ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟΝ ΣΧΟΛΕΙΟΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

Παραδοθέντα κατὰ τὸ Σχολικὸν ἔτος 1887 – 1888

ΥΠΟ

Π. ΠΡΩΤΟΠΑΠΑΔΑΚΗ

Καθηγητοῦ παρὰ τῷ αὐτῷ Σχολείῳ

ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ

Ἐκ τοῦ Λιθογραφείου τοῦ Στρατιωτικοῦ Σχολείου

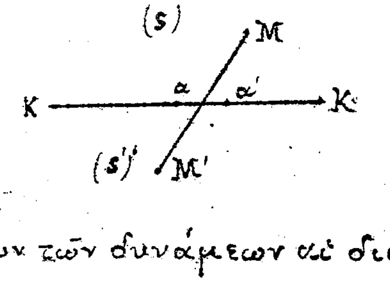
1888

§ 1. Ὑδροστατική

Κεφάλαιον I

Ἀρχαί ὑδροστατικῆς καί θεμελιώδεις ἐξισώσεις τῆς ὑδροδυναμικῆς.

Πίεσις. 1) Θεωρήσωμεν ὑλικόν τι σῶμα οἱονδήποτε, ὅπερ χωρίζομεν διά τοῦ ἐπιπέδου KK' εἰς δύο μέρη (s) καί (s') καί ἐν τῷ ἐπιπέδῳ KK' θεωρήσωμεν στοιχειῶδες ἐμβαδόν $\alpha\alpha' = d\omega$. τά σημεῖα (m) τοῦ ὑλικοῦ συστήματος (s) ἐπενεργοῦντα ἐπί τῶν σημείων (m') τοῦ συστήματος (s) γεννῶσι δυνάμεις ἐπενεργούσας κατά τάς εὐθείας $(m\,m')$.



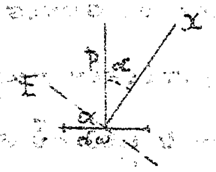
ἐξ ὅλων τούτων τῶν δυνάμεων αἱ διά τοῦ στοιχειώδους ἐμβαδοῦ $d\omega$ διερχόμεναι δίδουσι συνισταμένην τινά $p\,d\omega$, τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν στοιχειώδη πίεσιν παρά τό ἐμβαδόν $d\omega$ ἤ στοιχειώδη πίεσιν παρά τό σημεῖον O μεθ' οὗ συμπίπτει τό ἐμβαδόν $d\omega$ σμικρινόμενον ἐπ' ἄπειρον. τήν ποσότητα p, ἥτις ἐμφαίνει τήν ἐπί τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας πίεσιν, καλοῦμεν πίεσιν παρά τό σημεῖον O. ἡ πίεσις δέν εἶναι λοιπόν δύναμις, ἀλλά τό πηλίκον δυνάμεως δι' ἐπιφανείας. ἀλλ' ἵνα ὁ ὁρισμός οὗτος τῆς πιέσεως παρά τό σημεῖον O παριστᾷ τι τό θετικόν, δέον ἡ ποσότης p νά ᾖ ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως, ἥν κατέχει τό διά τοῦ σημείου O διερχόμενον ἐπίπεδον ΣΣ', καί τοῦτο μανθάνομεν ἐκ τῆς σπουδῆς τῆς ἐσωτερικῆς ἰσορροπίας τῶν σωμάτων ἐν γένει ἥτις, μᾶς διδάσκει, ὅτι ἡ πίεσις, ἣν ὑφίσταται τό διά τοῦ σημείου A διερχόμενον στοιχειῶδες ἐπίπεδον ἐμβαδόν dω ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργείας τῶν ἄλλων μερῶν τοῦ σώματος, εἶναι κάθετος τῷ ἐμπεριέχοντι τό ἐμβαδόν dω ἐπιπέδῳ, ἐάν τό σῶμα εἶναι ὁμογενές περί τό σημεῖον A. καί ἐκ τούτου, ὡς θά ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἕπεται, ὅτι ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτή καθ' ὅλας τάς διευθύνσεις.

2.) Ἀλλ' ἄς ἐξετάσωμεν ἰδίᾳ τί συμβαίνει ἐν τοῖς ῥευστοῖς σώμασι, τῶν ὁποίων ἡ σπουδή θά μᾶς ἀπασχολήσῃ κυρίως ἐνταῦθα.

Ἐν πρώτοις γνωρίζομεν, ὅτι πᾶν ῥευστόν ἐν ἠρεμίᾳ ἢ ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐξωτερικῶν συνεχῶν δυνάμεων μένει ὁμογενές (isotrope) περί οἱονδήποτε σημεῖον αὐτοῦ α ἐν τῷ ὑπό τῆς σφαίρας ακτῖνος μικροτάτης ἀκτῖνος περιοριζομένῳ χώρῳ.

Συνδυάζοντες δέ τάς δύο ταύτας ἰδιότητας τῶν ῥευστῶν καί ὁμογενῶν σωμάτων, δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι,

<u>Ἐν ἠρεμοῦντι ῥευστῷ ἡ πίεσις p ἐπί στοιχειώδους ἐπιπέδου ἐμβαδοῦ dω διερχομένου διά τοῦ σημείου α εἶναι κάθετος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου</u> (ἀλήθειαν ἥν γνωρίζομεν καί ἐκ τῆς πειραματικῆς φυσικῆς)



3.) Ἡ συνιστῶσα τῆς στοιχειώδους πιέσεως p dω παραλλήλως τῇ αχ εἶναι p dω συν. α ἀλλά dω συν. α ἰσοῦται τῇ προβολῇ τοῦ στοιχειώδους ἐμβαδοῦ dω ἐπί τοῦ ἐπιπέδου E καθέτου τῇ αχ, ὥστε,

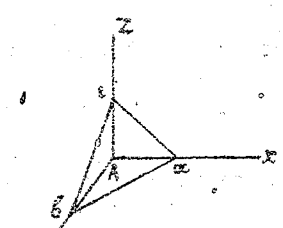
<u>Ἡ ἐπί στοιχειώδους ἐμβαδοῦ dω ἐπιπέδου ἢ καμπύλης ἐπιφανείας ἐξασκουμένη πίεσις, παραλλήλως εὐθείᾳ τινί αχ,</u>

<u>ἰσοῦται</u> μέ τό γινόμενον τῆς ἐπί τοῦ <u>ἐμβαδοῦ dω ἐξασκουμένης πραγματικῆς πιέσεως ἐπί τήν προβολήν αὐτοῦ ἐπί ἐπιπέδου καθέτου τῇ εὐθείᾳ αχ.</u> Ὅπερ θα μᾶς ἐπιτρέψῃ, ἀποδείξωμεν τήν ἀρχήν τοῦ Pascal.

<u>Ἐν ἠρεμοῦντι ῥευστῷ ἡ πίεσις περί τό σημεῖον A εἶναι ἴση καθ' ὅλας τάς διευθύνσεις.</u>

Ἡ ἀρχή αὕτη ἐθεωρεῖτο κατ' ἀρχάς ὡς φυσικός νόμος ἐνῷ εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς ἄνω ἰδιότητος ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἡ πίεσις εἶναι κάθετος ἐπί τοῦ στοιχειώδους ἐπιπέδου ἐμβαδοῦ.

Πρός ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου ληφθήτω τό σημεῖον α ἐν τῷ ῥευστῷ καί κατασκευασθήτω τό στοιχειῶδες τετράεδρον Aαβc, παρασταθήτω διά p ἡ ἐπί τῆς ἕδρας αβc πίεσις καί διά p, p_x, p_y, p_z αἱ ἐπί τῶν ἑδρῶν Acβ = dω συν. α, Acα = dω συν. β, Aβα = dω συν. γ ἐξασκούμεναι πιέσεις.



Τό ἐν τῷ στοιχειώδει τούτῳ τετραέδρῳ ἐμπεριεχόμενον ῥευστόν εὑρίσκεται ὑπό τήν ἐπήρειαν τεσσάρων πιέσεων, τῶν ὁποίων αἱ τιμαί εἶναι p_x dω συν. α, p_y dω συν. β, p_z dω συν. γ, p dω ὅπου α, β, γ παριστῶσι τάς γωνίας τῆς πιέσεως p μετά τῶν ἀξόνων, Oχ, Oy, OZ καί dω τό ἐπίπεδον ἐμβαδόν αβc, ἐξασκουμένων ἐπί τῶν τεσσάρων αὐτοῦ ἑδρῶν καί τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ⟨βαρύτης κ.λ.π...⟩ τάς ὁποίας οὔσας ἀναλόγους τῷ ὄγκῳ τοῦ τετραέδρου, παραλείπομεν ὡς πολύ μικράς ⟨τρίτος βαθμός σμικρότητος⟩ ἐν σχέσει πρός τάς ἄνω πιέσεις. καί ἐπειδή τό τετράεδρον ἰσορροπεῖ, τό ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν πιέσεων τούτων ἐπί οἱουδήποτε ἄξονος Oχ π.χ. μηδενίζεται αἱ προβολαί τῶν ἐπί τῶν ἑδρῶν Aαc καί Aαβ πιέσεων μηδενίζονται ὡς κάθετοι τῷ ἄξονι

Αχ καί ἡ προβολή τῆς ἐπί τῆς ἕδρας Αβc πιέσεως μένει ἡ αὐτή ὡς παράλληλος τῷ ἄξονι. ἡ δέ προβολή τοῦ $p\,d\omega$ ἐπί τοῦ ἄξονος Αχ εἶναι κατά τά προλεχθέντα $p\,d\omega$ συν. α καί ἔχει ἀντίθετον φοράν τῆς $p_\chi d\omega$ συν. α κατά συνέπειαν,

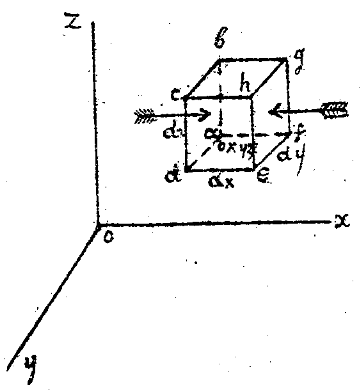
$$p_\chi d\omega\,\text{συν.}\,\alpha - p\,d\omega\,\text{συν.}\,\alpha = 0$$

ὅθεν

$$p_\chi = p$$

καί κατά τόν αὐτόν τρόπον προβάλλοντες ἐπί τῶν δύο ἄλλων ἀξόνων θά εὑρίσκωμεν $p = p_y = p_z$ ἐπειδή οἱ περί τό σημεῖον **Α** ἄξονες εἶναι οἱοιδήποτε καί αἱ πιέσεις p_χ, p_y, p_z δύνανται νά λάβωσιν ἁπάσας τάς διευθύνσεις καί τό θεώρημα ἀπεδείχθη ἐντελῶς.

Γενικαί ἐξισώσεις τῆς ἰσορροπίας τῶν ῥευστῶν. 4.) Θεωρηθήτω ῥευστόν τι ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ὧν αἱ συνιστῶσαι παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν οχ, οy, οz εἰσίν X, Y, Z, καί ἀπομονοθήτω ἐν τῷ ῥευστῷ τούτῳ τό παραλληλεπίπεδον $\alpha, \beta, c, d, e, f, g, h$, οὗτινος αἱ πλευραί εἶναι παράλληλοι τοῖς ἄξοσι καί τά μεγέθη αὐτῶν ἴσα τοῖς $d\chi, dy, dz$, χ, y, z οὖσαι αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς α. παρασταθήτωσαν πρός τούτοις διά ρ καί p ἡ πυκνότης ρ καί ἡ πίεσις p περί τό σημεῖον α.



