frac{v_0^2}{gl}$ καὶ δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{\theta d\theta}{\sqrt{(\theta_0^2-\theta^2)(\theta^2-\beta^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

εἰς ἣν θὰ ἐφθάναμεν ἀμέσως ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ ἄνω ὁλοκληρώματι

$$z \text{ διὰ τοῦ } l\text{συν}\theta = l\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$\zeta \text{ διὰ τοῦ } l\text{συν}\theta_0 = l\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right)$$

καὶ $\gamma \ldots\ldots l v_0 \text{ἡμ}\theta_0 = l v_0 \theta_0$

Εἰς τὸ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν διώνυμον δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὴν μορφὴν

$$(\theta_0^2-\theta^2)(\theta^2-\beta^2) = \left(\frac{\theta_0^2-\beta^2}{2}\right)^2 - \left(\theta^2 - \frac{\theta_0^2+\beta^2}{2}\right)^2$$

ἐὰν ἤδη θέσωμεν

$$\theta^2 - \frac{\theta_0^2+\beta^2}{2} = \omega\frac{\theta_0^2-\beta^2}{2}$$

καὶ λάβωμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν ω

ἔχομεν $$(\theta_0^2-\theta^2)(\theta^2-\beta^2) = \frac{(\theta_0^2-\beta^2)^2(1-\omega^2)}{4}$$

καὶ $$\theta d\theta = (\theta_0^2-\beta^2)\frac{d\omega}{4}$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῷ ἄνω ὁλοκληρώματι ἔχομεν θέτοντες $\sqrt{\frac{g}{l}} = n$

$$2nt = \int\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

ὅθεν $$2nt + \sigma = \text{τοξ συν}\omega$$

διὰ τὰς τιμὰς $t=0$ ἔχομεν $\theta=\theta_0$ καὶ $\omega=1$ ὅθεν $\sigma=0$ καὶ ἔχομεν τέλος

$$\omega = \text{συν}2nt$$

καὶ $$\theta^2 = \frac{\theta_0^2+\beta^2}{2} + \frac{\theta_0^2-\beta^2}{2}\text{συν}2nt$$

$$= \theta_0^2\text{συν}^2 nt + \beta^2\text{ἡμ}^2 nt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

θ^2 μεταβάλλεται λοιπὸν περιοδικῶς, ἡ δὲ περίοδος τῆς μεταβολῆς εἶναι $\frac{\pi}{n}$

διὰ $t = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \ldots\ldots$ ἔχομεν $\theta = \theta_0$

$t = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots$ ἔχομεν $\theta = \beta$

Τὴν ἐν τῷ ὁριζοντείῳ ἐπιπέδῳ κίνησιν θὰ μᾶς δώσῃ νῦν ἡ σχέσις

$$l^2\text{ἡμ}^2\theta\frac{d\mu}{dt} = \gamma = v_0 l\text{ἡμ}\theta_0$$

τὴν ὁποίαν κατὰ τὴν παραδεχθεῖσαν προσέγγισιν γράφομεν οὕτω

$$l^2\theta^2\frac{d\mu}{dt} = v_0 l\theta_0 = l\theta_0\beta\sqrt{lg}$$

ὅθεν $$d\mu = \frac{n\theta_0\beta dt}{\theta_0^2\text{συν}^2 nt + \beta^2\text{ἡμ}^2 nt}$$

τὸ δεύτερον μέλος δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$\theta_0\beta\frac{\frac{ndt}{\text{συν}^2 nt}}{1 + \left(\frac{\beta}{\theta_0}\right)^2\text{εφ}^2 nt} = n\theta_0\frac{d\left(\frac{\beta}{\theta_0}\text{εφ}nt\right)}{1 + \left(\frac{\beta}{\theta_0}\right)^2\text{εφ}^2 nt}$$

ὥστε $$\mu = n\theta_0 \int \frac{d\left(\frac{\beta}{\theta_0}\,\varepsilon\varphi nt\right)}{1+\left(\frac{\beta}{\theta_0}\,\varepsilon\varphi nt\right)^2} = \tau o\xi\ \varepsilon\varphi\left[\frac{\beta}{\theta_0}\,\varepsilon\varphi nt\right] + \sigma$$

διὰ $t=0$ $\mu=0$ ὅθεν $\sigma=0$ καὶ οὕτω

$$\varepsilon\varphi\mu = \frac{\beta}{\theta_0}\,\varepsilon\varphi nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Καὶ βλέπομεν ἐν τῇ σχέσει ταύτῃ ὅτι ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον μεταχειρίζεται τὸ κινητὸν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ ἓν τέταρτον περιστροφῆς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς στιγμῆς καθ' ἣν θεωροῦμεν τοῦτο. Μία περιστροφὴ ἐκτελεῖται ἐν χρονικῷ διαστήματι $\frac{\pi}{n}$. Ἐὰν ἐκ τῶν [6] καὶ [7] ἀπαλείψωμεν t, ἔχομεν

$$\theta^2 = \frac{\theta_0^2\beta^2}{\theta_0^2\,\eta\mu^2.\mu + \beta^2\sigma\upsilon\nu.^2\mu}$$

ἥτις εἶναι ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως, ἔνθα ὁ πόλος συμπίπτει μετὰ τοῦ κέντρου.

Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς· τὴν ἐπιτάχυνσιν $m\Phi$ εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἐν τῷ κάτωθι σχήματι κατασκευῆς καὶ βλέπομεν, ὅτι αὕτη συναντᾷ διαρκῶς τὴν κατακόρυφον ΟΟ'. ἡ προβολὴ m' τοῦ κινητοῦ m ἐπὶ ὁριζοντείου ἐπιπέδου κινεῖται οὕτω ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἐπιταχύνσεως $m'\Phi'$, ἥτις φέρεται πρὸς τὸ κέντρον Ο'. ἔχομεν δὲ

$$m'\Phi' = \pi\rho o\beta.\ \tau o\tilde{\upsilon}\ m\Phi = \pi\rho o\beta.\ mp + \pi\rho o\beta.\ p\Phi$$

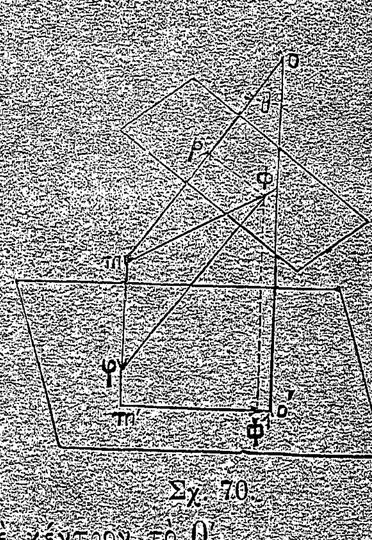
ὅθεν $$m'\Phi' = \frac{v^2}{l}\,\eta\mu\theta + g\,\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

ἔνθα $$v^2 = 2gh = 2gl(\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0)$$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν τέλος

$$\Phi' = 3g\,\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - 2g\,\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta_0$$

ἢ ἂν ὑποθέσωμεν θ καὶ θ_0 ἀρκούντως μικρά, ὥστε ν' ἀντικαταστήσωμεν τὰ συνημίτονα τούτων διὰ τῆς μονάδος ἔχομεν



Σχ. 70.

$$\Phi' = g\,\eta\mu\theta = \frac{g}{l}\,m'O' = k.m'O'$$

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι οὕτω ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ διαγράφει τοῦτο (§ 38. 1) ἔλλειψιν μὲ κέντρον τὸ Ο'. Η περίοδος Τ τῆς ὁλικῆς περιφορᾶς εἶναι

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ἀνεξάρτητος δηλαδὴ τῶν συνθηκῶν τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως.

ΜΕΡΟΣ Β'.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ.

"Les principes de la Mécanique doivent être allégués avec precaution. Ils ont besoin de commentaires,,.

J. Bertrand.

61. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐπραγματεύθημεν τὴν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὑπὸ καθαρῶς γεωμετρικὴν ἔποψιν, χωρὶς ν' ἀναγκασθῶμεν νὰ προστρέξωμεν εἰς ἀρχὰς καὶ ἀληθείας διαφόρους ἐκείνων, ἐφ' ὧν βασίζεται ἡ γεωμετρία καὶ ἡ ἄλγεβρα. Ἡ μόνη ὑπόθεσις τὴν ὁποίαν παρεδέχθημεν ἐμμέσως, χωρὶς κἂν νὰ μνημονεύσωμεν ταύτης, καὶ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς αἴτημα προφανὲς ἀφ' ἑαυτοῦ, εἶναι ὅτι, *ὑλικόν τι μόριον δὲν δύναται* **συγχρόνως** *νὰ κατέχῃ* **δύο διαφόρους θέσεις** *ἐν τῷ διαστήματι, ἀλλ' οὐδὲ καὶ νὰ μεταβῇ ἐκ τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἑτέραν τῶν θέσεων τούτων, χωρὶς νὰ διαγράψῃ* **συνεχῆ τροχιάν.**

Ἐὰν ἤδη προβῶμεν περαιτέρω λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ἐν τῇ σπουδῇ τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων καὶ τὰς *ἀμοιβαίας τούτων δράσεις* (ἕλξιν, ὤθησιν, τάσιν, πίεσιν), ἃς καλοῦμεν **δυνάμεις·** ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐξετάσωμεν καὶ τὸν λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον σῶμά τι μεταβαίνει ἐκ τῆς ἠρεμίας εἰς τὴν κίνησιν, ἢ κινούμενον μεταβάλλει τὴν κίνησιν ταύτην κατὰ τοῦτον ἢ ἐκεῖνον τὸν νόμον, ἐὰν λέγω θελήσωμεν νὰ ἐξετάσωμεν τὰ διέποντα τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων αἴτια καὶ τοὺς νόμους, οὓς ἀκολουθοῦσι ταῦτα, εἰσερχόμεθα εἰς τὴν περιοχὴν τῆς *δυναμικῆς*, ἔνθα ἡ γεωμετρία καὶ ἡ ἄλγεβρα δὲν μᾶς δίδουσι πλέον τὰ ἀναγκαῖα πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος στοιχεῖα, καὶ ἀναγκαζόμεθα νὰ προστρέξωμεν εἰς νέας ἀρχάς, διαφόρους ἐκείνων ἐφ' ὧν βασίζονται αἱ ἄνω θεμελιώδεις ἐπιστῆμαι τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου, εἰς ἀρχὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν κυρίως δυναμικήν, **τὰς ὁποίας μᾶς διδάσκει ἡ πεῖρα καὶ ὁ λόγος.**

Τὴν πρώτην ἰδέαν τῶν ἀμοιβαίων δράσεων τῶν σωμάτων ποριζόμεθα ἐκ τοῦ αἰσθήματος, ὅπερ δοκιμάζομεν ἡμεῖς αὐτοὶ πιέζοντες, ἢ ἕλκοντες σῶμά τι δι' ἀμέσου ἐπαφῆς, ἢ δι' ὁρατοῦ τινος διαμέσου δεσμοῦ, ἢ πειρώμενοι ἁπλῶς νὰ ἐπιφέρωμεν οἵαν δήποτε μεταβολὴν ἐν τῇ καταστάσει κινήσεως ἢ ἠρεμίας τούτου.

Δὲν βραδύνομεν δέ, ἐκ τῶν καθημερινῶν φαινομένων ἅτινα προσπίπτουσιν εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν, *νὰ ἐπεκτείνωμεν* τὴν ἰδέαν ταύτην τῆς ἀμοιβαίας δράσεως τῆς ὕλης ἐκ τῶν ἐμψύχων καὶ εἰς τὰ ἄψυχα *σώματα.*

Αἱ ἀμοιβαῖαι ἕλξεις καὶ ἀπωθήσεις τῶν ἠλεκτρικῶν καὶ μαγνητικῶν σωμάτων παρέχουσιν ἡμῖν καταφανῆ ἀπόδειξιν τῆς ἀμοιβαίας ταύτης δράσεως. Τὸ φαινόμενον τῆς πρὸς τὴν γῆν πτώσεως τῶν σωμάτων μᾶς εἶναι τόσῳ οἰκεῖον, ὥστε οὐδ' αὐτὴν τὴν περιέργειαν κινεῖ· καὶ ὅμως μετ' ἐπισταμένην ἐξέτασιν δὲν δυνάμεθα εἰμὴ ν' ἀναγάγωμεν καὶ τὸ φαινόμενον τοῦτο εἰς ἀμοιβαίαν τινὰ δρᾶσιν ἐξασκουμένην μεταξὺ τῆς γῆς καὶ τοῦ πίπτοντος σώματος. Τὴν περὶ τὴν γῆν κίνησιν τῆς σελήνης, τὴν κίνησιν ἀμφοτέρων τούτων καὶ τῶν λοιπῶν πλανητικῶν σωμάτων περὶ τὸν Ἥλιον, ἀνάγομεν εἰς ἀμοιβαίας δράσεις τῶν σωμάτων τούτων, ἐξασκουμένας ἐξ ἀποστάσεως καὶ ἄνευ διαμέσου τινὸς συνδέσμου. Τὴν δρᾶσιν ταύτην ἀναγνωρίζομεν καὶ ἐν τῷ φαινομένῳ τῶν παλιρροιῶν, ὀφειλομένῳ κυρίως εἰς τὴν ἀνισότητα τῆς δράσεως τῆς σελήνης ἐπὶ τῆς γηΐνου σφαίρας θεωρουμένης ὡς ἓν ὅλον, καὶ ἐπὶ τῶν διαφόρων μερῶν ταύτης θεωρουμένων ἰδίᾳ ἕκαστον.

Ἡ ἀληθὴς φύσις τῶν δράσεων τούτων διέφυγε μέχρι τοῦδε τὴν ἔρευναν τῆς ἀνθρωπίνης διανοίας· *ἡ φύσις τῶν διεπόντων τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων αἰτίων εἶναι καὶ ἔσεται διὰ παντὸς ἄγνωστος* κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ Laplace. Μόνον διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν ἀποκαλύπτονται ἡμῖν αἱ ἀμοιβαῖαι δράσεις τῶν σωμάτων· τὰ ἀποτελέσματα δὲ ταῦτα δυνάμεθα ν' ἀκολουθήσωμεν σὺν τῷ χρόνῳ κατὰ τὴν ἐκτύλιξιν αὐτῶν καὶ ὁρίσωμεν ἐν ἁπάσαις ταῖς λεπτομερείαις των· διὰ τούτων δὲ καὶ τοὺς νόμους, οὓς ἀκολουθοῦσιν αἱ δυνάμεις ἐν τῇ δράσει των.

Ἡ ἀληθὴς φύσις τῶν ἀμέσων αἰτίων εἰς ἃ ὀφείλονται αἱ ἐν ταῖς κινήσεσι τῶν σωμάτων ἐπερχόμεναι μεταβολαί, αἵτινες προσπίπτουσιν εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν, μᾶς εἶναι, λέγομεν, ἐν γένει ἄγνωστοι· ὁδηγούμενοι ὅμως ἐκ τῆς ἰδίας πείρας καὶ τῶν μεταβολῶν, ἃς ἡμεῖς αὐτοὶ ἐπιφέρομεν εἰς τὰς κινήσεις ταύτας ἐξασκοῦντες ἐπὶ τῶν σωμάτων πίεσίν τινα ἢ τάσιν, ὁσάκις παρατηροῦμεν μεταβολήν τινα ἐπερχομένην ἐν τῇ κινήσει τοῦ σώματος, ἧς τὸ αἴτιον μᾶς εἶναι ἄγνωστον, ἡ φαντασία ἡμῶν δὲν βραδύνει νὰ διίδῃ ὄπισθεν τοῦ πέπλου, ὅστις καλύπτει ἡμῖν τὸ ἀληθὲς αἴτιον εἰς ὃ ὀφείλεται ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς

κινήσεως, ἀόρατόν τι ὂν ἕλκον ἢ ἀπωθοῦν τὸ ἐν λόγῳ σῶμα, εἴτε δι' ἀμέσου ἐπαφῆς, εἴτε διὰ διαμέσου τινὸς ἀοράτου δεσμοῦ, ὡς θὰ ἐπράττομεν ἡμεῖς αὐτοί, ἐὰν ἐπειρώμεθα νὰ μεταβάλωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, δι' ἀμέσου πιέσεως ἢ ἕλξεως, ἣν θὰ ἐξησκοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ.

ἐσωτερικὴ δρᾶσις

Ἐν τῇ σπουδῇ ταύτῃ τῶν ἀμοιβαίων δράσεων τῶν ὑλικῶν σωμάτων ἐφιστῶμεν φυσικῶς τὴν προσοχήν μας καὶ περιορίζομεν τὰς ἐρεύνας μας ἐπὶ ὡρισμένου μέρους ὕλης, ὅπερ καλοῦμεν ***ὑλικὸν σύστημα.*** Πᾶσαν δρᾶσιν ἢ ἐνέργειαν ἐξασκουμένην ὑπὸ μέρους τινὸς τοῦ θεωρουμένου ὑλικοῦ συστήματος ἐπὶ ἑτέρου μέρους τοῦ αὐτοῦ συστήματος καλοῦμεν ***ἐσωτερικὴν δρᾶσιν.***

ὁ Ἥλιος λ. χ. μεθ' ἁπάντων τῶν πλανητικῶν σωμάτων, ὧν τὴν κίνησιν διέπει οὗτος, δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν ἐν ἑνὶ συστήματι σωμάτων, ὧν αἱ ἀμοιβαῖαι δράσεις εἶναι ***ἐσωτερικαὶ δράσεις.***

ἐξωτερικὴ δρᾶσις

Τουναντίον πᾶσαν δρᾶσιν ἐξασκουμένην ὑπὸ σώματος μὴ ἀνήκοντος εἰς τὸ θεωρούμενον σύστημα ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ἢ ἐπὶ μέρους μόνον αὐτοῦ, καλοῦμεν ***ἐξωτερικὴν δρᾶσιν.***

Ἐὰν ἐκ τοῦ ὅλου πλανητικοῦ συστήματος ἀποχωρήσωμεν τὴν γῆν μετὰ τοῦ δορυφόρου ταύτης, τῆς Σελήνης, καὶ θεωρήσωμεν τὰ δύο ταῦτα σώματα ὡς ἀποτελοῦντα ἓν σύστημα, αἱ ἀμοιβαῖαι δράσεις τῶν δύο τούτων σωμάτων ἐξακολουθοῦσιν οὖσαι ἐσωτερικαὶ δράσεις, ἐνῷ αἱ δράσεις, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τούτων τὰ λοιπὰ πλανητικὰ σώματα εἶναι ***ἐξωτερικαὶ δράσεις.***

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ἐν τῇ ἀκριβεῖ μαθηματικῇ γλώσσῃ λέγει ὁ Maxwell, ἡ λέξις ***δύναμις*** σημαίνει τὸ ὑποθετικὸν αἴτιον, ὡς ἐκ τοῦ ὁποίου ὑλικόν τι σῶμα τείνει νὰ μεταβάλῃ τὴν κατάστασιν κινήσεως ἢ ἠρεμίας, ἐν ᾗ εὑρίσκεται. Ἀδιάφορον δὲ ἂν ὁμιλῶμεν περὶ τῆς παρατηρουμένης ταύτης τάσεως ἢ τῆς ἀμέσου αἰτίας ταύτης, διότι ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῆς ἀποκαλύπτεται ἡμῖν ἡ αἰτία αὕτη, χωρὶς νὰ ἔχωμεν ἄλλην τινα ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεώς της. Συνειθίσαντες δὲ νὰ κινῶμεν ἡμεῖς αὐτοὶ τὸ σῶμά μας, καὶ νὰ μετατοπίζωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἄλλα ἀντικείμενα ἀπεκτήσαμεν καὶ διατηροῦμεν ἐν τῇ μνήμῃ μας μεγίστην προμήθειαν τῶν σχετικῶν ταῖς δράσεσι ταύταις συναισθήσεων, οὕτως ὥστε, αἱ ἰδέαι, ἃς ἔχομεν περὶ δυνάμεων, συνδέονται ἐν τῷ πνεύματι ἡμῶν πρὸς ἐκείνας, ἃς ἔχομεν περὶ ὄντος τινὸς δρῶντος καὶ ὑφισταμένου κόπωσιν, περὶ πιέσεώς τινος καταβληθείσης ἢ μή.—Οὐδεὶς δὲ κίνδυνος ὑπάρχει μὴ αἱ ἰδέαι αὗται, αἵτινες χρωματίζουσι καὶ ζωογονοῦσιν οὕτως εἰπεῖν τὴν καθαρῶς ἀφῃρημένην ἔννοιαν, ἣν ἔχομεν περὶ τῆς δυνάμεως, γίνωσι πρόξενοι σφαλμάτων διὰ τοὺς ἐξοικειωμένους ἤδη μὲ τὰς μεθόδους τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις

Ἡ ἐπ' ἀλλήλων δρᾶσις τῶν σωμάτων εἶναι *ἀμοιβαία*. Ὅταν δὲ ἐν τῇ σπουδῇ τῆς κινήσεως ὑλικοῦ τινος συστήματος ἐξετάζομεν καὶ τὰς ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένας ὑπὸ ὡρισμένων σωμάτων ἐξωτερικὰς δράσεις, δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν εἰμὴ τὸ ἥμισυ οὕτως εἰπεῖν τοῦ φαινομένου τῆς ἐπ' ἀλλήλων δράσεως τῶν σωμάτων. Ἡ ἐξωτερικὴ αὕτη *δρᾶσις* ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ συστήματος συνοδεύεται τῷ ὄντι ὑφ' ἑτέρας δράσεως, ἣν ἐξασκεῖ τὸ θεωρούμενον σύστημα ἐπὶ τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργούντων ἐξωτερικῶν σωμάτων. Τὴν δευτέραν ταύτην ἄποψιν τοῦ φαινομένου τῆς ἀμοιβαίας δράσεως τῶν σωμάτων καλοῦμεν *ἀντίδρασιν*.

Ἡ δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις εἶναι λοιπὸν δύο διάφοροι ἀπόψεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ φαινομένου: τῆς ἐπ' ἀλλήλων ἀμοιβαίας δράσεως δύο σωμάτων. Ἡ δρᾶσις δὲν ὑπάρχει ἄνευ τῆς ἀντιδράσεως.

Περὶ τῆς συγχρόνου ταύτης ὑπάρξεως τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως πειθόμεθα ἐξετάζοντες τὸ φαινόμενον τῆς πιέσεως, ἣν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων δύο σώματα δι' ἀμέσου ἐπαφῆς, ἢ τὴν κατάστασιν ἐν ᾗ εὑρίσκεται νῆμα τεταμένον δι' οὗ συνδέονται δύο ἐπ' ἀλλήλων δρῶντα σώματα. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὰ σώματα πιέζουσιν ἄλληλα, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἡ ἀμοιβαία δρᾶσις τῶν σωμάτων εἶναι ἴση μὲ τὰς δυνάμεις ἃς πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν δύο ἄκρων τοῦ νήματος, ἵνα διατηρήσωμεν τοῦτο ἐν τῇ καταστάσει τάσεως, ἐν ᾗ εὑρίσκεται ἤδη. Ἐάν, εὑρισκόμενοι ἔν τινι λέμβῳ ἠρεμούσῃ εἰς παραλίαν τινά, θελήσωμεν νὰ θέσωμεν ταύτην εἰς κίνησιν, ὠθοῦμεν διὰ τῆς κώπης τὴν στερεὰν γῆν, δρῶμεν ἐπ' αὐτῆς· τὸ ἀποτέλεσμα δὲ τῆς δράσεως ταύτης ἀναφαίνεται ἐν τῇ κινήσει τῆς λέμβου κατ' ἀντίθετον τῇ δράσει φοράν, ἥτις ὀφείλεται εἰς τὴν ἐφ' ἡμῶν ἀντίδρασιν τῆς γῆς, τὴν συνωδεύουσαν τὴν δρᾶσιν, ἣν ἐξασκοῦμεν ἡμεῖς αὐτοὶ ἐπὶ τῆς στερεᾶς. Ἐάν, εὑρισκόμενοι μὲ τὴν αὐτὴν λέμβον εἰς τὸ ἀνοικτὸν πέλαγος, θελήσωμεν νὰ προχωρήσωμεν καθ' ὡρισμένην τινὰ διεύθυνσιν, κωπηλατοῦμεν· ἡ κωπηλασία δὲ αὕτη συνίσταται εἰς πίεσιν, ἣν διὰ τοῦ ἄκρου τῆς κώπης ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τῶν ὑδάτων κατ' ἀντίθετον φορὰν ἐκείνης τὴν ὁποίαν προτιθέμεθα ν' ἀκολουθήσωμεν· ἐν τῇ ἐξασκήσει δὲ τῆς πιέσεως ταύτης ἀναπτύσσεται ἡ ἐπὶ τῆς κώπης ἀντίδρασις τῶν ὑδάτων, εἰς ἣν ὀφείλεται ἡ πρόωσις τῆς λέμβου καθ' ἣν προτιθέμεθα νὰ κινηθῶμεν διεύθυνσιν.

Νόμοι τῆς κινήσεως

Τὰς ἀμοιβαίας δράσεις τῶν ὑλικῶν σωμάτων θεωρουμένας ἐν σχέσει πρὸς τὰ ἀποτελέσματα αὐτῶν, καὶ ἰδίᾳ τὰς μεταβολὰς ἃς ἐπιφέρουσιν ἐν τῇ κινήσει τῶν σωμάτων τούτων, δράσεις, τὰς ὁποίας κοινῶς καλοῦσι **δυνάμεις,** ὥρισε μαθηματικῶς καὶ διετύπωσε μετὰ τὸν Κέπλερον καὶ τὸν Γαλιλαῖον ὁ Νεύτων, ἐν τοῖς τρισὶ νόμοις τῆς κινήσεως, οἵτινες φέρουσι τὸ ὄνομά του, καὶ τοὺς ὁποίους, **μὴ δυνάμενοι ν' ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς**

πορίσματα πείρας καὶ παρατηρήσεως. Ὁ πρῶτος τῶν νόμων τούτων μᾶς διδάσκει τὰς συνθήκας ὑφ' ἃς εὑρίσκεται σῶμά τι, ὅταν οὐδεμία ἐξωτερικὴ δρᾶσις ἢ δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ:

πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως

Τὰ σώματα ἐμμένουσιν ἐν τῇ καταστάσει τῆς ἠρεμίας ἢ ὁμοιομόρφου κινήσεως, ἐν ὅσῳ ἐξωτερική τις δύναμις δὲν μεταβάλλει τὴν κατάστασιν ταύτην.

Διὰ τοῦ δευτέρου ὁρίζομεν τὸ μέγεθος, τὴν ἔντασιν τῆς δρώσης ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἐὰν ὑπάρχῃ τοιαύτη, διὰ τῆς ἐπηρείας ταύτης ἐπὶ τῆς κινήσεως τοῦ σώματος.

δεύτερος νόμος τῆς κινήσεως

Ἡ μεταβολή, ἣν ὑφίσταται ἡ ποσότης κινήσεως τοῦ σώματος, εἶναι ἀνάλογος καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὴν ὤθησιν τῆς παραγαγούσης ταύτην ἐξωτερικῆς δυνάμεως.

Καὶ ἐν τῷ τρίτῳ, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐκ τοῦ πρώτου ἀπορρέοντα, παραβάλλονται ἀλλήλαις αἱ δύο ἀπόψεις τοῦ φαινομένου τῆς ἐπ' ἀλλήλων ἀμοιβαίας δράσεως τῶν σωμάτων, ἡ δρᾶσις δηλαδὴ πρὸς τὴν ἀντίδρασιν.

τρίτος νόμος τῆς κινήσεως

Ἡ ἀντίδρασις εἶναι πάντοτε ἴση καὶ ἀντίθετος τῇ δράσει· τουτέστιν· αἱ ἀμοιβαῖαι δράσεις τῶν σωμάτων εἶναι πάντοτε ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

Νόμοι τῆς κινήσεως.

Πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως.

62. Τὰ σώματα ἐμμένουσιν ἐν τῇ καταστάσει τῆς ἠρεμίας ἢ ὁμοιομόρφου κινήσεως, ἐν ὅσῳ ἐξωτερική τις δύναμις δὲν μεταβάλλει τὴν κατάστασιν ταύτην.

Ὑποθέσωμεν σῶμά τι ἐν ἠρεμίᾳ. Κατὰ τὸν ἄνω πρῶτον νόμον τῆς κινήσεως τὸ σῶμα δὲν δύναται νὰ μεταβάλῃ ἀφ' ἑαυτοῦ τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἐν ᾗ εὑρίσκεται, δὲν δύναται τοῦτο νὰ τεθῇ εἰς κίνησιν, εἰμὴ διὰ τῆς παρουσίας ἑτέρου σώματος δρῶντος ἐπὶ τοῦ πρώτου, διὰ τῆς ἐπ' αὐτοῦ δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως. Ἐν ὅσῳ ἡ ἐξωτερικὴ αὕτη δύναμις δρᾷ ἐπὶ τοῦ θεωρουμένου σώματος, ἡ ταχύτης τούτου μεταβάλλεται συνεχῶς, ἅμα δὲ παύσῃ ἡ δρῶσα δύναμις, παύει καὶ ἡ μεταβολὴ ἣν ὑφίσταται ἐν τῇ ταχύτητι αὐτοῦ τὸ σῶμα, ἀλλ' ἐξακολουθεῖ τοῦτο κινούμενον ὁμοιομόρφως, διατηρεῖ δὲ τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκέκτητο καθ' ἣν στιγμὴν ἔπαυσε δρῶσα ἐπ' αὐτοῦ ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις. Οὕτω

Ἐὰν οὐδεμία ἐξωτερικὴ δύναμις δρᾷ ἐπὶ τοῦ σώματος ἠρεμεῖ τοῦτο ἢ κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς. Μὴ δυνάμενοι δὲ νὰ φαντασθῶμεν τὴν ἀπόλυτον ἠρεμίαν ἐν τῷ κόσμῳ, ἐννοοῦμεν *τὴν ἠρεμίαν ταύτην ἢ ὁμοιόμορφον κίνησιν σχετικῶς πρὸς ἕτερον σῶμα μὴ ὑποκείμενον καὶ τοῦτο τῇ δράσει ἐξωτερικῆς τινὸς δυνάμεως*, οὕτως ὥστε τὸν πρῶτον νόμον τῆς κινήσεως ἐκφράζομεν ἀκριβέστερον λέγοντες:

Ἡ σχετικὴ κίνησις δύο σωμάτων, ὧν οὐδέτερον ὑπόκειται τῇ δράσει ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως εἶναι ὁμοιόμορφος ἢ ἴση τῷ μηδενί, (τὰ σώματα δηλαδὴ εὑρίσκονται ἐν σχετικῇ ἠρεμίᾳ).

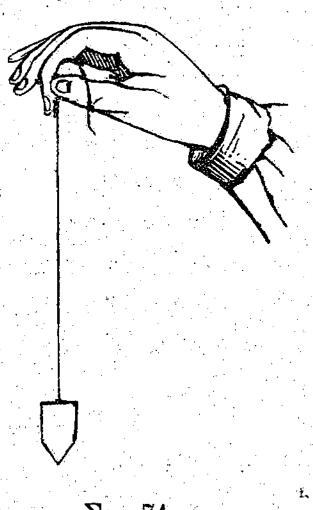
Ἡ ἀπ' εὐθείας πειραματικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τοῦ νόμου τούτου εἶναι ἀδύνατος, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ πραγματοποιήσωμεν τὰς συνθήκας ἃς προϋποθέτει οὗτος, τὴν ἐξεύρεσιν δηλαδὴ σώματος μὴ ὑποκειμένου τῇ δράσει ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως

Δὲν ὑπολείπεται οὕτω ἡμῖν εἰμὴ ἡ ἀκριβὴς παρατήρησις τῶν ὑπὸ τὰς αἰσθήσεις μας ἐξελυσσομένων διαφόρων φυσικῶν φαινομένων ἐπιγείων καὶ οὐρανίων, διὰ τῆς ἐπισταμένης ἀναλύσεως τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ **ἐπαληθεύσωμεν** ἁπλῶς, οὐχὶ δὲ καὶ ν' **ἀποδείξωμεν** τὸν θεμελιώδη τοῦτον πρῶτον νόμον τῆς κινήσεως, ὡς καὶ τοὺς λοιποὺς δύο. Οὕτω ἐν τῇ καθημερινῇ πείρᾳ βλέπομεν, καὶ παραδεχόμεθα εὐκόλως ὅτι σῶμά τι δὲν δύναται νὰ τεθῇ ἀφ' ἑαυτοῦ εἰς κίνησιν ἄνευ τῆς δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως· ὁσάκις λοιπὸν παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα μεταβαίνει ἐκ τῆς ἠρεμίας εἰς τὴν κίνησιν, δυνάμεθα ν' ἀναγάγωμεν τὴν μετάβασιν ταύτην εἰς ἀρχικήν τινα αἰτίαν, εἰς δύναμιν δρῶσαν ἐπ' αὐτοῦ

δύναμις τῆς βαρύτητος

Ἐν τῷ φαινομένῳ τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων λ. χ. παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶν σῶμα, ἀφιέμενον ἐλεύθερον καὶ ἄνευ ἀρχικῆς τινος ὠθήσεως, πίπτει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους· ὅθεν εἰκάζομεν (πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως) ὅτι ἐξωτερική τις δύναμις ἔδρα ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἔφερε τοῦτο ἐκ τῆς καταστάσεως τῆς ἠρεμίας ἐν ᾗ εὑρίσκετο εἰς κατάστασιν κινήσεως. Ἐν τῇ πτώσει αὐτοῦ τὸ σῶμα διαγράφει κατακόρυφον εὐθύγραμμον τροχιάν, ὅπου δήποτε τῆς ἐπιφανείας

τῆς γῆς καὶ ἂν ἀφεθῇ τοῦτο. Καὶ ὡς ἐκ τοῦ σφαιρικοῦ σχήματος ταύτης αἱ διάφοροι αὗται τροχιαὶ συντρέχουσιν εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς. Κατὰ συνέπειαν, *τὸ σῶμα, ἀφιέμενον ἐλεύθερον, πίπτει ἐπὶ τῆς γῆς ὡς εἰ μεταξὺ αὐτοῦ (τοῦ πίπτοντος σώματος) καὶ τῆς γῆς ἐξησκεῖτο ἑλκτική τις δύναμις φερομένη πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας τὸ σῶμα πίπτει ἐπ' αὐτῆς, ἐν ὅσῳ ἡ κίνησις αὐτοῦ δὲν ἐμποδίζεται ὑπὸ ἐξωτερικοῦ τινος προσκόμματος.* Τὴν ἑλκτικὴν ταύτην δύναμιν καλοῦμεν **βαρύτητα**, διότι εἰς ταύτην ὀφείλεται κυρίως τὸ βάρος τῶν σωμάτων· ἀποκαλύπτεται δ' αὕτη εἰς ἡμᾶς, οὐχὶ μόνον ἐκ τῆς κινήσεως τὴν ὁποίαν μεταδίδει εἰς τὰ σώματα ἀφιέμενα ἐλεύθερα ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, ἀλλὰ καὶ διὰ τῆς πιέσεως, τὴν ὁποίαν αἰσθανόμεθα κρατοῦντες βαρύ τι σῶμα, καὶ τῆς ἀντιστάσεως τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Εὐθὺς ἅμα τὸ σῶμα ἀρχίσῃ καταπίπτον, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κίνησις αὐτοῦ δὲν εἶναι ὁμοιόμορφος, ἀλλὰ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμήν, ὅθεν εἰκάζομεν (πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως), ὅτι *ἡ βαρύτης ἐξακολουθεῖ δρῶσα ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ κατὰ τὴν πτῶσιν αὐτοῦ.*



Σχ. 71.

Ἄς ἐξετάσωμεν ἤδη τὸ δεύτερον μέρος τοῦ πρώτου νόμου τῆς κινήσεως.

63. Ἀφοῦ δηλαδὴ τὸ σῶμα τεθῇ εἰς κίνησιν, ἐὰν ἡ παραγαγοῦσα ταύτην ἐξωτερικὴ αἰτία παύσῃ δρῶσα ἐπ' αὐτοῦ, τί συμβαίνει; παύει καὶ ἡ κίνησις μετὰ τῆς δράσεως τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως, ἢ ἐξακολουθεῖ τὸ σῶμα κινούμενον; καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει κατὰ ποίους νόμους ἐκτελεῖται ἡ κίνησις τοῦ σώματος; Τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος τοῦ πρώτου νόμου τῆς κινήσεως, δὲν εἶναι τόσῳ καταφανὲς ὅσῳ τὸ πρῶτον, καὶ χρήζει λεπτομερεστέρας ἀναπτύξεως, τοσούτῳ μᾶλλον, καθ' ὅσον ὡς εἴπομεν τοῦτο καὶ προηγουμένως δὲν δυνάμεθα ν' ἀπαλλάξωμεν ἐντελῶς σῶμά τι τῶν ἐπ' αὐτοῦ δρωσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἡ καθημερινὴ πεῖρα μᾶς διδάσκει, εἶναι, ὅτι, πᾶν σῶμα τιθέμενον εἰς κίνησιν διὰ τῆς δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως, ἐξακολουθεῖ κινούμενον ἔτι ἐπί τινα χρόνον καὶ ἀφοῦ παύσῃ δρῶσα ἐπ' αὐτοῦ ἡ παραγωγοῦσα τὴν κίνησιν ἐξωτερικὴ δύναμις, καὶ ἐπὶ τέλους ἐπανέρχεται ἐν τῇ ἠρεμίᾳ. Ἀλλ' ἐὰν ἀκολουθήσωμεν μετὰ προσοχῆς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, δὲν βραδύνομεν ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι τὴν εἰς τὴν ἠρεμίαν ἐπάνοδον τούτου δυνάμεθα ν' ἀναγάγωμεν εἰς δρᾶσιν τινὰ ἐξασκουμένην μεταξὺ τοῦ κινουμένου σώματος καὶ τῶν περὶ τοῦτο ἐξωτερικῶν σωμάτων, εἰς ἐξωτερικήν τινα δύναμιν. Ἡ ὕπαρξις τῆς ἐξωτερικῆς ταύτης δράσεως ἀποκαλύπτεται διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῆς ἐπὶ τῆς κινήσεως τοῦ ἐφ' οὗ δρᾷ σώματος.

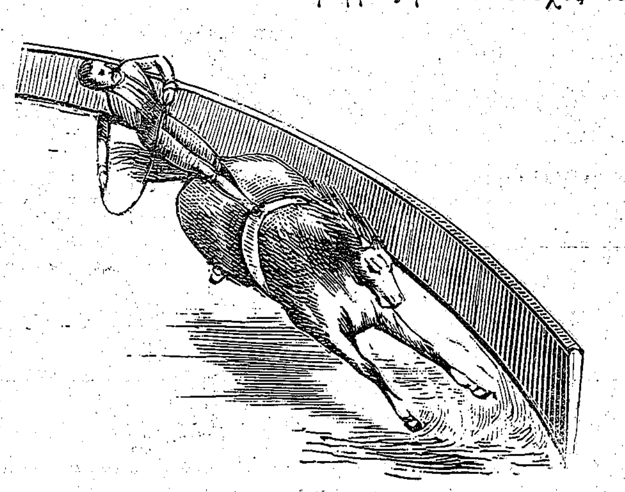
Οὕτω, λόγου χάριν, ἐὰν θεωρήσωμεν πρὸς στιγμὴν ὁριζόντειον ἐπίπεδον, συγκείμενον ἐκ κατειργασμένου καὶ λείου λίθου, καὶ δύο σφαίρας ἐκ τῆς αὐτῆς οὐσίας, τὴν μὲν κατειργασμένην καὶ λείαν, τὴν δὲ ἀκατέργαστον καὶ τραχεῖαν, καὶ ῥίψωμεν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου τὴν ἐξ ἀκατεργάστου λίθου σφαῖραν μὲ ἀρχικήν τινα ταχύτητα v, βλέπομεν, ὅτι ἐξακολουθεῖ αὕτη κυλινδουμένη ἐπί τινα χρόνον ἐπ' αὐτοῦ μὲ κίνησιν βαθμηδὸν ἐπιβραδυνομένην, καὶ ἐπὶ τέλους ἵσταται, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημά τι δ. — Ἐὰν ἤδη μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα v ῥίψωμεν καὶ τὴν ἐκ κατειργασμένου καὶ λείου λίθου σφαῖραν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου, βλέπομεν ὅτι ἐξακολουθεῖ καὶ αὕτη κυλινδουμένη ἐπί τινα χρόνον ἐπὶ ἐπιπέδου μὲ κίνησιν ἐπιβραδυνομένην βαθμηδόν, καὶ τέλος ἵσταται, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημά τι δ', τοῦ ὁποίου ὅμως τὸ μῆκος εἶναι κατὰ πολὺ μεγαλείτερον τοῦ δ. Ἡ παραγαγοῦσα τὴν κίνησιν καὶ τῶν δύο σφαιρῶν προβλητικὴ ὤθησις τῆς χειρός, εἶναι ἡ αὐτή, ἡ φύσις τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' οὗ κυλινδοῦνται εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ἐν ταῖς δύο περιπτώσεσι· πόθεν λοιπὸν προέρχεται ἡ διαφορὰ περὶ τὰ μήκη τῶν διανυθέντων διαστημάτων; προφανῶς ἐκ τῆς διαφορᾶς τὴν ὁποίαν παρουσιάζουσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν τούτων, ὧν ἡ μὲν εἶναι κατειργασμένη καὶ λεία, ἡ δὲ ἀκατέργαστος καὶ τραχεῖα. Ἡ ἐπὶ τῆς ῥιπτομένης σφαίρας δρᾶσις τῆς βαρύτητος ἐξουδετερουμένη ὑπὸ τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κινεῖται ἡ σφαῖρα, δὲν δύναται ν' ἀποκαλυφθῇ ἡμῖν ὡς κίνησις· δὲν καταστρέφεται ὅμως καὶ ὁλοτελῶς, ἀλλ' ἀναπτύσσει πίεσίν τινα μεταξὺ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου, καὶ ἐκ τῆς πιέσεως ταύτης καὶ τῆς φύσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐπιφανειῶν, ἀναπτύσσεται ἑτέρα δύναμις, ἡ τῆς *προστριβῆς*, ἥτις ἐπιβραδύνει βαθμηδὸν τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας, καὶ ἐπιφέρει τέλος τὴν πλήρη ἐπίσχεσιν αὐτῆς καὶ τὴν ἐπάνοδόν της εἰς τὴν προτέραν ἠρεμίαν. Ἐὰν ἤδη κατεργασθῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς αὐτῆς σφαίρας καὶ καταστήσωμεν αὐτὴν ὅσῳ τὸ δυνατὸν λείαν, ἢ παρεμβάλωμεν μεταξὺ ταύτης καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' οὗ κυλινδοῦται λιπαράν τινα οὐσίαν ἐλαττοῦμεν καὶ τὴν μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν ἀναπτυσσομένην δύναμιν τῆς προστριβῆς, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας τὸ σῶμα ἐπανέρχεται ἐκ νέου εἰς τὴν προτέραν ἠρεμίαν, καὶ αὐξάνομεν ἀναλόγως τὸ ὑπ' αὐτοῦ διανυόμενον διάστημα. Εἰκάζομεν λοιπὸν ἐκ τούτου ὅτι, ἐὰν μᾶς ἐπετρέπετο νὰ ἐξαφανίσωμεν ἐντελῶς τὴν ἀναπτυσσομένην ταύτην δύναμιν τῆς προστριβῆς, θὰ ἐξηκολούθει καὶ ἡ σφαῖρα κινουμένη ἐπ' ἄπειρον ὁμοιομόρφως.

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ καθημερινῇ πείρᾳ, ἀπαντῶσι πλεῖστα παραδείγματα ἐπαληθεύσεως τοῦ πρώτου τούτου νόμου τῆς κινήσεως

Ὑποθέσωμεν λ. χ. ὅτι φερόμεθα ταχέως ἐν σιδηροδρομικῇ τινι ἁμάξῃ ἐπὶ εὐθυγράμμου ὁδοῦ καὶ αἴφνης ἵσταται ἀποτόμως ἡ ἁμαξοστοιχία· ἡμεῖς φερόμενοι ἐν τῷ διαστήματι μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος, μεθ' ἧς ἐφέρετο καὶ ἡ ἁμαξοστοιχία πρὸ μικροῦ, δὲν δυνάμεθα νὰ κατάσχωμεν ἀποτόμως τὴν ὁρμὴν μεθ' ἧς προβαλλόμεθα πρὸς τὰ πρόσω κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως. **Αὐτὸ** τοῦτο συμβαίνει καὶ κατὰ τὴν ἀναχώρησιν τῆς ἁμαξοστοιχίας, ἐὰν γίνῃ αὕτη ἀποτόμως· ῥιπτόμεθα δηλαδὴ πρὸς τὰ ὀπίσω.

Ἐὰν εὑρισκόμενοι ἐν τῇ ἁμάξῃ ταύτῃ, ἧς τὴν κίνησιν ὑποθέτομεν ὁμοιόμορφον, ἀφήσωμεν νὰ πέσῃ σῶμά τι, *ἀφικνεῖται τοῦτο πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἁμάξης, οἵα δήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ταχύτης μεθ' ἧς φέρεται αὕτη*· κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πτώσεως τὸ σῶμα δὲν συμμετέχει τῆς κινήσεως τῆς ἁμάξης, *διατηρεῖ* ὅμως τὴν ταχύτητα ἣν ἐκέκτητο πρὸ μικροῦ, ὅτε ἐκρατοῦμεν τοῦτο ἀνὰ χεῖρας, καὶ κινεῖται ὄχι μόνον πρὸς τὰ κάτω ὡς ἐκ τῆς βαρύτητός του, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὰ πρόσω ὡς ἐκ τῆς διατηρήσεως τῆς προτέρας αὐτοῦ ταχύτητος.

64. Ἐὰν ἡ ἁμαξοστοιχία ἐξακολουθῇ κινουμένη μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ συναντήσῃ καθ' ὁδὸν καμπύλην τινά, ἣν ἀναγκάζεται ν' ἀκολουθήσῃ, μεταβάλλει αὕτη ἁπλῶς τὴν φορὰν τῆς ταχύτητός της. Ὡς ἐκ τῆς μεταβολῆς δὲ ταύτης ὁλόκληρος ἡ ἁμαξοστοιχία, τείνουσα ν' ἀκολουθήσῃ τὴν προτέραν αὐτῆς εὐθύγραμμον τροχιάν, ἐξασκεῖ διὰ τῶν ὀνύχων τῶν τροχῶν ἰσχυροτάτην πίεσιν ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς σειρᾶς τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων· ὅθεν καὶ ἡ ἐκ τῆς προστριβῆς φθορὰ τοῦ ἐλάσματος καὶ τοῦ ἐπὶ τούτου ἐφαρμοζομένου ὄνυχος τοῦ τροχοῦ. Ἡ πρὸς τὰ ἔξω ὤθησις αὕτη τῆς ἁμαξοστοιχίας, ὡς ἐκ τῆς συνήθους παρὰ τοῖς σιδηροδρόμοις ταχύτητος, δύναται νὰ εἶναι τόσῳ βιαία, ὥστε νὰ ἐπιφέρῃ καὶ τὴν ἐντελῆ ἐκτροχίασιν αὐτῆς· ἕνεκα τούτου οἱ μηχανικοὶ ἐν ταῖς καμπύλαις ἀνυψοῦσι τὸ ἐξωτερικὸν ἔλασμα τῆς γραμμῆς καὶ ἐξουδετεροῦσιν οὕτω τὴν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς ἁμάξης πίεσιν, ἣν καλοῦσι καὶ *φυγόκεντρον δύναμιν*, διὰ τῆς δράσεως τῆς βαρύτητος κατὰ τὴν ὁριζόντειον φοράν· ἀλλὰ καὶ οἱ ἐν τῇ ἁμάξῃ εὑρισκόμενοι ἐπιβάται, κατὰ τὴν εἴσοδον ταύτης ἐν τῇ καμπύλῃ, τείνοντες ν' ἀκολουθήσωσι τὴν εὐθύγραμμον τροχιὰν ἣν διέγραφον πρὸ μικροῦ, ῥίπτονται ἀποτόμως πρὸς τὰ ἔξω τῆς καμπύλης.



Σχ. 72.

φυγόκεντρος δύναμις

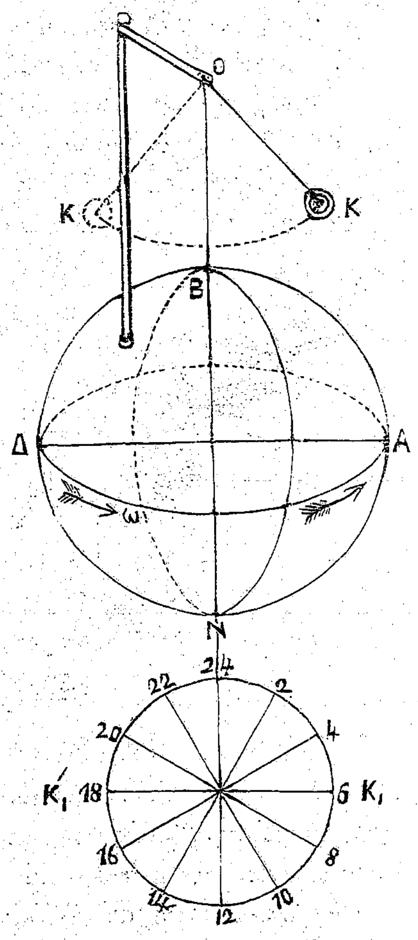
Αὐτὸ τοῦτο παρατηροῦμεν καθ' ἑκάστην καὶ ἐν τοῖς ἱπποδρομίοις κατὰ τὴν κυκλικὴν κίνησιν τοῦ ἵππου, ἔνθα οὗτος μετὰ τοῦ ἱππέως κλίνοντες πρὸς τὰ ἔσω τοῦ ἱπποδρομίου ἐξουδετεροῦσι τὴν δύναμιν, ἥτις ὠθεῖ τούτους πρὸς τὰ ἔξω διὰ τῆς ἀντιδράσεωςτῆς τροχιᾶς, ἥτις, συνδυαζομένη μετὰ τῆς βαρύτητος, ἐξουδετεροῖ τὴν ὠθοῦσαν τούτους πρὸς τὰ ἔξω φυγόκεντρον δύναμιν.

65. Ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς τὸ στόμιον φρέατος μεγάλου βάθους h οἷα ἀπαντῶμεν ἐν τοῖς μεταλλείοις, καὶ κρατοῦμεν ἀνὰ χεῖρας σῶμά τι. Ὡς ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονά της στροφῆς τῆς γῆς, τὰ περὶ τὸ στόμιον τοῦ φρέατος σώματα κέκτηνται ταχύτητα ωa πρὸς ἀνατολὰς [ἔνθα ω εἶναι ἡπεριστροφικὴ ταχύτης τῆς γῆς καὶ a ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου τοῦ στομίου τοῦ φρέατος]. Ὡς ἐκ τῆς αὐτῆς περιστροφῆς τὰ εἰς τὸ βάθος τοῦ φρέατος σώματα κέκτηνται ταχύτητα ωb πρὸς ἀνατολὰς ἐπίσης. Κατὰ τὴν διάρκειαν t τῆς πτώσεως ἀπὸ τοῦ στομίου μέχρι τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος, τὸ πίπτον σῶμα ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς πρὸς ἀνατολὰς ταχύτητός του διανύει κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διάστημα ωat ἐνῷ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ τὰ ἐν τῷ πυθμένι σώματα διήνυσαν διάστημα ωbt· τὸ πίπτον σῶμα διατηροῦν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητά του παρεκκλίνει λοιπὸν πρὸς ἀνατολὰς τῆς κατακορύφου κατὰ διάστημα $\omega t\,(a-b)$. **Π**ειράματα γενόμενα εἰς τὰ μεταλλεῖα τοῦ Freyberg ὑπὸ τοῦ μηχανικοῦ Reech ἀπὸ ὕψους 158,5 μέτρων καὶ ὑπὸ γεωγραφικὸν πλάτος 51^0 ἔδωκαν παρέκκλισιν 0,0276 πρὸς ἀνατολάς· ἀποδείκνυται δὲ οὕτω καὶ ἡ περὶ τὸν ἄξονά της στροφὴ τῆς γῆς.

ἐκκρεμὲς τοῦ **Foucault**

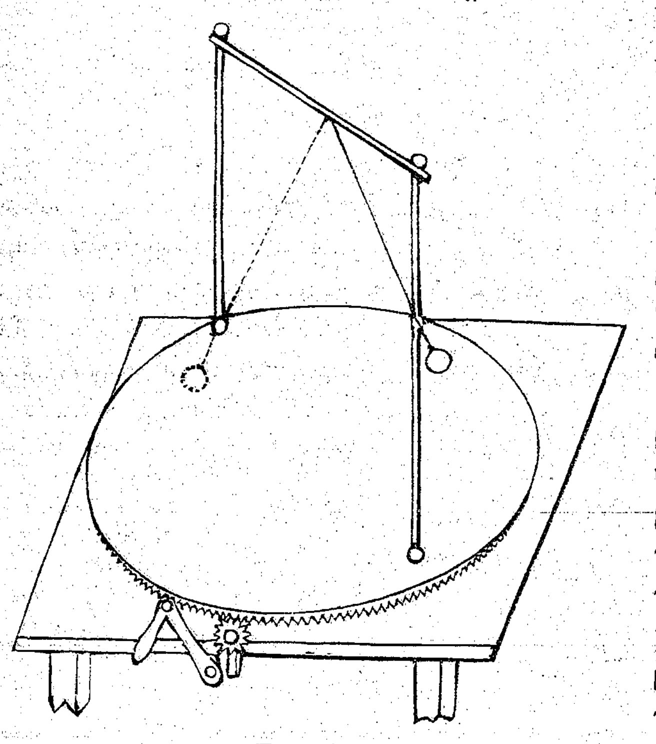
66. Ἑτέραν ἐπαλήθευσιν τῆς ἀνικανότητος ἐν ᾗ εὑρίσκεται σῶμά τι νὰ μεταβάλῃ ἀφ' ἑαυτοῦ τὴν κίνησίν του εὑρίσκομεν ἐν τῷ περιφήμῳ πειράματι δι' οὗ ὁ Leon Foucault κατέστησε πασιφανῆ τὴν περὶ τὸν ἄξονά της περιστροφικὴν κίνησιν τῆς γῆς.

»Ὑποθέσωμεν λέγει ὁ διάσημος οὗτος φυσικὸς παρατηρητὴν εὑρισκόμενον εἰς τὸν πόλον τῆς γῆς, ἔνθα ὑπάρχει ἐκκρεμὲς K ἀνηρτημένον ἀπὸ σταθεροῦ τινος σημείου O κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος περὶ ὃν στρέφεται ἡ γῆ. Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ ἐκκρεμὲς ἐκ τῆς κατακορύφου μεθ' ἧς ἤδη συμπίπτει, καὶ ἀφήσωμεν τοῦτο νὰ καταπέσῃ ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος χωρὶς νὰ τῷ μεταδώσωμεν πλαγίαν τινα ὤθησιν, τὸ σῶμα διέρχεται καὶ πάλιν διὰ τῆς κατακορύφου,



Σχ. 73.

ὅθεν ὡς ἐκ τῆς κτηθείσης ταχύ-τητος ἀνέρχεται πρὸς τὴν ἀντίθετον ταύτης πλευρὰν εἰς ὕψος σχεδὸν ἴσον ἐκείνῳ ὅθεν κατῆλθε. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ ταχύτης μηδενίζεται, ἀλλάσσει φορὰν καὶ κατέρχεται ἐκ νέου τὸ σῶμα διὰ ν' ἀνέλθῃ καὶ πάλιν εἰς τὸ σημεῖον ὅθεν ἀνεχώρησε, καὶ ἐξακολουθεῖ οὕτω αἰωρούμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ K0K χωρὶς νὰ δύναται νὰ ἐξέλθῃ τούτου (ὡς ἐκ τοῦ ἄνω πρώτου νόμου τῆς κινήσεως). Ἡ γῆ ἐν τούτοις στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της BN ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς καὶ μετ' αὐτῆς ὁ παρατηρητής, ὡς ἐκ τῆς περιστροφικῆς δὲ ταύτης πρὸς ἀνατολὰς κινήσεως βλέπει οὗτος τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἴχνος τοῦ ἀκινήτου ἐν τῷ διαστήματι ἐπιπέδου στρεφόμενον πρὸς δυσμὰς μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα ἴσην τῇ τῆς γῆς ω καὶ διαγράφον γωνίαν 360^0 ἐν διαστήματι 24 ὡρῶν. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ πόλου ἐκτελέσωμεν τὰ πειράματά μας ἀλλαχοῦ ὑπὸ γεωγραφικὸν πλάτος λ, ἡ κατακόρυφος δὲν μένει πλέον ἀκίνητος ὡς ἐν τῷ πόλῳ, ἀλλὰ διαγράφει κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἐνῷ τὸ ἐπίπεδον τῆς αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς στρέφεται περὶ ταύτην ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα ωἡμλ.


Σχ. 74.

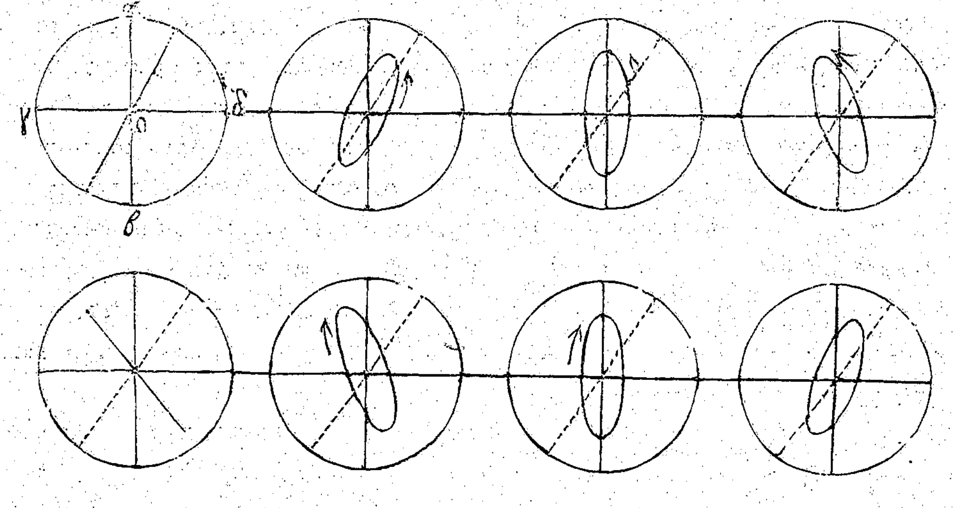
Τὸ πείραμα δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ διὰ τῆς ἐν τῷ ἔναντι σχήματι ἐμφαινομένης συσκευῆς, ἔνθα θέτοντες εἰς περιστροφικὴν κίνησιν τὸ σύστημα δι' οὗ τὸ ἐκκρεμὲς εἶναι ἀνηρτημένον, βλέπομεν τὸ ἀμετάβλητον τοῦ ἐπιπέδου τῆς αἰωρήσεως.

67. Ἕτερον ἀξιοπερίεργον πείραμα ἐκτελεσθὲν ὑπὸ τοῦ ἰδίου **Foucault**, ὅπερ μάλιστα τῷ ἔδωκε τὴν ἰδέαν τοῦ προηγουμένου πειράματος, καὶ ἐν ᾧ καταφαίνεται ἡ ἀλήθεια τοῦ πρώτου νόμου τῆς κινήσεως εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς.

Ἔλαβεν οὗτος στρογγύλον χαλύβδινον σύρμα 2 χιλιοστομέτρων διαμέτρου καὶ 20 ἑκατοστομέτρων μήκους, ὅπερ ἐφήρμοσε στερεῶς ἐπὶ σιδηρᾶς ῥάβδου δυναμένης καὶ ταύτης νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τόρνου, οὕτως ὥστε ὁ ἄξων τοῦ χαλυβδίνου στρώματος νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τόρνου, οὗτινος ἡ προβολὴ συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου 0 τοῦ κάτωθι σχήματος· ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ σύρμα ἐκ τῆς θέσεως ἣν κατέχει καθ' ὡρισμένην [1] φορὰν καὶ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, αἰω-

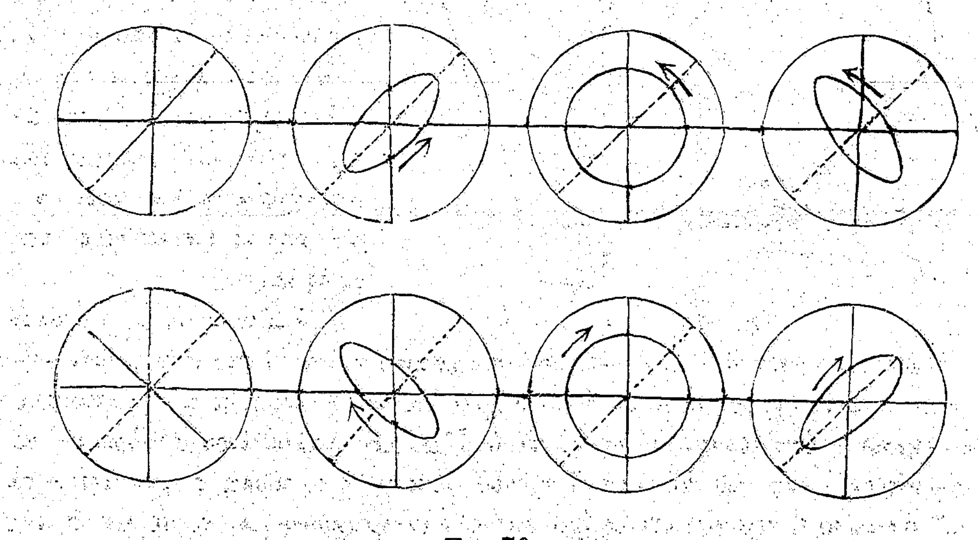
Σημειωσις. Λέγομεν καθ' ὡρισμένην φοράν, διότι ἐὰν εἶναι αὕτη οἵα δήποτε, τὸ ρεῖται τοῦτο, οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον αὐτοῦ ὅπερ καθιστῶμεν καταφανὲς διὰ φαεινοῦ τινος σημείου, διαγράφει τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου αϐ ἔνθα τὸ διὰ

ἄκρον τοῦ σύρματος ἐν τῇ αἰωρήσει τούτου, διαγράφει ἐν γένει ἐλλειπτικὴν τροχιὰν ἧς ὁ ἄξων στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον 0, αὕτη δὲ διαβαίνει διὰ τῶν ἐν τοῖς κάτωθι σχήμασιν ἐμφαινομένων φάσεων, αἵτινες εἰσὶ συμμε-



Σχ 75.

τρικαὶ ὡς πρὸς τὰς καθέτους ἀλλήλαις διαμέτρους αϐ καὶ γδ. Ἐὰν τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον τῆς αἰωρήσεως συμπίπτῃ μὲ μίαν τῶν διαμέτρων τούτων, μένει τοῦτο ἀμετάβλητον. Ἐὰν τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον τῆς αἰωρήσεως συμπίπτῃ μετὰ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τῶν διαμέτρων τούτων(τῆς εὐσταθοῦς αἰωρήσεως), ὁ ἄξων τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς δὲν στρέφεται, διότι δὲν ὑπάρχει λόγος, ὅπως στραφῇ οὗτος πρὸς τὴν οα ἢ τὴν οδ διάμετρον, ἀλλ' ἡ τροχιὰ μεταβάλλεται, διερχομένη διὰ τῶν ἐν τοῖς κάτωθι διαγράμμασιν



Σχ. 76.

ἐμφαινομένων φάσεων. Διὰ πλείονας λεπτομερείας ἴδε **Recueil des travaux scientifiques de Leon Foucault** σελὶς 392.

τοῦ ἄξονος τοῦ σύρματος καὶ τῆς διαμέτρου ταύτης ὁριζόμενον ἐπίπεδον τῆς αἰωρήσεως μένει σταθερόν. Ἐὰν ἤδη θέσωμεν τὸν τόρνον εἰς περιστροφικὴν κίνησιν συμμετέχει ταύτης καὶ τὸ σῦρμα, ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον τῆς αἰωρήσεως μένει ἀμετάβλητον, καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ σύρματος διαγραφομένη εὐθεῖα μένει σταθερὰ καὶ ἀκίνητος ἐν τῷ διαστήματι, ὡς ἀπαιτεῖ τοῦτο ὁ πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως.

68. Ἀλλὰ μήπως αὐτὴ ἡ περιστροφικὴ κίνησις τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της δὲν μᾶς παρέχει παράδειγμα ἀρκούντως πειστικὸν περὶ τῆς ἀνικανότητος εἰς ἣν εὑρίσκεται σῶμά τι νὰ μεταβάλῃ ἀφ' ἑαυτοῦ τὴν κίνησιν, ἣν τῷ μετέδωκεν ἀρχικῶς ἡ δρᾶσις ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως; ἀφ' ὅτου τῷ ὄντι πρὸ χρόνου πολλοῦ ἤρχισεν ὁ ἄνθρωπος παρατηρῶν τὴν ὁμοιόμορφον περιστροφικὴν ταύτην κίνησιν, δὲν ἠδυνήθη ν' ἀνακαλύψῃ οὐδὲ τὴν ἐλαχίστην ἀλλοίωσιν αὐτῆς ἐκ τούτου δὲ καὶ ἐλήφθη αὕτη πρὸς καταμέτρησιν τοῦ χρόνου.

69. Ὁ πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως ὡς διετυπώθη οὗτος ἀνωτέρω ὑποθέτει ὅτι οὐδεμία ἐξωτερικὴ δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος· τοῦτο ὅμως οὐδέποτε δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ ἐν τῇ φύσει, ὅπου τὰ σώματα καί τοι εὑρισκόμενα ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἐμμένουσιν ἐνίοτε εἰς τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ ὁμοιομόρφου κινήσεως· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν, ὅτι **αἱ ἐπὶ τῶν σωμάτων δρῶσαι δυνάμεις ἰσορροποῦσιν,** ἐξουδετεροῦσαι ἀμοιβαίως τὰς ἐπὶ τῶν θεωρουμένων σωμάτων δράσεις αὐτῶν καὶ ἰσοδυναμοῦσαι πρὸς τὴν ἔλλειψιν πάσης δυνάμεως. Ὡς ἐκ τούτου διατυποῦμεν ἀκριβέστερον τὸν πρῶτον νόμον τῆς κινήσεως λέγοντες· ἰσορροπία τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος δρωσῶν δυνάμεων

Ἡ σχετικὴ κίνησις δύο σωμάτων, ὧν ἑκάτερον ὑπόκειται τῇ δράσει ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἰσορροπουσῶν, εἶναι ὁμοιόμορφος ἢ ἴση τῷ μηδενὶ (τὰ σώματα δηλαδὴ εὑρίσκονται ἐν σχετικῇ ἠρεμίᾳ).

Συνοψίζοντες ἤδη τὰ προλεχθέντα βλέπομεν, ὅτι

Σῶμά τι δὲν δύναται νὰ τεθῇ ἀφ' ἑαυτοῦ εἰς κίνησιν, ἐὰν ἠρεμῇ. Ἵνα τοῦτο τεθῇ εἰς κίνησιν, δέον νὰ ἐπενεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ ἐξωτερικόν τι αἴτιον, ὅπερ καλοῦμεν δύναμιν.

Ἐν ὅσῳ ἡ θέσασα τὸ σῶμα εἰς κίνησιν δύναμις ἐξακολουθεῖ δρῶσα ἐπὶ τούτου, ἐξακολουθεῖ καὶ τὸ σῶμα κινούμενον μὲ ταχύτητα μεταβαλλομένην, μέχρις οὗ παύσει ἡ δρᾶσις τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως.

Τότε ὅμως τὸ σῶμα δὲν ἐπανέρχεται εἰς τὴν προτέραν ἠρεμίαν του, ἀλλ' ἐξακολουθεῖ κινούμενον ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς μὲ τὴν *ταχύτητα, ἣν ἐκέκτητο, ἅμα ἔπαυσε δρῶσα ἡ ἐπιφέρουσα τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος δύναμις.*

Ὥστε ὁσάκις σῶμά τι κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς, ἢ συντομώτερον ὁσάκις τοῦτο κινεῖται ὁμοιομόρφως, οὐδεμία ἐξωτερικὴ δύναμις δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ· οὕτω αἱ δυνάμεις δέον νὰ θεωρηθῶσιν οὐχὶ μόνον ὡς τὰ ἀρχικὰ αἴτια τὰ φέροντα τὰ σώματα ἐκ τῆς ἠρεμίας εἰς τὴν κίνησιν, ἀλλὰ πρὸ πάντων (διότι σώματα ἀπολύτως ἠρεμοῦντα ἐν τῇ φύσει δὲν γνωρίζομεν) *ὡς τὰ αἴτια τὰ μεταβάλλοντα τὴν κίνησιν τούτων, τὰ ἀρχικὰ δηλαδὴ αἴτια εἰς ἃ ὀφείλονται αἱ ἐπιταχύνσεις· ὥστε ὁσάκις ἡ κίνησις τοῦ σώματος μεταβάλλεται, ὁσάκις δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις δὲν μηδενίζεται, τὸ σῶμα εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεώς τινος.*

70. Ἐκ τοῦ πρώτου νόμου τῆς κινήσεως γνωστοῦ καὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα: *ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας τῆς ὕλης*: ἀρυόμεθα ἕτερον ὁρισμὸν σαφέστερον (ἐὰν ἐπιτρέπηται ἡ λέξις αὕτη διὰ πράγματα τῶν ὁποίων ἡ ἀρχικὴ φύσις μᾶς εἶναι ἐντελῶς ἄγνωστος) τῆς δυνάμεως, θεωροῦντες ταύτην ὡς

Τὸ αἴτιον, ὅπερ ἐπιφέρει ἢ τείνει ἁπλῶς νὰ ἐπιφέρῃ μεταβολήν τινα, ἐν τῇ καταστάσει τῆς ἠρεμίας ἢ ὁμοιομόρφου κινήσεως τῶν σωμάτων.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος μᾶς καθιστᾷ εὐκολωτέραν καὶ τὴν πρὸς ἀλλήλας παραβολὴν τῶν ἀμοιβαίων δράσεων τῶν σωμάτων, ἃς ἐκαλέσαμεν δυνάμεις, διὰ τῆς παραβολῆς τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολάς, ἃς ἐπιφέρουσιν ἐν τῇ κινήσει τῶν σωμάτων.

Ἴσαι δυνάμεις

71. Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἰδιότητες τῆς ὕλης εἶναι μόνιμοι ἐν τῷ διαστήματι καὶ τῷ χρόνῳ, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς **ἴσας τὰς δυνάμεις ἐκείνας αἵτινες, δρῶσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι, ἐπιφέρουσι τὴν αὐτὴν γεωμετρικὴν μεταβολὴν (§ 13) ἐν τῇ ταχύτητι αὐτοῦ.**

Τὴν μεταξὺ τῆς μεταβολῆς ταύτης τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος καὶ τῆς δυνάμεως ὑφισταμένην σχέσιν μᾶς διδάσκει ὁ

Δεύτερος νόμος τῆς κινήσεως

ὃν διετύπωσεν ὁ Νεύτων οὕτω·

Ἡ μεταβολή, ἣν ὑφίσταται ἡ ποσότης κινήσεως τοῦ σώματος, εἶναι ἀνάλογος καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὴν ὤθησιν τῆς παραγαγούσης ταύτην ἐξωτερικῆς δυνάμεως.

Ἵνα ὁ νόμος οὗτος καταστῇ καταληπτὸς δέον νὰ ὁρίσωμεν ἀκριβῶς τὴν πρῶτον ἤδη ἀπαντῶσαν φράσιν «*ποσότης κινήσεως τοῦ σώματος*», ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς φέρεται τὸ σῶμα, καὶ ἑτέρου τινὸς δυναμικοῦ στοιχείου, ὅπερ καλοῦσι «*μᾶζαν*» τοῦ σώματος, καὶ τὸ ὁποῖον δέον νὰ ὁρίσωμεν ἐπίσης σαφῶς.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει βλέπομεν, ὅτι ὁ νόμος οὗτος ὁρίζει τὰ ἀποτελέσματα τῶν δράσεων τῶν δυνάμεων ἐπὶ τῶν σωμάτων, καὶ θὰ διακρίνωμεν ἐν αὐτῷ δύο μέρη, ὧν,

τὸ πρῶτον σχετίζεται μὲ τὴν δρᾶσιν μιᾶς μόνης δυνάμεως ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ

τὸ δεύτερον μὲ τὰς συνθήκας, ὑφ' ἃς πλείονες δυνάμεις δρῶσι συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος

Ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς δράσεως τῆς δυνάμεως, ἀπὸ τῆς ταχύτητος ἣν κέκτηται ἤδη τὸ ἐφ' οὗ δρᾷ σῶμα.

72. Ἐν τῷ δευτέρῳ νόμῳ τῆς κινήσεως, οἷον διετυπώσαμεν τοῦτον ἀνωτέρω, δὲν ἐλάβομεν ποσῶς ὑπ' ὄψιν τὴν κατάστασιν ἀπολύτου ἠρεμίας (ἥτις ἐν τῇ πραγματικότητι εἶναι ἀδύνατος) ἢ ὁμοιομόρφου κινήσεως τοῦ σώματος, ἀλλ' ἁπλῶς τὴν μεταβολήν, ἣν ὑφίσταται ἡ κίνησις αὐτοῦ· **ὑποθέτομεν** *λοιπὸν τὴν μεταβολὴν ταύτην ἀνεξάρτητον τῆς ἀρχικῆς κινήσεως μεθ' ἧς φέρεται τὸ σῶμα καθ' ἣν στιγμὴν ἄρχεται ἡ δρᾶσις τῆς δυνάμεως ὡς ἐκ τῆς ὁποίας μεταβάλλεται ἡ κίνησις τοῦ σώματος.*

Οὕτω ἐὰν ὡρισμένη δύναμις δρᾷ ἐπὶ ὡρισμένου σώματος μεταβάλλει τὴν ταχύτητά του, καὶ *ἡ ἐπακολουθοῦσα ἐπιτάχυνσις εἶναι ἡ αὐτὴ οἵα δήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ταχύτης μεθ' ἧς ἐφέρετο ἤδη τὸ σῶμα, καθ' ἣν στιγμὴν ἐπῆλθεν ἡ δρᾶσις τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως*· τοῦτο δ' ἐκφράζομεν λέγοντες.

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπὶ τῶν σωμάτων δράσεως τῶν δυνάμεων εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς παρούσης κινήσεως τούτων.

ἢ ἄλλως· *θεωρήσωμεν ὑλικόν τι σύστημα, οὗτινος τὰ διάφορα μόρια φέρονται μὲ ταχύτητας ἴσας καὶ παραλλήλους· πᾶσα δύναμις δρῶσα αἰφνηδίως ἐπὶ ἑνὸς τῶν ἀποτελούντων τὸ σύστημα μορίων ἀλλοιοῖ τὴν σχετικὴν κίνησιν τούτου ὡς πρὸς τὸ σύστημα μεθ' οὗ ἐφέρετο· ἡ ἐπερχομένη δ' ἀλλοίωσις εἶναι ἡ αὐτὴ μ' ἐκείνην, ἣν θὰ ὑφίστατο ἐν τῇ κινήσει του τὸ μόριον, ἐὰν τὸ σύστημα καὶ τὸ μετὰ τούτου* *φερόμενον ὑλικὸν σημεῖον εὑρίσκοντο ἐν καταστάσει ἠρεμίας καθ' ἣν στιγμὴν ἐπῆλθεν ἡ δρᾶσις τῆς δυνάμεως.*

73. Πλεῖστα ὅσα παραδείγματα ἀπαντῶσιν ἐν τῇ καθημερινῇ πείρᾳ ἐπαληθεύοντα τὴν ἀρχὴν ταύτην, ἧς ἡ πρώτη ἰδέα ὀφείλεται τῷ μεγάλῳ Γαλιλαίῳ.

Ὑποθέσωμεν λ. χ. ὅτι φερόμεθα ἐν πλοίῳ κινουμένῳ καὶ ῥίπτομεν ὁριζοντίως ἐπὶ τοῦ καταστρώματος κατὰ τὴν διεύθυνσιν καθ' ἣν φέρεται τὸ πλοῖον σῶμά τι· ἡ ὡς πρὸς τὸ πλοῖον σχετικὴ κίνησις τοῦ ῥιφθέντος σώματος εἶναι ἡ αὐτή, οἵα δήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου, ἧς συμμετέχει καὶ τὸ ῥιφθὲν σῶμα· ἡ ἐπενέργεια τῆς ὠθήσεως δι' ἧς ἐρρίφθη τὸ σῶμα εἶναι οὕτω ἀνεξάρτητος τῆς ἀρχικῆς ὁριζοντείου ταχύτητος μεθ' ἧς ἐφέρετο τοῦτο συμμετέχον τῆς κινήσεως τοῦ πλοίου.

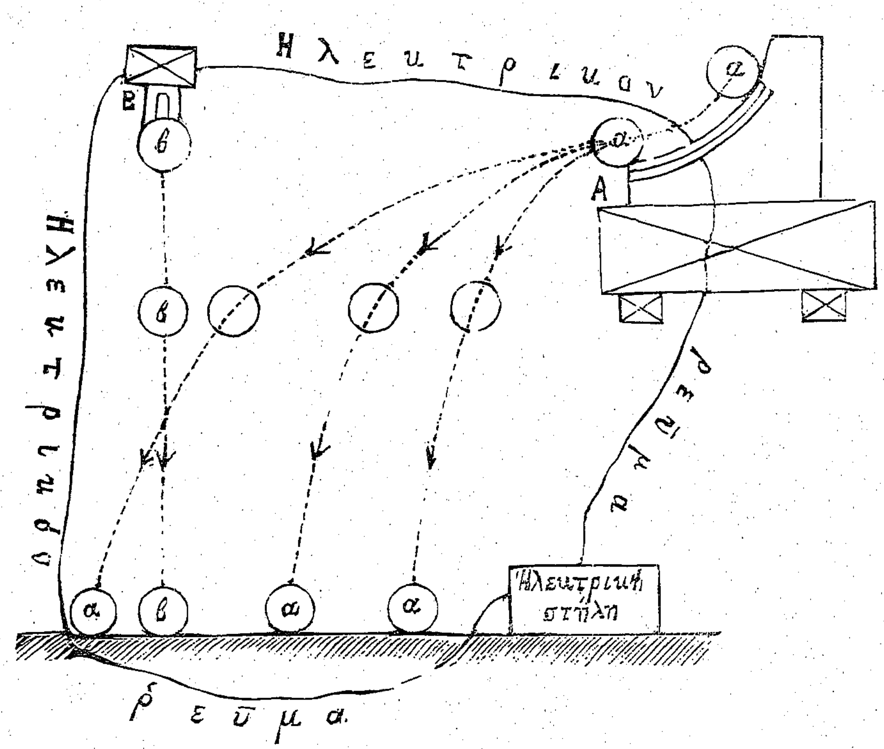
Ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι εὑρισκόμεθα ἐν κιβωτίῳ ἑτοίμῳ πρὸς κατάβασιν ἔν τινι φρέατι, οἷα τὰ ἐν τοῖς μεταλλείοις ἀπαντῶντα· ἐν ὅσῳ τὸ κιβώτιον εὑρίσκεται εἰσέτι ἐν ἠρεμίᾳ, ἀφίνομεν λίθον νὰ καταπέσῃ, καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι κρούει οὗτος τὸν πυθμένα τοῦ κιβωτίου μετὰ παρέλευσιν ἑνὸς δευτερολέπτου· τὸ κιβώτιον ἤρξατο ἤδη κατερχόμενον ἐν τῷ φρέατι μὲ ταχύτητα οἵαν δήποτε, μεθ' ἧς φέρονται καὶ τὰ ἐν αὐτῷ σώματα· ἐὰν ἀφήσωμεν ἐκ νέου νὰ καταπέσῃ τὸν αὐτὸν λίθον ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ ἤδη μετὰ παρέλευσιν ἑνὸς δευτερολέπτου κρούει οὗτος τὸν πυθμένα τοῦ κιβωτίου· ἡ δρᾶσις τῆς βαρύτητος ἐπὶ τοῦ πίπτοντος σώματος εἶναι λοιπὸν ἡ αὐτὴ ὡς καὶ προηγουμένως, ὅτε τὸ σῶμα εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ παρὰ τῷ στομίῳ τοῦ φρέατος, ἀνεξάρτητος δηλαδὴ τῆς κατακορύφου ταχύτητος τοῦ κατερχομένου κιβωτίου, ἧς συμμετέχει καὶ τὸ σῶμα.

Ἐὰν ἤδη ἀντὶ νὰ ὑποθέσωμεν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τῆς αὐτῆς μὲ τὴν ὤθησιν τῆς δυνάμεως φορᾶς, ὑποθέσωμεν ταύτας καθέτους ἀλλήλαις, ὡς συμβαίνει τοῦτο ὅταν, ἱστάμενοι ἐπὶ τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου τοῦ ἱστοῦ κινουμένου πλοίου, ἢ ἐν ἁμάξῃ κινουμένῃ ἐπὶ ὁριζοντείας γραμμῆς, ἀφήσωμεν σῶμα, ὅπερ κρατοῦμεν ἀνὰ χεῖρας νὰ καταπέσῃ ἐλευθέρως, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα κρούει τὸ κατάστρωμα τοῦ πλοίου ἢ τὸν πυθμένα τῆς ἁμάξης εἰς τὸ αὐτὸ πάντοτε σημεῖον, οἵα δήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ταχύτης μεθ' ἧς φέρεται τὸ πλοῖον ἢ ἡ ἅμαξα· ὅθεν εἰκάζομεν, ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ πίπτοντος σώματος κατακόρυφος δρᾶσις τῆς βαρύτητος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ὁριζοντείου ταχύτητος τοῦ πλοίου ἢ τῆς ἁμάξης, ἧς συμμετεῖχε καὶ τὸ σῶμα ἀρχικῶς, ὅτε ἐκρατοῦμεν τοῦτο ἀνὰ χεῖρας.

Ἐὰν ἐπὶ ἠρεμοῦντος ἐδάφους εὑρισκόμενοι κρατῶμεν ἀνὰ χεῖρας δύο λίθους καὶ ῥίψωμεν τὸν μὲν ὁριζοντείως μεθ' οἱασδήποτε ἀρχικῆς ταχύτητος, τὸν δὲ κατακορύφως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, οἱ δύο οὗτοι λίθοι κρούουσι συγχρόνως τὸ ἔδαφος.

Ἀκριβέστερον ἀποδεικνύεται τοῦτο διὰ τῆς ἔναντι συσκευῆς, ἐν ᾗ σφαῖρά τις α ῥίπτεται ἀπὸ τοῦ σημείου Α μὲ ἀρχικήν τινα ὁριζόντειον ταχύ

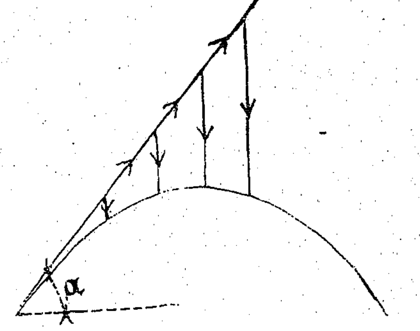
τητα· κατὰ τὴν αὐτὴν δὲ στιγμήν, χάρις εἰς τὴν διακοπὴν τοῦ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου Β ἐπενεργοῦντος ἠλεκτρικοῦ ῥεύματος, ἑτέρα σφαῖρα β πίπτει κατακορύφως ἐκ τοῦ αὐτοῦ μὲ τὴν πρώτην ὕψους, καὶ βλέπομεν ὅτι αἱ δύο αὗται σφαῖραι κρούουσι συγχρόνως τὸ ἔδαφος.



Σχ. 77.

Ἡ ἐπὶ τοῦ πίπτοντος σώματος κατακόρυφος δρᾶσις τῆς βαρύτητος εἶναι οὕτω ἀνεξάρτητος τῆς ἀρχικῆς ὁριζοντείου ταχύτητος μεθ' ἧς φέρεται τοῦτο.

Ἐὰν ἤδη τὸ σῶμα δὲν ἀφεθῇ ἁπλῶς, ἀλλὰ ῥιφθῇ οὐχὶ πλέον ὁριζοντείως ἀλλὰ λοξῶς ὑπὸ κλίσιν α καὶ μὲ ἀρχικὴν ὤθησιν, ἥτις μεταδίδει εἰς αὐτὸ ἀρχικήν τινα ταχύτητα κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καταπίπτον τοῦτο δὲν διαγράφει πλέον κατακόρυφον εὐθύγραμμον τροχιάν. Τὸ σῶμα κέκτηται τῷ ὄντι τὴν ταχύτητα v_0 τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως τῆς προβολῆς, τὴν ὁποίαν *διατηρεῖ* (πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως) ***ἀνεπηρέαστον ἀπὸ τῆς ἐπελθούσης δράσεως τῆς βαρύτητος.*** Ὡς ἐκ τούτου τὸ σῶμα μετατοπίζεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος μὲ ταχύτητα v_0 καὶ κατακορύφως μὲ ταχύτητα gt, διαγράφον δευτεροβάθμιον παραβολήν, κέκτηται δὲ ἡ κίνησις τοῦ σώματος ὅλας τὰς ἰδιότητας, ἃς εὕρομεν προηγουμένως '27).



Σχ. 77.

Ἐπίσης καταφανὲς εἶναι δι' ἡμᾶς, ὅτι ἡ περὶ τὸν ἄξονά της στροφὴ τῆς γῆς καὶ ἡ μεταβατικὴ κίνησις, ἣν κέκτηται αὕτη ἐν τῷ διαστήματι, δὲν ἐπηρεάζουσι ποσῶς τὰς ἐπὶ τῶν σωμάτων δράσεις τῶν δυνάμεων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, αἵτινες προσπίπτουσιν εἰς τὰς αἰσθήσεις μας. Ὡς ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς γῆς λ. χ. τὰ παρὰ τὸν ἰσημερινὸν εὑρισκόμενα σώματα φέρονται μὲ ταχύτητα μείζονα τῶν 460 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον, ἥτις ἐλαττουμένη βαθμηδὸν μέχρι τῶν πόλων μηδενίζεται παρὰ τοῖς σημείοις τούτοις ἔνθα τὰ σώματα ἠρεμοῦσιν ἐντελῶς· καὶ ὅμως ἐὰν ὡρισμένη τις δύναμις, δρῶσα ἐπὶ σώματος κειμένου παρὰ τὸν ἰσημερινόν, ἐπιφέρῃ μεταβολήν τινα ἐν τῇ καταστάσει κινήσεως τούτου, τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα παρατηρεῖται ὅτι ἐπιφέρει ἡ αὐτὴ δύναμις δρῶσα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος εὑρισκομένου παρὰ τὸν πόλον.

Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ταχύτης τῆς γῆς κατὰ τὴν ἐν τῷ διαστήματι μεταβατικὴν αὐτῆς κίνησιν, εἶναι διάφορος ἐν ταῖς διαφόροις ὥραις τοῦ ἔτους· καὶ ὅμως τά ἐπὶ ὡρισμένου τινὸς σημείου τῆς γῆς σώματα, τὴν αὐτὴν πάντοτε ὑφίστανται μεταβολὴν ἐν τῇ κινήσει των, ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτῶν δράσεως ὡρισμένης τινὸς δυνάμεως, ἀνεξαρτήτως τῆς ὥρας τοῦ ἔτους ἐν ᾗ θεωροῦμεν ταύτην.