Αἱ ἐπί τοῦ παραλληλεπιπέδου ἐνεργοῦσαι ἐξωτερικαί δυνάμεις δίδουσιν τάς τρεῖς συνιστώσας $\rho X, d\chi, dy, dz$, $\rho Y\, d\chi, dy, dz$, $\rho Z, d\chi, dy, dz$ παραλλήλως τοῖς ἄξοσι οχ, οy καί οz.

Ἡ ἐκ τοῦ ῥευστοῦ προερχομένη ἐσωτερική πίεσις ἐπί τῆς ἕδρας αβcd εἶναι $p.\,dy, dz$, καί ἐπί τῆς ἕδρας efgh ἡ πίεσις εἶναι ἐπίσης $\left(p + \frac{dp}{d\chi} d\chi\right) dy.\,dz$ ἔχει δέ ἀντίθετον φοράν τῆς προηγουμένης (ἐννοοῦμεν βεβαίως ὅτι ἡ μεταβαίνουσα ἀπό τοῦ σημείου α εἰς τό σημεῖον f ἡ πίεσις καθώς καί ἡ πυκνότης μεταβάλλονται συνεχῶς καί οὐχί ἀποτόμως) καί τό ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι,

$$p\,dy\,dz - \left(p + \frac{dp}{d\chi} d\chi\right) dy\,dz = -\frac{dp}{d\chi} d\chi\,dy\,dz$$

διά τοῦ αὐτοῦ τρόπου, θά εὑρίσκωμεν, ὅτι ἡ πίεσις ἥν ὑφίσταται τό παραλληλεπίπεδον παραλλήλως τοῖς δύο ἄλλοις ἄξοσι, οy, οz εἰσί

$$-\frac{dp}{dy} d\chi\,dy\,dz \text{ καί } -\frac{dp}{dz} d\chi\,dy\,dz$$

τό παραλληλεπίπεδον εὑρίσκεται λοιπόν ὑπό τήν ἐπήρειαν τριῶν δυνάμεων

$$\rho\chi\,dx\,dy\,dz - \frac{dp}{dx} d\chi\,dy\,dz,\ \rho Y\,dx\,dy\,dz - \frac{dp}{dy} dx\,dy\,dz,\ \rho Z\,dx\,dy\,dz - \frac{dp}{dz} dx\,dy\,dz$$

παραλλήλων τοῖς ἄξοσιν οχ, οy, οz καί ἐκ τῆς στατικῆς γνωρίζομεν, ὅτι ἑκάστη τῶν δυνάμεων τούτων μηδενίζεται ἐάν τό παραλληλεπίπεδον εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καί τἀνάπαλιν ὥστε αἱ ἐξισώσεις τῆς ἰσορροπίας τοῦ ῥευστοῦ εἰσίν

$$(1) \qquad \rho X = \frac{dp}{dx} \quad \rho Y = \frac{dp}{dy} \quad \rho Z = \frac{dp}{dZ}$$

πολλαπλασιάζοντες τήν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐπί dx, τήν δευτέραν ἐπί dy, τήν τρίτην ἐπί dz καί προσθέτοντες εὑρίσκομεν,

$$(2) \qquad \rho\left[\chi\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right] = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = dp$$

καί τό πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι λοιπόν ὁλική διαφορική συναρτήσεως τινος $\psi[xyz]$ καί ἐπειδή

$$\frac{d^2p}{dx.dy} dx\,dy = \frac{d^2p}{} dy\,dx$$

ἕπεται ὅτι

$$(3) \qquad \frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}, \quad \frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy}, \quad \frac{d(\rho Z)}{dx} = \frac{d(\rho X)}{dz}$$

αἵτινες παριστῶσιν ἐπίσης τάς συνθήκας τῆς ἰσορροπίας τοῦ ῥευστοῦ περί τό σημεῖον a, ἀλλ' ὅπου ἀπελείψαμεν τήν πίεσιν p.

Ἐπιφάνειαι ἰσόσταθμοι. 5. Εἶναι δέ καταφανές, ὅτι τά τήν αὐτήν πίεσιν ὑφιστάμενα σημεῖα τοῦ ῥευστοῦ, εὑρίσκονται ἐπί τῶν ἐπιφανειῶν, ἅς προσδιορίζει ἡ διαφορική ἐξίσωσις

$$dp = \rho[X\,dx + Y\,dy + Z\,dz] = 0$$

<u>6ον.</u> Ἰδιότητές τινες τῶν ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν.

1.) Ἡ συνισταμένη $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ τῶν ἐπί τοῦ ῥευστοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐν οἱῳδήποτε σημείῳ m εἶναι κάθετος τῇ διά τοῦ σημείου τούτου διερχομένῃ ἰσοστάθμῳ ἐπιφανείᾳ

Τῷ ὄντι παρά τό σημεῖον m $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0 = R\,ds\,\text{συν}(R,ds)$ ὅθεν $\cos(R,ds) = 0$.

2.) Δι' ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σημείου a δέν δύνανται νά διέλθωσι δύο ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι. διότι ἐάν παραστήσωμεν διά dn τήν ἀπόστασιν τῶν διά τοῦ σημείου a διερχομένων διαφόρων ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν, ἔχομεν,

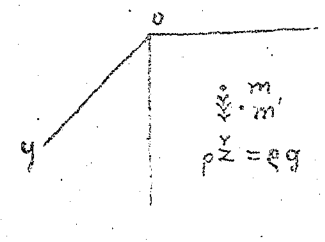
$$dp = \rho R\,ds\,\text{συν}(R,ds) = \rho R\,dn$$

καί ἐάν $\qquad dp = 0 \qquad dn = 0$

3.) Ἐάν $\qquad X\,dp = \rho\,d\varphi(x, y, z)$ τότε $\frac{dp}{d\varphi} = \rho$.

φ καί ρ μένουσιν ἀμετάβλητοι ἐπί μιᾶς καί τῆς αὐτῆς ἰσοστάθμου ἐπιφανείας, ὅπου p μένει ἀμετάβλητος.

<u>7ον.</u> Ἰσορροπία τῶν βαρέων ῥευστῶν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ



$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = g$$

καί ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει

(2) $dp = \rho g\,dz = \Pi\,dz$. Ὅπου Π παριστᾷ τό βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τῶν ῥευστῶν. ὅπερ καλοῦμεν καί εἰδικόν βάρος αὐτοῦ,

Αἱ ἰσόσταθμοι ἐπιφάνειαι εἶναι ἐνταῦθα τά ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$Z = \text{σταθεράν}$$

προσδιοριζόμενα ὁριζόντια ἐπίπεδα.–

ἐξ οὗ ἐξάγομεν, ὅτι

ἐν τοῖς βαρέσι ῥευστοῖς.

1ον) <u>Ἐν ἑνί καί τῷ αὐτῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ ἡ πίεσις μένει ἀμετάβλητος.</u>

2ον.) <u>Διά τῆς διαβάσεως ἐξ ἑνός ὁριζοντίου ἐπιπέδου εἰς ἕτερον οὗτινος ἡ ἀπό τοῦ πρώτου ἀπόστασις εἶναι dz.</u> <u>ἡ ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ ἐξασκουμένη πίεσις ηὐξήθη–ἠλαττώθη κατά τό βάρος κυλίνδρου συγκειμένου ἐκ τοῦ αὐτοῦ ῥευστοῦ, καί ἔχοντος βάσιν μέν τό θεωρούμενον ἐμβαδόν, ὕψος δέ dz.</u>

<u>Ἡ ἐπιφάνεια δι' ἧς χωρίζονται δύο βαρέα ῥευστά διαφόρου εἰδικοῦ βάρους εἶναι ἐπίπεδος.</u>

Διότι περί τό κοινόν σημεῖον m ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτή.

$$dp = \Pi\,dz = \Pi'\,dz$$

ὅπερ εἶναι ἀδύνατον ἐάν $dz \gtrless 0$ ἀφοῦ καθ' ὑπόθεσιν $\Pi \gtrless \Pi'$.

Ἐν τῇ περιπτώσει βαρέος ὑγροῦ ἀπιέστου Π = σταθερῷ ἀριθμῷ καί ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$p = p_0 + \Pi(Z - Z_0)$$

ἀλλά ὁλοκληροῦντες ὑποθέτομεν, ὅτι, μεταβαίνοντες ἀπό τοῦ ἐπιπέδου $\zeta = Z$ εἰς τό ἐπίπεδον $\zeta = Z_0$, δέν ἐξερχόμεθα τοῦ ῥευστοῦ.

Τό ὕψος $h = \frac{p}{\Pi} = \frac{p_0}{\Pi} + (Z - Z_0)$ καλεῖται <u>παραστατικόν ὕ-</u>

ὕψος τῆς πιέσεως (πιεζομετρικόν ὕψος) καί ἰσοῦται μέ τό ὕψος κυλινδρικῆς στήλης τοῦ θεωρουμένου ὑγροῦ, παραγούσης πίεσιν ἴσην πρός ἐκείνην, ἥτι ἐξασκεῖται νῦν ἐπί τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐπιπέδου Z. [τήν πίεσιν μετροῦμεν εἰς χιλιόγραμμα ἐπί τετραγωνικοῦ μέτρου. ἀτμοσφαιρική πίεσις ἰσοῦται 13596, 0,76 = 10333 χιλιογρ. ὑδραργ. 1000 × 10,33 = 10333 χιλιογρ. ὕδατος.]

8ον. Ἀέρια.–ὑψομετρικαί καταμετρήσεις διά τοῦ βαρομέτρου. Ἐκ δέ τῶν νόμων τοῦ Mariotte καί Gay-Lussac γνωρίζομεν, ὅτι

$$\rho = \frac{Kp}{1+\alpha\theta} \qquad \begin{cases} \text{ἔνθα} \\ K \text{ εἶναι σταθερά ποσότης} \\ \alpha \text{ ἡ συντελεστής τῆς διαστολῆς} \\ \theta \text{ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου} \end{cases}$$

Τό βάρος ἑνός κυβικοῦ μέτρου ἀέρος ὑπό θερμοκρασίαν 0° καί ὑπό πίεσιν ἴσην τῇ μέσῃ ἀτμοσφαιρικῇ πιέσει 10333 Χιλιογρ. ἰσοῦται $1,^{Kg}293$. Ἐάν εἰς τήν αὐτήν μάζαν ἀέρος δώσωμεν ὄγκον V ὑπό θερμοκρασίαν θ ἔχομεν

$$pv = p_0 v_0 (1+\alpha\theta) = 10333(1+\alpha\theta)$$

ὥστε ὑπό τήν κατάστασιν p, v, θ, τά v κυβικά μέτρα ζυγίζουν $1,^{\chi\iota\lambda.}293$ τό ἕν κυβικόν μέτρον ζυγίζει,

$$\frac{1.293}{v} = \frac{1,293 \cdot p}{10333(1+\alpha\theta)} = \frac{1}{7991} \quad \frac{p}{1+\alpha\theta} \quad \text{ὅπου } \alpha = 00366$$

Τό δέ βάρος Π ἑνός κυβικοῦ μέτρου οἱουδήποτε ἀερίου εἰς τήν κατάστασιν (p v θ) εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τό ἀνώτερω βάρος διά τῆς πυκνότητος δ τοῦ ἀερίου ἐν σχέσει πρός τόν ἀέρα, τουτέστιν,

$$\Pi = \frac{1}{7991} \quad \frac{p\delta}{1+\alpha\theta}$$

ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (2) ἐν ᾗ ἀντικαθιστῶμεν ρ διά τῆς τιμῆς αὐτοῦ $\frac{Kp}{1+\alpha\theta}$ μᾶς δίδει

$$\frac{dp}{p} = \frac{\delta}{7991(1+\alpha\theta)} dz$$

καί ὁλοκληροῦντες

$$\lambda o\gamma \frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{7991(1+\alpha\theta)} Z$$

ὅπου Z ἐμφαίνει τήν διαφοράν τῆς στάθμης τῶν σημείων ἔνθα ἡ πίεσις εἶναι p_0 καί p διά τῆς χρήσεως τῶν δεκαδικῶν λογαρ. ὁ τύπος μεταβάλλεται εἰς

$$Log \frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{18401(1+\alpha\theta)} Z$$

ἁπλοποιοῦντες ἐν μέρει τόν τύπον τοῦτον, θεωροῦντες τήν θερμοκρασίαν σταθεράν καί ἴσην $\frac{\theta+\theta_0}{2}$, α = 0.004 καί δ = 1 ἔχομεν τήν σχέσιν

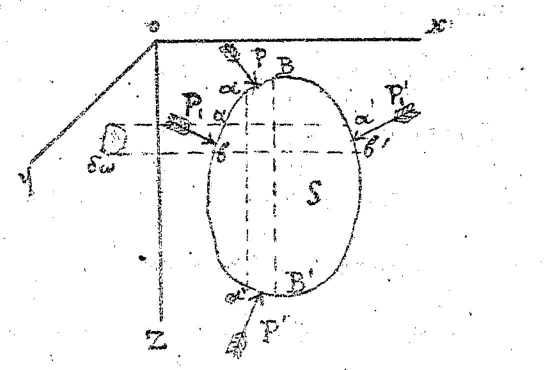
$$(1) \qquad Z = 18401\left(1 + 0.002(\theta+\theta_0)\right) Log \frac{p}{p_0}$$

ἥτις χρησιμεύει πρός ἐξεύρεσιν τοῦ ὕψους Z εἰς τάς ὑψομετρικάς καταμετρήσεις δ+α βαρομετρικῶν καί θερμομετρικῶν παρατηρήσεων.

9ον. Ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὡς ἐφαρμογήν τῶν προηγουμένων ἄς ἀποδείξωμεν τό θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους ὅτι δηλαδή

<u>τό βάρος σώματος ἐμβεβαπτισμένου ἐν ῥευστῷ τινί ἐλαττοῦται κατά ποσότητα ἴσην τῷ βάρει τοῦ ὑπ' αὐτοῦ ἐκτοπιζομένου ῥευστοῦ.</u>

Ἔστω τῷ ὄντι τό σῶμα S ἐμβεβαπτισμένον εἰς τι ῥευστόν καί ζητήσωμεν τάς συνιστώσας τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων πιέσεων παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν O(x, y, Z). πρός τοῦτο χωρίζομεν αὐτό δι' ἐπιπέδων αα', ββ'... παραλλήλων τῷ yox καί ἄλλων παραλλήλων τῷ xoz εἰς στοιχειώδη πρίσματα αα'ββ'. αἱ ἐπί τῶν βάσεων αβ καί α'β' ἐπιτεp.



1. Ὑδροστατική

γοῦσαι πιέσεις, $p\,d\omega$, $p'd\omega'$ ἔχουσιν (3) αἱ συνιστῶσαι παραλλήλως τῷ ἄξονι ox καί oy τάς πιέσεις.

$$p_1\, d\omega\, \text{συν}.\alpha \quad \text{καί} \quad p_1'\, d\omega'\, \text{συν}.\alpha'$$

ὅπου $d\omega$ συν. α καί $d\omega'$ συν. α' ἐμφαίνουσιν ἀμφότερα τήν προβολήν $d\omega$ τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου yoz. Ἄλλως $p_1 = p_1'$ καί κατά συνέπειαν αἱ συνιστῶσαι παραλλήλως τοῖς ἄξοσι ox καί oy μηδενίζεται. Ἴδωμεν νῦν τάς συνιστώσας παραλλήλως τῷ oz δι' ὅν καί ἀνωτέρω λόγον ἔχομεν

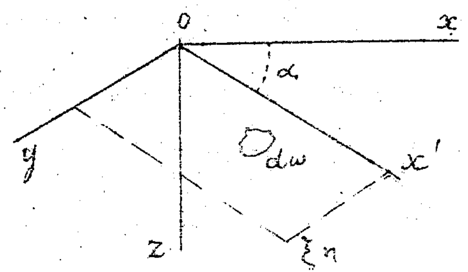
συνιστῶσα τῆς πιέσεως p παραλλήλως τῷ

$$oz = p\,d\omega \qquad \text{ὅπου } d\omega \text{ παριστᾷ τήν προβολήν τῶν}$$

$$d^o \quad p' \quad d^o \quad oz = p'd\omega \qquad \text{βάσεων } \alpha\beta,\ \alpha'\beta' \text{ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου } zox$$

τελική συνισταμένη παραλλήλως τῇ zo ἰσοῦται μέ $(p'-p)\,d\omega$ ὅπερ ἰσοῦται μέ τό βάρος τοῦ πρίσματος $\alpha\beta\alpha'\beta'$, καί ἡ ὁλική συνισταμένη τῆς πιέσεως, ἥν ἐξασκεῖ τό ρευστόν ἐπί τοῦ ἐν αὐτῷ ἐμβεβαπτισμένου σώματος, ἰσοῦται τῷ βάρει τοῦ ὑπ' αὐτοῦ ἐκτοπιζομένου ρευστοῦ, καί διέρχεται διά τοῦ κεντροβαροῦς τοῦ σώματος.

10ον. Συνισταμένη τῶν πιέσεων ἐπί ἐπιπέδου παρειᾶς yox καί κέντρον πιέσεως. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἐξασκουμένη ἐπί τῶν δύο πλευρῶν τῆς παρειᾶς παραλείπεται. Τό ἐπίπεδον τῆς παρειᾶς εἶναι yox', ox οὖσα κάθετος τῇ oy.



Ἔστωσαν x y z x' αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἐμβαδοῦ $d\omega$ ὡς πρός τούς ἄξονας $o(\alpha\, y\, z\, x')$.

Ἡ συνισταμένη τῶν πιέσεων εἶναι

$$P = \int g\rho z\, d\omega = g\rho \int z\, d\omega = g\rho\,\Omega\, Z_1 = \text{βάρος πρίσματος βάσεως } \Omega \text{ καί ὕψους } Z_1$$

ὅπου Ω ἐμφαίνει τό ὁλικόν ἐμβαδόν τῆς παρειᾶς καί Z_1 τήν τεταγμένην τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος ὥστε,

<u>Ἡ ὑπό ἐπιπέδου παρειᾶς οἱασδήποτε κατά τήν θέσιν καί τό σχῆμα) ἐμβεβαπτισμένης ἐν ρευστῷ τινι ἐξασκουμένη πίεσις ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ ἐπί τήν πίεσιν τήν ἐξασκουμένην παρά τό κεντροβαρές τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου.</u>

Τό σημεῖον $(\xi\, \eta)$ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς πιέσεως (<u>κέντρον τῆς πιέσεως</u>) εὑρίσκεται διά τῶν ἐξισώσεων.

$$P\eta = \int g\rho z\, d\omega\, y \qquad P\xi = \int g\rho z\, d\omega\, x'$$

ἀλλά $Z = x'\,\text{ημ}.\alpha$ ὥστε

$$P\eta = g\rho.\text{ημ}.\alpha \int x'y\, d\omega \qquad P\xi = g\rho\,\text{ημ}.\alpha \int x'^2 d\omega$$

σύν $d\omega = dx'.dy$

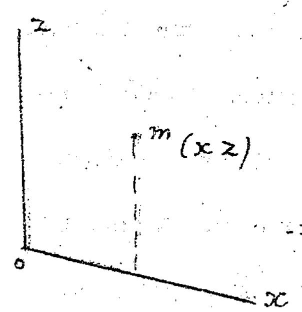
Ἐάν ox' εἶναι συμμετρικός ἄξων ἔχομεν $\eta = 0$

$$P\xi = g\rho\,\text{ημ}\,\alpha.\, I$$

ἔνθα I ἐμφαίνει τήν ροπήν ἀδρανείας τοῦ Ω ὡς πρός τόν ἄξονα oy.—

11ον. Ἐπιφάνεια ἰσορροπίας ρευστοῦ περιστρεφομένου περί σταθερόν ἄξονα. Ἐπιφάνεια ἰσορροπίας μάζης ὑγροῦ περιστρεφομένης ὁμοιομόρφως περί σταθερόν ἄξονα OZ.

Ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια τῆς ἰσορροπίας τοῦ ὑγροῦ εἶναι βεβαίως περιστροφική περί τόν ἄξονα OZ καί το ζήτημα θά λυθῇ ἐάν εὕρωμεν τήν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ZOX γενέτειραν αὐτῆς.



Ἔστω m σημεῖόν τι τοῦ ὑγροῦ κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ XOZ x καί Z αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ καί χ, Z αἱ συνιστῶσαι τῶν ἐπί τοῦ σημείου m ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἵτινες ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω εἰσίν αἱ μερικαί παράγωγοι συναρτήσεώς τινος $\psi(x,z)$ ὡς πρός τό x καί τό z.

Ἐάν ἐπί τοῦ μορίου m τοῦ ὑγροῦ ἐφαρμόσωμεν ἐκτός τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων X, Y καί τήν ἐκ τῆς κεντρόφυγος δυνάμεως $m\omega^2 x$ προκύπτουσαν παρασυρτικήν δύναμιν τῆς ἀδρανείας (*force d'inertie d'entraînement*) τό σημεῖον m εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καί ἔχομεν,

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dz}dz + \omega^2 x\, dx = 0$$

καί ἡ ἐξίσωσις τῆς γενετείρας τῶν ἰσοσταθμῶν ἐπιφανειῶν εἶναι

$$\psi(x,z) + \omega^2\frac{x^2}{2} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

1ον) Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἐπί τοῦ ὑγροῦ ἐπενεργοῦσα ἐξωτερική δύναμις εἶναι ἡ βαρύτης: ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν,

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \quad \frac{d\psi}{dz} = -g \qquad \psi = -gz - \sigma\tau\alpha\theta$$

καί ἡ γενέτειρα τῆς ἐπιφανείας τῆς ἰσορροπίας τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἡ παραβολή

$$\omega^2\frac{x^2}{2} = gz + \sigma\tau\alpha\theta$$

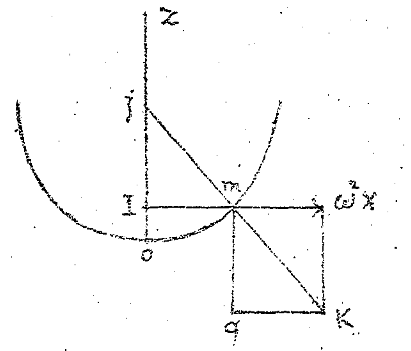
ἧς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα oz. καί ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶναι τό ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα oz περιστροφῆς τῆς ἄνω παραβολῆς προκύπτον παραβολοειδές, ἀποτέλεσμα, εἰς τό ὁποῖον ἠδυνάμεθα νά φθάσωμεν ἀμέσως διά τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας ὡς ἑξῆς.