74. Παραδεχόμενοι οὕτω, ὅτι *ἡ δρᾶσις δυνάμεώς τινος ἐπὶ τοῦ σώματος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς κινήσεως μεθ' ἧς ἤδη φέρεται τοῦτο, συμπεραίνομεν* ὅτι **καὶ αἱ ἐπιταχύνσεις, αἱ ἐν ἴσοις διαδοχικοῖς χρόνοις μεταδιδόμεναι τῷ σώματι ὑπὸ δυνάμεως σταθερᾶς τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν εἶναι ἴσαι,** καὶ **ἡ ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι μεταδιδομένη τῷ σώματι ταχύτης, ἡ ἐπερχομένη δηλαδὴ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις, εἶναι ἀνάλογος τῷ χρόνῳ καθ' ὃν ἡ δύναμις ἔδρα ἐπ' αὐτοῦ.**

Νόμοι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων

Περὶ τούτου βεβαιούμεθα εὐκόλως ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος διὰ τῶν νόμων, οὓς ἀκολουθοῦσι τὰ ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς δυνάμεως ταύτης πίπτοντα σώματα· τοὺς νόμους τούτους ἀνεκάλυψε πρῶτος ὁ Γαλιλαῖος, καὶ δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν εὐκόλως διὰ διαφόρων συσκευῶν ἃς εὑρίσκομεν ἐν τοῖς φυσικοῖς ἐργαστηρίοις. Ἐν πρώτοις βλέπομεν εὐκόλως καὶ ἄνευ οὐδεμιᾶς συσκευῆς ὅτι κατὰ τὴν πτῶσιν ἡ ταχύτης αὐξάνει σὺν τῷ χρόνῳ· ἵνα εὕρωμεν ἤδη τὸν νόμον τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος, δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενα διαστήματα καὶ βλέπομεν, ὅτι τὸ μετὰ τὸ πέρας τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανυθὲν ὑπὸ

τοῦ σώματος διάστημα εἶναι περίπου..................	4^{μ}. 90
μετὰ τὸ πέρας τοῦ δευτέρου δευτερολέπτου............	19, 60
» » τρίτου »	44. 10
» » τετάρτου »	78. **40**

οὕτω τὸ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου διανυθὲν διάστημα εἶναι.............................. 4^{μ}, 90

τὸ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δευτέρου....................	14, 70
» » τοῦ τρίτου....................	24, 50
» » τοῦ τετάρτου..................	34, 30

Ἴδωμεν ἤδη ἐὰν ἡ βαρύτης εἶναι σταθερὰ ἢ μεταβλητὴ τὴν ἔντασιν. Ἐὰν ἡ βαρύτης εἶναι σταθερὰ τὴν ἔντασιν, τὸ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δευτέρου δευτερολέπτου ἀπὸ τῆς πτώσεως διανυθὲν διάστημα τῶν

$$14^{\mu}.70$$

ὀφείλεται (ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς δυνάμεως ἀπὸ τῆς κτηθείσης ἤδη ταχύτητος) πρῶτον· τῇ δράσει τῆς βαρύτητος κατὰ τὸ $2^{ον}$ δευτρ. ὡς ἐκ τῆς ὁποίας διηνύθησαν $4^{\mu},90$ καὶ δεύτερον τῇ διατηρουμένῃ κτηθείσῃ ταχύτητι (πρῶτος νόμος τῆς κινήσεως) ὡς ἐκ τῆς ὁποίας διηνύθησαν

$$9^{\mu}.80$$

ἡ μετὰ τὸ πέρας τοῦ πρώτου δευτερολέπτου κτηθεῖσα ταχύτης εἶναι λοιπὸν $9^{\mu},80$· μετρεῖ δ' αὕτη καὶ τὴν ὑποτεθεῖσαν σταθερὰν ἔντασιν τῆς βαρύτητος.

Τὸ κατὰ τὸ τρίτον δευτερόλεπτον διανυθὲν διάστημα $24^{\mu},50$ ὀφείλεται

1) τῇ δράσει τῆς βαρύτητος κατὰ τὸ $3^{ον}$ δευτερόλεπτον $4^{\mu},90$
2) τῇ κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον κτηθείσῃ ταχύτητι, $9^{\mu},80$
ἥτις ὡς ἐκ τοῦ πρώτου νόμου τῆς κινήσεως διατηρεῖται
3) τῇ κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον κτηθείσῃ ταχύτητι ἥτις εἶναι

$$24^{\mu},50-(4^{\mu},90+9^{\mu},80)=24^{\mu},50-14^{\mu},70=9^{\mu},80$$

ἡ κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον κτηθεῖσα ταχύτης εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐν τῷ πρώτῳ, καὶ ἡ ὑπόθεσις τῆς σταθερᾶς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος συμφωνεῖ πληρέστατα μὲ τὰ δεδομένα τῆς πείρας. Οὕτω

Ἡ βαρύτης εἶναι δύναμις σταθερᾶς ἐντάσεως, μεταδίδουσα εἰς τὰ σώματα ταχύτητα $g=9^{\mu},80$ ἐν ἑνὶ δευτερολέπτῳ· ἡ κίνησις δὲ τῶν ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ταύτης πιπτόντων σωμάτων εἶναι ἡ ἐν τῇ κινητικῇ (§ 14, 1, 2 καὶ § 27) ἐξετασθεῖσα.

75. Τὴν ἔντασιν ταύτην τῆς βαρύτητος δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν καὶ διὰ τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡς ἑξῆς.

προσδιορισμὸς τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος διὰ τοῦ ἐκκρεμοῦς

Τὴν διάρκειαν T τῆς αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς μήκους l εὕρομεν τῷ ὄντι (51.3)

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διάρκεια t τῆς πτώσεως βαρέως σώματος ἀπὸ ὕψους $2l$ εἶναι

$$t=\sqrt{\frac{4l}{g}}$$

ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων σχέσεων πορίζόμεθα

$$\frac{T}{t}=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi l}{2l}=\frac{\text{ἡμιπεριφέρεια}}{\text{διαμέτρου}}$$

ἔχομεν οὕτω διὰ τῆς διαρκείας T τῆς αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸν χρόνον $t = \frac{2}{\pi}$ T, ὅστις ἀπαιτεῖται ἵνα σῶμα πίπτον κατακορύφως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος διανύσῃ τὸ διάστημα $2l$. Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος ἀφ' οὗ πίπτει σῶμά τι ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα T, ἔχομεν

$$h = \frac{1}{2} g\mathrm{T}^2 = \frac{1}{2} \pi^2 l \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

καὶ ἐὰν λάβωμεν τὸ ἐκκρεμές, οὗτινος ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως ἰσοῦται ἑνὶ δευτερολέπτῳ, ἐκκρεμὲς δηλαδὴ μήκους $l = \frac{g}{\pi^2}$ ἔχομεν τὸ κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον διανυθὲν διάστημα h διὰ τῆς ἄνω σχέσεως (1). Παρατηρήσεις γενόμεναι ἐν Παρισίοις ἔδωκαν

μῆκος τοῦ κτυπῶντος τὰ δευτερόλεπτα ἐκκρεμοῦς $= 0{,}99392$ μέτρα· ὥστε

ἔντασις τῆς βαρύτητος ἐν Παρισίοις $= 2h = \pi^2 l = \pi^2 . 0{,}99392 = 9{,}8096$

Ἡ ἐπὶ τῶν σωμάτων δρᾶσις τῆς βαρύτητος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τούτων

Ἀκριβεῖς παρατηρήσεις γενόμεναι ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπέδειξαν, ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς δευτερολέπτου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς φύσεως τῆς ὕλης ἐξ ἧς σύγκειται τοῦτο· συνεπῶς *ἡ βαρύτης δρᾷ ἐξ ἴσου ἐπὶ πάντων τῶν σωμάτων, ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως τῆς ὕλης τούτων, μεταδίδουσα τούτοις τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι*

σύγχρονος δρᾶσις πλειόνων δυνάμεων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος

76. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι πλείονες δυνάμεις δρῶσι συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος. Ἡ δρᾶσις ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐν τῷ σώματι παραγωγὴν κινήσεως, καὶ κατὰ τὰ προλεχθέντα (ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς δράσεως ἀπὸ τῆς κτηθείσης ἤδη ταχύτητος) ἡ ὑφ' ἑκάστης δυνάμεως παραγομένη κίνησις οὐδόλως ἐπηρεάζει τὴν ἐπενέργειαν ἑκάστης τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος συγχρόνως δρωσῶν λοιπῶν δυνάμεων. *Τὸ τελικὸν δηλαδὴ ἀποτέλεσμα τῆς συγχρόνου δράσεως τῶν δυνάμεων εἶναι τὸ αὐτό, ὡς εἰ ἐπενήργουν αὗται ἐπὶ τοῦ σώματος ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων* **ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης.** Τοῦτο ἐκφράζει καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῶν ἐκ τῆς συγχρόνου ἐπενεργείας πλειόνων δυνάμεων προκυπτουσῶν δράσεων, ἣν δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς·

ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς συγχρόνου δράσεως πλειόνων δυνάμεων

Ἐὰν πλείονες δυνάμεις σταθεραὶ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν δρῶσι συγχρόνως ἐπὶ τοῦ σώματος, ἡ προκύπτουσα ἐξ ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων ἐπιτάχυνσις ἔχει ὡρισμένον μέγεθος καὶ φορὰν ἀνεξαρτήτως τῆς ὑπάρξεως τῶν λοιπῶν δυνάμεων.

Ἐκ τοῦ ἀνεξαρτήτου δὲ τῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος συγχρόνου δράσεως πλειόνων δυνάμεων, συμπεραίνομεν, ὅτι

Ἡ ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι μεταδιδομένη σώματί τινι ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις, ὑπὸ δυνάμεως σταθερᾶς τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, εἶναι ἀνάλογος τῇ ἐντάσει τῆς δυνάμεως ταύτης· διότι τὴν σταθερὰν δύναμιν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὡς συγκειμένην ἐκ πλειόνων δυνάμεων ἴσων τῇ μονάδι, ὧν ἑκάστη μεταδίδει τῷ σώματι ὡρισμένην ἐπιτάχυνσιν, ἀνεξαρτήτως τῶν λοιπῶν.

Σχετικῶς τῇ προτάσει ταύτῃ τοῦ ἀναλόγου τῆς δυνάμεως πρὸς τὴν ταχύτητα, ἣν μεταδίδει αὕτη τῷ σώματι ἐφ' οὗ δρᾷ, ὁ Poisson λέγει· «ὁ νόμος τῶν ταχυτήτων ἀναλόγων ταῖς δυνάμεσιν, αἵτινες παράγουσι ταύτας εἶναι θεμελιώδης ἐν τῇ δυναμικῇ. Τῇ ἀληθείᾳ, ὁ νόμος οὗτος εἶναι ἁπλῶς **ὑπόθεσις·** διότι ἐκ τοῦ λόγου τῶν δυνάμεων, οὐδὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν σχετικῶς πρὸς τὰς ταχύτητας, ἃς παράγουσιν αὗται. Λέγομεν λ. χ. ὅτι μία δύναμις εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης, ὅταν ἡ πρώτη ἀποτελεῖται ἐκ τῆς προσθέσεως δύο δυνάμεων ἴσων τῇ δευτέρᾳ, δρωσῶν συγχρόνως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἐπὶ ὑλικοῦ τινὸς σημείου· ἀλλὰ δὲν ἕπεται ἀναγκαίως, ὅτι ἡ διπλασία αὕτη δύναμις ὀφείλει νὰ μεταδώσῃ εἰς τὸ κινητὸν ταχύτητα ἀκριβῶς διπλασίαν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν θὰ τῷ μετέδιδεν ἡ πρώτη δύναμις δρῶσα μόνη ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι.

Ἡ μεταδιδομένη κινητῷ τινι ταχύτης ὑπὸ δυνάμεως δρώσης ἐπ' αὐτοῦ ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ δι' οὗ ἐκφράζομεν τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ταύτης. Τὰ ὀλίγιστα δεδόμενα, ἅτινα κατέχομεν σχετικῶς πρὸς τὴν φύσιν τῶν δυνάμεων, δὲν μᾶς ἐπιτρέπουσι νὰ ὁρίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως ταύτης· ἀναγκαζόμεθα λοιπόν, ἵνα λύσωμεν τὰ προβλήματα τῆς δυναμικῆς νὰ λάβωμεν ὡς ἀφετηρίαν ὑπόθεσίν τινα, καὶ ἐκλέγομεν τὴν ἁπλουστέραν πασῶν θεωροῦντες τὴν ταχύτητα ἀνάλογον τῇ δυνάμει. Ἡ μετὰ τῆς πείρας συμφωνία τῶν ἀποτελεσμάτων, ἅτινα πορίζόμεθα ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης ἀποδεικνύει κατόπιν, ὅτι ὁ ἁπλούστατος οὗτος νόμος εἶναι πραγματικῶς ἐκεῖνος, ὃν ἀκολουθοῦσιν αἱ δυνάμεις τῆς φύσεως.»

77. Οὕτω· *Ἡ μεταβολὴ φ τὴν ὁποίαν δύναμίς τις F ἐπιφέρει ἐν τῇ ταχύτητι τοῦ σώματος εἶναι ἀνάλογος τῇ ἐντάσει F τῆς δυνάμεως ταύτης καὶ τῷ χρόνῳ $t - t_0$ καθ' ὃν ἡ δύναμις ἔδρα ἐπὶ τοῦ σώματος· ἀνάλογος δηλαδὴ τῷ γινομένῳ*

$$F(t - t_0)$$

ὅπερ καλοῦμεν ὤθησιν ἀναπτυχθεῖσαν ὑπὸ τῆς δυνάμεως κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t - t_0$, ἢ ἁπλῶς **ὤθησιν τῆς δυνάμεως.** Ἂν δὲ λάβωμεν τὸ χρονικὸν διάστημα ἴσον τῇ μονάδι, ἡ ὤθησις εἶναι

ὤθησις τῆς δυνάμεως

ἀνάλογος τῇ ἐντάσει τῆς δυνάμεως, ὅπερ ἐκφράζομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{F}{\varphi} = \text{σταθερᾷ τινι ποσότητι } m$$

ὁ λόγος οὗτος $\frac{F}{\varphi}$ εἶναι δηλαδὴ ὁ αὐτὸς οἵα δήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ ἔντασις τῆς *ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ πάντοτε σώματος* δρώσης δυνάμεως F.

78. Μεταβαλλομένου ὅμως τοῦ σώματος ἐφ' οὗ δρᾷ ἡ δύναμις, μεταβάλλεται καὶ ὁ λόγος m ὅστις χαρακτηρίζει οὕτως εἰπεῖν δυναμικῶς τὸ σῶμα ἐφ' οὗ δρᾷ ἡ δύναμις, διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος μετρεῖ δυναμικόν τι στοιχεῖον ἴδιον τῷ σώματι ἐφ' οὗ δρᾷ ἡ δύναμις. Τὸ δυναμικὸν τοῦτο στοιχεῖον ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται προφανῶς τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος, ἣν ὡρισμένη δύναμις μεταδίδει τῷ σώματι ἐν τῇ μονάδι

μάζα

τοῦ χρόνου καλοῦμεν *μάζαν* τοῦ σώματος καὶ θεωροῦμεν ὡς **ἴσης μάζης τὰ σώματα, ἅτινα ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δυνάμεως ἀποκτῶσιν ἴσας ταχύτητας ἐν ἴσοις χρονικοῖς διαστήμασι.**

Ἐὰν ἀντὶ τῆς δυνάμεως F, ἑτέρα δύναμις F' δρῶσα ἐπὶ ἑτέρου σώματος, μεταδίδει τούτῳ ἐπιτάχυνσιν φ', ἔχομεν ἐπίσης

$$\frac{F'}{\varphi'} = m'$$

ἔνθα m' εἶναι ἀριθμὸς ἐν γένει διάφορος τοῦ m.

79. Ἔστω ἤδη Δ δύναμις, ἥτις δρῶσα ἐπὶ τοῦ σώματος, ὅπερ χαρακτηρίζει ὁ ἀριθμὸς m, μεταδίδει τούτῳ ἐπιτάχυνσιν Φ· ἔστω Δ' ἑτέρα δύναμις (ἐν γένει διάφορος τῆς Δ), ἥτις δρῶσα ἐπὶ τοῦ σώματος, ὅπερ χαρακτηρίζει ὁ ἀριθμὸς m' ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου, μεταδίδει τούτῳ τὴν αὐτήν, οἵαν μετέδωκε ἡ πρώτη δύναμις Δ τῷ διὰ τοῦ m χαρακτηριζομένῳ πρώτῳ σώματι ἐπιτάχυνσιν Φ·
ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως ἔχομεν

$$\frac{\Delta}{\Phi} = m \qquad \frac{\Delta'}{\Phi} = m' \text{ ὅθεν } \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{m}{m'} = \frac{F}{\varphi} : \frac{F'}{\varphi'}$$

αἱ ἐντάσεις δηλαδὴ τῶν δυνάμεων, αἵτινες δρῶσαι κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα ἐπὶ δύο διαφόρων σωμάτων μεταδίδουσι τούτοις μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν μαζῶν τῶν σωμάτων τούτων.

80. Ἡ ἄνω εὑρεθεῖσα σχέσις ὑφίσταται οἷαι δήποτε καὶ ἂν ὦσιν

αἱ μονάδες δι' ὧν μετροῦμεν τὰς δυνάμεις, τὰς ἐπιταχύνσεις καὶ τὰς μάζας. Ἐὰν ἤδη λάβωμεν ὡς μονάδα μάζης ($m' = 1$) τὴν μάζαν σώματος, ἐφ' οὗ δρῶσα ἡ μονὰς τῆς δυνάμεως ($F' = 1$) κατὰ μίαν μονάδα χρόνου μεταδίδει τούτῳ ταχύτητα ἴσην τῇ μονάδι ($\varphi' = 1$), ἡ ἄνω σχέσις (79) μετατρέπεται εἰς

$$\frac{m}{\text{μονὰς μάζης}} = \frac{F}{\varphi} : \frac{\text{μονὰς δυνάμεως}}{\text{μονὰς ἐπιταχύνσεως}}$$

ἢ

$$F = m\varphi$$

σχέσις ὑφισταμένη ἀνεξαρτήτως τῶν μονάδων, ἃς λαμβάνομεν πρὸς καταμέτρησιν τῶν δυνάμεων καὶ τῶν ταχυτήτων, ἐξαρτωμένη δὲ ἁπλῶς ἐκ τῆς μονάδος τῆς μάζης.

Ἐὰν δέ, ὅπως συμβαίνει τοῦτο ἐν τῇ πράξει, λάβωμεν τὴν μάζαν ὡρισμένου τινὸς σώματος ὡς μονάδα, τότε, ἵνα ἡ ἄνω σχέσις ὑφίσταται, δέον νὰ λάβωμεν τὰς μονάδας δυνάμεως καὶ ταχύτητος, οὕτως ὥστε, ἐὰν ἡ μονὰς δυνάμεως δρᾷ κατὰ μίαν μονάδα χρόνου ἐπὶ τοῦ σώματος, οὗτινος ἡ μάζα ἐλήφθη ὡς μονάς, μεταδίδει τούτῳ ταχύτητα ἴσην τῇ μονάδι τοῦ μήκους. Ἡ θεμελιώδης μάζα εἰς ἣν ἀνάγομεν τὰς λοιπάς, εἶναι ἡ μάζα ὡρισμένου πρωτοτύπου τεμαχίου πλατίνης, κατατεθειμένου ἐν τοῖς ἀρχείοις τῶν Παρισίων. ὅπερ καλοῦσιν χιλιόγραμμον τῶν ἀρχείων (kilogramme des archives).

Ὡς μονάδα χρόνου λαμβάνομεν τὸ δευτερόλεπτον, καὶ ὡς μονάδα μήκους τὸν δάκτυλον (ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου)· ληφθεισῶν τῶν μονάδων τούτων ἡ *μονὰς τῆς δυνάμεως*, ἣν καλοῦσι *δύνην*, εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὰ προλεχθέντα, εἶναι δ' αὕτη *ἡ δύναμις ἐκείνη, ἥτις δρῶσα* μονὰς δυνάμεως (δύνη)
ἐπὶ σώματος μάζης ἑνὸς γραμμαρίου κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς δευτερολέπτου μεταδίδει τούτῳ ταχύτητα ἑνὸς ἑκατοστομέτρου.

Τὸ ἐκ τῶν μονάδων τούτων προκύπτον σύστημα καταμετρήσεως καλοῦσιν ἀπόλυτον σύστημα καὶ παριστῶσι συμβολικῶς διὰ τοῦ [C.G.S]

Centimètre, gramme, seconde

δάκτυλος, γραμμάριον, δευτερόλεπτον

Ἐνίοτε ὅμως ἐν τῇ καταμετρήσει τῶν δυνάμεων ἀντὶ νὰ παρα- δύναμις ἑνὸς
βάλλωμεν ταύτας πρὸς τὴν μονάδα τῆς δυνάμεως, τὴν δύνην, τὰς γραμμαρίου
παραβάλλομεν πρὸς τὸ γραμμάριον, λέγοντες δύναμις τόσων γραμμαρίων, καὶ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν μὲ πόσας δύνας ἰσοδυναμεῖ ἡ δύναμις ἑνὸς γραμμαρίου· ταύτην δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν διὰ τῆς ἐλευθέρας πτώσεως αὐτοῦ, ἐὰν ὁρίσωμεν τὴν ταχύτητα, ἣν κέκτηται

τοῦτο μετὰ παρέλευσιν ἑνὸς δευτερολέπτου ἀπὸ τῆς πτώσεως του· εἶναι δὲ ἡ ταχύτης αὕτη ὑπὸ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν Παρισίων 981 ἑκατοστομέτρων, ἀριθμός, ὅστις μετρεῖ καὶ τὴν ἐπὶ τοῦ πίπτοντος σώματος ἐξασκουμένην δύναμιν τῆς βαρύτητος ὑπὸ τὸ ὡρισμένον τοῦτο γεωγραφικὸν πλάτος.

Οὕτω ἡ δύναμις ἑνὸς γραμμαρίου ὑπὸ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν Παρισίων εἶναι 981 δυνῶν.

81. Ἐκ τῆς ἄνω εὑρεθείσης σχέσεως

$$F = m\varphi$$

ἣν ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος γράφομεν

$$P(\text{βάρος}) = m(\text{μάζαν})\,g(\text{ἐπιτάχυνσιν})$$

ἐνθυμούμενοι (75) ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις g εἶναι σταθερὰ καὶ ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τῆς ὕλης ἧς τὸ βάρος εἶναι P (ἀλήθεια ἣν μᾶς διδάσκει ἡ πεῖρα), πορίζόμεθα τὴν ἀκόλουθον πρότασιν·

μάζαι ἀνάλογοι τῶν βαρῶν

ὑπὸ τὸ αὐτὸ γεωγραφικὸν πλάτος αἱ μάζαι δύο διαφόρων σωμάτων εἶναι ἀνάλογοι τῶν βαρῶν τούτων,

καὶ δυνάμεθα οὕτω νὰ παραβάλλωμεν τὰς μάζας διὰ τῶν βαρῶν. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ συγχέωμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος μὲ τὴν μάζαν αὐτοῦ. Ἡ μάζα εἶναί τι ἴδιον αὐτῷ τῷ σώματι ἀμετάβλητον, οὔτε αὐξάνον, οὔτε ἐλαττούμενον, ὅπου δήποτε τοῦ διαστήματος καὶ ἂν ὑποτεθῇ εὑρισκόμενον τὸ σῶμα. Τοὐναντίον τὸ βάρος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παρουσίας ἑτέρου σώματος, τῆς γῆς, μεταβαλλόμενον λίαν ἐπαισθητῶς μετὰ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, καὶ δυνάμενον νὰ ἐκλείψῃ σχεδὸν ἐντελῶς.

Τὰ καταστρεπτικὰ ἀποτελέσματα τοῦ ὑπὸ τοῦ τηλεβόλου βαλλομένου βλήματος ὀφείλονται κυρίως εἰς τὴν μάζαν καὶ τὴν σχετικὴν αὐτοῦ ταχύτητα· εἶναι δὲ τῆς αὐτῆς ἐντάσεως ὅπου δήποτε τοῦ διαστήματος καὶ ἂν ὑποθέσωμεν τὸ βλῆμα ἔστω καὶ τόσῳ μακρὰν τῆς γῆς ὥστε ν' ἀπώλεσεν ἐντελῶς σχεδὸν τὸ βάρος του. Ἡ μάζα μετρεῖ οὕτως εἰπεῖν δυναμικῶς τὴν ἐν τῷ σώματι ἐνυπάρχουσαν ποσότητα ὕλης, ἐνῷ τὸ βάρος εἶναι τυχαία ἰδιότης ἐξαρτωμένη ἐκ τῆς παρουσίας ἑτέρας ὕλης. Τὸ οὐσιῶδες εἶναι, ὅτι *ὑπὸ τὰς αὐτὰς ἐξωτερικὰς συνθήκας καὶ τὸ βάρος ὅπως καὶ ἡ μάζα ἐξαρτῶνται ἁπλῶς ἐκ τῆς ποσότητος καὶ οὐχὶ ἐκ τῆς ποιότητος τῆς ἐνυπαρχούσης ἐν τῷ σώματι ὕλης.*

Σημειωσις. Τὴν μάζαν σώματός τινος ὁρίζουσιν ἐνίοτε ὡς *τὴν ποσότητα τῆς*

ὕλης ἐξ ἧς σύγκειται τοῦτο· ἀλλὰ τότε, ὡς καὶ ἐν τῇ περιπτώσει τῶν δυνάμεων, ἡ πρὸς ἀλλήλας παραβολὴ τῶν ποσοτήτων τῆς ὕλης δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἀπ' εὐθείας ὡς ἐκ τοῦ ἀγνώστου τῆς ἀρχικῆς φύσεως αὐτῆς· δέον λοιπὸν νὰ προστρέξωμεν εἰς ἔμμεσόν τινα μέθοδον, καὶ ζητήσωμεν τὴν παραβολὴν τῶν μαζῶν ἐν ὡρισμένῃ τινὶ κλάσει φαινομένων, εἰς ἃ ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι ποσότητες ὕλης. Καὶ ἐν ὅσῳ μὲν τὰ σώματα ὧν παραβάλλομεν τὰς μάζας εἶναι ὁμογενῆ (δηλαδὴ τὰ διάφορα τούτων μέρη ἔχουσι τὴν αὐτὴν σύστασιν, ὅσῳ μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῶσι ταῦτα) καὶ τῆς αὐτῆς φύσεως, τὸ ζήτημα εἶναι εὐκολώτατον· διότι οἵας δήποτε φύσεως καὶ ἂν εἶναι τὰ φαινόμενα, διὰ τῆς παραβολῆς τῶν ὁποίων συμπεραίνομεν καὶ περὶ τοῦ λόγου τῶν μαζῶν, εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι ποσότητες ὕλης. Δέν συμβαίνει ὅμως τοῦτο ὅταν τὰ παραβαλλόμενα ἀλλήλοις σώματα εἶναι διαφόρου φύσεως, καὶ τότε πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὰ ἀποτελέσματα διὰ τῆς παραβολῆς τῶν ὁποίων παραβάλλομεν ἀλλήλαις καὶ τὰς μάζας τῶν σωμάτων δέον νὰ σχετίζωνται μὲ τὰς μεταβολάς, ἃς ὑφίστανται ταῦτα ἐν τῇ κινήσει των, διότι περὶ ταύτας κυρίως ἀσχολεῖται ἡ δυναμική, οἵαν ἐννοοῦμεν ταύτην ἐνταῦθα. Ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ἔχομεν ὁμογενῆ διάλυσιν θειϊκοῦ ὀξέως. Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μέρος τῆς διαλύσεως ταύτης, δυνάμεθα νὰ παραβάλωμεν πρὸς αὐτὴν τὸ ὅλον διαφοροτρόπως· δυνάμεθα λ. χ. νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ ὡς μονάδα ληφθὲν μέρος καὶ τὸ ὅλον τῆς διαλύσεως τοῦ θειϊκοῦ ὀξέως, ἵνα ἐξουδετερώσωμεν ὡρισμένην διάλυσιν ποτάσσης· τὸ φαινόμενον τοῦτο τῆς ἐξουδετερώσεως τῆς ποτάσσης δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν διὰ τὴν παραβολὴν τοῦ ὅλου καὶ τοῦ μέρους τοῦ θειϊκοῦ ὀξέως παραβάλλοντες πρὸς ἀλλήλας τὰς ἐξουδετερωθείσας ποσότητας ποτάσσης. Δυνάμεθα ἐπίσης δι' ἀγγείου βαθμολογημένου νὰ παραβάλωμεν τὸ ὅλον τοῦ θειϊκοῦ ὀξέως πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ διὰ τῆς ἁπλῆς παραβολῆς τῶν ὄγκων τούτων, ἢ καὶ νὰ ζυγίσωμεν ταῦτα καὶ παραβάλωμεν πρὸς ἄλληλα τὰ βάρη των. Τὰ αὐτὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν, ἐὰν ἀντὶ τοῦ θειϊκοῦ εἴχομεν ποσότητά τινα ὁμογενοῦς διαλύσεως νιτρικοῦ ὀξέως. Ἀλλ' ἐὰν ἤδη θελήσωμεν νὰ παραβάλωμεν ποσότητά τινα τῆς ὁμογενοῦς διαλύσεως θειϊκοῦ ὀξέως πρὸς ἑτέραν νιτρικοῦ ὀξέως, θὰ εὕρωμεν διάφορα ἀποτελέσματα ἐὰν κάμωμεν τὴν παραβολὴν ταύτην, διὰ τῆς ἐξουδετερώσεως τῆς ποτάσσης τῆς παραβολῆς τῶν ὄγκων ἢ τῆς παραβολῆς τῶν βαρῶν. Ἐκ τῶν τριῶν τούτων μεθόδων ἡ τελευταία μόνη σχετίζεται πρὸς τὴν ὑπὸ τῆς γῆς ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ ὀξέως δρᾶσιν, ἥτις δύναται νὰ ἐπιφέρῃ καὶ μεταβολήν τινα ἐν τῇ καταστάσει κινήσεως αὐτοῦ, καὶ ἐκ τῶν ἄνω τριῶν φαινομένων πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τῆς βαρύτητος διὰ νὰ παραβάλωμεν ἀλλήλαις τὰς ποσότητας θειϊκοῦ καὶ νιτρικοῦ ὀξέως, τοῦτο δ' ἐπράξαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις.

82. Ὁρισθέντος ἤδη ἀκριβῶς τοῦ δυναμικοῦ στοιχείου, ὅπερ ἐκαλέσαμεν μάζαν, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν θεμελιώδη πρότασιν, ἣν διετυπώσαμεν ἀνωτέρω (77), καὶ ὑποθέτοντες τὴν μάζαν τοῦ σώματτος ἐφ' οὗ δρᾷ ἡ δύναμις ἴσην τῇ μονάδι μάζης, ἐκφράζομεν ταύτην οὕτω.

Ἡ μεταβολή, τὴν ὁποίαν δύναμίς τις, σταθερὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, ἐπιφέρει ἐν τῇ ταχύτητι τῆς μονάδος μάζης, ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι, εἶναι ἀνάλογος τῆς κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα ἀναπτυχθείσης ὑπὸ τῆς δρώσης δυνάμεως ὠθήσεως.

Τὴν ὤθησιν ταύτην μετροῦμεν οὕτω διὰ τῆς διαφορᾶς $v-v_0$ ἔνθα v εἶναι ἡ παροῦσα ταχύτης τοῦ σώματος καὶ v_0 ἡ ταχύτης τούτου καθ' ἣν στιγμὴν ἤρξατο δρῶσα ἐπ' αὐτοῦ ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις.

83. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν πλείονας δυνάμεις ἴσας τὴν ἔντασιν καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ὧν ἑκάστη δρᾷ ἀνεξαρτήτως τῶν λοιπῶν ἐπὶ μιᾶς μονάδος μάζης, αἱ διάφοροι αὗται μάζαι, ἃς ὑποθέτομεν ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων, θὰ κινηθοῦν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, καὶ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ταύτας ὡς ἀποτελούσας μέρη ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος, οὗτινος ἡ ταχύτης ἔσεται ἴση τῇ μεταδιδομένῃ ὑφ' ἑκάστης τῶν ἴσων δυνάμεων τῇ μονάδι τῆς μάζης. Οὕτω

Ἡ ὤθησις ἥτις εἶναι ἱκανὴ νὰ ἐπιφέρῃ ὡρισμένην τινὰ μεταβολὴν $v-v_0$ ἐν τῷ μεγέθει τῆς ταχύτητος σώματος οἵου δήποτε ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ, εἶναι ἀνάλογος τῇ μάζῃ m τοῦ σώματος.

84. Ἀλλ' ἡ αὐτὴ ὤθησις εἶναι ἀνάλογος (82) τῷ μεγέθει $v-v_0$ τῆς ἐπερχομένης ἐν τῇ ταχύτητι v_0 τοῦ σώματος μεταβολῆς· *εἶναι λοιπὸν αὕτη ἴση τῷ γινομένῳ $m(v-v_0)$ τῆς μάζης m ἐπὶ τὴν ἐπελθοῦσαν ἐν τῇ ταχύτητι μεταβολὴν $v-v_0$·*

ποσότης κινήσεως

τὸ γινόμενον mv τῆς μάζης m σώματός τινος ἐπὶ τὴν ταχύτητα v μεθ' ἧς φέρεται τοῦτο καλοῦμεν **ποσότητα κινήσεως** τοῦ σώματος.

Τὴν ποσότητα δὲ κινήσεως θεωροῦμεν ὡς γεωμετρικὸν μέγεθος ἔχον ἔντασιν mv καὶ φορὰν συμπίπτουσαν πρὸς τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος· *ἡ μονὰς ἐνταῦθα εἶναι ἡ ποσότης κινήσεως, ἣν κέκτηται ἡ μονὰς τῆς μάζης φερομένη μὲ ταχύτητα ἴσην τῇ μονάδι.*

85. Καὶ φθάνομεν οὕτω εἰς τὸν δεύτερον νόμον τῆς κινήσεως, οἷον διετυπώσαμεν κατ' ἀρχὰς λέγοντες.

Ἡ ἐπερχομένη ἐν τῇ ποσότητι κινήσεως τοῦ σώματος μεταβολὴ $mv-mv_0$, μετρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ καὶ ἡ παραγαγοῦσα ταύτην ὤθησις $F(t-t_0)$, καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὴν ὤθησιν φοράν.

$$mv-mv_0=F(t-t_0)$$

ὥστε ἡ ἔντασις τῆς ἀγνώστου ἡμῖν δυνάμεως μετρεῖται διὰ τοῦ λόγου

$$\frac{mv}{t}$$

ἢ ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου διὰ τοῦ γινομένου

$$mv$$

ὅπερ ἔσεται δι' ἡμᾶς ἡ ἀληθὴς ἔκφρασις καὶ ἀκριβὴς ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας ἣν ἀποδίδομεν εἰς τὴν λέξιν **δύναμις**.

86. Μέχρι τοῦδε ὑπεθέσαμεν τὰς δρώσας δυνάμεις σταθεράς. Ἐὰν ὅμως ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F μεταβάλληται ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν ἀλλ' ἐξακολουθεῖ **ἔχουσα** τὴν αὐτὴν μὲ τὴν v φοράν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ χρονικὸν διάστημα $t-t_0$ τόσῳ μικρόν, ὥστε κατὰ τὴν διάρκειαν αὐτοῦ νὰ ἐκλάβωμεν τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως F ὡς σταθεράν· ἡ ἐπαύξησις τῆς ταχύτητος εἶναι τότε $v-v_0=dv$ καὶ ἡ ἄνω (85) σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$mdv=Fdt \quad \text{ἢ} \quad m\frac{d^2s}{dt^2}dt=Fdt$$

87. Τὴν δύναμιν ἐν ὡρισμένῃ στιγμῇ παριστῶμεν γεωμετρικῶς δι' εὐθυγράμμου τμήματος (*παραστατικὸν τμῆμα τῆς δυνάμεως*) ἴσου τῇ ταχύτητι, ἣν μεταδίδει αὕτη κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν (ἐν ἑνὶ δευτερολέπτῳ ὑποτιθεμένης τῆς δυνάμεως σταθερᾶς) τῇ μονάδι μάζης· διακρίνομεν οὕτω ἐν πάσῃ δυνάμει.

Τὸ ὑλικὸν σημεῖον ἐφ' οὗ ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος δρᾶσις αὐτῆς.

Τὴν εὐθεῖαν δράσεως, μεθ' ἧς συμπίπτει τὸ παραστατικὸν τῆς δυνάμεως τμῆμα, καὶ

Τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τοῦ τμήματος τούτου.

88. Ἐκ τῆς ἀρχῆς δὲ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς συγχρόνου ἐπενεργείας τῶν δυνάμεων ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος, συμπεραίνομεν ἀμέσως, ὅτι

Ἐὰν πλείονες δυνάμεις δρῶσι συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος, ἑκάστη τούτων μεταδίδει τῷ σώματι ἐπιτάχυνσιν ἀνάλογον τῇ ἐντάσει αὐτῆς· ἀλλ' ἡ ὁλικὴ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος εἶναι ἡ γεωμετρικὴ συνισταμένη τῶν μερικῶν τούτων ἐπιταχύνσεων, ὀφείλεται δ' αὕτη δυνάμει τινὶ ὡρισμένῃ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, ἣν καλοῦμεν *συνισταμένην* τῶν μερικῶν δυνάμεων, καὶ βλέπομεν ὅτι

Ἡ συνισταμένη πλειόνων δυνάμεων εὑρίσκεται ὅπως καὶ ἡ συν-

ισταμένη πλειόνων ἐπιταχύνσεων (16) *ἰσοῦται δηλαδὴ αὕτη τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.*

Τὴν ἐπὶ τοῦ σημείου (ξ,η,ζ) δρῶσαν δύναμιν F, ἧς αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶναι X,Y,Z δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν καὶ διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{x-\xi}{X}=\frac{y-\eta}{Y}=\frac{z-\zeta}{Z}$$

ἡ συνιστῶσα δὲ ταύτης καὶ τῆς δυνάμεως

$$\frac{x-\xi}{X'}=\frac{y-\eta}{Y'}=\frac{z-\zeta}{Z}$$

εἶναι

$$\frac{x-\xi}{X+X'}=\frac{y-\eta}{Y+Y'}=\frac{z-\zeta}{Z+Z'}$$

Ἐὰν ἔχωμεν πλείονας δυνάμεις

$$Ax+By+C=0 \qquad [A=-Y \quad B=X \quad C=Y\xi-X\eta]$$

δρώσας ἐπὶ τοῦ σημείου ξ,η ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἡ συνισταμένη τούτων εἶναι

$$x\Sigma A+y\Sigma B+\Sigma C=0$$

89. Ἐὰν ἡ ἄνω θεωρηθεῖσα δύναμις F μεταβάλληται καὶ κατὰ τὴν φοράν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ταύτην διὰ τῶν ὀρθογωνίων συνιστωσῶν αὐτῆς X,Y,Z, καὶ νὰ μετατρέψωμεν τὴν σχέσιν (86) εἰς τὰς

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z \quad \ldots\ldots (1)$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα

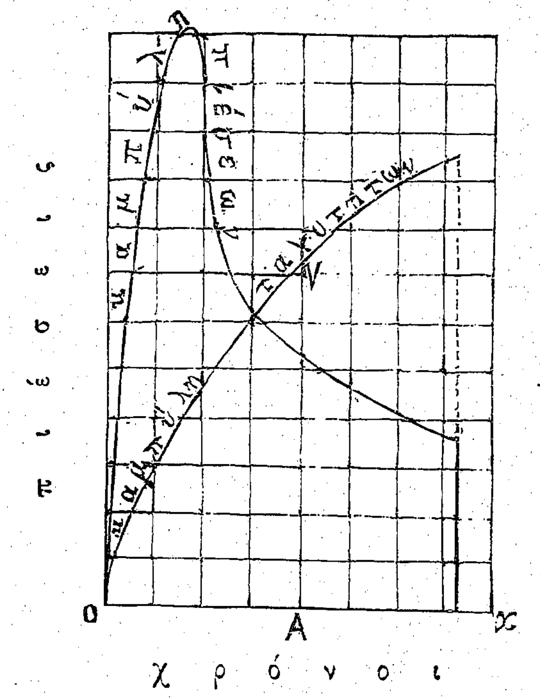
$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{ds}+m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{ds}+m\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{ds}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=F\sigma\upsilon\nu(F,ds)$$

ἢ

$$m\,dv=F\sigma\upsilon\nu(F,ds)dt \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὤθησιν δυνάμεώς τινος, γνωρίζοντες τὴν ταχύτητα ἣν μετέδωκεν εἰς τὸ ἐφ' οὗ δρᾷ σῶμα, ἢ τἀνάπαλιν τὴν μεταδοθεῖσαν τῷ σώματι ταχύτητα ἐκ τῆς ἀναπτυχθείσης ὑπὸ τῆς δυνάμεως ὠθήσεως. Ὡς παράδειγμα θὰ λάβωμεν ἓν ἐκ τῶν πειραμάτων, ἅτινα ἐξετέλεσεν ὁ Ῥῶσσος στρατηγὸς Mayewski ἐν τοῖς ἐργοστασίοις τοῦ Krupp ἐν ἔτει 1864. Δι' ἀκριβεστάτων ἐργαλείων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὑπὸ τῶν ἀερίων, ἅτινα παρέχει ἡ ἀναφλεχθεῖσα πυρῖτις, ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ βλήματος πίεσιν, καὶ τὸν χρόνον ὅστις παρῆλθεν ἀφ' ἧς στιγμῆς ἤρξατο ἐξασκουμένη ἡ πίεσις αὕτη. Ἐὰν ἐν τῷ κάτωθι σχήματι φέρωμεν ἐπὶ ὁριζοντείου εὐθείας OX τὸν χρόνον ὅστις

παρῆλθεν ἀφ' ἧς στιγμῆς ἤρξατο ἐξασκουμένη ἡ πίεσις καὶ ἐπὶ τῆς κατακορύφου τμῆμα ἴσον τῇ ἐξασκουμένῃ πιέσει κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἔχομεν καμπύλην τινά, ἣν καλοῦμεν *καμπύλην πιέσεων*. Θεωρήσωμεν τὴν πίεσιν AN κατὰ τὴν στιγμὴν OA. Τὸ μεταξὺ τῆς τεταγμένης AN, τῆς καμπύλης τῶν πιέσεων καὶ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων OX περιεχόμενον ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῇ μέχρι τῆς στιγμῆς OA ἀναπτυχθείσῃ ὑπὸ τῆς πιέσεως ὁλικῆς ὠθήσεως· ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας AN καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου A φέρωμεν τμῆμα AV ἀνάλογον τῷ ἐμβαδῷ τούτῳ διαιρεθέντι διὰ τῆς μάζης τοῦ βλήματος, ἔχομεν τὴν ταχύτητα τοῦ τελευταίου τούτου κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν, δι' ὃ καὶ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τοῦ σημείου V ἐκαλέσαμεν καμπύλην τῶν ταχυτήτων. Τὸ ὅλον ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῇ ποσότητι κινήσεως μεθ' ἧς τὸ βλῆμα ἐγκαταλείπει τὸ τηλεβόλον διαγράφον τὴν τροχιὰν αὐτοῦ ὑπὸ τὴν ἄμεσον δρᾶσιν τῆς βαρύτητος.



Σχ. 79.

συνθῆκαι ἰσορροπίας τοῦ σημείου

90. Ἐὰν τὸ πολύγωνον, δι' οὗ ὁρίζομεν τὴν συνισταμένην πλειόνων δυνάμεων, αἵτινες δρῶσι συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι κλειστόν, ἡ συνισταμένη τούτων (88) ἰσοῦται τῷ μηδενὶ καὶ αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦσιν ἐξουδετεροῦσαι ἀλλήλας. Εἶναι δὲ προφανές, ὅτι ἡ ἰσορροπία αὕτη ὑφίσταται, οἵα δήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ μάζα τοῦ σημείου· ὡς ἐκ τούτου ἐν τῇ στατικῇ, ἥτις πραγματεύεται ἐκτενέστερον τὴν ἰδιαιτέραν ταύτην περίπτωσιν τῶν ἰσορροπουσῶν δυνάμεων, ἡ μάζα τῶν σωμάτων δὲν λαμβάνεται ποσῶς ὑπ' ὄψιν.

Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν ἔντασιν μιᾶς τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου δρωσῶν δυνάμεων καὶ α β γ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τοῦ παραστατικοῦ τμήματος ταύτης, ἵνα αἱ ἐπὶ τοῦ σημείου δρῶσαι δυνάμεις ἰσορροποῦσι δέον νὰ ἔχωμεν

$$\Sigma F\alpha=0 \qquad \Sigma F\beta=0 \qquad \Sigma F\gamma=0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Ἐὰν αἱ δυνάμεις δὲν ἰσορροποῦσιν, ἔχουσι συνισταμένην τὴν R καὶ τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν δυνάμεων F

καὶ ἑτέρας $-R$ ἴσης καὶ ἀντιθέτου τῇ R· ἐὰν καλέσωμεν λ, μ, ν τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς τελευταίας ταύτης ἔχομεν λοιπὸν

$$\Sigma F\alpha - R\lambda = 0 \qquad \Sigma F\beta - R\mu = 0 \qquad \Sigma F\gamma - R\nu = 0 \ldots\ldots \quad (2)$$

ὅθεν αἱ σχέσεις

$$R^2 = (\Sigma F\alpha)^2 + (\Sigma F\beta)^2 + (\Sigma F\gamma)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{\Sigma F\alpha}{R} \qquad \mu = \frac{\Sigma F\beta}{R} \qquad \nu = \frac{\Sigma F\gamma}{R} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

αἵτινες ὁρίζουσι τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων F.

91. Τῆς δυνάμεως ἀποκαλυπτομένης ἡμῖν οὕτω διὰ τῆς ταχύτητος, ἣν μεταδίδει εἰς τὸ σῶμα, δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν εἰς τὰς δυνάμεις τὰ ἐξαγόμενα εἰς ἃ ἐφθάσαμεν ἀνωτέρω ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ἐπιταχύνσεως (ἀφοῦ αἱ δυνάμεις ἐκφράζονται διὰ τοῦ γινομένου τῶν τελευταίων τούτων ἐπὶ τὴν μάζαν τῶν σωμάτων ἐφ' ὧν δρῶσι). Ἐὰν τὸ σῶμα κινῆται ὁμοιομόρφως, ἡ ταχύτης αὐτοῦ μένει ἀμετάβλητος καὶ συμπεραίνομεν, ὅτι οὐδεμία δύναμις δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ, ἢ ὅτι αἱ ἐπ' αὐτοῦ δρῶσαι δυνάμεις ἰσορροποῦσι (69)· ἡ σταθερὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν ταχύτης υ μεθ' ἧς φέρεται τὸ σῶμα ὀφείλεται τῇ προγενεστέρᾳ δράσει δυνάμεως ἧς ἡ ὤθησις ἦτο $m\upsilon$.
Ἐὰν ἐν τῇ κινήσει του τὸ σῶμα διαγράφῃ καμπύλην τροχιὰν συμπεραίνομεν, ὅτι δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις εἰς ἣν ὀφείλεται ἡ μεταβολὴ ἣν ὑφίσταται ἐν τῇ κινήσει του τὸ σῶμα. Τὴν δύναμιν ταύτην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνισταμένην τριῶν δυνάμεων

$$X = F\sigma\upsilon\nu(F,x) = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \qquad Y = F\sigma\upsilon\nu(F,y) = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\text{καὶ } Z = F\sigma\upsilon\nu(F,z)m = \frac{d^2z}{dt^2}$$

δρωσῶν παραλλήλως πρὸς τρεῖς ὀρθογωνίους ἄξονας $o(x,y,z)$· ἢ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (Εἰσ. § 5.20)

$$\frac{mR}{ds^3}\left[A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{d^2z}{dt^2}\right] = 0 = \frac{R}{ds^3}[AX + BY + CZ]$$

ἧς τὸ δεύτερον μέλος ἐκφράζει τὴν προβολὴν τῆς δυνάμεως ἐπὶ εὐθείας oz καθέτου τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ τῆς ὑπὸ τοῦ σημείου $m(x,y,z)$ δια-

γραφομένης τροχιᾶς, βλέπομεν ὅτι ἡ μία τῶν ἄνω συνιστωσῶν Z μηδενίζεται καὶ μένουσιν αἱ δύο πρῶται, ὧν ἡ μὲν

$$X = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = F\sigma\upsilon\nu(F,ds) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

δρᾷ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς, καὶ καλεῖται *ἐφαπτομένη δύναμις*, ἡ δὲ

ἐφαπτομένη δύναμις

$$Y = m\frac{\upsilon^2}{R} = \frac{R}{ds^3}\left[X(d^2xds - d^2sdx) + Y(d^2yds - d^2sdy) + Z(d^2zds - d^2sdz)\right]$$

συμπίπτει μετὰ τῆς πρωτευούσης καθέτου τῇ τροχιᾷ καὶ φέρεται πρὸς τὸ κέντρον καμπυλότητος ταύτης· καλοῦμεν δ' αὐτὴν *κεντρομόλον δύναμιν*.

κεντρομόλος δύναμις

92. Πρὸς ἐντελῆ κατάληψιν τῆς μεταξὺ τῶν ἐπιταχύνσεων καὶ τῶν δυνάμεων ὑφισταμένης σχέσεως θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα παραδείγματά τινα περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν καὶ ἐν τῇ κινητικῇ, ἀλλὰ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Hamitton, ἵνα ἐξοικειωθῶμεν μὲ τὴν χρῆσιν τῆς γραμμῆς, ἣν ἐκαλέσαμεν ὁδογράφον.

1) Κίνησις ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς δυνάμεως ἀναλόγου τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσει τοῦ *κινητοῦ*

Θεωρήσωμεν ἐν πρώτοις κινητὸν m κινούμενον ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα υ ἐπὶ κύκλου ($om = \rho$) ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεώς τινος. Ἡ ὁδογράφος τοῦ κινητοῦ εἶναι ἕτερος κύκλος ($o\mu = \upsilon$) διανυόμενος καὶ οὗτος ἰσοταχῶς ὑπὸ τοῦ σημείου μ μὲ ταχύτητα $\varphi = \frac{\upsilon^2}{\rho}$· ἀλλ' ἡ ταχύτης τοῦ μ συμπίπτει μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ m, ἧς ἡ ἔντασις εἶναι οὕτω $\frac{\upsilon^2}{\rho}$· ἡ ταχύτης αὕτη οὖσα κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα $o\mu$ εἶναι παράλληλος τῇ om, οὕτω·

Ἡ δύναμις ὑπὸ τὴν δρᾶσιν τῆς ὁποίας σῶμα μάζης m διαγράφει ἰσοταχῶς κύκλον ἀκτῖνος ρ φέρεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου o καὶ ἔχει ἔντασιν $\frac{m\upsilon^2}{\rho}$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ κινητὸν κρατούμενον διὰ νήματος στερεωμένου παρὰ τὸ κέντρον, ὑφίσταται τοῦτο τάσιν $\frac{m\upsilon^2}{\rho}$ ἣν ἐκαλέσαμεν φυγόκεντρον δύναμιν. Ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ κινητὸν m διανύει τὸν ὅλον κύκλον, ἡ *διάρκεια τῆς περιφορᾶς*, εἶναι

$$T = \frac{2\pi\rho}{\upsilon}$$

καὶ ἡ δύναμις ἐκφράζεται διὰ $\frac{m\upsilon^2}{\rho} = \frac{4\pi^2 m\rho}{T^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

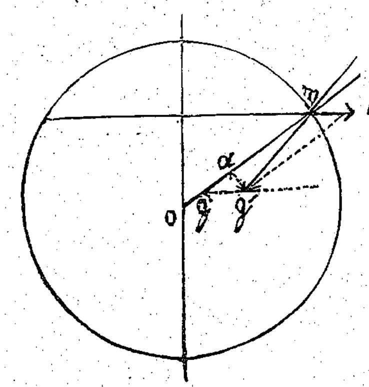
ἢ ἐὰν καλέσωμεν n τὸν ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου ἀριθμὸν περιφορῶν

$$n\mathrm{T}=1$$

ἐκφράζομεν τὴν δύναμιν διὰ

$$\frac{mv^2}{\rho}=4\pi^2 n^2 m\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

93. Θεωρήσωμεν λ. χ. βαρύ τι σῶμα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ὑπὸ γεωγραφικὸν πλάτος λ. ὡς ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονά της στροφῆς τῆς γῆς, τὸ σῶμα τοῦτο διαγράφει κύκλον ἀκτῖνος $\mathrm{r}\,\text{συν}\lambda$ ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς μὲ ταχύτητα $v=\omega\mathrm{r}\,\text{συν}\lambda=\frac{2\pi\mathrm{r}\,\text{συν}\lambda}{86400}$. ἡ ἐκ τῆς κινήσεως ταύτης τοῦ σώματος ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις ἔχει ἔντασιν $\omega^2\mathrm{r}\,\text{συν}\lambda=\frac{4\pi^2\mathrm{r}\,\text{συν}\lambda}{(86400)^2}$ καὶ φέρεται κατὰ τὴν ἀκτῖνα cm· ἐκτὸς τῆς δυνάμεως ταύτης, δρᾷ ἐπὶ τοῦ m καὶ ἡ ὑπὸ τῆς γῆς ἐξασκουμένη ἐπ᾽ αὐτοῦ ἕλξις g_λ, ἥτις φέρεται κατὰ τὴν ἀκτῖνα mo· ἡ φαινομένη κατακόρυφος τοῦ σώματος δὲν εἶναι λοιπὸν ἡ ἀκτὶς mo, ἀλλ᾽ ἡ mg' συνισταμένη ταύτης καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως· τὴν δὲ γωνίαν θ, ἣν σχηματίζει αὕτη μετὰ τῆς πραγματικῆς κατακορύφου τοῦ τόπου εὑρίσκομεν διὰ τῆς σχέσεως



Σχ. 80.

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{ag'}{am}=\frac{gg'\,\text{ημ}\lambda}{g_\lambda-ag}=\frac{\omega^2\mathrm{r}\,\text{ημ}\lambda\,\text{συν}\lambda}{g_\lambda-\omega^2\mathrm{r}\,\text{συν}\lambda}$$

τὸ βάρος τοῦ σώματος ἠλαττώθη κατὰ $\omega^2\mathrm{r}\,\text{συν}^2\lambda$ καὶ ἔμεινεν οὕτω

$$g_\lambda=G-\omega^2\mathrm{r}\,\text{συν}^2\lambda$$

ἔνθα G εἶναι ἡ παρὰ τὸν πόλον ἔντασις τῆς βαρύτητος ὅπου $\omega=o$ (τὴν γῆν ἐν τῷ ἄνω ὑπολογισμῷ ὑποθέτομεν ἐντελῶς σφαιρικήν). Ἐὰν λάβωμεν διὰ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἰσημερινοῦ $\mathrm{r}=6377000$ μέτρα ἔχομεν $\omega^2\mathrm{r}=0{,}0337$ καὶ

$$g_\lambda=G-0{,}0337\,\text{συν}^2\lambda$$

αἱ παρατηρήσεις τοῦ ἐκκρεμοῦς δίδουσι

$$G=9{,}7807 \text{ μέτρα}$$

καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται διὰ τὰ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ σημεῖα εἰς

$$g_0=G-0.0337=G\left(1-\frac{0.0337}{9{,}7807}\right)=G\left(1-\frac{1}{289}\right)=G\left(1-\frac{1}{(17)^2}\right)$$

οὕτω παρὰ τῷ ἰσημερινῷ ἡ ἐπερχομένη ἐν τῇ βαρύτητι τῶν σωμάτων ἐλάττωσις, ὡς ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονά της στροφῆς τῆς γῆς, ἰσοῦται τῷ $\frac{1}{289}$ τῆς ὑπὸ τῆς γῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ σώματος ἕλξεως· ἐὰν δὲ ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῆς γῆς ἦτο δέκα καὶ ἑπτάκις μείζων τῆς νῦν, τὸ βάρος τῶν παρὰ τὸν ἰσημερινὸν σωμάτων θὰ ἐξουδετεροῦτο ἐντελῶς ὑπὸ τῆς ἐκ τῆς περιστροφῆς ἀναπτυσσομένης φυγοκέντρου δυνάμεως (Huygens). Ἐὰν ἤδη ἐν τῇ τιμῇ τοῦ g_λ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἕλξιν τῆς γῆς G συναρτήσει τοῦ παρὰ τὸν ἰσημερινὸν φαινομένου βάρους $G=g_0+\omega^2 r$, ἔχομεν

$$g_\lambda=g_0+\omega^2 r-\omega^2 r\,\text{συν}^2\lambda=g_0+\omega^2 r\,\text{ημ}^2\lambda=g_0\left(1+\frac{1}{289}\,\text{ημ}^2\lambda\right)$$

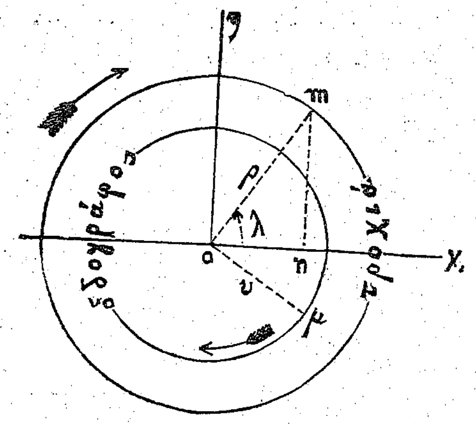
$$=g_0(1+0.00346\,\text{ημ}^2\lambda)$$

94. Ἐπανερχόμεθα ἤδη εἰς τὴν ἐπὶ τοῦ κύκλου ὁμοιόμορφον κίνησιν τοῦ m, καὶ θεωροῦμεν τὴν ἐπὶ διαμέτρου τινὸς κίνησιν τῆς προβολῆς n τοῦ m, ἥτις εἶναι ἁπλῶς ἡ ὁριζοντεία κίνησις τοῦ σημείου m· καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις ταύτης εἶναι λοιπὸν ἡ προβολὴ ἁρμονικὴ κίνησις

$$F=-\frac{v^2}{\rho}\,\text{συν}\lambda=-\frac{v^2}{\rho^2}\,on \ldots \quad (1)$$

τῆς ἐπιταχύνσεως τοῦ m· καὶ βλέπομεν ὅτι

ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ n, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἐπ᾽ αὐτοῦ δρῶσα δύναμις, φέρεται πρὸς τὸ σημεῖον o καὶ εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀποστάσει on τοῦ κινητοῦ n ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου o.



Σχ. 81.

Ἐὰν τὸ χρονικὸν διάστημα ἐν ᾧ τὸ n διαγράφει δὶς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου, ὅπερ καλοῦμεν *πλάτος τῆς αἰωρήσεως* τοῦ κινητοῦ n, εἶναι T, ἡ ἐπὶ τούτου δρῶσα δύναμις ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς διαρκείας τῆς αἰωρήσεως διὰ τῆς σχέσεως

$$F=-\frac{4\pi^2 m}{\mathrm{T}^2}\,on=-\frac{4\pi^2 m}{\mathrm{T}^2}\,x=-4\pi^2 m n^2 x=-\mu^2 m x \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ὑποθέσωμεν ἤδη κινητὸν n' διαγράφον ἰσοταχῶς κύκλον μὲ κέντρον τὸ o, ἀκτῖνος $\rho'\lesseqgtr\rho$ καὶ μὲ ταχύτητα $v'\lesseqgtr v$· ἡ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου προβολὴ τούτου κινεῖται κατὰ τὰ προηγούμενα ὑπὸ τὴν δρᾶσιν δυνάμεως $-\frac{v'^2}{\rho'^2}\,on'$ φερομένης πρὸς τὸ κέντρον o· ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν δύναμιν ταύτην ἴσην τῇ $\frac{v^2}{\rho^2}$ *on* εἰς ἣν ὀφείλεται ἡ κίνησις τοῦ *n* δέον νὰ ἔχωμεν

$$\frac{v}{\rho} = \frac{v'}{\rho'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

οἱ κύκλοι *m* καὶ μ διανύονται οὕτω ἐν ἴσοις χρόνοις καὶ
ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ πλάτους ταύτης, ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἐκ τῆς ἐντάσεως τῆς ἀναλόγως τῇ ἀποστάσει ἑλκούσης δυνάμεως·
ἔχομεν οὕτω

$$\mu^2 mx = \frac{4\pi^2 m\rho}{T^2}\text{συν}\theta \qquad \text{ἢ} \quad \mu^2 m\rho\,\text{συν}\theta = \frac{4\pi^2 m\rho}{T^2}\text{συν}\theta$$

ὅθεν

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

95. Ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐκκρεμοῦς (51) ἡ ἐφαπτομένη δύναμις εἶναι

$$mg\,\text{ημ}\theta$$

ἢ ἂν ὑποθέσωμεν τὴν γωνίαν θ ἀρκούντως μικρὰν ὥστε νὰ θέσωμεν ἡμθ=θ ἔχομεν $s = R\theta$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη δύναμις ἐκφράζεται διὰ

$$mg\theta = m\frac{g}{R}s$$

ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως εἶναι (4)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

καὶ ἡ ἡμιαιώρησις

$$T' = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

οἵαν εὕρομεν καὶ ἐν τῇ κινητικῇ (§ 51.3).

ἁρμονικὴ κίνησις ἐπὶ ἐλλείψεως

96. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὸ ἀναλόγως τῇ ἀποστάσει *om* ἑλκόμενον σημεῖον *m* ὑπὸ δυνάμεως $\mu^2 om$ ἐνοικούσης παρὰ τὸ κέντρον *o*, κέκτηται καὶ ἀρχικήν τινα ταχύτητα v_0 κατὰ τὸ σημεῖον *m*. Εἴδομεν (§38.1) ὅτι ἡ τροχιὰ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι ἔλλειψις μὲ κέντρον τὸ *o*. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου *o* φέρωμεν εὐθεῖαν ομ ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ταχύτητι, τὸ σημεῖον μ διαγράφει τὴν ὁδογράφον γραμμήν, ἔχομεν δὲ (36.8) ἐκ τῆς σχέσεως

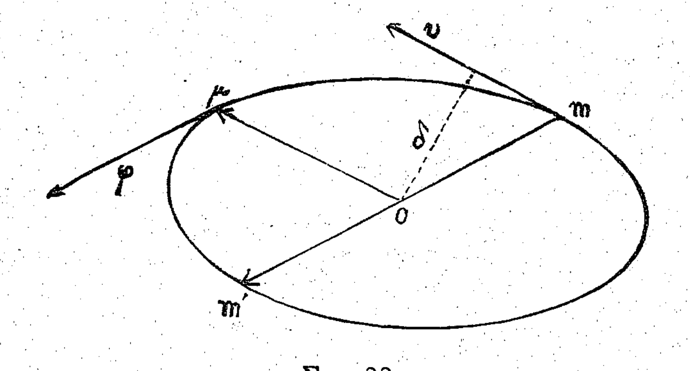
$$v\delta = 2\gamma, \quad v = \frac{2\gamma}{\delta}$$

ἔνθα γ παριστᾷ τὸ ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου διαγραφόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος *om* ἐμβαδόν. Ἀλλ' ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἀπολλωνίου

$$\delta.\,\text{ομ} = ab \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{1}{\delta} = \frac{\text{ομ}}{ab}$$

ἔνθα ομ εἶναι ἡ συζυγὴς τῇ *om* ἀκτίς· ὥστε

$$v = \frac{2\gamma}{\delta} = \frac{2\gamma}{ab}\text{ομ} = \mu.\text{ομ} \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$



Σχ. 82.

Ἡ ὁδογράφος μ τοῦ ταχύτης *κινητοῦ m συμπίπτει λοιπὸν τῇ τροχιᾷ τοῦ αὐτοῦ κινητοῦ, καὶ ἡ ταχύτης παρὰ τῷ σημείῳ m εἶναι ἀνάλογος τῇ συζυγῇ τῆς om ἀκτῖνι.*

Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι τὴν ταχύτητα ταύτην θ' ἀπέκτα τὸ κινητὸν πίπτον ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἑλκούσης τοῦτο δυνάμεως ἀπὸ κύκλου ἀκτῖνος $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ καὶ ὁμοκέντρου τῇ τροχιᾷ.

Ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐλλείψεως, τὸ ἐμβαδὸν *moμ* εἶναι σταθερόν, *(ὅθεν καὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ κινητὸν μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ m εἰς τὸ μ εἶναι σταθερὸς)*, τὰ ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ομ διαγραφόμενα ἐν ἴσοις χρόνοις ἐμβαδὰ εἶναι ἴσα, καὶ *τὸ σημεῖον μ κινεῖται ἐπὶ τῆς ὁδογράφου, ὡς εἰ εὑρίσκετο ὑπὸ τὴν δρᾶσιν τῆς κεντρικῆς δυνάμως, ἥτις διέπει τὴν κίνησιν τοῦ m· οὕτω*
ἡ ὁδογράφος τοῦ μ εἶναι ἡ (m') ἔνθα m' ἀντίκειται κατὰ διάμετρον τῷ m.

Καὶ τἀνάπαλιν, *ἐὰν κινητόν τι m διαγράφῃ ἔλλειψιν μὲ κέντρον* ἐπιτάχυνσις
0, οὕτως ὥστε τὰ ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος om διαγραφόμενα ἐμβαδὰ νὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων, ἡ διέπουσα τὴν κίνησιν τοῦ κινητοῦ m δύναμις φέρεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς τροχιᾶς καὶ εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀκτῖνι om.
Τῷ ὄντι καθ' ὑπόθεσιν

$$v\delta = 2\gamma \quad \text{ὅθεν} \quad v = \frac{2\gamma}{ab}\text{ομ}$$

Ἡ ὁδογράφος (μ) συμπίπτει οὕτω τῇ τροχιᾷ τοῦ αὐτοῦ κινητοῦ καὶ τὸ σημεῖον μ κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς διεπούσης τὴν κίνησιν *τοῦ* m *κεντρικῆς δυνάμεως. Ἡ ὁδογράφος τοῦ* μ *εἶναι ἡ* (m') *καὶ ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως* μ *εἶναι*

$$\frac{2\gamma}{ab}om'$$

φέρεται δὲ αὕτη παραλλήλως τῇ om'. ἡ ταχύτης ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ὁδογράφου εἶναι

$$\varphi = \frac{2\gamma}{ab} \cdot \frac{2\gamma}{ab}om' = \frac{4\gamma^2}{a^2b^2}om' = \mu.^2 om' \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν φοράν. Ἀλλ' ἡ ἐπὶ τῆς ὁδογράφου ταχύτης αὕτη εἶναι *ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ* m, *ἥτις εἶναι οὕτω ἀνάλογος τῇ ἀποστάσει* om *τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου καὶ φέρεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦτο.*

διάρκεια περιφορᾶς

Τὴν διάρκειαν T τῆς περιφορᾶς δίδει ἡ σχέσις

$$T = \frac{\pi ab}{\gamma} \quad \text{καὶ ἐπειδὴ} \quad \frac{ab}{\gamma} = \frac{2}{\mu}$$

ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

οὕτω· *Ἡ διάρκεια τῆς περιφορᾶς εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν διαστάσεων τῆς τροχιᾶς, ἐξαρτᾶται δ' ἁπλῶς ἐκ τῆς ἐντάσεως τῆς ἑλκούσης δυνάμεως, ἣν ὁρίζει ἡ σταθερὰ* μ.

Τὸ χρονικὸν διάστημα t ἐν ᾧ ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς om στρέφεται κατὰ γωνίαν θ ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{\text{εμβθ}}{\text{εμβ.ελλ.}} = \frac{t}{T} = \frac{\varphi}{2\pi.}$$

ἔνθα φ εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα τῇ θ γωνία ἐν τῷ κύκλῳ, οὗτινος προβολὴ εἶναι ἡ ἔλλειψις· οὕτω

$$t = \frac{\varphi}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ἐὰν ἐν τῇ ἄνω κινήσει ὑποθέσωμεν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἔχομεν τὴν ὑπὸ σταθερᾶς τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φορὰν δυνάμεως διεπομένην παραβολικὴν κίνησιν, ἣν πρῶτος ὑπέδειξεν ὁ Γαλιλαῖος.

ἄξονες τῆς τροχιᾶς

Τοὺς ἄξονας τῆς ἐλλείψεως, ἣν διαγράφει τὸ ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς δυνάμεως $\mu.^2 om$ κινούμενον κινητὸν m ὁρίζομεν οὕτω· τὴν ταχύτητα εὕρομεν (1)

$$v_0^2 = \mu^2\, \overline{o\mu}_0^2$$

ἀλλ' ἐκ τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ Ἀπολλωνίου

$$\overline{o\mu}_0^2 + \overline{om}_0^2 = a^2 + b^2 = \frac{v_0^2}{\mu^2} + \overline{om}_0^2 \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ἀφ' ἑτέρου $v_0\delta_0 = 2\gamma = \mu.ab$

καὶ ἐὰν καλέσωμεν α τὴν γωνίαν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος v_0 μετὰ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος om_0 ἔχομεν $\delta_0 = om_0\,\text{ἡμα}$, ὥστε

$$ab = \frac{v_0 . om_0\,\text{ἡμα}}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

αἱ σχέσεις (5) καὶ (6) ὁρίζουσι τὰ μεγέθη τῶν ἡμιαξόνων a καὶ b. Τὴν θέσιν τοῦ μεγάλου ἄξονος ὁρίζομεν διὰ τῆς γνωστῆς σχέσεως

$$\frac{\text{συν}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{ἡμ}^2\theta}{b^2} = \frac{1}{om_0^2}$$

ἔνθα θ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ μεγάλου ἄξονος καὶ τῆς ἀρχικῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος περιεχομένη γωνία.

Ἵνα ἡ τροχιὰ ᾖ κυκλικὴ δέον νὰ ἔχωμεν $a = b = \rho$ ὅθεν

$$\mu = \frac{v_0}{\rho}$$

καὶ ἡ δύναμις εἶναι

$$\mu^2 . \rho = \frac{v_0^2}{\rho^2}\rho = \frac{v_0^2}{\rho}$$

ὅπερ μᾶς ἦτο ἤδη γνωστόν.

Ἀναλυτικῶς. Τὴν ἄνω κίνησιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συγκειμένην ἐκ δύο ἁπλῶν ἁρμονικῶν κινήσεων

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ἐπὶ καθέτων ἀλλήλαις εὐθυγράμμων τροχιῶν, δι' ὧν φέρεται ἓν καὶ τὸ αὐτὸ κινητόν· ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$x = a\,\text{συν}\mu(t-\tau) \qquad y = b\,\text{συν}\mu(t-\tau_1) \ldots\ldots \quad (8)$$

ἔνθα a b τ καὶ τ_1 εἶναι σταθεραὶ ὁριζόμεναι ἐκ τῶν συνθηκῶν τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως τοῦ κινητοῦ.

Ἡ ταχύτης εἶναι

$$\frac{dx}{dt} = -a\mu\,\text{ἡμ}..\mu(t-\tau) \qquad \frac{dy}{dt} = -b\mu\,\text{ἡμ}\mu(t-\tau_1) \ldots\ldots \quad (9)$$

Ὑποθέσωμεν ὅτ. τὸ κινητὸν ἐρρίφθη ἀρχικῶς ἐκ σημείου τινὸς τῆς εὐθείας

ox κειμένου εἰς ἀπόστασιν c ἀπὸ τοῦ κέντρου o μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα V_0 σχηματίζουσαν γωνίαν α μετὰ τοῦ ox ἔχομεν

$$\text{διὰ } t = o \quad y = o \quad x = c \quad \frac{dx}{dt} V_0 = \text{συν}\alpha \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \text{ημ}\alpha$$

καὶ αἱ ἄνω σχέσεις δίδουσι

$$a\,\text{συν}(\mu\tau) = c \quad b\,\text{συν}(\mu\tau_1) = o \quad V_0\text{συν}\alpha = a\mu\,\text{ημ}(\mu\tau) \quad V_0\text{ημ}\alpha = b\mu\,\text{ημ}(\mu\tau_1)$$

ἀναπτύσσοντες ἤδη τὰς σχέσεις (2) καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς ἄνω τιμὰς ἔχομεν

$$\begin{aligned} x &= a[\text{συν}(\mu t)\text{συν}(\mu\tau) + \text{ημ}(\mu t)\text{ημ}(\mu\tau)] = c\,\text{συν}(\mu t) - \frac{1}{\mu} V_0 \text{συν}\alpha\,\text{ημ}(\mu t) \\ y &= b[\text{συν}(\mu t)\text{συν}(\mu\tau_1) + \text{ημ}(\mu t)\text{ημ}(\mu\tau_1)] = \frac{1}{\mu} V_0 \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}(\mu t) \end{aligned} \quad \ldots\ldots (8')$$

καὶ

$$\xi = \frac{dx}{dt} = -\mu c\,\text{ημ}(\mu t) + V_0 \text{συν}\alpha\,\text{συν}(\mu t) \qquad \eta = \frac{dy}{dt} = V_0 \text{ημ}\alpha\,\text{συν}(\mu t) \quad (9')$$

ὅθεν ἡ τροχιὰ

$$(x\,\text{ημ}\alpha - y\,\text{συν}\alpha)^2 + \frac{\mu^2 c^2}{V_0} y^2 = c^2 \text{ημ}^2\alpha \ldots\ldots\ldots (10)$$

ἔλλειψις μὲ κέντρον τὸ 0· καὶ ἡ ὁδογράφος

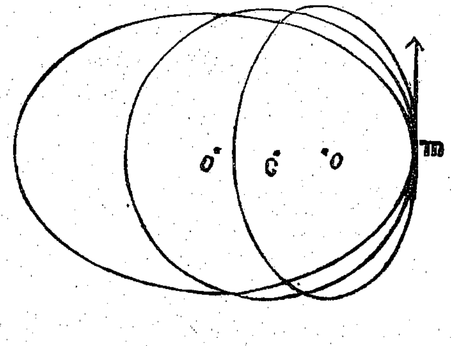
$$(\xi\,\text{ημ}\alpha - \eta\,\text{συν}\alpha)^2 + \frac{\mu^2 c^2}{V_0^2} \eta^2 = \mu^2 c^2 \text{ημ}^2\alpha \ldots\ldots\ldots (11)$$

ἔλλειψις ὁμόκεντρος καὶ ὁμοία τῇ τροχιᾷ.

Βλέπομεν δὲ ἐν ταῖς σχέσεσιν (2') καὶ (3'), ὅτι ἡ κίνησις εἶναι περιοδικὴ καὶ ἡ περίοδος $\frac{2\pi}{\mu}$· ἡ διάρκεια μιᾶς περιφορᾶς εἶναι οὕτω

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

97. Θεωρήσωμεν σῶμα m κινούμενον ἐπὶ περιφερείας κύκλου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεως φερομένης πρὸς τὸ κέντρον τούτου καὶ μεταβαλλομένης ἀναλόγως τῇ ἀποστάσει τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου.



Σχ. 83.

Ἡ ἐπὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας ταχύτης αὐτοῦ εἶναι $v = \mu\rho$ ὅτε αἴφνης τὸ ἕλκον κέντρον μετατοπίζεται

ἀπὸ τοῦ σημείου c εἰς ἄλλο τι σημεῖον o τῆς ἀκτῖνος cm· ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης τὸ κινητὸν m θὰ διαγράψῃ ἔλλειψιν μὲ κέντρον τὸ o, ἧς ὁ ἕτερος τῶν ἀξόνων συμπίπτει μετὰ τῆς ἀκτῖνος co καὶ ἔχει μέγεθος $om = \rho - co$· καὶ ἂν μὲν $om < \rho$, ὁ ἄξων οὗτος εἶναι ὁ μικρὸς ἄξων τῆς ἐλλείψεως· ἡ ταχύτης παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ εἶναι $\mu\rho$· ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν, ὅτι ἡ αὐτὴ ταχύτης εἶναι $\mu.on'$ ἔνθα on' εἶναι ὁ ἕτερος ἡμιάξων τῆς τροχιᾶς, οὕτω $on' = \rho$ καὶ ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου· ἂν δὲ $om > \rho$, ὁ ἄξων οὗτος εἶνας ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως, καὶ ὁ μικρὸς ἄξων ἰσοῦται τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου.

98. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι μετατοπίζομεν τὸ ἕλκον κέντρον οὐχὶ πλέον ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος cm ἀλλὰ μεταφέρομεν τοῦτο ἐπὶ τῆς περιφερείας παρὰ τῷ σημείῳ o οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον moc νὰ ᾖ ἰσόπλευρον.

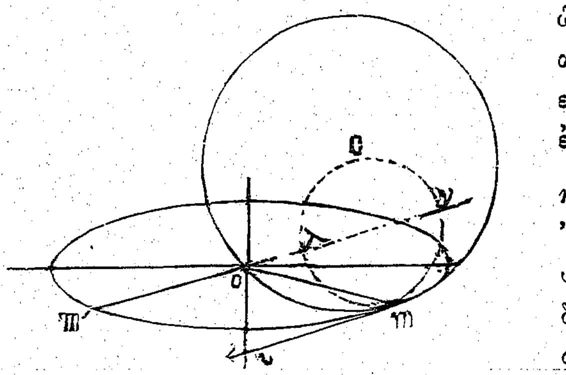
Ἡ τροχιὰ θὰ εἶναι ἔλλειψις ἔχουσα ὡς κέντρον τὸ σημεῖον o.

Ἡ ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι $v = \mu.cm$

Ἡ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι $\mu.om'$ ἔνθα om' εἶναι ἡ συζυγὴς τῇ om διάμετρος· ἔχομεν λοιπὸν

$$\mu.cm = \mu.om' \quad \text{ἢ} \quad cm = om'$$

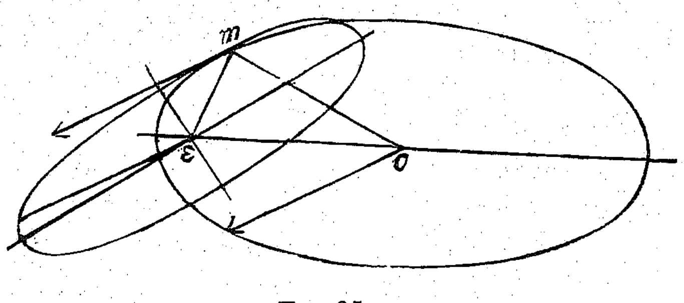
ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς $cm = om$ ὥστε $om = om'$ αἱ δύο συζυγεῖς ἀκτῖνες om καὶ om' εἶναι λοιπὸν ἴσαι καὶ οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως διχοτομοῦσι τὴν γωνίαν $\widehat{mom'}$.



Σχ. 84.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς cm ὡς διαμέτρου γράψωμεν κύκλον, ὁρίζει οὗτος ἐπὶ τῆς διαμέτρου om' δύο τμήματα on καὶ ol ἴσα τοῖς ἡμιάξοσι τῆς τροχιᾶς.

99. Θεωρήσωμεν κινητὸν m διαγράφον ἔλλειψιν ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεως φερομένης πρὸς τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως o, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αἴφνης, ἐν ᾧ τὸ κινητὸν εὑρίσκεται κατὰ τὸ σημεῖον m, τὸ κέντρον τῆς ἕλξεως μετετοπίσθη παρὰ τῇ ἑστίᾳ ε τῆς τροχιᾶς· ζητεῖται ἡ νέα τροχιά. Εἶναι καὶ αὕτη



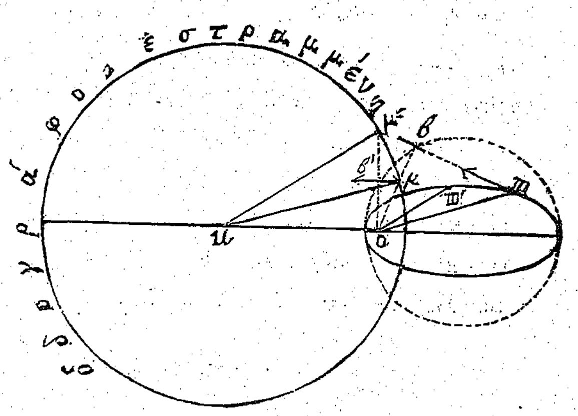
Σχ. 85.

ἔλλειψις ἔχουσα ὡς κέντρον τὸ σημεῖον ε· δεῖξαι, ὅτι ὁ ἄξων τῆς νέας ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $m\varepsilon o$.

2) Κίνησις ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν κεντρικῆς δυνάμεως ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσει τοῦ κινητοῦ.

ἡ τροχιὰ εἶναι κωνικὴ τομή

100. Θεωρήσωμεν ἤδη σῶμα m κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεως, ἥτις τείνει πρὸς τὸ κέντρον o καὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου· ἔστωσαν m καὶ m' δύο διαδοχικαὶ θέσεις τοῦ κινητοῦ, οὗτινος τὴν κίνησιν διέπει δύναμις ἐντάσεως $\frac{\mu}{om^2}$ φερομένη πρὸς τὸ ἕλκον κέντρον o. Ἐὰν ἐκ τοῦ o καταβιβάσωμεν καθέτους $o\beta$, $o\beta'$ ἐπὶ τὰς παρὰ τοῖς αὐτοῖς σημείοις ταχύτητας v καὶ v', καὶ προεκβάλωμεν ταύτας μέχρι τῶν σημείων μ καὶ μ' οὕτως ὥστε $o\beta.o\mu=2\gamma=o\beta'.o\mu'$, $o\mu$ καὶ $o\mu'$ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι ταῖς ταχύτησι, καὶ συνεπῶς τῇ ἀκτῖνι om καθ' ἣν φέρεται ἡ ἐπιτάχυνσις· ἀλλὰ



Σχ. 86.

$$\widehat{mom'}=\frac{2\gamma}{\rho^2}=\widehat{\mu x\mu'}=\frac{2\gamma}{\mu}\frac{\mu}{\rho^2}=\frac{2\gamma}{\mu}\mu\mu'$$

τὸ τόξον $\mu\mu'$ εἶναι λοιπὸν ἀνάλογον τῇ γωνίᾳ $\widehat{\mu x\mu'}$ ὥστε $\mu\mu'$ *εἶναι τόξον κύκλου*· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ προβολὴ β τοῦ ἕλκοντος κέντρου ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς εἶναι κύκλος ἢ εὐθεῖα· γνωρίζομεν δέ, ὅτι τὴν ἰδιότητα ταύτην κέκτηνται μόναι αἱ κωνικαὶ τομαί, ὧν ἡ ἑτέρα τῶν ἑστιῶν συμπίπτει μετὰ ἕλκοντος κέντρου o.

ὁδογράφος

τὴν ἀκτῖνα r τοῦ ὁδογράφου κύκλου ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{\mu\mu'}{dt}=\frac{\mu}{\rho^2}=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega=r\frac{2\gamma}{\rho^2}$$

ὅθεν

$$r=\frac{\mu}{2\gamma}$$

Ἵνα χαράξωμεν γεωμετρικῶς τὸν ὁδογράφον κύκλον, ἐκ τοῦ σημείου μ φέρομεν τὴν μx παράλληλον τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι om καὶ κατὰ συνέπειαν κάθετον τῷ τόξῳ $\mu\mu'$ τῆς ὁδογράφου· ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ ἀγνώστου κέντρου· ἐὰν ἐπὶ ταύτης λάβωμεν μῆκος $\mu x=\frac{\mu}{2\gamma}$ ἔχομεν τὸ κέντρον x, ὅπερ λόγῳ συμμετρίας κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς τροχιᾶς, ἡ εὐθεῖα xo ὁρίζει οὕτω τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος.

τροχιὰ

100. α. Ἄλλως· ἡ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαγραφομένη τροχιὰ εἶναι ἔλλειψις, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν ἑστιῶν συμπίπτει μετὰ τοῦ ἕλκοντος κέντρου. Ἡ ἐπιτάχυνσις φ ἐν πάσῃ κινήσει εἶναι (17.3)

$$\varphi=\frac{v^2}{mk'}$$

ἔνθα k' εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ κατὰ τὸ σημεῖον m κέντρου καμπυλότητος k τῆς τροχιᾶς ἐπὶ τῆς φορᾶς τῆς ἐπιταχύνσεως· ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\varphi=\frac{v^2}{mk'}=\frac{\mu}{om^2}\quad \text{καὶ}\quad v=\frac{2\gamma}{\delta}=\frac{2\gamma}{om\,\text{συν}\alpha}$$

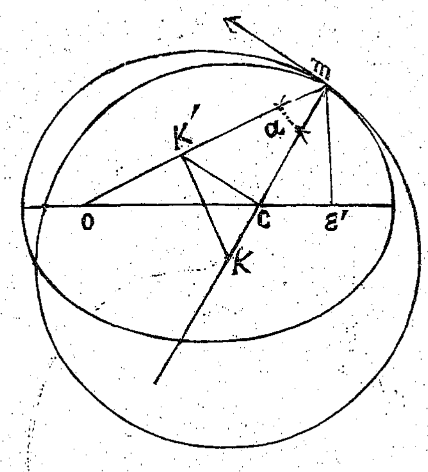
ὅθεν δι' ἀντικαταστάσεως

$$\frac{4\gamma^2}{mk'.om^2\text{συν}^2\alpha}=\frac{\mu}{om^2}\ \text{ἢ}\ \frac{4\gamma^2}{mk'\text{συν}^2\alpha}=\mu$$

καὶ ἐπειδὴ $mk'=mk\,\text{συν}\alpha$ ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$mk\,\text{συν}^3\alpha=\frac{4\gamma^2}{\mu}=\text{σταθερὰ}=R\,\text{συν}^3\alpha$$

ἡ τελευταία δ' αὕτη σχέσις εἶναι ἡ ὁρίζουσα τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος R τῶν κωνικῶν τομῶν.



Σχ. 87.

Εὑρόντες οὕτω τὸ κέντρον καμπυλότητος k φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὴν kk' κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα om· ἐκ τοῦ σημείου k' φέρομεν τὴν $k'c$ κάθετον ἐπὶ τὴν mk. oc εἶναι ὁ ἄξων τῆς κωνικῆς τομῆς. Φέρομεν εἶτα τὴν $m\varepsilon'$ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς εὐθείας mk γωνίαν α·
Ἐὰν ἡ $m\varepsilon'$ εἶναι παράλληλος τῇ oc ἡ τροχιὰ εἶναι παραβολή.
Ἐὰν τὸ ε' πίπτῃ μεταξὺ τοῦ o καὶ c ἡ τροχιὰ εἶναι ὑπερβολή.
Ἐὰν τὸ c πίπτῃ μεταξὺ τοῦ o καὶ ε' ἡ τροχιὰ εἶναι ἔλλειψις.

101. Γνωρίζοντες ἤδη τὴν φύσιν τῆς τροχιᾶς ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἕλκοντος κέντρου λάβωμεν τὴν ἑτέραν ἑστίαν ε ὡς κέντρον τῆς ὁδογράφου ἀποδεικνύομεν εὐκολώτατα ὅτι συμπίπτει αὕτη μετὰ τοῦ ἰθύνοντος κύκλου τῆς τροχιᾶς.