Τῷ ὄντι ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος τῶν ἰσοσταθμῶν ἐπιφανειῶν ἡ συνισταμένη mK τῶν ἐπί τοῦ μορίου m ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\omega^2 x$ καί g εἶναι κάθετος τῇ ἐπιφανείᾳ ταύτῃ Ij εἶναι *la sous-normale* τῆς καμπύλης

om καί ἔχομεν

$$\frac{Ij}{mI = x} = \frac{g}{\omega^2 x} \text{ ὅθεν } Ij = \frac{g}{\omega^2} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ὥστε ἡ *sous-normale* εἶναι σταθερά, καί αὐτή εἶναι μία τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῆς παραβολῆς.



2ον) Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι αἱ ἐπί τοῦ μορίου m ἐπενεργοῦσαι ἐξωτερικαί δυνάμεις προέρχονται οὐχί πλέον ἐκ τῆς βαρύτητος, ἀλλ' ἐκ τινος δυνάμεως διερχομένης διά τοῦ σημείου o καί ἀναλόγου τῇ ἀποστάσει om. ἔστω $\mu . om$ ἡ δύναμις αὕτη: ἡ συνάρτησις τῶν δυνάμεων (*potentiel*) εἶναι $\mu\frac{om^2}{2} = \frac{\mu}{2}(x^2+y^2)$ καί ἡ ἐξίσωσις τῆς γενετείρας τῶν ἰσοσταθμῶν ἐπιφανειῶν,

$$\omega^2 x^2 = \mu(x^2 + z^2) + \sigma\tau\alpha\theta$$

ἢ

$$x^2(\mu - \omega^2) + \mu z^2 = \sigma\tau\alpha\theta$$

ἐάν $\mu > \omega^2$ ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ ἔλλειψιν καί κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶναι ἐλλειψοειδής.

ἐάν $\mu = \omega^2$ ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ δύο εὐθείας. ἡ ἰσορροπία εἶναι λοιπόν ἀδύνατος, καθώς καί ὅταν $\mu < \omega^2$ καί τό ὑγρόν διασκορπίζεται.

§ 2. Θεμελιώδεις ἐξισώσεις τῆς Ὑδροδυναμικῆς

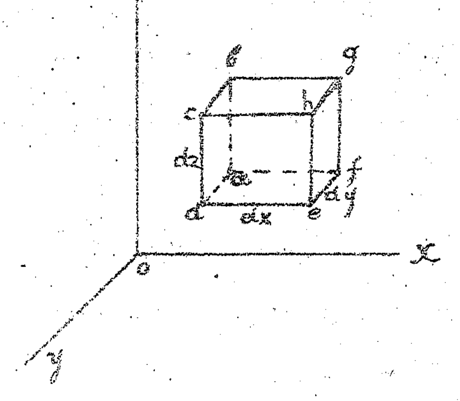
12ον Εἴδομεν προηγουμένως ἐν τῇ σπουδῇ τῆς Ὑδροστατικῆς ὅτι αἱ συνιστῶσαι τῶν ἐπί τοῦ στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ τοῦ ἠρεμοῦντος ῥευστοῦ ἐπενεργοῦσαι δυνά-

Ὑδροστατική

μεις παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox, oy, oz εἰσίν ἀμοιβαίως,

$$\left[\rho X-\frac{dp}{dx}\right]dx\,dy\,dz \quad \left[\rho Y-\frac{dp}{dy}\right]dx\,dy\,dz \quad \left[\rho Z-\frac{dp}{dz}\right]dx\,dy\,dz$$

ἔνθα X, Y, Z παριστῶσι τάς παραλλήλως τοῖς αὐτοῖς ἄξοσι συνιστώσας τῶν ἐπί τοῦ ῥευστοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, καί p τήν παρά τό σημεῖον a ἐσωτερικήν πίεσιν.



Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τό θεωρούμενον παραλληλεπίπεδον δέν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἀλλά κινεῖται μέ ταχύτητα, ἧς αἱ συνιστῶσαι παραλλήλως τοῖς αὐτοῖς ἄξοσιν εἰσίν u, v, w καί αἱ ἐπιταχύνσεις u', v', w'.

Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα τοῦ d'Alembert ἔχομεν,

$$\rho X-\frac{dp}{dx}-\rho u'=0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{dp}{dx}=\rho[X-u']$$

$$\frac{dp}{dy}=\rho[Y-v'] \qquad (1)$$

$$\frac{dp}{dz}=\rho[Z-w']$$

ἔνθα $u'=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz+\frac{du}{dt}dt=dt\left[u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}+\frac{du}{dt}\right]$

$$v'=\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz+\frac{dv}{dt}dt=dt\left[u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}+\frac{dv}{dt}\right]$$

$$w'=\frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dy}dy+\frac{dw}{dz}dz+\frac{dw}{dt}dt=dt\left[u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}+\frac{dw}{dt}\right]$$

αἱ τρεῖς αὗται ἐξισώσεις δέν ἀρκοῦσι διά τήν ἐξεύρεσιν τῶν πέντε ἀγνώστων u, v, w, p, ρ οἵτινες προσδιορίζουσι τήν κίνησιν τοῦ ῥευστοῦ.

<u>13ον</u> **Ἐξίσωσις τῆς συνεχείας.** Δυνάμεθα ὅμως νά εὕρωμεν καί ἑτέραν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς ἐάν θεωρήσωμεν τό στοιχειῶδες παραλληλεπίπεδον $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ ὡς ἠρεμοῦν-

τα ἐν τῷ κινουμένῳ ῥευστῷ, βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι κατά τό βραχύτατον χρονικόν διάστημα dt διέρχεται διά τῆς ἕδρας $a\,b\,c\,d$ ποσότης (μᾶζα) ῥευστοῦ ἴση τῇ $\rho\,dy\,dz.u\,dt$ εἰσερχομένη ἐν τῷ παραλληλεπιπέδῳ καί ἐξέρχεται ἐκ τῆς ἐναντι ἕδρας $c\,f\,g\,h$ ἑτέρα ποσότης ῥευστοῦ ἴση τῇ

$$\rho.dy.dz.u\,dt+\frac{d(\rho u)}{dx}dx\,dy\,dz\,dt$$

ἡ αὔξησις λοιπόν ἣν ὑφίσταται ἡ ἐν τῷ στοιχειώδει παραλληλεπιπέδῳ $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ ἐμπεριεχομένη ποσότης ὕδατος κατά τό χρονικόν διάστημα dt ἐκφράζεται διά

$$-\frac{d(\rho u)}{dx}dx\,dy\,dz\,dt$$

καί ἐάν ἐπαναλάβωμεν τόν αὐτόν συλλογισμόν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐκ τῆς παραλλήλου τοῖς ἄξοσιν oy καί oz ῥοῆς ἡ προκύπτουσα ἐπαύξησις τῆς ἐν τῷ στοιχειώδει παραλληλεπιπέδῳ ἐμπεριεχομένης ποσότητος ῥευστοῦ κατά τό χρονικόν διάστημα dt εἶναι

$$-\frac{d(\rho v)}{dy}dx\,dy\,dz\,dt \quad \text{καί} \quad -\frac{d(\rho w)}{dz}dx\,dy\,dz\,dt$$

ὥστε ἡ ὁλική ἐπαύξησις ἣν ὑφίσταται ἡ μᾶζα $m=\rho.dx\,dy\,dz$ τοῦ παραλληλεπιπέδου ἐκφράζεται διά

$$-dx\,dy\,dz\,dt\left[\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}\right]$$

ἀλλ' ἡ ὁλική αὕτη ἐπαύξησις τῆς μάζης m τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι dm. ἤ $\left[\rho+\frac{d\rho}{dt}dt\right]dx\,dy\,dz-\rho\,dx\,dy\,dz=\frac{d\rho}{dt}dt\,dx\,dy\,dz$

ὥστε

$$-dx\,dy\,dz\,dt\left[\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}\right]=\frac{d\rho}{dt}dx\,dy\,dz\,dt$$

ἤ

$$(2) \quad \frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0$$

τήν σχέσιν ταύτην ὀνομάζομεν <u>ἐξίσωσιν τῆς συνεχείας</u>, διότι προϋποθέτει ὅτι ἡ ῥοή τοῦ ῥευστοῦ εἶναι συνεχής καί οὐδέν σχηματίζεται κενόν ἐν τῇ μάζῃ τοῦ στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου a b c d e f g h.

<u>14ον.</u> Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὅτι <u>ἡ μᾶζα τοῦ στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου a b c d e f g h δέν μετεβλήθη παρά τό χρονικόν διάστημα dt.</u>

Τῷ ὄντι ἡ ἀρχική μᾶζα τοῦ περί οὗ ὁ λόγος παραλληλεπιπέδου ἦτο,

$$\rho\, dx\, dy\, dz$$

μετά παρέλευσιν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἡ πυκνότης ρ μετεβλήθη εἰς

$$\rho+d\rho=\rho+\frac{d\rho}{dx}\frac{dx}{dt}dt+\frac{d\rho}{dy}\frac{dy}{dt}dt+\frac{d\rho}{dz}\frac{dz}{dt}dt+\frac{d\rho}{dt}dt$$

$$=\rho+\left[u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}\right]dt$$

αἱ συντεταγμέναι x y z μετεβλήθησαν εἰς

$$x+u\,dt \qquad y+v\,dt \qquad z+w\,dt$$

καί αἱ διαφορικαί αὐτῶν dx, dy, dz εἰς

$$dx+\frac{du}{dx}dx\,dt=dx\left[1+\frac{du}{dx}dt\right],\quad dy\left[1\frac{dv}{dy}dt\right] \text{ καί } dz\left[1\frac{dw}{dz}dt\right]$$

καί ἡ μᾶζα τοῦ παραλληλεπιπέδου μετεβλήθη εἰς

$$\left\{\rho+\left[u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}\right]dt\right\}\left[1+\frac{du}{dx}dt\right]\left[1\frac{dv}{dy}dt\right]\left[1+\frac{dw}{dz}dt\right]dx\,dy\,dz$$

ἐάν ἤδη ἐξισώμεν τήν μᾶζαν ταύτην μέ τήν ἀρχικήν μᾶζαν $\rho\,dx\,dy\,dz$ τοῦ παραλληλεπιπέδου καί παραλείψωμεν τάς δευτεροβαθμίους ἐλαχίστας ποσότητας εὑρίσκομεν τήν σχέσιν.

$$\frac{d\rho}{dt}+u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\rho\left[\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right]=0$$

ἤ

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}=0$$

ἥτις συμπίπτει μέ τήν ἐξίσωσιν τῆς συνεχείας.

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι τό περί οὗ πρόκειται ρευστόν εἶναι ἀπιεστον ὑγρόν ρ εἶναι σταθερά ποσότης ὅταν ἀκολουθοῦμεν τήν αὐτήν στοιχειώδη μᾶζαν ἐν τῇ κινήσει της καί κατά συνέπειαν $d\rho=0$

ἤ $\quad u\dfrac{d\rho}{dx}+v\dfrac{d\rho}{dy}+w\dfrac{d\rho}{dz}+\dfrac{d\rho}{dt}=0$ ἐξ οὗ καί $\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{dz}{dt}=0$

ἔχομεν ἤδη πέντε ἐξισώσεις, αἵτινες διά τῆς ὁλοκληρώσεως αὐτῶν δίδουσι τάς τιμάς τῶν u, v, w, p καί ρ καί προσδιορίζουσι τήν κίνησιν τοῦ ἀπιέστου ὑγροῦ.

Ἐάν πρόκειται περί ἀερίου ρευστοῦ εἰς τάς τέσσαρας ἐξισώσεις (1) καί (2) ἐννοοῦμεν καί τήν σχέσιν $\rho=\dfrac{Kp}{1+\alpha\theta}$ τήν προκύπτουσαν ἐκ τῶν νόμων τοῦ Mariotte καί τοῦ Gay-Lussac.

<u>15ον.</u> **Μόνιμος κίνησις τῶν ὑγρῶν** Ἐν εἰδικαῖς μόνον περιστάσεσι, δυνάμεθα νά ὁλοκληρώσωμεν τάς ἐξισώσεις (1) καί (2) ὡς λόγου χάριν ἐν τῇ <u>μονίμῳ κινήσει</u> ⟨mouvement permanent⟩ τῶν ρευστῶν, καθ' ἥν ὑποθέτομεν, ὅτι τά διά τοῦ ἐν τῷ διαστήματι σταθεροῦ σημείου x y z διερχόμενα μόρια τοῦ ρευστοῦ φέρονται ὑπό τῆς αὐτῆς κινήσεως ἐν τῷ σημείῳ τούτῳ ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ· ἡ κίνησις δηλ. μεθ' ἧς φέρονται τά ὑλικά μόρια τοῦ ρευστοῦ μένει ἀμετάβλητος ἐν τῷ αὐτῷ σημείῳ, προϊόντος τοῦ χρόνου καί μεταβάλλεται κατά τήν ἔντασιν καί τήν φοράν, μόνον ὅταν μεταβαίνωμεν ἀφ' ἑνός εἰς ἕτερον σημεῖον τοῦ διαστήματος. ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν παρά τό σημεῖον x y z

$$\frac{du}{dt}=0 \quad \frac{dv}{dt}=0 \quad \frac{dw}{dt}=0 \quad \frac{dp}{dt}=0 \quad \frac{d\rho}{dt}=0$$

ἐάν πρός τούτοις ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις προέρχονται ἐκ τινος δυναμικῆς συναρτήσεως ⟨potentiel⟩ ἔχομεν

$$X dx+Y dy+Z dz=dT$$

καί ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) ἐξάγομεν

$$\frac{1}{\rho}dp=dT-\left[u'dx+v'dy+w'dz\right]$$

καί ἐπειδή $\quad V^2=u^2+v^2+w^2$

ἔχομεν $\quad V\,dV=u\,du+v\,dv+w\,dw$

ἀλλά $\quad u=\dfrac{dx}{dt} \quad v=\dfrac{dy}{dt} \quad w=\dfrac{dz}{dt}$

<u>Ὑδροστατική</u>

ὥστε

$$VdV = [u'dx + v'dy + w'dz] \quad \text{διότι} \quad u' = \frac{du}{dt}$$

λοιπόν $$\frac{1}{\rho}dp = dT - VdV$$

ἤ (1) $$VdV = dT - \frac{1}{\rho}dp$$

αἱ διαφορικαί dV, dT καί dp ὑπολογίζονται, ἐννοεῖται ἐπί τῆς τροχιᾶς ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ μορίου.

ἐάν ρ εἶναι γνωστή συνάρτησις τοῦ p ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

<u>ὑγρά</u> π.χ. εἰς τά ὑγρά ρ= σταθ καί ἔχομεν

$$T - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V^2 = \text{σταθ}$$

καί ἐν τῇ περιπτώσει τῆς βαρύτητος $(X=0 \; Y=0 \; Z=g)$

$T = -gZ$ καί ἔχομεν τόν τύπον τοῦ *Daniel Bernoulli*

$$Z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = \text{σταθ}$$

Κεφάλαιον II

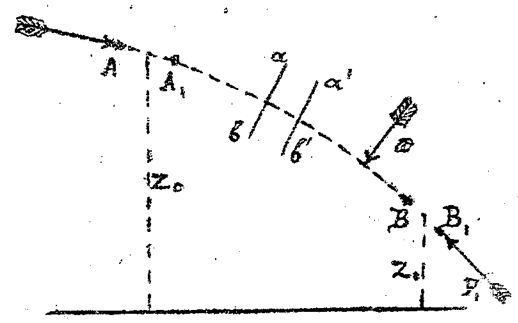
Θεμελιώδες θεώρημα καί ἐμπειρικά δεδόμενα ἐφ' ὧν βασίζεται ἡ Ὑδραυλική.

<u>16ον</u> **Ἑτέρα ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Bernoulli.** Τό θεώρημα τοῦ Bernoulli, ὅπερ χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς τήν ὑδραυλικήν ἀποδεικνύεται καί ἀπ' εὐθείας, χωρίς νά προστρέξωμεν εἰς τάς θεμελιώδεις ἐξισώσεις τῆς Ὑδροδυναμικῆς, τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος τῶν ζωσῶν δυνάμεων.

Ἐξίσωσις τῆς συνεχείας. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ἐάν παραστήσωμεν διά ω τήν ἐγκάρσιον τομήν ὑγροῦ νάματος διά Ω τήν ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου διερχομένην διά τῆς τομῆς ποσότητα ὕδατος, ἥν καλοῦμεν <u>κατανάλωσιν</u> (debit) καί διά v τήν ταχύτητα τῆς ῥοῆς ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ ἔχομεν

$$\Omega = \omega v$$

Τῷ ὄντι ἔστωσαν ω_0 καί ω_1 αἱ ἐγκάρσιαι τομαί τοῦ ὑγροῦ νάματος παρά τά σημεῖα A καί B.



τό βάρος τῶν μεταξύ τῶν τομῶν A καί B ἐμπεριεχομένου ὕδατος εἶναι τό αὐτό μέ τό βάρος τοῦ μεταξύ τῶν τομῶν A_1 καί B_1 μεθ' ὧν συμπίπτουσι μετά τό χρονικόν διάστημα dt αἱ τομαί A καί B, ὥστε καί τό μεταξύ τῶν τομῶν A καί A_1 ἐμπεριεχόμενον βάρος ἰσοῦται τῷ μεταξύ τῶν τομῶν B καί B_1 ἐμπεριεχομένῳ, ἐάν λοιπόν ὑποθέσωμεν τό ὑγρόν ὁμογενές, τουτέστι μέ τήν αὐτήν πυκνότητα παντοῦ καί ὁ ὄγκος $\omega_0 . AA_1$ καί $\omega_1 . BB_1$ εἶναι ἴσοι ἀφ' ἑτέρου.

$$AA_1 = v_0 dt \qquad BB_1 = v_1 dt$$

ὥστε $$\omega_0 v_0 dt = \omega_1 v_1 dt$$

καί $$\omega_0 v_0 = \omega_1 v_1 = \Omega$$

Θεωρηθήτω νῦν τό νᾶμα AB συγκείμενον ἐκ τῶν μορίων τοῦ ῥευστοῦ τῶν εὑρισκομένων ἐπί τῆς τροχιᾶς ἑνός τῶν μορίων τούτων. μετά παρέλευσιν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt τό νᾶμα καταλαμβάνει τήν θέσιν $A_1 B_1$. Ἐπειδή δέ ὑποθέτομεν τήν κίνησιν μόνιμον, τά μεταξύ τῶν σημείων A_1 καί B μόρια φέρονται καί νῦν ὑπό τῆς αὐτῆς ὡς καί πρίν κινήσεως. κατά συνέπειαν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ τῆς ζώσης δυνάμεως δυνάμεθα νά παραβλέψωμεν τήν μεταξύ τῶν σημείων A_1 καί B περιεχομένην μάζαν.

Ἡ ζῶσα δύναμις τοῦ νάματος ἐκφράζεται λοιπόν διά

$$\frac{1}{2} m(v_1^2 - v_0^2) = \frac{\Pi \Omega dt}{2g}(v_1^2 - v_0^2)$$

ἔνθα v_0 καί v_1 ἐκφράζουσι τήν παρά τοῖς σημείοις A καί B ταχύτητα καί Π τήν πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ.

Ὑπολογίσωμεν ἤδη τό ἔργον τῶν ἐπί τοῦ νάματος ἐπενεργουσῶν δυνάμεων κατά τήν διάβασιν αὐτοῦ ἐπί τῆς θέσεως AB εἰς τήν θέσιν A_1B_1. αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι.

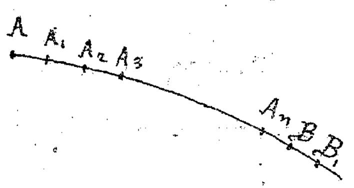
1ον) Ἡ βαρύτης τῆς ὁποίας τό ἔργον εἶναι τό αὐτό μέ τό παραγόμενον διά τῆς μεταβάσεως τῆς μάζης AA_1 ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς θέσεως AA_1 εἰς τήν θέσιν BB_1* δηλαδή $\Pi \Omega dt(Z_0 - Z_1)$.

2ον) Ἡ ἀπ' ἀλλήλων προστριβή τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ καί αἱ ἐκ τῆς συνοχῆς (viscosité) προερχόμεναι δυνάμεις τάς ὁποίας παραλείπομεν πρός τό παρόν.

3ον) Αἱ ἐπί τοῦ νάματος AB ἐξασκούμεναι πιέσεις ὑπό τοῦ περικυκλοῦντος αὐτό ῥευστοῦ καί τάς πιέσεις ταύτας

---

* Σημ. Τό ἔργον τῆς βαρύτητος σύγκειται τῷ ὄντι ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ὑπό τῆς βαρύτητος ἐκτελουμένου ἔργου κατά τήν μετάβασιν τῆς μάζης AA_1 εἰς τήν θέσιν A_1A_2 καί ταύτης εἰς τήν θέσιν A_2A_3 καί οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τῆς μεταβάσεως τῆς μάζης A_nB εἰς τήν θέσιν BB_1. Ἐπειδή δέ, ὅλαι αὗται αἱ μερικαί μάζαι εἶναι ἴσαι, τό σύνολον τοῦ ἔργου τούτου ἰσοδυναμεῖ μέ τό ἔργον, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς μεταβάσεως τῆς μάζης AA_1 ἐκ τῆς ἀρχικῆς θέσεως αὐτῆς AA_1 εἰς τήν θέσιν BB_1. —



διακρίνομεν εἰς δύο· τάς καθέτους τῇ τροχιᾷ, ὧν αἱ π. τῶν ὁποίων τό ἔργον εἶναι μηδέν, καί τάς παραλλήλους αὐτῇ p_0 καί p_1 τάς ἐπί τῶν ἄκρων A καί B ἐξασκουμένας, ὧν τά ἔργα ἰσοῦνται μέ

$$p_0 \omega_0 ds = p_0 \omega_0 v_0 dt = p_0 \Omega dt \text{ καί } -p_1 \Omega dt$$

Ἡ ἐξίσωσις τῶν ζωσῶν δυνάμεων εἶναι λοιπόν ἐνταῦθα

$$\frac{\Pi \Omega dt}{2g}(v_1^2 - v_0^2) = \Pi \Omega dt(Z_0 - Z_1) + \Omega dt(p_0 - p_1)$$

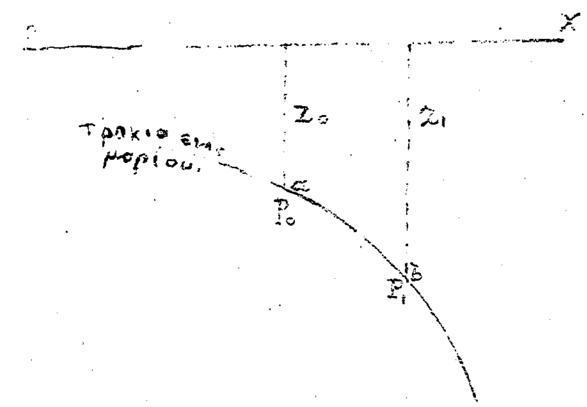
ἤ ἁπλοποιοῦντες

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = Z_0 - Z_1 + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} = \left(Z_0 + \frac{p_0}{\Pi}\right) - \left(Z_1 + \frac{p_1}{\Pi}\right)$$

ἤ καί

$$\frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + \frac{p_1}{p} = \frac{v_0^2}{2g} + Z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = \text{σταθ.}$$

<u>17ον.</u> Ἐξετάσωμεν νῦν την φυσικήν σημασίαν τῆς σχέσεως ταύτης.