ταχύτης

Τὴν ταχύτητα παρὰ τῷ σημείῳ m τῆς τροχιᾶς ἔχομεν τῷ ὄντι ἐκ τῆς σχέσεως (36.8) $v.\delta=v.oA=2\gamma$· τὸ σημεῖον A (Σχ. 88) ὡς γνωστὸν εὑρίσκεται ἐπὶ κύκλου, οὗτινος ἡ διάμετρος ἰσοῦται τῷ μεγάλῳ ἄξονι τῆς ἐλλείψεως· ἔχομεν οὕτω

$$0A\cdot\varepsilon B=0C.0D=(a-k0)(a+k0)=a^2-k0^2=b^2$$

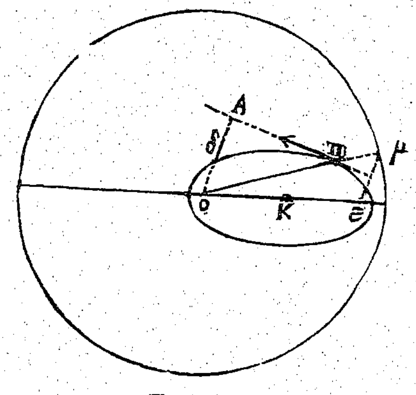
ἔνθα a εἶναι ὁ μέγας καὶ b ὁ μικρὸς ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ταχύτητι ἔχομεν

$$v = \frac{2\gamma}{0A} = 2\gamma . \frac{\varepsilon B}{b^2} = \frac{\gamma}{b^2}\,\varepsilon\mu \ldots\ldots (1)$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ εμ εἶναι κάθετος τῇ ταχύτητι ma βλέπομεν, ὅτι ὁ κύκλος ομ εἶναι ἡ ὁδογράφος τοῦ κινητοῦ ἐστραμμένη κατὰ 90^0.

Ἡ πραγματικὴ ὁδογράφος εἶναι ὁ ἐν τῷ σχήματι 89 κύκλος.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα (Σχ. 88) $o\mathrm{A}m$ καὶ $\varepsilon\mathrm{B}m$ δίδουσι



Σχ. 88.

$$\frac{o\mathrm{A}}{\varepsilon\mathrm{B}} - \frac{om}{m\varepsilon} = \frac{om}{o\mu - om} = \frac{\rho}{2a-\rho} \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{1}{o\mathrm{A}} = \left[\frac{2a}{\rho} - 1\right]\frac{1}{\varepsilon\mathrm{B}}$$

ἔνθα ρ ἐμφαίνει τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα om· καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τιμῇ τῆς ταχύτητος ἔχομεν

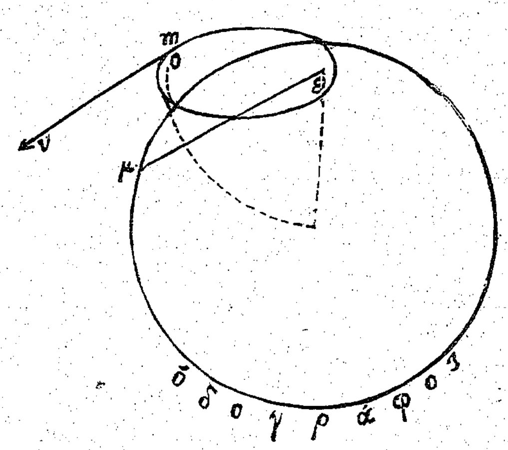
$$v = \frac{2\gamma}{o\mathrm{A}} = \frac{2\gamma}{\varepsilon\mathrm{B}}\left(\frac{2a}{\rho} - 1\right) = \frac{4\gamma}{\varepsilon\mu}\left(\frac{2a}{\rho} - 1\right) = \frac{4\gamma^2}{vb^2}\left(\frac{2a}{\rho} - 1\right)$$

ὅθεν

$$v^2 = \frac{4\gamma^2}{b^2}\left(\frac{2a}{\rho} - 1\right) \ldots\ldots (2)$$

ἀλλὰ $\gamma\mathrm{T} = \pi ab$ ἔνθα T ἐμφαίνει τὸν χρόνον (διάρκεια περιφορᾶς) καθ' ὃν τὸ κινητὸν διαγράφει τὴν ὅλην τροχιάν του· καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ γ ἔχομεν

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{\mathrm{T}^2}\left(\frac{2a}{\rho} - 1\right) \ldots (3)$$



Σχ. 89.

ἐπιτάχυνσις

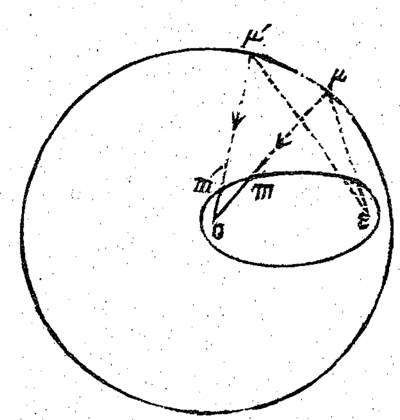
102. Τὴν κεντρικὴν ἐπιτάχυνσιν $\frac{\mu}{\rho^2}$ εὑρίσκομεν παρατηροῦντες ὅτι

ἡ ταχύτης παρὰ τῷ σημείῳ m εἶναι $\frac{\gamma}{b^2}$ εμ καὶ κάθετος τῇ ἀκτῖνι εμ·

ἡ ταχύτης παρὰ τῷ σημείῳ m' εἶναι $\frac{\gamma}{b^2}$ εμ' καὶ κάθετος τῇ ἀκτῖνι εμ'.

ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι λοιπὸν $\frac{\gamma}{b^2}$ μμ' καὶ κάθετος τῷ τόξῳ κύκλου μμ' φέρεται δηλαδὴ πρὸς τὸ κέντρον τούτου τὸ 0.

Ἐν τῷ κύκλῳ ομ ἔχομεν



Σχ. 90.

$$\mu\mu' = o\mu . \omega = 2a . \frac{2\gamma}{\rho^2} = \frac{4a\gamma}{\rho^2}$$

ὅθεν

κεντρικὴ ἐπιτάχυνσις

$$\frac{\mu}{\rho^2} = \frac{\gamma}{b^2}\mu\mu' = \frac{4a\gamma^2}{b^2} . \frac{1}{\rho^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2}\,\frac{1}{\rho^2}$$

ὥστε ἡ ὁρίζουσα τὴν ἔντασιν τῆς ἐπιταχύνσεως σταθερὰ μ εἶναι

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2} \quad \text{ὅθεν καὶ} \quad \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$ διάρκεια περιφορᾶς

103. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω(101.3) τιμῇ τῆς ταχύτητος ἔχομεν

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a}\right)$$

Ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ κινούμενον σῶμα εὑρίσκεται κατὰ τὸ σημεῖον μ τοῦ ἰθύνοντος κύκλου, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς κεντρικῆς δυνάμεως $\frac{\mu}{o\mu^2}$. πίπτει τοῦτο τότε πρὸς τὸ κέντρον 0 καὶ φθάσαν εἰς τὸ σημεῖον m κέκτηται ταχύτητα (14.α.3.1)

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a}\right)$$

ἴσην δηλαδὴ τῇ ταχύτητι, ἣν κέκτηται πραγματικῶς τὸ κινητὸν ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του παρὰ τῷ σημείῳ m· οὕτω

Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸ σημεῖον m ἰσοῦται τῇ ταχύτητι, ἣν θ' ἀπέκτα τοῦτο πίπτον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς κεντρικῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ σημείου μ μέχρι τοῦ m.

104. Ἐὰν ἐν τῇ ἄνω σχέσει(103) ἀντικαταστήσωμεν v καὶ ρ διὰ τοῦ v_0 καὶ ρ_0 ἔχομεν ἄξονες τῆς τροχιᾶς

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\rho_0} - \frac{v_0^2}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Τὸ μέγεθος τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς τροχιᾶς ἐξαρτᾶται οὕτω ἐκ μόνης τῆς ἐντάσεως τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος v_0, οὐχὶ δὲ καὶ ἐκ τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος κλίσεως ταύτης α· ὥστε ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0 ἔχει τὴν φορὰν τῆς ἀρχικῆς ἀκτῖνος ρ_0, ἡ ἐλλειπτικὴ τροχιὰ γίνεται εὐθύγραμμος, ἧς τὰ ἄκρα εἶναι αἱ ἑστίαι· τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἄξονος διατηρεῖται, ὥστε τὸ κινητὸν θ' ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου $\mu(o\mu=2a)$ ὅπου ἡ ταχύτης του ἰσοῦται τῷ μηδενί· ἐκεῖθεν ἐπανέρχεται τὸ κινητὸν πρὸς τὸ σημεῖον 0· διερχόμενον δὲ διὰ τοῦ σημείου m κέκτηται τὴν ταχύτητα v_0, ἣν εἶχεν ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου· ὅθεν ἡ ἄνω (103) πρότασις· ἔχομεν εἶτα

$$\frac{b^2}{a}=a(1-e^2)=\frac{v_0^2\rho_0^2\,\eta\mu^2\alpha}{\mu}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ὁ μικρὸς ἄξων τῆς τροχιᾶς ἐξαρτᾶται λοιπὸν ὄχι μόνον ἐκ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος v_0 καὶ ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ρ_0, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς γωνίας α, ἣν περιλαμβάνουσιν οὗτοι.

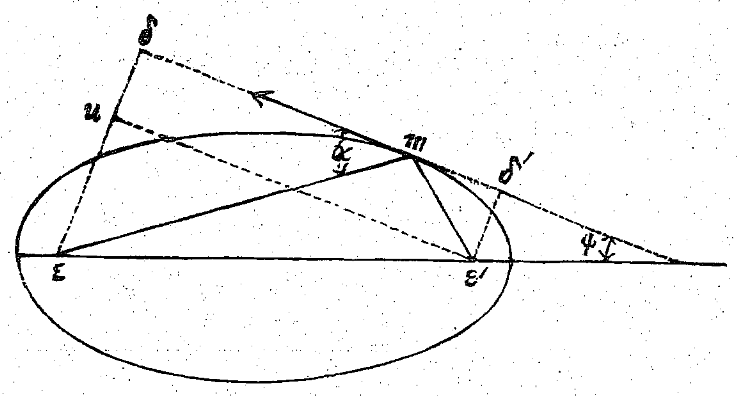
Τὴν γωνίαν ψ τοῦ μεγάλου ἄξονος καὶ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος ἔχομεν οὕτω

$$\varepsilon'\kappa=\varepsilon\varepsilon'\sigma\upsilon\nu\psi=ae\,\sigma\upsilon\nu\psi=\delta\delta'$$

ἀλλὰ $$\delta m=\varepsilon m\,\sigma\upsilon\nu\alpha \quad m\delta'=\varepsilon' m\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\delta m+m\delta'=\delta\delta'=(\varepsilon m+\varepsilon' m)\sigma\upsilon\nu\alpha=a\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ὥστε $$ae\,\sigma\upsilon\nu\psi=a\,\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{ἢ} \quad e\,\sigma\upsilon\nu\psi=\sigma\upsilon\nu\alpha \ \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$



Σχ. 91.

Προεκβάλωμεν (Σχ. 88) τὴν $m\varepsilon$ μέχρι τοῦ m_1 ἔνθα συναντᾷ τὴν ἔλλειψιν ἔχομεν προφανῶς

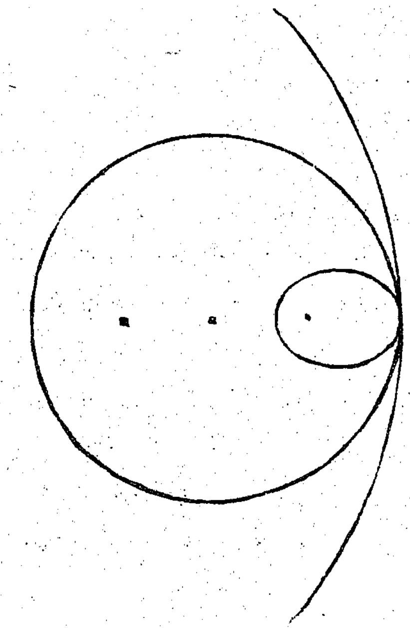
$$om_1+mm_1=o\mu+m\mu$$

ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν ἔλλειψιν ἔχουσαν ὡς ἑστίας τὰ σημεῖα o καὶ m καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου μ, διέρχεται αὕτη καὶ διὰ τοῦ σημείου m_1, καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ· οὕτω αἱ διάφοροι ἐλλειπτικαὶ τροχιαί, ἃς δύναται νὰ διαγράψῃ τὸ κινητὸν μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, ἧς μεταβάλλεται ἡ φορά, ἐφάπτονται μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως.

105. Κινητόν τι m κινεῖται ἐπὶ κύκλου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἑλκούσης δυνάμεως ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως καὶ

φερομένης πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου C. στιγμιαίως ἡ ἕλκουσα δύναμις μετατοπίζεται ἀπὸ τοῦ C εἰς τὸ μέσον 0 τῆς ἀκτῖνος Cm. ὁρῖσαι τὴν ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης κίνησιν τοῦ κινητοῦ.

Τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα ὁρίζει ἡ σχέσις $v_0^2=\frac{\mu}{r}<\frac{2\mu}{\rho_0}$ ἔνθα $r=2\rho_0$ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ὥστε τὸ κινητὸν θὰ διαγράψῃ ἔλλειψιν ἔχουσαν τὸ σημεῖον m ὡς κορυφὴν καὶ τὸν μεγάλον ἄξονα συμπίπτοντα τῇ ἀκτῖνι om. ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου ἡ ταχύτης ἐν οἵῳ δήποτε σημείῳ τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως (103)



$$v^2=\mu\left(\frac{2}{\rho}-\frac{1}{a}\right)$$

ὥστε $$\frac{\mu}{r}=\mu\left(\frac{2}{\rho_0}-\frac{1}{a}\right)$$

ὅθεν $$a=\frac{2}{3}\rho_0=\frac{1}{3}r$$

Σχ. 92.

τὸν μικρὸν ἄξονα ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως (104.2)

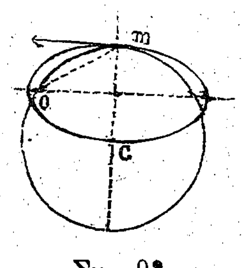
$$b^2=\frac{a}{\mu}v_0^2\rho_0^2=\frac{a}{\mu}v_0^2\frac{r^2}{4}=\frac{ar}{4}=\frac{3}{4}a^2=\frac{r^2}{12}$$

ὅθεν $$b^2=a^2(1-e^2)=a^2\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \text{ καὶ } e=\frac{1}{2}$$

ἐὰν τὸ 0 κεῖται οὐχὶ πλέον μεταξὺ τοῦ c καὶ m ἀλλ' ἐντεῦθεν τοῦ c, εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$a=3r \quad b^2=\frac{3}{4}a^2 \text{ καὶ } e=\frac{1}{2}$$

106. Ἐὰν ἤδη τὸ ἕλκον κέντρον μεταβῇ αἰφνιδίως ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον 0 τῆς περιφερείας οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον cmo νὰ ᾖ ἰσόπλευρον



$$\frac{\mu}{om}=\mu\left(\frac{2}{om}-\frac{1}{a}\right) \quad \text{ὅθεν} \quad a=r$$

τὸ σημεῖον m εἶναι δηλαδὴ ἡ ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος κορυφή.

Σχ. 93.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

θεώρημα ποσοτήτων κινήσεως

107. Θεώρημα 1ον. Ἐκ τῆς ἄνω (89.2) εὑρεθείσης σχέσεως

$$m\,dv = F\,\text{συν}(F,ds)\,dt$$

ποριζόμεθα δι' ὁλοκληρώσεως

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} F\,\text{συν}(F,ds)\,dt$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι·

Ἡ ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι $t-t_0$ ἐπερχομένη ἐν τῇ ποσότητι κινήσεως τοῦ σώματος μεταβολή, ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρωτικῷ ἀθροίσματι τῶν στοιχειωδῶν ὠθήσεων τῆς παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς τροχιᾶς συνιστώσης τῆς ἐπὶ τοῦ κινητοῦ δρώσης δυνάμεως F.

ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ σώματος μόνον ἐκ τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως $F\,\text{συν}(F,ds)$ ἐξαρτᾶται, οὐχὶ δὲ καὶ ἐκ τῆς γεωμετρικῆς μορφῆς τῆς τροχιᾶς, ἣν ἀκολουθεῖ τὸ σημεῖον. Ἡ παρατήρησις αὕτη ἐνίοτε καθίσταται χρήσιμος, ἐπιτρέπουσα τὴν ἀναγωγὴν πολυπλόκων κινήσεων εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας.

Παράδειγμα. Τὸ σημεῖον 0 (Σχ. 81) θεωροῦμεν ὡς ἑστίαν δυνάμεως ἑλκούσης τὰ περὶ τοῦτο ὑλικὰ σημεῖα n ἀναλόγως τῇ ἀποστάσει τούτων $on=x$ ἀπὸ τοῦ κέντρου 0. εἰς ἀπόστασιν b ἀπὸ τοῦ 0 θεωροῦμεν σημεῖον ἀπομακρυνόμενον τοῦ κέντρου 0 μὲ ταχύτητα V, καθ' ἣν στιγμὴν ἄρχεται ἡ ἐπ' αὐτοῦ δρᾶσις τῆς ἑλκούσης δυνάμεως.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x \ldots\ldots\ldots (1)$$

ἔνθα μ εἶναι ἡ ὁρίζουσα τὴν ἔντασιν τῆς ἑλκούσης δυνάμεως σταθερά· πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ $\frac{dx}{dt}$ καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν τὴν ταχύτητα

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = V^2 + \mu^2(b^2-x^2) \ldots\ldots\ldots (2)$$

ἥτις μηδενίζεται παρὰ τῷ σημείῳ m_0 εἰς ἀπόστασιν

$$a = \sqrt{\frac{V^2}{\mu^2} + b^2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου 0· συνδυάζοντες δὲ τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν πρώτην καὶ οὕτω

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \mu^2(a^2-x^2) \ldots\ldots\ldots (4)$$

ὅθεν

$$\mu\,dt = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως $\mu(t-\tau) = \text{τοξ συν}\left(\frac{x}{a}\right) \ldots\ldots\ldots (5)$

ἔνθα τ εἶναι ὁ ἀντιστοιχῶν τῇ θέσει m_0 χρόνος· ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως ἔχομεν

$$x = a\,\text{συν}\mu(t-\tau) \ldots\ldots\ldots (6)$$

ὅθεν ἑτέρα ἔκφρασις τῆς ταχύτητος

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\mu\,\text{ημ}.\mu(t-\tau) \ldots\ldots\ldots (7)$$

ὡς ἐκ τῶν σταθερῶν b καὶ V

$$b = a\,\text{συν}(\mu\tau) \qquad V = a\mu\,\text{ημ}(\mu\tau) \ldots\ldots\ldots (8)$$

Ἐὰν ἐν ταῖς σχέσεσι (6) καὶ (7) ἀντικαταστήσωμεν t διὰ τοῦ $t+\frac{2\pi}{\mu}$ ἔχομεν

$$x = a\,\text{συν}\mu[(t-\tau)+2\pi] = a\,\text{συν}\mu(t-\tau) \ldots\ldots\ldots (6')$$

$$v = -a\,\text{ημ}[\mu(t-\tau)+2\pi] = -a\mu.\text{ημ}(t-\tau) \ldots\ldots\ldots (7')$$

οὕτω ἐὰν τὸ κινητὸν συμπίπτῃ μετὰ τοῦ σημείου n κατὰ τὴν στιγμήν, ἣν ὁρίζει ὁ χρόνος t, καὶ φέρηται μὲ ὡρισμένην τινὰ ταχύτητα παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ, θὰ συμπίπτῃ τοῦτο μετὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου n καὶ θὰ φέρηται μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα κατὰ τὰς στιγμάς, ἃς ὁρίζουσιν οἱ χρόνοι

$$2\nu\frac{\pi}{\mu}$$

ἔνθα ν δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς ἀκεραίας τιμάς. Ἡ σχέσις (6) δείκνυσιν ἐπίσης, ὅτι ἡ μεγίστη ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου εἶναι a, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν στιγμὴν τ καθ' ἣν ἡ ταχύτης μηδενίζεται· ἐν τῇ σχέσει (7) βλέπομεν, ὅτι ἡ μεγίστη ταχύτης εἶναι $-a\mu$ ἀντιστοιχοῦσα τῇ στιγμῇ $\tau+\frac{\pi}{2\mu}$ καθ' ἣν τὸ κινητὸν συμπίπτει (6) μετὰ τοῦ ἕλκοντος κέντρου· ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος ταύτης τὸ κινητὸν βαίνει πρὸς τ'ἀριστερὰ τοῦ 0 μέχρι τῆς στιγμῆς $\tau+\frac{\pi}{\mu}$ καθ' ἣν ἡ ταχύτης τούτου (7) μηδενίζεται εἰς ἀπόστασιν $-a$ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου.

Τὸ κινητὸν αἰωρεῖται λοιπὸν περὶ τὸ κέντρον 0. τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως εἶναι $2a$ καὶ ἡ διάρκεια ταύτης $2\frac{\pi}{\mu}$ (τὸ κινητὸν διαγράφει τὸ διάστημα $4a$), ἥτις οὖσα ἀνεξάρτητος τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος V καὶ ἀποστάσεως b ἐξαρτᾶται ἁπλῶς ἐκ τῆς ὁριζούσης τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως σταθερᾶς μ. αἱ αἰωρήσεις εἶναι ἰσόχρονοι.

Τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς διαρκείας τῆς αἰωρήσεως ἀπὸ τοῦ πλάτους ταύτης, ἣν ἀνεκαλύψαμεν ἐν τῇ ἄνω εὐθυγράμμῳ κινήσει, δυνάμεθα ἤδη νὰ ἐπεκτείνωμεν εἰς πᾶσαν κίνησιν ἐν ᾗ ἡ ἐφαπτομένη συνιστῶσα τῆς δυνάμεως εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀποστάσει s τοῦ κινητοῦ λο-γιζομένῃ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς ἀπὸ ὡρισμένου τινὸς σημείου τῆς τροχιᾶς ταύτης. Ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς λ. χ. (Σχ. 61) ἡ ἐφαπτομένη συνιστῶσα τῆς βαρύτητος εἶναι mgἡμθ. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν γωνίαν θ ἀρκούντως μικράν, ὥστε ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἡμθ διὰ τοῦ τόξου θ, ἡ ἐφαπτομένη συνιστῶσα $mg\theta = mg\,\dfrac{aa'}{oa} = \kappa aa'$ εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀπο-στάσει $a'a$ τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ κατωτάτου σημείου Α τῆς τροχιᾶς αὐ-τοῦ, καὶ ἐκ τῶν προηγουμένων αἱ αἰωρήσεις εἶναι ἰσόχρονοι καὶ ἀνεξάρτητοι τοῦ πλάτους θ (51)· (ὅπερ ἠδυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν καὶ ἐκ τῆς ἰδιότη-τος (50,1), ἣν ἔχουσιν αἱ χορδαὶ τοῦ κύκλου ab νὰ διανύωνται ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι, ἐν ὅσῳ τὰ ὑπὸ τοῦ ἐκκρεμοῦς διανυόμενα τόξα, δύ-νανται ν' ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν χορδῶν αὐτῶν).

Ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως, ὡς καὶ προηγουμένως, εἶναι

$$T = \pi\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

ὁ ἰσοχρονισμὸς τῶν αἰωρήσεων ὀφείλεται λοιπὸν εἰς τὴν ὑποτεθεῖσαν ἀνα-λογίαν τοῦ τόξου aa' καὶ τῆς συνιστώσης τῆς βαρύτητος παραλλήλως τούτῳ. Τοῦτο ὅμως εἶναι προσέγγισις ἁπλῶς διὰ τὸν κύκλον, ἐνῷ ἐν τῇ περιπτώσει τῆς κυκλοειδοῦς γραμμῆς ἀληθεύει ἀκριβῶς, διότι τὸ τόξον om (Σχ. 62) ἰσοῦται μὲ $2cm$ καὶ ἡ συνιστῶσα τῆς βαρύτητος παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ εἶναι $g\,\dfrac{mc}{2a} = \dfrac{g}{4a}om$· ὥστε ἐπὶ τῆς καμπύλης ταύτης ἡ ἐφα-πτομένη συνιστῶσα τῆς βαρύτητος ἐλαττοῦται ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν, ὅπως καὶ τὸ τόξον, ὅπερ ἐναπομένει μέχρι τοῦ κατωτάτου σημείου 0. Εἰς τὴν ἰδιότητα δὲ ταύτην ὀφείλει τὸν συγχρονισμόν της ἡ κυκλοειδὴς γραμμή. ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως ἐνταῦθα εἶναι (53)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a}s$$

καὶ ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως $T = \pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

108. Θεωρημα. 2ον Ἡ ἀπ' εὐθείας ὁλοκλήρωσις τῶν σχέσεων (89.1) δίδει

Θεώρημα τῶν προβολῶν τῶν ποσοτήτων κινήσεως

$$m\frac{dx}{dt} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = mv_x - mv_{0x} = \int_{t_0}^{t} Xdt$$

ἔνθα βλέπομεν, ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς σχέσεως (107) ἐκφραζομένη *ἰδιότης ὑφίσταται καὶ ἐν προβολῇ ἐπὶ ἄξονος.*

Ἐὰν ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου δρῶσα δύναμις F εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ yoz, ἔχομεν $X=0$, καὶ ἡ ταχύτης τοῦ σημείου παραλλήλως τῇ εὐθείᾳ ox εἶναι σταθερά. Ἐὰν εἶναι αὕτη καὶ ἴση τῷ μηδενί, τότε ἡ ταχύτης τοῦ σημείου εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ yoz καὶ ἡ τροχιὰ εἶναι ἐπίπεδος.

109. Θεωρημα. 3ον Αἱ σχέσεις (24. 1) δύνανται ν' ἀντικατασταθῶσιν ἐνταῦθα διὰ τῆς σχέσεως

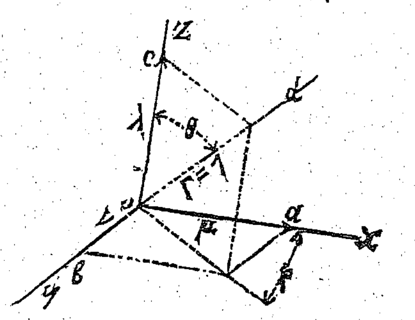
Θεώρημα τῶν ῥοπῶν τῶν ποσοτήτων κινήσεως

$$M_x(mv) - M_x(mv_0) = \int_{t_0}^{t} M_x F dt$$

ὅθεν· Ἡ ἐν τῇ ῥοπῇ* τῆς ποσότητος κινήσεως τοῦ σώματος ὡς πρὸς ὡρισμένον ἄξονα ἐπερχομένη μεταβολὴ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t-t_0$, ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρωτικῷ ἀθροίσματι τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα τῶν στοιχειωδῶν ὠθήσεων, ἃς ἀναπτύσσει ἡ δύναμις ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι.

Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὴν ἀκόλουθον γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν, ὀφειλομένην τῷ καθηγητῇ κυρίῳ Resal.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου o, ἔνθα συναντῶνται οἱ ἄξονες $o\,(x,y,z)$, φέρωμεν τὸ παραστατικὸν τμῆμα od τῆς ῥοπῆς τῆς ποσότητος κινήσεως mv τοῦ κινητοῦ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον o, ὅπερ εἶναι ἡ γεωμετρικὴ συνισταμένη τῶν ῥοπῶν oa, ob, oc τῆς αὐτῆς ποσότητος κινήσεως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $o(x,y,z)$, βλέπομεν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ σημείου d εἶναι ἡ γεωμετρικὴ συνισταμένη τῶν ταχυτήτων τῶν σημείων a,b,c· ἀλλ' αἱ ταχύτητες αὗται εἶναι ἴσαι ταῖς ῥοπαῖς τῆς ποσότητος κινήσεως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας, ὥστε καὶ *ἡ ταχύτης τοῦ σημείου d παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὸ σημεῖον o.*



Σχ. 94.

Ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως ἔχομεν

$$\frac{d}{dt}M_x(mv) = M_x F$$

ἤ, ἐὰν oa εἶναι τὸ παραστατικὸν τμῆμα τῆς ῥοπῆς $M_x(mv)$ τῆς πο-

* Ἴδε κατωτέρω τὴν σημασίαν τῆς λέξεως ταύτης.

σότητος κινήσεως mv τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ox, ἔχομεν

$$\frac{d(oa)}{dt}=M_x F$$

ἀλλὰ $\frac{d(oa)}{dt}$ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σημείου a, καὶ δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν σχέσιν ὡς ἑξῆς

Ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ox ἰσοῦται κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν τῇ ταχύτητι τοῦ ἄκρου a τοῦ παραστατικοῦ τμήματος τῆς ῥοπῆς τῆς ποσότητος κινήσεως τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Ἐν τῷ θεωρήματι τούτῳ περιέχεται ἡ ἄμεσος ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (36.6) ἣν κέκτηνται αἱ κεντρικαὶ δυνάμεις, ὡς ἰδιαιτέρα περίπτωσις γενικῆς ἰδιότητος ἀναφερομένης εἰς δυνάμεις συναντώσας διαρκῶς ἕνα ἄξονα. Ἡ ῥοπὴ τῆς ταχύτητος μv ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ox ἰσοῦται τῇ ῥοπῇ $\mu'v'.\delta$ τῆς προβολῆς $\mu'v'$ τῆς ταχύτητος ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι ὡς πρὸς τὸ σημεῖον 0.

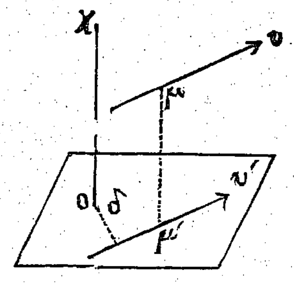
$$\mathrm{M}_x(mv)=\delta.mv'$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει ἔχομεν

$$\delta.(mv')-\delta_1(mv'_1)=\int \mathrm{M}_x F dt$$

ἢ ἐὰν ἡ F συναντᾷ διαρκῶς τὸν ἄξονα ox, $\mathrm{M}_x F=o$ καὶ κατὰ συνέπειαν

$$\delta.(mv')=\text{σταθ.}$$



Σχ. 95.

ἀλλὰ $\quad v'=\frac{ds}{dt}$ καὶ $\delta.v'=\frac{1}{2}$ ἐμβαδὸν$\frac{d\sigma}{dt}=2$ ἐμβαδομετρικὴν ταχύτητα, ἥτις κατὰ συνέπειαν μένει σταθερά.

Θεώρημα τῶν ζωσῶν δυνάμεων

110. Θεωρημα. 4) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἄνω σχέσιν (89.2) ἐπὶ ds ποριζόμεθα

$$\frac{d}{dt}(mv).ds=d(mv)\frac{ds}{dt}=vd(mv)=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F\text{συν}(F.ds)ds$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{s_0}^{s}F\text{συν}(F,ds)ds=\int_{t_0}^{t}[Xdx+Ydy+Zdz]$$

τῆς ὁποίας τὴν φυσικὴν σπουδαιότητα θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἐὰν ἡ δύναμις F εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιὰν

$$\text{συν}(F,ds)=0$$

καὶ ἡ ταχύτης v εἶναι σταθερά*.

Θεώρημα τοῦ Yvon Villarceau

111. Ἡ προηγουμένη πρότασις δίδει τὴν διαφορὰν

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}.$$

διὰ τῆς παρούσης ὀφειλομένης τῷ ἀστρονόμῳ Yvon Villarceau ἔχομεν αὐτὸ τὸ $\frac{mv^2}{2}$. τῷ ὄντι

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

ὅθεν

$$Xx+Yy+Zz=m\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

ἐὰν θέσωμεν

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2$$

καὶ διαφορήσωμεν δίς, ἔχομεν

$$(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2+xd^2x+yd^2y+zd^2z=\frac{1}{2}d^2(\rho^2)$$

ἢ

$$v^2+x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2}$$

ὥστε

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{4}\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2}-\frac{m}{2}\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

ἢ

$$mv^2=\frac{m}{2}\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2}-[Xx+Yy+Zz]$$

Τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν πρὸς ὁλοκλήρωσιν τῶν

* Τὴν πρότασιν ταύτην ὡς ἐκ τῆς σπουδαιότητός της ἀποδεικνύομεν καὶ ἀπ' εὐθείας οὕτω· ἔστω F δύναμις σταθερὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, ἥτις δρῶσα ἐπὶ κινουμένου σώματος κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t, μεταβάλλει τὴν ταχύτητα τούτου ἀπὸ v_0 εἰς v. Κατὰ τὰ προηγούμενα (107)

$$m(v-v_0)=Ft$$

ἀλλὰ (14.3) $\quad \frac{v+v_0}{2}t=s$

ὅθεν πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{m}{2}(v-v_0)(v+v_0)=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Fs$$

ἣν εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ δύναμις F εἶναι μεταβλητή.

ἐξισώσεων τῶν κινήσεων, ἃς διέπουσι κεντρικαὶ δυνάμεις. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν τῷ ὄντι, ἐὰν καλέσωμεν φ τὴν ἐπιτάχυνσιν,

$$\frac{mv^2}{2}=\int\varphi d\rho \quad \text{καὶ} \quad Xx+Yy+Zz=\frac{-\varphi}{\rho}(x^2+y^2+z^2)=-\varphi\rho$$

καὶ ἡ σχέσις τοῦ Villarceau δίδει

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2}=-2\int\varphi d\rho-\varphi\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ὅθεν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ρ συναρτήσει τοῦ χρόνου. Ὑποθέσωμεν ἰδίᾳ

$$2\int\varphi d\rho+\varphi\rho=\sigma\tau\alpha\theta.c$$

ὅθεν διὰ διαφορήσεως $3\varphi+\rho\dfrac{d\varphi}{d\rho}=o$ ἢ $\dfrac{d\varphi}{3\varphi}=-\dfrac{d\rho}{\rho}$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως $\dfrac{1}{3}\,\lambda o\gamma.\varphi=-\lambda o\gamma\rho$ ἢ $\varphi=\rho^{-3}$ $\ldots\ldots\ldots$ (2)

ἡ σχέσις (1) μᾶς δίδει $\dfrac{d^2(\rho^2)}{dt^2}=2c$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως $\rho^2=a+2bt+ct^2$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (3)

ἀφ' ἑτέρου (36.7) $\rho^2\dfrac{d\lambda}{dt}=\gamma$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (3) ἔχομεν

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\gamma}{a+2bt+ct^2}=\frac{\gamma}{c}\,\frac{1}{\left(t+\frac{b}{c}\right)^2+\frac{ac-b^2}{c^2}}$$

ἢ θέτοντες $\tau=t+\dfrac{b}{c}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες

$$\rho^2=c\left(\tau^2+\frac{ac-b^2}{c^2}\right)$$

καὶ

$$\frac{d\lambda}{d\tau}=\frac{\gamma}{c}\,\frac{1}{\tau^2+\frac{ac-b^2}{c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ὁλοκληροῦντες ἤδη καὶ τὴν σχέσιν ταύτην ἔχομεν λ συναρτήσει τοῦ t καὶ κατὰ συνέπειαν ρ συναρτήσει τοῦ λ· ἔχομεν δηλαδὴ τὴν πολικὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς.

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος ἔχομεν $\varphi=\dfrac{\mu}{\rho^2}$ καὶ

$$v^2=-2\int\varphi d\rho=\frac{2\mu}{\rho}+c \qquad -\varphi\rho=-\frac{\mu}{\rho}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (1) ἔχομεν

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\rho}{dt}\right)=\frac{2\mu}{\rho}+c-\frac{\mu}{\rho}=\frac{\mu}{\rho}+c$$

ὅθεν

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\rho}{dt}\right)^2=2\mu\frac{d\rho}{dt}+2c\rho\frac{d\rho}{dt}$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως $\left(\rho\dfrac{d\rho}{dt}\right)^2=2\mu\rho+c\rho^2+c'$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ (5)

ἀλλὰ (103) ἐν τῇ ἐλλειπτικῇ τροχιᾷ

$$v^2=\frac{2\mu}{\rho}+c=\mu\left(\frac{2}{\rho}-\frac{1}{a}\right)$$

καὶ θέτοντες $\rho=a$ εὑρίσκομεν $c=-\dfrac{\mu}{a}$. ἀφ' ἑτέρου $\dfrac{d\rho}{dt}=o$ διὰ $\rho=a(1\pm e)$ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (5) ὁρίζομεν καὶ τὴν σταθερὰν $c'=-\mu a(1-e^2)$ καὶ ἔχομεν οὕτω

$$\rho\frac{d\rho}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left[a^2e^2-(a-\rho)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ἢ θέτοντες $\rho-a=-ae\sigma\upsilon\nu u$

ἔχομεν $a(1-e\sigma\upsilon\nu u)\dfrac{du}{dt}=\sqrt{\dfrac{\mu}{a}}=an$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως (§ 42)

$$nt-u+e\acute{\eta}\mu u=o$$

112. Ἰδοὺ λοιπὸν οἱ δύο πρῶτοι νόμοι τῆς κινήσεως, ὁ τῆς ἀδρανείας, καὶ ὁ τῆς ἀναλογίας τῆς ποσότητος κινήσεως πρὸς τὴν ὤθησιν τῆς παραγαγούσης ταύτην δυνάμεως· τούτους χαρακτηρίζει ὁ Laplace ὡς τοὺς φυσικωτέρους καὶ ἁπλουστέρους τῶν ὅσων δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, καὶ θεωρεῖ ἐν στενῇ σχέσει πρὸς αὐτὴν τὴν ἄγνωστον ἡμῖν φύσιν τῆς ὕλης. Διὰ τῶν δύο τούτων νόμων δυνάμεθα ἤδη νὰ λύσωμεν ἐντελῶς τὸ πρόβλημα τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὑπὸ τὴν διπλῆν αὐτοῦ ἄποψιν· τουτέστι· δοθεισῶν τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου δρωσῶν δυνάμεων εὑρεῖν τὴν κίνησιν αὐτοῦ, καὶ τἀνάπαλιν δοθείσης τῆς κινήσεως τοῦ σημείου, ὁρῖσαι τὰς δυνάμεις εἰς ἃς ὀφείλεται αὕτη· ἀλλ' ἐνίοτε τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου δρωσῶν δυνάμεων δὲν μᾶς εἶναι γνωστόν, τινὲς τούτων εἶναι ἄγνωστοι, ἐξαρτῶνται ὅμως ἐκ τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος δρωσῶν γνωστῶν δυνάμεων καὶ τῆς κινήσεως μεθ' ἧς φέρεται τοῦτο. Ἐὰν λ. χ. σημεῖόν τι ὑποχρεοῦται ἐν τῇ κινήσει του ν' ἀκολουθήσῃ ὡρισμένην ἄκαμπτον τροχιάν, ἢ νὰ μείνῃ διαρκῶς ἐπὶ ἀκάμπτου ἐπιφανείας, γνωρίζομεν ἐκ πείρας ὅτι ἐξασκεῖ τοῦτο πίεσίν τινα ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἢ τῆς ἐπιφανείας ἐφ' ἧς κινεῖται· ἡ γραμμὴ αὕτη, ἢ ἡ ἐπιφάνεια ἀντιδρῶσιν ἐπ' αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀντίδρασιν ταύτην (mf, ἣν ὑπελογίσαμεν προηγουμένως (47) ἐπὶ τοῦ σημείου, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς ἐλευθέρως κινούμενον καὶ ὁρίσωμεν τὴν κίνησίν του διὰ τῶν σχέσεων (89.1)· ἵνα δὲ ὁρίσωμεν καὶ τὴν ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἢ τῆς ἐπιφανείας ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ κινητοῦ πίεσιν, ἀναγκαζόμεθα νὰ προστρέξωμεν εἰς τὸν τρίτον νόμον τῆς κινήσεως, ὃν πρῶτος ὁ Νεύτων εἰσήγαγεν εἰς τὴν μηχανικήν, καὶ ὅστις μᾶς διδάσκει, ὅτι

Τρίτος νόμος τῆς κινήσεως.

113. Πᾶσα δρᾶσις ἐν τῇ φύσει συνοδεύεται ὑπὸ ἀντιδράσεως ἴσης καὶ ἀντιθέτου τῇ δράσει· τουτέστιν :

Αἱ ἀμοιβαῖαι δράσεις δύο σωμάτων εἶναι πάντοτε ἴσης ἐντάσεως, ἔχουσι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν δράσεως καὶ φέρονται ἀντιθέτως.

Ἐάν τὰ δρῶντα ἐπ' ἀλλήλων σώματα εἶναι ἐλεύθερα πάσης ἄλλης ἐξωτερικῆς δράσεως, αἱ μεταβολαὶ ἃς ὑφίστανται αἱ ποσότητες κινήσεως τούτων εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ταχύτητες ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μαζῶν τῶν σωμάτων.

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης, τῆς συγχρόνου δηλαδὴ ὑπάρξεως τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, κατεστήσαμεν προηγουμένως ( ) καταφανὲς διὰ πλειόνων παραδειγμάτων. Τὴν ἰσότητα δὲ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως ἀπέδειξεν ὁ Νεύτων πειραματικῶς, καὶ διὰ τοῦ συλλογισμοῦ βασιζόμενος ἐπὶ τοῦ πρώτου νόμου τῆς κινήσεως ἐξ οὗ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀπορρέων ὁ τρίτος.«Ἐὰν δύο σώματα A καὶ B ἕλκονται ἀμοιβαίως, λέγει ὁ Νεύτων, φαντασθῶμεν πρόσκομμά τι οἷον δήποτε παρακωλῦον τὴν σύναψιν τούτων. Ἐὰν τὸ ἕτερον σῶμα A ἕλκηται ὑπὸ τοῦ δευτέρου σώματος B πλέον ἢ ὅσον τὸ B ὑπὸ τοῦ A, τὸ ῥηθὲν πρόσκομμα θὰ ὑφίστατο ἐκ μέρους τοῦ A μείζονα πίεσιν ἢ ἐκ μέρους τοῦ B, καὶ ἐπομένως δὲν θὰ ἔμενεν ἐν ἰσορροπίᾳ· ἡ ἰσχυροτέρα πίεσις θὰ ὑπερίσχυε, καὶ ταύτης ἕνεκα τὸ σύστημα τῶν δύο σωμάτων μετὰ τοῦ μεταξὺ τούτων παρεντεθέντος προσκόμματος, θὰ ἐκινεῖτο κατ' εὐθεῖαν πρὸς τὸ B, καὶ μὲ ταχύτητα ἀεὶ αὐξάνουσαν, θὰ ἐπροχώρει ἐπ' ἄπειρον, ὅπερ ἄτοπον καὶ ἐναντίον τῷ πρώτῳ νόμῳ τῆς κινήσεως, διότι, κατὰ τὸν νόμον τοῦτον, τὸ σύστημα ὀφείλει νὰ ἐμμένῃ ἐν τῇ καταστάσει τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς κατ' εὐθεῖαν ἰσοταχοῦς κινήσεως αὐτοῦ· ἄρα τὰ σώματα ἴσην πίεσιν δέον νὰ ἐξασκῶσιν ἐπὶ τοῦ μεταξὺ τούτων παρεντεθέντος προσκόμματος, καὶ ἐπομένως ἰσάκις ἀμοιβαίως ἕλκονται.

Τοῦτο ἐπειράθην ν' ἀποδείξω διὰ μαγνήτου καὶ σιδήρου· τεθειμένα τὰ σώματα ταῦτα ἐν ἰδίοις ὑπερείσμασιν ἐφαπτομένοις ἀλλήλων ἐπὶ ὕδατος ἠρεμοῦντος ἐπιπλέουσι, χωρὶς οὐδέτερον τούτων νὰ ὠθῇ τὸ ἕτερον· ἑκάτερον ὑφίσταται τὴν πίεσιν τοῦ ἑτέρου· ὡς ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν ἕλξεως μένουσιν ἐν ἰσορροπίᾳ ἠρεμοῦντα.»

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ἐξακολουθεῖ ὁ Νεύτων, καὶ διὰ τὴν μεταξὺ τῆς γῆς καὶ μέρους αὐτῆς ἐξασκουμένην ἕλξιν. Ἐὰν λ. χ. ἡ ἕλξις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὄρος τι ἐπὶ τοῦ ἀπομένοντος μέρους τῆς γηΐνου σφαίρας ἦτο μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ἕλξεως, ἣν ἐξασκεῖ τὸ ἀπομένον μέρος τῆς γῆς ἐπὶ τοῦ ὄρους, ὡς ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τούτων ἕλξεων θὰ εἴχομεν δύναμιν δρῶσαν ἐπὶ τοῦ ἐκ τῆς γῆς καὶ τοῦ ὄρους ἀποτελουμένου συστήματος κατὰ τὴν ἑνοῦσαν τὰ κέντρα τούτων εὐθεῖαν, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας θὰ ἐκινεῖτο τοῦτο ἐπ' ἄπειρον μὲ ταχύτητα ἐς ἀεὶ αὐξάνουσαν. Τοῦτο ἀντίκειται τῷ πρώτῳ νόμῳ τῆς κινήσεως. Ἐάν, προσθέτει εἰς ταῦτα ὁ **Maxwell**, τὸ ἐν λόγῳ ὄρος εὑρίσκετο ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τούτου καὶ τῆς γῆς ἐξασκουμένης ἕλξεως καὶ τῆς ἐκ ταύτης προκυπτούσης δυνάμεως, ἡ γῆ θὰ ἐστρέφετο (ὡς θὰ ἴδωμεν τοῦτο κατωτέρω) περὶ ἄξονα παράλληλον τῷ περὶ ὃν στρέφεται νῦν ἄξονι, ἀλλὰ μὴ διερχόμενον πλέον διὰ τοῦ κέντρου τῆς γηΐνου σφαίρας. Ἐὰν τὸ ὄρος εὑρίσκετο παρὰ τὸν πόλον, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τούτου καὶ τῆς γῆς ἐξασκουμένης ἕλξεως θὰ ἦτο κίνησις τῆς γηΐνου σφαίρας παραλλήλως τῷ ἄξονι περὶ ὃν στρέφεται αὕτη· ὡς ἐκ τῆς κινήσεως δὲ ταύτης, ἡ τροχιὰ τῆς γῆς δὲν θὰ ἦτο ἐν ἐπιπέδῳ διερχομένῳ διὰ τοῦ ἡλίου. Ἐὰν τέλος τὸ ὄρος εὑρίσκετο ἐν ἄλλῳ τινὶ σημείῳ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἦτο ἐν μέρει τὸ πρῶτον καὶ ἐν μέρει τὸ δεύτερον. Καὶ ὅμως οὐδέτερον τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων ἀποκαλύπτουσιν ἡμῖν αἱ ἀπ' εὐθείας γενόμεναι ἀστρονομικαὶ παρατηρήσεις.

Ἀλλά, ἐξακολουθεῖ ὁ **Maxwell**, ἡ ἀπόδειξις τῶν νόμων τῆς κινήσεως διὰ τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίου ἕλξεως θὰ ἦτο προφανὴς ἀνατροπὴ πάσης ἐπιστημονικῆς μεθόδου· θὰ ἦτο τὸ αὐτὸ ὡς εἰ ἐπειρώμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὸν νόμον τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

114. Ὑποθέσωμεν, ὅτι σημεῖόν τι εὑρισκόμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν πλειόνων δυνάμεων δὲν εἶναι ἐλεύθερον, ἀλλ' ἀναγκάζεται νὰ μένῃ διαρκῶς ἐπὶ ὡρισμένης ἀκάμπτου γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ σημεῖον ἠρεμεῖ προφανῶς, ἐὰν ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτοῦ δρωσῶν δυνάμεων ᾖ κάθετος ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἐὰν δηλαδὴ ἡ συνιστῶσα τῶν αὐτῶν δυνάμεων παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς γραμμῆς πληροῖ τὴν σχέσιν

$$\Sigma F\left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ἥτις μετὰ τῶν δύο ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς ὁρίζει τὰ σημεῖα ἔνθα τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἡ κάθετος πίεσις ἣν ἐξασκεῖ τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι (Εἰσ. 2.18)

$$\Sigma F\left[\left(\beta\frac{dz}{ds}-\gamma\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\gamma\frac{dx}{ds}-\alpha\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(\alpha\frac{dy}{ds}-\beta\frac{dx}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ἐνῷ ἡ αὐτὴ πίεσις ὅταν δὲν ἠρεμεῖ τὸ σημεῖον, ἀλλὰ κινεῖται ἐπὶ τῆς ἀκάμπτου γραμμῆς εἶναι (55.3)

$$\sqrt{\left(\pm\frac{mv^2}{R}+F_n\right)^2+F^2_p}$$

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς δοθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad \psi(x,y,z)=0$$

πορίζόμεθα ἐκ τούτων

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{ds}=0$$
$$\frac{d\psi}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{d\psi}{dz}\frac{dz}{ds}=0$$

αἵτινες μετὰ τῆς ἐξισώσεως (1) δίδουσι τὴν ἐκφράζουσαν τὴν συνθήκην τῆς ἰσορροπίας σχέσιν

$$\begin{vmatrix} \Sigma F\alpha & \Sigma F\beta & \Sigma F\gamma \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

Παραδείγματα. 1) Θεωρήσωμεν βαρύ τι σῶμα ἐπὶ τῆς γραμμῆς

$$\psi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

$$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2=0$$

ἔχομεν ἐνταῦθα

$$\Sigma F\alpha=0 \qquad \Sigma F\beta=0 \qquad \Sigma F\gamma=-mg$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{2x}{a^2} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{2y}{b^2} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2z$$

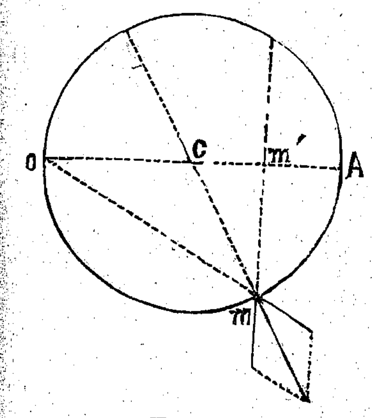
καὶ ἡ συνθήκη τῆς ἰσορροπίας εἶναι

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -mg \\ \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=0 \qquad \text{ἢ} \qquad xy=0$$

τὰ σημεῖα τῆς ἰσορροπίας ὁρίζουσι λοιπὸν αἱ σχέσεις

$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad \psi(x,y,z)=0 \qquad xy=0$$

καὶ εἶναι ὀκτὼ τὸν ἀριθμόν.



Σχ. 96.

2) Βαρύ τι σημεῖον m εὑρίσκεται ἐπὶ κύκλου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν ἀπωθητικῆς δυνάμεως ἐνοικούσης παρὰ τῷ σημείῳ o ἴσης τῷ βάρει τοῦ σημείου.

Ἡ θέσις m τῆς ἰσορροπίας εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀκτὶς cm σχηματίζει γωνίαν 60^0 μετὰ τῆς ὁριζοντείου διαμέτρου·

ἡ ἀκτὶς mc διχοτομεῖ τὴν γωνίαν omm' καὶ ἔχομεν

$$c\widehat{m}m' = \frac{\pi-2\mathrm{A}m}{2}$$

$$m\widehat{c}m'=2c\widehat{m}m'=\mathrm{A}m=\pi-2\,\mathrm{A}m$$

ὅθεν

$$\mathrm{A}m=\frac{1}{3}\pi=60^0.$$

115. Ἐὰν τὸ κινητὸν ἀναγκάζηται νὰ μένῃ ἐπὶ ἀκάμπτου ἐπιφανείας

$$\varphi(x,y,z)=0$$

ἡ συνιστῶσα τῶν ἐξωτερικῶν πιέσεων καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ ταύτῃ εἶναι

$$\Sigma F\frac{\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

καὶ ἡ ἐν τῷ ἐφαπτομένῳ ἐπιπέδῳ συνιστῶσα εἶναι

$$\Sigma F\left|\frac{\left(\beta\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right|^{\frac{1}{2}}$$

ἵνα δὲ τὸ κινητὸν μένῃ ἐν ἰσορροπίᾳ, δέον ἡ τελευταία αὕτη συνιστῶσα νὰ μηδενίζηται· τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν θέτοντες

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Sigma F\beta - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Sigma F\gamma = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Sigma F\gamma - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Sigma F\alpha = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Sigma F\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Sigma F\beta = 0$$

ἢ

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\Sigma F\alpha} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\Sigma F\beta} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\Sigma F\gamma}$$

αἱ σχέσεις αὗται μετὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας ὁρίζουσι τὰ σημεῖα ἔνθα τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος ἰδίᾳ $\Sigma F\alpha = 0 \quad \Sigma F\beta = 0 \quad \Sigma F\gamma = -mg$· αἱ συνθῆκαι τῆς ἰσορροπίας εἶναι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

καὶ ἡ ἰσορροπία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀνώτατον καὶ κατώτατον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας.

Παραδειγματα. Θεωρήσωμεν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

$$\varphi(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2ax^3 = 0$$

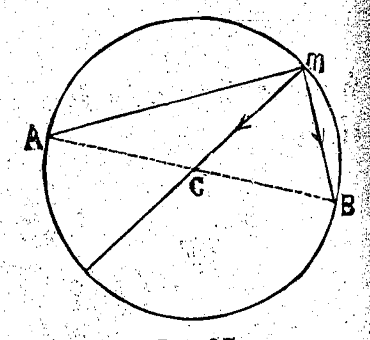
ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος· αἱ συνθῆκαι τῆς ἰσορροπίας εἶναι

$$2(x^2 + y^2 + z^2).2x - 6ax^2 = 0 \quad 2(x^2 + y^2 + z^2)2y = 0$$

αἵτινες συνδυαζόμεναι μετὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας δίδουσιν

$$x = \frac{9}{8}a \quad y = 0$$

Θεωρήσωμεν ἐπίσης σημεῖον m ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ὑποκείμενον τῇ δράσει τριῶν δυνάμεων καθέτων ἀλλήλαις, ὧν τὰς ἐντάσεις παριστῶσιν αἱ ὑπὸ τῆς σφαίρας ὁριζόμεναι χορδαὶ κατὰ τὰς εὐθείας τῆς δράσεως· ἔστω mA τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο δυνάμεων· ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεως τούτων, ἡ συνισταμένη συμπίπτει μὲ τὴν διάμετρον mA τοῦ μικροῦ κύκλου· ἡ τρίτη δὲ δύναμις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν mA, καὶ ἡ συνισταμένη τούτων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου C τῆς σφαίρας· εἶναι λοιπὸν αὕτη κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ σημεῖον ἰσορροπεῖ.



Σχ. 97.

Ἀποδεῖξαι τὴν πρότασιν ταύτην ἀναλυτικῶς.

116. Συνοψίζοντες ἤδη τὰς θεμελιώδεις ἀρχὰς ἐφ' ὧν βασίζεται ἡ δυναμικὴ βλέπομεν, ὅτι

Ἡ ὕλη δὲν δύναται νὰ τεθῇ ἀφ' ἑαυτῆς εἰς κίνησιν ἄνευ τῆς δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως, ἀλλ' ἐὰν ἅπαξ τεθῇ εἰς κίνησιν ὑπὸ ἀρχικῆς τινος στιγμιαίας ὠθήσεως, ἐξακολουθεῖ αἰωνίως κινουμένη ἰσοταχῶς ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς, συμπιπτούσης πρὸς τὴν φορὰν τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως, χωρὶς νὰ δύναται αὕτη νὰ τροποποιήσῃ τὸ παράπαν τὴν κίνησιν, ἣν τῇ μετέδωκεν ἡ ἐξωτερικὴ ὤθησις. Ἐὰν ἡ θέσασα τὸ ὑλικὸν σῶμα εἰς κίνησιν ἀρχικὴ ὤθησις δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ οὐχὶ πλέον στιγμιαίως ἀλλὰ διαρκῶς μὲ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὸ σῶμα ἐξακολουθεῖ κινούμενον ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς, οὐχὶ ἰσοταχῶς, ἀλλὰ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Ἡ συνεχὴς δρᾶσις τῆς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπενεργούσης ἐξωτερικῆς δυνάμεως, σταθερᾶς κατὰ τὴν φορὰν καὶ τὴν ἔντασιν, ἀποκαλύπτεται εἰς ἡμᾶς διὰ τῆς ὁμαλῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος, διὰ τῆς σταθερᾶς ἐπιταχύνσεως, ἣν μεταδίδει τῷ σώματι.

Ἐὰν ἡ ἐπὶ τοῦ σώματος δρῶσα ἐξωτερικὴ δύναμις μεταβάλληται διαρκῶς κατὰ τὴν ἔντασιν και τὴν φοράν, τὸ σῶμα διαγράφει καμπύλην τροχιὰν μὲ ταχύτητα μεταβαλλομένην· ἀλλ' ἐὰν παύσῃ πρὸς στιγμὴν ἡ ἐπὶ τοῦ σώματος δρᾶσις τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως, τὸ κινητὸν ἐξακολουθεῖ αἰωνίως κινούμενον ἰσοταχῶς ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης τροχιᾶς κατὰ τὸ σημεῖον, ἔνθα ἔπαυσε δρῶσα ἐπὶ τοῦ σώματος ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις.

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως ἐπὶ κινουμένου σώματος εἶναι τὰ αὐτὰ ὡς εἰ τὸ σῶμα εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ, καὶ ἀνεξάρτητα τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς τοῦτο φέρεται, καθ' ἣν στιγμὴν ἐπέρχεται ἡ δρᾶσις τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως· ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς συγχρόνου δράσεως πλειόνων ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπὶ ὑλικοῦ σώματος εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τ' ἀποτελέσματα τῆς μεμονωμένης διαδοχικῆς δράσεως ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων ἐπὶ τοῦ σώματος, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ἀρχῆς βασιζόμενοι, εὑρίσκομεν τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως ἀνάλογον τῇ ὠθήσει τῆς δυνάμεως.

Αὗται εἶναι αἱ γενικαὶ ἀρχαὶ καὶ θεμελιώδεις νόμοι, ἐφ' ὧν βασίζεται ἡ ἐπιστήμη τῆς δυναμικῆς. «*Ἡ ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας τῆς ὕλης » μᾶς δίδει τὴν ἰδέαν της δυνάμεως. Ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς » συγχρόνου δράσεως πλειόνων δυνάμεων μᾶς ὑποδεικνύει τὸν τρό» πον, δι' οὗ αὗται συντίθενται. Ἡ δρᾶσις τῆς δυνάμεως ἀποκαλύ-*

»πτεται ἡμῖν διὰ τῆς μεταβολῆς, ἣν ἐπιφέρει εἰς τὴν ταχύτητα τοῦ
»σώματος, ἐφ' οὗ δρᾷ αὕτη· ἡ ἰδέα τῆς μάζης παρουσιάζεται κατό-
»πιν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δυνάμεως ἐπὶ διαφόρων
»σωμάτων, καὶ τέλος φθάνομεν εἰς τὸν ἕτερον τῶν θεμελιωδῶν νό-
»μων τῆς κινήσεως, ὅστις μᾶς διδάσκει ὅτι ἡ δύναμις μετρεῖται διὰ
»τοῦ γινομένου τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐφ' οὗ ἐπενεργεῖ αὕτη, ἐπὶ
»τὴν ὁλικὴν ἐπιτάχυνσιν ἣν ἐπιφέρει εἰς τὴν κίνησιν αὐτοῦ.» Τέλος ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας συμπεραίνομεν, ὅτι ἐὰν σῶμά τι μάζης m ἐξασκῇ ἐπὶ ἑτέρου σώματος μάζης m' δύναμίν τινα F, καὶ τὸ δεύτερον τοῦτο σῶμα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ πρώτου δύναμιν F' ἴσην καὶ ἀντίθετον τῇ F· ἡ φορὰ τῶν δυνάμεων τούτων συμπίπτει μὲ τὴν ἑνοῦσαν τὰ ὑλικὰ σώματα εὐθεῖαν γραμμήν.

Τοὺς θεμελιώδεις τούτους νόμους δὲν δυνάμεθα, ν' ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας καὶ διὰ μόνου τοῦ συλλογισμοῦ. Αἱ ἀλήθειαι ὅμως, τὰς ὁποίας ἐκφράζουσιν οὗτοι δὲν εἶναι τόσῳ καταφανεῖς, ὥστε νὰ ἐκλάβωμεν αὐτὰς καὶ ὡς ἀξιώματα, ὅπως τοῦτο γίνεται ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς σπουδῆς τῆς γεωμετρίας. Τοὐναντίον αἱ ἀρχαὶ αὗται ἐφ' ὧν βασίζεται ἡ δυναμικὴ ἀντίκεινται ἐν μέρει εἰς τὰ καθημερινὰ φαινόμενα, μεθ' ὧν εἴμεθα ἐξοικειωμένοι.

Πᾶς τις ἐννοεῖ λόγου χάριν καὶ εὐκόλως δύναται νὰ παραδεχθῇ, ὅτι σῶμα ἠρεμοῦν δὲν δύναται νὰ τεθῇ εἰς κίνησιν ἀφ' ἑαυτοῦ ἄνευ τῆς δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως· δὲν παραδέχεται ὅμως ἐπίσης εὐκόλως, ὅτι, ἀφοῦ ἅπαξ τὸ σῶμα τεθῇ εἰς κίνησιν, ἀλλὰ παύσῃ δρῶσα ἐπ' αὐτοῦ ἡ παραγαγοῦσα τὴν κίνησιν ταύτην ἐξωτερικὴ δύναμις, ἐξακολουθεῖ τοῦτο κινούμενον ἰσοταχῶς ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς.

Δὲν εἶναι ἐπίσης καταφανὴς ἡ ἀρχὴ τὴν ὁποίαν παρεδέχθημεν καὶ ὡς ἐκ τῆς ὁποίας, ἡ ἐπὶ ὑλικοῦ σώματος δρᾶσις ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως εἶναι ἡ αὐτὴ εἴτε κινεῖται εἴτε ἠρεμεῖ τὸ σῶμα, ἐφ' οὗ ἐπενεργεῖ αὕτη· καὶ ἔτι ὀλιγώτερον ἡ ἐκ ταύτης ἀπορρέουσα ἀρχὴ τοῦ ἀνεξαρτήτου τῆς συγχρόνου δράσεως τῶν δυνάμεων, καθ' ἣν ἡ ἐπὶ ὑλικοῦ σώματος σύγχρονος δρᾶσις δύο ἢ πλειόνων δυνάμεων εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν μεμονωμένην καὶ διαδοχικὴν ἐπὶ τοῦ σώματος δρᾶσιν ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων. Ἀλλ' ἀφοῦ αἱ θεμελιώδεις αὗται ἀρχαὶ δὲν εἶναι ἀρκούντως καταφανεῖς ἐκ τῶν προτέρων ὥστε νὰ παραδεχθῶμεν αὐτὰς ὡς ἀξιώματα, ἀλλὰ καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ τὰς ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας διὰ μόνου τοῦ συλλογισμοῦ, δέον νὰ προστρέξωμεν εἰς τὴν

πειραματικὴν μέθοδον, δι' ἧς ἐπαληθεύοντες καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατὸν τοὺς νόμους τούτους, θὰ πεισθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας αὐτῶν.

Ἀλλὰ καὶ ἡ πειραματικὴ μέθοδος, ὡς εἴδομεν τοῦτο ἀνωτέρω, δὲν ἐπιτρέπει τὴν τελείαν καὶ ἀκριβῆ ἀπόδειξιν τῆς ἀληθείας τῶν νόμων τούτων, «καὶ δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν οὗτοι εἰμὴ ὡς ἀληθῆ αἰ-
»τήματα (postulata), τὰ ὁποῖα ἐμάντευσε μᾶλλον ἢ ἀνεκάλυψεν ἡ
»μεγαλοφυΐα τῶν ἀνδρῶν, οἵτινες ἔθεσαν τὰς βάσεις τῆς δυναμικῆς,
»καὶ τὰ αἰτήματα ταῦτα δὲν ἀποκτῶσι πιθανότητα ἰσοδύναμον τῇ
»βεβαιότητι, εἰμὴ διὰ τῆς ἐντελοῦς συμφωνίας, ἥτις ὑπάρχει πάν-
»τοτε μεταξὺ τῶν φυσικῶν φαινομένων, οἷα παρατηροῦμεν ταῦτα
»ἀπ' εὐθείας καὶ τῶν συνεπειῶν, ἃς πορίζόμεθα λογικῶς καὶ διὰ
»μόνου τοῦ συλλογισμοῦ ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀρχῶν τούτων.»

Τὴν μεγαλειτέραν δὲ καὶ ὑψηλοτέραν ἀπόδειξιν τῆς ἀληθείας τῶν θεμελιωδῶν τούτων νόμων τῆς κινήσεως ἐφ' ὧν βασίζεται ὁλόκληρον τὸ οἰκοδόμημα τῆς μηχανικῆς, εὑρίσκομεν ἐν ταῖς κινήσεσι τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ ἰδίᾳ τῶν ἀποτελούντων τὸ ἡμέτερον πλανητικὸν σύστημα. Ἡ ἐν τῷ διαστήματι κίνησις τῆς Σελήνης λ. χ. συνισταμένη ἐκ πλειόνων ἄλλων ἁπλῶν κινήσεων εἶναι τόσῳ ἀνώμαλος, ὥστε καὶ αἱ ἀκριβέστεραι παρατηρήσεις δὲν θὰ ἤρκουν ἵνα προΐδωμεν τὴν θέσιν, ἣν μέλλει νὰ καθέξῃ αὕτη μετὰ 24 μόνον ὥρας. Καὶ ὅμως διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ βασιζομένου ἐπὶ τῶν νόμων τῆς κινήσεως, ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις τῆς σελήνης ὁρίζεται ἀκριβέστερον πρὸ πολλῶν ἐτῶν, ὡς μαρτυροῦσι τοῦτο οἱ ἐν τῇ ναυτιλίᾳ χρησιμοποιούμενοι πίνακες καὶ τὸ φαινόμενον τῶν ἐκλείψεων. Τόσῳ δὲ εἶναι πεπεισμένοι περὶ τῆς ἀληθείας τῶν νόμων τούτων οἱ περὶ τὰς κινήσεις τῶν οὐρανίων σωμάτων ἀσχολούμενοι, ὥστε ἡ ἀσυμφωνία τῶν ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεων πρὸς τὰ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ προβλεπόμενα γίνεται ὁρμητήριον πρὸς νέας μελέτας, διὰ τὸν ἀκριβέστερον ὑπολογισμὸν τῶν ἀτελῶς πρότερον ὑπολογισθέντων, ἐνίοτε δὲ καὶ πρὸς ἀνακάλυψιν νέων σωμάτων (Ποσειδῶν), ἐκεῖ ὅπου ὁ ἀνθρώπινος ὀφθαλμὸς βοηθούμενος ὑπὸ τῶν τελειοτέρων ὀργάνων δὲν εἶχε μέχρι τοῦδε ἀνακαλύψει ταῦτα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

Ἕλξις τῶν σωμάτων.

117. Ἐκτὸς τῆς βαρύτητος, περὶ ἧς ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω, ἑτέρα δύναμις ἀποκαλύπτεται ἡμῖν ἐν τῇ κινήσει τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον, ἣν διέπουσιν οἱ νόμοι τοῦ Κεπλέρου (42).

Εἴδομεν δὲ (44) ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις, ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἄνω νόμων διεπομένῃ κινήσει, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ πλανήτου ἀπὸ τῆς ἑστίας τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς ἣν κατέχει ὁ Ἥλιος. Συμπεραίνομεν λοιπὸν κατὰ τὰ προλεχθέντα περὶ δυνάμεων, ὅτι, *ἡ κίνησις τῶν πλανητῶν ὀφείλεται εἰς δύναμίν τινα, ἣν ὁ Ἥλιος ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ πλανήτου, ἀνάλογον τῇ μάζῃ τοῦ τελευταίου τούτου, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ* ρ^2 *ἀπὸ τοῦ Ἡλίου.** Ἡ δύναμις αὕτη ἐκφράζεται (§ 44) διὰ τῆς σχέσεως

$$F=\frac{4\gamma^2}{p}\frac{m}{\rho^2}=\mu^2.\frac{m}{\rho^2}$$

ἥν, ὡς ἐκ τῶν σχέσεων $\gamma=\frac{\pi ab}{\mathrm{T}}$ (ἔνθα T εἶναι ἡ διάρκεια τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιφορᾶς τοῦ πλανήτου καὶ a,b οἱ ἡμιάξονες τούτου) καὶ $pa=b^2$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$F=\frac{4\pi^2a^3}{\mathrm{T}^2\rho^2}m$$

Ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἑλκτικὴ δύναμις ἣν ἐξασκεῖ ὁ Ἥλιος ἐπὶ τοῦ πλανήτου εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης αὐτοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι ἐπεκτείνεται αὕτη ἐξ ἴσου εἰς τὰ ἀπαρτίζοντα τὸν πλανήτην διάφορα μόρια· ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ τρίτου νόμου τῆς κινήσεως, καὶ ὁ πλανήτης ἕλκει τὸν Ἥλιον μὲ δύναμιν

$$\mu'^2\frac{\mathrm{M}}{\rho^2}=\mu^2\frac{m}{\rho^2}$$

ὅθεν $\mu'^2\mathrm{M}=\mu^2 m$ ἢ $\frac{\mu'^2}{m}=\frac{\mu^2}{\mathrm{M}}=\sigma\tau.f$

ἢ $\mu'^2=fm$

* Ἐνταῦθα θεωροῦμεν τὰ οὐράνια ταῦτα σώματα ὡς ἁπλᾶ σημεῖα· κατόπιν θὰ θεωρήσωμεν ταῦτα ἐν τῇ πραγματικότητί των.

καὶ ἡ ἑλκτικὴ δύναμις, ἣν ἐξασκοῦσιν ἀμοιβαίως ἐπ' ἀλλήλων ὁ πλανήτης καὶ Ἥλιος, ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$f\frac{m\mathrm{M}}{\rho^2}$$

Λέγω ἤδη, ὅτι ὁ σταθερὸς συντελεστὴς f εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλους τοὺς πλανήτας. Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι ἕτερον πλανήτην μάζης m_1 ὃν χαρακτηρίζουσιν οἱ συντελεσταὶ $\gamma_1 p_{,1}$ καὶ ρ_1· ἡ ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ἐξασκουμένη ἐπὶ τούτου ἕλξις εἶναι

$$F_1=\frac{4\pi^2a_1^3}{\mathrm{T}_1^2\rho_1^2}m_1$$

ὥστε $$\frac{F}{F_1}=\frac{a^3m\mathrm{T}_1^2\rho_1^2}{\mathrm{T}^2\rho^2a_1^3m_1}=\frac{a^3}{\mathrm{T}^2}.\frac{\mathrm{T}_1^2}{a_1^3}.\frac{\rho_1^2}{\rho^2}.\frac{m}{m_1}$$

ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ τρίτου νόμου τοῦ Κεπλέρου $\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{T}_1^2}=\frac{a^3}{a_1^3}$ καὶ οὕτω

$$\frac{F}{F_1}=\frac{m\rho_1^2}{m_1\rho^2} \quad ἢ \quad F_1=F\frac{m_1\rho^2}{m\rho_1^2}=f\frac{\mathrm{M}m}{\rho^2}.\frac{m_1\rho^2}{m\rho_1^2}=f\frac{\mathrm{M}m_1}{\rho_1^2}$$

καὶ φθάνομεν οὕτω εἰς τὸν ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος διατυπωθέντα τὸ πρῶτον νόμον τῆς ἕλξεως, κατὰ τὸν ὁποῖον.

Ἕκαστον μόριον τοῦ Ἡλίου μάζης m ἕλκει ἕκαστον μόριον μάζης m' πλανήτου τινὸς καὶ ἕλκεται ὑπ' αὐτοῦ μὲ δύναμιν ἐντάσεως

$$f\frac{mm'}{\rho^2}$$

φερομένην κατὰ τὴν ἑνοῦσαν τὰ μόρια εὐθεῖαν, ἔνθα ρ *εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν ἑλκομένων μορίων καὶ* f *σταθερός τις συντελεστής, ὁ αὐτὸς δι' ὅλους τοὺς πλανήτας.*

Πρὶν δὲ προβῶμεν περαιτέρω εἰς τὴν σπουδὴν τῆς δυνάμεως ταύτης, ἥτις ἐξασκεῖται μεταξὺ τοῦ Ἡλίου καὶ τῶν πλανητῶν, θὰ ἐξετάσωμεν ἰδιότητάς τινας τῆς ὑπὸ τοῦ ἄνω νόμου διεπομένης ἕλξεως τῶν σωμάτων.

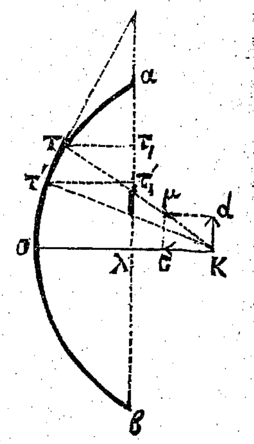
118. Θεωρήσωμεν κυκλικὸν τόξον τὸ ab ἐφ' οὗ εὑρίσκεται μάζα τις ὁμοιομόρφως διανεμημένη καὶ ἴση τῇ δ κατὰ μονάδα μήκους, καὶ ζητήσωμεν τὴν ἕλξιν ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ μάζης M συγκεντρωμένης εἰς τὸ κέντρον k τοῦ κύκλου, ὑποθέτοντες (τὴν ὑπόθεσιν δὲ ταύτην θὰ διατηρήσωμεν καὶ διὰ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα), ὅτι ἕκαστον ἀπειρωστὸν τεμάχιον ττ' τοῦ τόξου μάζης dm ἕλκει τὴν παρὰ τῷ κέντρῳ συγκεντρωμένην μάζαν M μὲ δύναμιν ἴσην τῇ Ἕλξις κυκλικοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ κέντρου

$$f\frac{\mathrm{M}dm}{\rho^2}$$

ἔνθα f εἶναι σταθερὸς ἀριθμητικὸς συντελεστής, καὶ ρ ἡ ἀπόστασις τῆς ἑλκούσης μάζης dm ἀπὸ τῆς ἑλκομένης M.

Ἡ ἕλξις $k\mu$, ἣν ἐξασκεῖ ἡ μάζα $dm = \delta.\tau\tau'$ ἐπὶ τῆς μάζης M δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη δύο ἄλλων ἕλξεων τῆς μὲν kc κατὰ τὸν ἄξονα ko τοῦ τόξου, τῆς δὲ kd καθέτως τούτῳ· ἡ ἔντασις τῆς πρώτης εἶναι

$$f\mathrm{M}\delta\frac{\tau\tau'}{\rho^2}\text{συν}\alpha = f\mathrm{M}\delta\frac{\tau_1\tau'_1}{\rho^2}$$



ἔνθα $\alpha = \tau' ko$. καὶ $\tau_1\tau'_1$ ἡ προβολὴ τοῦ $\tau\tau'$ ἐπὶ τῆς χορδῆς ab· ἡ ἑτέρα συνιστῶσα kd ἐξουδετεροῦται διὰ τῆς ἴσης καὶ ἀντιθέτου φορᾶς συνιστώσης, ἣν δίδει τὸ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ok συμμετρικὸν τῷ τμήματι $\tau\tau'$ τμῆμα τοῦ τόξου.

Ἡ ὁλικὴ ἕλξις φέρεται λοιπὸν κατὰ τὴν εὐθεῖαν ko καὶ ἡ ἔντασις ταύτης εἶναι

Σχ. 98.

$$\Sigma f\mathrm{M}\delta\frac{\tau\tau'}{\rho^2}\text{συν}\alpha = \Sigma f\mathrm{M}\delta\frac{\tau_1\tau'_1}{\rho^2} = \frac{f\mathrm{M}\delta}{\rho^2}\int d(ab) = f\mathrm{M}\frac{\delta.ab}{\rho^2} = 2f\frac{\mathrm{M}\delta.}{\rho}\text{ἡμ}\theta$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι *ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου aob ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ κέντρου ἕλξις, ἰσοῦται ἐκείνῃ, ἣν θὰ ἐξήσκει μεμονωμένη μάζα, ἴση τῇ μάζῃ τῆς χορδῆς ab* (ἣν ὑποθέτομεν ἔχουσαν τὴν αὐτὴν μὲ τὸ τόξον δασύτητα δ) *συγκεντρωμένη παρὰ τῷ μέσῳ o τοῦ τόξου aob.*

ἕλξις εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ

119. Θεωρήσωμεν ἤδη εὐθύγραμμον ὑλικὸν τμῆμα τὸ AB μήκους $2a$, δασύτητος δ, καὶ σημεῖον c μάζης M ἐκτὸς αὐτοῦ· ὡς ἄξονας συντεταγμένων λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν AB καὶ τὴν εἰς τὸ μέσον ταύτης κάθετον oy. Ἡ ὑπὸ τοῦ τμήματος $\tau\tau'$ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ c ἕλξις εἶναι

$$f\mathrm{M}\frac{\delta\tau\tau'}{\overline{c\tau}^2}$$

αἱ συνιστῶσαι ταύτης παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox καὶ oy εἶναι

$$f\mathrm{M}\delta\frac{\overline{\tau\tau'}}{\overline{c\tau}^2}\text{ἡμ}\theta \quad \text{καὶ} \quad f\mathrm{M}\delta\frac{\overline{\tau\tau'}}{\overline{c\tau}^2}\ \text{συν}\theta$$

ἐπειδὴ δὲ $c\tau\text{συν}\theta = y$ καὶ $\tau\tau'\text{συν}\theta = c\tau d\theta$ αἱ αὐταὶ ἕλξεις ἐκφράζονται διὰ

$$f\mathrm{M}\delta\frac{\text{ἡμ}\theta d\theta}{y} \quad \text{καὶ} \quad f\mathrm{M}\delta\frac{\text{συν}\theta d\theta}{y}$$

ὅθεν αἱ συνιστῶσαι τῆς ὁλικῆς ἕλξεως παραλλήλως τοῖς ἄξοσι

$$X = f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\text{ἡμ}\theta d\theta = f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}[\text{συν}\theta_0 - \text{συν}\theta_1] = f\mathrm{M}\delta\left|\frac{1}{CB} - \frac{1}{CA}\right|$$

$$Y = f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\text{συν}\theta d\theta = f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}[\text{ἡμ}\theta_1 - \text{ἡμ}\theta_0] = f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}\left|\frac{AD}{AC} - \frac{BD}{BC}\right|$$

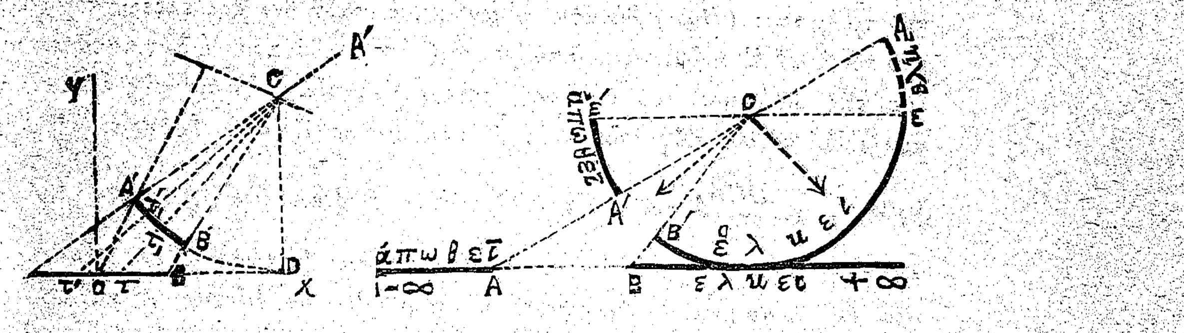
ἡ συνισταμένη τούτων εἶναι

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}\sqrt{(\text{συν}\theta_0 - \text{συν}\theta_1)^2 + (\text{ἡμ}\theta_1 - \text{ἡμ}\theta_0)^2}$$

$$= f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}\sqrt{2 - 2\text{συν}(\theta_1 - \theta_0)} = 2f\mathrm{M}\frac{\delta}{y}\text{ἡμ}\varphi = f\mathrm{M}\frac{md}{\lambda(\lambda^2 - a^2)} \ldots\ldots (1)$$

ἔνθα $2\lambda = CA + CB$, d εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ o ἐκ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν DCA' καὶ $2\varphi = \widehat{ACB}$. Ἐὰν δὲ ἡ ἕλκουσα εὐθεῖα ἐπεκτείνεται ἑκατέρωθεν ἐπ' ἄπειρον, ἔχομεν τὴν ἕλξιν

$$R = 2f\mathrm{M}\frac{\delta}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots (1^{\text{δὶς}})$$



Σχ. 99.

κάθετον ἐπὶ τῆς ἑλκούσης εὐθείας.

ἀφ' ἑτέρου $$\frac{X}{Y} = \frac{\text{συν}\theta_0 - \text{συν}\theta_1}{\text{ἡμ}\theta_1 - \text{ἡμ}\theta_0} = \text{εφ}\frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι, *ἡ εὐθεῖα δράσεως τῆς ὁλικῆς ἕλξεως διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{ACB}$· εἶναι δηλαδὴ αὕτη κάθετος τῇ διὰ τοῦ σημείου C διερχομένῃ ἐλλείψει, ἧς ἑστίαι εἶναι τὰ σημεῖα A καὶ B, καὶ ἐφάπτεται τῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένης καὶ τὰς αὐτὰς ἐχούσης ἑστίας ὑπερβολῆς*· παραβάλλοντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) μὲ τ' ἀποτελέσματα τῆς προηγουμένης παραγράφου (118) βλέπομεν ὅτι

Ἡ ὑπὸ τοῦ τμήματος AB ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ C ἕλξις εἶναι ἡ αὐτὴ τὴν ἔντασιν καὶ φορὰν μὲ τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου C τὸ κυκλικὸν τόξον $A'B'$, τῆς αὐτῆς μὲ τὸ τμῆμα πυκνότητος ἐφαπτόμενον τοῦ τμήματος AB, καὶ ἀκτῖνος $CD = y$· ὅπερ ἠδυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας παρατηροῦντες, ὅτι

$$\tau_1\tau'_1 = c\tau'_1 d\theta \quad \text{καὶ} \quad \tau\tau' = \frac{c\tau d\theta}{\text{συν}\theta} \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{\tau_1\tau'_1}{c\tau'_1} = \frac{\tau\tau'\text{συν}\theta}{c\sigma}$$

καὶ $$\frac{\tau_1\tau'_1}{\overline{c\tau'_1}^2} = \frac{\tau\tau'}{c\tau}\frac{\text{συν}\theta}{c\tau'_1} = \frac{\tau\tau'}{c\tau}\frac{\text{συν}\theta}{y} = \frac{\tau\tau'}{\overline{c\tau}^2}$$

αἱ ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων στοιχειωδῶν τμημάτων $\tau\tau'$ καὶ $\tau_1\tau_1'$ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τοῦ σημείου C ἕλξεις εἶναι λοιπὸν ἴσαι τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν· ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι σημεῖον εὑρισκόμενον ἐντὸς τριγώνου καὶ ἑλκόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὑποτιθεμένων ὁμογενῶν, εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ παρὰ τῷ κέντρῳ τοῦ ἐγγεγραμμένου τῷ τριγώνῳ κύκλου.

Ἐπίσης εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἕλξις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῷ κύβῳ τῆς ἀποστάσεως καὶ θεωρήσωμεν κῶνον, σφαῖραν ὁμόκεντρον τούτῳ καὶ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς τελευταίας ταύτης (ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσι τὴν αὐτὴν πυκνότητα), *ὁ κῶνος τέμνει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαίρας ἐμβαδὰ ἕλκοντα ἐξ ἴσου τὴν κορυφὴν αὐτοῦ.*

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ τμήματος AB θεωρήσωμεν τὰ δύο ἕτερα ἀπεριόριστα τμήματα τῆς εὐθείας, ὧν τὸ μὲν $(-\infty A)$ ἀπωθεῖ τὸ σημεῖον C τὸ δὲ $(B\infty)$ ἕλκει τοῦτο, εὑρίσκομεν τὴν ὁλικὴν ἕλξιν ὡς ἑξῆς· κατὰ τὰ προλεχθέντα ἡ ἕλξις τοῦ τμήματος $(B\infty)$ δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς ἕλξεως τοῦ κυκλικοῦ τόξου $B'E$· ἡ ὤθησις τοῦ τμήματος $(-\infty A)$ δύναται ν' ἀντικαταστασταθῇ διὰ τῆς ὠθήσεως τοῦ κυκλικοῦ τόξου $A'\varepsilon$, αὕτη δὲ διὰ τῆς ἕλξεως τοῦ κυκλικοῦ τόξου εA_1· ὥστε *ἡ ὁλικὴ συνισταμένη ἰσοῦται τῇ ἕλξει*

$2fM\frac{\delta}{y}\eta\mu\frac{\widehat{BCA_1}}{2}$ *τοῦ κυκλικοῦ τόξου $B'D\varepsilon A_1$ καὶ ἡ εὐθεῖα δράσεως ταύτης διχοτομεῖ τὴν γωνίαν BCA_1· εἶναι δηλαδὴ αὕτη κάθετος τῇ διὰ τοῦ σημείου C διερχομένῃ ὑπερβολῇ μὲ ἑστίας A καὶ B, καὶ ἐφάπτεται τῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένης ἐλλείψεως μὲ τὰς αὐτὰς ἑστίας.*

ἕλξις κυκλικοῦ δίσκου ἐπὶ σημείου τοῦ ἄξονός του

120. Τὰ διάφορα μόρια τῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἣν ὁρίζει ἡ ἀκτὶς $KA=x$ κειμένης ὕλης, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀπὸ τοῦ C ἀπόστασιν καὶ ἡ ὁλικὴ τούτων ἕλξις ἐπὶ τοῦ C εἶναι

$$2\pi f M\delta\,\frac{xdx}{a^2+x^2}$$

ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τῆς kc $\quad 2\pi f M\delta\,\frac{xdx}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Ἡ ὁλικὴ ἕλξις εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κυκλικοῦ δίσκου καὶ ἔχει ἔντασιν

$$2\pi f M\delta a\int_0^r\frac{xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi f M\delta a\left|-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right|_0^r$$

$$=2\pi f M\delta\left|1-\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right|\dots\dots\dots\quad(1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $r=\infty$ ἡ ἕλξις εἶναι

$$2\pi f M\delta\dots\dots\dots\dots\dots\dots\quad(2)$$

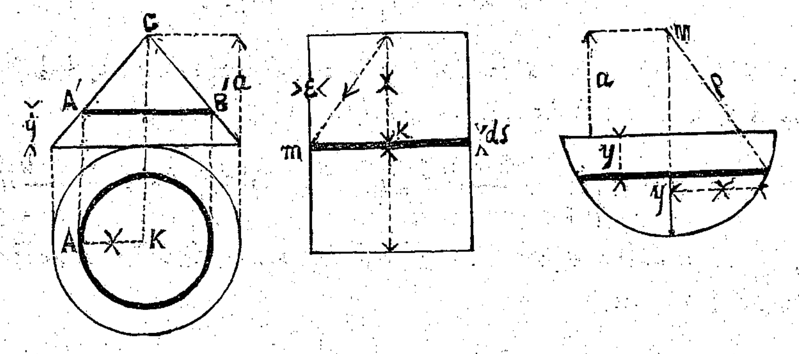
τὴν ταχύτητα ἣν ἀποκτᾷ τὸ ἑλκόμενον σημεῖον πίπτον ἐπὶ τοῦ δίσκου εἰς ἀπόστασιν h ἀπ' αὐτοῦ ἔχομεν ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{da}{dt}\frac{d^2a}{dt^2}=2\pi f\delta\left|1-\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right|\frac{da}{dt}$$

ὅθεν $\quad v^2=4\pi f\delta\int_h^a[a+r-\sqrt{a^2+r^2}]da$

$$=4\pi f\delta[a-\sqrt{a^2+r^2}-h+\sqrt{h^2+r^2}]$$

καὶ δι' $h=0\quad v^2=4\pi f\delta[a+r-\sqrt{a^2+r^2}]$



Σχ. 100.