$\frac{p_0}{\Pi}$ παριστᾷ τό ὕψος κυλινδρικῆς στήλης ἐκ του αυτοῦ ὑγροῦ, δυναμένης να παράξη την πίεσιν p_0 κατά μοναδα ἐπιφανείας. ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐάν ἀπό του σημείου α νοήσωμεν κατακόρυφον σωλῆνα αα', τό ὑγρόν ὡς ἐκ τῆς πιέσεως παρά τό σημεῖον α ἀνέρχεται εἰς τόν σωλῆνα μέχρις ὕψους $\frac{p_0}{\Pi}$ ὑπολογιζομένου ἀπό τοῦ σημείου α.

Ἐάν τό ῥευστόν εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ ἡ παρά τό σημεῖον α πίεσις θά ἦτο ἀνάλογος τοῦ ἀπό ὡρισμένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου οχ ὕψους αὐτῆς Z_0 καί δυνάμεθα νά τήν παραστήσωμεν διά ΠZ_0. Ἀλλ' ἤδη ἐν τῷ κινουμένῳ ὑγρῷ ἡ πίεσις παρά τό σημεῖον α εἶναι p_0, ὥστε ἡ ἐκ τῆς κινήσεως τοῦ ῥευστοῦ ἐπελθοῦσα δια-

<u>Ὑδροστατική</u>

φορά περί τήν πίεσιν παρά τό σημεῖον α ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ ἐκ τῆς κινήσεως κτηθεῖσα πίεσις παρά τό σημεῖον α ἰσοῦται μέ $p_0 - \Pi Z_0$ καί ἰσοδυναμεῖ μέ τήν πίεσιν ἥν ἐξασκεῖ ἐπί τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας στήλη ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ ἔχουσα ὕψος $h = \frac{p}{\Pi} - Z_0$ ἤ $\frac{p}{\Pi} + Z_0$ ἐάν ὑπολογίσωμεν τά Z ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω, ὅπως ἐπράξαμεν τοῦτο ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ τύπου τοῦ Bernouilli καί οὐχί ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω.

Ἡ ἐπελθοῦσα αὕτη αὔξησις $p_0 + \Pi Z_0$ τῆς πιέσεως παρά τό σημεῖον α, ὀφείλεται ὅλως εἰς τήν κίνησιν τοῦ ῥευστοῦ καί ὀνομάζομεν αὐτήν κινητικήν πίεσιν, καί τό ἰσοδυναμοῦν ὕψος $\frac{p_0}{\Pi} + Z_0 = h_0$ κινητικήν ἔντασιν τῆς πιέσεως παρά τό σημεῖον α.

καί ὁ τύπος τοῦ Bernouilli

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi} + Z_0 = \sigma\tau\alpha\theta. = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$

μᾶς διδάσκει, ὅτι

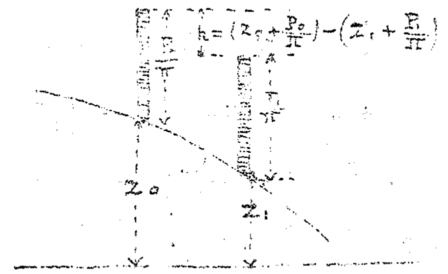
Τό τῇ ταχύτητι μορίου τινος τοῦ ὑγροῦ ἰσοδυναμοῦν ὕψος $\frac{v_0^2}{2g}$ ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ εἶναι ἀνάλογον τῆς κινητικῆς ἐντάσεως τῆς πιέσεως $\frac{p_0}{\Pi} + Z_0$ παρά τό αὐτό σημεῖον.

Ἐάν θεωρήσωμεν τόν τύπον τοῦ Bernouilli ὑπό τήν μορφήν αὐτοῦ

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \left(\frac{p_0}{\Pi} + Z_0\right) - \left(\frac{p_1}{\Pi} + Z_1\right) = h_0 - h_1$$

δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι

Ὅταν μόριόν τι τοῦ ῥευστοῦ μεταβαίνει ἀπό τῆς θέσεως α εἰς τήν θέσιν β ἡ κινητική ἔντασις αὐτοῦ μεταβάλλεται ὅπως καί τό ἰσοδυναμοῦν τῇ ταχύτητι αὐτοῦ ὕψος.



Ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ κινουμένου μορίου βάρους P_η ἰσοῦται μέ

$$P_\eta\left[\frac{v^2}{2g} + h\right]$$

ἀλλά $\frac{P_\eta v^2}{2g} = \frac{m v^2}{2}$ παριστᾷ τήν κινητικήν ἐνέργειαν (energie cinetique) τοῦ μορίου τοῦ ὑγροῦ. καί

ἐπειδή τό ἄθροισμα $P\left[\frac{v^2}{2g} + h\right]$ δέν μεταβάλλεται ἐκ τῆς μεταβολῆς τῶν μερῶν αὐτοῦ $P\frac{v^2}{2g}$ καί Ph ἕπεται ὅτι Ph εἶναι ἡ στατική ἐνέργεια (energie potentielle) αὐτοῦ. ὥστε

Ἡ κινητική ἔντασις τῆς πιέσεως μορίου τινός τοῦ ῥευστοῦ ἰσοῦται τῇ ἀντιστοιχούσῃ τῇ μονάδι τοῦ βάρους στατικῇ ἐνεργείᾳ (energie potentielle).-

Ἐν τῇ μονίμῳ καί ἄνευ προστριβῆς κινήσει ὑγροῦ τινος, ἡ ὁλική ἐνέργεια ἑκάστου μορίου εἶναι σταθερά, ὁπουδήποτε τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ καί ἄν θεωρηθῇ τοῦτο.

Τά ἰσοβαρῆ μόρια τοῦ ῥευστοῦ διερχόμενα διά τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ διαστήματος, κέκτηνται τήν αὐτήν ὁλικήν ἐνέργειαν.

Ἐκ τῆς σχέσεως.

$$\frac{p}{\Pi} + Z = h$$

ἐξάγομεν τήν γενικήν ἐξίσωσιν τῶν ἰσοστάθμων ἐπιφανειῶν

$$h - Z = \frac{p}{\Pi}$$

Διά μίαν καί τήν αὐτήν ἰσόσταθμον ἐπιφάνειαν ἔχομεν

$$dh = dZ$$

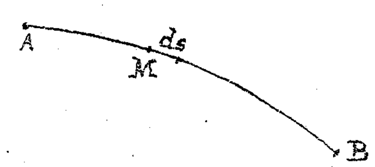
τουτέστιν ἐπί τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἡ ἐκ τῆς κινήσεως τοῦ μορίου προκύπτουσα μεταβολή τῆς στατικῆς αὐτοῦ ἐνεργείας ὀφείλεται ἁπλῶς εἰς τήν διαφοράν τῆς στάθμης τοῦ μορίου τούτου.

Τ' ἀποτελέσματα εἰς ἅ ἐφθάσαμεν ἀνωτέρω ἐφαρμόζονται αὐτολεξεί καί προκειμένου περί φλεβός ῥευστοῦ μέ διαστάσεις πεπερασμένας, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό ῥευστόν κινεῖται κατά παραλλήλους τομάς, ἐάν δηλαδή τά ἐν ἑνί καί τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ αβ, καθέτῳ τῷ νάματι AB, εὑρισκόμενα μόρια ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ κινοῦνται μέ τήν αὐτήν ταχύτητα καί εὑρίσκονται ἐν ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ α'β' καθέτῳ ἐπίσης τῷ νάματι καί κατά τήν ἀμέσως ἀκόλουθον στιγμήν.

18ον. Τό ἐκ τῆς δυνάμεως τῆς συνοχῆς ἀναπτυσσόμενον ἔργον. Ἀλλ' ἐν τοῖς προηγουμένοις, οὐδαμῶς ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν τό ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς δυνάμεως τῆς συνοχῆς (viscosité) τοῦ ῥευστοῦ, καί τῆς πρός ἄλληλα προστριβῆς τῶν διαφόρων αὐτοῦ μερῶν ἀναπτυσσόμενον ἔργον, ὅπερ ἐν τούτοις, δέν δυνάμεθα νά παραλείψωμεν εἰμή εἰς ὡρισμένας καί εὐαρίθμους περιστάσεις.

Ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐσωτερική σύστασις τῶν σωμάτων καί κατά συνέπειαν ἡ περί οὗ ὁ λόγος δύναμις τῆς συνοχῆς μᾶς εἶναι σχεδόν ὅλως ἄγνωστος. ἀλλά δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν, ὅτι, ὡς ἐκ τῆς ἀγνώστου ταύτης δυνάμεως, τά ἐν τῷ χώρῳ ds περιεχόμενα ῥευστά μόρια ἀπαντῶσιν ἐν τῇ κανονικῇ αὐτῶν κινήσει ἀντίστασιν Rds προερχομένην ἐκ τῶν ἐσωτερικῶν τούτων ἀγνώστων δυνάμεων τῆς συνοχῆς καί προστριβῆς τῶν μορίων τοῦ ῥευστοῦ ἐπ' ἀλλήλων. ἡ κατά μονάδα τοῦ μήκους ἀντίστασις R μεταβάλλεται ἐξ ἑνός εἰς ἕτερον σημεῖον τοῦ νάματος AB καί μένει καί αὕτη πρός τό παρόν τοὐλάχιστον ἄγνωστος.

Τό ἐξ αὐτῆς προκύπτον ἔργον τῆς ἀντιστάσεως τό σχετικόν πρός τό στοιχειῶδες νάμα ds ἐκφράζεται διά



$$-Rds.Vdt$$

ὅπου V ἐκφράζει τήν παρά τό σημεῖον M ταχύτητα, καί ἐπειδή $Q=\omega V$ τήν προηγουμένην ἔκφρασιν δυνάμεθα νά γράψωμεν καί ὡς ἑξῆς,

$$-Rds\frac{Q}{\omega}dt$$

Ἐάν ἤδη ὁλοκληρώσωμεν μεταξύ τῶν τομῶν A καί B τήν ἔκφρασιν ταύτην θά εὕρωμεν τήν εἰς τήν κανονικήν ῥοήν τοῦ ῥευστοῦ ὁλικήν ἀντίστασιν,

$$-Qdt\int_A^B \frac{R}{\omega}ds=\zeta$$

τήν ἀναπτυσσομένην ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τῆς συνοχῆς καί προστριβῆς πρός ἄλληλα τῶν μορίων τοῦ ῥευστοῦ, καί ὁ τύπος τοῦ Bernoulli μετασχηματίζεται εἰς τόν ἀκόλουθον

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\Pi}+z+\frac{\#}{\Pi}\int\frac{R}{\omega}ds=\sigma\tau\alpha\theta.$$

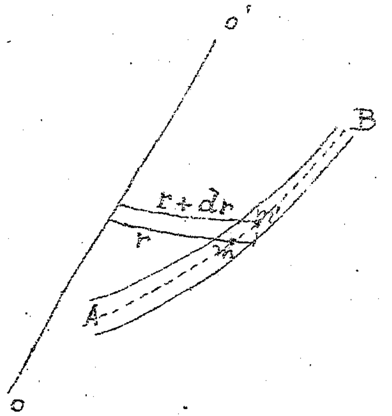
[ζ καλεῖται ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς μεταξύ τῶν σημείων A καί B.]

19ον. Θεώρημα τοῦ Bernoulli ἐν τῇ σχετικῇ κινήσει. Ἐν τῇ σπουδῇ τῶν ὑδραυλικῶν μηχανῶν συχνά θά ἐξετάσωμεν οὐχί πλέον τήν ἀπόλυτον, ἀλλά τήν σχετικήν κίνησιν τοῦ ῥευστοῦ ὡς πρός τήν μηχανήν, τῆς κινήσεως τῆς ὁποίας συμμετέχει τοῦτο. διά τοῦτο δέον νά ζητήσωμεν, τήν ἐκ τῆς σχετικῆς ταύτης κινήσεως, προκύπτουσαν τροποποίησιν τοῦ τύπου τοῦ Δ. Bernoulli.

Ἀρκεῖ δέ πρός τοῦτο, καθώς ἐκ τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς γνωρίζομεν, νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ ῥευστοῦ, ἐκτός τῶν ἤδη ἐπενεργουσῶν ἐπ' αὐτοῦ δυνάμεων δύο ἑτέρας, ὧν ἡ μέν εἶναι ἡ παρασυρτική δύναμις τῆς ἀδρανείας (la force d'inertie du mouvement d'entrainement) καί ἡ ἑτέρα ἡ σύνθετος κεντρόφυξ δύναμις (force centrifuge composée).

Προκειμένου ὅμως περί τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ζωσῶν δυνάμεων ἐν ταῖς σχετικαῖς κινήσεσιν, ἡ δευτέρα αὕτη δύναμις, οὖσα σταθερῶς κάθετος ἐπί τῆς σχετικῆς τροχιᾶς οὐδέν παράγει ἔργον, καί κατά συνέπειαν δέν λαμβάνεται ποσῶς ὑπ' ὄψιν.

Μένει λοιπόν μόνη ἡ παρασυρτική δύναμις τῆς ἀδρανείας, καί ἐπειδή ἐνταῦθα θά ἐξετάσωμεν ἁπλῶς τήν περίπτωσιν καθ' ἥν ἡ παρασύρουσα κίνησις εἶναι περιστροφική κίνησις περί σταθερόν ἄξονα, ἡ περί οὗ ὁ λόγος δύναμις, εἶναι ἁπλῶς ἡ ἐκ τῆς κινήσεως ταύτης προκύπτουσα κεντρόφυξ δύναμις. Οὕτω λοιπόν θεωροῦμεν σῶμά τι περιστρεφόμενον περί σταθερόν ἄξονα OO' καί φέρον μεθ' ἑαυτοῦ ῥευστόν τι, οὗτινος ζητεῖται ἡ σχετική κίνησις ὡς πρός τό περιστρεφόμενον σῶμα.



Ἔστω AB ἡ σχετική τροχιά τοῦ ῥευστοῦ ὡς πρός τό ὁμοιομόρφως περιστρεφόμενον σῶμα. καθ' ἅ ἐν τοῖς προηγουμένοις εἴπομεν, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τήν ἐπί τῆς τροχιᾶς M_0M_1 κίνησιν ὡς ἀπόλυτον ἐάν ἐφαρμώσωμεν ἐπί τοῦ διαγράφοντος αὐτήν μορίου τοῦ ῥευστοῦ m, πρός τάς ἤδη ἐπενεργούσας ἐπ' αὐτοῦ δυνάμεις τῆς βαρύτητος τῆς πιέσεως καί τῆς συνοχῆς, καί τήν ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα OO' περιστροφικῆς κινήσεως προκύπτουσαν κεντρόφυγα δύναμιν μέ ἀντίθετον φοράν τῆς πραγματικῆς.

Ἡ τιμή τῆς κεντρόφυγος ταύτης δυνάμεως εἶναι $m\omega^2 r$ ὅπου ω παριστᾷ τήν περί τόν ἄξονα OO' περιστροφικήν ταχύτητα, m τήν μᾶζαν τοῦ μορίου m καί r τήν ἀπό τοῦ ἄξονος OO' ἀπόστασιν τοῦ αὐτοῦ μορίου. τό ἐκ τῆς δυνάμεως ταύτης προκύπτον ἔργον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τήν τιμήν αὐτῆς ἐπί τήν προβολήν τοῦ τόξου mm'

ἐπί τῆς φορᾶς τῆς αὐτῆς δυνάμεως τουτέστιν ἐπί τήν ἀκτῖνα r. ἡ προβολή αὕτη ἰσοῦται μέ dr καί τό ἐκ τῆς μεταβάσεως τοῦ ῥευστοῦ ἀπό τοῦ σημείου m εἰς τό m' προκύπτον ἔργον ὡς ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι

$$m\omega^2 r\,dr$$

τό ὁλικόν δέ ἔργον τό προκύπτον ἐκ τῆς μεταβάσεως τοῦ μορίου τοῦ ῥευστοῦ ἀπό τοῦ σημείου A εἰς τό σημεῖον B ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρωτικῷ ἀθροίσματι,

$$\int_A^B m\omega^2 r\,dr = m\omega^2\int_{r_0}^{r_1} r\,dr = \frac{m\omega^2(r_1^2-r_0^2)}{2}$$

καί ἐπειδή $\omega^2 r^2 = u^2$ ἔνθα u παριστᾷ τήν παρασύρουσαν ταχύτητα τό ἀνωτέρω ἔργον ἐκφράζεται καί διά

$$\frac{m(u_1^2-u_1^2)}{2} = \frac{\Pi Q\,dt}{2g}(u_1^2-u_0^2)$$

αὕτη δέ εἶναι καί ἡ ποσότης, ἥν δέον νά προσθέσωμεν εἰς τό δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῶν ζωσῶν δυνάμεων, διά νά μεταβῶμεν ἐκ τῆς ἀπολύτου εἰς τήν σχετικήν κίνησιν, ὥστε ἐάν παραστήσωμεν διά w τήν σχετικήν ταχύτητα τοῦ ῥευστοῦ μορίου m ὁ τύπος τοῦ Bernoulli μετατρέπεται ἐν τῇ περιστάσει ταύτῃ εἰς,

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} + Z + \frac{1}{\Pi}\int\frac{R}{\omega}\,ds = \text{σταθ.}$$

ἐάν $r_0 = r_1$ ὁ τύπος τοῦ Bernoulli ἐφαρμόζεται ἐν τῇ σχετικῇ ὅπως καί ἐν τῇ ἀπολύτῳ κινήσει.

Περιπτώσεις καθ' ἅς δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν πίεσιν ἐν κινουμένῳ ὑγρῷ.

Ὁ τύπος τοῦ Δ. Bernoulli, τόν ὁποῖον ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν, μᾶς δίδει τήν σχέσιν ἥτις ὑπάρχει μεταξύ τῆς ταχύτητος μορίου τινός κινουμένου ὑγροῦ καί τῆς πιέσεως ἥν ὑφίσταται τό μόριον τοῦτο ὑπό τοῦ περικυκλοῦντος αὐτό ῥευστοῦ, καί προσδιορίζει τήν μίαν τῶν ποσοτήτων τούτων, τῆς ἑτέρας οὔσης γνωστῆς.

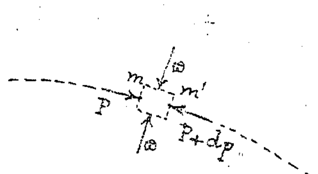
Ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις δύο περιπτώσεις ἐν αἷς δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς τήν πίεσιν ταύτην.

$1^{ον}$) Ἔστωσαν X, Y, Z αἱ συνιστῶσαι τῶν ἐπί τοῦ ῥευστοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, καί θεωρήσωμεν ὑλικόν τι σημεῖον (ἀνεξάρτητον ὅλως τοῦ ὑγροῦ) κινούμενον ὑπό μόνην τήν ἐπήρειαν τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων. τό ὑποθετικόν τοῦτο κινητόν διαγράφει ὡρισμένην τινα τροχιάν μέ κινησιν ἀκολουθοῦσαν ὡρισμένον τινά νόμον,

λέγω ὅτι,

Ἐάν ἕκαστον μόριον τοῦ κινουμένου ὑγροῦ διαγράφει ἐν τῇ κινήσει αὐτοῦ τήν αὐτήν μέ τό ὑποθετικόν κινητόν τροχιάν καί κατά τόν αὐτόν νόμον, ἡ πίεσις, ἥν ὑφίσταται, εἶναι ἡ αὐτή, ὡς εἰ τό ὑγρόν εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ, καί προσδιορίζεται διά τῶν ἀρχῶν τῆς ὑδροστατικῆς.

Τῷ ὄντι ἔστωσαν m καί m' δύο διαδοχικαί θέσεις τοῦ κινουμένου μορίου τοῦ ὑγροῦ, μεθ' ὧν συμπίπτει τοῦτο κατά τάς στιγμάς t καί $t+dt$, καί παρά ταῖς ὁποίαις ἡ ἐξασκουμένη πίεσις εἶναι ἀμοιβαίως p καί $(p+dp)$.



θεωρήσωμεν συνάμα ἐν τῷ ῥευστῷ στοιχειώδη τινά κύλινδρον τόν m m'. Αἱ ἐγκαρσίως ἐξασκούμεναι ἐπ' αὐτοῦ πιέσεις ϖ μηδενίζονται καί μένουσι μόνον αἱ ἐπί τῶν βάσεων αὐτοῦ m καί m' ἐξασκούμεναι ωp και $\omega(p+dp)$, ὧν ἡ συνισταμένη εἶναι ωdp.

ὥστε ὁ κύλινδρος m m' κινεῖται ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων X, Y, Z καί τῆς ἐσωτερικῆς πιέ-

σεως ωdp. Γνωρίζομεν ὅμως καθ' ὑπόθεσιν, ὅτι ἡ πραγματική κίνησις αὐτοῦ ὀφείλεται ἁπλῶς ταῖς δυνάμεσι X, Y, Z ὥστε

$$dp = 0 \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Βασιζόμενοι ἐπί τῶν θεμελιωδῶν ἐξισώσεων (1) τοῦ [12] τῆς ὑδροδυναμικῆς ἠδυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν τήν ἀλήθειαν ταύτην καί ὡς ἑξῆς.

Καθ' ὑπόθεσιν αἱ ἐπιταχύνσεις u', v', w' ὀφείλονται ἐνταῦθα ἁπλῶς τῇ ἐπενεργείᾳ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων X, Y, Z καί ἔχομεν

$$X = u' \qquad Y = v' \qquad Z = w'$$

ὥστε

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

ἐξ οὗ καί

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = 0$$

$2^{ον}$ Ἐάν ἡ ῥοή ὑγροῦ τινος ἐκτελεῖται κατά νάματα εὐθύγραμμα καί μέ σταθεράν ταχύτητα ἡ ἐξασκουμένη ἐπί μορίου τινός πίεσις εἶναι ἡ αὐτή ὡς εἰ τό ῥευστόν εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ.

Τῷ ὄντι ἀφ' οὗ ἅπαντα τά μόρια τοῦ ῥευστοῦ κινοῦνται ἰσοταχῶς καί ὁμοιομόρφως ἐπί εὐθυγράμμων τροχιῶν αἱ ἐπ' αὐτῶν ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις ἰσορροποῦσι (ἀρχή τῆς ἀδρανείας τῆς ὕλης)· καί αἱ ἐπί τῆς ὅλης μάζης ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις ἰσορροποῦσι λοιπόν καί ἡ πίεσις ἀκολουθεῖ τόν ὑδροστατικόν νόμον.