120.α. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ἤδη στερεὸν κύλινδρον μήκους l ἕλκοντα σημεῖον κείμενον εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἡ ὁλικὴ ἕλξις ἐκφράζεται διὰ

ἕλξις στερεοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπὶ σημείου τοῦ ἄξονος αὐτοῦ

$$2\pi f M\delta\int_x^{l+x}\left[1-\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right]da=2\pi f M\delta\left[a-\sqrt{a^2+r^2}\right]_x^{l+x}$$

$$=2\pi f M\delta[l-\sqrt{r^2+(x+l)^2}+\sqrt{r^2+x^2}]\dots\quad(1)$$

ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸν κύλινδρον προεκβαλλόμενον κατὰ μίαν διεύθυνσιν ἐπ' ἄπειρον, $l=\infty$, καὶ ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι

$$2\pi f M\delta\left|\sqrt{r^2+x^2}-\frac{x^2+r^2+2lx}{l+\sqrt{r^2+(x+l)^2}}\right|_{l=\infty}=2\pi f M\delta[\sqrt{r^2+x^2}-x]\,..(2)$$

Ἐὰν πρὸς τούτοις ὑποθέσωμεν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς βάσεως, $x=o$, καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι

$$2\pi f M\delta r\dots\dots\dots\dots\dots\dots\quad(3)$$

120.β. Ὁ κυκλικὸς δίσκος $A'B'$ ἐξασκεῖ (120.1) ἐπὶ τοῦ σημείου C ἕλξιν

ἕλξις στερεοῦ ὀρθοῦ κωνοῦ ἐπὶ τῆς κορυφῆς του

$$2\pi f M\delta\left|1-\frac{CD'}{\sqrt{\overline{CD'}^2+\overline{D'B'}^2}}\right|=2\pi f M\delta[1-\sigma\upsilon\nu\theta]$$

ἥτις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ y· ἡ ὅλη ἕλξις εἶναι λοιπὸν

$$2\pi f M\delta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\int_0^1 dy = 2\pi f M\delta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)l \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ τρόπου βλέπομεν, ὅτι ὁ κόλουρος κῶνος ὕψους h ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ εἰς ὃν ἀνήκει κώνου ἕλξιν

$$2\pi f M\delta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)h \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ἕλξις ἡμισφαιρίου ἐπὶ σημείου τοῦ ἄξονός του.

120.γ. Ὁ κυκλικὸς δίσκος (Σχ. 100) ἀκτῖνος x, κείμενος εἰς ἀπόστασιν $a+y$ ἀπὸ τοῦ ἑλκομένου σημείου M, ἐξασκεῖ ἐπὶ τούτου ἕλξιν (120.1)

$$2\pi f M\delta\left|1-\frac{a+y}{\rho}\right|dy$$

ὥστε, ἐὰν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπὶ τούτου ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ ἡμισφαιρίου ὁλικὴ ἕλξις εἶναι

$$2\pi f M\delta\int_0^r\left|1-\frac{a+y}{\rho}\right|dy = 2\pi f M\delta\left|r-\int_0^r\frac{a+y}{\rho}d\rho\right| \ldots (1)$$

ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον M κεῖται ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ, ἡ ἐπὶ τούτου ἐξασκουμένη ὁλικὴ ἕλξις εἶναι

$$2\pi f M\delta\left\|\int_a^r\left|1-\frac{y-a}{\rho}\right|dy-\int_0^a\left|1-\frac{a-y}{\rho}\right|dy\right\|$$
$$=2\pi f M\delta\left|r-2a+\int_0^r\frac{y-a}{\rho}dy\right| \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ἔχομεν δὲ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει

$$\rho^2=(a+y)^2+x^2=(a+y)^2+(r^2-y^2)=a^2+r^2+2ay$$

$$\text{ὅθεν } y=\frac{\rho^2-a^2-r^2}{2a} \text{ καὶ } dy=\frac{\rho d\rho}{a}$$

καὶ ἐν τῇ δευτέρᾳ

$$\rho^2=(a-y)^2+x^2=(a-y)^2+r^2-y^2=a^2+r^2-2ay$$

$$\text{ὅθεν } y=\frac{a^2+r^2-\rho^2}{2a} \text{ καὶ } dy=\frac{-\rho d\rho}{a}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν ταῖς ἄνω σχέσεσι (1 καὶ 2) ἔχομεν διὰ τὰς ἀντιστοιχούσας ἕλξεις

$$\frac{2\pi f M\delta}{3a^2}\left[r^3-2a^3+(a^2-r^2)\sqrt{a^2-r^2}\right]$$

$$\text{καὶ } 2\pi f M\delta\left|r-2a+\frac{1}{2a^2}\int_{\sqrt{a^2+r^2}}^{r-a}(r^2-a^2+\rho^2)d\rho\right|$$

$$=\frac{1}{3a^2}\left|r^3-4a^3-(r^2-2a^2)\sqrt{a^2+r^2}\right.$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι τὸ ἑλκόμενον σημεῖον εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ διὰ τὴν θέσιν, ἣν ὁρίζει ἡ σχέσις

$$r^3-4a^3=(r^2-2a^2)\sqrt{a^2+r^2}$$

ἥτις ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$12a^4-8r^3a+3r^4=0$$

ἧς αἱ δύο μόνον ῥίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ θετικαὶ ἀμφότεραι· ἡ μία εἶναι περίπου $\frac{2}{3}a$ ξένη τῷ προβλήματι· ἡ ἄλλη εἶναι περίπου $\frac{3}{7}a$ καὶ δίδει τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ ἰσορροπίᾳ θέσιν.

120.δ. Ὄγκος στεφάνης ἧς τὸ πάχος εἶναι ds (Σχ. 100)

ἕλξις κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐπὶ σημείου τοῦ ἄξονος αὐτῆς

$$2\pi r\varepsilon ds$$

ἕλξις ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ M

$$2\pi f r\delta\varepsilon ds\frac{1}{\overline{mM}^2}\,\frac{MK}{mM}$$

ἔχομεν δὲ $\qquad Mk=s \quad \overline{Mm}^2=s^2+r^2$

ὅθεν ἕλξις $\quad 2\pi f r\delta\varepsilon\int_{-x}^{\infty}\frac{1}{s^2+r^2}\cdot\frac{s}{\sqrt{s^2+r^2}}ds$

ἡ ἐπιτάχυνσις, ἣν μεταδίδει αὕτη τῷ ἑλκομένῳ μορίῳ εἶναι

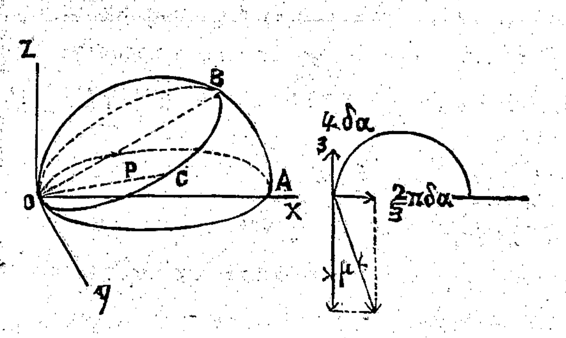
$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\pi f\delta\varepsilon r\int_{-x}^{\infty}\frac{sds}{(s^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi f\delta\varepsilon r\left|-\frac{1}{\sqrt{s^2+r^2}}\right|_{-x}^{\infty}=\frac{2\pi f r\delta\varepsilon}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $2\frac{dx}{dt}$ καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$v^2=4\pi f r\delta\varepsilon\lambda o\gamma(x+\sqrt{x^2+r^2})+\sigma\tau\alpha\theta$$

ἢ ὑποθέττοντες $v=o$ διὰ $x=o$

$$v^2=4\pi f r\delta\varepsilon\lambda o\gamma\frac{x+\sqrt{x^2+r^2}}{r}$$



Σχ. 101.

ἕλξις στερεοῦ ἡμισφαιρίου ἐπὶ σημείου τῆς βάσεως αὐτοῦ

120.ε. Ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων θὰ λάβωμεν, τὸ ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἡμισφαιρίου ἑλκόμενον σημεῖον O, ὡς ἐπίπεδον τῶν x,y τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ ἡμισφαιρίου, καὶ τὸν ἄξονα oy ἐφαπτόμενον τῆς αὐτῆς βάσεως. Διὰ τοῦ ἄξονος oy φέρομεν ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει τὸ ἡμισφαίριον κατὰ τὸν oB κύκλον· ἐν τῷ κύκλῳ τούτῳ λαμβάνομεν ἀκτῖνα οἵαν δήποτε τὴν

oc καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ P. τὸν περὶ τὸ σημεῖον P στοιχειώδη ὄγκον τοῦ ἡμισφαιρίου ἐκφράζομεν διὰ

$$\rho d\theta . d\rho . \rho\,\text{ἡμ}\theta d\varphi = \rho^2 \text{ἡμ}\theta d\theta d\varphi d\rho$$

ἔνθα $\quad \rho = oP \quad \varphi = \widehat{AoB} \quad$ καὶ $\theta = \widehat{coy}$

ὁ στοιχειώδης οὗτος ὄγκος ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου o ἕλξιν ἐντάσεως

$$f\mathrm{M}\delta\,\text{ἡμ}\theta d\theta d\varphi d\rho$$

φερομένην κατὰ τὴν εὐθεῖαν oP. ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τοῦ ox εἶναι

$$f\mathrm{M}\delta\,\text{ἡμ}\theta d\theta d\varphi d\rho .\ \text{ἡμ}\theta . \text{συν}\varphi = f\mathrm{M}\delta\,\text{ἡμ}^2\theta\,\text{συν}\varphi d\theta d\varphi d\rho$$

παρατηροῦντες δέ, ὅτι

$$oc = oB\,\text{ἡμ}\theta = oA\,\text{συν}\varphi\,\text{ἡμ}\theta = 2a\,\text{ἡμ}\theta\,\text{συν}\varphi$$

ἔνθα a εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἡμισφαιρίου, ἡ ὁλικὴ συνιστῶσα τῆς ἕλξεως παραλλήλως τῷ ἄξονι ox εἶναι

$$X = f\mathrm{M}\delta \int_0^{\pi} \text{ἡμ}^2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}\varphi d\varphi \int_0^{2a\,\text{ἡμ}\theta\,\text{συν}\varphi} d\rho = 2f\mathrm{M}\delta a \int_0^{\pi} \text{ἡμ}^3\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2\varphi d\varphi$$

ἔχομεν δὲ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \quad$ καὶ $\int_0^{\pi} \text{ἡμ}^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$

ὥστε $\qquad X = \frac{2}{3}\pi\delta a$

δι' ὁμοίου τρόπου θὰ εὑρίσκομεν τὴν συνιστῶσαν παραλλήλως τῷ oy

$$Y = f\mathrm{M}\delta \int_0^{\pi} \text{ἡμ}^2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ἡμ}\varphi d\varphi \int_0^{2a\,\text{ἡμ}\theta\,\text{συν}\varphi} d\rho = f\mathrm{M}\delta a \int_0^{\pi} \text{ἡμ}^3\theta d\theta \int_0^{\pi} \text{ἡμ}2\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\delta a$$

Ἡ ἔντασις τῆς ὁριζοντείου συνιστώσης εἶναι λοιπὸν

$$X^2 + Y^2 = f\mathrm{M}\frac{\delta^2 a^2}{9}(4\pi^2 + 16)$$

καὶ τὴν κλίσιν ταύτης α ἐπὶ τῆς διαμέτρου ox ὁρίζει ἡ σχέσις

$$\alpha = \text{τοξ.εφ}\frac{X}{Y} = \text{τοξ.εφ}\,\frac{\pi}{2}$$

Διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν παρέκκλισιν μ, ἣν ὑφίσταται ἡ κατακόρυφος g τόπου τινὸς m ὡς ἐκ τῆς παρουσίας σημαντικοῦ τινος ὄρους, οὗτινος τὴν μορφὴν ἐκλαμβάνομεν ὡς ἡμισφαιρικήν· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\text{εφ}\mu = \mu = \frac{\frac{2}{3}\pi\delta a}{g - \frac{4}{3}\delta a} = \frac{\frac{2}{3}\pi\delta a}{\frac{4}{3}\pi R\sigma - \frac{4}{3}\delta a}$$

ἔνθα σ εἶναι ἡ μέση πυκνότης τῆς γῆς καὶ R ἡ ἀκτὶς ταύτης· ἢ κατὰ προσέγγισιν

$$\mu = \frac{\delta a}{2\sigma R}$$

ἕλξις σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐπὶ ἐσωτερικοῦ σημείου

121. Ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ σημεῖον κεῖται ἐν τῷ ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περικλειομένῳ χώρῳ.

Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νοήσωμεν ἀπειροστὸν ἐμβαδὸν ab καὶ διὰ τοῦ σημείου c φέρωμεν εὐθείας στηριζομένας ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου· αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀποτελοῦσι κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἧς ἡ δευτέρα χώνη ὁρίζει ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἕτερον ἀπειροστὸν ἐμβαδὸν τὸ $a'b'$, καὶ προτιθέμεθα ἐνταῦθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἕλξιν, ἣν ἑκάτερον τῶν ἐμβαδῶν τούτων ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου C.

Ἐπὶ σφαίρας κέντρου C καὶ ἀκτῖνος ἴσης τῇ μονάδι, ἡ στοιχειώδης κωνικὴ ἐπιφάνεια ὁρίζει ἀπειροστὸν ἐμβαδὸν σ, ὅπερ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας τοῦ κώνου. Ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ κέντρου c μὲ ἀκτῖνας ca καὶ ca' νοήσωμεν δύο ἄλλας σφαίρας, ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ὁρίζει καὶ ἐπὶ τούτων ἐμβαδὰ aa_1 καὶ aa'_1 ἅτινα συνδέονται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν σ διὰ τῶν σχέσεων

$$\frac{aa_1}{\sigma} = \frac{\overline{ca}^2}{1^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{aa'_1}{\sigma} = \frac{ca'^2}{1^2}$$

ἢ $\qquad aa_1 = \sigma . \overline{ca}^2 \quad$ καὶ $\quad aa_1' = \sigma . \overline{ca'}^2 \ \ldots\ldots \ (1)$

ἀλλ' ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις aa_1b καὶ $a'a'_1b'$ ἔχομεν

$$aa_1 = ab\,\text{συν}\,\widehat{baa_1} \quad \text{καὶ} \quad a'a'_1 = a'b'\,\text{συν}\,\widehat{b'a'a'_1}$$

καὶ ἐπειδὴ $\widehat{baa_1} = \widehat{b'a'a'_1} = \theta$ αἱ ἄνω σχέσεις (1) μετατρέπονται εἰς

$$\frac{ab}{\overline{ca}^2} = \frac{\sigma}{\text{συν}\theta} = \frac{a'b'}{\overline{ca'}^2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

ἐὰν ἤδη καλέσωμεν δ τὴν πυκνότητα τῆς ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διανεμημένης ἑλκούσης ὕλης, αἱ ἕλξεις ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ σημείου c τὰ στοιχειώδη ἐμβαδὰ ab καὶ $a'b'$ εἶναι

$$f\mathrm{M}\delta\frac{ab}{\overline{ca}^2} \quad \text{καὶ} \quad f\mathrm{M}\delta\frac{a'b'}{\overline{ca'}^2}$$

καὶ βλέπομεν (2), ὅτι αἱ δύο αὗται ἕλξεις εἶναι ἴσαι τὴν ἔντασιν· ἐπειδὴ δὲ δρῶσιν αὗται κατ' ἀντίθετον φοράν, ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας· τοῦτο συμβαίνει δι' ὅλα τὰ ζεύγη στοιχειωδῶν ἐπιφανειῶν, εἰς ἃ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν διὰ στοιχειωδῶν κώνων ἐχόντων κοινὴν τὴν κορυφὴν c. Ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι

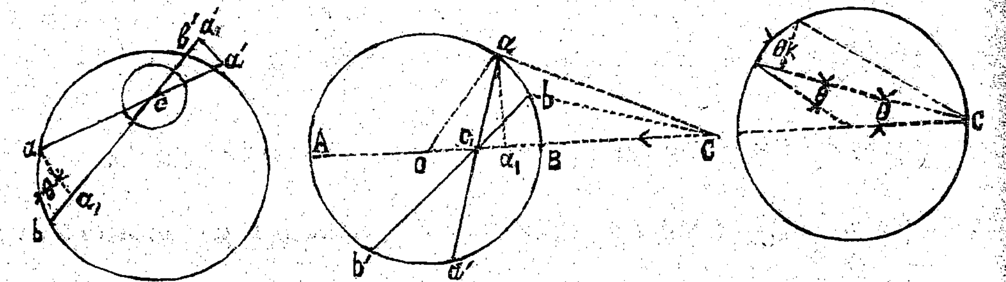
Αἱ ἕλξεις, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ σημείου c τὰ διάφορα στοιχεῖα *τῆς ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας διανεμημένης ὕλης, ἰσορροποῦσι, καὶ οὐδεμίαν ἐξασκεῖ αὕτη ἕλξιν ἐπὶ σημείου κειμένου ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ.*

121. α. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὸ ἑλκόμενον σημεῖον c κεῖται ἐκτὸς τοῦ ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περικλειομένου χώρου. Ἐπὶ τῆς σφαίρας νοοῦμεν καὶ πάλιν ἀπειροστὸν στοιχεῖον τὸ ab ὅπερ ἑνοῦμεν πρὸς τὸ σημεῖον c διὰ κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς acb. ἡ ὑπὸ τοῦ στοιχειώδους τούτου ἐμβαδοῦ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξις

εἶναι $$f\mathrm{M}\delta\frac{ab}{\overline{ac}^2}$$

Ἔστω c_1 τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τῷ c ὡς πρὸς τὰ σημεῖα A καὶ B, καὶ ἑνώσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ab μετὰ τοῦ σημείου c_1 διὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ac_1b, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς σφαίρας ἕτερον ἐμβαδὸν τὸ $a'b'$, ὅπερ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ c ἕλξιν

$$f\mathrm{M}\delta\frac{a'b'}{\overline{a'c}^2}$$



Σχ. 102.

λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν στοιχειωδῶν ἐμβαδῶν ab καὶ $a'b'$ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξεις εἶναι ἴσαι·
ὡς ἐκ τῆς ἁρμονικῆς θέσεως τοῦ σημείου c_1 ὡς πρὸς τὸ c ἔχομεν τῷ ὄντι

$$oc_1 = \frac{r^2}{a} \quad ἢ \quad \frac{oc_1}{r} = \frac{r}{a}$$

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ a ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου o ἀπόστασις τοῦ ἑλκομένου σημείου c. τὰ τρίγωνα oac_1 καὶ oca εἶναι λοιπὸν ὅμοια καὶ ἡ γωνία $\widehat{oac_1}$ ἴση τῇ $\widehat{oca} = \theta$.
ἔχομεν ἤδη ἐκ τῶν προηγουμένων (121.2)

$$ab = \frac{\sigma.\overline{c_1a}^2}{\text{συν}\theta} = \frac{\sigma r^2.\overline{ca}^2}{a\,\text{συν}\theta} \text{ καὶ } a'b' = \frac{\sigma.\overline{c_1a'}^2}{\text{συν}\theta} = \frac{\sigma r.^2\overline{ca'}^2}{a^2\text{συν}\theta} \text{ διότι } \frac{r}{a} = \frac{c_1a}{ca}$$

ἔνθα σ εἶναι ἡ στερεὰ γωνία τοῦ κώνου ac_1b· αἱ ζητούμεναι στοιχειώδεις ἕλξεις ἐκφράζονται λοιπὸν καὶ οὕτω

$$f\mathrm{M}\delta\,\frac{r^2}{a^2}.\frac{\sigma}{\text{συν}\theta} \quad\text{καὶ}\quad f\mathrm{M}\delta\,\frac{r^2}{a^2}\frac{\sigma}{\text{συν}\theta}$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι εἶναι αὗται ἴσαι, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι oca καὶ oca' εἶναι ἴσαι, ἡ συνισταμένη τούτων φέρεται κατὰ τὴν εὐθεῖαν co καὶ ἔχει

ἔντασιν $$2f\mathrm{M}\delta\frac{r^2}{a^2}\sigma$$

ἡ ὁλικὴ ἕλξις εἶναι οὕτω

$$2f\mathrm{M}\delta\frac{r^2}{a^2}\int_0^{2\pi}\sigma = 4\pi f\mathrm{M}\delta\,\frac{r^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

καὶ φέρεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶναι $4\pi r^2$, ἡ ἐπὶ ταύτης διανεμημένη ἕλκουσα ὕλη εἶναι $4\pi r^2\delta$· *ἐὰν τὴν φαντασθῶμεν συγκεντρωμένην εἰς τὸ κέντρον, ἐξασκεῖ αὕτη ἐπὶ τοῦ σημείου C ἕλξιν*

$$f\,\frac{\mathrm{M}.4\pi r^2\delta}{a^2}$$

ἴσην δηλαδὴ ἐκείνῃ, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ αὐτὴ ποσότης ὕλης, ὅταν εὑρίσκεται αὕτη ὁμοιομόρφως διανεμημένη ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

121. β. Ὑποθέσωμεν τέλος, ὅτι τὸ ἑλκόμενον σημεῖον c εὑρίσκεται ἐπ' αὐτῆς τῆς ἑλκούσης σφαιρικῆς ἐπιφανείας· ἔχομεν καὶ ἐνταῦθα διὰ τὴν ὑπὸ τοῦ στοιχειώδους ἐμβαδοῦ ab ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ c ἕλξιν

$$f\mathrm{M}\delta\frac{ab}{\overline{ac}^2} = f\mathrm{M}\delta\,\frac{\sigma}{\text{συν}\theta}$$

ἡ συνιστῶσα ταύτης παραλλήλως τῇ oc εἶναι $f\mathrm{M}\delta\sigma$, καὶ ἡ ὁλικὴ ἕλξις

$$f\mathrm{M}\delta\int_0^{2\pi}\sigma = 2\pi f\mathrm{M}\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν τὸ σημεῖον εὑρίσκηται ἐκτὸς ἀλλὰ πολὺ πλησίον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐν τῇ σχέσει (121.α.1) ἔχομεν $a = r$ καὶ διὰ τὴν ἕλξιν

$$4\pi f\mathrm{M}\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

τὸ διπλάσιον δηλαδὴ τῆς ἕλξεως, ἣν ὑφίσταται τὸ αὐτὸ σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπ' αὐτῆς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

121. γ. Ἐάν, διὰ τοῦ ἐκτὸς τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος κειμένου σημείου c, νοήσωμεν ἑτέραν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὁμόκεντρον τῇ πρώτῃ, ἐφ' ἧς ὑπάρχει ὕλη διανεμημένη μὲ πυκνότητα δ', ἐξασκεῖ αὕτη ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξιν (121.6.2)

$$4\pi f M\delta'$$

καὶ ἐὰν λάβωμεν

$$4\pi a^2\delta' = 4\pi r^2\delta \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta' = \delta\frac{r^2}{a^2}$$

τὴν μάζαν δηλαδὴ τοῦ δευτέρου τούτου σφαιρικοῦ στρώματος ἴσην τῇ μάζῃ τοῦ πρώτου ἔχομεν

$$4\pi f M\delta' = 4\pi f M\delta\frac{r^2}{a^2}$$

Ἡ ἕλξις δηλαδὴ ἣν ἐξασκεῖ στρῶμα σφαιρικὸν ἀπειροστοῦ πάχους ἐπὶ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ τοῦ ὑπ' αὐτοῦ περικλειομένου χώρου, εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τοῦ κέντρου του, ἰσοῦται τῇ ἕλξει, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἕτερον σφαιρικὸν στρῶμα ἀπειροστοῦ ἐπίσης πάχους, ὁμόκεντρον τῷ πρώτῳ, ἀκτῖνος $a - \varepsilon$ (ἔνθα ε εἶναι ἀπειροστὴ ποσότης) καὶ ἴσης τῷ πρώτῳ μάζης. Ἢ γενικώτερον· ἐὰν θεωρήσωμεν σφαιρικὸν στρῶμα ἀπειροστοῦ πάχους, πυκνότητος δ' καὶ ἀκτῖνος $x < a$ ὁμόκεντρον τῷ πρώτῳ ἐξασκεῖ τοῦτο ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξιν

$$4\pi f M\delta'\frac{x^2}{a^2}$$

ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν μάζαν τοῦ στρώματος τούτου ἴσην τῇ τοῦ πρώτου, $4\pi x^2\delta' = 4\pi r^2\delta$ ἡ ἄνω ἕλξις ἔχει ἔντασιν

$$4\pi f M\delta\,\frac{r^2}{a^2}$$

ἴσην δηλαδὴ τῇ ἕλξει (121.α.1) ἣν ἐξασκεῖ τὸ πρῶτον στρῶμα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου c. συνοψίζοντες βλέπομεν, ὅτι

Ἐὰν ἔχωμεν μάζαν τινὰ m ἕλκουσαν ἑτέραν μάζαν M συγκεντρωμένην παρά τινι σημείῳ c, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὴν πρώτην μάζαν συγκεντρωμένην καὶ ταύτην παρά τινι σημείῳ o εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τοῦ c κειμένῳ, ἢ διανεμημένην ὁμοιομόρφως ἐπὶ ἐπιφανείας σφαίρας ἐχούσης τὸ κέντρον αὐτῆς παρὰ τῷ σημείῳ o, καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς δύναται ἀδιακρίτως νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ a.

121. δ. Ἀναλυτικῶς. Τὴν ἄνω πρότασιν, ὡς θεμελιώδη καὶ χαρακτηριστικὴν τῶν δυνάμεων, αἵτινες δρῶσι κατ' ἀντίστροφον λόγον τοῦ τετραγώνου τῶν ἀποστάσεων, θ' ἀποδείξωμεν καὶ ἀναλυτικῶς.

Ἐὰν διὰ τῶν σημείων a καὶ b (Σχ. 101) νοήσωμεν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας κύκλους καθέτους τῇ oc, ὁρίζουσιν οὗτοι ζώνην, ἧς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι

$$2\pi aa_1 \cdot ab = 2\pi . r\,\text{ἡμ}\theta . rd\theta = 2\pi r^2\,\text{ἡμ}\theta d\theta$$

ἡ ὑπὸ τῆς ζώνης ταύτης ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξις εἶναι

$$2\pi f M\delta r^2\frac{\text{ἡμ}\theta d\theta}{\overline{ac}^2} \text{ καὶ ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τῆς } oc \;\; 2\pi f M\delta r^2\,\text{ἡμ}\theta d\theta\frac{ca_1}{\overline{ac}^3}$$

Ἐὰν θέσωμεν

$$\rho^2 = \overline{ac}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\,\text{συν}\theta$$

ἔχομεν

$$\rho d\rho = ar\,\text{ἡμ}\theta d\theta \text{ καὶ } ca_1 = a - r\,\text{συν}\theta = \frac{\rho^2 - r^2 + a^2}{2a}$$

καὶ ἡ ἄνω συνιστῶσα τῆς ἕλξεως μετατρέπεται εἰς

$$fM\frac{\pi\delta r^2}{a^2}.\;\frac{\rho^2 - r^2 + a^2}{r\rho^2}d\rho$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\int\frac{\rho^2 - r^2 + a^2}{r\rho^2}d\rho = \frac{\rho}{r} + \frac{r^2 - a^2}{r\rho}$$

ἐὰν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον c κεῖται ἐν τῷ ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περικλειομένῳ χώρῳ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι

$$fM\frac{\pi\delta r^2}{a^2}\left|\frac{\rho}{r} + \frac{r^2 - a^2}{r\rho}\right|_{r-a}^{r+a} = \text{μηδενὶ}$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον c κεῖται ἐκτός, ἡ ἕλξις εἶναι

$$fM\frac{\pi\delta r^2}{a^2}\left|\frac{\rho}{r} + \frac{r^2 - a^2}{r\rho}\right|_{a-r}^{a+r} = 4\pi f M\delta\frac{r^2}{a^2}$$

121. ε. Ἐὰν ὁ νόμος τῆς ἕλξεως ἦτο ἐν γένει συνάρτησίς τις $\varphi(\rho)$ τῆς ἀποστάσεως ρ, θὰ εἴχομεν, συλλογιζόμενοι ὡς καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις, διὰ τὴν ὑπὸ τῆς ζώνης ab ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξιν (121.δ)

$$2\pi f M\delta r^2\varphi(\rho)\,\text{ἡμ}\theta d\theta = 2\pi f M\delta r^2\varphi(\rho)\rho\,\frac{d\rho}{ar} = 2\pi f M\delta\,\frac{r}{a}\,\varphi(\rho)\rho d\rho$$

ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τῆς oc εἶναι

$$2\pi f M\delta\,\frac{r}{a}\varphi(\rho)\rho d\rho\,\frac{ca_1}{\rho} = \pi f M\delta\,\frac{r}{a^2}(\rho^2 - r^2 + a^2)\varphi(\rho)d\rho$$

καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ ὅλου στρώματος ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ c ἕλξις εἶναι

1) Ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ἐν τῷ ἐκτὸς τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος χώρῳ

$$\pi f \mathrm{M}\frac{\delta r}{a^2}\int_{a-r}^{a+r}(\rho^2-r^2+a^2)\varphi(\rho)d\rho \ldots\ldots\ldots (1)$$

2) Ἐὰν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον κεῖται ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος περικλειομένῳ χώρῳ, ἡ ὑπὸ τούτου ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι

$$\pi f \mathrm{M}\frac{\delta r}{a^2}\int_{r-a}^{r+a}(\rho^2-r^2+a^2)\varphi(\rho)d\rho \ldots\ldots\ldots (2)$$

ἢ θέτοντες $\int\varphi(\rho)d\rho=\chi(\rho)$ καὶ $\int\rho\chi(\rho)d\rho=\psi(\rho)$

διὰ τοῦ τύπου τῆς κατὰ μέρη ὁλοκληρώσεως ἔχομεν

$$\int(\rho^2-r^2+a^2)\varphi(\rho)d\rho=(\rho^2-r^2+a^2)\chi(\rho)-2\int\rho\chi(\rho)d\rho=(\rho^2-r^2+a^2)\chi(\rho)-2\psi(\rho)$$

καὶ ἔχομεν οὕτω διὰ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου ἐξασκουμένην ἕλξιν

$$2\pi f\mathrm{M}\delta\left|\frac{a+r}{a}\chi(a+r)-\frac{a-r}{a}\chi(a-r)-\frac{1}{a^2}\psi(a+r)+\frac{1}{a^2}\psi(a-r)\right|$$

$$=2\pi f\mathrm{M}\delta\frac{d}{da}\left|\frac{\psi(r+a)-\psi(a-r)}{a}\right|\ldots\ldots\ldots (1')$$

καὶ διὰ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ

$$2\pi f\mathrm{M}\delta\left|\frac{r+a}{a}\chi(r+a)+\frac{r-a}{a}\chi(r-a)-\frac{1}{a^2}\psi(r+a)+\frac{1}{a^2}\psi(r-a)\right|$$

$$=2\pi f\mathrm{M}\delta\frac{d}{da}\left|\frac{\psi(r+a)-\psi(r-a)}{a}\right|\ldots\ldots (2')$$

122. Εὕρομεν ἀνωτέρω ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ἕλξεως σφαιρικοῦ στρώματος δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας (121. καὶ 121.α.), ἐν τῇ ὑποθέσει τῆς ἕλξεως ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως. Ἴδωμεν ἤδη ποῖοι ἄλλοι νόμοι ἕλξεως ἔχουσι τὰς θεμελιώδεις ταύτας ἰδιότητας· τουτέστι :

1) Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ νόμος τῆς ἕλξεως, ἵνα ἡ ὑπὸ τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος ἐξασκουμένη ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τινὸς σημείου ἕλξις ᾖ ἡ αὐτή, ὡς εἰ ἡ μάζα τοῦ στρώματος ἦτο συγκεντρωμένη παρὰ τῷ κέντρῳ τούτου· Ἐὰν καλέσωμεν $\varphi(\rho)$ τὸν ἄγνωστον νόμον τῆς ἕλξεως, ἡ εἰς τὸ κέντρον συγκεντρωμένη μάζα τοῦ στρώματος $4\pi r^2\delta$ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου c ἕλξιν $4\pi r^2\delta\varphi(a)$· ἀφ' ἑτέρου τὴν ὑπὸ τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἕλξιν μᾶς δίδει ἡ σχέσις (121.ε.1')· δέον λοιπὸν νὰ ἔχωμεν

$$2r\varphi(a)=\frac{d}{da}\left[\frac{\psi(a+r)-\psi(a-r)}{a}\right]$$

ἢ ἀναπτύσσοντες τὴν ἐν τῇ παρενθέσει συνάρτησιν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ r ἔχομεν

$$2r\varphi(a)=2\frac{d}{da}\left|\frac{r}{a}\psi'(a)+\frac{r^3}{1.2.3.a}\psi'''(a)+\ldots\right|$$

$$=2r\varphi(a)+2\frac{d}{da}\left|\frac{r^3}{1.2.3.a}\psi'''(a)+\ldots\right|$$

ὅθεν ἡ σχέσις $\frac{d}{da}\left|\frac{r^3}{1.2.3.a}\psi'''(a)+\ldots\right|=0$

ἥτις δέον νὰ πληροῦται ἀνεξαρτήτως τοῦ μεγέθους τῆς ποσότητος r· ὥστε

$$\frac{d}{da}\left|\frac{\psi'''(a)}{a}\right|=0\ldots\ldots\frac{d}{da}\left|\frac{\psi^{(n)}(a)}{a}\right|=0\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἀλλ' ἔχομεν

$$\psi'(a)=a\int\varphi(a)da\quad \psi''(a)=a\varphi(a)+\int\varphi(a)da\quad \psi'''(a)=2\varphi(a)+a\varphi'(a)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ πρώτῃ τῶν ἄνω σχέσεων ἔχομεν

$$\frac{\psi'''(a)}{a}=2\frac{\varphi(a)}{a}+\varphi'(a)=\text{σταθ. } 3c$$

πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ a^2 καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$a^2\varphi(a)=ca^3+b$$

ὅθεν $$\varphi(a)=ca+\frac{b}{a^2}$$

καὶ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ φ(α) ἐπαληθεύει ἐκτὸς τῆς πρώτης καὶ τὰς λοιπὰς σχέσεις (1)·

οἱ ζητούμενοι νόμοι εἶναι λοιπόν·

1) ὁ τῆς ἕλξεως ἀναλόγου τῇ ἀποστάσει ($c \gtrless o$ $b=o$)

2) ὁ τῆς ἕλξεως ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως ($c=o$ $b\gtrless o$)

3) ἕτερος συγκείμενος ἐκ τῶν προηγουμένων δύο ($x\gtrless o$ $b\gtrless o$) (Laplace).

122.α. Ζητήσωμεν ἤδη ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ νόμος τῆς ἕλξεως, ἵνα ἡ ὑπὸ τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος ἐξασκουμένη ἐπὶ σημείου κειμένου ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ στρώματος περικλειομένῳ χώρῳ ἕλξις ᾖ ἡ αὐτὴ καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις καὶ μείνῃ τὸ σημεῖον ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἐκ τῆς σχέσεως (121.ε.2') δέον νὰ ἔχωμεν

$$\frac{d}{da}\left|\frac{\psi(r+a)-\psi(r-a)}{a}\right|=0$$

ὅθεν ὡς καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις

$$\psi'(r)+\frac{a^2}{1.2.3.}\psi'''(r)+\ldots\ldots=\text{σταθερὰ } c(\text{ἀνεξαρτήτῳ τοῦ } a)$$

ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς ἣν δίδομεν εἰς τὴν ποσότητα a· ὥστε

$$\psi'(r)=c\qquad \psi'''(r)=0\ldots\ldots\psi^{(n)}(r)=0\ldots\ldots (1)$$

ἐκ τῆς δευτέρας τῶν σχέσεων τούτων πορίζόμεθα

$$\psi(r) = b + b'r + b''r^2$$

ἔνθα b, b', b'' εἶναι σταθεραί· ἐκ ταύτης δὲ ἔχομεν

$$\psi'(r) = r\int\varphi(r)dr = b' + 2b''r$$

ὅθεν $$\int\varphi(r)dr = \frac{b'}{r} + 2b'' \quad \text{καὶ} \quad \varphi(r) = \frac{-b'}{r^2}$$

ἡ τιμὴ δ' αὕτη τοῦ $\varphi(r)$ ἐπαληθεύει καὶ τὰς λοιπὰς σχέσεις (1)· ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι

Ὁ μόνος νόμος ἕλξεως ὁ ἔχων τὴν ἄνω διατυπωθεῖσαν ἰδιότητα, εἶναι ὁ τῆς ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως· ἡ ἰδιότης αὕτη χαρακτηρίζει λοιπὸν τὰς ἐν τῇ φύσει κεντρικὰς δυνάμεις (Laplace).

122.β. Τῆς τελευταίας ταύτης προτάσεως ὁ κύριος J. Bertrand ἔδωκε τὴν ἑξῆς ἀπόδειξιν.

Αἱ ἀποστάσεις λέγει οὗτος τῶν διαφόρων σημείων τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ ἑλκομένου σημείου c_1 μεταβάλλονται μεταξὺ τῶν ὁρίων c_1B καὶ c_1A· ὥστε ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $f(r)$ ἐκφράζει τὸν ζητούμενον νόμον τῆς ἕλξεως, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς ἀποστάσεις c_1B καὶ c_1A οὕτως, ὥστε ἡ συνάρτησις $r^2f(r)$ ν' αὐξάνῃ πάντοτε ἢ ἐλαττοῦται κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ ρ ἀπὸ τοῦ c_1B μέχρι τοῦ c_1A. Ἡ ὑπὸ τῆς στοιχειώδους μάζης ab ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ c_1 ἕλξις εἶναι $abf(c_1b) = \frac{d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\theta}\overline{c_1a}^2 f(c_1a)$. Ἡ ὑπὸ τῆς στοιχειώδους μάζης $a'b'$ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου c_1 ἕλξις εἶναι $\frac{d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\theta}\overline{c_1a'}^2 f(c_1a')$· ἀλλὰ προφανῶς $c_1a' > c_1a$, ὅθεν καθ' ὑπόθεσιν

$$\overline{c_1a'}^2 f(c_1a') > \overline{c_1a}^2 f(c_1a)$$

αἱ ἕλξεις τῶν μαζῶν ab θὰ ἦσαν λοιπὸν μικρότεραι τῶν ἕλξεων τῶν ἀντιστοίχων τούτοις μαζῶν $a'b'$ καὶ ἡ συνισταμένη τούτων δὲν θὰ ἦτο ἴση τῷ μηδενὶ ὡς ὑπετέθη τοῦτο· ἡ συνάρτησις $\overline{c_1a}^2 f(c_1a)$ εἶναι λοιπὸν σταθερὰ καὶ ἔχομεν $\overline{c_1a}^2 f(c_1a) = b$ ὅθεν $f(c_1a) = \frac{b}{r^2}$

ἕλξις ὁμογενοῦς σφαιρικοῦ στρώματος

123. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἔχομεν στρῶμα σφαιρικὸν πεπερασμένου πάχους ε, καὶ ζητήσωμεν τὴν ἕλξιν ἣν ἐξασκεῖ τοῦτο,

1ον Ἐπὶ σημείου εὑρισκομένου ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ στρώματος περικλειομένῳ χώρῳ.

Τὸ σφαιρικὸν στρῶμα πάχους ε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς συγκείμενον ἐξ ὁμοκέντρων στρωμάτων ἀπειροστοῦ πάχους dr γνωρίζομεν δὲ (121) ὅτι, *αἱ ὑπὸ τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ στρώματος ἐξα-*

σκούμεναι ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξεις ἰσορροποῦσι, καὶ τὸ ὅλον στρῶμα οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν.

2ον Ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ἐν αὐτῷ τῷ στρώματι, δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τοῦτο εἰς δύο, διὰ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $oc = a$ ὧν τὸ ἐξωτερικὸν οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν.

Τὸ ἐσωτερικὸν στρῶμα δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὡς συγκείμενον ἐκ σειρᾶς στρωμάτων ἀπειροστοῦ πάχους dr, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν (121.α)

$$4\pi f M\delta\frac{r^2}{a^2}dr$$

ἡ ὅλη ἕλξις, ἣν ἐξασκεῖ τὸ στρῶμα ἐπὶ τοῦ σημείου εἶναι λοιπὸν ἐὰν ὑποθέσωμεν τοῦτο ὁμογενὲς

$$4\pi f\frac{M\delta}{a^2}\int_{r_0}^{a} r^2dr = 4\pi f M\delta\frac{a^3 - r_0^3}{3a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

3ον Ὑποθέσωμεν ἤδη τὸ σημεῖον ἐκτὸς τοῦ στρώματος καὶ ἐν τῷ ἐξωτερικῷ χώρῳ δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ θεωρήσωμεν τὸ στρῶμα ὡς συγκείμενον ἐξ ὁμογενῶν ὁμοκέντρων σφαιρικῶν στρωμάτων ἀπειροστοῦ πάχους dr, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν (121.α)

$$4\pi f M\delta\frac{r^2}{a^2}dr$$

καὶ ἡ ὅλη ἕλξις, ἣν ἐξασκεῖ τὸ στρῶμα ἐπὶ τοῦ σημείου c εἶναι

$$4\pi f\frac{M\delta}{a^2}\int_{r_0}^{r_1} r^2dr = 4\pi f M\delta\frac{r_1^3 - r_0^3}{3a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἴση δηλαδὴ μ' ἐκείνην, ἣν θὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ μάζα $\frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_0^3)\delta$ *τοῦ στρώματος ἐὰν ἦτο αὕτη συγκεντρωμένη παρὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας*, ἰδιότης, ἣν εὐκόλως ἐπαληθεύομεν καὶ διὰ τὰς προηγουμένας δύο περιπτώσεις (1ον καὶ 2ον), καὶ γενικώτερον· *Πᾶν σφαιρικὸν ὁμογενὲς στρῶμα* $(x_1 < a, x_0)$ *ὁμόκεντρον τῷ πρώτῳ, καὶ ἴσης τούτῳ μάζης ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐκτὸς αὐτοῦ ἢ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας του κειμένου σημείου, τὴν αὐτὴν ἕλξιν.*

124. Ἐὰν ἐν τῇ ἄνω περιπτώσει ὑποθέσωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα τοῦ στρώματος r_0 ἴσην τῷ μηδενί, ἔχομεν πλήρη στερεὰν σφαῖραν, ἥτις *ἐπὶ τῶν ἐντὸς αὐτῆς κειμένων σημείων ἐξασκεῖ ἕλξιν* (123.1) ἕλξις στερεᾶς σφαίρας

$$\frac{4}{3}\pi f M\delta a$$

ἴσην δηλαδὴ μ' ἐκείνην, ἣν θὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ μάζα $\frac{4}{3}\pi a^3\delta$ *σφαίρας ἀκτῖνος* a *συγκεντρωμένη παρὰ τὸ κέντρον.*

Ἐὰν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, *ἡ ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι* (124.2)

$$\tfrac{4}{3}\pi f\,\mathrm{M}\delta r$$

ἴση δηλαδὴ μ᾽ ἐκείνην, ἣν θὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ μάζα $\tfrac{4}{3}\pi r^3\delta$ *τῆς σφαίρας συγκεντρωμένη παρὰ τὸ κέντρον.*

Ἐὰν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ἡ ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι (124.2)

$$\tfrac{4}{3}\pi f\,\mathrm{M}\delta\,\frac{r^3}{a^2}$$

ἴση δηλαδὴ μ᾽ ἐκείνην, ἣν θὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ μάζα $\tfrac{4}{3}\pi r^3\delta$ *ἐὰν ἦτο αὕτη συγκεντρωμένη παρὰ τὸ κέντρον·* γενικώτερον, *ὡς θὰ εἷλκε τοῦτο πᾶσα ὁμογενὴς σφαῖρα ἀκτῖνος* $x < a$, *ἴσης τῇ τῆς πρώτης μάζης καὶ ὁμόκεντρος ταύτῃ.*

Διὰ τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐντὸς τῆς σφαίρας σημεῖα, ἡ ἕλξις εἶναι ἀνάλογος τῇ ἀποστάσει τοῦ ἑλκομένου σημείου ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου· ὥστε ἐὰν φαντασθῶμεν στενὸν κυλινδρικὸν σωλῆνα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ περατούμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ῥίψωμεν δὲ ἐντὸς αὐτοῦ τὸ ἑλκόμενον σῶμα, δὲν θὰ ἐξέλθῃ τοῦτο τῆς σφαίρας, ἀλλὰ θὰ ἐξακολουθήσῃ κινούμενον παλινδρομικῶς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἑτέρου στομίου τοῦ διὰ τῆς σφαίρας διερχομένου κυλίνδρου.

ἀμοιβαία ἕλξις ὁμογενῶν σφαιρῶν

124.α. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὸ μεμονωμένον σημεῖον c μάζης M εἶναι τὸ κέντρον ὁμογενοῦς σφαίρας, ἧς ἡ μάζα ἰσοῦται τῇ M. Ἡ ἕλξις, ἣν ἐξασκεῖ ἡ σφαῖρα c ἐπὶ τῶν διαφόρων μερῶν τῆς o, εἶναι ἡ αὐτὴ (224) μὲ τὴν ἕλξιν, ἣν θὰ ἐξήσκει ἡ αὐτὴ μάζα συγκεντρωμένη παρὰ τῷ κέντρῳ c ἴση δηλαδὴ τῇ

$$\tfrac{4}{8}\pi f\,\delta r^3\,\frac{\mathrm{M}}{a^2} = f\,\frac{m\mathrm{M}}{a^2}$$

ὅθεν δύο σφαῖραι ἕλκουσιν ἀλλήλας, ὡς εἰ αἱ μάζαι τούτων ἦσαν συγκεντρωμέναι παρὰ τοῖς κέντροις τούτων.

ἕλξις ἐλλειψοειδοῦς στρώματος

125. Ὑποθέσωμεν δύο ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας ἐλλειψοειδεῖς ἐπιφανείας, αἵτινες περιλαμβάνουσιν ὁμογενὲς ἐλλειψοειδὲς στρῶμα, καὶ ζητήσωμεν τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ τοῦτο ἐπὶ σημείου c κειμένου ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ στρώματος περικλειομένῳ χώρῳ· διὰ τοῦ σημείου c φανταζόμεθα κωνικὴν ἐπιφάνειαν ὁρίζουσαν ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς στρώματος κολούρους

κώνους, ὧν τὰ ὕψη εἶναι (Σχ. 104) af καὶ $a'f'$. αἱ ἕλξεις ἃς ἐξασκοῦσιν οὗτοι ἐπὶ τῆς κορυφῆς c τοῦ κώνου εἶναι (120.β)

$$2\pi f\,\mathrm{M}\delta(1-\text{συν}\theta)af \text{ καὶ } 2\pi f\,\mathrm{M}\delta(1-\text{συν}\theta)a'f'$$

ἀλλ᾽ ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ τῆς ὁμοίας θέσεως τῶν ἐλλείψεων ἔχομεν

$$af = a'f'$$

διότι ἡ συζυγὴς τῇ aa' διάμετρος χωρίζει τὴν aa' καὶ ff' εἰς ἴσα μέρη· ἔχομεν λοιπὸν

$$if = if' \quad \text{καὶ} \quad ia = ia'$$

ὅθεν δι᾽ ἀφαιρέσεως

$$ia - if = af = ia' - if' = af'$$

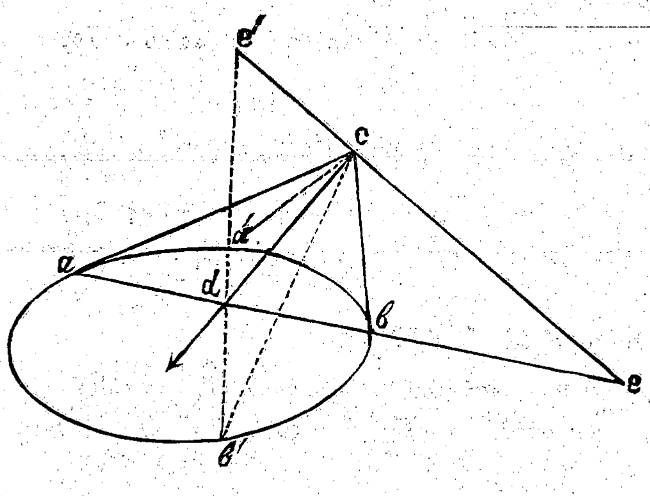
ὥστε τὰ δύο στοιχεῖα ab καὶ $a'b'$ ἕλκουσιν ἐξ ἴσου κατ᾽ ἀντίθετον φορὰν τὸ σημεῖον c. ὅθεν ἡ πρότασις:

Αἱ ἕλξεις, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ σημείου c *τὰ διάφορα μέρη τοῦ ἐλλειψοειδοῦς στρώματος, ἰσορροποῦσιν ἐξουδετεροῦσαι ἀλλήλας* (Νεύτων).

125.α. Ἐὰν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον εἶναι ἐκτὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς στρώματος, οὗτινος τὸ πάχος ὑποθέτομεν πρὸς στιγμὴν ἀπειροστόν, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὴν φορὰν τῆς ὁλικῆς ἕλξεως.

Ἡ κάτωθι ἀπόδειξις, ὀφειλομένη τῷ διασήμῳ γεωμέτρῃ Steiner, στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς προτάσεως.

Ἐὰν ἐκ τοῦ ἑλκομένου σημείου c νοήσωμεν τὸν ἐφαπτόμενον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κῶνον, καὶ διὰ τοῦ ἄξονος cd τοῦ κώνου τούτου ἐπίπεδον, τέμνει τοῦτο τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ τὴν ἔλλειψιν $aa'bb'$ καὶ τὸν κῶνον κατὰ τὰς δύο γενετείρας ca καὶ cb, αἵτινες ἐφάπτονται τῆς ἐλλείψεως· ὁ ἄξων cd διχοτομεῖ τὴν γωνίαν acb· ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν δευτέραν διχοτομοῦσαν cee' τῆς αὐτῆς γωνίας, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι $c(eadb)$ κεῖνται ἁρμονικῶς, καὶ συνεπῶς τὸ e εἶναι συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ d· ἀλλὰ καὶ τὸ c εἶναι συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ d, διότι ἡ εὐθεῖα ab εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ c· ἡ εὐθεῖα ece' (ἡ διὰ τοῦ d εὐθεῖα de' εἶναι οἱαδήποτε) εἶναι λοιπὸν ἡ πολικὴ τοῦ d, καὶ συνεπῶς τὸ e' συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ d· αἱ εὐθεῖαι $c(a'db'e')$ κεῖνται λοιπὸν ἁρμονικῶς, καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο συζυγεῖς cd καὶ ce' εἶναι κάθετοι ἀλλήλαις, διχοτομοῦσιν αὗται τὴν γωνίαν $a'cb'$·



Σχ. 103.

Νοήσωμεν ἤδη διὰ τοῦ σημείου d κωνικὴν ἐπιφάνειαν ὁρίζουσαν παρὰ τοῖς σημείοις a' καὶ b' ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς στρώματος ἀπειροστὰ στοιχεῖα, ὧν οἱ ὄγκοι εἶναι υ καὶ υ' καὶ αἱ μάζαι $\delta\upsilon$ καὶ $\delta\upsilon'$· κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν τοῦ Νεύτωνος

$$fM\frac{\delta\upsilon}{\overline{da'}^2}=fM\frac{\delta\upsilon'}{\overline{db'}^2}$$

καὶ ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς διχοτομούσης cd ἔχομεν

$$\frac{\overline{ca'}^2}{\overline{da'}^2}=\frac{\overline{cb'}^2}{\overline{db'}^2}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει ἔχομεν

$$fM\delta\frac{\upsilon}{\overline{ca'}^2}=fM\delta\frac{\upsilon'}{\overline{cb'}^2}$$

τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης παριστῶσιν ἀμοιβαίως τὰς ἕλξεις, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ σημείου c τὰ στοιχεῖα a' καὶ b'· εἶναι λοιπὸν αὗται ἴσαι, καὶ *ἡ συνισταμένη τούτων ἔχει τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος cd τοῦ διὰ τοῦ c περιγεγραμμένου τῷ ἐλλειψοειδεῖ κώνου.* (*Poisson*)

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον c κείμενον ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ὁ ἄξων cd συμπίπτει μετὰ τῆς καθέτου τῷ ἐλλειψοειδεῖ, καὶ

Ἡ ἕλξις φέρεται καθέτως τῷ ἐλλειψοειδεῖ.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ταύτῃ βλέπομεν πρὸς τοῖς ἄλλοις, ὅτι

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου d τέμνει τὸ ἐλλειψοειδὲς εἰς δύο μέρη, ἑκάτερον τῶν ὁποίων ἐξασκεῖ τὴν αὐτὴν ἕλξιν ἐπὶ τοῦ σημείου c.

125β. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τῆς ἕλξεως ταύτης τοῦ ἐλλειψοειδοῦς στρώματος ἀπειροστοῦ πάχους ε ἐπὶ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας του; νοήσωμεν διὰ τοῦ σημείου c κωνικὴν ἐπιφάνειαν ὁρίζουσαν ἐπὶ τῆς μέσης ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας kk' ἐμβαδὰ

$$\overline{ck}^2\sigma \quad \text{καὶ} \quad \overline{ck'}.^2\sigma$$

ἔνθα σ εἶναι ἡ στερεὰ γωνία τοῦ κώνου· αἱ ἐπὶ τοῦ σημείου c ἀντιστοιχοῦσαι ἕλξεις εἶναι

$$fM\frac{\delta\sigma\overline{ck}^2d(ck)}{\overline{ck}^2}=fM\delta\sigma d(ck) \quad \text{καὶ} \quad fM\delta\sigma d(ck')=fM\delta\sigma d(ck)$$

ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ ὁμοίας θέσεως τῶν ὁριζουσῶν τὸ στρῶμα ἐπιφανειῶν· ἡ ἕλξις, ἣν ἐξασκοῦσι τὰ ὑπὸ τοῦ κώνου ὁριζόμενα στοιχειώδη τμήματα εἶναι λοιπὸν

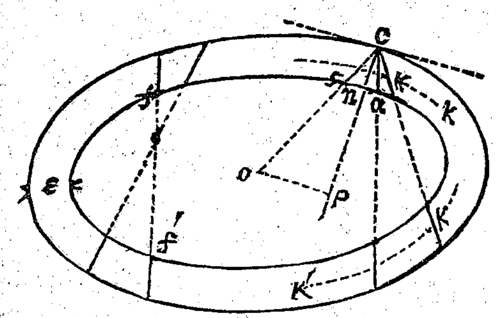
$$2fM\delta\sigma\int d(ck)=2fM\delta\sigma ca$$

καὶ ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τῆς καθέτου $2fM\delta.ca\sigma\upsilon\nu\widehat{nca}=2fM\delta\varepsilon$, διότι ὑποθέτομεν τὸ πάχος ε ἀπειροστόν· ἡ ἕλξις ἣν ἐξασκεῖ τὸ ὅλον ἐλλειψοειδὲς στρῶμα εἶναι οὕτω

$$2fM\delta\varepsilon\int_0^{2\pi}\sigma=4\pi fM\delta\varepsilon$$

ὅπερ εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις γενικωτέρου θεωρήματος ἀποδειχθέντος ὑπὸ τοῦ *Laplace* (ἴδε κατωτέρω).

125. γ. Εἰς τὴν ἕλξιν ταύτην, ἣν ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον θὰ γράψωμεν οὕτω



Σχ. 104.

$$4\pi\delta\varepsilon$$

δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ ἄλλην μορφήν.

Φέρωμεν τῷ ὄντι ἐκ τοῦ κέντρου o τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τὴν κάθετον op ἐπὶ τὴν cn κάθετον καὶ ταύτην τῇ ἐπιφανείᾳ κατὰ τὸ c. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις cop καὶ csn ἔχομεν

$$\frac{cn}{cp}=\frac{cs}{co}=\frac{da}{a}=\text{σταθερᾷ}$$

ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ ὁμοίας θέσεως τῶν ἐπιφανειῶν·

ὅθεν $\varepsilon=cn=\dfrac{da}{a}cp$ καὶ ἡ ἕλξις ἐκφράζεται οὕτω

$$4\pi\delta\frac{da}{a}.cp$$

ἔνθα cp εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου o ἀπὸ τοῦ ἐφαπτομένου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐπιπέδου κατὰ τὸ σημεῖον c.

126. Ἔστω $m(x,y,z)$ σημεῖον τοῦ σώματος μάζης m· ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου m' κειμένου εἰς ἀπόστασιν a ἐξασκουμένη ὑπὸ τούτου ἕλξις εἶναι ἕλξις σώματος ἐπὶ σημείου κειμένου εἰς μεγάλην ἀπόστασιν

$$f\frac{mm'}{\rho^2}$$

καὶ αἱ προβολαὶ ταύτης ἐπὶ τῶν τριῶν ἀξόνων $o\,(x,y,z)$

$$f\frac{mm'}{\rho^2}\frac{a-x}{\rho} \quad f\frac{mm'}{\rho^2}\frac{y}{\rho} \quad \text{καὶ}\ f\frac{mm'}{\rho^2}\frac{z}{\rho}$$

ἐν τῷ τριγώνῳ omm' ἔχομεν

$$\rho^2=a^2+\overline{om}^2-2ax$$

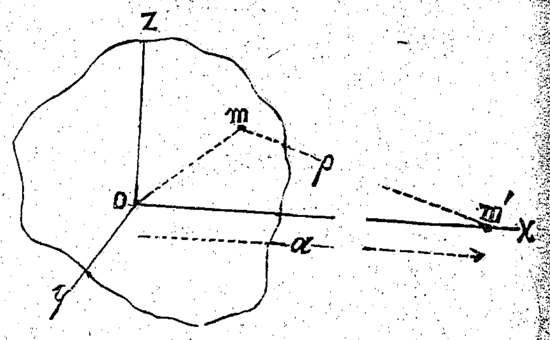
ἢ ὑποθέτοντες τὸ σημεῖον m' ἀρκούντως μακράν, ὥστε νὰ παραλείψωμεν τὸ $\overline{om}^2$ πρὸ τοῦ a^2 ἔχομεν

$$\rho^2=a^2-2ax=a^2\left|1-\frac{2x}{a}\right|$$

ὅθεν κατὰ προσέγγισιν

$$\rho = a\left|1 - \frac{x}{a}\right|$$

καὶ $\rho^{-3} = a^{-3}\left|1 + \frac{3x}{a}\right|$



Σχ. 105.

ἀντικαθιστῶντες ἤδη ἐν τῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox προβολῇ τῆς ἕλξεως, ἔχομεν

$$fmm'\frac{a-x}{\rho^3} = fmm'(a-x)\left|\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4}\right| = fmm'\left|\frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3}\right|$$

$$= f\frac{mm'}{a^2} + 2fmm'\frac{x}{a^3}$$

Ἡ παραλλήλως τῷ ox συνιστῶσα τῆς ὑπὸ ὁλοκλήρου τοῦ σώματος ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ m' ἕλξεως εἶναι λοιπὸν

$$X = fm'\int\frac{a-x}{\rho^3}dm = f\frac{m'}{a^2}\int dm + 2f\frac{m'}{a^3}\int xdm$$

Ἐὰν ἐκλέξωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων οὕτως ὥστε $\int xdm = o$, ἡ ἄνω συνιστῶσα εἶναι

$$X = f\frac{m'}{a^2}\int dm = f\frac{m'\mathrm{M}}{a^2}$$

ἔνθα Μ παριστᾷ τὴν ὅλην μάζαν τοῦ σώματος· τὸ αὐτὸ θὰ εἴχομεν καὶ διὰ τὰς δύο ἄλλας συνιστώσας τῆς ἕλξεως· οὕτω

Ἡ ὑπὸ τοῦ σώματος ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ m' ἕλξις εἶναι ἡ αὐτὴ μ' ἐκείνην, ἣν θὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου μάζα M ἴση τῇ μάζῃ τοῦ σώματος, καὶ συγκεντρωμένη παρὰ τῷ σημείῳ 0 (κέντρον μάζης τοῦ σώματος).

Ἐὰν ἡ ἕλξις ἦτο ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως θὰ εἴχομεν

$$X = \Sigma fmm'\rho\frac{a-x}{\rho} = \Sigma fmm'(a-x) = fm'a\int dm - fm'\int xdm = fm'Ma$$

καὶ ἡ ἄνω ἰδιότης ὑφίσταται ἀνεξαρτήτως τοῦ ἀπομεμακρυσμένου ἢ μὴ τῆς θέσεως τοῦ ἑλκομένου σημείου.

ἕλξις σφαίρας ἧς ἡ πυκνότης εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσεως

127. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ πυκνότης δ εἶναι συνάρτησίς τις $\varphi(\rho)$ τῆς ἀκτῖνος ἑκάστου ὁμογενοῦς στρώματος· ὁ ὄγκος τοῦ στρώματος ρ εἶναι $4\pi\rho^2 d\rho$, ἡ μάζα τούτου $4\pi\rho^2\delta d\rho$ καὶ ἡ ὅλη μάζα τῆς σφαίρας

$$4\pi\int_0^r \rho^2\delta d\rho = 4\pi\int_0^r \rho^2\varphi(\rho)d\rho$$

ἐὰν δὲ καλέσωμεν σ τὴν μέσην πυκνότητα τῆς σφαίρας, ἔχομεν τὴν μάζαν αὐτῆς ἴσην τῇ $\frac{4}{3}\pi\sigma r^3$· ὥστε

$$4\pi\int_0^r \rho^2\varphi(\rho)d\rho = \tfrac{4}{3}\pi\sigma r^3 \;\dots\dots\dots\dots\; (1)$$

ὅθεν ἡ μέση πυκνότης $\sigma = \frac{3}{r^3}\int_0^r \rho^2\varphi(\rho)d\rho \;\dots\dots\dots\dots\; (2)$

Ἡ ἕλξις, ἣν ἐξασκεῖ ἡ σφαῖρα ἐπὶ τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι

$$\tfrac{4}{3}\pi r\sigma = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \rho^2\varphi(\rho)d\rho = G \;\dots\dots\; (3)$$

εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡ ἕλξις εἶναι

$$\frac{4\pi}{\rho^2}\int_0^\rho \rho^2\varphi(\rho)d\rho \;\dots\dots\dots\dots\; (4)$$

ζητήσωμεν ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ δασύτης, ἵνα ἔχωμεν τὴν αὐτὴν ἕλξιν εἰς ὅλα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐντὸς τῆς σφαίρας κείμενα σημεῖα· τὴν ζητουμένην δασύτητα ὁρίζει ἡ σχέσις

$$\frac{4\pi}{\rho^2}\int_0^\rho \rho^2\varphi(\rho)d\rho = G \quad \text{ἢ} \quad \int_0^\rho \rho^2\varphi(\rho)d\rho = \frac{G\rho^2}{4\pi}$$

καὶ διὰ διαφορήσεως

$$\rho^2\varphi(\rho) = \frac{G\rho}{2\pi} \quad \text{ἢ} \quad \varphi(\rho) = \frac{G}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho} \;\dots\dots\dots\dots\; (5)$$

δέον λοιπὸν ἡ δασύτης νὰ ᾖ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσει ρ.

Ἔστω τ ἡ μέση πυκνότης τοῦ ἐξωτερικοῦ στρώματος πάχους h, μικροῦ παραβαλλομένου πρὸς τὴν ἀκτῖνα· ὁ ὄγκος τοῦ στρώματος εἶναι $4\pi(r-h)^2h$ καὶ ἡ μάζα τούτου $4\pi\tau(r-h)^2h$· ἡ μάζα τῆς ἀπομενούσης σφαίρας ἀκτῖνος $r-h$, ἧς τὴν μέσην πυκνότητα καλοῦμεν σ_1 εἶναι $\frac{4}{3}\pi(r-h)^3\sigma_1$· ἔχομεν δὲ προφανῶς

$$\tfrac{4}{3}\pi(r-h)^3\sigma_1 + 4\pi\tau(r-h)^2h = \tfrac{4}{3}\pi r^3\sigma \;\dots\dots\dots\; (6)$$

ἐὰν παραστήσωμεν διὰ G_1 τὴν ἕλξιν εἰς βάθος h ἔχομεν

$$G_1 = \tfrac{4}{3}\pi(r-h)\sigma_1$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες σ, καὶ σ_1 ἐν τῇ ἄνω σχέσει (6) ἔχομεν

$$G_1(r-h)^2 + 4\pi\tau(r-h)^2h = Gr^2 \;\dots\dots\dots\; (7)$$

ὅθεν κατὰ προσέγγισιν

$$G_1 = G\left|1 + 2\frac{h}{r}\right| - 4\pi\tau h = G + 2h\left|\frac{G}{r} - 2\pi\tau\right| \;\dots\; (8)$$

καὶ ἐὰν ἔχωμεν

$$\frac{G}{r} = 2\pi\tau \quad \text{ἢ} \quad \tau = \frac{2}{3}\sigma$$

ἡ ἕλξις εἰς τὸ βάθος h εἶναι οἵα ἦτο καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

128. Ἔχομεν ἤδη ὅλα τὰ στοιχεῖα, ἅτινα μᾶς ἦσαν ἀναγκαῖα διὰ νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν ἄνω(117) ἀνακαλυφθέντα νόμον τῆς ἕλξεως, ὃν ἐξασκεῖ ὁ Ἥλιος ἐπὶ τῶν πλανητῶν, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν σωμάτων τοῦ σύμπαντος·

Καὶ πρῶτον ἴδωμεν ἐὰν ἡ δύναμις, ἥτις φέρει τὰ σώματα ἀφιέμενα ἐλεύθερα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, δύναται ν' ἀφομοιωθῇ πρὸς τὴν συγκρατοῦσαν τοὺς πλανήτας ἐν τῇ τροχιᾷ των ἕλξει.

Κατὰ τὰ προλεχθέντα (74) περὶ βαρύτητος ἔνθα εὕρομεν ταύτην σταθερὰν τὴν ἔντασιν, δὲν δύναται αὕτη ν' ἀφομοιωθῇ πρὸς τὴν ἄνω δύναμιν, ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν, ὅτι τὰ πειράματα ἐκεῖνα ἀναφέρονται εἰς ὡρισμένον τόπον, καὶ ὅτι ἂν ἐπαναληφθῶσιν ἀλλαχοῦ, ἢ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ, ἀλλ' εἰς ὕψη διαφέροντα ἐπαισθητῶς, θὰ δώσωσι διάφορα ἀποτελέσματα.

Ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις καὶ φαινόμενά τινα κοινὰ τῇ βαρύτητι καὶ τῇ συγκρατούσῃ τοὺς πλανήτας ἐν τῇ τροχιᾷ των ἕλξει τοῦ Ἡλίου.

1ον) Ἡ πεῖρα μᾶς διδάσκει, ὅτι τὰ ἐπὶ τῆς γῆς πίπτοντα ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος σώματα, ἀκολουθοῦσιν ἐν τῇ πτώσει των τὴν κατακόρυφον, φέρονται δηλαδὴ πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς. εὕρομεν δ' ἀνωτέρω(121.α), ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὸν νόμον τῆς ἕλξεως ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως.

2ον) Εἴδομεν πρὸς τούτοις (75) ὅτι ἡ βαρύτης μεταδίδει τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν εἰς ἅπαντα τὰ σώματα ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως τούτων· συμφωνεῖ καὶ τοῦτο μὲ τὸν ἄνω νόμον, διότι ἐὰν θεωρήσωμεν διάφορα σώματα κείμενα εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἧς τὴν μάζαν καλοῦμεν M, ἀφιέμενα ταῦτα ἐλεύθερα ὑπὸ τὴν ἑλκτικὴν ἐπενέργειαν τῆς γῆς ἀποκτῶσιν ἐπιταχύνσεις $g\ g'\ldots$, αἵτινες συνδέονται πρὸς τὴν ἐπ' αὐτῶν δρῶσαν δύναμιν διὰ τῶν σχέσεων

$$X = mg \qquad X' = m'g' \qquad X'' = m''g''\ldots\ldots \quad (1)$$

ἔνθα $m\ m'\ m''\ldots$ εἶναι αἱ μάζαι τῶν σωμάτων τούτων· ἐὰν δὲ παραδεχθῶμεν τὸν ἄνω διατυπωθέντα νόμον ἕλξεως, ἔχομεν

$$X = f\frac{Mm}{\rho^2} \qquad X' = f\frac{Mm'}{\rho^2} \qquad X'' = f\frac{Mm''}{\rho^2}\ldots \quad (2)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν ταῖς προηγουμέναις σχέσεσι (1), πορίζόμεθα

$$f\frac{M}{\rho^2} = g = g' = g'' = \ldots\ldots$$

ὅθεν ἡ ζητουμένη πρότασις.

3ον) Ἴδωμεν ἤδη ἐὰν ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος μεταβάλληται καθ' ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ κατὰ ποῖον νόμον.

Καὶ πρῶτον μέχρι ποίων ὁρίων ἐπεκτείνεται ἡ ἐπὶ τῶν σωμάτων δρᾶσις τῆς βαρύτητος;

Ἐκ πείρας γνωρίζομεν, ὅτι ἡ δρᾶσις αὕτη ἐξασκεῖται μέχρι τῶν ὑψηλοτέρων κορυφῶν, ἃς ὁ ἄνθρωπος ἀνῆλθεν ἐπὶ τῆς γῆς· ἀλλ' ἐπεκτείνεται αὕτη καὶ πέραν τῶν ὁρίων τοῦ στενοῦ κόσμου, ὃν καλοῦμεν γῆν, μέχρι τῆς σελήνης λ. χ.;

Ἄνευ προηγουμένης σκέψεως θὰ ἐλέγομεν, βεβαίως ὄχι· διότι ἐὰν ἡ γῆ ἕδρα ἐπὶ τῆς σελήνης ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν γηΐνων σωμάτων, ἡ τελευταία αὕτη μετὰ βραχὺ χρονικὸν διάστημα θὰ ἔπιπτεν ἐπὶ τῆς γῆς, ὅπως καὶ τὰ γήϊνα σώματα· ἐν τῇ πτώσει τῶν τελευταίων τούτων ὅμως δέον νὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις καθ' ἃς

τὰ σώματα πίπτουσιν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, καὶ τότε ἐν τῇ πτώσει των ἀκολουθοῦσι τὴν κατακόρυφον·

ἢ τὸ πίπτον σῶμα κέκτηται καὶ ἀρχικήν τινα ταχύτητα, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας διαγράφει καμπύλην τροχιὰν πίπτον εἰς ἀπόστασίν τινα τοῦ σημείου, ὅθεν ἐρρίφθη, τοσούτῳ μείζονα, ὅσῳ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς προβολῆς εἶναι μείζων.

Ὑποθέσωμεν λ. χ. ὅτι εὑρισκόμεθα ἐπὶ τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς καὶ ῥίπτομεν ὁριζοντίως πρὸς τὸν πόλον βλῆμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v· τὸ βλῆμα ἐν τῇ κινήσει του ἕλκεται συνεχῶς ὑπὸ τῆς γῆς, ὡς εἰ ἡ μάζα ταύτης ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς, εὑρίσκετο συγκεντρωμένη παρὰ τῷ κέντρῳ της· ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν ἕλξιν ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως, γνωρίζομεν (100), ὅτι τὸ βλῆμα θὰ διαγράψῃ ἔλλειψιν, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν ἑστιῶν συμπίπτει μετὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς.

Ἡ μείζων ἀψιδικὴ ἀπόστασις εἶναι λοιπὸν

$$a(1+e) = R(\text{ἀκτὶς τῆς γῆς})$$

ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς τροχιᾶς εἶναι (45.3)

$$a = \frac{\mu R}{2\mu - v_0^2 R}$$

ἔνθα $\mu = fmm'$ (m μάζα τοῦ βλήματος καὶ m' μάζα τῆς γῆς) καὶ ἡ ἐλάσσων ἀψιδικὴ ἀπόστασις

$$a(1-e) = \frac{v^2R^2}{2\mu - v^2R}$$

ἐὰν δὲ ἡ τελευταία αὕτη εἶναι μείζων τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς,

$$\frac{v^2R^2}{2\mu - v^2R} \geqslant R \quad \text{ἢ} \quad v^2 \geqslant \frac{\mu}{R}$$

ἡ τροχιὰ τοῦ βλήματος περιβάλλει τὴν γῆν, ἐπὶ τῆς ὁποίας οὐδέποτε θὰ πέσῃ τοῦτο, ἀλλὰ θὰ ἐξακολουθήσῃ κινούμενον περὶ ταύτην ὅπως ἡ σελήνη.

Ἡ ἐπὶ σώματός τινος, κεκτημένου ἀρχικῶς ἀρκοῦσαν ταχύτητα, ἐξασκουμένη ἑλκτικὴ δύναμις τῆς γῆς, δύναται λοιπὸν νὰ συγκρατήσῃ τοῦτο ἐν τῇ τροχιᾷ ἣν διαγράφει περὶ ταύτην· ἀλλὰ τότε διατί νὰ μὴ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συγκρατοῦσα τὴν σελήνην ἐν τῇ τροχιᾷ της δύναμις, εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς γῆς ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτῆς ἕλξις; ἐὰν ἐν τῇ ὑποθέσει ταύτῃ καλέσωμεν φ τὴν ἔντασιν τῆς ἐπὶ τῆς μονάδος μάζης τῆς σελήνης ἕλξεως τῆς γῆς, καὶ g τὴν αὐτὴν ἔντασιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, ἔχομεν (19)

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{R^2}{\rho^2}$$

ἔνθα ρ^2 εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σελήνης ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς.

Ἡ ἐπὶ τῶν σωμάτων ἐξασκουμένη ἑλκτικὴ δύναμις τῆς γῆς ὑπάγεται λοιπὸν εἰς τὸν αὐτὸν νόμον μὲ τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ ὁ Ἥλιος ἐπὶ τῶν πλανητῶν. Τὸν νόμον τοῦτον εὑρίσκομεν οὕτω ἐπαληθεύοντα εἰς ὅλα τὰ σώματα τ' ἀποτελοῦντα τὸ ἡμέτερον πλανητικὸν σύστημα· ἐπεκτείνοντες δὲ τοῦτον καὶ πέραν τῶν ὁρίων τούτων, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς.

νόμος τῆς παγκοσμίου ἕλξεως

Ἐν τῷ σύμπαντι δύο μόρια ὕλης ἕλκονται ἀμοιβαίως κατὰ τὴν ἑνοῦσαν ταῦτα εὐθεῖαν μὲ δύναμιν ἐντάσεως

$$\frac{fmm'}{\rho^2}$$

ἔνθα ρ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων, f σταθερὸς συντελεστὴς καὶ m, m' αἱ μάζαι τῶν ἑλκομένων μορίων.

129. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν γῆν συγκειμένην ἐκ σφαιρικῶν στρωμάτων ὁμογενῶν, ὧν ἡ πυκνότης μεταβάλλεται μετὰ τῆς ἀκτῖνος, καὶ καλέσωμεν g τὴν ἕλξιν ἣν ἐξασκεῖ αὕτη ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ στρώματος, οὗτινος τὴν πυκνότητα καλοῦμεν τ, καὶ g_h τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ αὕτη εἰς βάθος h ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, ἔχομεν (127.8)

μέση πυκνότης τῆς γῆς

$$g_h = g\left|1 + \frac{2h}{r}\right| - 4\pi h\tau$$

(ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς γηΐνου σφαίρας)· ὅθεν

$$\frac{g_h - g}{g} = \frac{2h}{r} - \frac{4\pi h\tau}{g} = \frac{2h}{r} - \frac{3\tau h}{r\sigma} \ \text{ἢ} \ \frac{3}{2}\,\frac{\tau}{\sigma} = 1 - \frac{r}{2h}\,\frac{g_h - g}{g}$$

(ἔνθα σ εἶναι ἡ μέση πυκνότης τῆς γῆς).

Διὰ παρατηρήσεων, ἃς ἐξετέλεσεν ὁ ἄγγλος ἀστρονόμος Airy ἐν τοῖς ἀνθρακωρυχείοις τοῦ Horton (Cornouailles) εἰς βάθος 383 μέτρων ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς εὗρε

$$g_h - g = 0{,}000052g$$

ὅπερ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει, καὶ λαμβάνοντες τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς ἴσην μὲ 6367000 μέτρα εὑρίσκομεν

$$\frac{3}{2}\,\frac{\tau}{\sigma} = 0{,}567$$

ἐὰν δὲ λάβωμεν μετὰ τοῦ Airy $\tau = 2{,}5$ εὑρίσκομεν

$$\sigma = 6{,}62$$

ἡ τιμὴ αὕτη τῆς μέσης πυκνότητος εἶναι κατά τι μείζων τῶν δι' ἀκριβεστέρων πειραμάτων προσδιορισθεισῶν κατόπιν· τὴν τελευταίαν

$$\sigma = 5{,}50$$

ἔδωκαν οἱ Κύριοι Cornu καὶ Baille.

130. Γνωρίζοντες ἤδη τὴν μέσην πυκνότητα τῆς γῆς σ, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν χαρακτηρίζοντα τὴν παγκόσμιον ἕλξιν συντελεστὴν f, ὃν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς δύναμιν ἴσην τῇ ἕλξει, ἣν ἐξασκοῦσιν ἀμοιβαίως ἐπ' ἀλλήλων δύο μονάδες μάζης κείμεναι εἰς ἀπόστασιν ἴσην τῇ μονάδι· ἔχομεν τῷ ὄντι

συντελεστὴς f χαρακτηρίζων τὴν παγκόσμιον ἕλξιν

$$g = \frac{fm}{r^2} = \frac{4\pi f r^3 \sigma}{3r^2} = \tfrac{4}{3} f\pi r\sigma$$

ὅθεν $f = \frac{3}{4}\,\frac{g}{\pi r \sigma}$

θέτοντες $\sigma = 5{,}5$ εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ὡς μονάδας τὸ μέτρον καὶ τὸ γραμμάριον

$$f = 0{,}000\,000\,000\,000\,658$$

καὶ εἰς τὸ σύστημα (CGS)

$$f = 0{,}000\,000\,000\,000\,658 \times 100^3 \times 9{,}81^{-1} = 6{,}70 \times 10^{-8}$$

μάζα τοῦ Ἡλίου καὶ τῶν πλανητῶν

131. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν γῆν καὶ τὸν Ἥλιον· τὰ σώματα ταῦτα ἕλκονται ἀμοιβαίως καὶ κινοῦνται πρὸς ἄλληλα μὲ ἐπιταχύνσεις ἀντιθέτους

$$\frac{fm'}{\rho^2}\ (\text{γῆ μάζης } m) \qquad \text{καὶ} \ -\frac{fm}{\rho^2}\ (\text{Ἥλιος μάζης } m')$$

ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς σχετικῆς κινήσεως τῆς γῆς ὡς πρὸς τὸν Ἥλιον (ὃν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑπεθέτομεν ἀκίνητον) εἶναι λοιπὸν

$$f\frac{m'}{\rho^2} + f\frac{m}{\rho^2} = f\frac{(m+m')}{\rho^2} = \text{ἐπιτάχυνσιν}$$

ἔχομεν δὲ (102)

$$\text{μάζα} \times \text{ἐπιτάχυνσιν} = \frac{4\pi^2 a^2}{T\rho^2} \times \text{μάζαν}$$

ὅθεν

$$f(m+m') = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}$$

γνωρίζοντες ἤδη τὴν μάζαν $\frac{4}{3}\pi r^3 \sigma$ τῆς γῆς, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν τοῦ Ἡλίου, καὶ ἐκ ταύτης τὰς μάζας πάντων τῶν πλανητικῶν σωμάτων, ὧν τὴν κίνησιν διέπει οὗτος.

μεταβολὴ τοῦ βάρους τῶν σωμάτων

132. Γνωσθέντος ἤδη τοῦ νόμου, ὅστις διέπει τὴν ἐπὶ τῶν σωμάτων ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς γῆς ἕλξιν, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἔντασις ταύτης μεταβάλλεται ὄχι μόνον καθ' ὅσον ἀνερχόμεθα ὑψηλότερον ἀπομακρυνόμενοι τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, διότι δὲν εἶναι αὕτη σφαῖρα οἵαν ὑπεθέσαμεν προηγουμένως, ἀλλ' ἔχει μᾶλλον μορφὴν ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῶν πόλων καὶ ἐπίπλατυ κατὰ τὸν ἰσημερινόν.

132. α. Ἐὰν ἡ ἐπὶ σώματός τινος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς γῆς ἕλξις εἶναι g, ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος εὑρισκομένου εἰς ὕψος h ἐξασκουμένη ἕλξις ἔσεται

$$g_h = g\frac{r^2}{(r+h)^2}$$

ἔνθα r εἶναι ἡ μέση ἀκτὶς τῆς γῆς $= 6370260$ μέτρα· ὡς ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς ἀκτῖνος ταύτης σχετικῶς πρὸς τὸ ὕψος h δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἄνω σχέσιν καὶ οὕτω

$$g_h = g\frac{1}{\left|1+\frac{h}{r}\right|^2} = g\left|1-\frac{2h}{r}\right|$$

ὅθεν

$$g_h = g(1 - 0{,}000000314h)$$

132. β Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι ὡς ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονά της στροφῆς τῆς γῆς καὶ τῆς ἐκ ταύτης ἀναπτυσσομένης φυγοκέντρου δυνάμεως, τὰ βάρη τῶν σωμάτων ἐλαττοῦνται καθ' ὅσον βαίνομεν ἐκ τῶν πόλων πρὸς τὸν ἰσημερινόν· ἤδη ὡς ἐκ τοῦ διέποντος τὴν ἐπὶ τῶν σωμάτων ἕλξιν τῆς γῆς νόμου, ἡ βαρύτης μεταβάλλεται μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους, καὶ ὡς ἐκ τῆς μορφῆς τῆς γῆς (ἐπίπλατυ ἐλλειψοειδὲς) ὡς ἐκ τῆς ὁποίας παρὰ τὸν πόλον, ἐλαττουμένης τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς ἀποστάσεως τοῦ ἑλκομένου σώματος, αὐξάνει ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη ἕλξις, καὶ συνεπῶς τὸ βάρος τούτου· παρὰ τὸν Ἰσημερινὸν τοὐναντίον, ὡς ἐκ τῆς ἐξογκώσεως τὰ σώματα ἀπομακρύνονται τοῦ ἕλκοντος κέντρου, καὶ ἐλαττοῦται ἡ ἕλξις, ἥτις ἀφ' ἑτέρου αὐξάνει ὡς ἐκ τῆς συσσωρεύσεως πλείονος μάζης παρὰ τὸν Ἰσημερινόν, οὕτως ὥστε καὶ ὡς ἐκ τῆς μορφῆς τῆς γῆς ἡ βαρύτης μεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ Ἰσημερινοῦ πρὸς τοὺς πόλους κατὰ σχέσιν τινά, ἥτις ἐκφράζεται συναρτήσει τοῦ ἡμ²λ, καὶ τῆς ὁποίας ὁ ὑπολογισμὸς δὲν εἶναι τοῦ παρόντος ἔργου.

Ἐὰν δὲ συμπεριλάβωμεν ἐν αὐτῇ καὶ τὴν ἐκ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως μεταβολὴν (93), ὑπὸ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος λ ἔχομεν ἔντασις βαρύτητος $g_\lambda = g_0\left(1 + \frac{1}{193}\,\text{ἡμ}^2\lambda\right) = 9{,}7807 + 0.0508\,\text{ἡμ}^2\lambda$ καὶ διὰ τὸ μῆκος $l = g/\pi^2$ τοῦ δεικνύοντος τὰ δευτερόλεπτα ἐκκρεμοῦς

$$l_\lambda = l_0\left(1 + \frac{1}{193}\,\text{ἡμ}^2\lambda\right) = 0{,}99100 + 0{,}00514\,\text{ἡμ}^2\lambda$$

τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι

παρὰ τὸν Ἰσημερινὸν 0,991066 μέτρα

παρὰ τοὺς πόλους 0,996266 »

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

Περὶ ἐνεργείας.

33. Οὐδένα λανθάνει βεβαίως ἡ σημασία τὴν ὁποίαν ἀποδίδομεν ἐν γένει εἰς τὴν λέξιν *ἐργασία*, ἥτις ὑπονοεῖ πάντοτε προκαταβληθεῖσάν τινα προσπάθειαν καὶ κόπωσιν προερχομένην ἐκ ταύτης. Ἐν τούτοις νομίζω ἀναγκαίαν ἐνταῦθα τὴν διάκρισιν τῆς διανοητικῆς ἀπὸ τῆς σωματικῆς ἢ μηχανικῆς ἐργασίας, ἣν μόνην ἐξετάζει ἡ μηχανική, καὶ ἥτις ἐκτελεῖται ἁπλῶς διὰ τῆς μυώδους δυνάμεως τῶν ζώων καὶ διὰ τῶν λοιπῶν κινητηρίων δυνάμεων, ἃς ἔθετο ἡ φύσις εἰς τὴν διάθεσίν μας.

Καὶ ἂν μὲν ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται ὑπὸ τῆς μυώδους δυνάμεως τῶν ζώων, λαμβάνομεν ἀμυδράν τινα ἰδέαν περὶ τῆς ποσότητος αὐτῆς ἐκ τῆς προκυπτούσης κοπώσεως τοῦ ἐργαζομένου ζώου καὶ τῆς προσπαθείας, ἣν καταβάλλει τοῦτο περὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἐργασίας ταύτης. Τὴν καταβαλλομένην ὅμως ταύτην προσπάθειαν καὶ τὴν ἐκ ταύτης προκύπτουσαν κόπωσιν, δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀκριβῶς, διὰ συγκεκριμένης τινὸς ποσότητος καὶ εἰσαγάγωμεν ταύτην εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας· ἄλλως τε ἐὰν ἡ ἐργασία ἐκτελῆται οὐχὶ πλέον ὑπὸ τῆς προσπαθείας ἣν καταβάλλει ἡ ἔμψυχος μηχανή, τὸ ζῶον, ἀλλ' ὑπὸ κινητηρίου τινὸς φυσικῆς δυνάμεως καὶ διὰ μέσου ἀψύχου μηχανῆς, οὔτε προσπάθεια καταβάλλεται, οὔτε κόπωσις ἐπέρχεται τὴν ὁποίαν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν, ἔστω καὶ ἀορίστως πως, διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς παραγομένης ἐργασίας.

Δέον λοιπὸν νὰ ὁρίσωμεν ἀκριβῶς, μαθηματικῶς, τὴν σημασίαν, ἣν ἀποδίδομεν ἐνταῦθα εἰς τὴν λέξιν, *ἐργασία*, καὶ πορισθῶμεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, τὸ ἀριθμητικὸν στοιχεῖον, ὅπερ καταμετρεῖ τὴν ποσότητα αὐτῆς, καὶ τὸ ὁποῖον μόνον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας.

Τὴν ἐργασίαν, οἵαν ἐννοοῦμεν ταύτην ἐν τῇ μηχανικῇ καὶ ταῖς βιομηχάνοις ἐν γένει τέχναις, ὁρίζει σαφῶς ὁ στρατηγὸς Poncelet, λέγων

«Ὅταν ὑπερνικῶμεν καὶ καταστρέφωμεν οὕτως εἰπεῖν διὰ τὰς ἀνάγκας τῶν βιομηχάνων ἐν γένει τεχνῶν, τὰς ἀντιστάσεις τὰς ὁποίας, ἀντιτάσσουν εἰς ἡμᾶς δυνάμεις, οἷαι ἡ συγκρατοῦσα πρὸς ἄλληλα τὰ ὑλικὰ μόρια τῶν σωμάτων, ἡ δύναμις τῶν ἐλατηρίων, ἡ ἑλκτικὴ δύναμις τῆς βαρύτητος, ἡ ἀδράνεια τῆς ὕλης κλπ. ὅταν λέγω ὑπερνικῶμεν, δι' οἱωνδήποτε μέσων, τὰς ὑπὸ τῶν δυνάμεων τούτων ἀντιτασσομένας ἡμῖν ἀντιστάσεις, **ἐργαζόμεθα·** *ἐργαζόμεθα πρὸς τούτοις ὅταν, λειαίνωμεν σῶμά τι διὰ τῆς προστριβῆς αὐτοῦ ἐπὶ ἑτέρου σώματος, ὅταν κατακόπτωμεν αὐτὸ εἰς πλείονα τεμάχια, ἀνυψοῦμεν φορτία, ἕλκωμεν ἅμαξάν τινα ἐπὶ τῆς ὁδοῦ, τείνωμεν ἐλατήριόν τι, βάλλωμεν βλῆμα, καὶ αἱ ἀνθιστάμεναι ἡμῖν δυνάμεις ἀνανεοῦνται συνεχῶς ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν καθ' ὅλον τὸ χρονικὸν διάστημα ἐν ᾧ ἐργαζόμεθα.»*

Ἐξετάζοντες δὲ μετὰ προσοχῆς, ἁπάσας τὰς ἄνω περιπτώσεις ἐν αἷς ἐργαζόμεθα, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἐπὶ ὑλικοῦ τινος συστήματος ἐκτελουμένην ἐργασίαν,

Ὡς τὴν πρᾶξιν ἐκείνην, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιφέρομεν μεταβολήν τινα ἐν τῇ σχετικῇ διατάξει τῶν μερῶν τοῦ συστήματος, ὑπερνικῶντες δυνάμεις αἵτινες ἀνθίστανται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μεταβολῆς ταύτης. ἐργασία

Ἡ ὑπὸ ἐξωτερικοῦ τινὸς παράγοντος ἐκτελουμένη ἐργασία ἐπὶ ὡρισμένου ὑλικοῦ συστήματος συνίσταται λοιπὸν εἰς τὴν μεταβολήν, ἣν ὑφίσταται ἡ σχετικὴ διάταξις τῶν διαφόρων μερῶν αὐτοῦ ὡς ἐκ τῆς δράσεως ἐξωτερικῆς τινὸς δυνάμεως, προερχομένης ἐκ τοῦ ἐργαζομένου ἐξωτερικοῦ παράγοντος· ἡ ἐξωτερικὴ αὕτη δύναμις τείνει νὰ παραγάγῃ τὴν μεταβολὴν ταύτην, ὑπερνικῶσα ἑτέραν δύναμιν (ἀντίστασιν), ἥτις ἀνθίσταται εἰς τὴν μεταβολήν, ἣν τείνει νὰ ἐπιφέρῃ ἡ πρώτη ἐν τῷ θεωρουμένῳ συστήματι.

Οὕτω ἵνα ἀνυψώσωμεν βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου εἰς ὕψος ἑνὸς μέτρου ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ὑπερνικῶντες τὴν πρὸς τὰ κάτω ἕλκουσαν τὸ σῶμα δύναμιν τῆς βαρύτητος, ἐκτελοῦμεν ἐργασίαν, ἣν καλοῦμεν *χιλιογραμμόμετρον* καὶ λαμβάνομεν ὡς μονάδα πρὸς καταμέτρησιν τῆς ἐργασίας.

Ἐνταῦθα ὁ ἐξωτερικὸς παράγων εἶναι ὁ ἀνυψῶν τὸ βάρος ἄνθρωπος, τὸ ὑλικὸν σύστημα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐκτελεῖται ἡ ἐργασία ἀπαρτίζεται ἐξ ὁλοκλήρου τῆς γῆς καὶ τοῦ ἀνυψουμένου χιλιογράμμου· ἡ ἐν τῇ σχετικῇ θέσει τῶν μερῶν τοῦ συστήματος ἐπερχομένη μεταβολὴ συνίσταται εἰς τὴν ἀπομάκρυνσιν κατὰ ἓν μέτρον τοῦ ἀνυψουμένου χιλιογράμμου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, καὶ ἡ παραγαγοῦσα ταύτην ἐξωτερικὴ δύναμις, εἶναι ἡ ἀνυψοῦσα τὸ βάρος μυώδης δύναμις τοῦ ἀνθρώπου, ἥτις εἶναι καὶ ἀντίθετος τῇ ὑπερνικωμένῃ βαρύτητι, ἥτις ἀνθίσταται εἰς τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος.

134. Ἰδοὺ λοιπὸν ἡ λέξις ἐργασία ὁρισθεῖσα ἀκριβῶς· ἵνα εὕρωμεν ἤδη τὸ μέτρον ταύτης, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἀνετέθη ἡ ἐργασία τῆς ἀνυψώσεως βάρους ζυγίζοντος 100 χιλιογ. εἰς ὕψος 10 μέτρων, (δὲν δυνάμεθα δὲ νὰ φέρωμεν διὰ μιᾶς φορτίον ἀνώτερον τῶν 50 χιλιογράμμων). Τὴν ἐργασίαν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ὡς ἑξῆς· φέρομεν πρῶτον τὸ βάρος 50 χιλιογράμμων εἰς τὸ προταθὲν ὕψος 10 μέτρων, καὶ ἐξετελέσαμεν οὕτω τὸ ἥμισυ τῆς ἐργασίας· κατόπιν ἐπανερχόμενοι ἀναβιβάζομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου καὶ τὰ ὑπολειπόμενα 50 χιλιόγραμμα εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἡ ὅλη ἐργασία ἐξετελέσθη.

Ἡ **ἐργασία** *αὕτη* **εἶναι** *λοιπὸν* **ἀνάλογος** *τοῦ ἀνυψωθέντος βάρους, τουτέστι* **τῆς ἀντιστάσεως τῆς βαρύτητος,** *ἣν ἐδέησε νὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ ν' ἀνυψώσωμεν τὸ προταθὲν βάρος.*

Ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ πράξωμεν καὶ τοῦτο· φθάσαντες μὲ τὸ πρῶτον φορτίον τῶν 50 χιλιογρ. εἰς τὸ ὕψος τῶν 10 μέτρων, ἠδυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν ἀναβαίνοντες, καὶ φέρωμεν τὸ φορτίον τῶν 50 χιλιογρ. ὑψηλότερον εἰς ὕψος 10 ἔτι μέτρων, τουτέστιν εἰς ὕψος 20 μέτρων ἀπὸ τοῦ ἐδάφους· ἡ δευτέρα δὲ αὕτη ἐργασία εἶναι προφανῶς ἡ αὐτὴ (ὑποθέτομεν ἐνταῦθα σταθερὰν τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος) μὲ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἐξετελέσαμεν προηγουμένως, ἐπανερχόμενοι εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον, λαμβάνοντες τὰ ὑπολειπόμενα 50 χιλιογ. καὶ ἀνυψοῦντες αὐτὰ εἰς τὰ πρῶτα 10 μέτρα.

Ἡ ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει ἐκτελεσθεῖσα **ἐργασία** εἶναι ἡ αὐτή, οἵα καὶ ἡ ἐν τῇ πρώτῃ, ἀλλ' ἐνταῦθα **εἶναι** *αὕτη* **ἀνάλογος** τοῦ ὕψους (20 μέτρων) *εἰς ὃ ἀνυψώσαμεν τὸ βάρος* (50 χιλ.), **τοῦ διαστήματος** *δηλαδή,* **ὅπερ διήνυσε τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς** *ἀνθισταμένης εἰς τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος* **ἀντιστάσεως** *τῆς βαρύτητος.*

Ἐν ταῖς δυσὶ ταύταις περιπτώσεσι τὸ ἀνυψωθὲν βάρος, καὶ τὸ ὕψος, εἰς ὃ τοῦτο ἀνυψώθη εἶναι διάφορα· ἡ ἐκτελεσθεῖσα ὅμως ἐργασία εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς καὶ τὸ γινόμενον,

ἀνυψωθὲν βάρος P ἐπὶ ὕψος H εἰς ὃ τοῦτο ἀνυψώθη

$$PH = 100 \times 10 = 50 \times 20 = 1000.$$

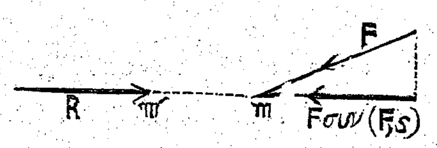
Οὕτω ἡ ἐκτελουμένη ἐργασία εἶναι ἀνάλογος τῇ ἐντάσει τῆς

ὑπερνικωμένης ἀντιστάσεως (βάρος P τοῦ σώματος) *καὶ τῷ κατὰ τὴν διεύθυνσιν (κατακόρυφος) αὐτῆς τῆς ἀντιστάσεως διανυθέντι διαστήματι* (ὕψος H εἰς ὃ ἀνυψώθη τὸ σῶμα)· **καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον** PH **πρὸς καταμέτρησιν τῆς ἐκτελεσθείσης ἐργασίας.** μέτρον ἐργασίας

Καὶ ἐν γένει. *Ἐὰν ἡ δρᾶσις σταθερᾶς τινος δυνάμεως F ἐξασκῆται ἐπὶ ὑλικοῦ συστήματος, ὑπερνικῶσα σταθερὰν ἐπίσης ἀντίστασιν R, ἡ ἐργασία τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἡ δρῶσα δύναμις, ἵνα ὑπερνικήσῃ τὴν ἀνθισταμένην ἀντίστασιν, ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι, μετρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῆς ἀντιστάσεως ταύτης ἐπὶ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ κατὰ τὴν φορὰν τῆς ὑπερνικωμένης ἀντιστάσεως, τὸ σημεῖον ἐφ' οὗ ἡ ἀντίστασις ἐξασκεῖ τὴν ἄμεσον δρᾶσιν αὐτῆς.*

Ἀλλ' ἡ ὑπερνικωμένη ἀντίστασις R ἰσοῦται προφανῶς * τῇ συνισταμένῃ τῆς δυνάμεως F κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς τῆς ἀντιστάσεως, αὕτη δὲ συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως R διανυθέντος διαστήματος· ὥστε

$$R = F\text{συν.}(\widehat{F,s})$$



Σχ. 106.

ἔνθα $\widehat{F,s}$ παριστᾷ τὴν ὑπὸ τῆς δυνάμεως F καὶ τῆς ἀντιστάσεως R ἐμπεριεχομένην γωνίαν· πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t διανυθὲν μῆκος $s = mm'$ ὑπὸ τοῦ σημείου m, ἔνθα ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος δρᾶσις τῆς ἀντιστάσεως R, εὑρίσκομεν,

$$Rs = F\text{συν}(F,s).s = F.s\text{συν}(F,s)$$

τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης μετρεῖ τὴν ἐργασίαν, ἣν ἐξετέλεσεν ἡ σταθερὰ δύναμις F διὰ νὰ ὑπερνικήσῃ τὴν ἀνθισταμένην ἀντίστασιν R, κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς [τῆς ἀντιστάσεως] ἀπὸ τοῦ m εἰς τὸ m' ἐν τῷ ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι t, καὶ τὸ δεύτερον λοιπὸν μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, δύναται νὰ ληφθῇ ὡς μέτρον τῆς ποσότητος τῆς αὐτῆς ἐργασίας. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο μέλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἴσον τῇ προ-

* Ἐνταῦθα ὑποτίθεται, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ἐφ' οὗ δρᾷ ἡ δύναμις μένει σταθερά.

βολῇ F συν(F,s) τῆς ἐργαζομένης δυνάμεως F ἐπὶ τοῦ διανυθέντος διαστήματος $mm' = s$, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦτο s, ἢ ὡς ἴσον τῇ ἐργαζομένῃ δυνάμει F πολλαπλασιαζομένῃ ἐπὶ τὴν προβολὴν sσυνα τοῦ διαστήματος s ἐπ' αὐτῆς τῆς δυνάμεως F. Οὕτω· *τὴν ὑπὸ δυνάμεώς τινος F* **(ἥτις οὐδεμίαν μεταδίδει ἐπιτάχυνσιν εἰς τὸ σημεῖον ἐφ' οὗ δρᾷ αὕτη)** *ἐκτελουμένην ἐργασίαν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν καὶ διὰ τοῦ γινομένου ταύτης ἐπὶ τὸ ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς διανυόμενον διάστημα, ὑπολογιζόμενον τοῦτο κατὰ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως· ἢ διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως διανυθέντος διαστήματος ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς δυνάμεως ἐπ' αὐτοῦ.*

135. Ὑπεθέσαμεν ὅμως μέχρι τοῦδε τὴν ἐργαζομένην δύναμιν F καὶ τὴν ὑπ' αὐτῆς ὑπερνικωμένην ἀντίστασιν R, σταθερὰς ἀμφοτέρας κατά τε τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν. Ἐὰν αἱ δυνάμεις αὗται μεταβάλλωνται προϊόντος τοῦ χρόνου, τότε ἐξετάζομεν τὴν ὑπὸ τῆς δυνάμεως F παραγομένην ἐργασίαν ἐν χρονικῷ διαστήματι dt ἀρκούντως βραχεῖ, ὥστε κατὰ τὴν διάρκειαν αὐτοῦ νὰ δυνηθῶμεν νὰ θεωρήσωμεν F καὶ R ὡς σταθερὰς καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἄνω σχέσιν

$$d\tau = \text{ἐργασίᾳ} = F\text{συν}(F.ds)ds$$

κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt, ἐν ᾧ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως διήνυσε τὸ διάστημα ds ὑπολογιζόμενον κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Καὶ ἵνα εὕρωμεν τὴν ὁλικὴν ἐργασίαν ἣν παράγει ἡ δύναμις F ἐν τῷ πεπερασμένῳ χρονικῷ διαστήματι t, λαμβάνομεν τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα $\int_0^t F\text{συν}(F.ds)ds$ τῶν στοιχειωδῶν ἐργασιῶν Fds συν $(F.ds)$ ἃς ἐξετέλεσεν ἡ δύναμις F κατὰ τὰ συνεχῆ χρονικὰ διαστήματα dt μέχρι τοῦ χρόνου t. καὶ ἔχομεν

$$\text{ὁλικὴ ἐργασία} = \tau = \int_0^s F\text{συν}(F.ds)ds.$$

ἐργασία πλειόνων δυνάμεων **135.** α. Ἐὰν ἤδη ἔχωμεν σύστημα δυνάμεων $f_1.f_2.f_3\ldots$ δρωσῶν ἐπὶ ἑνὸς σημείου, γνωρίζομεν ὅτι τὰς δυνάμεις ταύτας δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῆς συνισταμένης αὐτῶν F, ἧς ἡ προβολὴ ἐπὶ τῆς φορᾶς τοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου διανυομένου διαστήματος ds, ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων ἐπὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς· ἔχομεν λοιπὸν

$$F\text{συν}(F,ds) = f_1\text{συν}(f_1ds) + f_2\text{συν}(f_2,ds) + f_3\text{συν}(f_3,ds) + \ldots\ldots \quad (1)$$

ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐπὶ ds ἔχομεν

$$F\text{συν}(F_1ds)ds = f_1\text{συν}(f_1,ds)ds + f_2\text{συν}(f_2,ds)ds + f_3\text{συν}(f_3,ds)ds + \ldots$$

ἢ τέλος
$$d\tau = Fd\sigma = f_1ds_1 + f_2ds_2 + f_3ds_3 + \ldots\ldots \quad (2)$$

ἔνθα $d\sigma$ ἐμφαίνει τὴν προβολὴν τοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου ἐφ' οὗ δρῶσιν αἱ δυνάμεις διανυθέντος τόξου ds ἐπὶ τῆς συνισταμένης F, καὶ ds_i τὴν προβολὴν τοῦ ds ἐπὶ τῆς δυνάμεως f_i. Οὕτω·

Ἡ στοιχειώδης ἐργασία τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ σύστημα δυνάμεων δρωσῶν ἐπὶ ἑνὸς σημείου, ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν στοιχειωδῶν ἐργασιῶν τὰς ὁποίας ἐκτελοῦσιν αἱ δυνάμεις αὗται, ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων θεωρούμεναι. Τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦτο ἰσοῦται τῇ στοιχειώδει ἐργασίᾳ τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων.

Τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ ἐκτελουμένην ὑπὸ τῶν δυνάμεων ἐργασίαν, διότι ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως (2) πορίζόμεθα

$$\text{ὁλικὴ ἐργασία} = \tau = \int Fd\sigma = \Sigma\int f_i\,ds_i.$$

135. β. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ὑπὸ τῆς δυνάμεως f ἐπιφερομένην μετατόπισιν ds ὡς τὴν συνισταμένην πλειόνων στοιχειωδῶν μετατοπίσεων $ds_1, ds_2\ldots$ καὶ προβάλωμεν ἐπὶ τῆς δυνάμεως F, ἔχομεν

$$ds\text{συν}(F.ds) = ds_1\text{συν}(F,ds_1) + ds_2\text{συν}(F,ds_2) + \ldots\ldots$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως ταύτης ἐπὶ F ἔχομεν

$$Fds\text{συν}(F,ds) = Fds_1\text{συν}(F,ds_1) + Fds_2\text{συν}(Fds_2) + \ldots\ldots$$

ἀλλὰ $Fds_i\text{συν}(F,ds_i)$ εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως F ἐκτελουμένη ἐργασία κατὰ τὴν μετατόπισιν ds_i· ὥστε τὴν προηγουμένην σχέσιν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὡς ἑξῆς·

Ἡ ἐργασία ἣν ἐκτελεῖ ἡ δύναμις F, ἵνα ἐπιφέρῃ τὴν μετατόπισιν ds, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν μερικῶν ἐργασιῶν, τὰς ὁποίας καταναλίσκει ἡ αὐτὴ δύναμις F ἵνα ἐπιφέρῃ διαδοχικῶς τὰς μερικὰς μετατοπίσεις $ds_1, ds_2, ds_3\ldots\ldots$

135. γ. Παραδειγμα. Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐργασίας, ἣν ἐκτελεῖ πεπιεσμένον ἀέριον ἐξασκοῦν πίεσιν p (κατὰ μονάδα ἐμβαδοῦ) ἐπὶ ἑνὸς ἐμβόλου A, κατὰ τὴν στοιχειώδη μετατόπισιν αὐτοῦ dx. ἐργασία ἀερίου πιέζοντος ἔμβολον

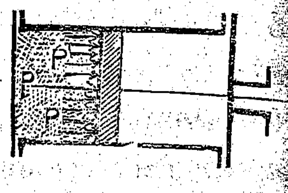
Ἐὰν καλέσωμεν s τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβόλου, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη πίεσις εἶναι κάθετος αὐτῷ καὶ ἴση τῇ

$$P = ps$$

ἡ ὑπὸ τῆς πιέσεως ταύτης ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία κατὰ τὴν μετατόπισιν dx τοῦ ἐμβόλου εἶναι

$$d\mathcal{T} = (ps)dx = p(sdx) = pdv$$

ἔνθα dv εἶναι ὁ ὑπὸ τοῦ ἐμβόλου διαγραφεὶς χῶρος κατὰ τὴν μετατόπισιν dx, καὶ ἡ ὅλη ἐργασία κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ ἐμβόλου ἀπὸ τῆς θέσεως A_0 εἰς τὴν θέσιν A_1 εἶναι



$$\mathcal{T} = \int_{v_0}^{v_1} pdv$$

Σχ. 107.

135. δ. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἰδίᾳ τὰς ἐπὶ τριῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων $o(x,y,z)$ προβολὰς X,Y,Z τῆς ἐπὶ τοῦ σημείου x,y,z δρώσης δυνάμεως F, ἔχομεν διὰ τὴν στοιχειώδη μετατόπιν ds ἐργασία τῆς $F = F ds\,\text{συν}(F,ds) = Xdx + Ydy + Zdz$ καὶ διὰ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ μετατοπίσει $s - s_0$ ὁλικὴν ἐργασίαν $\mathcal{T}$ ἔχομεν

$$\mathcal{T} = \int_{s_0}^{s} (Xdx + Ydy + Zdz)$$

ἐργασία ἐν τῇ περὶ ἄξονα στροφῇ **135.** ε. Θεωρήσωμεν ὑλικὸν σημεῖον m καὶ δύναμιν F τείνουσαν νὰ στρέψῃ τοῦτο περὶ τὸν ἄξονα XOX· τὴν δύναμιν F δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ δύο ἄλλων, τὴν μὲν F_2 παράλληλον τῷ ἄξονι XOX τὴν δὲ F_1 κάθετον τούτῳ.

Ἡ κατὰ τὴν στοιχειώδη περιστροφὴν $d\theta$ τοῦ σημείου ἐκτελεσθεῖσα ὑπὸ τῆς δυνάμεως F_2 ἐργασία ἰσοῦται τῷ μηδενί, διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ὑπὸ τοῦ σημείου m διαγραφόμενον τόξον mm_1· ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως F_1 ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία εἶναι

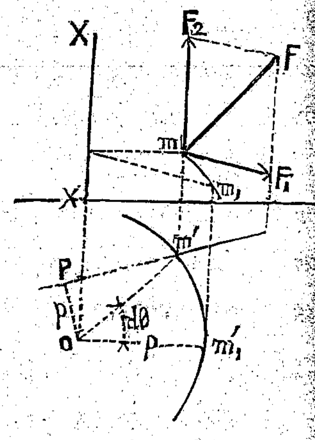
$$d\mathcal{T} = F_1 m'm'_1 \text{συν}(F_1, m'm'_1) = F_1, m'm'_1, \text{συν}\theta$$

ἀλλὰ

$$m'm'_1 = \rho d\theta \quad \text{καὶ} \quad op = \rho\,\text{συν}\theta = p$$

$$\text{ὥστε} \quad m'm'_1 = \frac{p}{\text{συν}\theta}\, d\theta$$

$$\text{καὶ} \quad d\mathcal{T} = F_1 \frac{pd\theta}{\text{συν}\theta}\, \text{συν}\theta = F_1 p d\theta$$



ῥοπὴ ὡς πρὸς ἄξονα ἢ σημεῖον **136.** *Τὸ γινόμενον $F_1 p$ τῆς προβολῆς F_1 τῆς δυνάμεως F ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι XOX ἐπὶ τὴν βραχυτάτην ἀπόστα-*

Σχ. 108.

σιν p τῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος καλοῦμεν **ῥοπὴν τῆς δυνάμεως** *F* **ὡς πρὸς τὸν ἄξονα** *XOX ἢ* **ῥοπὴν τῆς δυνάμεως** *F_1* **ὡς πρὸς τὸ σημεῖον** *O.*

Ἡ στοιχειώδης ἐργασία, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ δύναμίς τις, τείνουσα νὰ στρέψῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς περὶ σταθερὸν ἄξονα XOX, ἰσοῦται λοιπὸν τῇ ῥοπῇ $F_1 p$ τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα, ἐπὶ τὴν περιστροφικὴν μετατόπισιν $d\theta$ τοῦ σημείου ἐφ' οὗ δρᾷ περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν ῥοπὴν θετικῶς μέν, ὅταν ἡ δύναμις τείνει νὰ στρέψῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς κατὰ ὡρισμένην φοράν, καὶ ἀρνητικῶς, ὅταν τείνει αὕτη νὰ στρέψῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον κατ' ἀντίθετον φοράν, βλέπομεν ἀμέσως ἐκ τῶν ἐν τῇ (§ 135) ἀποδειχθεισῶν προτάσεων ὅτι·

Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης F πλειόνων δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα XOX ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν.

Τῷ ὄντι ἐκ τῆς σχέσεως (135.α.2) ἔχομεν

$$Fpd\theta = f_1 p_1 d\theta + f_2 p_2 d\theta + f_3 p_3 d\theta + \ldots\ldots\ldots$$

καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ $d\theta$ ποριζόμεθα

$$Fp = f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3 p_3 + \ldots\ldots\ldots$$

ἔνθα p, p_1, p_2 παριστῶσι τὰς βραχυτάτας ἀποστάσεις τῶν δυνάμεων $F, f_1, f_2 \ldots\ldots$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν ῥοπῶν.

136. α. Ἐὰν ἰδίᾳ θεωρήσωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ σημείου (x,y,z) ἐπενεργοῦσαν δύναμιν F καὶ τὰς ὀρθογωνίους συνιστώσας ταύτης X, Y, Z, ἔχομεν

ῥοπὴ τῆς F περὶ τὸν ἄξονα OZ = ῥοπ. τῆς X + ῥοπ. τῆς Y + ῥοπ. τῆς Z
ἢ

$$M_z F = -Xy + Yx$$
$$M_x F = -Yz + Zy$$
$$M_y F = -Zx + Xz$$

136. β. Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἐπαληθεύει, ἐὰν ἀντὶ τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα XoX, λάβωμεν τὰς ῥοπὰς τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ σημεῖον 0, εἰμὴ ἐν ᾗ περιπτώσει αἱ δυνάμεις κεῖνται ἅπασαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Οὕτω·

Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης F πλειόνων δυνάμεων, κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον 0, ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν.

Ἡ πρότασις αὕτη ὀφειλομένη τῷ Varignon ἀποδείκνυται καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς·

Ἔστωσαν AF_1 καὶ AF_2 αἱ δύο συνιστῶσαι τῆς δυνάμεως AR· αἱ ῥοπαὶ τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα 0 εἶναι διπλάσιαι τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων

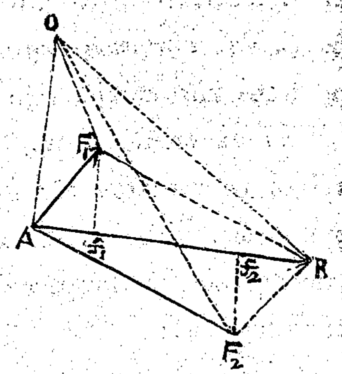
OAF_1 OAF_2 καὶ OAR

ἅτινα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν OA· τὰ ὕψη των εὑρίσκομεν προβάλλοντες τὰς πλευρὰς AF_1, AF_2 καὶ AR ἐπὶ τῆς AR καθέτου τῇ OA· καὶ ἔχομεν, ὕψος τοῦ $OAF_1 = Af_1$ ὕψος τοῦ $OAF_2 = Af_2$ καὶ ὕψος τοῦ $OAR = AR$

ἀλλὰ $AR = Af_2 + f_2R = Af_2 + Af_1$

ὥστε εμβ.OAR = εμβ.OAF_1 + εμβ.OAF_2

ὅθεν καὶ ῥοπὴ R = ῥοπῇ F_1 + ῥοπῇ F_2 ο.ε.δ.



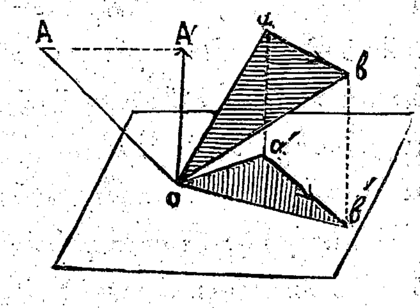
Σχ. 109.

136.γ. Ὅταν ὅμως αἱ συνιστῶσαι δυνάμεις δὲν εὑρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τότε ἡ ἄνω πρότασις ἀντικαθίσταται διὰ τῆς ἀκολούθου.

Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης F πλειόνων δυνάμεων, κειμένων ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον 0, ἰσοῦται **τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι** *τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν.*

Ἵνα δὲ καταστήσωμεν τὴν πρότασιν ταύτην καταληπτήν, δέον νὰ ὁρίσωμεν τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν ῥοπῶν.

Τὴν ῥοπὴν τῆς δυνάμεως $F = ab$ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον 0, τῆς ὁποίας ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου oab, παριστῶμεν γεωμετρικῶς δι' εὐθυγράμμου τμήματος OA, οὗτινος τὸ μῆκος ἰσοῦται τῇ ἀλγεβρικῇ τιμῇ τῆς ῥοπῆς, καὶ τὴν φορὰν λαμβάνομεν οὕτως ὥστε, ἐὰν νοήσωμεν παρατηρητὴν κείμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος oA μὲ τοὺς πόδας παρὰ τῷ σημείῳ 0 καὶ τὴν κεφαλὴν παρὰ τῷ A ἡ δύναμις $F = ab$ διὰ τὸν παρατηρητὴν τοῦτον, τείνει νὰ στρέψῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς a ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, καθ' ἣν φορὰν βλέπομεν κινουμένους τοὺς δείκτας τῶν ὡρολογίων.



Σχ. 110.

Ἐὰν προβάλωμεν τὴν δύναμιν ab ἐπὶ ἐπιπέδου τινος P, τὸ παραστατι-

κὸν τμῆμα τῆς ῥοπῆς τῆς προβολῆς $a'b'$ ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον o, εἶναι oA' κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P. ἀλλ' ἔχομεν

$$\text{ἐμβ.}\,oab = \text{ἐμβ.}\,oa'b'\ \text{συν}(AoA')$$

ὅθεν καὶ
$$0A' = 0A\,\text{συν}(A0A')$$

τουτέστιν· *Ἡ ῥοπὴ τῆς προβολῆς $F' = a'b'$ τῆς δυνάμεως $F = ab$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P, ἰσοῦται τῇ προβολῇ OA' τῆς ῥοπῆς OA τῆς δυνάμεως ἐπὶ ἄξονος καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ P.*

136.δ. Θεωρήσωμεν ἤδη δυνάμεις $f_1, f_2, f_3 \ldots$ δρώσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου m, κειμένας ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, καὶ τὴν συνισταμένην αὐτῶν F· ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox προβολὴ τῆς ῥοπῆς (ὡς πρὸς τὸ σημεῖον o) τῆς δυνάμεως f_i, ἰσοῦται τῇ ῥοπῇ (ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον o) τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου zoy προβολῆς $f_{i.x}$ τῆς δυνάμεως f_i· τὸ ἀλγεβρικὸν δὲ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν προβολῶν τούτων ἰσοῦται τῇ ῥοπῇ τῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου προβολῆς F_x τῆς συνισταμένης F· ὥστε

$$\text{ροπ.}F_x = \Sigma\,\text{ροπ.}f_{i.x}$$

καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου
$$\text{ροπ.}F_y = \Sigma\,\text{ροπ.}f_{i.y}$$
$$\text{ροπ.}F_z = \Sigma\,\text{ροπ.}f_{i.z}$$

οὕτω· ἡ προβολὴ τῆς ὅλης ῥοπῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν προβολῶν τῶν μερικῶν ῥοπῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος· ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι

Τὸ παραστατικὸν τμῆμα M τῆς ῥοπῆς τῆς συνισταμένης F ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν παραστατικῶν τμημάτων τῶν ῥοπῶν μ_i τῶν συνιστωσῶν.

$$\overline{M} = \overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_3 + \ldots\ldots$$

Σημείωσις. Τὴν κάτωθι ἀναλυτικὴν μέθοδον ὀφείλω τῷ καθηγητῇ Κυρίῳ Κυπαρίσσῳ Στεφάνῳ

Ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως (88)

$$\frac{x-\xi}{X} = \frac{y-\eta}{Y} = \frac{z-\zeta}{Z}$$

ὡς πρὸς τὸ σημεῖον (α, β, γ) εἶναι (Εἰσ. § 4.9)

$$\mu = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ἔνθα
$$u = (Y\xi - X\eta) + (-Y\alpha + X\beta)$$
$$v = Y(\gamma - \zeta) - Z(\beta - \eta) \qquad w = Z(\alpha - \xi) - X(\gamma - \zeta)$$

εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ παραστατικοῦ τμήματος τῆς ῥοπῆς ἐπὶ τῶν ἀξόνων·

αἱ ῥοπαὶ τῆς αὐτῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τρεῖς ἄξονας διερχομένους διὰ τοῦ σημείου (α,β,γ) παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν $o(x,y,z)$ εἶναι u,v,w· ἡ δὲ ῥοπὴ τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $o(x,y)$ δυνάμεως (ξ,η,X,Y) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον (α,β) εἶναι u· καὶ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως

$$Ax+By+C=o$$

ὡς πρὸς τὸ σημεῖον (α,β) εἶναι

$$\mu= A\alpha+B\beta+C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ἡ ῥοπὴ ἑτέρας δυνάμεως

$$A'x+B'y+C'=o$$

ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένης, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον (α β) εἶναι

$$\mu'= A'\alpha+B'\beta+C'$$

ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων τούτων ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι

$$M=(A+A')\alpha+(B+B')\beta+(C+C')=(A\alpha+B\beta+C)+(A'\alpha+B'\beta+C')=\mu+\mu'$$

Ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως

$$\frac{x-\xi}{X}=\frac{y-\eta}{Y}=\frac{z-\zeta}{Z}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ὡς πρὸς τὸν διὰ τοῦ σημείου α,β,γ διερχόμενον παραλλήλως τῷ oz ἄξονα εἶναι

$$u= X(\beta-\eta)-Y(\alpha-\xi)$$

ἡ ῥοπὴ ἑτέρας δυνάμεως

$$\frac{x-\xi}{X'}=\frac{y-\eta}{Y'}=\frac{z-\zeta}{Z'}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα εἶναι

$$u'= X'(\beta-\eta)-Y'(\alpha-\xi)$$

ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης

$$\frac{x-\xi}{X+X'}=\frac{y-\eta}{Y+Y'}=\frac{z-\zeta}{Z+Z'}$$

τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι

$$U=(X+X')(\beta-\eta)-(Y+Y')(\alpha-\xi)=[X(\beta-\eta)-Y(\alpha-\xi)]+[X'(\beta-\eta)-Y'(\alpha-\xi)]=u+u'$$

Αἱ ῥοπαὶ τῶν δυνάμεων (3) καὶ (4) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον (α,β,γ) εἶναι

$$\mu= \sqrt{u^2+v^2+w^2} \quad \text{καὶ} \quad \mu'= \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}$$

Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης τούτων ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι

$$M= \sqrt{U^2+V^2+W^2}= \sqrt{(u+u')^2+(v+v')^2+(w+w')^2}=\overline{\mu}+\overline{\mu'}$$

137. Μέχρι τοῦδε μετεχειρίσθημεν τὴν παραγωγὸν τῆς ἐργασίας δύναμιν F, ἵνα ὑπερνικήσωμεν ἀντίστασίν τινα R, ἥτις ἀνθίσταται εἰς τὴν μεταβολήν, ἣν τείνει νὰ ἐπιφέρῃ αὕτη ἐν τῷ συστήματι ἐφ' οὗ ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος δρᾶσις αὐτῆς.

Εἴδομεν λ. χ. ὅτι, ἵνα ὑψώσωμεν τὸ βάρος P χιλιογράμμων εἰς ὕψος H μέτρων χωρὶς νὰ μεταδώσωμεν εἰς τοῦτο ταχύτητα, δέον νὰ καταναλώσωμεν ἐργασίαν PH χιλιογραμμομέτρων.

Τὴν μειώδη δύναμιν, ἣν διαθέτομεν, μεταχειριζόμεθα ἐνταῦθα συνεχῶς ὅπως ὑπερνικήσωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ σώματος P ἐξασκουμένην ἑλκτικὴν δύναμιν τῆς γῆς, ἥτις ἀνθίσταται εἰς τὴν ἀνύψωσιν αὐτοῦ, χωρὶς ὅμως νὰ μεταδώσωμεν εἰς τὸ σῶμα οὐδὲ τὴν ἐλαχίστην ταχύτητα.

Ἀλλ' ἐὰν οὐδεμία ἀνθίσταται δύναμις εἰς τὴν μετατόπισιν τοῦ σώματος ἐφ' οὗ ἐξασκεῖται ἡ δρᾶσις τῆς ἐργαζομένης δυνάμεως, ἢ κάλλιον, ἐὰν ἡ ἔντασις τῆς τελευταίας ταύτης εἶναι μείζων τῆς ἀντιστάσεως ἣν δέον νὰ ὑπερνικήσωμεν, ἵνα μετατοπίσωμεν τὸ σῶμα, ἀποκτᾷ τοῦτο ταχύτητα.

Ἐὰν λ. χ. ἀνατίθηται ἡμῖν ἡ ἀνύψωσις τοῦ βάρους P εἰς ὕψος H, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην PH ἀνυψοῦντες ἀπ' εὐθείας τὸ βάρος, χωρὶς νὰ τῷ μεταδώσωμεν οὐδὲ τὴν ἐλαχίστην ταχύτητα· ἀλλὰ δυνάμεθα καὶ νὰ ὠθήσωμεν ἀρχικῶς τὸ σῶμα ἀρκούντως, ὥστε νὰ μεταδώσωμεν τούτῳ ταχύτητα $v=\sqrt{2gH}$, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας θ' ἀνέλθῃ τοῦτο (14.α.2) εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος H, ἔνθα ἀπώλεσε πᾶσαν ταχύτητα ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ δράσεως τῆς βαρύτητος. Ἡ ἀνατεθεῖσα ἡμῖν ἐργασία ἐξετελέσθη ὡς καὶ προηγουμένως.

Ἡ διὰ τῆς ὠθήσεως μεταδοθεῖσα τῷ σώματι ταχύτης v συνδέεται πρὸς τὴν ἐκτελεσθεῖσαν ἐργασίαν PH διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{mv^2}{2}= PH$$

Οὕτω τὴν κινητήριον δύναμιν F δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν μεταδίδοντες εἰς τὰ σώματα ταχύτητα, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας δύνανται ταῦτα νὰ μᾶς παράσχωσιν ἐργασίαν.

138. Ἴδωμεν ἤδη ἂν ἡ σχέσις ἣν εὕρομεν ἀνωτέρω μεταξὺ τῆς καταναλισκομένης ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐργασίας τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως F καὶ τῆς ταχύτητος, ἣν μεταδίδει αὕτη τῷ σώματι ἐφ' οὗ δρᾷ, εἶναι γενική.

Ἵνα φθάσωμεν εὐκολώτερον εἰς τὸ ζητούμενον, ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ συστήματος δρῶσα κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως ἐξωτερικὴ δύναμις F εἶναι σταθερὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, καὶ ζητήσωμεν τὴν ἐργασίαν, ἣν παρέχει αὕτη τῷ συστήματι κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t. Ἔστω s τὸ ὑπὸ τῆς μάζης m διανυθὲν ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι t εὐθύγραμμον τόξον. Ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως F καταναλωθεῖσα ἐργασία μετρεῖται διὰ τοῦ γινομένου Fs. Γνωρίζομεν δὲ ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως F παραγομένη μεταβολὴ $m(v-v_0)$ ἐν τῇ ἀρχικῇ ποσότητι κινήσεως mv_0 τῆς μάζης ἐφ' ἧς δρᾷ αὕτη κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t, μετρεῖται διὰ τῆς ὠθήσεως Ft τῆς δυνάμεως· ὥστε

$$Ft = m(v - v_0)$$

ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου τὸ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t διανυθὲν ὑπὸ τῆς μάζης m τόξον s παρέχεται (14.3) ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$s = \frac{v+v_0}{2}t$$

ὥστε
$$Fs = \frac{m}{2}(v-v_0)(v+v_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \ldots\ldots (1)$$

Τὴν ὑπὸ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως F καταναλωθεῖσαν ἐπὶ τῆς μάζης m ἐργασίαν, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ μετρήσωμεν καὶ διὰ τῆς διαφορᾶς

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Ἐὰν ἤδη ἡ δύναμις F μεταβάλληται συνεχῶς κατὰ τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ταύτην σταθερὰν κατὰ τὸ ἀπειροστὸν χρονικὸν διάστημα dt, ἐν ᾧ ἡ ταχύτης v τῆς μάζης m μεταβάλλεται κατὰ dv, καὶ τότε ἡ ἄνω σχέσις (1) μετατρέπεται εἰς

$$F\sigma\upsilon\nu(F,ds)ds = \frac{m(v+dv)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mvdv$$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως ἡ σχέσις

$$\int_{s_0}^{s} F\sigma\upsilon\nu(F,ds)ds = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

ἥτις μᾶς δίδει τὴν ὑπὸ τῆς δυνάμεως F καταναλωθεῖσαν ἐπὶ τῆς μάζης m ἐργασίαν κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t, καὶ τὴν ὁποίαν εὕρομεν ἤδη προηγουμένως (110) δι' ἄλλης ὁδοῦ.

Τὴν σχέσιν ταύτην δυνάμεθα (137) νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$\int(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Ἡ ἐργασία δηλαδή, ἣν παρέχουσιν ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι, αἱ ἐπὶ τῆς μάζης m (εἰς τὴν μετατόπισιν τῆς ὁποίας οὐδὲν ἀνθίσταται) δρῶσαι δυνάμεις, μετρεῖται διὰ τῆς αὐξήσεως, ἥτις ἐπῆλθεν ἐν τῇ συναρτήσει $\frac{mv^2}{2}$ τῆς ταχύτητος τῆς αὐτῆς μάζης.

139. Ἀλλ' ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ ταχύτητα $v = \sqrt{2gH}$ προσεκτήσατο τὸ σῶμα ἀλλαχόθεν ἢ ἐκ τῆς ἀρχικῆς ὠθήσεως ἣν ἐξησκήσαμεν ἐπ' αὐτοῦ διὰ τῆς μυώδους δυνάμεώς μας. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι προφανῶς τὸ αὐτό. Τὸ σῶμα ὡς ἐκ τῆς ταχύτητός του θὰ ἀνέλθῃ εἰς ὕψος H, ἔνθα οὐδεμίαν πλέον κέκτηται ταχύτητα, ὑπερνικῶν τὴν ἐπ' αὐτοῦ δρῶσαν δύναμιν τῆς βαρύτητος, ἥτις ἀνθίσταται εἰς τὴν ἀνύψωσίν του.

Οὕτω ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν δρᾶσιν τῆς δυνάμεως F ἐξασκουμένην οὐχὶ πλέον κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως, ἀλλ' ἀντιθέτως ταύτῃ, μεταβάλλεται αὕτη εἰς ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν τὸ κινούμενον σῶμα ὑπερνικᾷ, καὶ ἐκτελεῖ τοῦτο ἐργασίαν.

Τί καταναλίσκει δὲ διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ἐργασίας ταύτης; ποία ἡ ἐν τῇ κινήσει αὐτοῦ ἐπερχομένη μεταβολή, εἰς ἣν δέον ν' ἀποδώσωμεν τὴν παραγωγὴν τῆς ἐργασίας; Ἡ μόνη μεταβολὴ τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν ἐν τῷ κινουμένῳ σώματι εἶναι ἡ ἐπιβραδυνομένη αὐτοῦ κίνησις· ἡ δρᾶσις τῆς ἀντιστάσεως R ἐπέφερε λοιπὸν ἐλάττωσιν ἐν τῇ ταχύτητι τοῦ σώματος, μεταβαλοῦσα ταύτην ἀπὸ v εἰς v_0 κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t· καὶ ἡ συνδέουσα τὴν παραχθεῖσαν ὑπὸ τῆς κινουμένης μάζης m ἐργασίαν $\mathfrak{T}$ πρὸς τὴν ἐπελθοῦσαν ἐν τῇ ταχύτητι ταύτης μεταβολὴν σχέσις, εἶναι ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν

$$\mathfrak{T} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

ἧς ἡ μεγίστη τιμὴ εἶναι $\frac{mv^2}{2}$ (ὅταν $v_0=0$).

οὕτω, ἐὰν ἀντιτάξωμεν κινουμένῃ μάζῃ m ἐλευθέρᾳ τῆς ἐπενεργείας πάσης ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἀντίστασίν τινα R, ἣν δέον νὰ ὑπερνικήσῃ αὕτη, ὅπως ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησιν αὐτῆς, παράγει ἐργασίαν, ἀλλὰ παρατηροῦμεν συνάμα, ὅτι ἐπιβραδύνεται ἡ κίνησις τοῦ σώματος, ἐλαττουμένης τῆς ταχύτητος αὐτοῦ ἀπὸ v εἰς v_0. Διὰ νὰ ὑπερνικήσωμεν λοιπὸν τὴν ἀντίστασιν R καὶ παραγάγωμεν ἐργασίαν, δέον νὰ καταναλώσωμεν μέρος $v - v_0$ τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος. Ἡ διὰ τῆς καταναλώσεως δὲ τῆς ταχύτητος ταύτης παραγομένη ἐργασία μετρεῖται διὰ τῆς διαφορᾶς,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

εἶναι δηλ. αὕτη ἴση τῇ ἐργασίᾳ ἣν θὰ ἐξετέλει ἡ ἐπὶ τῆς μάζης m δρῶσα ἐξωτερικὴ δύναμις F, ἵνα μεταδώσῃ ταύτῃ ταχύτητα ἴσην ἀκριβῶς ἐκείνῃ, ἣν ἀπώλεσε νῦν ἡ κινουμένη μάζα πρὸς παραγωγὴν τῆς αὐτῆς ποσότητος μηχανικῆς ἐργασίας.

Ἐν συνόψει βλέπομεν, ὅτι,

1ον. *Δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν μερῶν ὑλικοῦ τινος συστήματος, καταναλίσκοντες μηχανικὴν ἐργασίαν, ἵνα ὑπερνικήσωμεν τὴν εἰς τὴν μεταβολὴν ταύτην ἀνθισταμένην δύναμιν R, διὰ τῆς ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι συνεχοῦς δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως F, καὶ ἡ ποσότης τῆς ἐν τῷ χρονικῷ τούτῳ διαστήματι παρεχομένης τῷ συστήματι ἐργασίας ὑπὸ τῆς δυνάμεως F μετρεῖται διὰ τοῦ ἀθροίσματος*

$$\tau = \int_{s_0}^{s} F\sigma\upsilon\nu(F\,ds)ds$$

2ον. *Ἐὰν ὅμως τὸ ὑλικὸν σύστημα οὐδόλως ἀνθίσταται εἰς τὴν μεταβολὴν ἣν τείνει νὰ ἐπιφέρῃ ἡ ἐπ' αὐτοῦ δρῶσα δύναμις F, παρατηροῦμεν ὅτι μεταβάλλεται ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ἐφ' οὗ δρᾷ ἡ δύναμις ἀπὸ v_0 εἰς v· ἡ καταναλωθεῖσα δὲ ὑπὸ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἐργασία μετρεῖται διὰ τῆς διαφορᾶς*

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

3ον. *Ἐὰν ἤδη ἀντιτάξωμεν εἰς τὴν μὲ ταχύτητα v κινουμένην μάζαν m ἀντίστασίν τινα R, ὑπερνικᾷ αὕτη τὴν ἀντίστασιν ταύτην, ἀλλ' ἡ ταχύτης αὐτῆς ἐλαττοῦται, καὶ ἂν ἡ δύναμις R ἐξακολουθῇ ἀνθισταμένη εἰς τὴν κίνησιν τῆς μάζης m μέχρις οὗ ἡ ταχύτης αὐτῆς*

ἐλαττωθῇ ἀπὸ v εἰς v_0, ἡ διὰ τῆς ὑπερνικήσεως τῆς ἀντιστάσεως R παραχθεῖσα ἐργασία ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

τῇ ἐργασίᾳ δηλαδή, ἣν κατηναλώσαμεν προηγουμένως, ἵνα μεταβάλωμεν τὴν ταχύτητα τῆς μάζης m ἀπὸ v_0 εἰς v.

140. Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν ἐνέργειαν σώματός τινος (Dr Youug. «Lectures on natural philosophy» Lecture VIII) τὴν ἰδιότητα (capacité) ἣν κέκτηται τοῦτο πρὸς παραγωγὴν ἐργασίας, ἢ ὡς ἐκ τῆς ταχύτητός του, ἢ ὡς ἐκ τῶν ἐπ' αὐτοῦ δρωσῶν δυνάμεων, διακρίνομεν ἐκ τῶν προηγουμένων ἐν ἑκάστῳ σώματι δύο εἴδη ἐνεργείας, δι' ὧν δύναται τοῦτο νὰ παραγάγῃ ἐργασίαν ἐνέργεια

Τὸ ἓν τῶν εἰδῶν τούτων τῆς ἐνεργείας, ἐντελῶς ἀνεξάρτητον τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων, κέκτηνται ταῦτα καὶ ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκόμενα· ὀφείλεται δὲ αὕτη τῇ σχετικῇ θέσει τοῦ σώματος, ὡς πρὸς τὰ περικυκλοῦντα τοῦτο ἕτερα σώματα, ἅτινα, δρῶντα ἐπὶ τοῦ θεωρουμένου σώματος, ἀναπτύσσουσιν ἐξωτερικὰς δυνάμεις· τῇ δράσει δὲ τῶν δυνάμεων τούτων ὀφείλεται καὶ ἡ παραγομένη ἢ μᾶλλον δυναμένη νὰ παραχθῇ ἐργασία, ἐὰν τὸ σῶμα ἀφεθῇ ἐλεύθερον ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῶν ἐπ' αὐτοῦ δρωσῶν ἐξωτερικῶν τούτων δυνάμεων·

Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὑλικόν τι σύστημα κέκτηται ἐνέργειαν ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς διατάξεως τῶν μερῶν αὐτοῦ, ἐὰν αἱ ἐν τῷ συστήματι ἀναπτυσσόμεναι δυνάμεις ἐπιτρέπωσι τούτῳ νὰ παράσχῃ ἐργασίαν, ὑπερνικῶντι ἐξωτερικὰς ἀντιστάσεις κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τῆς διατάξεως τῶν μερῶν αὐτοῦ. Τὸ εἶδος δὲ τοῦτο τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος τὸ ὀφειλόμενον τῇ σχετικῇ διατάξει τῶν μερῶν αὐτοῦ καλοῦμεν **λανθάνουσαν ἐνέργειαν.** (Energie potentielle) λανθάνουσα ἐνέργεια

Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἀνάλογος ἐκείνης, ἣν παρηγάγομεν προηγουμένως, ὑπερνικῶντες ὡρισμένην τινὰ ἀντίστασιν διὰ τῆς ἀμέσου ἐπενεργείας ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως, καὶ τὴν ὁποίαν ἐμετρήσαμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\int F\sigma\upsilon\nu(F.ds)ds$.

Ἕτερον μέρος τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας, ἣν κέκτηται τὸ σῶμα, ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν κατάστασιν κινήσεως εἰς ἣν εὑρίσκεται τοῦτο, ὀφείλεται τῇ ταχύτητι μεθ' ἧς τοῦτο φέρεται.

Εἴδομεν τῷ ὄντι ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι, διὰ τῆς κινήσεως τοῦ σώματος δυνάμεθα νὰ ὑπερνικήσωμεν δύναμίν τινα R ἀνθισταμένην εἰς τὴν κίνησιν ταύτην καὶ παραγάγωμεν ἐργασίαν ἄνευ τῆς ἀμέσου δράσεως ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως, ἀλλ' ἐπιβραδύνοντες ἁπλῶς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος διὰ τῆς ἐλαττώσεως ἢ καὶ τῆς παντελοῦς ἐξαφανίσεως τῆς ταχύτητος αὐτοῦ v.

Διὰ τὴν ὑπὸ τοῦ κινουμένου σώματος παραγομένην ἐργασίαν κατηναλώσαμεν λοιπὸν ἁπλῶς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ v· *ἡ καταμετροῦσα δὲ τὴν ὑπὸ τοῦ κινουμένου σώματος παραγομένην ἐργασίαν συνάρτησις τῆς ταχύτητος εἶναι*

$$\frac{mv^2}{2}$$

κινητικὴ ἐνέργεια

ἣν καλοῦμεν **κινητικὴν ἐνέργειαν** (energie cinetique).
διότι ὡς μᾶς διδάσκει τοῦτο ἡ σχέσις

$$T=\frac{mv^2}{2}$$

διὰ τῆς $\left\{\begin{array}{l}\text{αὐξήσεως}\\ \text{ἐλαττώσεως}\end{array}\right.$ τῆς ποσότητος ταύτης $\left\{\begin{array}{l}\text{ἐλαττοῦται}\\ \text{αὐξάνει}\end{array}\right.$ καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ κινουμένου σώματος παραγομένη ἐργασία κατὰ τὴν κίνησιν αὐτοῦ· ἐκ τῆς ὁλικῆς δὲ ποσότητος τῆς ἐν τῷ κινουμένῳ σώματι περιεχομένης κινητικῆς ἐνεργείας, ἐξαρτᾶται καὶ τὸ ποσὸν τῆς μηχανικῆς ἐργασίας, ἣν δύναται τοῦτο νὰ παράσχῃ διὰ τῆς καταναλώσεως τῆς ὁλικῆς αὐτοῦ ταχύτητος, καὶ τῆς ἐπανόδου του εἰς τὴν ἠρεμίαν.

Οὕτω ἐὰν σῶμά τι εὑρίσκηται ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, τὸ ἐκ τοῦ σώματος τούτου καὶ τῆς γῆς ἀποτελούμενον σύστημα κέκτηται ἐνέργειαν, καὶ δύναται καταπίπτον τὸ σῶμα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς νὰ παράσχῃ ποσότητά τινα μηχανικῆς ἐργασίας. Ἡ λανθάνουσα αὕτη ἐνέργεια ὀφείλεται εἰς τὴν θέσιν ἐν ᾗ εὑρίσκεται τὸ σῶμα ὡς πρὸς τὴν γῆν, δυνάμενον νὰ καταπέσῃ ἐπ' αὐτῆς, ὡς ἐκ τῆς ἀμοιβαίας ἕλξεως ἣν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων ἡ γῆ καὶ τὸ σῶμα, εἰς ἣν ὀφείλεται καὶ ἡ ἐν τῇ σχετικῇ διατάξει τῆς γῆς καὶ τοῦ σώματος ἐπερχομένη μεταβολή, ἡ ἐπὶ τῆς γῆς δηλαδὴ κατάπτωσις τοῦ τελευταίου τούτου ἀφιεμένου ἐλευθέρου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἑλκτικῆς ταύτης δυνάμεως.

Ἐν συνόψει βλέπομεν ὅτι, *τὰ σώματα ἐν ἠρεμίᾳ, ἢ ἐν κινήσει κέκτηνται ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς αὐτῶν θέσεως ἐν τῷ διαστήματι, καὶ ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς φέρονται, ἰδιότητά τινα πρὸς παρα-*

γωγὴν μηχανικῆς ἐργασίας, ἰδιότητα τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ἐνέργειαν**, *καὶ τὴν ὁποίαν μετροῦμεν διὰ τῆς ποσότητος τῆς ἐργασίας, ἣν τὸ σῶμα δύναται νὰ παράσχῃ.*

Τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν ἣν κέκτηται τὸ σῶμα, διακρίνομεν εἰς **λανθάνουσαν ἐνέργειαν,** *ὀφειλομένην κυρίως τῇ σχετικῇ θέσει τοῦ σώματος, ὅπερ ὑφίσταται τὴν ἐπήρειαν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐξασκοῦσιν ἐπ' αὐτοῦ τὰ περικυκλοῦντα τοῦτο ἕτερα σώματα· τὴν* **ποσότητα** *δὲ* **τῆς λανθανούσης** *ταύτης* **ἐνεργείας, μετροῦμεν διὰ τῆς μεγίστης ποσότητος ἐργασίας,** *ἣν δύνανται νὰ παράσχωσιν ἡμῖν αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος δρῶσαι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, ἐὰν τοῦτο ἀφεθῇ ἐλεύθερον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν αὐτῶν, καὶ*

Κινητικὴν ἐνέργειαν, *ἣν κέκτηνται κυρίως τὰ ἐν καταστάσει κινήσεως εὑρισκόμενα σώματα, καὶ ἥτις ὀφείλεται τῇ ταχύτητι μεθ' ἧς ταῦτα φέρονται ἐν τῷ διαστήματι.* **Τὴν ποσότητα τῆς κινητικῆς ταύτης ἐνεργείας μετροῦμεν διὰ τῆς μεγίστης ποσότητος ἐργασίας,** *ἣν δύναται νὰ μᾶς παράσχῃ τὸ κινούμενον σῶμα διὰ τῆς ταχύτητος αὐτοῦ, καὶ ἥτις, ὡς εἴδομεν τοῦτο ἀνωτέρω, μετρεῖται διὰ τῆς συναρτήσεως* $\frac{mv^2}{2}$ *ἥτις ἐκφράζει καὶ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ σώματος.*

οὕτω 1ον. *Ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια σώματός τινος εὑρισκομένου ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεώς τινος F καὶ δυναμένου νὰ διατρέξῃ διάστημα μήκους l μετρεῖται διὰ τοῦ μεταξὺ καταλλήλων ὁρίων λαμβανομένου ἀθροίσματος* μέτρον λανθανούσης ἐνεργείας

$$\int F\,\sigma\upsilon\nu(F,ds)\,ds$$

ἥτις ἐμφαίνει καὶ τὴν ποσότητα τῆς μηχανικῆς ἐργασίας, ἣν δύναται νὰ παράσχῃ τὸ σῶμα ὡς ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ.

2ον. *Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μάζης m φερομένης μὲ ταχύτητα v μετρεῖται διὰ τῆς συναρτήσεως* μέτρον κινητικῆς ἐνεργείας

$$\frac{mv^2}{2}$$

ἥτις ἐμφαίνει καὶ τὴν ἐργασίαν, ἣν δύναται νὰ παράσχῃ ἡμῖν αὕτη ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς φέρεται.

Καὶ δυνάμεθα ἤδη νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ (139) λέγοντες.

μετασχηματισμὸς ἐνεργείας

1^{ov}. *Διὰ τῆς λανθανούσης ἐνεργείας σώματός τινος δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν μηχανικὴν ἐργασίαν ἴσην αὐτῇ.*

2^{ov}. *Τὴν μηχανικὴν ταύτην ἐργασίαν δυνάμεθα νὰ καταναλώσωμεν πρὸς ἐπαύξησιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἑτέρου σώματος· καὶ*

3^{ov}. *Τὴν οὕτω παραχθεῖσαν κινητικὴν ἐνέργειαν δυνάμεθα ἐκ νέου νὰ μεταχειρισθῶμεν πρὸς παραγωγὴν μηχανικῆς ἐργασίας, ἢ ὅπερ ταὐτὸ λανθανούσης ἐνεργείας.*

141. Ἐν ταῖς προτάσεσι δὲ ταύταις ἀναφαίνεται μία ἐκ τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῆς ἐνεργείας, ἡ τοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτῆς ἀπὸ λανθανούσης εἰς κινητικὴν καὶ τἀνάπαλιν.

Ἴδωμεν ἤδη τὴν μεταβολὴν ἣν ὑφίσταται καὶ ἐν τῇ ποσότητι αὐτῆς κατὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς τούτους, ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια ἣν κέκτηται ὑλικόν τι σύστημα ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν δυνάμεων, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων τὰ ἀποτελοῦντα τοῦτο μέρη, ὡς ἐκ τῆς ἀμοιβαίας δράσεως αὐτῶν.

καταχόρυφος πτῶσις ἐν τῷ κενῷ (§14.α.1)

Ἵνα γίνωμεν εὐκολώτερον καταληπτοί, θεωρήσωμεν τὴν ἰδιαιτέραν περίπτωσιν ὑλικοῦ συστήματος ἀποτελουμένου ἐκ τῆς γῆς καὶ ἑτέρου σώματος μάζης m εὑρισκομένου εἰς ὕψος h ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους· ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεως τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὴν γῆν, κέκτηται τοῦτο λανθάνουσαν ἐνέργειαν mgh χιλιογραμμομέτρων. Ἐὰν τὰ δύο σώματα ἀφεθῶσιν ἐλεύθερα ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς ἀμοιβαίας ἑλκτικῆς δυνάμεως τούτων, τίθενται ταῦτα εἰς κίνησιν βαίνοντα πρὸς ἄλληλα· Θεωρήσωμεν τὸ σύστημα καθ' ἣν στιγμὴν ἡ σχετικὴ αὐτῶν ἀπόστασις μετεβλήθη ἀπὸ h εἰς η. Τὸ σύστημα κέκτηται ἔτι λανθάνουσαν ἐνέργειαν $mg\eta$· ἀπέκτησεν ὅμως καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{mv^2}{2}$ ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος (14.α.1) $v = \sqrt{2g(h-\eta)}$ ἣν προσεκτήσατο (παραλείπομεν ἐνταῦθα τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς ἡ γῆ φέρεται πρὸς τὴν μάζαν m), καὶ ἡ ὅλη ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι

$$mg\eta + \frac{mv^2}{2} = mg\eta + \frac{m2g(h-\eta)}{2} = mgh$$

διετηρήθη δηλαδὴ αὕτη ἀμετάβλητος κατὰ τὴν ἀλλαγήν, ἣν ὑπέστη τὸ σύστημα ἐν τῇ ἀρχικῇ διατάξει τῶν μερῶν αὐτοῦ· ἡ κινητικὴ δὲ ἐνέργεια, ἣν προσεκτήσατο τὸ σῶμα, ἀρκεῖ ὅπως ἐπαναφέρει τὸ σύστημα ἐν τῇ ἀρχικῇ αὐτοῦ διατάξει εἰς τὴν σχετικὴν ἀπόστασιν h.

Τὸ σύστημα τοῦτο καλοῦμεν **διατηρητικὸν** καὶ τὴν ὀνομασίαν ταύτην ἀποδίδομεν ἐν γένει εἰς ἐκεῖνα τὰ συστήματα, τῶν ὁποίων ἡ φύσις εἶναι τοιαύτη, ὥστε, μετὰ σειρὰν μεταβολῶν ἃς ὑφίστανται ταῦτα ἐν τῇ σχετικῇ διατάξει τῶν μερῶν αὐτῶν, ἐπανέρχονται **δι' οἵου δήποτε τρόπου** ἐν τῇ ἀρχικῇ αὐτῶν διατάξει, ἐπανακτῶντα τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν, ἣν ἐκέκτηντο ἀναχωροῦντα ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτῶν θέσεως. *Ἐὰν δηλαδὴ ἡ ὑπὸ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων παρεχομένη τῷ συστήματι ἐργασία ἰσοῦται τῇ ὁλικῇ ἐργασίᾳ, ἣν κατηνάλωσε τοῦτο ὑπερνικῶν τὰς ἀπαντώσας ἐξωτερικὰς ἀντιστάσεις, τὸ σύστημα καλεῖται* **διατηρητικόν.** — διατηρητικὰ συστήματα

Ἴδωμεν ἤδη ἐὰν ὑπάρχωσι καὶ ἄλλα διατηρητικὰ συστήματα ἀνάλογα τῷ ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος εὑρεθέντι ἤδη, καὶ ποῖα ταῦτα.

142. Δέον πρὸς τοῦτο νὰ ἐξετάσωμεν ἐκ τοῦ σύνεγγυς τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{s_0}^{s} F \text{συν}(F, ds)\, ds$

δι' οὗ μετροῦμεν τὴν ὁλικὴν ἐργασίαν, ἣν καταναλίσκει ἡ δύναμις F, ἵνα μεταφέρῃ τὴν μάζαν m ἐφ' ἧς ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος δρᾶσις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου M_0 εἰς τὸ σημεῖον M, καὶ μεταβάλῃ τὴν ταχύτητά της ἀπὸ v_0 εἰς v.

Ἡ δύναμις F ὡς καὶ αἱ συνιστῶσαι ταύτης X, Y, Z εἶναι προφανῶς συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων x, y, z τοῦ σημείου, ἔνθα ὑποθέτομεν συγκεντρωμένην τὴν μάζαν m. καὶ τὸ ἄνω ὁλοκλήρωμα λοιπὸν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν συντεταγμένων τούτων· ἀλλ' ἐνδέχεται νὰ ἐξαρτᾶται τοῦτο καὶ ἐξ ἄλλων περιστάσεων, τῆς τροχιᾶς λ. χ. τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ἡ μάζα m ἵνα μεταβῇ ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς θέσεως M_0 εἰς τὴν παροῦσαν M, καὶ προτιθέμεθα ἐνταῦθα νὰ ὁρίσωμεν τὰς συνθήκας, ἃς πρέπει νὰ πληρῇ ἡ δύναμις F ἵνα ἡ τιμὴ τοῦ ἄνω ὁλοκληρώματος ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν συντεταγμένων x, y, z τῆς μάζης m, ἐκ τῆς σχετικῆς δηλαδὴ θέσεως ταύτης ὡς πρὸς τὸ σύστημα ὅθεν πηγάζει ἡ ἐπὶ τῆς μάζης m δρῶσα δύναμις F. Ἐὰν καλέσωμεν v_0 τὴν ταχύτητα τῆς μάζης m παρὰ τῷ σημείῳ M_0 καὶ v τὴν ταχύτητα τῆς αὐτῆς μάζης παρὰ τῷ σημείῳ M, εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι αἱ ταχύτητες αὗται συνδέονται πρὸς τὸ ἄνω ὁλοκλήρωμα διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} F \text{συν}(F, ds)\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ὥστε τὸ πρόβλημα, οὗτινος τὴν λύσιν προτιθέμεθα ἐνταῦθα δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Δοθέντος ὑλικοῦ σημείου μάζης m κινουμένου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δράσεων, ἃς ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ ὑλικόν τι σύστημα A, εὑρεῖν τὰς συνθήκας, ἃς δέον νὰ πληρῶσιν αἱ δράσεις αὗται, ἵνα τὸ τετράγωνον υ^2 τῆς ταχύτητος υ τῆς κινουμένης μάζης m ἐπανακτᾷ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν, ὁσάκις ἡ μάζα κατέχει τὴν αὐτὴν θέσιν σχετικῶς πρὸς τὸ ἐπ' αὐτῆς δρῶν σύστημα A, ἀνεξαρτήτως τῶν περιστάσεων ὑφ' ἃς ἀναχωρεῖ αὕτη καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν ταύτην.

Θεωρήσωμεν πρὸς τοῦτο μετὰ τοῦ Helmholz * ὑλικὸν σημεῖον μάζης m κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δράσεων, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπ' αὐτοῦ διάφορα ἠρεμοῦντα σώματα· διὰ τῶν ἄνω εὑρεθέντων θεμελιωδῶν σχέσεων τῆς δυναμικῆς, δυνάμεθα ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ νὰ ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον (x,y,z) τοῦ διαστήματος μεθ' οὗ συμπίπτει τὸ κινητόν, καὶ τὴν ταχύτητα υ μεθ' ἧς φέρεται κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην. Δυνάμεθα οὕτω νὰ λάβωμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸν χρόνον t καὶ θεωρήσωμεν ὡς συναρτήσεις ταύτης, τὴν ταχύτητα υ, τὰς συνιστώσας ταύτης $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ καὶ $\frac{dz}{dt}$, τὰς συντεταγμένας x,y,z τοῦ σημείου, καὶ τὰς συνιστώσας X, Y καὶ Z τῆς ἐπὶ τοῦ σημείου m δρώσης δυνάμεως F. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὑλικὸν σημεῖον m ἐπανακτᾷ τὴν αὐτὴν πάντοτε ταχύτητα υ ὁσάκις ἐν τῇ κινήσει του διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ διαστήματος, τότε ἡ ταχύτης αὕτη εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις τῶν συντεταγμένων x,y,z τοῦ κινητοῦ καὶ

ἔχομεν $$d(\upsilon^2)= \frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial x}\,dx+\frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial y}\,dy+\frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial z}\,dz \ldots\ldots (2)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως (1) πορίζόμεθα

$$d(\upsilon^2)= \frac{2}{m}\,[Xdx+Ydy+Zdz] \ldots\ldots\ldots (3)$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) ὑφίστανται ἀνεξαρτήτως πάσης ἰδιαιτέρας σχέσεως μεταξὺ τῶν διαφορικῶν dx, dy καὶ dz, ἕπεται

$$\frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial x}= \frac{2X}{m} \qquad \frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial y}= \frac{2Y}{m} \qquad \frac{\partial(\upsilon^2)}{\partial z}= \frac{2Z}{m} \ldots\ldots (4)$$

* Die Erhaltung der Kraft.

σχέσεις ἐν αἷς βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν ἡ ταχύτης υ^2 εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις $\Psi(x,y,z)$ τῆς θέσεως τοῦ κινητοῦ ἐν ὡρισμένῃ τινὶ στιγμῇ, καὶ ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου m δρῶσα δύναμις F εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις τῆς θέσεως, ἣν κατέχει τὸ κινητὸν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν· καὶ τἀνάπαλιν, ἐὰν αἱ συνιστῶσαι X,Y,Z τῆς ἐπὶ τοῦ σημείου m δρώσης δυνάμεως εἶναι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $\Psi(x,y,z)$ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, πληροῦσι δηλαδὴ τὰς σχέσεις

$$X= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad Y= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad Z= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \ldots\ldots\ldots (5)$$

τὸ κινητὸν ἐπανακτᾷ τὴν αὐτὴν πάντοτε ταχύτητα ὁσάκις διέρχεται τοῦτο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ διαστήματος. Ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων πορίζόμεθα τῷ ὄντι

$$Xdx+Ydy+Zdz= \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Psi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Psi}{\partial z}dz = d\Psi(x,y,z)\ldots (6)$$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz) = \Psi(x,y,z)$$

καὶ ἡ ἄνω σχέσις (1) μετατρέπεται εἰς

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0{}^2}{2}= \Psi(x,y,z)-\Psi(x_0,y_0,z_0) \ldots\ldots (7)$$

ἔνθα βλέπομεν(ὑποθέτοντες ὅτι ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι μονόδρομος, λαμβάνει δηλαδὴ τὴν *αὐτὴν* πάντοτε τιμὴν παρὰ τῷ σημείῳ (x, y, z) ὅτι, τὸ κινητὸν ἐπανακτᾷ τὴν αὐτὴν πάντοτε ταχύτητα, ὁσάκις διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Τὴν συνάρτησιν $\Psi(x,y,z)$ καλοῦμεν *συνάρτησιν τῆς δυνάμεως* F. συνάρτησις δυνάμεως

143. Εὐκόλως δὲ ἀναγνωρίζομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη ὑπάρχει ἐν ταῖς ἑξῆς περιπτώσεσι.

1ον. Ὅταν ἡ ἐφαπτομένη συνιστῶσα Fσυν(F,ds) τῆς δυνάμεως F εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση τῇ φ· τότε

$$\int F\text{συν}(F,ds)ds= \varphi\int ds= \varphi(s-s_0)$$

2ον. Ἡ δύναμις εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς καὶ συνάρτησίς τις $f(z)$ τῆς ἀποστάσεως z τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου· ἔχομεν τότε $X= o \quad Y= o \quad Z= f(z)$

καὶ

$$\int F\text{συν}(F,ds)ds= \int(Xdx+Ydy+Zdz)= \int f(z)dz= \Psi(z)$$

Ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ περιπτώσει, καθ' ἣν $f(z)$ ἰσοῦται σταθερᾷ τινι φ, ἡ δύναμις ὄχι μόνον εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἀλλὰ καὶ σταθερὰ τὴν ἔντασιν, καὶ ἔχομεν

$$\int F\sigma\upsilon\nu(F,ds)ds = \int(Xdx + Ydy + Zdz) = \int Zdz = \varphi\int dz = -\varphi(z-z_0)$$

3ον Ἡ δύναμις εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ σταθεροῦ ἄξονος oz καὶ ἡ ἔντασις ταύτης εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις $\varphi(\rho)$ τῆς ἀποστάσεως ρ τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν

$$X = \varphi(\rho)\,\frac{x}{\rho} = \varphi(\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial x} \qquad Y = \varphi(\rho)\,\frac{y}{\rho} = \varphi(\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial y} \qquad Z = 0$$

ὅθεν καὶ

$$\int F\sigma\upsilon\nu(F,ds)ds = \int(Xdx + Ydy + Zdz) = \int\varphi(\rho)\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}dy\right|$$
$$= \int\varphi(\rho)d\rho = \Psi(\rho) - \Psi(\rho_0).$$

4ον. Ἡ δύναμις εἶναι κεντρικὴ καὶ συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως ρ τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου ὅθεν πηγάζει αὕτη· τότε (36).

$$\int F\sigma\upsilon\nu(F,ds)ds = \int(Xdx + Ydy + Zdz) = \int\varphi\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}dz\right|$$
$$= \int\varphi(\rho)d\rho = \Psi(\rho) - \Psi(\rho_0)$$

5ον. Αἱ ὀρθογώνιοι συνιστῶσαι τῆς δυνάμεως X Y καὶ Z εἶναι ἁπλῶς συναρτήσεις τῆς ἀντιστοιχούσης συντεταγμένης τοῦ κινητοῦ ἔχομεν δηλαδὴ $\quad X = f(x) \quad Y = \varphi(y) \quad Z = \psi(z)$

ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ

$$\int F\sigma\upsilon\nu(F,ds)ds = \int[Xdx + Ydy + Zdz] = \int f(x)dx + \int\varphi(y)dy + \int\psi(z)dz$$

144. Εὕρομεν οὕτω ὅτι, ἐὰν αἱ συνιστῶσαι X,Y,Z τῆς ἐπὶ τοῦ σημείου δρώσης δυνάμεως συμπίπτουσι μὲ τὰς μερικὰς παραγώγους

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

τῆς μονοδρόμου συναρτήσεως $\Psi(x,y,z)$ τὸ κινητόν, διερχόμενον δι' ὡρισμένου τινὸς σημείου(ξ,η,ζ) τοῦ διαστήματος, ἐπανακτᾷ τὴν αὐτὴν πάντοτε ταχύτητα υ. Καὶ γενικώτερον βλέπομεν ὅτι τὸ κινητόν, μετατοπιζόμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

$$\Psi(x,y,z) - \sigma = 0 \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

(ἔνθα σ εἶναι σταθερὰ ποσότης), διατηρεῖ τὴν αὐτὴν ταχύτητα· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Psi(x,y,z) - \Psi(x_0y_0z_0)$$

καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας (1), ἡ συνάρτησις $\Psi(x,y,z)$ δὲν μεταβάλλεται μετὰ τῆς μετατοπίσεως τοῦ σημείου, ἀλλὰ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμήν. ὥστε ἡ διαφορὰ $\Psi(x,y,z) - \Psi(x_0y_0z_0)$ μηδενίζεται καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ταχύτης υ ἰσοῦται τῇ υ_0.

Ἡ συνιστῶσα τῆς δυνάμεως F κατὰ τὴν διεύθυνσιν a εἶναι

$$X\frac{dx}{da} + Y\frac{dy}{da} + Z\frac{dz}{da} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{d} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{dz}{da} = \frac{d\Psi}{da}$$

Ἐὰν ἤδη da συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου ds τῆς ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαγραφομένης τροχιᾶς, καὶ ὑποθέσωμεν τὴν συνιστῶσαν παραλλήλως τούτῳ ἴσην τῷ μηδενὶ ἔχομεν

$$\frac{d\Psi}{ds} = 0 \quad \text{ὅθεν} \quad \Psi = \sigma$$

Ἡ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ δρῶσα δύναμις F εἶναι λοιπὸν κάθετος ταῖς ἐπιφανείαις, ἃς ὁρίζει ἡ σχέσις (1) καὶ τὰς ὁποίας (διὰ λόγους, οὓς θὰ ἴδωμεν ἐν τῇ ὑδροστατικῇ) *καλοῦμεν* **ἰσοστάθμους ἐπιφανείας.** ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι

144. α. Ἡ ῥοπὴ M τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς ἄξονά τινα περὶ τὸν ὁποῖον τείνει νὰ στραφῇ τὸ κινητὸν κατὰ γωνίαν θ εἶναι (135 ε)

$$M = \frac{d\tau}{d\theta}$$

ὅθεν $\quad M = X\frac{dx}{d\theta} + Y\frac{dy}{d\theta} + Z\frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{}{d\theta} = \frac{d\Psi}{d\theta}$

144. β. Ἡ δύναμις F, οὖσα κάθετος ταῖς ἰσοστάθμοις ἐπιφανείαις, ἐκφράζεται λοιπὸν καὶ διὰ τῆς σχέσεως

$$F = \frac{d\Psi}{dn}$$

ἔνθα dn ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν δύο διαδοχικῶν ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν κατὰ τὴν φορὰν τῆς καθέτου τῇ ἐπιφανείᾳ $\Psi = \sigma$. Ἡ ἐργασία ταύτης Fdn, οὖσα θετικὴ κατὰ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως, ἔπεται, ὅτι καὶ $d\Psi$ ἔσεται θετικὴ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν·

ἡ δύναμις F φέρεται λοιπὸν πρὸς τὸ μέρος τοῦ διαστήματος ἔνθα ἡ συνάρτησις Ψ βαίνει αὐξάνουσα.

144. γ. Τὰς γραμμάς, ὧν ἐφάπτεται διαρκῶς ἡ δύναμις F καλοῦσι γραμμὰς δυνάμεως. Αἱ γραμμαὶ δυνάμεως εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἰσοσταθμους ἐπιφανείας καὶ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

$$\frac{dx}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|}=\frac{dy}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|}=\frac{dz}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|}$$

144. δ. Διὰ παντὸς σημείου τοῦ διαστήματος ξ,η,ζ διέρχεται μία ἰσόσταθμος ἐπιφάνεια

$$\Psi(x,y,z)-\Psi(\xi,\eta,\zeta)=0$$

καὶ μία μόνον, διότι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$\Psi(x,y,z)=\sigma$$

ἥτις ὁρίζει τὴν διὰ τοῦ σημείου ξ,η,ζ διερχομένην ἰσόσταθμον ἐπιφάνειαν, μίαν μόνον τιμὴν δίδει διὰ τὴν ἀπροσδιόριστον σταθερὰν σ, τὴν $\Psi(\xi,\eta,\zeta)$, ἂν ὡς ὑποθέτομεν ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι μονόδρομος.

144. ε. Κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας σ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σ' ἡ ἐπ' αὐτοῦ δρῶσα δύναμις F ἐκτελεῖ ἐργασίαν

$$\sigma'-\sigma$$

145. Εἰς τὰ σημεῖα $m(x,y,z)$ ἐν οἷς τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἔχομεν (90.1)

$$X=\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0 \qquad Y=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0 \qquad Z=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0$$

καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ $\Psi(x,y,z)$ τῆς συναρτήσεως Ψ εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι αὕτη μεγίστη εἰς τὸ σημεῖον m, καὶ θεωρήσωμεν τὰς διὰ τοῦ σημείου m καὶ τοῦ παραπλησίου τούτῳ m_1 διερχομένας ἰσοστάθμους ἐπιφανείας σ καὶ σ_1.

Εἰς τὸ σημεῖον m τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, δὲν δύναται δηλαδὴ νὰ τεθῇ τοῦτο εἰς κίνησιν ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ δρώσης δυνάμεως (X,Y,Z), ἐὰν δὲν ἔχῃ ἀρχικήν τινα ταχύτητα. Ἄς μετατοπίσωμεν ἤδη τοῦτο χωρὶς νὰ τῷ μεταδώσωμεν ταχύτητα ἐκ τοῦ σημείου m ἔνθα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, εἰς τὸ παραπλήσιον σημεῖον m_1 ἔνθα ἡ δύναμις (X,Y,Z) δὲν μηδενίζεται, ἀλλὰ τείνει νὰ θέσῃ τὸ σημεῖον εἰς κίνησιν· κατὰ ποίαν ἄραγε φορὰν τείνει νὰ κινήσῃ τοῦτο; κατὰ τὴν φορὰν mm_1· ἐνῷ τῷ ὄντι τὸ κινητὸν μεταβαίνει ἀπὸ τῆς θέσεως m_1 εἰς τὴν θέσιν m, ἡ συνάρτησις Ψ μεταβάλλεται ἀπὸ σ_1 εἰς $\sigma>\sigma_1$· ἀλλ' ἡ δύναμις (X,Y,Z) φέρεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν καθ' ἣν

καὶ ἡ συνάρτησις Ψ βαίνει αὐξάνουσα, ἐνταῦθα δηλαδή, κατὰ τὴν διεύθυνσιν m_1m, καὶ ἡ δύναμις τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ κινητὸν εἰς τὴν θέσιν m ἔνθα ἰσορροπεῖ τοῦτο. Οὕτω

Εἰς τὰ σημεῖα ἔνθα ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι **μεγίστη** *τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν* **εὐσταθεῖ** *ἰσορροπίᾳ*· καὶ τἀνάπαλιν

Εἰς τὰ σημεῖα ἔνθα ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι **ἐλαχίστη** *τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν* **ἀσταθεῖ** *ἰσορροπίᾳ*.

146. Ἐν ὅσῳ τὸ κινητὸν $m(x,y,z)$ μετατοπίζεται ἐν τῷ χώρῳ, ἡ συνάρτησις $\Psi(x,y,z)$ μεταβάλλεται λαμβάνουσα διαφόρους τιμάς· ἔστω μ ἡ μεγαλειτέρα πασῶν τῶν τιμῶν τούτων, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ ἔνθα εὑρίσκεται τοῦτο ἐν εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ.

Ἐὰν ἡ δρᾶσις τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἤρξατο ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ κινητοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν συνέπιπτε τοῦτο μετὰ τοῦ σημείου $x_0y_0z_0$ τοῦ διαστήματος, ἡ ἐργασία, ἣν ἐκτελεῖ αὕτη μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν τὸ κινητὸν συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου x, y, z ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\tau=\Psi(x,y,z)-\Psi(x_0y_0z_0)$$

Ἡ αὐτὴ ἐργασία μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν τὸ κινητὸν συμπίπτει μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῇ εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ τούτου σημείου τοῦ χώρου (ξ,η,ζ) εἶναι

$$\tau_1=\Psi(\xi,\eta,\zeta)-\Psi(x_0y_0z_0)=\mu-\Psi(x_0y_0z_0)\ldots\ldots(1)$$

Ἡ ἐργασία ἣν ἐκτελεῖ ἡ δύναμις κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z) εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η,ζ) εἶναι λοιπὸν

$$\tau_1-\tau=\mu-\Psi(x,y,z)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

εἶναι δ' αὕτη ἡ μεγίστη ποσότης ἐργασίας, ἣν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἡ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ δρῶσα δύναμις κατὰ τὴν μετατόπισιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z) μέχρι τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῇ εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ τούτου σημείου (ξ,η,ζ)·

ἐκφράζει δηλαδὴ ἡ ἐργασία αὕτη τὴν λανθάνουσαν ἐνέργειαν τοῦ κινητοῦ.

Ἡ θετικὴ συνάρτησις

$$\Lambda(x,y,z)=\mu-\Psi(x,y,z)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

κέκτηται τὰς αὐτὰς μὲ τὴν Ψ ἰδιότητας· καὶ ἔχομεν

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-X \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial y}=-Y \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial z}=-Z\ldots(4)$$

καλοῦσι γραμμὰς δυνάμεως. Αἱ γραμμαὶ δυνάμεως εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἰσοσταθμους ἐπιφανείας καὶ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

$$\frac{dx}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|}=\frac{dy}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|}=\frac{dz}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|}$$

144. δ. Διὰ παντὸς σημείου τοῦ διαστήματος ξ,η,ζ διέρχεται μία ἰσόσταθμος ἐπιφάνεια

$$\Psi(x,y,z)-\Psi(\xi,\eta,\zeta)=0$$

καὶ μία μόνον, διότι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$\Psi(x,y,z)=\sigma$$

ἥτις ὁρίζει τὴν διὰ τοῦ σημείου ξ,η,ζ διερχομένην ἰσόσταθμον ἐπιφάνειαν, μίαν μόνον τιμὴν δίδει διὰ τὴν ἀπροσδιόριστον σταθερὰν σ, τὴν $\Psi(\xi,\eta,\zeta)$, ἂν ὡς ὑποθέτομεν ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι μονόδρομος.

144. ε. Κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας σ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σ′ ἡ ἐπ' αὐτοῦ δρῶσα δύναμις F ἐκτελεῖ ἐργασίαν

$$\sigma'-\sigma$$

145. Εἰς τὰ σημεῖα $m(x,y,z)$ ἐν οἷς τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἔχομεν (90.1)

$$X=\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0 \qquad Y=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0 \qquad Z=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0$$

καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ $\Psi(x,y,z)$ τῆς συναρτήσεως Ψ εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι αὕτη μεγίστη εἰς τὸ σημεῖον m, καὶ θεωρήσωμεν τὰς διὰ τοῦ σημείου m καὶ τοῦ παραπλησίου τούτῳ m_1 διερχομένας ἰσοστάθμους ἐπιφανείας σ καὶ σ_1.

Εἰς τὸ σημεῖον m τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, δὲν δύναται δηλαδὴ νὰ τεθῇ τοῦτο εἰς κίνησιν ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ δρώσης δυνάμεως (X,Y,Z), ἐὰν δὲν ἔχῃ ἀρχικήν τινα ταχύτητα. Ἂς μετατοπίσωμεν ἤδη τοῦτο χωρὶς νὰ τῷ μεταδώσωμεν ταχύτητα ἐκ τοῦ σημείου m ἔνθα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, εἰς τὸ παραπλήσιον σημεῖον m_1 ἔνθα ἡ δύναμις (X,Y,Z) δὲν μηδενίζεται, ἀλλὰ τείνει νὰ θέσῃ τὸ σημεῖον εἰς κίνησιν· κατὰ ποίαν ἄραγε φορὰν τείνει νὰ κινήσῃ τοῦτο; κατὰ τὴν φορὰν mm_1· ἐνῷ τῷ ὄντι τὸ κινητὸν μεταβαίνει ἀπὸ τῆς θέσεως m_1 εἰς τὴν θέσιν m, ἡ συνάρτησις Ψ μεταβάλλεται ἀπὸ σ_1 εἰς $\sigma > \sigma_1$· ἀλλ' ἡ δύναμις (X,Y,Z) φέρεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν καθ' ἣν

καὶ ἡ συνάρτησις Ψ βαίνει αὐξάνουσα, ἐνταῦθα δηλαδή, κατὰ τὴν διεύθυνσιν m_1m, καὶ ἡ δύναμις τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ κινητὸν εἰς τὴν θέσιν m ἔνθα ἰσορροπεῖ τοῦτο. Οὕτω

Εἰς τὰ σημεῖα ἔνθα ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι **μεγίστη** *τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν* **εὐσταθεῖ** *ἰσορροπίᾳ*· καὶ τἀνάπαλιν

Εἰς τὰ σημεῖα ἔνθα ἡ συνάρτησις Ψ εἶναι **ἐλαχίστη** *τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἐν* **ἀσταθεῖ** *ἰσορροπίᾳ*.

146. Ἐν ὅσῳ τὸ κινητὸν $m(x,y,z)$ μετατοπίζεται ἐν τῷ χώρῳ, ἡ συνάρτησις $\Psi(x,y,z)$ μεταβάλλεται λαμβάνουσα διαφόρους τιμάς· ἔστω μ ἡ μεγαλειτέρα πασῶν τῶν τιμῶν τούτων, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ ἔνθα εὑρίσκεται τοῦτο ἐν εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ.

Ἐὰν ἡ δρᾶσις τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἤρξατο ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ κινητοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν συνέπιπτε τοῦτο μετὰ τοῦ σημείου $x_0y_0z_0$ τοῦ διαστήματος, ἡ ἐργασία, ἣν ἐκτελεῖ αὕτη μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν τὸ κινητὸν συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου x, y, z ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\tau=\Psi(x,y,z)-\Psi(x_0y_0z_0)$$

Ἡ αὐτὴ ἐργασία μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν τὸ κινητὸν συμπίπτει μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῇ εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ τούτου σημείου τοῦ χώρου (ξ,η,ζ) εἶναι

$$\tau_1=\Psi(\xi,\eta,\zeta)-\Psi(x_0y_0z_0)=\mu-\Psi(x_0y_0z_0)\ldots\ldots(1)$$

Ἡ ἐργασία ἣν ἐκτελεῖ ἡ δύναμις κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z) εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η,ζ) εἶναι λοιπὸν

$$\tau_1-\tau=\mu-\Psi(x,y,z)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

εἶναι δ' αὕτη ἡ μεγίστη ποσότης ἐργασίας, ἣν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἡ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ δρῶσα δύναμις κατὰ τὴν μετατόπισιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z) μέχρι τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῇ εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ τούτου σημείου (ξ,η,ζ)·
ἐκφράζει δηλαδὴ ἡ ἐργασία αὕτη τὴν λανθάνουσαν ἐνέργειαν τοῦ κινητοῦ.

Ἡ θετικὴ συνάρτησις

$$\Lambda(x,y,z)=\mu-\Psi(x,y,z)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

κέκτηται τὰς αὐτὰς μὲ τὴν Ψ ἰδιότητας· καὶ ἔχομεν

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-X \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial y}=-Y \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial z}=-Z\ldots(4)$$

ἐν συνόψει, ὑλικόν τι σημεῖον μετατοπισθὲν ἐκ τῆς ἀντιστοιχούσης τῇ εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ του θέσεως (ξ,η,ζ) μέχρι τῆς (x,y,z) δίδει ἐπανερχόμενον ἐργασίαν

$$\mu - \Psi(x,y,z).$$

147. Ἐὰν ἔχωμεν πλείονας δυνάμεις δρώσας συγχρόνως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἡ σχετικὴ τῇ συνισταμένῃ συνάρτησις Λ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν σχετικῶν ταῖς συνιστώσαις συναρτήσεων λ· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\mathbf{X} = \Sigma X \qquad \mathbf{Y} = \Sigma Y \qquad \mathbf{Z} = \Sigma Z$$

ἔνθα X,Y,Z εἶναι αἱ ὀρθογώνιοι συνιστῶσαι μιᾶς τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου δρωσῶν μερικῶν δυνάμεων, καὶ $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ αἱ αὐταὶ συνιστῶσαι τῆς ὁλικῆς συνισταμένης. ἀλλὰ

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -X \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = -Y \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = -Z$$

ὅθεν $$\Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\Sigma X = -\mathbf{X} \qquad \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial y} = -\Sigma Y = -\mathbf{Y}$$

$$\Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\Sigma Z = -\mathbf{Z}$$

καὶ

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x} = -\mathbf{X} = \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial y} = -\mathbf{Y} = \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial z} = -\mathbf{Z} = \Sigma\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι

διατήρησις τῆς ἐνεργείας ἐν τῇ κινήσει ὑλικοῦ σημείου

148. Ἂς λάβωμεν τὸ κινητὸν παρὰ τῷ σημείῳ $x_0y_0z_0$ ἔνθα φέρεται μὲ ταχύτητα v_0· ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἣν κέκτηται κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην εἶναι $\frac{mv_0^2}{2}$ καὶ ἡ λανθάνουσα $\Lambda(x_0y_0z_0)$· κατὰ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν εὑρίσκεται τοῦτο παρὰ τῷ σημείῳ x,y,z φερόμενον μὲ ταχύτητα v κέκτηται κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{mv^2}{2}$ καὶ λανθάνουσαν $\Lambda(x,y,z)$ ἔχομεν δὲ (142.7)

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Psi(x,y,z) - \Psi(x_0y_0z_0) = -[\mu - \Psi(x,y,z)] + [\mu - \Psi(x_0y_0z_0)]$$

$$= -\Lambda(x,y,z) + \Lambda(x_0y_0z_0)$$

ὅθεν $$\frac{mv^2}{2} + \Lambda(x,y,z) = \frac{mv_0^2}{2} + \Lambda(x_0y_0z_0) \ldots\ldots\ldots (1)$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι, ἡ **ὁλικὴ ἐνέργεια ἣν κέκτηται τὸ σημεῖον διατηρεῖται σταθερὰ ἐν τῇ κινήσει του.**

Ἐν τῇ προτάσει δὲ ταύτῃ ἔγκειται ἡ σχετικὴ τῷ ὑλικῷ σημείῳ *ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας.*

149. Τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας σημείου κινουμένου ἐπηληθεύσαμεν ἤδη (141) ἐν τῇ κατακορύφῳ πτώσει τῶν σωμάτων· δυνάμεθα δὲ νὰ πράξωμεν τοῦτο καὶ ἐν ταῖς πλείσταις τῶν κινήσεων, ἃς ἐξητάσαμεν προηγουμένως.

κίνησις βλήματος ἐν τῷ κενῷ (§ 27)

Ἐν τῇ κινήσει βλήματος ῥιπτομένου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 ἀπὸ ὕψους h, κέκτηται τοῦτο ἀρχικῶς κινητικὴν ἐνέργειαν

$$\frac{1}{2} mv_0^2$$

καὶ λανθάνουσαν mgh. Ἡ ὅλη ἀρχικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος εἶναι οὕτω.

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ βλῆμα εἰς ὕψος $h+y$ ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς· ἡ ταχύτης αὐτοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην εἶναι (29)

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος εἶναι

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 2gy)$$

ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἶναι $mg(h+y)$, καὶ ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια

$$m\frac{v^2}{2} + mg(h+y) = \frac{mv_0^2}{2} - mgy + mg(h+y) = \frac{mv_0^2}{2} + mgh$$

οἵα δηλαδὴ καὶ ἡ ἀρχικὴ ὁλικὴ ἐνέργεια· αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι τὰ ὁριζόντεια ἐπίπεδα.

κίνησις διεπομένη ὑπὸ ἕλξεως ἀναλόγου τῇ ἀποστάσει (§ 96)

149.α. Ἐν τῇ κινήσει ἐπὶ ἐλλείψεως ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεως φερομένης πρὸς τὸ κέντρον καὶ ἀναλόγου τῇ ἀπὸ τούτου ἀποστάσει ρ τοῦ κινητοῦ, ἡ συνάρτησις τῶν δυνάμεων εἶναι

$$-\int \mu^2\rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\mu^2\rho^2.$$

ἡ μεγίστη τιμὴ ταύτης εἶναι

$$-\frac{1}{2}\mu^2 b^2$$

καὶ ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια τοῦ κινητοῦ εἶναι

$$\frac{1}{2}\mu^2\rho^2 - \frac{1}{2}\mu^2 b^2$$

Ἡ ταχύτης τούτου εἶναι μρ′ (ἔνθα ρ′ εἶναι ἡ συζυγὴς τῇ ρ ἀκτὶς) καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια

$$\frac{1}{2}\mu^2\rho'^2\cdot$$

ἡ ὅλη ἐνέργεια εἰς τὴν θέσιν m εἶναι οὕτω

$$\frac{v^2}{2}+\frac{1}{2}\mu^2\rho^2-\frac{1}{2}\mu^2b^2=\frac{1}{2}\mu^2\rho'^2+\frac{1}{2}\mu^2\rho^2-\frac{1}{2}\mu^2b^2$$

$$=\frac{1}{2}\mu^2(\rho^2+\rho'^2)-\frac{1}{2}\mu^2b^2=\frac{1}{2}\mu^2a^2$$

(διότι ὡς ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἀπολλωνίου $\rho^2+\rho'^2=a^2+b^2$)· ἀρχικῶς ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ μικροῦ ἄξονος ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια εἶναι μηδέν, ἡ δὲ κινητικὴ

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}\mu^2a^2$$

οἵα δηλαδὴ καὶ κατὰ τὴν θέσιν m.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ταχύτητα ἴσην τῷ μηδενί, ἡ ὅλη ἐνέργεια εἶναι λανθάνουσα ὥστε

$$\frac{1}{2}\mu^2\rho^2-\frac{1}{2}\mu^2b^2=\frac{1}{2}\mu^2a^2$$

ὅθεν $\rho^2=a^2+b^2$ ὅπερ εὕρομεν καὶ προηγουμένως (96).
αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι ἐνταῦθα εἶναι σφαῖραι ἔχουσαι ὡς κέντρον τὸ ἕλκον σημεῖον.

κίνησις διεπομένη ὑπὸ ἕλξεως ἀντιστρόφως ἀναλόγου τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως (100—106)

149.β. Ἐν τῇ κινήσει ἐπὶ ἐλλείψεως ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν δυνάμεως $-\frac{\mu}{\rho^2}$ φερομένης πρὸς τὴν ἑστίαν ἡ συνάρτησις τῶν δυνάμεων εἶναι $\frac{\mu}{\rho}$, ἡ μεγίστη τιμὴ εἶναι $\frac{\mu}{a(1-e)}$ καὶ ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια $\frac{\mu}{a(1-e)}-\frac{\mu}{\rho}$. ἡ ταχύτης, ὅταν τὸ κινητὸν εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου δίδεται (103) ὑπὸ τῆς σχέσεως $v^2=2\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2a}\right)$, καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι $\frac{v^2}{2}=\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2a}\right)$· ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια εἶναι οὕτω

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\mu}{a(1-e)}-\frac{\mu}{\rho}=\frac{\mu}{\rho}-\frac{\mu}{2a}+\frac{\mu}{a(1-e)}-\frac{\mu}{\rho}=\frac{\mu}{2a}\,\frac{1+e}{1-e}=\text{σταθερά}$$

Ἐὰν ἡ ταχύτης μηδενίζεται ἡ ὅλη ἐνέργεια εἶναι λανθάνουσα καὶ ἔχομεν

$$\frac{\mu}{a(1-e)}-\frac{\mu}{\rho}=\frac{\mu}{2a}\,\frac{1+e}{1-e}$$

ὅθεν

$$\rho=2a$$

ὅπερ εὕρομεν (103) καὶ προηγουμένως.

Ἐὰν τὸ κινητὸν κινεῖται ἐπὶ ἀκάμπτου γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας, ἡ παρεισαγομένη ἀντίδρασις, οὖσα κάθετος τῇ μετατοπίσει τοῦ κινητοῦ, οὐδεμίαν ἐργασίαν δίδει, καὶ συνεπῶς δὲν ἐπηρεάζει τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν, ἣν κέκτηται τὸ κινητόν, ἥτις διατηρεῖται καὶ ἐνταῦθα.

κίνησις ἐπὶ ἀκάμπτου κύκλου διεπομένη ὑπὸ δυνάμεως ἀναλόγου τῇ ἀποστάσει (§ 49.1. α.β)

149. γ. Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς κινήσεως ἐπὶ ἀκάμπτου κύκλου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς κεντρικῆς δυνάμεως μρ ἀναλόγου τῇ ἀποστάσει, ἡ συνάρτησις τῆς δυνάμεως ἐὰν εἶναι αὕτη ἀπωθητικὴ εἶναι $1/2\,\mu\rho^2$· ἡ μεγίστη τιμὴ ταύτης εἶναι $1/2\,\mu(R+a)^2$ καὶ ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια, ὅταν τὸ κινητὸν συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου m εἶναι $1/2\,\mu(R+a)^2-1/2\,\mu\rho^2$. Ἡ ταχύτης κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$v^2=v_0^2+2a\mu R(1-\text{συν}\theta)$$ καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}v_0^2+\mu aR(1-\text{συν}\theta)\cdot$$ ἡ δὲ ὁλικὴ ἐνέργεια

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\mu(R+a)^2-\frac{1}{2}\mu\rho^2=\frac{1}{2}v_0^2+\mu Ra(1-\text{συν}\theta)+\frac{1}{2}\mu(R+a)^2-\frac{1}{2}\mu\rho^2$$

καὶ ἐπειδὴ $\rho^2=a^2+R^2-2Ra\,\text{συν}\theta$ ἔχομεν

ὁλικὴ ἐνέργεια $$=\frac{1}{2}v_0^2+\mu aR(1-\text{συν}\theta)+\frac{1}{2}\mu(R+a)^2-\frac{1}{2}\mu(R^2+a^2)$$

$$+\mu aR\,\text{συν}\theta=\frac{1}{2}v_0^2+2\mu aR$$

Ἐὰν ἡ δύναμις ἕλκῃ τὸ κινητὸν ἡ συνάρτησις τῶν δυνάμεων εἶναι $-1/2\,\mu\rho^2$· ἡ μεγίστη τιμὴ ταύτης εἶναι $-1/2\,\mu(R-a)^2$ καὶ ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια, ὅταν τὸ κινητὸν συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου m εἶναι

$$1/2\,\mu\rho^2-1/2\,\mu(R-a)^2$$

ἡ ταχύτης κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$v^2=v_0^2+2a\mu R(1-\text{συν}\theta),$$ καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}v_0^2+a\mu R(1-\text{συν}\theta)$$

Ἡ δὲ ὁλικὴ ἐνέργεια

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\mu\rho^2-\frac{1}{2}\mu(R-a)^2=\frac{1}{2}v_0^2+a\mu R(1-\text{συν}\theta)+\frac{1}{2}\mu\rho^2-\frac{1}{2}\mu(R-a)^2$$

καὶ ὡς ἐκ τῆς ἄνω τιμῆς τοῦ $\rho^2=a^2+R^2+2aR\,\text{συν}\theta$ ἔχομεν τέλος

ὁλικὴ ἐνέργεια $$=\frac{1}{2}v_0^2+a\mu R(1-\text{συν}\theta)+\frac{1}{2}\mu\rho^2-\frac{1}{2}\mu(R-a)^2=\frac{1}{2}v_0^2+2\mu aR.$$

κίνησις ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος (§ 50.2)

149. δ. Ἐν τῇ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κινήσει ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος ἡ συνάρτησις τῶν δυνάμεων εἶναι $-gh$· ἡ μεγίστη τιμὴ ταύτης εἶναι μηδὲν καὶ ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια gh· ἡ ταχύτης κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἶναι $\sqrt{2g\eta}$ ἐὰν τὸ κινητὸν κατέπεσεν ἤδη ἀπὸ ὕψους η· ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια εἶναι οὕτω

$$\frac{v^2}{2}+gh=g\eta+gh=g(h+\eta)=gH$$

ἔνθα H εἶναι τὸ ὕψος ἀφ' οὗ ἤρξατο καταπίπτον τὸ σῶμα ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος.

κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς (§ 50.3)

149. ε. Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς κινήσεως ἐκκρεμοῦς πίπτοντος ἀπὸ ὕψους H_0 (ὑπολογιζομένου τοῦ ὕψους ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὰ κάτω) ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια ὅταν τὸ κινητὸν εὑρίσκεται εἰς ὕψος H εἶναι

$$gH\cdot$$

ἡ μεγίστη τιμὴ ταύτης gR, καὶ ἡ ἀρχικὴ λανθάνουσα ἐνέργεια εἶναι

$$g(R-H_0)\cdot$$

ἡ ταχύτης εἰς ὕψος H δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$v=\sqrt{2g(H-H_0)}$$

καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι

$$\frac{v^2}{2}=g(H-H_0)\cdot$$

ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια εἰς ὕψος H εἶναι οὕτω

$$\frac{v^2}{2}+g(R-H)=g(H-H_0)+g(R-H)=g(R-H_0)$$

ἴση δηλαδὴ τῇ λανθανούσῃ ἐνεργείᾳ ἣν ἐκέκτητο τὸ ἐκκρεμὲς ὅταν ἤρξατο καταπίπτον ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ὅτε δηλαδὴ ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τούτου ἦτο λανθάνουσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX.

Δυναμικὸν τῆς βαρύτητος.

150. Εἴδομεν ἀνωτέρω (143.4ον), ὅτι ἡ σχετικὴ τῇ ἀμοιβαίᾳ ἕλξει δύο μορίων (κειμένων εἰς ἀπόστασιν ρ, ὧν αἱ μάζαι εἶναι m καὶ m') δυναμικὴ συνάρτησις εἶναι

$$\Psi(\rho)=\int f\frac{mm'}{\rho^2}d\rho \qquad (1)$$

καὶ ἡ ἐκφράζουσα τὴν λανθάνουσαν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος συνάρτησις εἶναι

$$\Lambda=\mu-\Psi(\rho)$$

ἔνθα μ εἶναι τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως $\Psi(\rho)$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις

$$\Psi(\rho)=-f\frac{mm'}{\rho}$$

εἶναι ἀρνητική, ἡ μεγίστη τιμὴ ταύτης μ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια ἐκφράζεται ἁπλῶς διὰ τῆς συναρτήσεως

$$\Lambda=f\frac{mm'}{\rho} \qquad (2)$$

ἥτις ἐκφράζει καὶ τὴν ἐργασίαν

$$fmm'\int_\rho^\infty\frac{1}{\rho^2}d\rho=f\frac{mm'}{\rho}$$

ἣν θὰ ἐξετέλει ἡ ἐπὶ τοῦ m' ἐξασκουμένη ἑλκτικὴ δύναμις τοῦ σημείου m ἵνα μεταφέρῃ τοῦτο ἀπὸ ἀπείρου ἀποστάσεως εἰς τὴν παροῦσαν θέσιν του. Ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ περιπτώσει καθ' ἣν ἡ μάζα τοῦ σημείου $m'(x,y,z)$ ἰσοῦται τῇ μονάδι, λαμβάνοντες συνάμα $f=1$, ἡ ἄνω συνάρτησις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{m}{\rho}=V(x,y,z) \qquad (3)$$

καὶ καλεῖται **δυναμικὸν τῆς μάζης** m παρὰ τῷ σημείῳ οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἶναι x,y,z. δυναμικὸν

Δυνάμεθα δὲ νὰ ὁρίσωμεν καὶ φυσικῶς τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης m παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) οὕτω.

Τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης m παρὰ τῷ σημείῳ x,y,z εἶναι ἡ ἐργασία, ἣν θὰ ἐξετέλει ἡ μάζα αὕτη, ἕλκουσα ἑτέραν μάζαν ἴσην τῇ μο-

νάδι, ἵνα μεταφέρῃ ταύτην ἐξ ἀπείρου ἀποστάσεως εἰς τὸ σημεῖον, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἶναι (x,y,z).

Ἡ συνάρτησις V, ἥτις δὲν διαφέρει τῆς συναρτήσεως Λ εἰμὴ κατὰ τὸν σταθερὸν παράγοντα fm' (ἀντικατασταθέντα ἐνταῦθα διὰ τῆς μονάδος) κέκτηται ἁπάσας τὰς ἰδιότητας τῆς τελευταίας ταύτης (143, 146).

Ἐὰν νοήσωμεν πλείονας μάζας συγκεντρωμένας εἰς διάφορα μεμονωμένα σημεῖα τοῦ διαστήματος, ὧν οὐδὲν συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου (x,y,z), τὸ δυναμικὸν πασῶν τῶν μαζῶν τούτων παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) εἶναι

$$V(x,y,z)=\Sigma\,\frac{m}{\rho}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Ἐὰν αἱ μάζαι m ἀποτελοῦσι σῶμα συνεχές, τὸ δυναμικὸν τούτων παρὰ τῷ αὐτῷ σημείῳ (x,y,z) εἶναι

$$V(x,y,z) = \int\frac{dm}{\rho}=\int\int\int\delta\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\rho}\ldots\ldots\ldots(5)$$

ἔνθα δ εἶναι ἡ πυκνότης τῆς συνεχοῦς μάζης κατὰ τὸ σημεῖον(ξ,η,ζ).

Ἐν ἁπάσαις δὲ ταῖς ἄνω θεωρηθείσαις περιπτώσεσιν, ἔνθα αἱ ἕλκουσαι μάζαι ὑποτίθενται πεπερασμέναι, τὸ δυναμικὸν V καὶ οἱ πρῶτοι διαφορικοὶ συντελεσταὶ τούτου δι' ὧν ἐκφράζομεν (146) τὰς καθέτους συνιστώσας τῆς ὁλικῆς ἕλξεως

$$X= -\frac{\partial V}{\partial x} = \Sigma\frac{m(x-\xi)}{\rho^3}\qquad Y= -\frac{\partial V}{\partial y}=\Sigma\frac{m(y-\eta)}{\rho^3}$$

$$Z= -\frac{\partial V}{\partial z}=\Sigma\frac{m(z-\zeta)}{\rho^3}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

εἶναι πεπερασμέναι ποσότητες, καὶ οὐδέποτε λαμβάνουσιν ἄπειρον τιμήν.

Λαμβάνοντες ἐκ τούτων τοὺς δευτέρους διαφορικοὺς συντελεστὰς ἔχομεν

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}= -\Sigma m\left|\frac{1}{\rho^3} - 3\frac{(x-\xi)^2}{\rho^5}\right|\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}= -\Sigma m\left|\frac{1}{\rho^3} - \frac{(y-\eta)^2}{\rho^5}\right|$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}= -\Sigma m\left|\frac{1}{\rho^3} - \frac{(z-\zeta)^2}{\rho^5}\right|\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ὅθεν διὰ προσθέσεως

ἐξίσωσις τοῦ Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

θεμελιώδης σχέσις ἣν πληροῦσιν οἱ δεύτεροι διαφορικοὶ συντελεσταὶ τοῦ δυναμικοῦ, καὶ τὴν ὁποίαν ὀφείλομεν τῷ Laplace.

151. Ἀλλ' ἐὰν τὸ σημεῖον (x,y,z) παρὰ τῷ ὁποίῳ θεωροῦμεν τὸ δυναμικὸν ἀνήκει εἰς τὴν ἕλκουσαν μάζαν, ἡ ἀλγεβρικὴ ἔκφρασις τούτου

$$V=\int\frac{dm}{\rho}$$

περιέχει ὅρους ἀπείρως μεγίστους, καὶ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν ἂν ἡ τιμὴ τούτου καὶ τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένη. Πρὸς τοῦτο θὰ ἐκφράσωμεν τὸ δυναμικὸν ὑπὸ ἄλλην, χρήσιμον καὶ διὰ τὰ κατόπιν, μορφὴν ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ σημείου $a(x,y,z)$ ὡς κέντρου νοήσωμεν δύο σφαίρας ἀκτίνων ρ καὶ $\rho+d\rho$, καὶ πυραμίδα ὁρίζουσαν ἐπὶ ὁμοκέντρου σφαίρας ἀκτῖνος ἴσης τῇ μονάδι ἀπειροστὸν ἐμβαδὸν $d\sigma$. Τὸ ἐπὶ τῆς σφαίρας (ρ) ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς αὐτῆς πυραμίδος ἐμβαδὸν εἶναι $\rho^2 d\sigma$, καὶ ὁ στερεὸς ὄγκος ὁ ὁριζόμενος ὑπὸ τῶν σφαιρῶν (ρ), $(\rho+d\rho)$ καὶ τῆς πυραμίδος εἶναι $\rho^2 d\sigma d\rho$· ἡ μάζα τούτου εἶναι $\delta\rho^2 d\sigma d\rho$ καὶ τὸ δυναμικὸν ταύτης παρὰ τῷ κέντρῳ $a(x,y,z)$

$$\frac{dm}{\rho}=\frac{\delta\rho^2 d\rho d\sigma}{\rho}= \delta\rho d\rho d\sigma$$

ὅθεν καὶ τὸ δυναμικὸν τῆς ὅλης μάζης ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$V= \int\int\delta\rho d\rho d\sigma\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι οἱ ὅροι τούτου εἶναι ὅλοι πεπερασμένοι μηδενιζόμενοι ἀκριβῶς ἐκεῖ ὅπου ἐν τῇ προηγουμένῃ ἐκφράσει (150.5) ἦσαν ἄπειροι, καὶ τὸ δυναμικὸν V εἶναι συνάρτησις καθ' ὅλα ὡρισμένη.

Ἐν τῇ περιπτώσει τῶν ὁμογενῶν σωμάτων δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ δυναμικὸν καὶ ὑπὸ ἄλλας μορφάς, ὧν θὰ κάμωμεν χρῆσιν κατωτέρω, καὶ τὰς ὁποίας παραθέτομεν ἀμέσως ἐνταῦθα.

Εὕρομεν ἀνωτέρω (1) τὴν σχέσιν

$$V= \int\int\delta\rho d\rho d\sigma= \delta\int d\sigma\int\rho d\rho\ldots\ldots\ldots(1')$$

ἔνθα δυνάμεθα ἀμέσως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν ὡς πρὸς τὸ ρ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ ὅρια τοῦ σχετικοῦ ὁλοκληρώματος· ὑποθέσωμεν

1ον Ὅτι τὸ σημεῖον (x,y,z) ἀνήκει εἰς τὸ ἕλκον σῶμα, καὶ ὅτι πᾶσα ἀκτὶς ἔχουσα τὴν ἀρχήν της εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο συναντᾷ τὴν ὁρίζουσαν τὸ σῶμα ἐπιφάνειαν εἰς ἓν σημεῖον· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰ ὅρια τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι o καὶ r καὶ ἔχομεν

$$V = \frac{\delta}{2}\int r^2 d\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀπόστασις σημείου τινὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z).

Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z) φερομένη πρὸς τὴν ὁρίζουσαν τὴν μάζαν ἐπιφάνειαν ἀκτὶς συναντᾷ ταύτην εἰς πλείονα τοῦ ἑνὸς σημεῖα, ὁ ἀριθμὸς τούτων εἶναι κατ' ἀνάγκην *περιττός*, ἐὰν ἡ μᾶζα εἶναι πεπερασμένων διαστάσεων· ἔστωσαν $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots$ αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τούτων ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z)· τὸ δυναμικὸν ἐκφράζεται προφανῶς διὰ τῆς σχέσεως

$$V = \frac{\delta}{2}\int (r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 + \ldots\ldots) d\sigma \ldots\ldots \quad (3)$$

ὑποθέσωμεν $2^{ον}$, ὅτι τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐκτὸς τῆς ἑλκούσης μάζης· ἡ διὰ τούτου φερομένη ἀκτὶς r συναντᾷ τότε τὴν ὁρίζουσαν τὸ ἕλκον σῶμα ἐπιφάνειαν εἰς πλείονα τοῦ ἑνὸς σημεῖα, *ἄρτια* τὸν ἀριθμόν, καὶ τὸ δυναμικὸν ἐκφράζεται προφανῶς διὰ τῆς σχέσεως

$$V = \frac{\delta}{2}\int (-r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2 - \ldots\ldots) d\sigma \ldots\ldots \quad (4)$$

Ἐὰν τέλος τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος, δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν μὲν ἢ τὴν δὲ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἐκλέγοντες καταλλήλως τὴν φορὰν καθ' ἣν δέον νὰ θέσωμεν $r_1 = 0$.

Τὰς σχέσεις (3) καὶ (4) δυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν ἐν μιᾷ ἐκφράσει οὕτω.

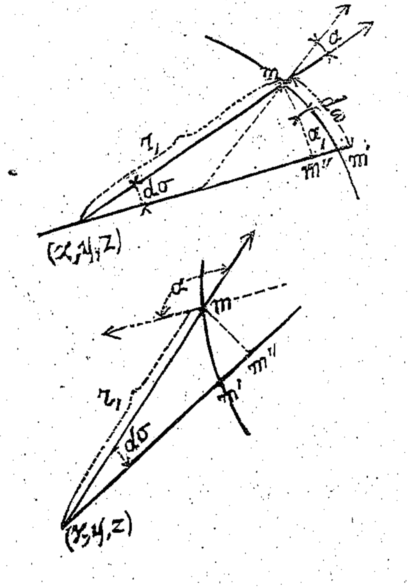
Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ διὰ τοῦ σημείου (x,y,z) πυραμίς, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ὁμοκέντρου σφαίρας ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μονὰς τὸ ἐμβαδὸν $d\sigma$, ὁρίζει καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ἐμβαδὰ

$$d\omega_1 \quad d\omega_2 \quad d\omega_3 \ldots\ldots\ldots$$

καὶ ἔστωσαν $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ αἱ γωνίαι τοῦ ἄξονος τῆς πυραμίδος (ἐφ' οὗ λαμβάνομεν ὡς θετικὴν φορὰν ἐκείνην κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀκτῖνες $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots$ βαίνουσιν αὐξάνουσαι) μετὰ τῶν καθέτων ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν $d\omega_1, d\omega_2 \ldots\ldots$ (ὧν ὡς θετικὴ φορὰ λαμβάνεται ἡ ἐκ τῶν ἐντὸς πρὸς τὰ ἐκτὸς τοῦ σώματος).

Ἐὰν παρὰ τῷ ἐμβαδῷ $d\omega_1$ ἡ ἀκτὶς r ἐξέρχεται τοῦ σώματος ἔχομεν

$$d\omega_1 = mm' = \frac{mm''}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1} = r_1^2\frac{d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1}$$



Σχ. 111.

ὅθεν $$r_1^2 d\sigma = \sigma\upsilon\nu\alpha_1 d\omega_1 \ldots\ldots \quad (5)$$

Ἐὰν παρὰ τῷ ἐμβαδῷ $d\omega_1$ ἡ ἀκτὶς r εἰσέρχεται ἐν τῷ σώματι ἔχομεν

$$d\omega_1 = mm' = \frac{mm''}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha_1)}$$

$$= -\frac{mm''}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1} = -\frac{r_1^2 d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1}$$

ὅθεν $$-r_1^2 d\sigma = \sigma\upsilon\nu\alpha_1 d\omega_1 \ldots\ldots \quad (6)$$

Ἐὰν ἤδη ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς (5) καὶ (6) ἐν ταῖς σχέσεσι (3) καὶ (4), τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀντικαταστάσεως συμπίπτουσι δίδοντα μίαν μόνην σχέσιν τὴν

$$V = \frac{\delta}{2}\Sigma(\sigma\upsilon\nu\alpha_1 d\omega_1 + \sigma\upsilon\nu\alpha_2 d\omega_2 + \ldots\ldots) = \frac{\delta}{2}\int \sigma\upsilon\nu\alpha\, d\omega \ldots\ldots \quad (7)$$

ἔνθα τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα ἐπεκτείνεται ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας Ω τοῦ θεωρουμένου σώματος.

152. Ἵνα ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $-\frac{\partial V}{\partial x}$, ὅστις δίδει τὴν συνιστῶσαν τῆς ἕλξεως παραλλήλως τῷ ἄξονι ox δὲν δυνάμεθα ν' ἀναχωρήσωμεν ἐκ τῆς σχέσεως (151.1), εἰς ἣν ἐφθάσαμεν λαβόντες ὡς πόλον τῶν συντεταγμένων τὸ σημεῖον (x,y,z), ὅπερ κατὰ συνέπειαν ὑποτίθεται σταθερόν, ἐνῷ ὁ προσδιορισμὸς τοῦ συντελεστοῦ $\frac{\partial V}{\partial x}$ ὑποθέτει τοῦτο κινούμενον.

Ἵνα ἀποφύγωμεν τὴν δυσκολίαν ταύτην, διὰ τοῦ σημείου (x,y,z) νοοῦμεν ἄξονα παράλληλον τῷ ox, καὶ ἐπ' αὐτοῦ λαμβάνομεν ἕτερον σημεῖον τὸ (a,y,z) ὡς πόλον (διότι ἵνα ὑπολογίσωμεν τὸν συντελεστὴν $\frac{\partial V}{\partial x}$ ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὴν x μόνον ὡς μεταβλητήν)· ὁ στοιχειώδης ὄγκος mp ἐκφράζεται διὰ

$$mn.nv.dr$$

ἔχομεν δὲ $\quad mn = rd\lambda \quad nv = n'v' = ov'd\mu = r\sigma\upsilon\nu\lambda.d\mu.$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν τὸν στοιχειώδη ὄγκον

$$rd\lambda . r\,\text{ημ}\theta d\mu . dr = r^2\,\text{ημ}\theta\, dr d\lambda d\mu$$

καὶ τὴν μάζαν

$$dm = \delta r^2\,\text{ημ}\theta\, dr d\lambda d\mu \dots\dots\dots (1)$$

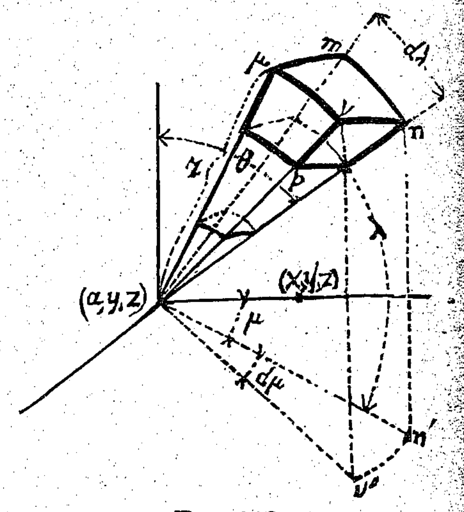
ἡ ἀπόστασις τῆς μάζης ταύτης ἧς αἱ συντεταγμέναι εἶναι

$$a + r\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu,\ y + r\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\mu,\ z + r\,\text{συν}\theta$$

ἀπὸ τοῦ σημείου x, y, z εἶναι

$$\rho = \sqrt{(a-x)^2 + r^2 + 2r(a-x)\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu}$$

καὶ ἐκφράζομεν τὸ δυναμικὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν



Σχ. 112.

$$V = \iiint \frac{\delta r^2\,\text{ημ}\theta\, dr d\lambda d\mu}{\sqrt{(a-x)^2 + r^2 + 2r(a-x)\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu}} \dots\dots (2)$$

ἐν ᾗ βλέπομεν ὅτι, ἡ συνάρτησις εἶναι πεπερασμένη δι' ἁπάσας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν r, λ καὶ μ· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ διαφορήσωμεν ὡς πρὸς τὸ x καὶ ἔχομεν

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{\delta r^2\,\text{ημ}\theta[r\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu + a - x]}{[r^2 + (a-x)^2 + 2r(a-x)\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu]^{\frac{3}{2}}}\, dr d\lambda d\mu$$

δυνάμεθα ἤδη ἐνταῦθα νὰ νοήσωμεν τὸ σημεῖον $(a.y,z)$ ἀρκούντως πλησίον τοῦ (x,y,z) ὥστε νὰ ὑποθέσωμεν $x = a$ καὶ τότε $r = \rho$ καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \delta\,\text{ημ}^2\theta\,\text{συν}\mu\, d\rho d\lambda d\mu = \int_0^R \delta d\rho \int_0^\pi \text{ημ}^2\theta\, d\lambda \int_0^{2\pi} \text{συν}\mu\, d\mu \dots (3)$$

ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν σχέσιν, ἣν θὰ εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀμέσου διαφορήσεως τῆς σχέσεως (151.1)· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$d\sigma = \text{ημ}\theta\, d\lambda d\mu$$

ὅθεν καὶ

$$V = \iint \delta\rho\, d\rho\, d\sigma = \iiint \delta\rho\,\text{ημ}\theta\, d\lambda d\mu d\rho$$

διαφοροῦντες ὡς πρὸς τὸ x ἔχομεν

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \delta\,\text{ημ}\theta \frac{\partial \rho}{\partial x} d\lambda d\mu d\rho = \iiint \delta\,\text{ημ}\theta \frac{x-\xi}{\rho} d\lambda d\mu d\rho$$

καὶ ἐπειδὴ $x - \xi = \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu$ ἔχομεν τέλος

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \delta\,\text{ημ}^2\theta\,\text{συν}\mu\, d\lambda d\mu d\rho = \iint \delta\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu\, d\rho d\sigma \dots (3)$$

ἀλλὰ καὶ ἀπ' εὐθείας δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν συνιστῶσαν τῆς ἕλξεως παραλλήλως τῷ ἄξονι ox· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$X = -\int \frac{x-\xi}{\rho^3} dm = -\int \delta\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu\, d\rho d\sigma = -\frac{\partial V}{\partial x} \dots\dots (4)$$

διότι $x - \xi = \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\mu$ καὶ $dm = \delta\rho^2 d\rho d\sigma$

συμπεραίνομεν οὕτω, ὅτι

Τὸ δυναμικὸν καὶ οἱ πρῶτοι διαφορικοὶ συντελεσταὶ τούτου παρά τινι σημείῳ (x,y,z) εἶναι πεπερασμέναι ποσότητες, εἴτε ἀνήκει εἰς τὴν ἕλκουσαν μάζαν τὸ σημεῖον παρ' ᾧ λαμβάνομεν τὸ δυναμικὸν εἴτε μή.

153. Ἐὰν ἀντὶ τῆς σχέσεως (151.1) ἐλαμβάνομεν τὴν σχέσιν (151.7)

$$V = \frac{\delta}{2}\int \text{συν}\alpha\, d\omega$$

ἵνα ὑπολογίσωμεν τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τοῦ δυναμικοῦ, θὰ εἴχομεν

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\delta}{2}\int \frac{\partial(\text{συν}\alpha)}{\partial x} d\omega \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\delta}{2}\int \frac{\partial(\text{συν}\alpha)}{\partial y} d\omega$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\delta}{2}\int \frac{\partial(\text{συν}\alpha)}{\partial z} d\omega \dots\dots\dots (1)$$

Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν φ, χ, ψ τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς ἀκτῖνος r, ἥτις ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,z) φέρεται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν $d\omega$, οὗτινος τὰς συντεταγμένας καλοῦμεν (ξ,η,ζ), ἔχομεν

$$\varphi = \frac{\xi - x}{r} \qquad \chi = \frac{\eta - y}{r} \qquad \psi = \frac{\zeta - z}{r}$$

ἔνθα

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

ἐὰν ἐπίσης καλέσωμεν a, b, c τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐπὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου $d\omega$ καθέτου, ἔχομεν

$$\text{συν}\alpha = a\varphi + b\chi + c\psi = \frac{1}{r}[a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z)]$$

ὅθεν

$$\frac{\partial(\text{συν}\alpha)}{\partial x} = -\frac{ar}{r^2} + \frac{(\xi - x)[a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z)]}{r^3}$$

$$= \frac{\xi - x}{r^2}\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{a}{r}$$

καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου

$$\frac{\partial(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\partial y} = \frac{\eta - y}{r^2}\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{b}{r} \qquad \frac{\partial(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\partial z} = \frac{\zeta - z}{r^2}\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{c}{r} \ldots (2)$$

ὥστε

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\delta}{2}\int\left|\frac{\xi - x}{r^2}\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{a}{r}\right|d\omega = \frac{\delta}{2}\int\left|\frac{\varphi\sigma\upsilon\nu\alpha}{r} - \frac{a}{r}\right|d\omega \ldots (3)$$

Τὸν αὐτὸν διαφορικὸν συντελεστὴν εὕρομεν προηγουμένως (152.3) ἴσον τῷ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \delta\int\int \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\mu\, d\rho d\sigma$$

παρατηροῦμεν δὲ (εἰσ. § 2.2) ὅτι

$$\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\mu = \varphi$$

ὅθεν

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \delta\int\int \varphi\, d\rho d\sigma$$

καὶ ὁλοκληροῦντες ἀμέσως ὡς πρὸς τὸ ρ ἔχομεν

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \delta\int[\pm r_1 \mp r_2 \pm r_3 \mp \ldots]\varphi d\sigma$$

ἀλλ' εὕρομεν (151.5,6) προηγουμένως

$$d\sigma = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{r^2}\, d\omega$$

ὅπερ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω σχέσει μετατρέπομεν ταύτην εἰς

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \delta\int \frac{\varphi\sigma\upsilon\nu\alpha}{r}\, d\omega$$

ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἄνω εὑρεθεῖσαν (3) ὥστε

$$-\int\frac{a}{r}\, d\omega = \int\frac{\varphi\sigma\upsilon\nu\alpha}{r}\, d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

σχέσις δυναμένη εὐκόλως ν' ἀποδειχθῇ καὶ ἀπ' εὐθείας.

δυναμικὸν σφαιρικοῦ στρώματος

154. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τ' ἀνωτέρω ἐν τῇ περιπτώσει σφαιρικοῦ στρώματος πάχους ε. Τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος παρὰ τῷ σημείῳ c εἶναι

$$V = \int\frac{dm}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν τὸ κέντρον τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος ὡς πόλον, ἔχομεν

$$dm = \delta r^2 \eta\mu\theta\, dr d\theta d\mu \quad \text{καὶ} \quad \rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\sigma\upsilon\nu\theta$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (1) μετατρέπεται αὕτη εἰς

$$V = \int\frac{dm}{\rho} = \int_{r_0}^{r_1} dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} \frac{\delta r^2 \eta\mu\theta d\mu}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sigma\upsilon\nu\theta}}$$

ὁλοκληροῦντες ὡς πρὸς τὸ μ ἔχομεν

$$V = 2\pi\int_{r_0}^{r_1} dr\int_0^{\pi} \frac{\delta r \eta\mu\theta d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sigma\upsilon\nu\theta}}$$

ὁλοκληροῦντες ἤδη ὡς πρὸς τὸ θ ἔχομεν

$$V = \frac{2\pi}{a}\int_{r_0}^{r_1}\delta r\left[\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} - \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar}\right]dr$$

$$V = \frac{2\pi}{a}\int_{r_0}^{r_1}\delta r[(a + r) \pm (a - r)]dr \ldots\ldots\ldots (2)$$

(ἔνθα θὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον + ἐὰν $a < r$ καὶ τὸ — ἐὰν $a > r$)· ὑποθέσωμεν 1ον $a > r$ τότε

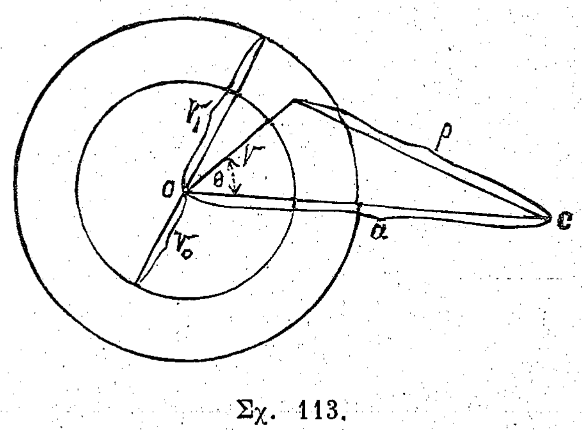
$$V = \frac{2\pi}{a}\int_{r_0}^{r_1} 2\delta r^2 dr = \frac{1}{a}\int_{r_0}^{r_1}\delta\, 4\pi r^2 dr$$

ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι $4\pi r^2 dr$ εἶναι ὁ μεταξὺ δύο σφαιρῶν (r) καὶ ($r + dr$) περιεχόμενος ὄγκος· $\delta . 4\pi r^2 dr$ εἶναι ἡ μάζα τοῦ ὄγκου τούτου, καὶ συνεπῶς τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα

$$\int_{r_0}^{r_1}\delta . 4\pi r^2 dr$$

εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν σφαιρῶν (r_0) καὶ (r_1) περιεχομένη μάζα M. ἔχομεν οὕτω

$$V = \frac{M}{a} \ldots\ldots (3)$$



Σχ. 113.

καὶ βλέπομεν, ὅτι

Τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος ἰσοῦται τῷ δυναμικῷ μάζης ἴσης τῇ τοῦ στρώματος συγκεντρωμένης παρὰ τῷ κέντρῳ τούτου.

Ἐὰν ἡ δασύτης δ εἶναι σταθερὰ ἔχομεν

$$V = \frac{4}{3}\pi\delta\,\frac{r_1^3 - r_0^3}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Τὰς ἰσοστάθμους ἐπιφανείας ὁρίζει ἡ σχέσις

$$a = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ὥστε· αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι σφαῖραι ὁμόκεντροι τῷ στρώματι·

Ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου C ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι

$$X = -\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{M}{a^2} \dots\dots\dots\dots (5)$$

ἴση δηλαδὴ τῇ ἕλξει, ἣν θὰ ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου μάζα ἴση τῇ τοῦ στρώματος συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον τούτου (123).

154.α Ὑποθέσωμεν 2ον $a<r_0<r$

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ σχέσις (154.2) δίδει

$$V = \frac{2\pi}{a}\int_{r_0}^{r_1}\delta r[a+r+a-r]dr = 4\pi\int_{r_0}^{r_1}\delta r dr$$

Τὸ δυναμικὸν εἶναι οὕτω ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου c, καὶ ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ στρώματος ἕλξις ἴση τῷ μηδενὶ (123).

Ἐὰν ἰδίᾳ ὑποθέσωμεν τὴν δασύτητα δ σταθεράν, ἔχομεν

$$V = 2\pi\delta(r_1^2 - r_0^2)$$

154.β. Ὑποθέσωμεν 3ον ὅτι τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ στρώματος ($r_0<a<r_1$)

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀναλύομεν τὸ στρῶμα εἰς δύο ἄλλα, ὧν τὸ μὲν ὁρίζουσιν αἱ σφαῖραι (r_0) καὶ (a), τὸ δὲ αἱ (a) καὶ (r_1)· διὰ τὸ πρῶτον ἔχομεν (154)

$$V_0 = \frac{2\pi}{a}\int_{r_0}^{a} 2\delta r^2 dr$$

καὶ διὰ τὸ δεύτερον (154.α)

$$V_1 = 4\pi\int_a^{r_1}\delta r dr$$

ὅθεν καὶ (147)

$$V = V_0+V_1 = 4\pi\left|\frac{1}{a}\int_{r_0}^a \delta r^2 dr + \int_a^{r_1}\delta r dr\right|$$

ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ δασύτης δ εἶναι σταθερὰ ἔχομεν

$$V = 2\pi\delta\left|r_1^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{r_0^3}{a}\right|$$

Τὴν ἐπὶ τοῦ σημείου ἐξασκουμένην ἕλξιν ἔχομεν ἐνταῦθα διὰ τῆς σχέσεως

$$X = -\frac{\partial V}{\partial a} = +\frac{1}{a^2}\int_{r_0}^a 4\pi\delta r^2 dr - \frac{1}{a}4\pi\delta' a^2 + 4\pi\delta' a = \frac{M'}{a^2}$$

ἔνθα δ' ἐμφαίνει τὴν δασύτητα ἐν τῇ διὰ τοῦ C διερχομένῃ σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ καὶ M' τὴν ὑπὸ τῆς σφαίρας ταύτης καὶ τῆς r_0 περιεχομένην μάζαν· οὕτω.

Τὸ ἐκτὸς τοῦ σημείου κείμενον μέρος τοῦ στρώματος οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τούτου ἕλξιν, ἐνῷ τὸ ἕτερον τμῆμα ἕλκει τὸ σημεῖον ὡς εἰ ἅπασα ἡ μάζα τούτου ἦτο συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον τοῦ στρώματος (123).

155. Ἐὰν ἀντὶ τῆς σχέσεως (150.5) μεταχειρισθῶμεν τὴν (151.7)

$$V = \frac{\delta}{2}\int \text{συν}\alpha\, d\omega$$

ἵνα ὑπολογίσωμεν τὸ δυναμικὸν τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος, δέον νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ὁριζουσῶν τὸ στρῶμα σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$d\omega = r_1^2\, \text{ημ}\theta\, d\theta\, d\mu$$

καὶ

$$a\,\text{συν}\theta - r_1 = \rho\,\text{συν}(\pi-\alpha) = -\rho\,\text{συν}\alpha = -\text{συν}\alpha\sqrt{a^2+r_1^2-2ar_1\text{συν}\theta}$$

ὅθεν

$$\text{συν}\alpha = \frac{r_1 - a\,\text{συν}\theta}{\sqrt{a^2+r_1^2-2ar_1\text{συν}\theta}}$$

διὰ τὴν ἐσωτερικὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἔχομεν

$$d\omega = r_0^2\,\text{ημ}\theta\, d\theta\, d\mu \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\alpha = \frac{a\,\text{συν}\theta - r_0}{\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\text{συν}\theta}}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω ἐκφράσει τοῦ δυναμικοῦ ἔχομεν

$$V = \frac{\delta}{2}\left| r_1^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_1 - a\,\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta}{\sqrt{a^2+r_1^2-2ar_1\text{συν}\theta}}\, d\theta d\mu - r_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0 - a\,\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta}{\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\text{συν}\theta}}\, d\theta d\mu \right|$$

ἢ

$$V = \frac{\delta}{2}[r_1^2 A_1 - r_0^2 A_0]$$

ἔνθα τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα ἐπεκτείνεται ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ στρώματος, καὶ τὸ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐκτελοῦντες τὰς ἄνω ὁλοκληρώσεις ἔχομεν

$$r_1^2 A_1 = \frac{2\pi}{3a}\left|(2r_1^2 - a^2 - ar_1\text{συν}\theta)\sqrt{r_1^2+a^2-2ar_1\text{συν}\theta}\right|_0^{\pi}$$

$$r_1^2 A_1 = \frac{2\pi}{3a}\left|(2r_1^2 - a^2 + ar_1)\sqrt{r_1^2+2ar_1+a^2} - (2r_1^2 - a^2 - ar_1)\sqrt{r_1^2-2ar_1+a^2}\right|$$

ὅπου αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες πρέπει νὰ ἦναι πάντοτε θετικαί.

Ἐὰν $a<r_1$ ἔχομεν

$$\sqrt{r_1^2-2ar_1+a^2} = (r_1 - a) \quad \text{καὶ} \quad r_1^2 A_1 = 4\pi\left|r_1^2 - \frac{a^2}{3}\right|$$

Ἐὰν $a > r_1$ ἔχομεν

$$\sqrt{r_1^2 - 2ar_1 + a^2} = (a - r_1) \quad \text{καὶ} \quad r_1^2 A' = \frac{8}{3}\pi \frac{r_1^3}{a}$$

Διὰ τὸ ἀναγόμενον εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν ὁλοκλήρωμα θὰ εἴχομεν ἐπίσης

$$r_0^2 A_0 = 4\pi \left| r_0^2 - \frac{a^3}{3} \right| \quad \text{ἐὰν} \quad a < r_0$$

καὶ

$$r_0^2 A'_0 = \frac{8}{3}\pi \frac{r_0^3}{a} \quad \text{ἐὰν} \quad a > r_0$$

ὥστε ὅταν τὸ σημεῖον C κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας $(a > r_1 > r_0)$ τὸ δυναμικὸν εἶναι (154.4)

$$V = \frac{4}{3}\delta \frac{\pi}{a}(r_1^3 - r_0^3)$$

ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ στρώματος $r_1 > a > r_0$ (154.β)

$$V = 2\delta\pi \left| r_1^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{2r_0^3}{3a} \right|$$

ὅταν τέλος τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τῆς ἐσωτερικῆς σφαίρας $a < r_0 < r_1$ καὶ

$$V = 2\delta\pi(r_1^2 - r_0^2)$$

δυναμικὸν σφαιρικὸν

156. Ἐὰν ἀντὶ σφαιρικοῦ στρώματος νοήσωμεν πλήρη σφαῖραν ἀκτῖνος r καὶ ὁμογενῆ, ἔχομεν $r_0 = 0$ $r_1 = r$ καὶ τὰ ἄνω εὑρεθέντα ἀποτελέσματα δίδουσι διὰ τὰ ἐκτὸς τῆς σφαίρας κείμενα σημεῖα (154)

$$V = \frac{M}{a} = \frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

διὰ τὰ ἐντὸς αὐτῆς κείμενα σημεῖα (154.β)

$$V = 2\pi\delta \left| r^2 - \frac{a^2}{3} \right| \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι ἐὰν θέσωμεν $a = r$ αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) συμπίπτουσι.

157. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας νοήσωμεν τρεῖς ἄξονας συντεταγμένων $o(x\ y,z)$ οὕτως ὥστε

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

καὶ ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον (x,y,z) ἐκτὸς τῆς σφαίρας ἔχομεν τοὺς πρώτους διαφορικοὺς συντελεστὰς

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^3}x \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^3}y \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^3}z \quad \dots \quad (1)$$

ἐὰν τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4}{3}\delta\pi x \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4}{3}\delta\pi y \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\delta\pi z \quad \dots\dots \quad (1')$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἔνθα $a = r$ αἱ σχέσεις (1) καὶ (1') συμπίπτουσι.

Τοὺς δευτέρους διαφορικοὺς συντελεστὰς ἔχομεν ἐπίσης, ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, διὰ τῶν σχέσεων

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^5}(a^2 - 3x^2) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^5}(a^2 - 3y^2)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^5}(a^2 - 3z^2) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας οἱ αὐτοὶ συντελεσταὶ εἶναι·

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi \quad \dots\dots \quad (2')$$

καὶ βλέπομεν ἐνταῦθα ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἔνθα $a = r$ αἱ ὑπὸ τῶν σχέσεων (2) καὶ (2') διδόμεναι τιμαὶ δὲν συμπίπτουσιν· ὥστε, *οἱ δεύτεροι διαφορικοὶ συντελεσταὶ μεταβάλλονται ἀποτόμως κατὰ τὴν διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διάβασιν τοῦ σημείου (x,y,z).*

Ἐὰν ἀθροίσωμεν τοὺς διὰ τῶν σχέσεων (2) διδομένους συντελεστὰς ἔχομεν

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\delta\pi\frac{r^3}{a^5}[3a^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)] = 0 \quad \dots \quad (3)$$

ἐνῷ οἱ διὰ τῶν σχέσεων (2') διδόμενοι συντελεσταὶ δὲν πληροῦσι τὴν θεμελιώδη σχέσιν (3)· ἀθροιζόμενοι τῷ ὄντι δίδουσι

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\delta \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3')$$

ὥστε ἡ θεμελιώδης σχέσις (150.8), ἣν εὕρομεν ἀνωτέρω δι' οἵας δήποτε μάζας, ὑφίσταται μόνον ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ σημεῖον (x,y,z) ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν τὸ δυναμικὸν κεῖται ἐκτὸς τῆς μάζης εἰς ἣν ἀναφέρεται τοῦτο.

158. Ἴδωμεν ἤδη ἂν ἡ σχέσις (157.3') ἣν εὕρομεν ἀνωτέρω διὰ τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ σημεῖον (x,y,z) ἀνήκει εἰς τὴν ἕλκουσαν μάζαν, ὑφίσταται, οἵα δήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ μάζα εἰς ἣν ἀναφέρεται τὸ δυναμικόν.

Δυνάμεθα πρὸς τοῦτο, ὑποθέτοντες τὴν περὶ ἧς πρόκειται μάζαν ὁμογενῆ, νὰ νοήσωμεν περὶ τὸ σημεῖον(x,y,z) σφαῖραν ἀκτῖνος r περιλαμβάνουσαν τὸ σημεῖον τοῦτο· ἡ σφαῖρα αὕτη χωρίζει τὴν μάζαν εἰς δύο ἄλλας ὧν τὰ δυναμικὰ παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) εἶναι V_1 καὶ V_2 πληροῦντα τὴν σχέσιν

$$V = V_1 + V_2$$

ὅθεν διαφοροῦντες δὶς καὶ προσθέτοντες

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\left|\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right|+\left|\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right|$$

ἀλλ' ἐκ τῶν προηγουμένων (157.3 καὶ 3')

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}=-4\pi\delta$$

ἐξίσωσις τοῦ Poisson ὥστε

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\delta$$

158. α. Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας, ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν σχέσεων (151.7), αἵτινες δίδουσι

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\delta}{2}\int\frac{\partial^2(\text{συν}\alpha)}{\partial x^2}d\omega,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\delta}{2}\int\frac{\partial^2(\text{συν}\alpha)}{\partial y^2}d\omega,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\delta}{2}\int\frac{\partial^2(\text{συν}\alpha)}{\partial z^2}d\omega$$

ἔχομεν δὲ (153.2)

$$\frac{\partial^2(\text{συν}\alpha)}{\partial x^2}=\frac{3(\xi-x)^2-r^2}{r^4}\text{συν}\alpha-2a\frac{\xi-x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2(\text{συν}\alpha)}{\partial y^2}=\frac{3(\eta-y)^2-r^2}{r^4}\text{συν}\alpha-2b\frac{\eta-y}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2(\text{συν}\alpha)}{\partial z^2}=\frac{3(\zeta-z)^2-r^2}{r^4}\text{συν}\alpha-2c\frac{\zeta-z}{r^3}$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες καὶ προσθέτοντες

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}=-\frac{\delta}{2}\int\frac{2}{r^3}[a(\xi-x)+b(\eta-y)+c(\zeta-z)]d\omega$$

$$=-\delta\int\frac{\text{συν}\alpha}{r^2}d\omega$$

ἀλλὰ (151.5.6)

$$\frac{\text{συν}\alpha}{r^2}d\omega=\pm d\sigma$$

ἔνθα τὸ $d\sigma$ δέον νὰ ληφθῇ τοσάκις, ὅσα στοιχεῖα $d\omega$ ὁρίζει ἐπὶ τῆς

ἐπιφανείας τοῦ σώματος ὁ στοιχειώδης κῶνος, οὗ στερεὰ γωνία εἶναι ἡ $d\sigma$· ἔχομεν λοιπόν.

1ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐκτὸς τῆς ἑλκούσης μάζης

$$-\delta\int\frac{\text{συν}\alpha}{r^2}d\omega=-\delta\int(-1+1-1+1-\ldots)d\sigma$$

ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν παρενθέσει ὅρων εἶναι ἄρτιος καὶ ἡ τιμὴ ταύτης ἴση τῷ μηδενί· ὥστε

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\delta\int\frac{\text{συν}\alpha}{r^2}d\omega=0\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον (x,y,z) ἀνήκῃ εἰς τὴν ἕλκουσαν μάζαν, ἔχομεν

$$-\delta\int\frac{\text{συν}\alpha}{r^2}d\omega=-\delta\int(1-1+1-1+1-\ldots)d\sigma$$

ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν παρενθέσει ὅρων εἶναι περιττὸς καὶ ἡ τιμὴ ταύτης ἴση τῇ μονάδι· ὥστε

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\delta\int\frac{\text{συν}\alpha}{r^2}d\omega=-4\pi\delta$$

ἡ τελευταία αὕτη σχέσις ὑφίσταται οὕτω διὰ πᾶσαν ὁμογενῆ μάζαν· εὐκόλως δὲ δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι αὕτη γενική, ὑφισταμένη καὶ διὰ τὰς μὴ ὁμογενεῖς μάζας.

159. Εφαρμογαι. Εὑρεῖν τὸ δυναμικὸν σφαιρικοῦ στρώματος (r_0, r_1) συγκειμένου ἐξ ὁμογενῶν στρωμάτων, ὧν ἡ πυκνότης εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος r. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ὡς ἐκ τῆς συμμετρίας ἣν παρουσιάζει ἡ σφαῖρα, τὸ δυναμικὸν παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) θὰ εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀποστάσεως a τοῦ σημείου (x,y,z) ὥστε

$$V=\varphi(a) \qquad \text{ἔνθα } a^2=x^2+y^2+z^2$$

ἡ συνάρτησις $\varphi(a)$ πληροῖ τὴν σχέσιν

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\delta$$

ἔχομεν δὲ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cdot\frac{x}{a} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2-x^2}{a^3}\frac{\partial\varphi}{\partial a}$$

ὑπολογίζοντες διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου καὶ τοὺς δύο ἄλλους διαφορικοὺς συντελεστὰς καὶ προσθέτοντες, ἔχομεν

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{3a^2-(x^2+y^2+z^2)}{a^3}$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a}$$

οὕτω, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον (x,y,z) ἐκτὸς τοῦ στρώματος $(a>r_1)$ ἢ ἐν τῷ κοίλῳ χώρῳ ὃν περικλείει τοῦτο $(a<r_0)$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}=-\frac{2}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a} \quad \text{ἢ τέλος} \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}\right|:\left|\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|=-\frac{2}{a}$$

ἥτις ὁλοκληρουμένη δίδει

$$\lambda o\gamma\,\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-2\lambda o\gamma a+\lambda o\gamma\sigma=\lambda o\gamma\sigma-\lambda o\gamma a^2=\lambda o\gamma\frac{\sigma}{a^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a}=\frac{\sigma}{a^2}$$

ὅθεν

$$\varphi=\frac{\sigma}{a}+k$$

ἔνθα σ καὶ k εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, ἃς θὰ προσδιορίσωμεν ἤδη.

159. *α*. Ὑποθέσωμεν πρῶτον $a<r_0$· εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας $(a=0)$ ἡ ἕλξις εἶναι προφανῶς ἴση τῷ μηδενὶ καὶ τό δυναμικὸν ἔχει σταθερὰν τιμὴν καὶ πεπερασμένην· συμπεραίνομεν οὕτω ὅτι $\sigma=0$·
τὸ δυναμικὸν ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος περικλειομένῳ χώρῳ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῇ σταθερᾷ

$$k=4\pi\int_{r_0}^{r_1}\delta\rho d\rho=\mathrm{V}$$

159. *β*. Ὑποθέσωμεν δεύτερον $a>r_1$· ἐὰν εἰς τὴν ἄνω σχέσιν θέσωμεν $a=\infty$ ἔχομεν $V_\infty=k$· ἀλλὰ παρὰ τῷ σημείῳ $(a=\infty)$ τὸ δυναμικὸν εἶναι προφανῶς ἴσον τῷ μηδενί, ὥστε $k=0$ καὶ τὸ δυναμικὸν ἐκτὸς τῆς σφαίρας εἶναι

$$\mathrm{V}=\frac{\sigma}{a}$$

ὑπολογίζομεν δὲ τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς σ παρατηροῦντες ὅτι, ἐὰν καλέσωμεν ρ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου (x,y,z) ἀπὸ σημείου τινὸς τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος, ἔχομεν

$$a+r_1>\rho>a-r_1 \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{1}{a-r_1}>\frac{1}{\rho}>\frac{1}{a+r_1}$$

ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ δdm

$$\frac{\delta dm}{a-r_1}>\frac{\delta dm}{\rho}>\frac{\delta dm}{a+r_1}$$

καὶ ἀθροίζοντες τὰς ἀναλόγους ἀνισότητας

$$\frac{\int\delta dm}{a-r_1}>\int\frac{\delta dm}{\rho}>\frac{\int\delta dm}{a+r_1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{M}{a-r_1}>\mathrm{V}>\frac{M}{a+r_1}$$

ἔνθα M παριστᾷ τὴν ὅλην μάζαν τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος.
Ἐὰν ἀντὶ τοῦ V ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμήν του $\frac{\sigma}{a}$ ἔχομεν

$$\frac{M}{a-r_1}>\frac{\sigma}{a}>\frac{M}{a+r_1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{1-\frac{r_1}{a}}>\frac{\sigma}{M}>\frac{1}{1+\frac{r_1}{a}}$$

ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν $a=\infty$ ἔχομεν $\sigma=M$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ ἐκτὸς τῆς σφαίρας εἶναι οὕτω (154.3)

$$\mathrm{V}=\frac{M}{a}$$

159. *γ*. Ἐὰν τὸ σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐντὸς τοῦ στρώματος ἡ ἐξίσωσις (150.8) τοῦ Laplace ἀντικαθίσταται διὰ τῆς ἐξισώσεως (158) τοῦ Poisson

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a}=\frac{1}{a^2}\frac{d}{da}\left|a^2\frac{d\varphi}{da}\right|=-4\pi\delta$$

ὅθεν

$$\left|a^2\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{r_0}^{a}=-\int_{r_0}^{a}\delta 4\pi a^2 da$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ $a^2\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ διὰ $a=r_0$ εἶναι ἴση τῷ μηδενί, ἔχομεν

$$a^2\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-\int_{r_0}^{a}\delta.4\pi a^2da=M' \quad \text{ἢ} \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial a}=\frac{M'}{a^2}$$

ἔνθα M' εἶναι ἡ μάζα τοῦ στρώματος(r_0,a), καὶ ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἄνω περιπτώσεων, ἔνθα ἀντὶ τοῦ στρώματος (r_0,r_1) ἔχομεν τὸ (r_0,a).

160. Ὡς δεύτερον παράδειγμα θὰ λάβωμεν ἀπεριόριστον κυλινδρικὸν στρῶμα (r_0,r_1) συγκείμενον ἐξ ὁμογενῶν στρωμάτων, ὧν ἡ πυκνότης εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος r τοῦ στρώματος· ὡς ἄξονα τῶν z θὰ λάβωμεν τὸν τοῦ κυλινδρικοῦ στρώματος, καὶ τὸ ἐπίπεδον (x,o,y) διὰ τοῦ σημείου (x,y). δυναμικὸν κυλινδρικοῦ στρώματος

Τὸ δυναμικὸν V εἶναι ἁπλῶς συνάρτησις $\varphi(r)$ τῆς ἀποστάσεως

$$a=\sqrt{x^2+y^2}$$

τοῦ σημείου (x,y) ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου καὶ ἀνεξάρτητον τοῦ z· ἔχομεν οὕτω

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cdot\frac{x}{a} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{a^2-x^2}{a^3}$$

παρατηροῦντες δέ, ὅτι

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

ἔχομεν προσθέτοντες τὰς ὁμοίας σχέσεις

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a}$$

ὑποθέσωμεν 1ον $a<r_0$ ἔχομεν

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0 \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}:\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-\frac{1}{a}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\text{λογ}\,\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-\text{λογ}\,a+\text{λογ}\,\sigma=\text{λογ}\,\frac{\sigma}{a} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a}=\frac{\sigma}{a} \;..\; (1)$$

ἔνθα σ εἶναι σταθερὰ ποσότης· τὴν τιμὴν τοῦ δυναμικοῦ παρά τινι σημείῳ τοῦ ἄξονος oz ἔχομεν θέτοντες $a=0$· ἀλλὰ τότε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=\infty$$

ὅπερ ἀδύνατον· δέον λοιπὸν νὰ ἔχωμεν $\sigma=0$ καὶ βλέπομεν, ὅτι

Τὸ κυλινδρικὸν στρῶμα οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἕλξιν ἐπὶ τῶν ἐν τῷ χώρῳ, ὃν περικλείει τοῦτο, κειμένων σημείων.

Ἐὰν τὸ σημεῖον ἀνήκῃ εἰς τὴν μάζαν τοῦ στρώματος ($r_0<a<r_1$) ἔχομεν

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a}=\frac{1}{a}\frac{d}{da}\left|a\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|=-4\pi\delta \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{d}{da}\left|a\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|=-4\pi\delta a$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-4\pi\int_{r_0}^{a}\delta a\,da \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a}=-\frac{4\pi}{a}\int_{r_0}^{a}\delta a\,da$$

ἔνθα παρελήφθη ἡ σταθερὰ τοῦ πρώτου μέλους διότι $\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0$ διὰ $a=r_0$

ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ στρώματος ($a=r_1$) ἔχομεν

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-\frac{4\pi}{a}\int_{r_0}^{r_1}\delta a\,da \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

ὑποθέσωμεν τέλος $a>r_1$ ἔχομεν τὴν σχέσιν (1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=\frac{\sigma}{a}$$

ἢ ὡς ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν

$$\sigma=-4\pi\int_{r_0}^{r_1}\delta a\,da$$

καὶ ἂν ὑποθέσωμεν τὴν μάζαν ὁμογενῆ ἔχομεν

$$\sigma=-4\pi\delta\int_{r_0}^{r_1}a\,da=-2\pi\delta(r_1^2-r_0^2)$$

ὅθεν ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου ἐξασκουμένη ἕλξις

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial a}=2\pi\delta\,\frac{r_1^2-r_0^2}{a}=2\pi\delta\,\frac{r_1+r_0}{a}(r_1-r_0)$$

161. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς r_0 τείνει πρὸς τὴν r_1 αὐξάνει δὲ ἡ δ οὕτως ὥστε τὸ γινόμενον $\delta(r_1-r_0)=\delta dr$ νὰ διατηρήσῃ πεπερασμένην τιμὴν τὴν γ· τὸ κυλινδρικὸν στρῶμα ἀντικαθίσταται ὑπὸ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν

$$2\pi\delta\,\frac{r_1^2-r_0^2}{a}=2\pi\,\frac{r_1+r_1}{a}\delta(r_1-r_0)=4\pi\delta\,\frac{r_1}{a}dr=4\pi\gamma\,\frac{r_1}{a} \;..\; (1)$$

καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι r_1 τείνει πρὸς τὸ μηδέν, αὐξάνει δὲ τὸ γ οὕτως ὥστε τὸ γινόμενον $2\pi r_1\gamma$ νὰ διατηρήσῃ πεπερασμένην τιμὴν τὴν k, ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἀντικαθίσταται ὑπὸ ἀπεριορίστου εὐθείας, ἥτις ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν

$$\frac{2k}{a} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Οὕτω. *Ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ στρώματος ἕλξις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ ὁ ἄξων τοῦ στρώματος, ἐφ' οὗ ὑποθέτομεν συγκεντρωμένην τὴν ὅλην μάζαν αὐτοῦ.*

Ἐκ τῆς σχέσεως (160.1) πορίζόμεθα

$$\varphi=V=\frac{\sigma}{2}\text{λογ}\,a^2=\frac{\sigma}{2}\text{λογ}(x^2+y^2)$$

ὅπερ καλοῦσι *λογαριθμικὸν δυναμικόν*. λογαριθμικὸν δυναμικὸν

Τὰς συνιστώσας τῆς ἕλξεως παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ἔχομεν ἐν ταῖς σχέσεσι

$$X=\frac{\sigma x}{x^2+y^2} \qquad Y=\frac{\sigma y}{x^2+y^2}$$

Δυναμικὸν μάζης διανεμημένης ἐπὶ ἐπιφανείας.

162. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἡ μάζα, ἧς ἐθεωρήσαμεν τὸ δυναμικὸν δὲν πληροῖ χῶρον, ἀλλ' εἶναι διανεμημένη ἐπὶ μαθηματικῆς τινος ἐπιφαδυναμικὸν σφαιρικῆς ἐπιφανείας

νείας· ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἀνωτέρω, καὶ ὡς παράδειγμα παραθέτομεν ἐνταῦθα τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ δυναμικοῦ μάζης ὁμοιομόρφως διανεμημένης μὲ πυκνότητα γ ἐπὶ σφαρικῆς ἐπιφανείας ἀκτῖνος r, παρὰ τῷ σημείῳ C κειμένῳ εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας (Σχ. 102)

Ἡ ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ζώνης ab διανεμημένη μάζα εἶναι

$$\gamma.2\pi a a_1.ab = 2\gamma\pi r \,\text{ἡμ}\theta.r d\theta = 2\pi\gamma r^2 \text{ἡμ}\theta d\theta$$

ὅλα δὲ τὰ στοιχεῖα ταύτης κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ρ ἀπὸ τοῦ σημείου C καὶ τὸ δυναμικὸν τῆς ζώνης παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ εἶναι

$$\frac{2\pi\gamma r^2 \text{ἡμ}\theta d\theta}{\rho}$$

τὸ δυναμικὸν τῆς ὅλης σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶναι

$$V = 2\pi\gamma r^2 \int \text{ημ}\theta \frac{d\theta}{\rho}$$

ἔχομεν δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ oca

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\,\text{συν}\theta \quad \text{ὅθεν} \quad \rho d\rho = ar\,\text{ἡμ}\theta d\theta \;\text{καὶ}\; \frac{\text{ἡμ}\theta d\theta}{\rho} = \frac{d\rho}{ar}.$$

τὸ δυναμικὸν τίθεται οὕτω ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$V = 2\pi\gamma\frac{r}{a}\int d\rho$$

Ἐὰν $a > r$ ἔχομεν $V = 2\pi\gamma \dfrac{r}{a} \displaystyle\int_{a-r}^{a+r} d\rho = 4\pi r^2 \dfrac{\gamma}{a} = \dfrac{M}{a} \ldots\ldots (1)$

ἔνθα M παριστᾷ τὴν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διανεμημένην ὅλην μάζαν. Οὕτω

Τὸ δυναμικὸν ὕλης διανεμημένης ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας παρά τινι σημείῳ ἐκτὸς τῆς σφαίρας κειμένῳ, ἰσοῦται τῷ δυναμικῷ μάζης ἴσης τῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διανεμημένῃ καὶ συγκεντρωμένης παρὰ τῷ κέντρῳ.

Ἐὰν $a < r$ ἔχομεν $V = 2\pi\gamma \dfrac{r}{a}\displaystyle\int_{r-a}^{r+a} d\rho = 2\pi\gamma\dfrac{r}{a}.2a = 4\pi r\gamma \ldots (2)$

οὕτω· ἐν τῷ ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περικεκλειομένῳ χώρῳ, τὸ δυναμικὸν τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης διανεμημένης ὕλης εἶναι σταθερὸν

162. α. Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα ἠδυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν καὶ ἐκ τοῦ δυναμικοῦ σφαιρικοῦ στρώματος, ὅπερ ὑπελογίσαμεν προηγουμένως (154)· εὕρομεν τῷ ὄντι, ὅτι

Ἐν τῷ ἐξωτερικῷ χώρῳ ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ τοῦ στρώματος εἶναι

$$V = \frac{4}{3}\delta\frac{\pi}{a}(r_1^3 - r_0^3) = \frac{4\pi}{3a}\delta(r_1 - r_0)(r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)$$

ἵνα ἀντικαταστήσωμεν ἤδη τὸ σφαιρικὸν στρῶμα διὰ τῆς ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διανεμημένης μάζης, δέον νὰ θέσωμεν

$$r_0 = r_1 = r \quad \text{καὶ} \quad \delta(r_1 - r_0) = \gamma \ldots\ldots\ldots (3)$$

τότε ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ εἶναι διὰ τὰ ἐκτὸς τῆς σφαίρας κείμενα σημεῖα

$$V = 4\pi r^2 \frac{\gamma}{a}$$

Ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ στρώματος περικλειομένῳ χώρῳ, τὴν τιμὴν τοῦ δυναμικοῦ εὕρομεν

$$V = 2\pi\delta(r_1^2 - r_0^2) = 2\pi\delta(r_1 - r_0)(r_1 + r_0)$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμάς (3) ἔχομεν διὰ τὸ σφαιρικὸν στρῶμα

$$V = 4\pi r\gamma$$

162. β. Τὴν ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ σημείου ἕλξιν ἔχομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$-\frac{dV}{da} = \frac{M}{a^2} = 4\pi r^2 \frac{\delta}{a^2} \;\text{ἐὰν}\; a > r$$

καὶ διὰ τῆς

$$-\frac{dV}{da} = 0 \qquad \text{ἐὰν} \qquad a < r$$

παραπλησίως τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ἐκτὸς ταύτης ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου c ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι

$$4\pi\delta$$

Ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας περικλειομένῳ χώρῳ καὶ εἰς μικρὰν ἀπὸ ταύτης ἀπόστασιν ἡ ἕλξις εἶναι

$$0$$

ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι

$$0 - 4\pi\delta = -4\pi\delta$$

162. γ. Τὸ δυναμικὸν τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος εὑρίσκομεν καὶ στοιχειωδῶς οὕτω· ἔχομεν (121), διὰ τὸ ἐντὸς τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος κείμενον σημεῖον C (Σχ, 102).. ἐμβαδὸν $ab = \dfrac{\overline{ca}^2}{\text{συν}\theta}$ καὶ τὸ δυναμικὸν αὐτοῦ $= \gamma\dfrac{ca}{\text{συν}\theta}d\sigma$ ἐμβαδὸν $a'b' = \dfrac{\overline{ca'}^2}{\text{συν}\theta}d\sigma$ καὶ τὸ δυναμικὸν αὐτοῦ $= \gamma\dfrac{ca'}{\text{συν}\theta}d\sigma$ ὥστε

$$V = \gamma(ca + ca')\frac{d\sigma}{\text{συν}\theta} = \gamma.2R\,\text{συν}\theta\frac{d\sigma}{\text{συν}\theta} = 2\gamma R d\sigma$$

καὶ $V = \int_0^{2\pi} 2\gamma R d\sigma = 2\gamma R \int_0^{2\pi} d\sigma = 4\pi\gamma R$

Τὸ δυναμικὸν τῶν ἐκτὸς τοῦ σφαιρικοῦ στρώματος κειμένων σημείων C εὑρίσκομεν ἤδη εὐκόλως· ἔστω τῷ ὄντι (Σχ. 102) C_1 τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ C ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν. Ἔχομεν $OC.OC_1 = R^2$ καὶ

$$\frac{ac}{ac_1} = \frac{a}{R} = \frac{R}{oc_1}$$

Τὸ δυναμικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ab παρὰ τῷ σημείῳ C_1 εἶναι

$$V_1 = \gamma \cdot \frac{ab}{c_1 a}$$

τὸ δυναμικὸν τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ παρὰ τῷ σημείῳ C εἶναι

$$V = \gamma \frac{ab}{ca}$$

ὥστε
$$\frac{V}{V_1} = \frac{c_1 a}{ca} = \frac{R}{a} \text{ καὶ } V = \frac{R}{a} V_1 = 4\pi\gamma\frac{R^2}{a}.$$

163. Τὸ δυναμικὸν μάζης διανεμημένης ἐπὶ ἐπιφανείας κέκτηται νέας ἰδιότητας, ἃς προτιθέμεθα νὰ ζητήσωμεν ἐνταῦθα· πρὸς τοῦτο θὰ ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον, καὶ τὴν ἐπ' αὐτῆς διανομὴν τῆς μάζης ὁμοιόμορφον.

Τὸ στοιχειῶδες ἐμβαδὸν $d\omega$ ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$d\omega = r d\lambda dr$$

καὶ ἡ ἀπόστασις r διὰ

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

ἔνθα ξ, η, ο εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ στοιχείου $d\omega$· ἡ δὲ ἀπόστασις ρ τοῦ σημείου (x,y,z) ἀπὸ τοῦ (ξ,η,ο) εἶναι

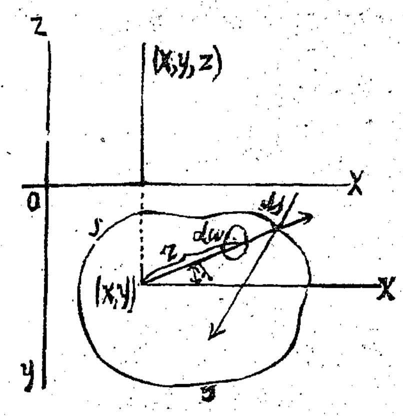
$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$

καὶ τὸ δυναμικὸν τῆς ἐπὶ τοῦ ἐμβαδοῦ Ω διανεμημένης μάζης παρὰ τῷ σημείῳ (xyz) εἶναι

$$V = \gamma \int \frac{d\omega}{\rho} = \gamma \int\int \frac{r dr d\lambda}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

ὅπου γ εἶναι ἡ πυκνότης τῆς ἐπὶ τοῦ ἐμβαδοῦ διανεμημένης μάζης. Ἡ ὁλοκλήρωσις ὡς πρὸς τὸ r δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἀμέσως, ἀλλὰ τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων θὰ ληφθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶναι

διάφορα ὅταν ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἕλκοντος ἐμβαδοῦ προβολὴ τοῦ σημείου (x,y,z) κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου. Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ προβολὴ αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἕλκοντος ἐμβαδοῦ καὶ τότε ἡ ἀκτὶς r συναντᾷ τὴν ὁρίζουσαν τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο γραμμὴν εἰς ἓν ἢ πλείονα σημεῖα περιττὰ τὸν ἀριθμόν, καὶ κείμενα εἰς ἀποστάσεις $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots$ ἀπὸ τοῦ σημείου (x,y,o) — ἔχομεν τότε



Σχ. 114.

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \left|\sqrt{r^2 + z^2}\right|_0^{r_1} + \left|\sqrt{r^2 + z^2}\right|_{r_2}^{r_3} + \left|\sqrt{r^2 + z^2}\right|_{r_4}^{r_5} + \ldots$$

$$= [-\sqrt{z^2} + \sqrt{z^2 + r_1^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2} + \sqrt{z^2 + r_3^2} - \ldots\ldots]$$

καὶ $V = \gamma \int_0^{2\pi} [-\sqrt{z^2} + \sqrt{z^2 + r_1^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2} + \ldots] d\lambda$

$$= -2\pi\gamma\sqrt{z^2} + \gamma\int_0^{2\pi} [\sqrt{z^2 + r_1^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2} + \sqrt{z^2 + r_3^2} - \ldots] d\lambda$$

ἐὰν ἤδη ἀντὶ τῆς $d\lambda$ λάβωμεν ὡς μεταβλητὴν τὴν ds ἔχομεν (151.5)

$$ds = mm' = \frac{mm''}{\text{συν}\alpha} = \frac{r_1 d\lambda}{\text{συν}\alpha}$$

ὅθεν
$$r_1 d\lambda = ds\,\text{συν}\alpha$$

ἢ
$$d\lambda\sqrt{r_1^2 + z^2} = \frac{\text{συν}\alpha}{r_1} ds \sqrt{r_1^2 + z^2}$$

ἔκφρασις ἐφαρμόσιμος εἴτε ἐξέρχεται τοῦ ἐμβαδοῦ εἴτε εἰσέρχεται ἐν αὐτῷ ἡ ἀκτὶς r_1· ὅθεν ἀντικαθιστῶντες

$$V = -2\pi\gamma\sqrt{z^2} + \gamma\int_0^s \frac{\text{συν}\alpha\sqrt{r^2 + z^2}}{r} ds \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ἔνθα τὸ ὁλοκλήρωμα θὰ ληφθῇ ἐφ' ἁπάσης τῆς περιμέτρου τοῦ ἕλκοντος ἐμβαδοῦ.

Ζητήσωμεν ἤδη τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς τοῦ δυναμικοῦ·

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\gamma\frac{z}{\sqrt{z^2}} + \gamma z \int_0^s \frac{\text{συν}\alpha}{r\sqrt{r^2 + z^2}} ds$$

ἔνθα τὸ κλάσμα $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ ἰσοῦται τῷ $+1$ ἐὰν z εἶναι θετικὸν καὶ -1 ἐὰν z εἶναι ἀρνητικόν.

Ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον (x,y,z) πολὺ πλησίον τοῦ ἐμβαδοῦ Ω· τὸ ὕψος z τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ εἶναι θετικὸν μὲν ἐὰν εὑρίσκηται ὑπεράνω τοῦ ἐμβαδοῦ, ἀρνητικὸν δὲ ἐὰν εὑρίσκηται κάτωθι τούτου. Ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ διαφορικοῦ συντελεστοῦ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ z, ἐνῷ ὁ πρῶτος τείνει πρὸς τὸ ὅριον $-2\pi\gamma$ ἐὰν τὸ z εἶναι θετικὸν καὶ $+2\pi\gamma$ ἐὰν τὸ z εἶναι ἀρνητικόν· οὕτω

$$\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{+0} = -2\pi\gamma \quad \text{καὶ} \quad \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{-0} = 2\pi\gamma$$

ὅθεν καὶ

$$\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{+0} - \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{-0} = -4\pi\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

κατὰ τὴν διὰ τοῦ ἕλκοντος ἐμβαδοῦ διάβασιν τοῦ σημείου (x,y,z) ἡ συνιστῶσα τῆς ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένης ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἕλξεως, καθέτως τῷ ἐμβαδῷ τούτῳ, μετεβλήθη ἀποτόμως κατὰ $-4\pi\gamma$.

163.α. Ἐὰν ἤδη ἀντὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐμβαδοῦ, θεωρήσωμεν καμπύλην ἐπιφάνειαν οἱανδήποτε ἐφ' ἧς ὑπάρχει ὕλη ὁμοιομόρφως διανενεμημένη, καὶ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ἐπιφάνειαν ταύτην διὰ τοῦ σημείου (x,y,z), δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον συμπίπτει μετὰ τοῦ ἐφαπτομένου τῆς ἐπιφανείας ἐπιπέδου κατὰ τὸ σημεῖον (x,y,z). Ἐὰν καλέσωμεν V_1 καὶ V_2 τὰ δυναμικὰ τῶν δύο τούτων μερῶν ἔχομεν

$$V = V_1 + V_2$$

καὶ

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_2}{\partial n}$$

κατὰ τὴν διὰ τῆς ἐπιφανείας κάθετον διάβασιν τοῦ σημείου (x,y,z) ἔχομεν

$$\left|\frac{\partial V_1}{\partial n}\right|_{+0} - \left|\frac{\partial V_1}{\partial n}\right|_{-0} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \left|\frac{\partial V_2}{\partial n}\right|_{+0} - \left|\frac{\partial V_2}{\partial n}\right|_{-0} = -4\pi\gamma$$

ὥστε καὶ

$$\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{+0} - \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{-0} = -4\pi\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

βλέπομεν οὕτω ὅτι ἡ ἄνω σχέσις(163.2) ὑφίσταται καὶ διὰ τὰ καμ-

πύλα ἐμβαδὰ ἐφ' ὧν εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένη ἡ ἕλκουσα μᾶζα· ἀποδείκνυται δ' εὐκόλως, ὅτι ἡ αὐτὴ σχέσις εἶναι γενικὴ ὑφισταμένη καὶ ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ διανομὴ τῆς ὕλης δὲν εἶναι ὁμοιόμορφος.

Παρατηροῦντες δέ, ὅτι

$$\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{+0}$$

εἶναι ἡ ἕλξις ἣν ἐξασκεῖ ἡ ὅλη ἐπιφάνεια ἐπὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς κειμένου σημείου (x,y,z), δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἄνω σχέσιν (1) οὕτω.

Ἡ κάθετος τῇ ἐπιφανείᾳ συνιστῶσα τῆς ἕλξεως, ἣν ἐξασκεῖ ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης διανεμημένη μᾶζα ἐπὶ τοῦ σημείου (x,y,z) τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, εἶναι διάφορος ἐὰν τὸ σημεῖον ὑποτεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ, ἢ ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ μέρους τῆς ἐπιφανείας. Ἡ διαφορὰ δὲ αὕτη ἰσοῦται τῇ

$$4\pi\gamma$$

ἔνθα γ εἶναι ἡ κατὰ τὸ σημεῖον (x,y,z) πυκνότης.

163. β. Ἐκ τῆς αὐτῆς σχέσεως (163.1) ὑπολογίζομεν καὶ τοὺς διαφορικοὺς συντελεστὰς

$$\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial V}{\partial y}.$$

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

καὶ

$$\text{συν}\alpha = \frac{(\xi - x)\varphi + (\eta - y)\psi}{r}$$

ἔνθα (ξ,η) εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ στοιχειώδους τόξου ds, (φ,ψ) τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς καθέτου τούτῳ, καὶ r ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου x,y,o ἀπόστασις αὐτοῦ· διαφοροῦντες εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma\int\frac{\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}}\,ds \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\gamma\int\frac{\psi}{\sqrt{r^2+z^2}}\,ds$$

163. γ. Δυνάμεθα ἤδη εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $\frac{\partial V}{\partial l}$ κατὰ τὴν εὐθεῖαν l, ἧς τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα εἶναι μ,ν,θ· ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\,\text{συν}\mu + \frac{\partial V}{\partial y}\,\text{συν.}\nu + \frac{\partial V}{\partial z}\,\text{συν}\theta.$$

Ἐὰν ἰδίᾳ θεωρήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τούτου κατὰ τὴν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ἐμβαδοῦ διάβασιν τοῦ σημείου (x,y,z) ἔχομεν

$$\left|\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{+0}-\left|\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{-0}=\left[\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{+0}-\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{-0}\right]\text{συν}\mu$$
$$+\left[\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{+0}-\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{-0}\right]\text{συν.}\nu+\left[\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{+0}-\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{-0}\right]\text{συν}\theta$$

ἀλλ' οἱ συντελεσταὶ

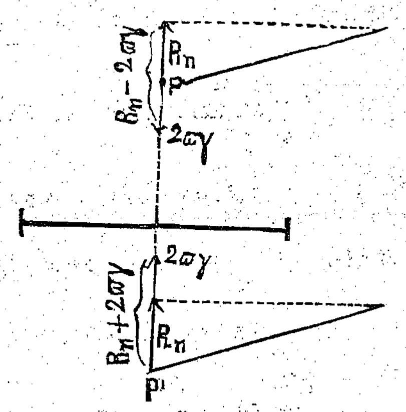
$$\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial V}{\partial y}$$

δὲν μεταβάλλονται ἀποτόμως κατὰ τὴν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ἐμβαδοῦ διάβασιν τοῦ σημείου (x,y,z) καὶ ἔχομεν οὕτω

$$\left|\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{+0}-\left|\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{-0}=-4\pi\gamma\,\text{συν}\theta$$

163. δ. Τὴν ἄνω θεμελιώδη πρότασιν (163.α) δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας.

Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κυκλικὸν ἐμβαδὸν ἀπειροστῆς ἀκτῖνος ρ, καὶ ἑκατέρωθεν τούτου ἐπὶ τῆς καθέτου δύο σημεῖα P καὶ P', ὧν αἱ μάζαι ἰσοῦνται τῇ μονάδι, καὶ εἰς ἀπόστασιν δ τῆς ἐπιφανείας ἀπειροστὴν ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ. Τὴν ἐπὶ τῶν σημείων P καὶ P' ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ἕλξιν δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν εἰς δύο, τὴν τοῦ κύκλου καὶ τὴν τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐπιφανείας. Ἡ τελευταία αὕτη R εἶναι προφανῶς ἡ αὐτὴ δι' ἀμφότερα τὰ σημεῖα P καὶ P', ἐνῷ ἡ τοῦ κύκλου (120.2) εἶναι $2\pi\gamma$ διὰ τὸ ἓν καὶ $-2\pi\gamma$ διὰ τὸ ἕτερον, ἔνθα γ εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας πυκνότης παρὰ τοῖς σημείοις P καὶ P'.



Σχ. 115.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν R_n τὴν κάθετον τῇ ἐπιφανείᾳ συνιστῶσαν τῆς ἕλξεως, ἡ ἐπὶ τοῦ P ἐξασκουμένη καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ ἕλξις εἶναι

$$R_n-2\pi\gamma$$

ἐνῷ ἡ ἐπὶ τοῦ P' ἐξασκουμένη εἶναι

$$R_n+2\pi\gamma$$

καὶ ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι

$$-4\pi\gamma$$

163. ε. Ἐν τῇ περιπτώσει μάζης διανεμημένης ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας λ. χ. οὐδεμίαν (121.α) ἐξασκεῖ αὕτη ἕλξιν ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν σημείων· ἡ ἐπὶ ἐξωτερικοῦ σημείου καὶ εἰς ἀπειροστὴν ἀπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀπόστασιν ἐξασκουμένη ὑπὸ ταύτης ἕλξις εἶναι κάθετος τῇ σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ καὶ ἔχει ἔντασιν

$$4\pi\gamma=4\pi\delta\varepsilon$$

ἔνθα ε εἶναι τὸ ἀπειροστὸν πάχος τοῦ στρώματος.

Ἐν τῇ περιπτώσει ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας, ἡ ἐπὶ τῶν ἐπ' αὐτῆς κειμένων σημείων ἐξασκουμένη ἕλξις εἶναι κάθετος τῇ ἐπιφανείᾳ καὶ ἔχει ἔντασιν

$$4\pi\delta\varepsilon$$

ἔνθα ε εἶναι τὸ ἀπειροστὸν πάχος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς στρώματος·

164. Ὑποθέσωμεν μάζαν m συγκεντρωμένην παρὰ τῷ σημείῳ 0 καὶ ἕτερον σημεῖον P, οὗτινος τὴν μάζαν ὑποθέτομεν ἴσην τῇ μονάδι. Ἔστω δὲ N ἡ καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ συνιστῶσα τῆς ἕλξεως, ἣν ἐξασκεῖ τὸ σημεῖον 0 ἐπὶ τοῦ σημείου P, ὑπολογιζομένη πρὸς τὰ ἔσω τῆς ἐπιφανείας. προτάσεις τοῦ Gauss

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἀντὶ ἑνὸς ἔχομεν ἄπειρα τοιαῦτα σημεῖα P καλύπτοντα ἐπιφάνειαν κλειστὴν πανταχόθεν, καὶ ἔστω $d\omega$ τὸ παρὰ τῷ σημείῳ P στοιχειῶδες ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ταύτης· λέγω ὅτι, *Ἐὰν τὸ σημεῖον 0 μάζης m κεῖται ἐν τῷ χώρῳ ὃν περικλείει ἡ θεωρηθεῖσα ἐπιφάνεια, τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα*

$$\int N d\omega$$

ἐπεκτεινόμενον ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας ἰσοῦται τῇ $4\pi m$. Ἐὰν τὸ αὐτὸ σημεῖον 0 κεῖται ἐκτὸς τοῦ χώρου, ὃν περικλείει ἡ θεωρηθεῖσα ἐπιφάνεια, τὸ αὐτὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα

$$\int N d\omega$$

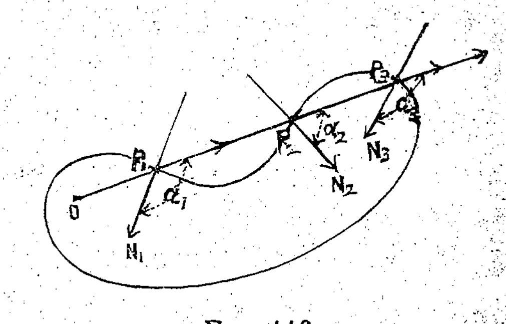
ἐπεκτεινόμενον ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας ἰσοῦται τῷ μηδενί.

1ον. Ἐὰν διὰ τοῦ 0 φέρωμεν ἀκτῖνα τὴν $0P$, τέμνει αὕτη τὴν ἐπιφάνειαν εἰς ἓν ἢ πλείονα σημεῖα $P_1 . P_2 . P_3$· αἱ ἐπὶ τῶν σημείων τούτων ἐξασκούμεναι ὑπὸ τοῦ σημείου 0 ἕλξεις εἶναι

$$\frac{m d\omega_1}{\overline{0P_1}^2} \qquad \frac{m d\omega_2}{\overline{0P_2}^2} \qquad \frac{m d\omega_3}{\overline{0P_3}^2} \ldots\ldots\ldots (1)$$

προτάσεις τοῦ Gauss

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν $d\sigma$ τὸ ἐμβαδόν, ὅπερ ὁρίζει ἐπὶ σφαίρας ἀκτῖνος ἴσης τῇ μονάδι ὁ διὰ τοῦ σημείου O καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ $d\omega$ ὁριζόμενος κῶνος ἔχομεν (151.5.6)



Σχ. 116.

$$d\omega_1 = -\frac{\overline{OP}_1^2 d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1}$$

$$d\omega_2 = \frac{\overline{OP}_2^2 d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_2} \qquad d\omega_3 = -\frac{\overline{OP}_3^2 d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_3} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ὥστε αἱ ἕλξεις (1) ἐκφράζονται καὶ οὕτω

$$-\frac{m d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1} + \frac{m d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_2} - \frac{m d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_3} \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

φέρονται δὲ αὗται κατὰ τὴν ἀκτῖνα OP πρὸς τὸ σημεῖον O· αἱ ἐπὶ τῶν καθέτων προβολαὶ τούτων (πρὸς τὰ ἔσω τῆς ἐπιφανείας) εἶναι

$$-\frac{m d\sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha_1}\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha_1) = +m d\sigma, \quad -m d\sigma, \quad +m d\sigma \ldots\ldots$$

ὥστε $\quad \int N d\omega = \int (m - m + m - m + \ldots\ldots) d\sigma$

Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον O ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας περικλειομένῳ χώρῳ, ἡ ἀκτὶς OP τέμνει ταύτην εἰς ἓν ἢ πλείονα σημεῖα, **περιττὰ τὸν ἀριθμόν**, καὶ τότε ἡ ὑπὸ τὸ σύμβολον $\int$ παρένθεσις ἰσοῦται μὲ m καὶ ἔχομεν

$$\int N d\omega = m \int d\sigma = 4\pi m \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ἐὰν ὅμως τὸ σημεῖον O κεῖται ἐντὸς τοῦ χώρου, ὃν περικλείει ἡ ἐπιφάνεια, τέμνεται αὕτη ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος OP εἰς δύο ἢ πλείονα σημεῖα, ἀλλ' ἄρτια τὸν ἀριθμόν· ἡ ὑπὸ τὸ σύμβολον $\int$ παρένθεσις μηδενίζεται λοιπὸν καὶ ἔχομεν

$$\int N d\omega = \int 0 d\sigma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ἐκ τῆς ἄνω προτάσεως συμπεραίνομεν ἀμέσως, ὅτι

Ἐὰν θεωρήσωμεν μάζαν M διανεμημένην ὅπως δήποτε ἐν τῷ διαστήματι, καὶ ἐπιφάνειαν περικλείουσαν μέρος M_1 τῆς μάζης ταύτης, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\int N d\omega = 4\pi M_1$$

ἔνθα N καὶ $d\omega$ ἔχουσιν ἣν καὶ προηγουμένως σημασίαν, καὶ τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα ἐπεκτείνεται ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας.

προτάσεις τοῦ Gauss

165. Ὥστε ὁσάκις κατὰ τὴν διάβασιν ἐπιφανείας τινὸς S ἐπέρχεται ἀπότομος μεταβολὴ ἐν τῇ καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ συνιστώσῃ τῆς ἑλκούσης δυνάμεως, συμπεραίνομεν, ὅτι ὑπάρχει ὕλη συγκεντρωμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης περὶ τὸ σημεῖον τῆς διαβάσεως· ἐὰν περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο νοήσωμεν κύλινδρον ἀποτελούμενον ἐκ καθέτων τῇ ἐπιφανείᾳ καὶ ὁρίζοντα ἐπὶ ταύτης ἐμβαδὰ ἀπειροστὰ $d\omega$, ἐφαρμόσωμεν δὲ εἰς τὴν κλειστὴν ἐπιφάνειαν τὴν ἀποτελουμένην ἐκ τοῦ κυλίνδρου καὶ τῶν ἐμβαδῶν $d\omega$ τὴν ἄνω πρότασιν τοῦ Gauss

$$\int N d\varepsilon = 4\pi m \quad \text{ἢ} \quad \int R\,\sigma\upsilon\nu(R,n) d\varepsilon = 4\pi m$$

ἐπειδὴ ἐνταῦθα αἱ κάθετοι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου κεῖνται ἐν τῷ ἐφαπτομένῳ τῆς ἐπιφανείας S ἐπιπέδῳ ἔχομεν δι' αὐτάς·

$$\sigma\upsilon\nu(R,n) = 0$$

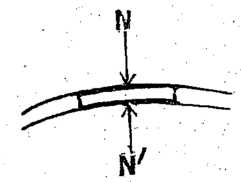
καὶ οἱ σχετικοὶ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος $\int N d\varepsilon$ μηδενίζονται, καὶ περιορίζεται τοῦτο ἁπλῶς εἰς τὰς βάσεις $d\omega$ τοῦ κυλίνδρου· ὥστε,

$$N d\omega - N' d\omega = 4\pi m$$

ὅθεν

$$N - N' = \frac{4\pi m}{d\omega} = 4\pi\delta$$

ὅπερ ἀπεδείξαμεν καὶ προηγουμένως (163.δ) ἀπ' εὐθείας.



Σχ. 117.

Παρὰ τῷ σημείῳ τῆς διαβάσεως ἡ πυκνότης εἶναι

$$\delta = \frac{N - N'}{4\pi}$$

166. Θεωρήσωμεν μάζας $M_1 M_2 M_3 \ldots\ldots$ συγκεντρωμένας παρὰ τοῖς σημείοις $P_1, P_2, P_3 \ldots$ καὶ $m_1, m_2, m_3 \ldots$ συγκεντρωμένας παρὰ τοῖς σημείοις $p_1, p_2, p_3 \ldots$ Ἔστωσαν $V_1\ V_2\ V_3 \ldots$ τὰ δυναμικὰ τοῦ συστήματος τῶν μαζῶν M παρὰ τοῖς σημείοις $p_1, p_2, p_3 \ldots$ καὶ $v_1, v_2, v_3 \ldots$ τὰ δυναμικὰ τοῦ συστήματος τῶν μαζῶν m παρὰ τοῖς σημείοις $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ ἔχομεν τὴν προφανῆ ταυτότητα

$$\Sigma M v = \Sigma m V$$

καὶ ἐὰν αἱ μάζαι M καὶ m εἶναι συνεχῶς διανεμημέναι ἐπὶ ἐπιφανείας τινός, ἢ κατέχουσι χῶρον συνεχῆ, τὰ σύμβολα Σ ἀντικαθίστανται διὰ τῶν $\int$.

Ὑποθέσωμεν ἰδίᾳ, ὅτι αἱ μάζαι m εἶναι συνεχῶς διανεμημέναι ἐπὶ

προτάσεις τοῦ Gauss

ἐπιφανείας μὲ πυκνότητα ἴσην τῇ μονάδι, καὶ ὅτι αἱ μάζαι M εἶναι διανεμημέναι ὅπως δήποτε ἐν τῷ χώρῳ.

Τὸ δυναμικὸν v εὕρομεν προηγουμένως (162.1) ἴσον τῷ

$$\mathrm{v} = \frac{4\pi r^2}{a}$$

εἰς τὸ ἐκτὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διάστημα, καὶ ἴσον (162.2) τῷ

$$4\pi r$$

εἰς τὸν ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περικλειόμενον χῶρον· καὶ ἔχομεν οὕτω δι' ὅλας τὰς ἐντὸς τῆς σφαίρας περιεχομένας μάζας, ὧν τὸ ἄθροισμα καλοῦμεν M_0

$$\Sigma M\mathrm{v} = \Sigma M.4\pi r = 4\pi r \Sigma M = 4\pi r M_0$$

διὰ δὲ τὰς ἐκτὸς τῆς σφαίρας κειμένας μάζας M, ὧν τὸ ἄθροισμα καλοῦμεν M

$$\Sigma M\mathrm{v} = \Sigma M.\frac{4\pi r^2}{a} = 4\pi r^2 \Sigma \frac{M}{a} = 4\pi r^2 \mathrm{V}_0$$

ἔνθα V_0 εἶναι τὸ δυναμικὸν τῆς ἐκτὸς τῆς σφαίρας κειμένης μάζης M παρὰ τῷ κέντρῳ ταύτης.

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τὴν σχέσιν διὰ τὴν ἐντὸς τῆς σφαίρας μάζαν M_0 ἔχομεν

$$\Sigma M\mathrm{v} = 4\pi r M_0 = \Sigma m \mathrm{V} = \int \mathrm{V} d\omega$$

ἔνθα $d\omega$ παριστᾷ στοιχειῶδες ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας· διὰ τὴν ἐκτὸς τῆς σφαίρας μάζαν M ἔχομεν

$$\Sigma M\mathrm{v} = 4\pi r^2 \mathrm{V}_0 = \int \mathrm{V} d\omega$$

καὶ λαμβάνοντες ὁμοῦ τὴν ὅλην μάζαν $M_0 + M$ ἔχομεν ἀθροίζοντες

$$\int \mathrm{V} d\omega = 4\pi[rM_0 + r^2 \mathrm{V}_0]$$

ὅθεν ἡ πρότασις

166. α. *Ἐὰν* V *παριστᾷ τὸ δυναμικὸν μάζης τινὸς M (διανεμημένης ὅπως δήποτε ἐν τῷ διαστήματι) παρά τινι σημείῳ ($d\omega$) σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀκτῖνος r, καὶ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα $\int \mathrm{V} d\omega$ ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἔχομεν τὴν σχέσιν*

$$\int \mathrm{V} d\omega = 4\pi[rM_0 + r^2 \mathrm{V}_0]$$

ἔνθα M_0 παριστᾷ τὸ ἐντὸς τῆς σφαίρας περιεχόμενον μέρος τῆς μάζης M, καὶ V_0 τὸ δυναμικὸν τοῦ ἐκτὸς τῆς σφαίρας κειμένου μέρους τῆς μάζης M παρὰ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας (Gauss).

Ἐὰν $M_0 = 0$ ἔχομεν ἁπλῶς

προτάσεις τοῦ Gauss

$$\int \mathrm{V} d\omega = 4\pi r^2 \mathrm{V}_0 \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{\int \mathrm{V} d\omega}{4\pi r^2} = \mathrm{V}_0$$

166, β. Τουτέστιν. *Ἡ μέση τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ μάζης M, κειμένης ἐκτὸς σφαίρας τινός, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἰσοῦται τῷ δυναμικῷ τῆς αὐτῆς μάζης M παρὰ τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας.*

ἢ ἄλλως· *Ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ μάζης M παρά τινι σημείῳ 0 ἰσοῦται τῇ μέσῃ τιμῇ τοῦ δυναμικοῦ τῆς αὐτῆς μάζης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας πυκνότητος ἴσης τῇ μονάδι, μὴ περικλειούσης οὐδὲν μέρος τῆς μάζης M καὶ ἐχούσης ὡς κέντρον τὸ σημεῖον 0.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δὲν εἶναι ἴσως ἄσκοπον νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο τοῦ Gauss εἶναι ἰσοδύναμον τῷ θεωρήματι τοῦ Laplace(150 8). Ἔστω τῷ ὄντι V_0 ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ τῆς μάζης M παρά τινι σημείῳ 0 ἐκτὸς αὐτῆς κειμένῳ· περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κέντρον φαντασθῶμεν σφαῖραν ἀπειροστῆς ἀκτῖνος καὶ ἔστωσαν x,y,z αἱ συντεταγμέναι σημείου τινος τῆς ἐπιφανείας ταύτης, καὶ V ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ τῆς μάζης M εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ Taylor ἔχομεν

$$\begin{aligned} \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 &+ \left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right|_0 x + \left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right|_0 y + \left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right|_0 z \\ &+ \tfrac{1}{2}\Big[\left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\right|_0 x^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}\right|_0 y^2 + \left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2}\right|_0 z^2 \\ &+ 2\left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x \partial y}\right|_0 xy + 2\left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y \partial z}\right|_0 yz + 2\left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z \partial x}\right|_0 zx \Big] \end{aligned}$$

Ἡ μέση τιμὴ τοῦ V ἐπὶ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μέσης τιμῆς ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἄνω σχέσεως.

Ἡ μέση τιμὴ τοῦ V_0 εἶναι V_0.

Ἡ μέση τιμὴ τῶν ὅρων x,y,z, xy, yz καὶ zx μηδενίζεται, διότι εἰς ἕκαστον θετικὸν ὅρον ἀντιστοιχεῖ ἕτερος ἴσος καὶ ἀρνητικός.

Ἡ μέση τιμὴ H τῶν x^2, y^2, z^2 εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς ἐκ τῆς συμμετρίας.

Ἡ μέση τιμὴ τοῦ V ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι οὕτω

$$\mathrm{V}_0 + \frac{H}{2}\left[\left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\right|_0 + \left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}\right|_0 + \left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2}\right|_0 \right]$$

ἀλλὰ κατὰ τὴν πρότασιν τοῦ Gauss ἡ αὐτὴ τιμὴ ἰσοῦται τῷ V_0· ὅθεν ἡ σχέσις τοῦ Laplace

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2} = 0$$

(J. Bertrand).

προτάσεις τοῦ Gauss

ὅθεν καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

167. *Ἐὰν τὸ δυναμικὸν V μαζῶν, διανεμημένων ὅπως δήποτε ἐν τῷ χώρῳ, ἔχει σταθερὰν τινὰ τιμὴν V_0 ἐν χώρῳ K, ἔνθα οὐδὲν μέρος τῆς θεωρουμένης μάζης ὑπάρχει, διατηρεῖ τοῦτο τὴν αὐτὴν τιμὴν V_0 ἐν ἅπαντι τῷ χώρῳ, ὃν δυνάμεθα νὰ καταλάβωμεν χωρὶς νὰ διέλθωμεν διὰ μέρους τινὸς τῆς θεωρουμένης μάζης* (Gauss).

Ὑποθέσωμεν τῷ ὄντι, ὅτι ἡ τιμὴ V τοῦ δυναμικοῦ ἐν χώρῳ τινὶ *A*, συνεχομένῳ τῷ *K* καὶ μὴ περιέχοντι μέρος τῆς μάζης, εἶναι διάφορος τῆς V_0· ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου 0 κειμένου ἐν τῷ χώρῳ *K* ὡς κέντρου γράψωμεν σφαίραν ἀκτῖνος *r*, περιεχομένην ἐν μέρει ἐν τῷ χώρῳ *K* καὶ ἐν μέρει ἐν τῷ χώρῳ *A* ἔχομεν

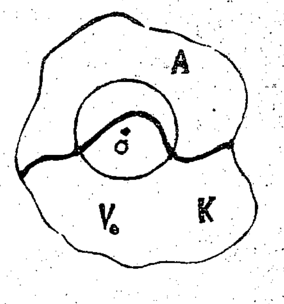
$$\int V d\omega = 4\pi r^2 V_0$$

ἔνθα τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπεκτείνεται ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· ὅθεν καὶ

$$\int (V - V_0) d\omega = 0$$

ὅπερ ἀδύνατον ἀφοῦ διὰ τὸ ἐκτὸς τοῦ χώρου *K* μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔχομεν καθ' ὑπόθεσιν

$$V = V_1 \gtrless V_0$$



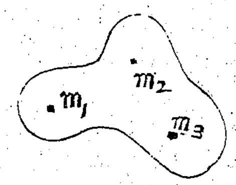
Σχ. 118.

ἵνα ἡ ἄνω σχέσις (166.α) ἣν ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ἀληθεύῃ, δέον λοιπὸν νὰ ἔχωμεν $V_1 = V_0$ καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

167. α. Θεωρήσωμεν σύστημα μαζῶν $m_1\ m_2 \ldots$ ἃς χωρίζομεν τοῦ ἐξωτερικοῦ χώρου δι' ἐπιφανείας τινός.

Ἐὰν τὸ δυναμικὸν τῶν μαζῶν τούτων ἔχει σταθερὰν τιμὴν ἐν μέρει τινι τοῦ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας χώρου εἶναι αὕτη μηδέν.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, τὸ δυναμικὸν διατηρεῖ τὴν αὐτὴν σταθερὰν τιμὴν ἐν ἅπαντι τῷ ἐξωτερικῷ χώρῳ, ἀλλ' ἐὰν ἀπομακρυνθῶμεν ἀρκούντως, ἡ τιμὴ $\Sigma\frac{m_1}{r}$ δύναται νὰ ἐλαττωθῇ πέραν παντὸς ὁρίου καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι αὕτη ἴση τῷ μηδενί.



Σχ. 119.

167 β. *Ἐὰν τὸ δυναμικὸν v τῶν μαζῶν εἶναι δεδομένον ἐπὶ παντὸς σημείου τῆς περικλειούσης ταύτας ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας, ἡ τιμὴ τούτου εἶναι ὡρισμένη καὶ ἐν παντὶ σημείῳ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας κειμένῳ.*

Ἔστω τῷ ὄντι v τὸ δυναμικὸν τῶν μαζῶν (*m*) καὶ V τὸ δυναμικὸν ἑτέρου συστήματος μαζῶν (*M*) περικλειομένων καὶ τούτων ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας *C* ἐφ' ἧς αἱ τιμαὶ τῶν δύο δυναμικῶν συμπίπτουσι καθ' ὑπόθεσιν·

$$v_c = V_c$$

λέγω, ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται συμπίπτουσιν ἐν παντὶ σημείῳ τοῦ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας *C* χώρου. Τὸ δυναμικὸν τοῦ συστήματος τῶν μαζῶν (*m*) καὶ (− *M*) εἶναι τῷ ὄντι

$$v - V$$

μηδενίζεται δὲ τοῦτο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας *C*, καὶ συνεπῶς (167.α) ἐν παντὶ τῷ ἐκτὸς ταύτης χώρῳ· ὥστε

$$V = v$$

ἐν τῷ αὐτῷ χώρῳ.

Ἐὰν αἱ μάζαι (*m*) εὑρίσκονται ἅπασαι ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας *C*, συλλογιζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἐν τῇ παραγράφῳ (167) ἰδιότητα, φθάνομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν.

Ἐὰν τὸ δυναμικὸν v τῶν ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας C κειμένων μαζῶν εἶναι δεδομένον δι' ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένη ἐν παντὶ σημείῳ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας κειμένῳ.

Ἀντίστροφον πρόβλημα.

168. Μέχρι τοῦδε ἐπραγματεύθημεν τὸ πρόβλημα.

Δοθείσης μάζης τινὸς διανεμημένης ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, εὑρεῖν τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης ταύτης παρά τινι σημείῳ (x,y,z) ἀνήκοντος ἢ μὴ τῇ δοθείσῃ μάζῃ.

Προτιθέμεθα ἤδη νὰ ἐξετάσωμεν διὰ βραχέων τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα οὗτινος τὴν γενικὴν λύσιν ἐπεχείρησε πρῶτος ὁ Green τουτέστι·

Δοθείσης τῆς τιμῆς τοῦ δυναμικοῦ V παρά τινι σημείῳ (x,y,z), εὑρεῖν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῷ δυναμικῷ τούτῳ διανομὴν μάζης ἐν τῷ διαστήματι.

Τὴν συνδέουσαν τὴν διανομὴν τῆς μάζης (δασύτητα ταύτης δ παρὰ τῷ σημείῳ x,y,z) πρὸς τὸ δυναμικὸν σχέσιν μᾶς δίδει ἡ ἐξίσωσις (158) τοῦ Poisson

$$\delta = -\frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ὑποθέσωμεν λ. χ. ὅτι ἐν παντὶ τῷ ἔξω τῆς ἐπιφανείας

$$\varphi(x,y,z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

χώρῳ ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ μηδενίζεται ($V = 0$) ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἐνῷ ἐν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας περικλειομένῳ χώρῳ τὸ δυναμικὸν ἔχει ὡρισμένην τιμὴν τὴν

$$V = \varphi(x,y,z) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ἐν παντὶ σημείῳ (x,y,z), μεταβάλλεται δὲ συνεχῶς ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τοῦ χώρου τούτου.

Ἡ ἐπιφάνεια φ εἶναι προφανῶς μία τῶν σχετικῶν τῇ ζητουμένῃ μάζῃ ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν. Ἡ ὑπὸ τῆς ἀγνώστου μάζης ἐξασκουμένη ἑλκτικὴ δύναμις ἐπί τινος σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας φ περικλειομένου χώρου, ἰσοῦται καθ' ὑπόθεσιν τῷ μηδενί, καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἥτις ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δίδει $\delta = 0$ συμπεραίνομεν, ὅτι

Ἐν τῷ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας φ χώρῳ οὐδὲ ἡ ἐλαχίστη ὑπάρχει μάζα.

Ἐν παντὶ σημείῳ (x,y,z) κειμένῳ ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας (2) περικλειομένῳ χώρῳ, ἡ αὐτὴ ἑλκτικὴ δύναμις εἶναι κάθετος τῇ διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένῃ ἰσοστάθμῳ ἐπιφανείᾳ καὶ ἔχει ἔντασιν

$$N = \sqrt{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας φ περικλειομένῳ χώρῳ ὑπάρχει λοιπὸν μάζα m_1 διανεμημένη οὕτως, ὥστε ἡ πυκνότης παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) εἶναι

$$\delta = -\frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Κατὰ τὴν διὰ τῆς ἐπιφανείας φ διάβασιν τοῦ σημείου (x,y,z) ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη ἕλξις ὑπὸ τῆς ἀγνώστου μάζης μεταβάλλεται ἀποτόμως ἀπὸ 0 εἰς N, καὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων τῇ ἐπιφανείᾳ ἕλξεων τούτων δίδει (103.δ) ἡ σχέσις

$$0 - N = -4\pi\gamma \quad \text{ὅθεν} \quad \gamma = \frac{1}{4\pi}N \ldots\ldots \quad (6)$$

ἐξ οὗ συμπεραίνομεν, ὅτι·

ἕτερον μέρος m_0 τῆς ζητουμένης μάζης εἶναι διανεμημένον ἐπὶ τῆς

ἐπιφανείας φ οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἶναι

$$\gamma = \frac{1}{4\pi}N = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2} \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Αἱ μάζαι m_0 καὶ m_1 δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων· ἐκ τῆς σχέσεως (164.2)

$$\int N d\omega = 4\pi m$$

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας $N=0$ πανταχοῦ, πορίζόμεθα

$$4\pi m = 0$$

ἔνθα m εἶναι ἡ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμημένη μάζα $m_0 + m_1$· οὕτω

$$m_0 = -m_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

καὶ ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμημένη μάζα m_0 εἶναι ἴση τῇ μάζῃ m_1 ἣν περικλείει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια καὶ ἀντιθέτου ταύτῃ σημείου.

Ἔστω V_0 τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης m_0 καὶ V_1 τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης m_1 ἐν τῷ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας χώρῳ· καθ' ὑπόθεσιν

$$V = V_0 + V_1 = 0 \qquad \text{ὅθεν } V_1 = -V_0$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν μάζαν $m_0 = m_1$ τὴν πυκνότητα δηλαδὴ

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}N$$

ἔχομεν

$$V_1 = V_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

169. Ἄς ἐφαρμόσωμεν τ' ἀνωτέρω εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν ἐν ᾗ

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ὑποθέσωμεν δέ, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ

$$V = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right| \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

εἶναι ἴση τῷ μηδενὶ δι' ἅπαντα τὰ ἐκτὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) κείμενα σημεῖα, ἔνθα

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > 1$$

ὅτι ἡ αὐτὴ τιμὴ ἰσοῦται τῷ μηδενὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ ἐλλειψοειδοῦς, καὶ λαμβάνει τὴν τιμὴν (2) διὰ πᾶν σημεῖον (x,y,z) κείμενον ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἔνθα

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἐνταῦθα

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{a^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y}{b^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{z}{c^2}$$

καὶ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{b^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2}$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὰς ἄνω (168) εὑρεθείσας σχέσεις ἔχομεν διὰ τὸν ἐκτὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς χῶρον

$$\delta = 0$$

διὰ τὸν ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς χῶρον

$$\delta = \frac{1}{4\pi}\left|\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right|$$

καὶ διὰ τὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ μάζαν

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}\left|\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right|^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\pi p}$$

ἔνθα p παριστᾷ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κάθετον ἐπὶ τὸ παρὰ τῷ σημείῳ (x,y,z) ἐφαπτόμενον τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας ἐπίπεδον.

Καὶ βλέπομεν (168.9) ὅτι

Ἡ ἕλξις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ στερεὸν ἐλλειψοειδὲς ἐπὶ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου, ἰσοῦται τῇ ἕλξει, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου μάζα ἴση τῇ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, διανεμημένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης κατὰ τὸ σημεῖον (x,y,z) νὰ ᾖ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσει τοῦ παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ ἐφαπτομένου τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας ἐπιπέδου.

169. α. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἐλλειψοειδῆ ἐπιφάνειαν

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἔνθα λ εἶναι ἀπειροστὴ ποσότης· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἔχει τὰς αὐτὰς μὲ τὴν (169.1) ἑστίας καὶ κεῖται εἰς ἀπειροστὴν ἀπὸ ταύτης ἀπόστασιν

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2p} \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{1}{p} = \frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ p ἐν τῇ σχέσει, ἥτις ὁρίζει τὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (169.1) διανομὴν τῆς μάζης τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἣν δυνάμεθα ἐνταῦθα νὰ ὑποθέσωμεν ὡς περιεχομένην μεταξὺ τῶν ἐλλειψοειδῶν ἐπιφανειῶν (169.1) καὶ (1), ἔχομεν

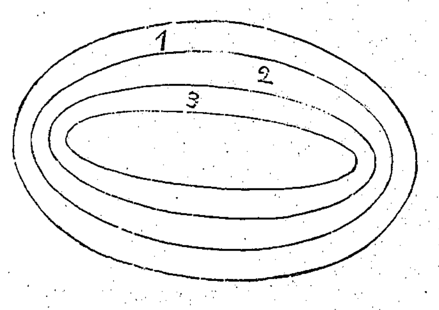
$$\gamma = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

ὅθεν ἡ πρότασις

Ἡ ἐπὶ παντὸς ἐξωτερικοῦ σημείου, ὑπὸ στερεοῦ ὁμογενοῦς ἐλλειψοειδοῦς ἐξασκουμένη ἕλξις, εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐλλειψοειδὲς στρῶμα, ἀπειροστοῦ πάχους, ὁριζόμενον ὑπὸ ἐπιφανειῶν ἐχουσῶν τὰς αὐτὰς ἑστίας, ὧν ἡ ἑτέρα συμπίπτει μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ ἐλλειψοειδοῦς, καὶ οὗτινος ἡ μάζα διανεμημένη ἀναλόγως τοῦ πάχους ἀνὰ πᾶν σημεῖον (δηλαδὴ ὁμοιομόρφως) ἰσοῦται τῇ μάζῃ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

169. β. Θεωρήσωμεν ἤδη στερεὸν ὁμογενὲς ἐλλειψοειδές, ὅπερ χωρίζομεν εἰς τμήματα (1,2,3 . . . .) ἀπειροστοῦ πάχους, ὁριζόμενα ὑπὸ ἐλλειψοειδῶν ἐπιφανειῶν ἐχουσῶν τὰς αὐτὰς ἑστίας.

Τὴν μάζαν τοῦ στρώματος 1 δυνάμεθα κατὰ τὰ προηγούμενα νὰ διανείμωμεν ὁμοιομόρφως ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τούτου περικλειομένῳ χώρῳ, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν ποσῶς τὴν ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τινος σημείου ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς ὅλης μάζης ἕλξιν· τὴν ἐπ' ἐλάχιστον αὐξηθεῖσαν ἤδη μάζαν τοῦ στρώματος 2 δυνάμεθα νὰ διανείμωμεν ἐπίσης ὁμοιομόρφως ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τούτου περικλειομένῳ χώρῳ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ στρώματος ν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τινος σημείου ἐξασκουμένην ἕλξιν.



Σχ. 120.

Οὕτω ἀντὶ τοῦ δοθέντος ἐλλειψοειδοῦς ἔχομεν ἕτερον μικροτέρων διαστάσεων, οὗτινος ἡ μάζα εἶναι ἴση τῇ τοῦ πρώτου, ὅπερ ὅμως ἐξασκεῖ τὴν αὐτὴν ἕλξιν ἐπὶ παντὸς σημείου κειμένου ἐκτὸς ἀμφοτέρων τῶν ἐλλειψοειδῶν τούτων καὶ φθάνομεν οὕτω εἰς τὴν πρότασιν τοῦ Maclaurin καθ' ἣν

Δύο στερεὰ ἐλλειψοειδῆ ἴσης μάζης, ὁριζόμενα ὑπὸ ἐπιφανειῶν πρότασις τοῦ
ἐχουσῶν τὰς αὐτὰς ἑστίας, ἐξασκοῦσιν ἴσην ἕλξιν ἐπὶ παντὸς σημείου Maclaurin
κειμένου ἐκτὸς ἀμφοτέρων τούτων.

Διὰ τῆς προτάσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ στερεὸν ὁμογενὲς ἐλλειψοειδὲς ἐπὶ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου, γνωρίζοντες τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τὸ διὰ τούτου διερχόμενον ὁμογενὲς ἐλλειψοειδὲς ἴσης τῇ τοῦ πρώτου μάζης καὶ ὁμοέστιον τούτῳ. Ἡ τελευταία δὲ αὕτη περίπτωσις τῆς ἕλξεως, ἣν ἐξασκεῖ στερεὸν ἐλλειψοειδὲς ἐπὶ σημείου τινος τῆς ἐπιφανείας του εἶναι σχετικῶς εὐκολωτέρα τῆς γενικωτέρας περιπτώσεως καθ' ἥν, τὸ ἑλκόμενον σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἕλκοντος ἐλλειψοειδοῦς· πρὶν ὅμως προβῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦτον θὰ γενικεύσωμεν τὴν ἄνω πρότασιν, ἥτις ἀποτελεῖ μέρος τῆς ἀκολούθου σπουδαιοτάτης προτάσεως τοῦ Ἄγγλου γεωμέτρου Green.

πρότασις τοῦ Green

170. *Ἐὰν ἔχωμεν μάζαν m διανεμημένην ὅπως δήποτε ἐν τῷ διαστήματι, καὶ θεωρήσωμεν μίαν οἱανδήποτε τῶν σχετικῶν τῷ δυναμικῷ V ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν, περιλαμβάνουσαν ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ τὴν ὅλην μάζαν m, διανείμωμεν δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, μάζαν τινὰ οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης γ παρὰ τῷ σημείῳ P νὰ ᾖ*

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}N$$

ἔνθα N παριστᾷ τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξασκεῖ ἡ μάζα m ἐπὶ τοῦ σημείου P τῆς ἐπιφανείας, (ὅταν ὑποθέτομεν τὴν πυκνότητα τούτου ἴσην τῇ μονάδι·)

1ον. *Ἐπὶ παντὸς ἐξωτερικοῦ τῇ ἰσοστάθμῳ ἐπιφανείᾳ φ σημείου ἡ ἕλξις τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμημένης μάζης ἰσοῦται τῇ ἕλξει, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ταύτης περικλειομένη μάζα.*

Τὸ μέρος τοῦτο τῆς προτάσεως ἀπεδείχθη ἤδη ἐν τοῖς προηγουμένοις (168).

2ον. *Ἡ ἐπὶ τῆς ἰσοστάθμου ἐπιφανείας φ διανεμημένη κατὰ τὸν ἄνω νόμον μάζα, οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἕλξιν ἐπὶ τῆς ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ κειμένης μάζης m.*

Ἔστω τῷ ὄντι X ἡ ἕλξις ἣν ἐξασκεῖ ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμημένη μάζα, ἐπὶ σημείου ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ κειμένου εἰς ἀπειροστὴν ἐπίσης ἀπόστασιν· ἡ ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τινος σημείου εἰς ἀπειροστὴν ἐπίσης ἀπόστασιν ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ἕλξις εἶναι κατὰ τὴν ἄνω πρότασιν N, ὥστε (163.δ)

$$X - N = 4\pi\gamma = 4\pi\left| -\frac{1}{4\pi}N\right| = -N$$

ἢ

$$X = N - N = 0$$

Τὸ δυναμικὸν εἶναι οὕτω σταθερὸν παρὰ τῷ σημείῳ τούτῳ, καὶ

συνεπῶς (167) ἐν ἅπαντι τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας φ περικλειομένῳ χώρῳ· καὶ τἀνάπαλιν.

Ἵνα ἡ ἐπὶ τῆς ἰσοστάθμου ἐπιφανείας φ διανεμημένη μάζα οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἕλξιν ἐπὶ τῆς ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ κειμένης μάζης, δέον ἡ διανομὴ νὰ ἐκτελῆται κατὰ τὸν ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}N$$

ἐκφραζόμενον νόμον.

Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι μάζαν m καὶ μίαν τῶν σχετικῶν ταύτῃ ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν τὴν φ, ἐφ' ἧς ὑποθέτομεν διανεμημένην μάζαν τινὰ οὕτως ὥστε, οὐδεμίαν νὰ ἐξασκῇ αὕτη ἕλξιν ἐπὶ τῆς ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας κειμένης ὕλης, ὅθεν ἕπεται ὅτι ἐν τῷ αὐτῷ χώρῳ τὸ δυναμικὸν τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διανεμημένης ὕλης εἶναι σταθερόν, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ μέρους τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας· ἐπειδὴ δὲ τὸ δυναμικὸν μεταβάλεται συνεχῶς, ἕπεται ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ μέρους τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, ἔχει τοῦτο σταθερὰν τιμὴν V· ἔστω V' ἡ τιμὴ τοῦ δυναμικοῦ τῆς μάζης m, ἥτις εἶναι καὶ αὕτη καθ' ὑπόθεσιν σταθερὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ· ἔχομεν οὕτω ἐφ' ἁπάσης τῆς ἐπιφανείας ταύτης

$$V' = kV$$

ὥστε πολλαπλασιάζοντες τὴν πυκνότητα τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμημένης μάζης ἐπὶ τὸν σταθερὸν παράγοντα k, τὸ δυναμικὸν ταύτης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ θὰ ἰσοῦται τῷ δυναμικῷ τῆς μάζης m ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας· καὶ τότε (167.β) τὸ δυναμικὸν τῶν δύο τούτων μαζῶν εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας φ κείμενα σημεῖα· ὥστε

Ἡ ἕλξις, ἣν ἐξασκεῖ ἡ ἐπιφάνεια φ ἐπὶ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου, εἶναι οὕτω ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἕλξιν N, ἣν ἐξασκεῖ ἡ μάζα m ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ἔχομεν οὕτω

$$0 - N = 4\pi\gamma$$

ὅθεν

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}N$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἡ ἰσόσταθμος ἐπιφάνεια τῶν μαζῶν m περιέχει μέρος τούτων m_1 ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ, ἐνῷ τὸ ἕτερον m_2 εἶναι ἐκτὸς αὐτῆς, καὶ ζητήσωμεν τὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης διανομὴν τῆς μάζης οὕτως ὥστε ἡ ἐπιφάνεια φ νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ παντὸς σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἕλξιν ἴσην τῇ ἕλξει, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ μάζα m_1· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπ' αὐτῆς περικλειομένης μάζης m_1 ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια νὰ ἐξασκῇ ἕλξιν ἴσην καὶ ἀντίθετον ἐκείνης, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς μάζης m_1 ἡ μάζα m_2· ἔστωσαν V_1 καὶ V_2 τὰ δυναμικὰ τῶν μαζῶν m_1 καὶ m_2· ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ ἔχομεν καθ' ὑπόθεσιν

$$V = V_1 + V_2 = C$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη τὴν πυκνότητα τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμημένης μάζης τοιαύτην, ὥστε τὸ δυναμικόν της ὡς πρὸς τὰ ἴδια σημεῖα νὰ ᾖ σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ V_1· τότε (167.β), ἕλκει αὕτη τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα ὡς ἡ μάζα m_1· ἀφ' ἑτέρου τὸ δυναμικὸν τῆς ἐπιφανείας φ εἶναι

$$V_1 = C - V_2$$

ὥστε ἡ μάζα φ καὶ ἡ μάζα m_2 ὁμοῦ ἔχουσι δυναμικὸν

$$C$$

καὶ οὕτω τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης (φ, m_2) *εἶναι σταθερὸν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ, καὶ κατὰ συνέπειαν* (167.β) *ἡ ἕλξις ἣν ἐξασκεῖ ἡ μάζα* (φ, m_2) *ἐπὶ παντὸς σημείου ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας κειμένου εἶναι μηδέν.*

Τὴν πυκνότητα τῆς ἐπιφανείας φ ἔχομεν ἐκ τῆς σχέσεως (163.δ).

$$\frac{dV_1}{dn} - \left| -\frac{dV_2}{dn} \right| = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn} = \frac{dV}{dn} = -4\pi\gamma$$

Λέγω ἤδη, ὅτι *ἡ επὶ τῆς ἰσοστάθμου ἐπιφανείας φ διανεμηθεῖσα κατὰ τὸν ἄνω νόμον μάζα, ἰσοῦται τῇ μάζῃ* m_1, *ἣν περικλείει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια.*

Ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμηθεῖσα κατὰ τὸν ἄνω νόμον ὅλη μάζα εἶναι τῷ ὄντι

$$\frac{1}{4\pi}\int N d\omega$$

ἔχομεν (164.2) δὲ

$$\int N d\omega = 4\pi m_1$$

ἔνθα m_1 παριστᾷ τὴν ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας φ περικλειομένῳ

χώρῳ μάζαν· ὥστε ἡ ἐπ' αὐτῆς τῆς ἐπιφανείας διανεμημένη μάζα εἶναι

$$\frac{1}{4\pi}\int N d\omega = \frac{1}{4\pi} . 4\pi m_1 = m_1 .$$

Συνοψίζοντες ἤδη τ' ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν κάτωθι σπουδαιοτάτην πρότασιν τοῦ Green, καθ' ἣν

Ἐὰν φ παριστᾷ οἵαν δήποτε ἰσόσταθμον ἐπιφάνειαν σχετικὴν τῇ μάζῃ m, δυνάμεθα νὰ διανείμωμεν τὸ μέρος m_1 *τῆς μάζης m, ὅπερ περικλείει ἡ ἐπιφάνεια φ, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης παρὰ τῷ σημείῳ P νὰ ᾖ* πρότασις τοῦ Green

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi} N$$

ἔνθα N παριστᾷ τὴν ἔντασιν τῆς ὑπὸ τῆς μάζης m ἐξασκουμένης ἕλξεως ἐπὶ τοῦ σημείου P τῆς ἐπιφανείας φ, (ὅταν ὑποθέσωμεν τὴν μάζαν τούτου ἴσην τῇ μονάδι). Ἡ ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τῇ ἐπιφανείᾳ φ σημείου ἕλξις τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης διανεμηθείσης κατὰ τὸν ἄνω νόμον μάζης m_1, *εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἕλξιν, ἣν ἐξήσκει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ αὐτὴ μάζα ἐν τῇ ἀρχικῇ θέσει της.*

Ἡ ἕλξις τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας φ διανεμηθείσης κατὰ τὸν ἄνω νόμον μάζης m_1, *ἐπὶ σημείου κειμένου ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας φ περικλειομένῳ χώρῳ, εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῇ ἕλξει, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τὸ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας φ ἐναπομένον μέρος* m_2 *τῆς ὅλης ἀρχικῆς μάζης m.*

Ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ περιπτώσει καθ' ἣν $(m_2 = 0)$ *ἡ ἐπιφάνεια φ περικλείει τὴν ὅλην μάζαν m· ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης διανεμηθεῖσα ὕλη* $(m_1 = m)$ *οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἕλξιν ἐπὶ τῶν σημείων, ἅτινα περικλείει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια.*

Παραδειγματα. **170.** α. Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ἡ μάζα m εἶναι συγκεντρωμένη εἰς ἓν μόνον σημεῖον O (121). Αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι τότε σφαῖραι ἔχουσαι τὸ σημεῖον O ὡς κέντρον. Ἐπὶ παντὸς σημείου P τῆς ἰσοστάθμου ἐπιφανείας, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι r τὸ σημεῖον ἐξασκεῖ ἕλξιν

$$N = \frac{m}{a^2}$$

ἡ πυκνότης τῆς ἐπ' αὐτῆς διανομῆς τῆς μάζης εἶναι παρὰ τῷ σημείῳ P

$$\frac{1}{4\pi} N = \frac{m}{4\pi a^2}.$$

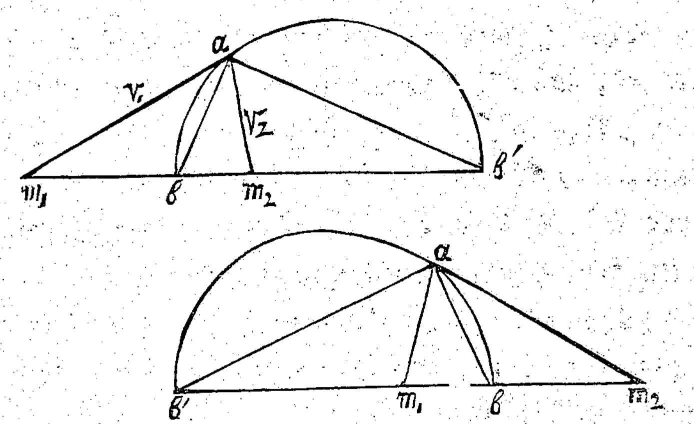
ἡ ἐπὶ τῆς ὅλη: σφαιρικῆς ἐπιφανείας διανεμηθεῖσα μάζα εἶναι

$$\int \frac{md\omega}{4\pi a^2} = m$$

Οὕτω. *Ἡ ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διανεμηθεῖσα μάζα m οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἕλξιν ἐπὶ τῶν ἐν τῷ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένῳ χώρῳ κειμένων σημείων, ἕλκει δὲ τὰ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖα, ὡς εἰ ἦτο αὕτη συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον τῆς ἐπιφανείας* (121).

170. β. Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα m_1 καὶ m_2, ὧν αἱ μάζαι εἶναι m_1 καὶ m_2· τὸ σημεῖον m_1 ἐξασκεῖ ἐπὶ τρίτου τινὸς σημείου a μάζης ἴσης τῇ μονάδι ἕλξιν $\frac{m_1}{r_1^2}$, ἐνῷ τὸ σημεῖον m_2 ἀπωθεῖ τοῦτο μὲ δύναμιν $\frac{m_2}{r_2^2}$ Τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης $m = m_1 - m_2$ παρὰ τῷ σημείῳ a εἶναι

$$V = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}$$



Σχ. 121.

τὰς ἰσοστάθμους δ' ἐπιφανείας ὁρίζει ἡ σχέσις

$$V = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = \text{σταθερᾷ } \sigma$$

Θεωρήσωμεν ἰδίᾳ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ τιμῇ $\sigma = 0$ ἰσόσταθμον ἐπιφάνειαν

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = 0 \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2} = \text{σταθερᾷ} \ldots \quad (1)$$

ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου a φέρωμεν τὴν ab' ἢ ab διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν $m_1 a m_2$ ἔχομεν ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς διχοτομούτης

$$\frac{m_1 b}{m_2 b} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2} = \text{σταθερᾷ ὡς ἐκ τῆς σχέσεως } (1)$$

τὰ σημεῖα b καὶ b' εἶναι λοιπὸν σταθερά, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{bab'}$ εἶναι ὀρθὴ τὸ σημεῖον a κεῖται ἐπὶ σφαίρας, ἧς διάμετρος εἶναι ἡ bb'. τὸ ἕτερον τῶν ἔναντι σχημάτων ἀντιστοιχεῖ τῇ περιπτώσει καθ' ἣν $m_1 < m_2$·

ἡ μάζα m_1 κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας, καὶ δυνάμεθα νὰ διανείμωμεν ταύτην καταλλήλως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τινὸς σημείου ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς ὅλης μάζης $m_1 - m_2 = m$ ἕλξιν.

Ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καταλλήλως διανεμηθεῖσα μάζα m_1 ἐξασκεῖ ἐπὶ παντὸς σημείου ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένου ἕλξιν ἴσην τῇ ὠθήσει, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ ἐκτὸς τῆς σφαίρας κειμένη μάζα m_2, ἥτις ἰσοῦται τῇ

$$\frac{R}{x} m_1$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ x ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ταύτης ἀπόστασις τοῦ m_1. Ἡ ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας πυκνότης γ τῆς ἐπὶ ταύτης διανεμηθείσης μάζης m_1 εἶναι παρὰ τῷ σημείῳ $(r_1 r_2)$

$$\gamma = \frac{1}{4\pi} N$$

ἔνθα N εἶναι ἡ γεωμετρικὴ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\frac{m_1}{r_1^2}$ καὶ $\frac{m_2}{r_2^2}$, ὧν ἡ πρώτη φέρεται κατὰ τὴν εὐθεῖαν am_1 καὶ ἡ δευτέρα κατὰ τὴν $m_2 a$· εὐκόλως δὲ βλέπομεν, ὅτι

$$N = \frac{m_1}{r_1^2 r_2} d$$

ἔνθα d παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν $m_1 m_2$· ἢ ὡς ἐκ τῆς σχέσεως (1)

$$N = \frac{m_1^2 d}{m_2 r_1^3}$$

ὅθεν

$$\gamma = \frac{m_1^2}{4\pi m_2} \cdot \frac{d}{r_1^3}$$

τουτέστιν· *Ἡ παρὰ τῷ σημείῳ a τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας πυκνότης τῆς ἐπ' αὐτῆς διανεμηθείσης μάζης m_1, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῷ κύβῳ τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου m_1 ἀποστάσεως r_1 τοῦ σημείου a.*

Οὕτω· *Ἐὰν ἔχωμεν μάζαν m διανεμημένην ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἧς τὸ κέντρον εἶναι 0, ἵνα ἡ σφαιρικὴ αὕτη ἐπιφάνεια ἕλκῃ τὰ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖα, ὡς εἰ ἡ μάζα ταύτης ἦτο συγκεντρωμένη παρά τινι σημείῳ m_1 ἐντὸς αὐτῆς κειμένῳ, δέον ἡ πυκνότης παρὰ τὸ σημεῖον a νὰ ἦ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῷ κύβῳ τῆς ἀποστάσεως am_1· τότε δὲ ἡ αὐτὴ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἕλκει τὰ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖα ὡς θὰ εἷλκε ταῦτα μάζα $m_1 \frac{R}{om_1}$ συγκεντρωμένη εἰς τὸ σημεῖον m_2 συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ m_1 ὡς πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν*

Ἐν ᾗ περιπτώσει $m_2 < m_1$ ἡ μάζα m_2 κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ δυνάμεθα νὰ διανείμωμεν ταύτην ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης παρὰ τῷ σημείῳ r_2 νὰ ᾖ

$$\gamma = -\frac{m_2^2}{4\pi m_1}\cdot\frac{d}{r_2^3}$$

χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τῇ σφαίρᾳ σημείου τινος ἐξασκουμένην ὑπὸ τῆς μάζης $m = m_1 - m_2$ ὦσιν.

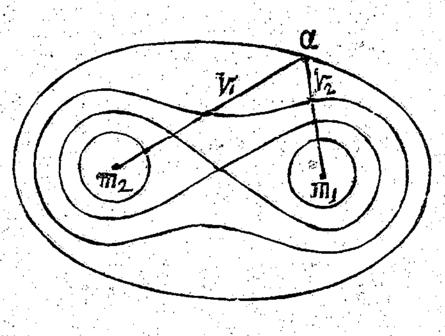
Ἡ οὕτω διανεμηθεῖσα ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας μάζα m_2 ἀπωθεῖ πᾶν σημεῖον ἐντὸς τῆς σφαίρας κείμενον μὲ δύναμιν ἴσην τῇ ἕλξει ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ **τοῦ αὐτοῦ σημείου** *ἡ παρὰ τῷ σημείῳ m_1 συγκεντρωμένη μάζα m_1.*

170. γ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν καὶ τὴν μάζαν m_1 ἕλκουσαν, τὸ δυναμικὸν εἶναι

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$$

καὶ αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = \text{σταθερᾷ } \sigma$$



Σχ. 122.

γεννῶνται ἐκ τῆς περὶ τὴν εὐθεῖαν m_1m_2 στροφῆς τῶν καμπύλων

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = \sigma$$

ἃς καλοῦσιν ᾠοειδεῖς τοῦ Καρτεσίου,

Ἡ πυκνότης γ τῆς ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων διανομῆς τῶν μαζῶν m_1 καὶ m_2 εἶναι ἐνταῦθα

$$\gamma = \frac{1}{4\pi}N$$

ἔνθα

$$N^2 = \left|\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right| V - \frac{m_1 m_2 d^2}{r_1^3 r_2^3}$$

Ἕτερον παράδειγμα προταθὲν ὑπὸ τοῦ Maxwell εἶναι τὸ ἑξῆς·

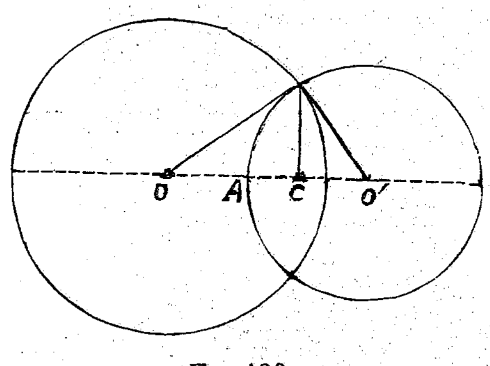
170. δ. Θεωρήσωμεν σφαίρας 0 καὶ 0′ τεμνομένας κατ' ὀρθὰς γωνίας, καὶ ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου P φέρωμεν κάθετον τὴν PC ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν κέντρων. Ὑποθέσωμεν δὲ παρὰ τὸ σημεῖον 0 μάζαν ἴσην τῇ $0P = R$, παρὰ τὸ σημεῖον 0′ μάζαν ἴσην τῇ $0'P = R'$ καὶ παρὰ τῷ σημείῳ P μάζαν ἴσην τῇ $-PC$· τὸ δυναμικὸν V τῆς μάζης 0 παρὰ παντὶ σημείῳ m τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας 0′ εἶναι $\frac{R}{om}$· τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης C παρὰ τῷ αὐτῷ

σημείῳ m τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶναι $\frac{-PC}{cm}$· ἐπειδὴ δὲ $PC.00' = RR'$, τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης C ἐκφράζεται καὶ οὕτω

$$\frac{-RR'}{00'Cm}$$

ἀλλὰ τὰ σημεῖα 0 καὶ C κεῖνται ἁρμονικῶς ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν 0′ καὶ ἔχομεν $0m.R' = 00'.cm$· ὥστε τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης C παρὰ τῷ σημείῳ m εἶναι

$$\frac{-RR'}{00'cm} = \frac{-RR'}{0m.R'} = \frac{-R}{0m}$$



Σχ. 123.

Τὸ δυναμικὸν τῶν μαζῶν 0 καὶ C ὁμοῦ, παρὰ παντὶ σημείῳ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας 0′ εἶναι οὕτω

$$\frac{R}{0m} - \frac{R}{0m} = 0$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου βλέπομεν, ὅτι παρὰ παντὶ σημείῳ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας 0 τὸ δυναμικὸν τῶν μαζῶν 0′ καὶ C ἰσοῦται τῷ μηδενί· ἀφ' ἑτέρου τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης 0 ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας (0) ἰσοῦται τῇ μονάδι, ὡς καὶ τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης 0′ ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας (0′)· καὶ βλέπομεν, ὅτι·

Τὸ δυναμικὸν τῶν τριῶν ὁμοῦ μαζῶν 0 0′ καὶ C ἰσοῦται τῇ μονάδι παρὰ παντὶ σημείῳ τῆς ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν ἀμφοτέρων τῶν σφαιρῶν ἀποτελουμένης ἐπιφανείας, ἥτις εἶναι οὕτω μία τῶν σχετικῶν ταῖς μάζαις 0,0′ καὶ C ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὰς μάζας 0,0′, καὶ C διανεμημένας ἐπὶ τῆς ἰσοστάθμου ταύτης ἐπιφανείας, οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης νὰ ᾖ $\frac{1}{4\pi}N$, οὐδεμίαν ἐξασκεῖ αὕτη ἕλξιν ἐπὶ τῶν ἐντὸς αὐτῆς κειμένων μαζῶν, ἕλκει δὲ τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα ὡς αἱ μάζαι 0,0′ καὶ C. Εἰς τὰ σημεῖα P καὶ P' ἡ ἕλξις N εἶναι μηδέν, ἄλλως θὰ εἶχε αὕτη δύο διευθύνσεις $0P$ καὶ $0'P$, ὅπερ εἶναι προφανὲς καὶ ἀπ' εὐθείας.

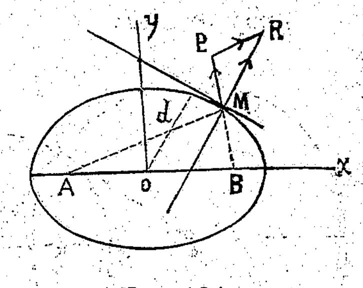
170. ε. Ὑποθέσωμεν τέλος μάζαν m ὁμοιομόρφως διανεμημένην μὲ πυκνότητα δ′ ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ AB, μήκους $2a$. Τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης m παρὰ τῷ σημείῳ M εἶναι ἐνταῦθα

$$V = \delta' \int_{-a}^{a} \frac{ds}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} = \delta' \text{λογ} \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2} + a - x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a - x}$$

$$= \delta' \text{ λογ } \frac{AM + a - x}{BM - a - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἔνθα x,y εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ox καὶ oy (O εἶναι τὸ μέσον τῆς AB).

ἐὰν θέσωμεν
$$AM = \lambda - \frac{ax}{\lambda} \qquad BM = \lambda + \frac{ax}{\lambda} \quad \ldots\ldots (2)$$
καὶ ἀντικαταστήσωμεν, ἔχομεν
$$V = \delta'\lambda o\gamma \frac{\lambda+a}{\lambda-a}$$



Σχ. 124.

τὰς ἰσοστάθμους ἐπιφανείας ἔχομεν δίδοντες εἰς τὸ λ σταθερὰς τιμάς· ἀλλὰ τότε (2)
$$AM+BM = \text{σταθερά}$$
καὶ αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι ἐπιμήκη ἐλλειψοειδῆ ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα AB, οὗτινος αἱ ἑστίαι συμπίπτουσι μὲ τὰ σημεῖα A καὶ B· ὁ μέγας ἄξων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τούτου ἰσοῦται μὲ 2λ.

Δυνάμεθα λοιπὸν κατὰ τὰ προηγούμενα, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν ποσῶς τὴν ἐπὶ ἐξωτερικοῦ τινος σημείου ἐξασκουμένην ἕλξιν, νὰ διανείμωμεν ἐπὶ τῆς ἐλλειψοειδοῦς ταύτης ἐπιφανείας τὴν ἐπὶ τοῦ τμήματος AB μάζαν, οὕτως ὥστε ἡ πυκνότης παρὰ τῷ σημείῳ M νὰ ᾖ
$$\gamma = \frac{1}{4\pi}N$$
ἔνθα N παριστᾷ τὴν ἐπὶ τοῦ σημείου M ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἕλξιν (119)· ὥστε
$$\gamma = \frac{md}{4\pi\lambda(\lambda^2-a^2)}$$
ἀλλὰ καὶ ἀπ' εὐθείας δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πυκνότητα γ· ἔχομεν τῷ ὄντι
$$N = \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial n} = -\frac{2a\delta'}{\lambda^2-a^2}\frac{\partial\lambda}{\partial n}$$
διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν διαφορικὸν συντελεστὴν $\frac{d\lambda}{dn}$ καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ παρὰ τῷ σημείῳ M λαμβάνομεν
$$\frac{\partial\lambda}{\partial(AM)} = \frac{\partial\lambda}{\partial(BM)} = MP = PR = \frac{1}{2}$$
καὶ τότε
$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = MR = MP\,\text{συν}\alpha + PR\,\text{συν}\alpha = 2MP\,\text{συν}\alpha = \text{συν}\alpha$$

ἔνθα α παριστᾷ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας AMB.

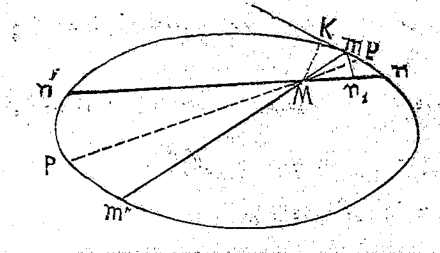
Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως καταβιβάσωμεν τὴν d κάθετον ἐπὶ τὴν παρὰ τῷ σημείῳ N ἐφαπτομένην, ἔχομεν
$$d = \lambda\,\text{συν}\alpha$$
καὶ ἀντικαθιστῶντες
$$N = -\frac{2a\delta'}{\lambda^2-a^2}\cdot\frac{d}{\lambda} = \frac{md}{\lambda(\lambda^2-a^2)}$$
καὶ ἡ πυκνότης ἐπὶ τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας εἶναι
$$\gamma = \frac{md}{4\pi\lambda(\lambda^2-a^2)}$$
Ἡ ἐπὶ τῆς ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας διανεμηθεῖσα κατὰ τὸν ἄνω τρόπον μάζα ἐξασκεῖ ἐπὶ παντὸς σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ στερεοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ὅπερ ὁρίζει αὕτη, ἕλξιν ἴσην ἐκείνῃ, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB· οὐδεμίαν δ' ἐξασκεῖ ἕλξιν ἐπὶ σημείου ἀνήκοντος εἰς τὸ αὐτὸ στερεὸν ἐλλειψοειδές.

Τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ προΐδωμεν, διότι ἓν τῶν ὁμοεστίων ἐλλειψοειδῶν, ἅτινα ἐθεωρήσαμεν ἐν τῇ παραγράφῳ (169.β), εἶναι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δύο κοινῶν ἑστιῶν ὁριζόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ἕλξις ἐλλειψοειδοῦς.

ἕλξις στερεοῦ ὁμογενοῦς ἐλλειψοειδοῦς ἐπὶ ἐσωτερικοῦ σημείου

171. Διὰ τοῦ σημείου M, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἶναι ξ, η, ζ, ὡς κέντρου, νοήσωμεν ἀπειροστὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀπειροστὰ ἐμβαδὰ $mn = d\omega$ καὶ $m'n' = d\omega'$. Ἔστωσαν (x,y,z) αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου P, ἔνθα ὁ ἄξων τοῦ κώνου τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, καὶ (λ,μ,ν) τὰ ἰθύνοντα συνημίτονα τῆς εὐθείας OP· ἐκ τοῦ σημείου M ὡς κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνας ἴσας τῇ Mm καὶ τῇ μονάδι, νοῶ σφαίρας ἐφ' ὧν ὁ κῶνος ὁρίζει ἐμβαδὰ $d\varsigma$ καὶ $d\sigma$, ἅτινα συνδέονται πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν $d\omega$ διὰ τῶν σχέσεων



Σχ. 125.

$$d\varsigma = \overline{MP}^2 d\sigma = d\omega\,\text{συν}\,\widehat{nmn_1} \qquad \text{ὅθεν} \qquad d\omega = \frac{\overline{MP}^2}{\text{συν}(nmn_1)}d\sigma$$
ὁ στοιχειώδης ὄγκος, οὗτινος βάσις εἶναι ἡ $d\omega$, εἶναι
$$d\omega.d(Mk) = \frac{\overline{MP}^2}{\text{συν}(nmn_1)}d\sigma.d(Mk)$$
ἀλλὰ
$$Mk = MP\,\text{συν}\,\widehat{nmn_1} \quad \text{καὶ} \quad d(Mk) = \text{συν}\,\widehat{nmn_1}\,d(MP)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν διὰ τὸν στοιχειώδη ὄγκον

$$d\omega . d(Mk) = d\sigma . \overline{MP}^2 . d(MP)$$

ἡ μᾶζα τούτου εἶναι

$$\delta . d\sigma . \overline{MP}^2 . d(MP)$$

καὶ τὸ δυναμικὸν ταύτης παρὰ τῷ σημείῳ P εἶναι

$$\delta . d\sigma . \frac{\overline{MP}^2}{MP} d(MP) = \delta . d\sigma . MP . d(MP)$$

τὸ δυναμικὸν τῆς ὅλης μάζης τοῦ στοιχειώδους κώνου Mmn εἶναι οὕτω

$$\int_0^{MP} \delta . d\sigma . MP d(MP) = \tfrac{1}{2} \delta \overline{MP}^2 d\sigma$$

διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου θὰ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ δυναμικὸν τῆς μάζης τοῦ κώνου $Mm'n'$ παρὰ τῷ σημείῳ M εἶναι

$$\tfrac{1}{2} \delta \overline{MP'}^2 . d\sigma$$

καὶ τὸ δυναμικὸν τῆς ὅλης μάζης, ἣν περικλείει ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια $mnMm'n'$ εἶναι

$$\tfrac{1}{2} \delta [\overline{MP}^2 + \overline{MP'}^2] d\sigma$$

τὸ δυναμικὸν τοῦ ὅλου στερεοῦ ἐλλειψοειδοῦς παρὰ τῷ σημείῳ M εἶναι

$$V = \int \frac{\delta}{2} [\overline{MP}^2 + \overline{MP'}^2] d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ἔνθα τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα ἐπεκτείνεται ἐπὶ ἑνὸς ἡμισφαιρίου τῆς σφαίρας (ἧς ἀκτὶς εἶναι ἡ μονάς).

Τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου P δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x = \xi + MP . \lambda \qquad y = \eta + MP . \mu \qquad z = \zeta + MP . \nu$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$\frac{1}{a^2}(\xi + \lambda . MP)^2 + \frac{1}{b^2}(\eta + \mu . MP)^2 + \frac{1}{c^2}(\zeta + \nu . MP)^2 - 1 = 0$$

ὅθεν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$\left|\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right| + 2MP\left|\frac{\lambda\xi}{a^2} + \frac{\mu\eta}{b^2} + \frac{\nu\zeta}{c^2}\right| + \overline{MP}^2\left|\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right| = 0$$

ἥτις ἐπειδὴ

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 < 0$$

ἔχει δύο ῥίζας ἀντιθέτων σημείων, αἵτινες εἰσὶν αἱ ἀποστάσεις MP καὶ MP'. ἔχομεν οὕτω

$$\tfrac{1}{2}(\overline{MP}^2 + \overline{MP'}^2) = \frac{2\left|\frac{\lambda\xi}{a^2} + \frac{\mu\eta}{b^2} + \frac{\nu\zeta}{c^2}\right|^2 - \left|\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right|\left|\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right|}{\left|\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right|^2}$$

ἢ

$$\tfrac{1}{2}(\overline{MP}^2 + \overline{MP'}^2) = \frac{\frac{\lambda^2}{a^2}\left|\frac{2\xi^2}{a^2} + \varepsilon\right| + \frac{\mu^2}{b^2}\left|\frac{2\eta^2}{b^2} + \varepsilon\right| + \frac{\nu^2}{c^2}\left|\frac{2\zeta^2}{c^2} + \varepsilon\right| + Q}{\left|\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right|^2}$$

ἔνθα

$$\varepsilon = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} \quad \text{καὶ} \quad Q = 4\left|\frac{\lambda\mu . \xi\eta}{a^2 b^2} + \frac{\mu\nu . \eta\zeta}{b^2 c^2} + \frac{\nu\lambda . \zeta\xi}{c^2 a^2}\right|$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἄνω ἔκφρασιν (1) τοῦ δυναμικοῦ, καὶ παρατηροῦντες ὅτι

$$\int \frac{Q d\sigma}{\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}} = 0$$

ἔχομεν τέλος

$$V = \int \delta \frac{\frac{\lambda^2}{a^2}\left|\frac{2\xi^2}{a^2} + \varepsilon\right| + \frac{\mu^2}{b^2}\left|\frac{2\eta^2}{b^2} + \varepsilon\right| + \frac{\nu^2}{c^2}\left|\frac{2\zeta^2}{c^2} + \varepsilon\right|}{\left|\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right|^2} d\sigma$$

ἐὰν θέσωμεν

$$\Phi = \int \frac{\delta d\sigma}{\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ἔχομεν

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{a}{\xi^2} \cdot \frac{\frac{2\lambda^2\xi^2}{a^4}}{\left|\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right|^2}$$

καὶ τὸ δυναμικὸν V τίθεται ὑπὸ τὴν κάτωθι μορφὴν

$$V = \varepsilon\Phi + \frac{\xi^2}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\eta^2}{b}\frac{\partial\Phi}{\partial b} + \frac{\zeta^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

171. α. Ὑπολείπεται ἤδη ὁ ὑπολογισμὸς τῆς συναρτήσεως Φ. θέτοντες πρὸς τοῦτο (Σχ. 94)

$$\lambda = \sigma\upsilon\nu\theta \qquad \mu = \dot{\eta}\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad \nu = \dot{\eta}\mu\theta\dot{\eta}\mu\varphi$$

$$\frac{1}{b^2} - \left|\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right|\lambda^2 = H \qquad \frac{1}{c^2} - \left|\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right|\lambda^2 = K$$

καὶ παρατηροῦντες ὅτι

$$d\sigma = \dot{\eta}\mu\theta d\theta d\varphi = -d\varphi d\lambda$$

ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + (1-\lambda^2)\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{b^2} + \frac{\dot{\eta}\mu^2\varphi}{c^2}\right|$$

$$= \frac{\lambda^2}{a^2}[\dot{\eta}\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi] + (1-\lambda^2)\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{b^2} + \frac{\dot{\eta}\mu^2\varphi}{c^2}\right|$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\varphi\left|\frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{1}{b^2}\right| + \dot{\eta}\mu^2\varphi\left|\frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}\right|$$

$$= H\sigma\upsilon\nu^2\varphi + K\dot{\eta}\mu^2\varphi$$

ἡ ἄνω (2) τιμὴ τῆς Φ ἀντικαθίσταται τότε διὰ τῆς

$$\Phi = \int_0^1 d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{\delta d\varphi}{H\sigma\upsilon\nu^2\varphi + K\dot{\eta}\mu^2\varphi}$$

ἢ θέτοντες $\quad \varepsilon\varphi.\ \varphi = \psi \quad$ ὅθεν $\quad d\varphi = \sigma\upsilon\nu^2\varphi d\psi$

ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$\Phi = \int_0^1 d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{\delta\sigma\upsilon\nu^2\varphi d\psi}{H\sigma\upsilon\nu^2\varphi + K\dot{\eta}\mu^2\varphi} = \int_0^1 d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{\delta d\psi}{H + K\varepsilon\varphi^2\varphi}$$

$$= 4\int_0^1 d\lambda \int_0^{\infty} \frac{\delta d\psi}{H + K\psi^2} = 2\pi\int_0^1 \frac{\delta d\lambda}{\sqrt{HK}}$$

ἢ τέλος

$$\Phi = 2\pi\int_0^1 \frac{\delta d\lambda}{\sqrt{\left|\frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\lambda^2\right|\left|\frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\lambda^2\right|}} \quad \ldots (4)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς ἀρχικῆς μορφῆς (2) τῆς συναρτήσεως Φ βλέπομεν ὅτι εἶναι αὕτη συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς ποσότητας a, b, c, δυνάμεθα δὲ νὰ θέσωμεν

ὑπὸ τοιαύτην συμμετρικὴν μορφὴν καὶ τὴν τελευταίαν (4) ταύτης ἔκφρασιν, παρατηροῦντες ὅτι ἐὰν

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+u}}$$

ἔχομεν

$$d\lambda = \frac{a\,du}{\sqrt{(a^2+u)^3}} \qquad H = \frac{b^2+u}{b^2(a^2+u)} \qquad K = \frac{c^2+u}{c^2(a^2+u)}$$

καὶ

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{HK}} = \frac{\sqrt{(b^2+u)(c^2+u)}}{bc(a^2+u)}$$

ὅθεν δι' ἀντικαταστάσεως

$$\Phi = 2\delta\pi\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{HK}} = \pi\delta abc\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

$$= \frac{3}{4}M\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \quad \ldots (5)$$

ἔχομεν ἤδη

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \delta\pi bc\int_0^{\infty} \frac{u\,du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \quad \ldots (6)$$

171. β. Καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἐκφράσει (3) τοῦ V τὰς ἄνω (5) τιμὰς τοῦ Φ καὶ τῶν διαφορικῶν συντελεστῶν αὐτοῦ (6), ἔχομεν

$$V = \pi\delta abc\int_0^{\infty}\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2+u} - \frac{\eta^2}{b^2+u} - \frac{\zeta^2}{c^2+u}\right)\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

ἢ ἐὰν M παριστᾷ τὴν ὅλην μάζαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$V = \frac{3}{4}M\int_0^{\infty}\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2+u} - \frac{\eta^2}{b^2+u} - \frac{\zeta^2}{c^2+u}\right)\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \quad (7)$$

ἔχομεν οὕτω τὴν τιμὴν τοῦ δυναμικοῦ διὰ πᾶν σημεῖον κείμενον ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

171. γ. Ἐὰν ἤδη τὸ σημεῖον ξ, η, ζ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (a, b, c), διὰ τοῦ σημείου τούτου διέρχεται ἕτερον ἐλλειψοειδὲς ὁμοέστιον τῷ πρώτῳ, οὗτινος οἱ ἄξονες εἶναι $a+q$, $b+q$, $c+q$, ἔνθα ἡ ποσότης q εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως

$$\frac{\xi^2}{a^2+q} + \frac{\eta^2}{b^2+q} + \frac{\zeta^2}{c^2+q} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν μάζαν τοῦ δευτέρου τούτου ἐλλειψοειδοῦς ἴσην τῇ τοῦ πρώτου, ἐξασκεῖ τοῦτο κατὰ τὴν πρότασιν τοῦ Maclaurin ἐπὶ τοῦ σημείου (ξ,η,ζ) ἕλξιν ἴσην ἐκείνῃ, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τὸ ἐλλειψοειδὲς (a,b,c)· ἀλλὰ τὴν ἐπὶ τοῦ (ξ,η,ζ) ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $(a+q,\ b+q,\ c+q)$ ἕλξιν ἔχομεν ἀμέσως διὰ τῆς σχέσεως

$$V=\frac{3}{4}M\int_0^\infty\left(1-\frac{\xi^2}{a^2+q+u}-\frac{\eta^2}{b^2+q+u}-\frac{\zeta^2}{c^2+q+u}\right)$$

$$\times\frac{du}{\sqrt{(a^2+q+u)\,(b^2+q+u)\,(c^2+q+u)}}$$

ἢ θέτοντες $q+u=\omega$ ὅθεν $du=d\omega$ ἔχομεν τὴν ἐπὶ τοῦ σημείου (ξ,η,ζ) ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (a,b,c) ἕλξιν διὰ τῆς σχέσεως

$$V=\frac{3}{4}M\int_q^\infty\left(1-\frac{\xi^2}{a^2+\omega}-\frac{\eta^2}{b^2+\omega}-\frac{\zeta^2}{c^2+\omega}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{(a^2+\omega)\,(b^2+\omega)\,(c^2+\omega)}}\quad(9)$$

171. δ. Ὁρισθέντος ἤδη τοῦ δυναμικοῦ V, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς συνιστώσας τῆς ἕλξεως X, Y, καὶ Z παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox, oy καὶ oz τοῦ ἐλλειψοειδοῦς· καὶ ἂν μὲν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἡ συνάρτησις Φ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν συντεταγμένων (ξ,η,ζ) τοῦ ἑλκομένου σημείου, καὶ ἔχομεν ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως (3)

$$-\frac{\partial V}{\partial\xi}=-\Phi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}-\frac{2\xi}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{3}{2}M\xi\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)(c^2+u)}}\quad(10)$$

Ἐὰν ὅμως τὸ ἑλκόμενον σημεῖον (ξ,η,ζ) κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἕνεκα τῆς σχέσεως (8) q εἶναι συνάρτησις τοῦ (ξ,η,ζ), συνεπῶς V εἶναι ἐπίσης συνάρτησις τοῦ (ξ,η,ζ), καὶ ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial V}{\partial\xi}&=\frac{3}{2}M\xi\int_q^\infty\frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}\\&+\frac{3}{4}M\left|\left(1-\frac{\xi^2}{a^2+\omega}-\frac{\eta^2}{b^2+\omega}-\frac{\zeta^2}{c^2+\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\omega=q}\end{aligned}\right\}(11)$$

ὁ πρῶτος παράγων τοῦ δευτέρου ὅρου μηδενίζεται (8) διὰ $q=\omega$· ἐκ τῆς αὐτῆς σχέσεως (8) πορίζόμεθα διὰ διαφορήσεως

$$\frac{2\xi(a^2+\omega)\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi}-\xi^2}{(a^2+\omega)^2}-\frac{\eta^2}{(b^2+\omega)^2}-\frac{\zeta^2}{(c^2+\omega)^2}=0$$

$$=\frac{2\xi}{a^2+\omega}-\left|\frac{\xi^2}{(a^2+\omega)^2}+\frac{\eta^2}{(b^2+\omega)^2}+\frac{\zeta^2}{(c^2+\omega)^2}\right|\frac{\partial\omega}{\partial\xi}$$

ὅθεν

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=\frac{2\xi}{a^2+\omega}\cdot\frac{1}{A}\qquad\text{ἔνθα } A=\frac{\xi^2}{(a^2+\omega)^2}+\frac{\eta^2}{(b^2+\omega)^2}+\frac{\zeta^2}{(c^2+\omega)^2}$$

προφανῶς δὲ ἡ ποσότης A οὐδέποτε μηδενίζεται καὶ ἔχομεν οὕτω

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial V}{\partial\xi}&=X=\frac{3}{2}M\xi\int_q^\infty\frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}\\-\frac{\partial V}{\partial\eta}&=Y=\frac{3}{2}M\eta\int_q^\infty\frac{d\omega}{(b^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}\\-\frac{\partial V}{\partial\zeta}&=Z=\frac{3}{2}M\zeta\int_q^\infty\frac{d\omega}{(c^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}\end{aligned}\right\}\ldots(12)$$

ἔνθα $q=0$ ἐὰν τὸ σημεῖον (ξ,η,ζ) εὑρίσκηται ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Σημειωσις. Εὐκόλως ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὰς σχέσεις

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=0\quad\text{διὰ}\quad\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1>0$$

$$\text{καὶ}\quad\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=-4\pi\delta\quad\text{διὰ}\quad\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1<0$$

εὕρομεν τῷ ὄντι ἀνωτέρω (12)

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}=-\frac{3}{2}M\xi\int_q^\infty\frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}$$

ἔνθα $q=0$ διὰ τὰ ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κείμενα σημεῖα· διαφοροῦντες ἐκ νέου ἔχομεν
διὰ τὰ ἐντὸς σημεῖα

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}=-\frac{3}{2}M\int_0^\infty\frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}$$

καὶ διὰ τὰ ἐκτὸς

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}=-\frac{3}{2}M\int_q^\infty\frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)\,(b^2+\omega)\,(c^2+\omega)}}$$

$$+\frac{3}{2}M\left|\frac{\xi}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)\,(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\omega=q}$$

ἢ ἀντικαθιστῶντες $\dfrac{d\omega}{d\xi}$ διὰ τῆς τιμῆς του καὶ θέτοντες

$$D=\frac{1}{abc}\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}\qquad M=\frac{4}{3}\pi abc.\delta$$

ἔχομεν διὰ τὰ ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς σημεῖα

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}=-2\pi\delta\int_0^\infty\frac{d\omega}{D(a^2+\omega)}$$

171. ε. Ἐὰν εἰς τὴν ἄνω ἔκφρασιν (9) τοῦ V ἀντικαταστήσωμεν X, Y καὶ Z ἔχομεν

$$V=\tfrac{3}{4}M\int_q^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}-\tfrac{1}{2}[X\xi+Y\eta+Z\zeta]\ldots \quad (13)$$

Ἐὰν τὸ ἑλκόμενον σημεῖον (ξ,η,ζ) κεῖται ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, αἱ συνιστῶσαι τῆς ἕλξεως εἶναι

$$X=\tfrac{4}{3}\pi\mathbf{A}\xi \quad Y=\tfrac{4}{3}\pi\mathbf{B}\eta \quad Z=\tfrac{4}{3}\pi\mathbf{C}\zeta\ldots\ldots(14)$$

εἶναι δηλαδὴ ἀνάλογοι τῶν συντεταγμένων (ξ,η,ζ) τοῦ ἑλκομένου σημείου.

καὶ διὰ τὰ ἐκτὸς

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}=-2\pi\delta\int_q^\infty\frac{d\omega}{D(a^2+\omega)}+\frac{\pi\delta}{\Delta}\left|\frac{2\xi}{a^2+\omega}\right|^2\frac{1}{A}$$

ἔνθα Δ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ D διὰ $\omega=q$.

Ἔχομεν οὕτω προσθέτοντες τὰς ὁμοίας σχέσεις, διὰ τὰ ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κείμενα σημεῖα

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=-2\pi\delta\int_0^\infty\left|\frac{1}{a^2+\omega}+\frac{1}{b^2+\omega}+\frac{1}{c^2+\omega}\right|\frac{d\omega}{D}$$

καὶ διὰ τὰ ἐκτὸς αὐτοῦ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=-2\pi\delta\int_q^\infty\left|\frac{1}{a^2+\omega}+\frac{1}{b^2+\omega}+\frac{1}{c^2+\omega}\right|\frac{d\omega}{D}+\frac{4\pi\delta}{\Delta}$$

ἀλλὰ

$$\left|\frac{1}{a^2+\omega}+\frac{1}{b^2+\omega}+\frac{1}{c^2+\omega}\right|\frac{d\omega}{D}$$

$$=\frac{d\omega}{D}\cdot\frac{d[(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)]}{d\omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}$$

$$=\frac{d\omega}{D}\frac{d(D^2)}{d\omega}\cdot\frac{1}{D^2}=-2\frac{dD^{-1}}{d\omega}d\omega$$

καὶ κατὰ συνέπειαν

$$\int\left|\frac{1}{a^2+\omega}+\frac{1}{b^2+\omega}+\frac{1}{c^2+\omega}\right|\frac{d\omega}{D}=-\left|\frac{2}{D}\right|_0^\infty \text{ ἢ } =-\left|\frac{2}{D}\right|_q^\infty+\frac{4\pi\delta}{\Delta}$$

ὅθεν διὰ τὰ ἐντὸς σημεῖα

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=-2\pi\delta(2)=-4\pi\delta$$

καὶ διὰ τὰ ἐκτὸς

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}=-2\pi\delta\left|\frac{2}{\Delta}\right|+\frac{4\pi\delta}{\Delta}=0$$

(Lejeune-Dirichlet)

Ἐκ τῆς τιμῆς (13) τοῦ δυναμικοῦ, ἣν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$V=\Phi-\frac{2\pi}{3}[\mathbf{A}\xi^2+\mathbf{B}\eta^2+\mathbf{C}\zeta^2]\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

βλέπομεν, ὅτι *αἱ ἐσωτερικαὶ ἰσοσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι ἐλλειψοειδεῖς ὅμοιαι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δοθέντος ἐλλειψοειδοῦς ὧν οἱ ἄξονες εἶναι ἀνάλογοι ταῖς* $\mathbf{A}^{-1/2}\,\mathbf{B}^{-1/2}$ καὶ $\mathbf{C}^{-1/2}$· *αἱ ἐξωτερικαὶ ἰσοσταθμοι ἐπιφάνειαι δὲν εἶναι ἀλγεβρικαί.*

Ἡ ὁλικὴ ἕλξις εἶναι

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\frac{4\pi}{3}\sqrt{\mathbf{A}^2\xi^2+\mathbf{B}^2\eta^2+\mathbf{C}^2\zeta^2}$$

171. ζ. Ἐὰν, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ ἑλκομένου σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς διερχομένης εὐθείας, λάβωμεν ἕτερον σημεῖον $(\xi'\eta'\zeta')$, ἔχομεν

$$X'=\tfrac{4}{3}\pi\mathbf{A}\xi' \qquad Y'=\tfrac{4}{3}\pi\mathbf{B}\eta' \qquad Z'=\tfrac{4}{3}\pi\mathbf{C}\zeta'$$

ὅθεν

$$\frac{X}{X'}=\frac{\xi}{\xi'} \qquad \frac{Y}{Y'}=\frac{\eta}{\eta'} \qquad \frac{Z}{Z'}=\frac{\zeta}{\zeta'}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{\xi}{\xi'}=\frac{\eta}{\eta'}=\frac{\zeta}{\zeta'}=\frac{\rho}{\rho'}$$

ἔχομεν ἐπίσης $\quad \dfrac{X}{X'}=\dfrac{Y}{Y'}=\dfrac{Z}{Z'}=\dfrac{R}{R'}=\dfrac{\rho}{\rho'}$

ὅθεν

Αἱ ἐπὶ δύο σημείων, ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου καὶ ἐντὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κειμένων, ἐξασκούμεναι ἕλξεις, εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων ρ καὶ ρ' αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.

171. η. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἕλκον ἐλλειψοειδὲς εἶναι ἐκ περιστροφῆς· ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἕλξις φέρεται προφανῶς ἐν τῷ μεσημβρινῷ ἐπιπέδῳ, καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$b=c \quad \text{καὶ} \quad \zeta=0$$

αἱ ἄνω (12 καὶ 13) σχέσεις μετατρέπονται τότε εἰς

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{3}{4} M\int_q^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(b^2+\omega)}} - \frac{1}{2}(X\xi + Y\eta) \\ X &= \frac{3}{2} M\xi\int_q^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega)(b^2+\omega)\sqrt{a^2+\omega}} \\ Y &= \frac{3}{2} M\eta\int_q^\infty \frac{d\omega}{(b^2+\omega)(b^2+\omega)\sqrt{a^2+\omega}} \end{aligned}\right\} \cdot\cdot (17)$$

Τὰ ὁλοκληρώματα δὲ ταῦτα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν καὶ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Θέσωμεν πρὸς τοῦτο

$$b^2+\omega = \frac{b^2-a^2}{\psi^2} \text{ ὅθεν } d\omega = -2(b^2-a^2)\frac{d\psi}{\psi^3} \text{ καὶ } a^2+\omega = (b^2-a^2)\frac{1-\psi^2}{\psi^2}$$

ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν

$$\int_q^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega)(b^2+\omega)\sqrt{a^2+\omega}} = -\frac{2}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{(1-\psi^2)^3}}$$

$$\int_q^\infty \frac{d\omega}{(b^2+\omega)(b^2+\omega)\sqrt{a^2+\omega}} = -\frac{2}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}$$

$$\int_q^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(b^2+\omega)}} = -\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}$$

τὰ ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως ἐνταῦθα εἶναι $\psi_0 = \sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+q}}$ καὶ $\psi_1 = 0$.

171. θ. Ἐὰν τὸ ἐλλειψοειδὲς εἶναι ἐπίπλατυ $b>a$ καὶ ἔχομεν (ἐπ)ίπλατυ (ἐλλε)ιψοειδὲς

$$\int \frac{\psi^2 d\psi}{(1-\psi^2)\sqrt{1-\psi^2}} = \frac{\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} - \text{τοξ.ἡμ}\psi$$

$$\int \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} = \frac{1}{2}\left|\text{τοξ.ἡμ}\psi - \psi\sqrt{1-\psi^2}\right| \text{ καὶ } \int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} = \text{τοξ.ἡμ.}\psi$$

ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν X, Y καὶ V ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{3M\xi}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\left|\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2+q}} - \text{τοξἡμ}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+q}}\right| \\ Y &= \frac{3M\eta}{2\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\left|\text{τοξἡμ}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+q}} - \frac{\sqrt{(b^2-a^2)(a^2+q)}}{b^2+q}\right| \\ V &= \frac{3M}{\sqrt{2b^2-a^2}}\ \text{τοξ.ἡμ}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+q}} - \frac{1}{2}[X\xi + Y\eta] \end{aligned}\right\} \cdot\cdot (18)$$

ἔνθα $q=0$ διὰ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα, καὶ εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\xi^2}{a^2+q} + \frac{\eta^2}{b^2+q} = 1$$

διὰ τὰ ἐκτὸς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κείμενα σημεῖα.

171. ι. Ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐπιμήκους ἐλλειψοειδοῦς $b<a$· δυνάμεθα τότε νὰ θέσωμεν (ω εἶναι πάντοτε θετικὸν) ἐπίμηκες ἐλλειψοειδὲς

$$b^2+\omega = \frac{a^2-b^2}{\psi^2} \text{ ὅθεν } d\omega = -2(a^2-b^2)\frac{d\psi}{\psi^3} \text{ καὶ } a^2+\omega = (a^2-b^2)\frac{1+\psi^2}{\psi^2}$$

τὰ νέα ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως θὰ εἶναι $\psi_0 = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2+q}}$ καὶ $\psi_1 = 0$

ἔχομεν οὕτω

$$\int_q^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega)(b^2+\omega)\sqrt{a^2+\omega}} = -\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{(1+\psi^2)^3}}$$

$$\int_q^\infty \frac{d\omega}{(b^2+\omega)(b^2+\omega)\sqrt{a^2+\omega}} = -\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

$$\int_q^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(b^2+\omega)}} = -\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

ἀλλὰ

$$\int \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{(1+\psi^2)^3}} = \text{λογ}(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) - \frac{\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} = \text{λογ}(\psi + \sqrt{1+\psi^2})$$

καὶ

$$\int \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} = \frac{1}{2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2} - \text{λογ}(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right]$$

ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν X, Y καὶ V ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι

$$\begin{aligned} X &= \frac{3M\xi}{2\sqrt{(a^2-b^2)^3}}\left|\text{λογ}\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2+q}}{\sqrt{b^2+q}} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+q}}\right| \\ Y &= \frac{3M\eta}{2\sqrt{(a^2-b^2)^3}}\left|\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+q)}}{b^2+q} - \text{λογ}\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2+q}}{\sqrt{b^2+q}}\right| \quad (19) \\ V &= \frac{3M}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ \text{λογ}\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2+q}}{\sqrt{b^2+q}} - \frac{1}{2}(X\xi + Y\eta) \end{aligned}$$

171. κ. Ἐν τῇ περιπτώσει ἐλλειπτικοῦ κυλίνδρου δέον νὰ θέσωμεν $c=\infty$ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν $M=\frac{4}{3}\pi abc$· καὶ τότε θέτοντες

$$\frac{1}{b^2+\omega}=\varphi \quad \text{ὅθεν} \quad d\omega=-(b^2+\omega)^2 d\varphi \qquad \text{ἔχομεν}$$

$$X = 2\pi ab\xi\int_q^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)}} = 2\pi ab\xi\int_{\frac{1}{b^2+q}}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+(b^2-a^2)\varphi}}$$

$$Y = 2\pi ab\eta\int_q^{\infty} \frac{d\omega}{(b^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)}} = 2\pi ab\eta\int_{\frac{1}{b^2+q^2}}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+(a^2-b^2)\varphi}}$$

ἀλλὰ

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+(b^2-a^2)\varphi}} = \frac{2}{b^2-a^2}\sqrt{1+(b^2-a^2)\varphi}$$

καὶ

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+(a^2-b^2)\varphi}} = \frac{2}{a^2-b^2}\sqrt{1+(a^2-b^2)\varphi}$$

ὥστε

$$X = \frac{4\pi ab\xi[\sqrt{a^2+q}-\sqrt{b^2+q}]}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+q}} = \frac{4\pi ab\xi}{\sqrt{a^2+q}[\sqrt{a^2+q}+\sqrt{b^2+q}]}$$

$$Y = \frac{4\pi ab\eta[\sqrt{a^2+q}-\sqrt{b^2+q}]}{(a^2-b^2)\sqrt{b^2+q}} = \frac{4\pi ab\eta}{\sqrt{b^2+q}[\sqrt{a^2+q}+\sqrt{b^2+q}]} \quad (20)$$

ἔνθα $q=0$ ἐὰν $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}<1$ ἢ εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\xi^2}{a^2+q}+\frac{\eta^2}{b^2+q}-1=0 \quad \text{ἐὰν} \quad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}>1.$$

ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ($q=0$), ἔχομεν

$$X=\frac{4\pi ab}{a+b}\frac{\xi}{a} \qquad Y=\frac{4\pi ab}{a+b}\cdot\frac{\eta}{b}$$

καὶ ἡ ὅλη ἕλξις εἶναι

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{4\pi ab}{a+b}\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

σταθερὰ δηλαδὴ δι' ὅλα τὰ ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$$

κείμενα σημεῖα

Γεωμετρικὴ λύσις τοῦ Chasles.

172. Θεωρήσωμεν τὰς ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας ἐλλειψοειδεῖς ἐπιφανείας

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

καὶ

$$\frac{x^2}{n^2a^2}+\frac{y^2}{n^2b^2}+\frac{z^2}{n^2c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

καὶ ἔστωσαν, x,y,z σημεῖον ἐπὶ τῆς πρώτης τῶν ἐλλειψοειδῶν τούτων ἐπιφανειῶν, καὶ (ξ,η,ζ) ἕτερον σημεῖον τοῦ διαστήματος, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι πληροῦσι τὴν σχέσιν

$$\xi=\alpha\frac{x}{a} \qquad \eta=\beta\frac{y}{b} \qquad \zeta=\gamma\frac{z}{c} \quad \ldots\ldots (2)$$

ἔνθα α, β, γ εἶναι σταθεραὶ οἷαι δήποτε· εἰς πᾶν σημεῖον (x,y,z) τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ἢ (1') ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ διαστήματος (ξ,η,ζ)· ὅταν τὸ σημεῖον (x,y,z) μετατοπίζεται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) ἢ (1') τὸ σημεῖον ξ, η, ζ μετατοπίζεται ἐπὶ ἑτέρας ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ἢ

$$\frac{\xi^2}{n^2\alpha^2}+\frac{\eta^2}{n^2\beta^2}+\frac{\zeta^2}{n^2\gamma^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

ἣν καλοῦμεν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ πρώτῃ· βλέπομεν δέ, ὅτι *αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ταῖς (1) καὶ (1') εἶναι καὶ αὗται ὅμοιαι ἀλλήλαις καὶ κεῖνται ὁμοίως*· ἐκ τῶν σχέσεων (2) πορίζόμεθα

$$d\xi.d\eta.d\zeta=\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}dxdydz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

καὶ βλέπομεν, ὅτι
πᾶν μέρος ὄγκου ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας (1) ἢ (1') ἔχει λόγον πρὸς τὸν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας (3) ἢ (3') ὁριζόμενον ἀντίστοιχον ὄγκον ἴσον τῷ $\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$.

172. α. Ἐὰν αἱ σταθεραὶ α,β,γ πληρῶσι τὰς σχέσεις[1]

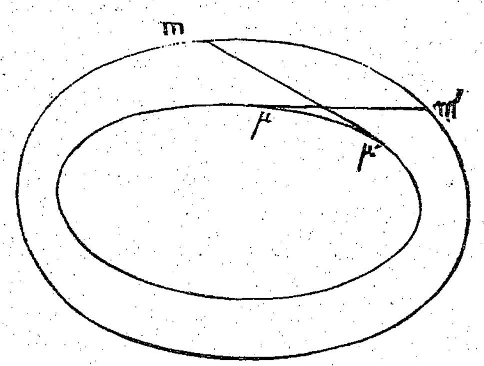
$$a^2-\alpha^2=b^2-\beta^2=c^2-\gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

τὰ ἐλλειψοειδῆ (1) καὶ (3) εἶναι ὁμοέστια· ὡς καὶ τὰ ἐλλειψοειδῆ (1') καὶ (3'). Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ,

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) λάβωμεν δύο σημεῖα $m\ (x,y,z)$ *καὶ*

[1] Ἔχουσι δηλαδὴ τὰς πρωτευούσας τομὰς αὐτῶν ὁμοεστίους.

ἢ *$m'(x'y'z')$ καὶ τὰ τούτοις ἀντιστοιχοῦντα $\mu\ (\xi,\eta,\zeta)$ καὶ $\mu'\ (\xi'\eta'\zeta')$ ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (3), ἔχομεν τὴν σχέσιν*



Σχ. 125.

$$m\mu' = m'\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Αἱ ἀποστάσεις $m\mu'$ καὶ $m'\mu$ εἶνα τῷ ὄντι

$$\overline{m\mu'}^2 = (x-\xi')^2 + (y-\eta')^2 + (z-\zeta')^2$$

$$\overline{m'\mu}^2 = (x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + (z'-\zeta)^2$$

ἢ ὡς ἐκ τῶν σχέσεων (2)

$$\overline{m\mu'}^2 = \left|x - \frac{\alpha}{a}x'\right|^2 + \left|y - \frac{\beta}{b}y'\right|^2 + \left|z - \frac{\gamma}{c}z'\right|^2$$

$$\overline{m'\mu}^2 = \left|x' - \frac{\alpha}{a}x\right|^2 + \left|y' - \frac{\beta}{b}y\right|^2 + \left|z' - \frac{\gamma}{c}z\right|^2$$

ὅθεν δι' ἀφαιρέσεως

$$\overline{m\mu'}^2 - \overline{m'\mu}^2 = \left|\frac{x^2}{a^2} - \frac{x'^2}{a^2}\right|(a^2-\alpha^2) + \left|\frac{y^2}{b^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right|(b^2-\beta^2) + \left|\frac{z^2}{c^2} - \frac{z'^2}{c^2}\right|(c^2-\gamma^2)$$

ἥτις μετατρέπεται (5) εἰς

$$\overline{m\mu'}^2 - \overline{m'\mu}^2 = (a^2-\alpha^2)\left|\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right)\right|$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα x,y,z καὶ x',y',z' κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1), ἡ ἐν τῇ παρενθέσει ποσότης μηδενίζεται, καὶ μένει

$$m\mu' = m'\mu$$

172. β. Ὑποθέσωμεν $n = 1 + \varepsilon$ ἔνθα ε εἶναι ποσότης ἐλαχίστη· αἱ ἐλλειψοειδεῖς ἐπιφάνειαι (1) καὶ (1') ὁρίζουσι στρῶμα ἐλλειψοειδὲς ἀπειροστοῦ πάχους, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἐλλειψοειδῶν (3) καὶ (3') ὁριζόμενον ἐλλειψοειδὲς στρῶμα ἀπειροστοῦ ἐπίσης πάχους.

Τὰ ἀπειροστὰ ταῦτα πάχη τῶν δύο ἐλλειψοειδῶν στρωμάτων, κατὰ τοὺς πρωτεύοντας ἄξονάς των, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῶν ὁριζουσῶν ταῦτα ἐξωτερικῶν ἐπιφανειῶν.

Τὰ πάχη τῶν ἐλλειψοειδῶν στρωμάτων εἶναι τῷ ὄντι

$$da = a - na \quad \text{καὶ} \quad d\alpha = \alpha - n\alpha$$

ὅθεν
$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{a-na}{\alpha-n\alpha} = \frac{a(1-n)}{\alpha(1-n)} = \frac{a}{\alpha}$$

172. γ. Ἔστωσαν m, m' δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρώτου ἐλλειψοειδοῦς στρώματος (A), καὶ μ, μ' τὰ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου στρώματος (α) ἀντίστοιχα τούτοις σημεῖα· dv καὶ dv' οἱ παρὰ τοῖς σημείοις m καὶ μ ὄγκοι τῶν ἐλλειψοειδῶν στρωμάτων. γεωμετρικὴ λύσις τοῦ Chasles

Ἔχομεν (4) $$\alpha\beta\gamma . dv = abc . dv'$$

ἐπειδὴ (6) δὲ $m\mu' = m'\mu$ ἡ σχέσις αὕτη μετατρέπεται εἰς

$$\alpha\beta\gamma\frac{dv}{m\mu'} = abc\,\frac{dv'}{m'\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

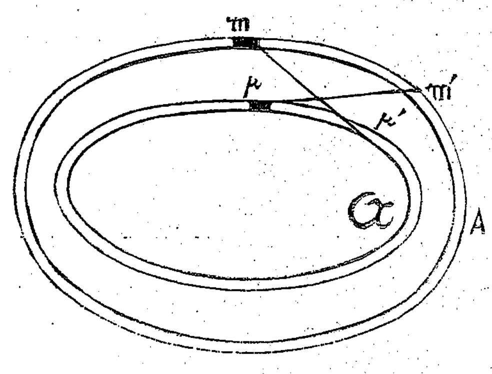
ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν τὰ σημεῖα m' καὶ μ' σταθερά, καὶ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἄνω σχέσιν ἐφ' ὅλων τῶν μερῶν τῶν στρωμάτων, ἔχομεν

$$\alpha\beta\gamma\Sigma\frac{dv}{m\mu'} = abc\Sigma\frac{dv'}{m'\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$\Sigma\dfrac{dv}{m\mu'}$ εἶναι τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος (A) παρὰ τῷ σημείῳ μ'.

$\Sigma\dfrac{dv'}{m'\mu}$ εἶναι τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος (α) παρὰ τῷ σημείῳ m'.

Ἐὰν τὸ στρῶμα (α) κεῖται ἐντὸς τοῦ στρώματος (A) οὐδεμίαν ὑφίσταται ἐκ τούτου ἕλξιν κατὰ τὴν πρότασιν (125) τοῦ Νεύτωνος· ὥστε



Σχ. 126.

$$\Sigma\frac{dv}{m\mu'} = \text{σταθερᾷ}$$

καὶ ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως (2) ἕπεται

$$\Sigma\frac{dv'}{m'\mu} = \text{σταθερᾷ}$$

παρ' ἅπασι τοῖς ἐπὶ τοῦ στρώματος (A) κειμένοις σημείοις m· ὅθεν ἡ πρότασις.

Τὸ δυναμικὸν ἐλλειψοειδοῦς στρώματος ἀπειροστοῦ πάχους, ὁριζομένου ὑπὸ ὁμοκέντρων, ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων ἐλλειψοειδῶν ἐπιφανειῶν, εἶναι σταθερὸν παρ' ἅπασι τοῖς ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ ἐπὶ ἐλλειψοειδοῦς ἐπιφανείας, ὁμοεστίου τῇ ὁριζούσῃ τὸ στρῶμα ἐξωτερικῇ ἐπιφανείᾳ, κειμένοις σημείοις· ἐκφράζεται δὲ τοῦτο διὰ τῆς σχέσεως

$$V = \Sigma\frac{dv'}{m'\mu} = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\Sigma\frac{dv}{m\mu'},$$

αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι λοιπὸν ὁμοέστιοι ἀλλήλαις καὶ τῇ ὁριζούσῃ τὸ στρῶμα ἐξωτερικῇ ἐπιφανείᾳ ἐλλειψοειδεῖς· ἡ ὑπὸ τοῦ

τρικὴ
τοῦ
es

ἐλλειψοειδοῦς στρώματος (α) ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ σημείου m ἕλξις εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (A)· συμπίπτει δηλαδὴ μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ περιβάλλοντος τὸ ἐλλειψοειδὲς (α) κώνου μὲ κορυφὴν m.
Ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ στρώματος (α) περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν, ὥστε
Ἡ ἐπὶ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ στρώματος (α) ἕλξις φέρεται καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ ταύτῃ.

172. δ. Θεωρήσωμεν ἤδη καὶ ἕτερον στρῶμα ἀπειροστοῦ πάχους ὅμοιον καὶ ὁμοέστιον τῷ A, περιβαλλόμενον καὶ τοῦτο ὑπὸ τοῦ στρώματος A· ἐὰν καλέσωμεν $\alpha'\beta'\gamma'$ τοὺς ἡμιάξονας τούτου, ἔχομεν

$$V_1 = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{abc}\Sigma\frac{dv}{m\mu''}$$

ἀλλ' ἐκ τοῦ θεωρήματος (125) τοῦ Νεύτωνος $\Sigma\dfrac{dv}{m\mu''} = \Sigma\dfrac{dv}{m\mu'}$

ὥστε
$$V_1 = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}V$$

ὅθεν ἡ πρότασις

Τὰ δυναμικὰ δύο ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων ἐλλειψοειδῶν ὁμοεστίων στρωμάτων ἀπειροστοῦ πάχους παρά τινι σημείῳ ἐκτὸς αὐτῶν κειμένῳ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ μάζαι τούτων.

Καὶ αἱ ἕλξεις λοιπόν, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ σημείου τὰ δύο στρώματα, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ μάζαι τούτων.

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} : \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}$$

172. ε. Ἐὰν ἤδη λάβωμεν δύο ὁμοέστια * ἐλλειψοειδῆ στρώματα πεπερασμένου πάχους, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ταῦτα ὡς συγκείμενα ἐκ στρωμάτων ἀπειροστοῦ πάχους καὶ ἐπεκτείνωμεν καὶ ἐνταῦθα τὴν ἄνω πρότασιν· οὕτω

Τὰ δυναμικὰ δύο ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων ἐλλειψοειδῶν στρωμάτων πεπερασμένου πάχους, (ὧν αἱ ἐξωτερικαὶ ἐπιφάνειαι εἶναι ὁμοέστιοι ὡς καὶ αἱ ἐσωτερικαὶ) παρά τινι σημείῳ ἐκτὸς αὐτῶν κειμένῳ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ μάζαι τούτων.
Καὶ αἱ ἕλξεις λοιπόν, ἃς ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ σημείου τὰ δύο ταῦτα στρώματα εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ μάζαι τούτων.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας τῶν ἐσωτερικῶν ἐπιφανειῶν ἴσους τῇ ἑστιακῇ ἀποστάσει καὶ τῷ μηδενί, ἔχομεν τὴν πρότασιν (169.β) τοῦ Maclaurin.

* Δύο ἐλλειψοειδῆ στρώματα καλοῦνται ὁμοέστια, ὅταν αἱ ὁρίζουσαι ταῦτα ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ ἐλλειψοειδεῖς ἐπιφάνειαι εἶναι ὁμοέστιοι.

172. ζ. Θεωρήσωμεν ἐλλειψοειδὲς στρῶμα (α,β,γ) ἀπειροστοῦ πάχους ε, καὶ σημεῖον c ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Τὸ στρῶμα ἐξασκεῖ (125.β) ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου ἕλξιν $4\pi\delta\varepsilon$. Ἐντὸς τοῦ στρώματος τούτου θεωρήσωμεν ἕτερον ἐλλειψοειδὲς στρῶμα (a,b,c) ὁμοέστιον τῷ πρώτῳ· τὸ ἐσωτερικὸν τοῦτο στρῶμα πάχους e ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ c ἕλξιν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (α,β,γ), καὶ ἔχουσαν λόγον πρὸς τὴν $4\pi\delta\varepsilon$ οἷον λόγον ἔχουσιν αἱ μάζαι τῶν στρωμάτων, αἵτινες εἶναι

γεωμετρικὴ λύσις τοῦ Chasles

$$4\pi\delta'\alpha\beta\gamma\frac{\varepsilon}{\Pi} \text{ διὰ τὸ πρῶτον καὶ } 4\pi\delta abc\frac{e}{p} \text{ διὰ τὸ δεύτερον} \,..\, (1)$$

Π εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀπὸ τοῦ παρὰ τῷ σημείῳ c ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, καὶ p ἡ ἀπόστασις τοῦ αὐτοῦ κέντρου ἀπὸ ἐφαπτομένου τινὸς ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (a,b,c).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὰς μάζας ταύτας ἴσας

$$4\pi\delta'\alpha\beta\gamma\frac{\varepsilon}{\Pi} = 4\pi\delta abc\frac{e}{p}$$

καὶ αἱ ἕλξεις, ἃς ἐξασκοῦσιν ἀμφότερα τὰ στρώματα ἐπὶ τοῦ σημείου $c\,(\xi,\eta,\zeta)$ εἶναι ἴσαι· ὥστε ἡ ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τούτου σημείου ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ δευτέρου στρώματος (a,b,c,e) ἕλξις εἶναι

$$R = 4\pi\delta'\varepsilon = 4\pi\delta\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{p}\Pi \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, (2)$$

τὰ ἰθύνοντα δὲ ταύτης συνημίτονα εἶναι

$$\frac{\Pi\xi}{\alpha^2},\ \frac{\Pi\eta}{\beta^2},\ \frac{\Pi\zeta}{\gamma^2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, (3)$$

τὰς ποσότητας α,β,γ ὁρίζουσιν αἱ σχέσεις

$$\alpha^2 = a^2 + \lambda \qquad \beta^2 = b^2 + \lambda \qquad \gamma^2 = c^2 + \lambda$$

ἔνθα λ εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda} + \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda} = 1 \,\ldots\ldots\ldots\, (4)$$

172. η. Ἵνα εὕρωμεν τὸ δυναμικὸν V τοῦ στρώματος (a,b,c,e) ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{dV}{dn} = -R$$

ἔνθα dn εἶναι ἡ παρὰ τῷ σημείῳ (ξ,η,ζ) ἀπόστασις δύο $(a^2+\lambda,\ b^2+\lambda,\ c^2+\lambda)$ καὶ $(a^2+\lambda+d\lambda,\ b^2+\lambda+d\lambda,\ c^2+\lambda+d\lambda)$ εἰς ἀπειροστὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν κειμένων ἐλλειψοειδῶν ἐπιφανειῶν.

Τὸ κατὰ τὸ σημεῖον (ξ,η,ζ) ἐφαπτόμενον τοῦ πρώτου ἐλλειψοειδοῦς ἐπίπεδον εἶναι

$$\frac{\xi}{a^2+\lambda}x + \frac{\eta}{b^2+\lambda}y + \frac{\zeta}{c^2+\lambda}z - 1 = 0$$

ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ ἐπὶ τῆς παραπλησίου ὁμοεστίου ἐπιφανείας κειμένου σημείου $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι

$$dn = \frac{\Pi\xi}{a^2+\lambda}d\xi + \frac{\Pi\eta}{b^2+\lambda}d\eta + \frac{\Pi\zeta}{c^2+\lambda}d\zeta$$

ἔνθα λ εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (172.ζ.4).

Διαφοροῦντες τὴν σχέσιν ταύτην (172.ζ.4) ἔχομεν

$$2\left[\frac{\xi d\xi}{a^2+\lambda} + \frac{\eta d\eta}{b^2+\lambda} + \frac{\zeta d\zeta}{c^2+\lambda}\right]$$

$$= \left[\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]d\lambda = \frac{d\lambda}{\Pi^2}$$

ὥστε

$$dn = \frac{\Pi\xi}{a^2+\lambda}d\xi + \frac{\Pi\eta}{a^2+\lambda}d\eta + \frac{\Pi\zeta}{a^2+\lambda}d\zeta = \frac{d\lambda}{2\Pi}$$

καὶ

$$dV = -R\,dn = -4\pi\delta\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{p}\Pi\frac{d\lambda}{2\Pi} = -2\pi\delta\frac{abc.}{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{p}d\lambda$$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως ἔχομεν τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος (a,b,c,e) παρὰ τῷ σημείῳ (ξ,η,ζ)

$$V = -2\pi\delta abc\frac{e}{p}\int_\infty^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

(διότι $V = 0$ εἰς τὸ ∞).

172. θ. Εὑρόντες ἤδη τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος (a,b,c,e) δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ δυναμικὸν στερεοῦ ἐλλειψοειδοῦς· χωρίζομεν πρὸς τοῦτο τὸ στερεὸν ἐλλειψοειδὲς εἰς στρώματα ἀπειροστοῦ πάχους, καὶ ὁρίζομεν τὸ δυναμικὸν ἑκάστου τῶν στρωμάτων τούτων· ἀθροίζοντες εἶτα τὰ δυναμικὰ ταῦτα, ἔχομεν τὸ δυναμικὸν τοῦ ὅλου ἐλλειψοειδοῦς, καὶ ἐκ τούτου τὰς συνιστώσας τῆς ἕλξεως παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν, ἃς ἐνταῦθα θὰ ὑπολογίσωμεν ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς σχέσεως (172.ζ.2)

Θεωρήσωμεν τὸ ἐλλειψοειδὲς (a,b,c) καὶ στρῶμά τι ἀπειροστοῦ πάχους ἐντὸς αὐτοῦ, οἱ ἡμιάξονες τῆς μέσης ἐπιφανείας τοῦ ὁποίου εἶναι

$$\theta a \qquad \theta b \qquad \theta c$$

ἡ ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια τούτου ἔχουσιν ἡμιάξονας

$$(\theta+\tfrac{1}{2}d\theta)a \quad (\theta+\tfrac{1}{2}d\theta)b \quad (\theta+\tfrac{1}{2}d\theta)c \quad \text{καὶ} \quad \frac{e}{p} = \frac{d\theta}{\theta}$$

γεωμετρικὴ λύσις τοῦ Chasles

ἔστω $\delta = f(\theta)$ ἡ πυκνότης· τὸ δυναμικὸν τοῦ στρώματος $(\theta \pm \frac{1}{2}d\theta)$ εἶναι

$$-2\pi\delta\theta a.\theta b.\theta c.\frac{d\theta}{\theta}\int_\infty^\lambda \frac{d\omega}{\sqrt{(\theta^2a^2+\omega)(\theta^2b^2+\omega)(\theta^2c^2+\omega)}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

τὸ δυναμικὸν τοῦ ὅλου ἐλλειψοειδοῦς εἶναι οὕτω

$$V = -2\pi abc\int_0^1 \theta^2\delta d\theta \int_\infty^\lambda \frac{d\omega}{\sqrt{(\theta^2a^2+\omega)(\theta^2b^2+\omega)(\theta^2c^2+\omega)}} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

ἔνθα λ εἶναι συνάρτησις τοῦ θ, ἣν μᾶς δίδει ἡ σχέσις

$$\frac{\xi^2}{\theta^2a^2+\lambda} + \frac{\eta^2}{\theta^2b^2+\lambda} + \frac{\zeta^2}{\theta^2c^2+\lambda} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Τὴν ἄνω τιμὴν τοῦ V δυνάμεθα νὰ θέσωμεν καὶ ὑπὸ ἑτέραν μορφὴν λαμβάνοντες $\lambda = \theta^2 u$· ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἄνω σχέσει (3) ἔχομεν

$$\theta^2 = \frac{\xi^2}{a^2+u} + \frac{\eta^2}{b^2+u} + \frac{\zeta^2}{c^2+u}$$

διαφοροῦντες τὴν σχέσιν (3) πορίζόμεθα

$$\frac{d\lambda}{d(\theta^2)}\left[\frac{\xi^2}{(a^2+u)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2+u)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2+u)^2}\right]$$

$$+\left|\frac{a^2\xi^2}{(a^2+u)^2} + \frac{b^2\eta^2}{(b^2+u)^2} + \frac{c^2\zeta^2}{(c^2+u^2)}\right| = 0 \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς $\lambda = \theta^2 u$ ἔχομεν διαφοροῦντες

$$\frac{d\lambda}{d(\theta^2)} = u + \theta^2\frac{du}{d(\theta^2)} \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{du}{d(\theta^2)} = \frac{1}{\theta^2}\left|\frac{d\lambda}{d(\theta^2)} - u\right|$$

ἢ ἀντικαθιστῶντες $\frac{d\lambda}{d(\theta^2)}$ διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ (4)

$$\frac{du}{d(\theta^2)}\left|\frac{\xi^2}{(a^2+u)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2+u)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2+u)^2}\right|$$

$$= -\frac{1}{\theta^2}\left|\frac{\xi^2}{a^2+u} + \frac{\eta^2}{b^2+u} + \frac{\zeta^2}{c^2+u}\right| = -\frac{1}{\theta^2}\theta^2 = -1$$

οὕτω

$$du\left|\frac{\xi^2}{(a^2+u)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2+u)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2+u)^2}\right| = -d(\theta^2) = -2\theta d\theta$$

Τὸ δυναμικὸν διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων τούτων ($\omega = u\theta^2$) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$V=\pi abc\int_\infty^q \delta du \left|\frac{\xi^2}{(a^2+u)^2}+\frac{\eta^2}{(b^2+u)^2}+\frac{\zeta^2}{(c^2+u)^2}\right|$$

$$\times\int_\infty^u \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

ἔνθα q εἶναι ἡ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\xi^2}{a^2+q}+\frac{\eta^2}{b^2+q}+\frac{\zeta^2}{c^2+q}=1 \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

ἐὰν ἡ πυκνότης εἶναι ὁμοιόμορφος δι' ὅλα τὰ στρώματα, δυνάμεθα ν' ἁπλοποιήσωμεν τὸ ἄνω ὁλοκλήρωμα. Θέτοντες τῷ ὄντι

$$\varphi(u)=\int_\infty^u \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} = \int_\infty^u f(u)du \text{ καὶ } \frac{1}{\sigma+u}=\psi(u)$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν γνωστὴν σχέσιν τῆς κατὰ μέρη ὁλοκληρώσεως

$$\int\frac{d\psi}{du}\varphi(u)du = \psi(u)\varphi(u)-\int\varphi(u)\frac{d\varphi}{du}du$$

ἔχομεν

$$\int_\infty^q\frac{du}{(\sigma+u)^2}\int_\infty^u f(u)du = -\frac{1}{\sigma+q}\int_\infty^q f(u)du+\int_\infty^q\frac{1}{\sigma+u}f(u)du$$

$$= \frac{1}{\sigma+q}\int_q^\infty f(u)du - \int_q^\infty \frac{1}{\sigma+u}f(u)du$$

ἐὰν δὲ ἐν τῇ σχέσει ταύτῃ ἀντικαταστήσωμεν διαδοχικῶς σ διὰ τῶν a^2, b^2, c^2 καὶ προσθέσωμεν, φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν

$$V=\pi abc\Big[\Big(\frac{\xi^2}{a^2+q}+\frac{\eta^2}{b^2+q}+\frac{\zeta^2}{c^2+q}\Big)\int_q^\infty\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

$$-\int_q^\infty\Big(\frac{\xi^2}{a^2+u}+\frac{\eta^2}{b^2+u}+\frac{\zeta^2}{c^2+u}\Big)\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}\Big|$$

ἣν ὡς ἐκ τῆς σχέσεως (6) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$V=\frac{3}{4}M\int_q^\infty\Big(1-\frac{\xi^2}{a^2+u}-\frac{\eta^2}{b^2+u}-\frac{\zeta^2}{c^2+u}\Big)\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν ἄνω σχέσιν (171.γ.9)· ἐκ ταύτης δὲ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς καὶ προηγουμένως τὰς συνιστώσας X, Y, Z τῆς ἕλξεως, ἃς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας οὕτω.

γεωμετρικὴ λύσις τοῦ Chasles

172. ι. Θεωρήσωμεν τὸ ἐλλειψοειδὲς (a,b,c) καὶ τὸ ἐν αὐτῷ στρῶμα

$$\theta a \qquad \theta b \qquad \theta c$$

τοῦτο ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου x,y,z ἕλξιν (172.ζ.2)

$$4\pi\delta\,\frac{\theta a.\theta b.\theta c.}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{e}{p}\Pi$$

ἔνθα

$$\alpha^2=a^2\theta^2+\lambda \qquad \beta^2=b^2\theta^2+\lambda \qquad \gamma^2=c^2\theta^2+\lambda$$

καὶ λ εἶναι ἡ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\xi^2}{\theta^2a^2+\lambda}+\frac{\eta^2}{\theta^2b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2}{\theta^2c^2+\lambda}=1$$

Ἡ προβολὴ X τῆς ἕλξεως εἶναι (172.ζ.3)

$$X=4\pi\delta\theta^3\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{p}\,\Pi\frac{\Pi\xi}{\alpha^2}=4\pi\delta\theta^2\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}d\theta\,\frac{\Pi^2\xi}{\alpha^2}$$

ἔχομεν δὲ

$$\frac{1}{\Pi^2}=\frac{\xi^2}{\alpha^4}+\frac{\eta^2}{\beta^4}+\frac{\zeta^2}{\gamma^4}=\frac{\xi^2}{(a^2\theta^2+\lambda)^2}+\frac{\eta^2}{(b^2\theta^2+\lambda)^2}+\frac{\zeta^2}{(c^2\theta^2+\lambda)^2}$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν $\lambda=\theta^2u$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν

$$\alpha\beta\gamma=\sqrt{(a^2\theta^2+\lambda)(b^2\theta^2+\lambda)(c^2\theta^2+\lambda)}$$

$$=\sqrt{(a^2\theta^2+\theta^2u)(b^2\theta^2+\theta^2u)(c^2\theta^2+\theta^2u)}=\theta^3\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$$

καὶ $$\frac{\theta^4}{\Pi^2}=\frac{\xi^2}{(a^2+u)^2}+\frac{\eta^2}{(b^2+u)^2}+\frac{\zeta^2}{(c^2+u)^2}=-\frac{2\theta d\theta}{du}$$

ἢ $$\Pi^2=-\frac{\theta^3}{2d\theta}du$$

καὶ ἡ συνιστῶσα X τῆς ἕλξεως τοῦ στρώματος θ γίνεται διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων τούτων

$$2\pi\delta abc\xi\,\frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

ἡ δὲ ὁλικὴ ὁριζόντειος ἕλξις

$$X = 2\pi abc\xi \int_q^\infty \frac{\delta du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου

$$Y = 2\pi abc\eta \int_q^\infty \frac{\delta du}{(b^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

$$Z = 2\pi abc\zeta \int_q^\infty \frac{\delta du}{(c^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

173. Τελευτῶντες θ' ἀποδείξωμεν τὴν γνωστὴν πρότασιν τοῦ *Ivory* κατὰ τὴν ὁποίαν.

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος a στερεοῦ ἐλλειψοειδοῦς (a,b,c) προβολὴ Χ τῆς ἕλξεως, ἣν ἐξασκεῖ τοῦτο ἐπὶ σημείου $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου, ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος προβολὴν Ξ τῆς ἕλξεως, ἣν ἐξασκεῖ τὸ διὰ τοῦ σημείου μ διερχόμενον ὅμοιον καὶ ὁμοέστιον τῷ πρώτῳ ἐλλειψοειδὲς (α,β,γ) ἐπὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῷ μ σημείου m (x, y, z) τοῦ ἐλλειψοειδοῦς(a,b,c), ἴσον τῷ $\dfrac{bc}{\beta\gamma}$.

Ἡ προβολὴ Χ ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$X = 2\pi abc\xi \int_q^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c+u)}}$$

καὶ ἡ Ξ διὰ τῆς

$$\Xi = 2\pi\alpha\beta\gamma x \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(\alpha^2+u)(\beta^2+u)(\gamma^2+u)}}$$

ὅπου $\qquad \alpha^2 = a^2+q \qquad \beta^2 = b^2+q \qquad \gamma^2 = c^2+q$

ἐὰν ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ σχέσει θέσωμεν

$$q+u = \omega \qquad \text{ὅθεν} \qquad d\omega = du$$

μετατρέπεται αὕτη εἰς

$$\Xi = 2\pi\alpha\beta\gamma x \int_q^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega)\sqrt{(a^2+\omega)(b^2+\omega)(c^2+\omega)}}$$

ὥστε

$$\frac{X}{\Xi} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\xi}{x}$$

ἀλλ' ἐκ τῶν ἀντιστοίχων σημείων m καὶ μ

$$\xi = \frac{\alpha}{a}x$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\frac{X}{\Xi} = \frac{bc}{\beta\gamma}$$

173. α. Ὁ Duhamel παρατηρεῖ, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Ivory ὑφίσταται καὶ ἐὰν τὰ ἐλλειψοειδῆ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ σφαιρῶν, ὅτε

$$\frac{X}{\Xi} = \frac{r^2}{\rho^2}.$$

ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὸν νόμον τῆς ἕλξεως τοιοῦτον, ὥστε αἱ ὑπὸ σφαιρικοῦ στρώματος ἐξασκούμεναι ἕλξεις ἐπὶ σημείου κειμένου ἐν τῷ ὑπ' αὐτοῦ περικλειομένῳ χώρῳ νὰ ἰσορροπῶσι, ἡ ἕλξις Ξ τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας ἐπὶ σημείου τινὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐσωτερικῆς σφαίρας ἰσοῦται τῇ ἕλξει Κ, ἣν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ ἐσωτερικὴ σφαῖρα· καὶ ἔχομεν

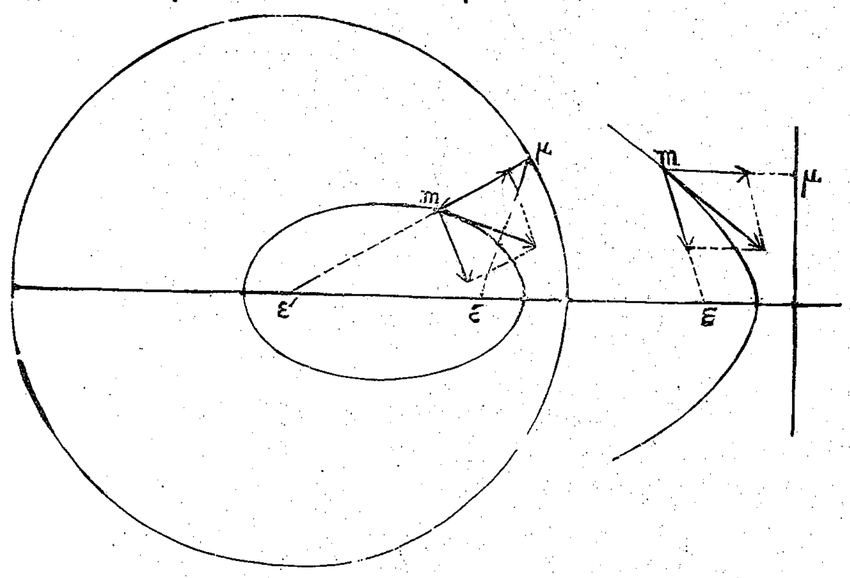
$$X = K\frac{r^2}{\rho^2}$$

οὕτω· *ἡ μικροτέρα σφαῖρα ἕλκει τὰ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἐπὶ τῆς ἰδίας ἐπιφανείας κείμενα σημεῖα, κατὰ λόγον ἀντίστροφον τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κέντρου ταύτης.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ

Α'. **Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ κενῷ.**

Ἔλλειψις / Παραβολή εἶναι ἡ ἐπίπεδος τροχιὰ κινητοῦ m ἰσάκις ἀπέχοντος σταθεροῦ τινὸς σημείου ε (ἑστία) καὶ κύκλου περιβάλλοντος τὸ ε / εὐθείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ ε (ἰθύνων κύκλος, ἰθύνουσα)· ἡ εὐθεῖα εε' εἶναι προφανῶς ἄξων τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ μέσον ταύτης κέντρον· ἔλλειψις παραβολή



Σχ. 127.

αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος τοῦ m κατὰ τὰς εὐθείας $m\mu$ καὶ $m\varepsilon$ εἶναι ἴσαι διότι ἰδιότης τῆς ἐφαπτομένης

$$m\mu = m\varepsilon$$

ὥστε ἡ φορὰ τῆς ταχύτητος (ἥτις συμπίπτει τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς τροχιᾶς) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\mu m \varepsilon$.

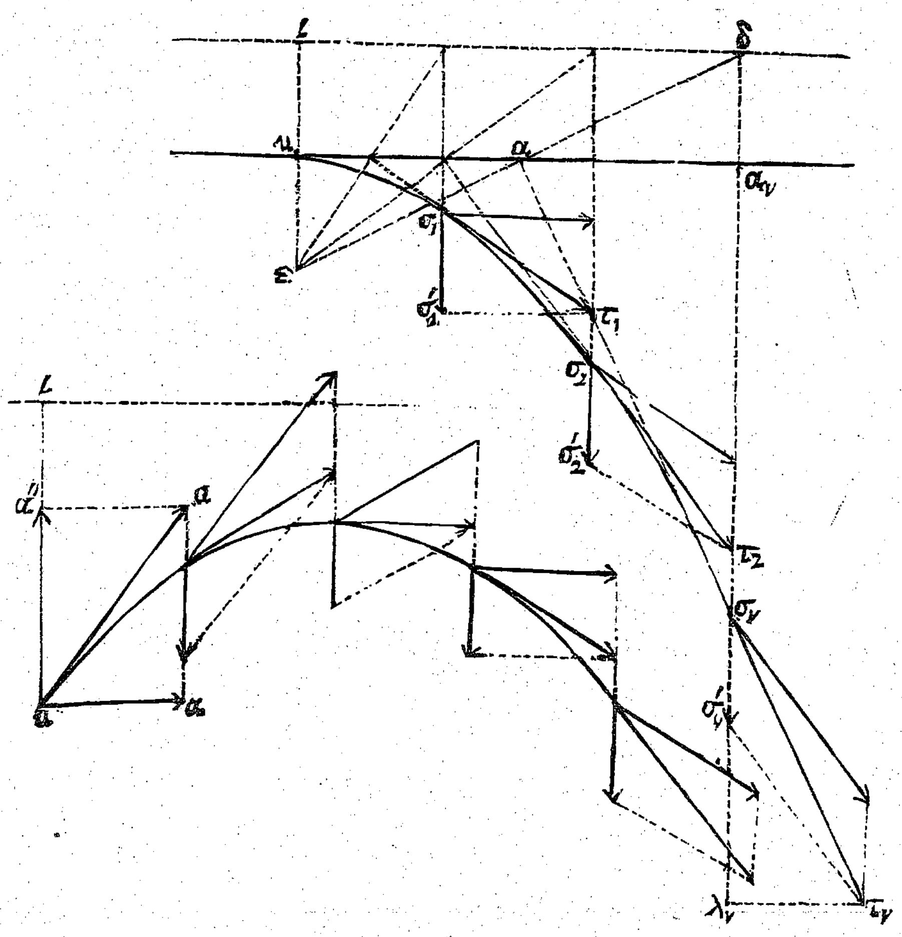
Ἡ ταχύτης σώματος, πίπτοντος κατακορύφως ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς βαρύτητος, αὐξάνει κατὰ gt ἐν χρονικῷ διαστήματι t· (g ἐμφαίνει τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος ὑποτιθεμένης σταθερᾶς). κατακόρυφος ταχύτης

Τὸ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυθὲν ὕψος ἐν χρονικῷ διαστήματι t εἶναι διάστημα διανυθὲν κατακορύφως

$$\frac{1}{2} g t^2$$

οχιὰ ήματος πτομένου ιζοντίως αραβολή)

Θεωρήσωμεν ἤδη σῶμα ῥιπτόμενον ὁριζοντίως ἀπὸ τοῦ σημείου u μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = ub$. Ἐὰν οὐδεμία ἕδρα ἐπὶ τοῦ σημείου δύναμις, θὰ ἐκινεῖτο τοῦτο ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου ua, διανύον διάστημα ub ἐν τῷ πρώτῳ δευτερολέπτῳ· ἀλλ' ἡ βαρύτης δρᾷ ἐπὶ τοῦ σώματος ἅμα ῥιφθέντος· ὡς ἐκ τῆς δράσεως δὲ ταύτης κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον διήνυσε τὸ σῶμα κατακορύφως διάστημα $\frac{1}{2}g$ καὶ ἀπέ-



Σχ. 128.

κτησε κατακόρυφον ταχύτητα $g=\sigma_1\sigma_1'$. εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου τὸ κινητὸν εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον σ_1 φερόμενον μὲ ταχύτητα $\sigma_1\tau_1$· ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος ταύτης διατηρουμένης κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον (1ος νόμος τῆς κινήσεως) διανύει τὸ κινητὸν τὸ διάστημα $\sigma_1\tau_1$, ἐνῷ συγχρόνως, ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ δράσεως τῆς βαρύτητος, κατέρχεται τοῦτο κατακορύφως διανύον διάστημα

$\tau_1\sigma_2=\frac{1}{2}g$, καὶ ἀποκτῶν νέαν κατακόρυφον ταχύτητα $g = \sigma_2\sigma_2'$· ὥστε τὸ κινητὸν συμπίπτει ἤδη μετὰ τοῦ σ_2 καὶ φέρεται μὲ ταχύτητα $\sigma_2\tau_2$· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μετὰ ν δευτερόλεπτα, εὑρισκόμενον παρὰ τῷ σημείῳ σ_ν, τὸ κινητὸν διήνυσε κατακορύφως διάστημα $\alpha_\nu\sigma_\nu=\frac{1}{2}g\nu^2$, καὶ ἀπέκτησε κατακόρυφον ταχύτητα $\sigma_\nu\lambda_\nu = g\nu$, φερόμενον ἐνταῦθα μὲ ταχύτητα $\sigma_\nu\tau_\nu$· προεκβαλλομένη αὕτη συναντᾷ τὴν ὁριζόντιον ua_ν παρὰ τῷ σημείῳ a, καὶ ἔχομεν ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις $\lambda_\nu\sigma_\nu\tau_\nu$ καὶ $a\sigma_\nu a_\nu$

$$\frac{aa_\nu}{\lambda_\nu\tau_\nu} = \frac{a_\nu\sigma_\nu}{\sigma_\nu\lambda_\nu} = \frac{\nu}{2} \text{ ὅθεν } \quad aa_\nu = \frac{\nu.\lambda_\nu\tau_\nu}{2} = \frac{1}{2}ua_\nu$$

Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν $a\delta$ καθέτως τῇ $a\tau_\nu$ ἔχομεν $\varepsilon a = a\delta$, ὅθεν καὶ $\sigma_\nu\delta=\sigma_\nu\varepsilon$· τὸ κινητὸν διαγράφει οὕτω παραβολὴν μὲ ἑστίαν τὴν ε καὶ ἰθύνουσαν τὴν ιδ· ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις $au\varepsilon$ καὶ $aa_\nu\sigma_\nu$ ἔχομεν

$$\frac{u\varepsilon}{aa_\nu} = \frac{au}{a_\nu\sigma_\nu} \quad \text{ἢ} \quad u\varepsilon = aa_\nu\frac{au}{a_\nu\sigma_\nu} = \frac{v_0^2\nu^2}{2g\nu^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

ὥστε τὸ ὕψος ui ἰσοῦται ἐκείνῳ εἰς ὃ θ' ἀνήρχετο τὸ βλῆμα ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητός του, ἐὰν ἐρρίπτετο κατακορύφως.

Ἡ ταχύτης $\sigma_\nu\tau_\nu$ τοῦ βλήματος κατὰ τὸ σημεῖον σ_ν εἶναι

ταχύτης βλήματος ῥιπτομένου ὁριζοντίως

$$\sigma_\nu\tau_\nu = \sqrt{\sigma_\nu\lambda_\nu^2+\lambda_\nu\tau_\nu^2} = \sqrt{g^2\nu^2+v_0^2}$$

ἐὰν δ' ἀφήσωμεν σῶμα νὰ καταπέσῃ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς βαρύτητος ἀπὸ τοῦ σημείου δ' ἀποκτᾷ, τοῦτο παρὰ τῷ σημείῳ σ_ν ταχύτητα ἴσην τῇ

$$= \sqrt{2g(\delta a_\nu + a_\nu\sigma_\nu)} = \sqrt{2g\left(\frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{2}g\nu^2\right)} = \sqrt{v_0^2+g^2\nu^2}$$

ἴσην δηλαδὴ τῇ ταχύτητι ἣν κέκτηται τὸ βλῆμα· οὕτω.

Ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ ἰσοῦται ἐκείνῃ, ἣν θ' ἀπέκτα πίπτον ἀπὸ τῆς ἰθυνούσης ιδ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος.

Ἐὰν ἤδη ῥίψωμεν τὸ βλῆμα λοξῶς κατὰ τὴν φορὰν ua μὲ ταχύτητα ua δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν ταύτην εἰς δύο, τὴν μὲν ua' ὁριζόντιον ἥτις διατηρεῖται καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως, τὴν δὲ ua'' κατακόρυφον, ἥτις μηδενίζεται μετὰ παρέλευσιν χρονικοῦ διαστήματος

τροχιὰ βλήματος ῥιπτομένου λοξῶς (παραβολή)

$$t=\frac{ua''}{g}$$

κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην τὸ βλῆμα εὑρίσκεται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ὑφ' ἃς καὶ τὸ ὁριζοντίως ῥιπτόμενον· διαγράφει λοιπὸν καὶ τοῦτο παραβολήν, ἧς ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται εἰς ὕψος

$$\frac{v_0^2 ἡμ^2 α}{2g}$$

ἄνω τῆς ὁριζοντίου ua'. ἡ ἰθύνουσα τῆς παραβολῆς ταύτης εἶναι ὁριζόντιος εἰς ἀπόστασιν

$$\frac{v_0^2 συν^2 α}{2g}$$

ὑπεράνω τῆς κορυφῆς τῆς τροχιᾶς, ἢ εἰς ἀπόστασιν

$$\frac{v_0^2 ἡμ^2 α}{2g}+\frac{v_0^2 συν^2 α}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}$$

ὑπεράνω τοῦ σημείου u ἀφ' οὗ ἐρρίφθη τὸ βλῆμα· οὕτω ἡ θέσις τῆς ἰθυνούσης εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος κλίσεως $α$ τοῦ βάλλοντος ὅπλου, ἐξαρτᾶται δ' ἁπλῶς ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος v_0.

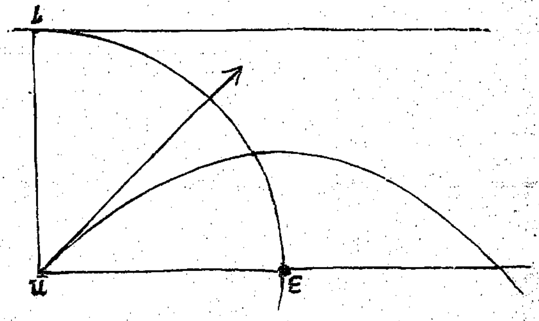
ὥστε ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου u βάλωμεν βλήματα κατὰ διαφόρους διευθύνσεις μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, θὰ διαγράψωσι ταῦτα παραβολὰς *διερχομένας διὰ τοῦ σημείου u καὶ ἐχούσας κοινὴν τὴν ἰθύνουσαν ιδ.*

όπος τῶν στιῶν τῶν ροχιῶν

Θεωρήσωμεν τὴν ἑστίαν ε μιᾶς τῶν παραβολῶν τούτων· ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραβολῆς ἔχομεν

$$uε = uι = \text{σταθερᾷ}$$

οὕτω *ἡ ἑστία ε κεῖται ἐπὶ κύκλου, οὗτινος κέντρον εἶναι τὸ u καὶ ἀκτὶς ἡ uι.*

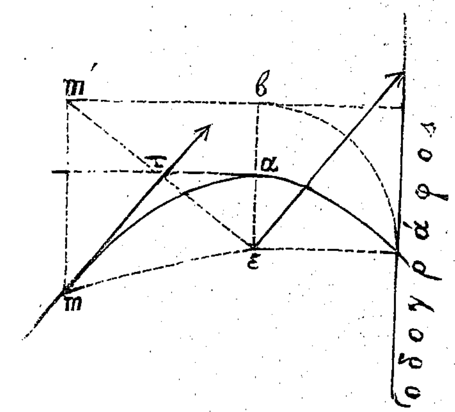


Σχ. 129·

Ἡ *κλίσις* δὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸ ὅπλον ἵνα τὸ βλῆμα διαγράψῃ τὴν παραβολήν, ἧς ἑστία εἶναι ἡ ε, ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς ταύτης παρὰ τῷ σημείῳ u καὶ συνεπῶς *διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ιuε.*

Ἡ ταχύτης παρὰ τῷ σημείῳ m εἶναι $\sqrt{2g.mm'}=\sqrt{2.gmε.}$ ἡ $εm'$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα καὶ τέμνει ταύτην ἐπὶ τῆς παρὰ τῷ

κορυφῇ $α$ ἐφαπτομένης $ατ$. τὰ τρίγωνα $mετ$ καὶ $ετα$ εἶναι ὅμοια καὶ δίδουσι



$$\frac{mε}{τε}=\frac{2mε}{m'ε}=\frac{m'ε}{2aε}=\frac{m'ε}{εb}$$

ὅθεν

$$2mε=\frac{m'ε^2}{bε}$$

καὶ

$$v=m'ε\sqrt{\frac{g}{εb}}=K.m'ε$$

Σχ. 130.

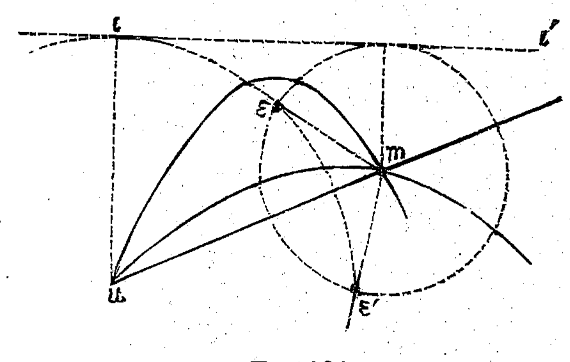
ἡ ταχύτης εἶναι οὕτω ἀνάλογος τῷ τμήματι $εm'$ καὶ κάθετος τούτῳ· ὥστε ἡ ὁδογράφος εἶναι ἡ ἰθύνουσα ἐστραμμένη κατὰ 90^0· ὁδογράφος

$m'b$ εἶναι ἡ ὁριζόντιος καὶ $εb$ ἡ κατακόρυφος ταχύτης παρὰ τῷ σημείῳ m.

Ἐκ τῆς σχέσεως $v^2=2gmm'$ βλέπομεν ὅτι ἡ ταχύτης εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς τὰ αὐτὰ ὁριζόντια ἐπίπεδα, καὶ ἐκ τῆς ὁδογράφου, ὅτι σχηματίζει ἴσας μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίας.

Δοθέντος σημείου τινὸς m ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τῆς βολῆς u, εὑρεῖν τὴν κλίσιν τοῦ ὅπλου, δι' ἧς δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου. βολὴ ἐπὶ δοθέντος σημείου

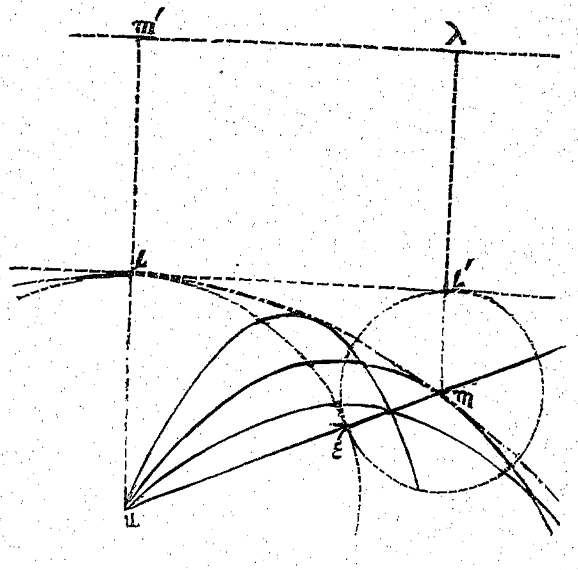
Τὸ σημεῖον m, κείμενον ἐπὶ τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος, ἀπέχει ἰσάκις τῆς ἰθυνούσης $ι\,ι'$ καὶ τῆς ἀγνώστου ἑστίας $ε$ τῆς αὐτῆς τροχιᾶς· οὕτω, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου m ὡς κέντρου γράψωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον τῆς ἰθυνούσης $ι\,ι'$, τέμνει οὗτος τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ἑστιῶν



Σχ. 131.

1ον) Εἰς δύο σημεῖα $ε\,ε'$ ἅτινα εἶναι ἑστίαι τροχιῶν δι' ὧν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου m· αἱ ἀντιστοιχοῦσαι κλίσεις τοῦ ὅπλου συμπίπτουσι ταῖς διχοτομούσαις τῶν γωνιῶν $ιuε$ καὶ $ιuε'$.

2ον) Ὁ κύκλος m ἐφάπτεται τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν ἑστιῶν παρὰ τῷ σημείῳ ε, ὅπερ εἶναι ἡ ἑστία τῆς ζητουμένης τροχιᾶς· ἡ ἀντιστοιχοῦσα κλίσις τοῦ ὅπλου διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\iota u m$. πέραν τοῦ τελευταίου τούτου σημείου m δὲν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου om, διότι ὁ ἐφαπτόμενος τῆς ἰθυνούσης κύκλος m δὲν συναντᾷ τὸν κύκλον τῶν ἑστιῶν.



Σχ. 132.

Ζητήσωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τοῦ μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένου σημείου τούτου m, ἐπὶ τῶν διὰ τοῦ u διερχομένων διαφόρων ἐπιπέδων. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ὁριζόντιον εὐθεῖαν $\lambda m'$ εἰς ἀπόστασιν $u\iota$ ὑπεράνω τῆς $\iota\,\iota'$ ἔχομεν

$$m\lambda = m\iota' + \iota'\lambda = m\varepsilon + \varepsilon u = mu$$

Οὕτω τὸ σημεῖον m ἀπέχον ἰσάκις τοῦ σταθεροῦ σημείου τῆς βολῆς u καὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας $\lambda m'$,

...ραβολὴ ...φαλείας

διαγράφει παραβολήν, ἣν ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της καλοῦσι **παραβολὴν ἀσφαλείας.**

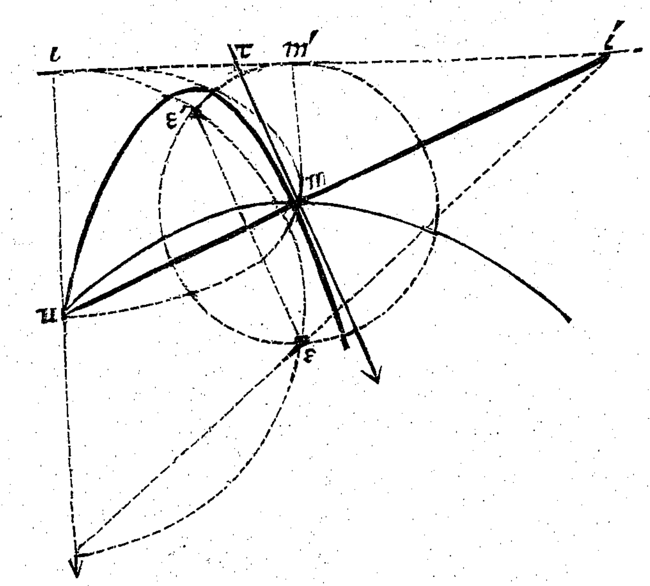
Ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ταύτης παρὰ τῷ σημείῳ m διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $um\iota'$· ἀλλὰ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς um παρὰ τῷ σημείῳ m διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $um\lambda$· ἡ παραβολὴ τῆς ἀσφαλείας ἐφάπτεται λοιπὸν τῆς παραβολῆς um καὶ *περιβάλλει αὕτη τὰς τροχιὰς τῶν βλημάτων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ ῥίψωμεν ἐκ τοῦ σημείου u.*

Εὐκόλως δὲ βλέπομεν ἐκ τῶν ἄνω γεωμετρικῶν κατασκευῶν, ὅτι αἱ δύο κλίσεις uf καὶ uf' τοῦ ὅπλου, δι' ὧν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἶναι συμμετρικαὶ ἑκατέρωθεν τῆς κλίσεως δι' ἧς βάλλομεν εἰς τὸ μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένον σημεῖον τῆς um.

...λὴ καθέτως ...ιπέδῳ

Ῥῖψαι βλῆμα κροῦον τὸ ἐπίπεδον $u\iota$ καθέτως

Ἐκ τοῦ σημείου ι' ἔνθα ἡ εὐθεῖα um συναντᾷ τὴν $\iota\,\iota'$ φέρομεν τὴν $\iota'\nu$, ἥτις τέμνει τὸν κύκλον τῶν ἑστιῶν κατὰ τὸ σημεῖον ε, οὗτινος τὸ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν $u\iota'$ εἶναι τὸ ε′. ἐκ τοῦ ε φέρω τὴν κατακόρυφον $\varepsilon m m'$· αἱ διχοτομοῦσαι um καὶ $m\tau$ τῶν κατὰ τὸ σημεῖον m γωνιῶν $\varepsilon \hat{m} \varepsilon'$ καὶ $\varepsilon' \hat{m} m'$ εἶναι κάθετοι ἀλλήλαις· ἡ δευτέρα δὲ $m\tau$ ὡς διχοτομοῦσα τῆς $\varepsilon' m m'$ ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς, ἧς ἑστία εἶναι ἡ ε′, ἥτις ὁρίζει οὕτω τὴν διεύθυνσιν, ἣν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ὅπλον, ἵνα τὸ βλῆμα κρούσῃ καθέτως τὸ ἐπίπεδον um· καὶ ἐπειδὴ ἡ εm εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\iota\,\iota'$, τὸ m εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς, ἧς ἑστία εἶναι ἡ ε, καὶ ἡ σχετικὴ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ταχύτης εἶναι ὁριζόντιος.



Σχ. 133.

Εὐκόλως δὲ βλέπομεν, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τούτων εἶναι ἡ ἐν τῷ ἄνω σχήματι ἔλλειψις.

Μέχρι τοῦδε ὑπεθέσαμεν τὴν ἐκ τῆς βαρύτητος ἐπιτάχυνσιν σταθερὰν τὴν ἔντασιν καὶ τὴν φοράν, ἐνῷ πραγματικῶς μεταβάλλεται αὕτη κατὰ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος ἀντιστρόφως τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς ἀποστάσεως ρ τοῦ κινητοῦ, καὶ φέρεται διαρκῶς πρὸς τὸ κέντρον τοῦτο. ἡ βαρύτης ὑποτίθεται ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως

Ἐὰν τὸ σῶμα ἀφεθῇ ἐλεύθερον πίπτει τοῦτο διαγράφον κατακόρυφον εὐθεῖαν· ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu}{\rho^2} \qquad ἤ \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mu}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$$

ὅθεν δι' ὁλοκληρώσεως

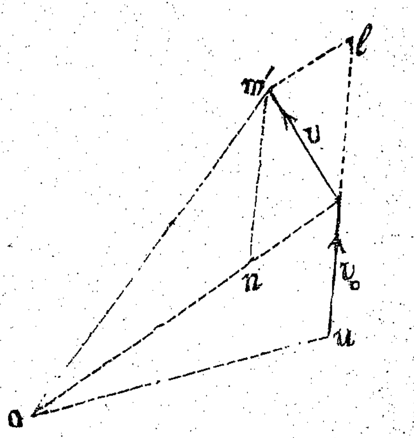
$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \frac{\upsilon^2}{2} = \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

ἔνθα ρ_0 εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ ἕλκοντος κέντρου τῆς γῆς.

Ἐὰν τὸ σῶμα ῥιφθῇ λοξῶς μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, διαγράφει τοῦτο καμπύλην ἐπίπεδον τροχιάν.

1ον) Τὰ ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος διαγραφόμενα ἐν ἴσοις χρόνοις ἐμβαδὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστω τῷ ὄντι um τὸ ἐν τῇ πρώτῃ καὶ mm' τὸ ἐν τῇ δευτέρᾳ μονάδι τοῦ χρόνου διανυθὲν τόξον τῆς τροχιᾶς· τὸ mm' συνίσταται ἐκ τοῦ ml ἴσου τῷ um, ὅπερ ὀφείλεται τῇ ἀρχικῇ ταχύτητι, καὶ τοῦ mn ὅπερ ὀφείλεται τῇ πρὸς τὸ κέντρον 0 φερομένῃ ἐπιταχύνσει.



Σχ. 135.

Τὸ τρίγωνον oml ἔχον μετὰ τοῦ omu κοινὴν τὴν κορυφὴν o καὶ ἴσην τὴν βάσιν ($um = ml$) ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τοῦτο ἐμβαδόν.

Τὸ αὐτὸ τρίγωνον oml ἔχον μετὰ τοῦ omm' κοινὴν τὴν βάσιν om καὶ τὴν κορυφὴν l ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει διὰ τῆς κορυφῆς, ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τοῦτο ἐμβαδόν.

Ὥστε καὶ τὰ τρίγωνα oum καὶ omm' εἶναι ἴσων ἐμβαδῶν ο.ε.δ. τὸ τῇ μονάδι τοῦ χρόνου ἀντιστοιχοῦν ἐμβαδὸν καλοῦμεν γ.

2ον) Ἡ ταχύτης υ τοῦ βλήματος παρὰ τῷ σημείῳ m εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀπ' αὐτῆς ἀποστάσεως δ τοῦ κέντρου τῆς ἕλξεως.

Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν $mm' = \upsilon$ ἔχομεν

$$\upsilon\delta = 2\gamma \qquad \text{ὅθεν} \qquad \upsilon = \frac{2\gamma}{\delta}$$

3ον) Ἡ περὶ τὸ σημεῖον 0 περιστροφικὴ ταχύτης τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος om εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος ταύτης.

Ἔχομεν τῷ ὄντι

$$\text{εμβ.}\, omm' = \frac{1}{2}\rho^2\omega = \gamma$$

ὅθεν

$$\omega = \frac{2\gamma}{\rho^2}$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἐξ ὡρισμένου σημείου u ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, ἧς κέντρον εἶναι τὸ 0, ῥίπτομεν βλήματα μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα ὑπὸ διαφόρους κλίσεις· θὰ διαγράψωσι ταῦτα (100.α) ἐλλειπτικὰς τροχιάς, ὧν ἡ ἑτέρα τῶν ἑστιῶν συμπίπτει μετὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς 0. Ὁ μέγας ἄξων πασῶν τῶν τροχιῶν τούτων εἶναι (104) ὁ αὐτὸς καὶ ἴσος τῷ oi· ὁ κύκλος ταχύτητος μηδὲν (ἰθύνων κύκλος) oi εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς τροχιάς. τροχιὰ τοῦ βλήματος (ἔλλειψις)

Τὸ σημεῖον u τῆς τροχιᾶς ἀπέχει ἐξ ἴσου τῆς ἑτέρας ἑστίας ε καὶ τοῦ ἰθύνοντος κύκλου· καὶ ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ἀπόστασις ui εἶναι σταθερά,

Ἡ ἑτέρα ἑστία τῶν τροχιῶν, ἃς διαγράφει βλῆμα βαλλόμενον ὑπὸ διαφόρους κλίσεις μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, κεῖται ἐπὶ κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον τῆς βολῆς u καὶ ἐφαπτομένου τοῦ ἰθύνοντος κύκλου. τόπος τῶν ἑστιῶν τῶν τροχιῶν

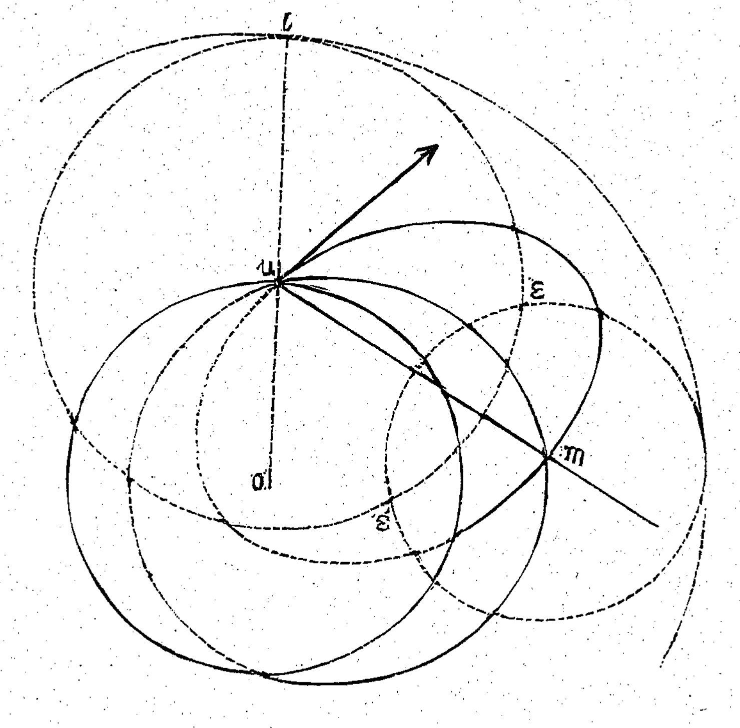
Δοθείσης τῆς ἑστίας ε εὑρεῖν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ τροχιᾷ ταύτῃ κλίσιν τοῦ ὅπλου.

Ἡ κλίσις αὕτη, συμπίπτουσα τῇ ἀρχικῇ ταχύτητι, ἐφάπτεται τῆς τροχιᾶς κατὰ τὸ σημεῖον u καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν iuε.

Δοθέντος σημείου τινὸς m ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τῆς βολῆς u, εὑρεῖν τὴν κλίσιν τοῦ ὅπλου, δι' ἧς δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου. βολὴ ἐπὶ δοθέντος σημείου

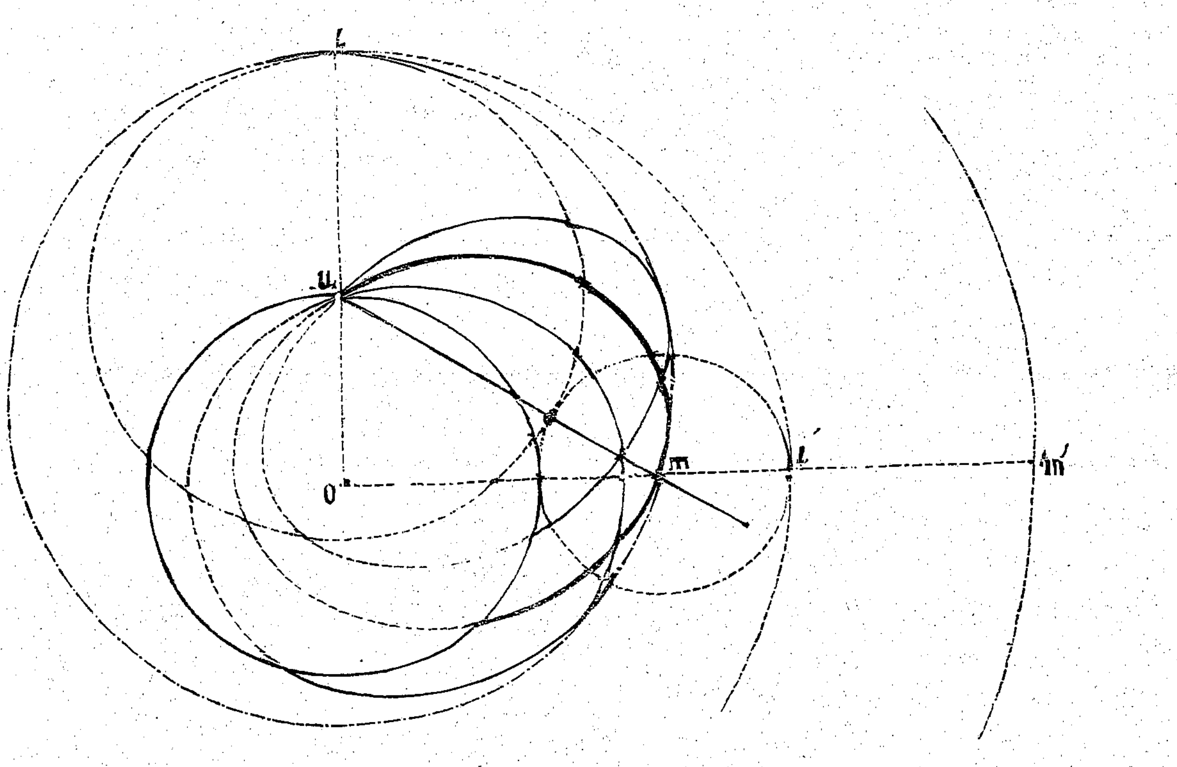
Τὸ σημεῖον m κείμενον ἐπὶ τῆς ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος ἀπέχει ἰσάκις τοῦ ἰθύνοντος κύκλου, καὶ τῆς ἀγνώστου ἑστίας ε τῆς αὐτῆς τροχιᾶς. Οὕτω ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου m ὡς κέντρου γράψωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ ἰθύνοντος κύκλου, τέμνει οὗτος τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ἑστιῶν·

1ον) εἰς δύο σημεῖα ε ε', ἅτινα εἶναι ἑστίαι τροχιῶν δι' ὧν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου m· αἱ ἀντιστοιχοῦσαι κλίσεις τοῦ ὅπλου συμπίπτουσι ταῖς διχοτομούσαις τῶν γωνιῶν $\iota u \varepsilon$ καὶ $\iota u \varepsilon'$



Σχ. 135'.

2ον) ὁ κύκλος m ἐφάπτεται τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν ἑστιῶν

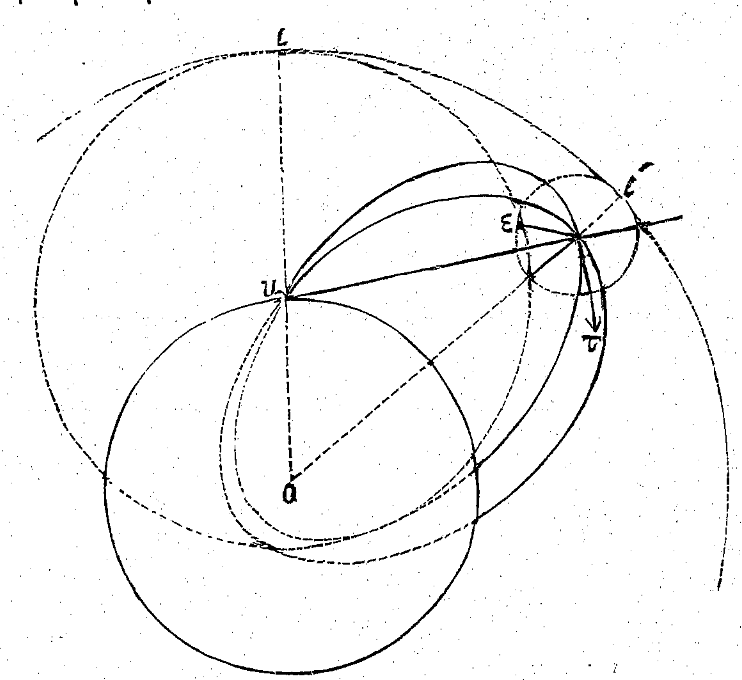


Σχ. 136.

παρὰ τῷ σημείῳ ε, ὅπερ εἶναι ἡ ἑστία τῆς ζητουμένης τροχιᾶς· ἡ ἀντιστοιχοῦσα κλίσις τοῦ ὅπλου διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\iota u m$· πέραν ~~τοῦ τελευταίου~~ τούτου σημείου m δὲν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ~~om, διότι ὁ ἐφαπτόμενος τοῦ ἰθύνοντος κύκλου~~ κύκλος m δὲν συναντᾷ τὸν κύκλον τῶν ἑστιῶν.

Ζητήσωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τοῦ μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένου σημείου τούτου m ἐπὶ τῶν διὰ τοῦ u διερχομένων διαφόρων ἐπιπέδων· χαράξωμεν τὸν κύκλον $\lambda m'$ μὲ κέντρον o καὶ ἀκτῖνα τὴν $o\lambda = o\iota + u\iota$. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον m ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν ε ἔχομεν $m\varepsilon = m\iota'$ ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς $u\varepsilon = \iota' m'$ ὥστε $mm' = mu$ οὕτω τὸ σημεῖον m (ἀπέχον ἰσάκις τοῦ σταθεροῦ σημείου τῆς βολῆς u καὶ τοῦ σταθεροῦ κύκλου $\lambda m'$) διαγράφει ἔλλειψιν, (ἧς ἑστίαι εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς καὶ τὸ σημεῖον τῆς βολῆς,) ἣν ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της καλοῦσιν **ἔλλειψιν ἀσφαλείας.** Ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως ταύτης παρὰ τῷ σημείῳ m διχοτομεῖ τὴν γωνίαν umm'· ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως ε διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\varepsilon m \iota'$· οὕτω· ἔλλειψις ἀσφαλείας
αἱ ἐλλείψεις $[u,o]$ καὶ $[\varepsilon,o]$ ἐφάπτονται ἀλλήλων παρὰ τῷ σημείῳ m, καὶ ἡ ἔλλειψις $[u,o]$ περιβάλλει τὰς τροχιὰς ὅλων τῶν βλημάτων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ῥίψωμεν ἀπὸ τοῦ σημείου u μὲ ὡρισμένην ἀρχικὴν ταχύτητα v_0.

Ῥῖψαι βλῆμα κροῦον τὸ ἐπίπεδον um καθέτως. βολὴ καθέτως ἐπιπέδῳ



Σχ. 137.

Ἔστω ε ἡ ἑστία τῆς ζητουμένης τροχιᾶς καὶ m τὸ σημεῖον ἔνθα τὸ βλῆμα κρούει καθέτως τὸ ἐπίπεδον· ἡ ταχύτης $m\tau$ διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν $\varepsilon m\iota'$ καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν ἐσωτερικὴν γωνίαν $\varepsilon m o$· ὥστε τὰ σημεῖα m, ε' καὶ o κεῖνται ἐπ' εὐθείας· τὸ δὲ σημεῖον m εἶναι προφανῶς ἡ κορυφὴ τῆς δευτέρας τροχιᾶς δι' ἧς δυνάμεθα νὰ βάλωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου m.

Τὸ σημεῖον m κεῖται ἐπὶ ἐλλείψεως.

Β΄. Βραχυχρονισμὸς καὶ ἰσοχρονισμὸς τῆς κυκλοειδοῦς.

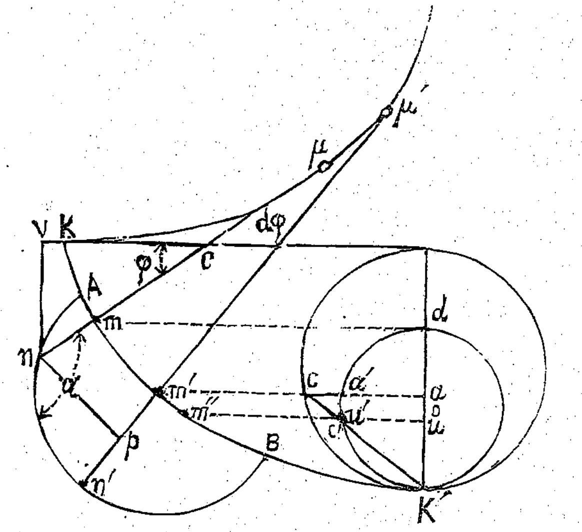
βραχυχρονισμὸς

Ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου k εἰς τὸ k' βραχυτάτη μετάβασις κινητοῦ m πίπτοντος ὑπὸ τὴν ἄμεσον δρᾶσιν τῆς βαρύτητος, ἐπιτυγχάνεται ὅταν ἡ τροχιὰ συμπίπτῃ τῇ ὑπὸ τῶν σημείων k καὶ k' ὁριζομένῃ κυκλοειδεῖ.

Ὑποθέσωμεν τῷ ὄντι ὅτι, κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ Β μετάβασιν τοῦ κινητοῦ, ἀκολουθεῖ τοῦτο τὴν τροχιὰν $\mathrm{A}nn'\mathrm{B}$, καὶ ζητήσωμεν τὸν χρόνον ἐν ᾧ διηνύθη τὸ τόξον τοῦτο.

Τὸ κινητὸν πίπτον ἀπὸ τοῦ σημείου k ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, κέκτηται (14.α.1) παρὰ τῷ σημείῳ n ταχύτητα

$$\mathrm{v} = \sqrt{2g.n\nu}$$



Σχ. 138.

ὥστε

$$\text{τόξον } nn' = \sqrt{2g.n\nu}\,dt.$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως

$$t = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{nn'}{\sqrt{2g.n\nu}}$$

ἔχομεν δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ $nc\nu$

$$\nu n = cn.\acute{\eta}\mu\varphi$$

καὶ ἐν τῷ τριγώνῳ $nn'p$

$$nn' = \frac{np}{\acute{\eta}\mu\alpha} = \frac{\mu n d\varphi}{\acute{\eta}\mu\alpha}$$

$$= \frac{\mu c + cn}{\acute{\eta}\mu\alpha} d\varphi$$

ἔνθα np εἶναι τόξον κύκλου μὲ κέντρον τὸ μ (κέντρον καμπυλότητος τῆς κυκλοειδοῦς kk') καὶ ἀκτῖνα τὴν μn· ἀλλ' ἐκ γνωστῆς ἰδιότητος τῆς κυκλοειδοῦς

$$cm = c\mu = 2a\acute{\eta}\mu.\varphi$$

ἔνθα a εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ γεννήτορος τῆς κυκλοειδοῦς κύκλου· θέτοντες δὲ $cn = \rho$ ἔχομεν

$$\nu n = \rho\acute{\eta}\mu\varphi \quad \text{καὶ} \quad nn' = \frac{\mu c + cn}{\acute{\eta}\mu\alpha} d\varphi = \frac{\mu c + \rho}{\acute{\eta}\mu\alpha} d\varphi$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἄνω τιμῇ τοῦ χρόνου ἔχομεν

$$t = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{(2a\acute{\eta}\mu\varphi + \rho)}{\acute{\eta}\mu\alpha\sqrt{2g\rho\acute{\eta}\mu\varphi}} d\varphi$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha = {}^1/_2\pi$ ἔχομεν $\acute{\eta}\mu\alpha = 1$ καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{2a\acute{\eta}\mu\varphi + \rho}{\sqrt{2g\rho\acute{\eta}\mu\varphi}} d\varphi = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(\sqrt{\rho} + \frac{2a\acute{\eta}\mu\varphi}{\sqrt{\rho}}\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{2g\acute{\eta}\mu\varphi}}$$

εἶναι ἔλασσον τοῦ προηγουμένου.

Ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ τελευταίου τούτου εἶναι ἄθροισμα δύο ἄλλων, ὧν τὸ γινόμενον

$$\sqrt{\rho}\cdot\frac{2\alpha\acute{\eta}\mu\varphi}{\sqrt{\rho}} = 2\alpha\acute{\eta}\mu\varphi$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ρ· ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τούτου ἐπιτυγχάνεται, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι, καὶ ἔχομεν

$$\rho = 2\alpha\acute{\eta}\mu\varphi$$

σχέσις ἥτις συνδυαζομένη μετὰ τῆς ὑποθέσεως

$$\acute{\eta}\mu\alpha = 1$$

δίδει τὴν ἐπὶ τῆς κυκλοειδοῦς $kABk'$ κίνησιν τοῦ m.

(Ossian Bonnet)

οχρονισμὸς ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ ἄνω ὁλοκληρώματι, ἔχομεν τὴν διάρκειαν τῆς ἡμιαιωρήσεως ἀπὸ τοῦ k μέχρι τοῦ k'

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

ἥτις δεικνύει τὸν ἰσοχρονισμὸν τῆς κυκλοειδοῦς, ὃν ἄλλως δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν καὶ στοιχειωδῶς οὕτω.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ κινητὸν ἄρχεται καταπίπτον ἀπὸ τοῦ σημείου m, ὅπερ προβάλλομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς κυκλοειδοῦς εἰς τὸ d· ἐπὶ δὲ τῆς $k'd$ ὡς διαμέτρου γράφομεν κύκλον, καὶ θεωροῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν κίνησιν τοῦ σημείου a', ἐπὶ τῆς αὐτῆς μετὰ τοῦ m' ὁριζοντίου· ἔχομεν προφανῶς

$$\frac{\text{ταχύτης τοῦ } a'}{\text{ταχύτητα τοῦ } m'} = \frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{\text{τόξον } a'u'}{\text{τόξον } m'm''} = \frac{\text{τόξον } a'u'}{\text{εὐθ. τμῆμα } cc'}$$

ἔχομεν δὲ

$$\frac{cc'}{ck'} = \frac{au}{ak'} \text{ ὅθεν } m'm'' = cc' = ck'\frac{au}{ak'} = au\sqrt{\frac{2a}{ak'}}$$

καὶ

$$\frac{a'u'}{au} = \frac{oa'}{aa'} \text{ ὅθεν } a'u' = au\frac{oa'}{aa'} = \frac{oa'}{\sqrt{ad.ak'}}au$$

παρατηροῦντες δὲ ὅτι $\upsilon = \sqrt{2g.ad}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{oa'}{\sqrt{ad.2a}} \quad \text{ὅθεν} \quad \upsilon' = oa'\sqrt{\frac{g}{a}}$$

ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου dk' ταχύτης υ' τοῦ σημείου a' εἶναι λοιπὸν σταθερά, καὶ ἔχομεν

$$\text{ἡμιπεριφέρεια } da'u'k' = \pi.oa' = \upsilon'T = oa'\sqrt{\frac{g}{a}}.T$$

ὅθεν ἡ διάρκεια τῆς ἀπὸ τοῦ m μέχρι τοῦ k' πτώσεως

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

ο. ε. δ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α'.

Κινητικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

			Σελὶς
Εισαγωγη		Ὁρισμοὶ καὶ θεμελιώδεις σχέσεις τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας	1— 22
Κεφαλαιον	I.	Περὶ ταχύτητος..................	24— 38
»	II.	Περὶ ἐπιταχύνσεως................	39— 71
»	III.	Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ κενῷ καὶ	72— 78
		Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ ἀέρι...	79— 88
»	IV.	Κεντρικαὶ ἐπιταχύνσεις καὶ	89—100
		Κίνησις τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον.	100—111
»	V.	Κίνησις σημείου μὴ ἐλευθέρου ἐπὶ ἀκάμπτου γραμμῆς ἐπιπέδου.	112—133
		Κίνησις σημείου μὴ ἐλευθέρου ἐπὶ ἀκάμπτου γραμμῆς στρεβλῆς.	134—135
		Κίνησις σημείου μὴ ἐλευθέρου ἐπὶ ἀκάμπτου ἐπιφανείας	135—144

ΜΕΡΟΣ Β'.

Δυναμικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

»	VI	Νόμοι τῆς κινήσεως.	145—205
»	VII.	Ἕλξις τῶν σωμάτων	206—235
»	VIII.	Περὶ ἐνεργείας	236—266
»	IX.	Δυναμικὸν τῆς βαρύτητος.........	267—313
		Ἕλξις ἐλλειψοειδοῦς.............	313—336
Παραρτημα		Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ κενῷ....	337—348
		Βραχυχρονισμὸς καὶ ἰσοχρονισμὸς τῆς κυκλοειδοῦς	349—350