Ἄλλως ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (1) τοῦ [12] καθ' ὑπόθεσιν

$$u' = 0 \qquad v' = 0 \qquad w' = 0$$

καί μεταβάλλονται αὗται εἰς

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X\,,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\rho Y\quad \frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z$$

αἵτινες δίδουσι τήν πίεσιν ἐν τοῖς ἠρεμοῦσι ῥευστοῖς (4)

Ὑπάρχουσι τέλος δύο ἕτεραι περιπτώσεις ἐν αἷς ὑποθέτομεν ὅτι ἡ πίεσις ἐξασκεῖται κατά προσέγγισιν ὡς καί ἐν τῷ ἠρεμοῦντι ὑγρῷ.

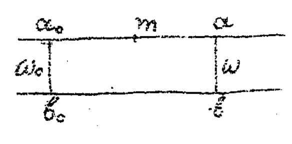
1ον. Ἐάν ἡ κίνησις τοῦ ῥέοντος ὑγροῦ εἶναι λίαν βραδεῖα, ὥστε νά δυνάμεθα νά ἐκλάβωμεν αὐτό ὡς ἐντελῶς ἠρεμοῦν καί

2ον. Ἐάν ἡ ὑγρά φλέψ διέρχηται καθέτως ἐπίπεδόν τι μέ τροχιάς ἐλαχίστης καμπυλότητος, δύναται ἡ πίεσις νά θεωρηθῇ ὡς ἀκολουθοῦσα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ τόν ὑδραστατικόν νόμον· διότι ἡ περίπτωσις αὕτη προσεγγίζει τήν ἄνω ἐξετασθεῖσαν 2αν ἐν ᾗ ἐάν ἡ ῥοή ὑγροῦ τινος ἐκτελεῖται κατά νάματα εὐθύγραμμα καί μέ σταθεράν ταχύτητα.

Ἀρκεῖ καί ἐνταῦθα ν'ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ταχύτης ἐλάχιστον μόνον μεταβάλλεται παρά τῷ περί οὗ ὁ λόγος ἐπιπέδῳ.

ἤ γενικώτερον

Ἐάν ἡ μόνιμος κίνησις ὁμογενοῦς ῥευστοῦ ἐκτελεῖται κατά νάματα εὐθύγραμμα καί ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι σταθερά ἐν ἑκάστῳ νάματι.



Ἔστω τῷ ὄντι τό νάμα $\alpha_0\beta_0\alpha\beta$ συγκείμενον ἐξ εὐθυγράμμων τροχιῶν· ἡ μορφή αὐτοῦ εἶναι κατά συνέπειαν κυλινδρική καί ἐκ τῆς σχέσεως [16]

$$\omega_0 V_0 = \omega V$$

συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ταχύτης παρά τοῖς σημείοις α_0 καί α εἶναι

ἡ αὐτή, ἀφ' οὗ $\omega_0=\omega$.

Ὥστε ἐν ὡρισμένῃ τινί στιγμῇ τά ἐπί τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς $\alpha_0\alpha$ κινούμενα ὑγρά μόρια ἔχουσι τήν αὐτήν ταχύτητα· καί ἐπειδή ἡ κίνησις ὑποτίθεται μόνιμος ἡ ταχύτης αὕτη δέν μεταβάλλεται προϊόντος τοῦ χρόνου.

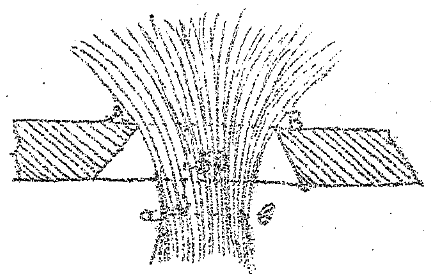
Κεφάλαιον ΙΙ.

Σπουδή τῆς διά στομίου ῥοῆς

§ 1ον Ὀξυχειλῆ στόμια

21. Ὑποθέτομεν τό στόμιον κυκλικόν εἰς τόν πυθμένα ἀγγείου μεγάλων σχετικῶς διαστάσεων.

Ἐκ πρώτης ὄψεως νομίζει τις ὅτι ἡ ῥοή ἐκτελεῖται διά τῆς καταπτώσεως ἁπλῶς τοῦ ἐν τῷ διά τοῦ στομίου κατακορύφῳ κυλίνδρῳ

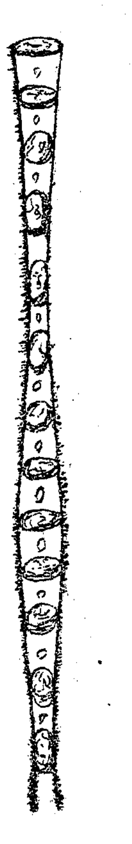


ἐμπεριεχομένου ῥευστοῦ. Ἐν τούτοις ἐάν εἰσαγάγωμεν κυλινδρικόν σωλῆνα κατακόρυφον παρά τήν ὀπήν βλέπομεν ὅτι ἡ ἐν αὐτῷ κατάπτωσις τοῦ ῥευστοῦ εἶναι ἐλαχίστη παραβαλλομένη πρός τήν κατάπτωσιν αὐτοῦ τῆς στάθμης εἰς τά περί αὐτόν περιφερικά ταῦτα μέρη, καί βλέπομεν τοῦτο καταφανῶς, ἐάν ῥίψωμεν ἐν τῷ ἀγγείῳ μικρά σώματα δυνάμενα νά κρατηθῶσι μετέωρα ἐν τῷ ῥευστῷ καί συμμετάσχωσι τῆς κινήσεως αὐτοῦ. — Βλέπομεν τότε ὅτι τά διάφορα ὑγρά νάματα εἶναι καμπυλόγραμμα συντρέχοντα πρός ἄλληλα καί μόνον εἰς ἀπόστασίν τινα τοῦ στομίου τῆς ἐκροῆς ῥέουσι ταῦτα παραλλήλως διερχόμενα καθέτως τήν τομήν αβ μικροτέραν τῶν πρό καί μετ' αὐτήν λοιπῶν τομῶν, τήν ὁποίαν διά τόν λόγον τοῦτον καλοῦμεν τομήν συρροῆς (section contractée) ἐξ ἀκριβῶν

παρατηρήσεων εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τομή τῆς συῤῥοῆς αὕτη εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπό τοῦ στομίου τῆς ἐκροῆς AB ἴσην τῇ ἀκτῖνι αὐτοῦ καί ἡ διάμετρος αὐτῆς αβ ἰσοῦται μέ 0.79 τῆς διαμέτρου τοῦ στομίου AB ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν Ω καί ω τῶν δύο τούτων τομῶν εἶναι λοιπόν $m = 0{,}62$ καί ἔχομεν

$$\omega = m\Omega = 0{,}62\,\Omega$$

Εἰς μικράν ἀπόστασιν ἑκατέρωθεν τῆς τομῆς τῆς συῤῥοῆς τά διάφορα νάματα μένουσι παράλληλα, ἡ φλέψ εἶναι διαυγεστάτη καί κυλινδρική· εἰς μείζονα ὅμως ἀπόστασιν τῆς τομῆς τῆς συῤῥοῆς θολοῦται ἐν μέρει ἡ φλέψ, δέν εἶναι πλέον κυλινδρική καί διαμεγεθυντικῶν φακῶν ἀναγνωρίζομεν ἐν αὐτῇ τήν ἔναντι ἐσωτερικήν σύστασιν. Εἰς ἀπόστασιν δέ ἔτι μείζονα ἀπό τῆς συνεσταλμένης τομῆς διαλύεται ἡ φλέψ εἰς μεμονωμένας σταγόνας.



Ἡ ἐπί τῆς ὑγρᾶς μάζης ἐνέργεια τῆς βαρύτητος ἐπηρεάζει βεβαίως τό φαινόμενον τοῦτο.

Ἄς ὑποθέσωμεν τῷόντι δύο μόρια m καί m' διερχόμενα διά τῆς συνεσταλμένης τομῆς τό πρῶτον κατά τόν χρόνον 0, τό δεύτερον μετά θ δευτερόλεπτα καί παραστήσωμεν διά v τήν ταχύτητα αὐτῶν ἐν τῇ τομῇ τῆς συῤῥοῆς, μετά παρέλευσιν t δευτερολέπτων ἡ ἀπό τῆς τομῆς τῆς συῤῥοῆς ἀπόστασις τοῦ μορίου m εἶναι

$$h = vt + \frac{1}{2} g t^2$$

ἡ τοῦ μορίου m' ἀπόστασις ἀπό τῆς αὐτῆς τομῆς τῆς συρροῆς εἶναι

$$h' = \upsilon(t-\theta) + \frac{1}{2} g (t-\theta)^2$$

καὶ ἡ σχετικὴ ἀπόστασις η τῶν δύο τούτων μορίων εἶναι

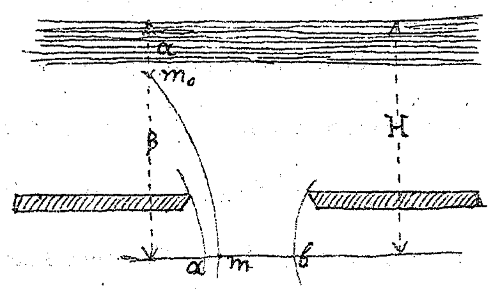
$$h - h' = \upsilon t + \frac{1}{2} g t^2 - \left[\upsilon(t-\theta) + \frac{1}{2} g (t-\theta)^2\right]$$

$$\eta = h - h' = \left(\upsilon - g\frac{\theta}{2} + g t\right)\theta$$

καὶ βλέπομεν ὅτι προϊόντος τοῦ χρόνου αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον ἡ σχετικὴ αὕτη ἀπόστασις· κατ' ἀνάγκην λοιπὸν ἐπέρχεται ἡ εἰς σταγόνας ἀποσύνθεσις τῆς φλεβός. Τοῦτο παρατηροῦμεν κυρίως εἰς τοὺς καταρράκτας ἔνθα ἡ φλὲψ μετασχηματίζεται οὕτως εἰπεῖν εἰς ὀμίχλην κατὰ τὴν πτῶσιν της.

Ταχύτης ῥοῆς ἐν τῇ τομῇ τῆς συῤῥοῆς.

22. Θεωρήσωμεν ῥευστόν τι μόριον m διερχόμενον τὴν τομὴν τῆς συῤῥοῆς μὲ ταχύτητα υ καὶ τὴν τροχιὰν τοῦ μορίου τούτου μέχρι τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ θέσεως m_0 ἔνθα ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἦτο υ_0 ὑποθέτομεν δὲ m_0 ἀρκούντως ἀπομεμακρυσμένον τοῦ m, ὥστε, ὡς ἐκ τῶν μεγάλων διαστάσεων τοῦ ἀγγείου νὰ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ τετράγωνον υ_0^2 τῆς παρὰ τὸ σημεῖον m_0 ταχύτητος υ_0.



Ἔστωσαν α καὶ β αἱ ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ῥευστοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς τῆς συῤῥοῆς ἀποστάσεις τοῦ σημείου m_0· p ἡ ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ῥευστοῦ ἐξασκουμένη ἐν τῷ ἀγγείῳ πίεσις καὶ p' ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις. Ἡ ἐν τῇ τομῇ τῆς συῤῥοῆς πίεσις εἶναι [ ] p'

καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐκφραζούσης τὴν σχέσιν τοῦ Bernouilli

ἐξισώσεως (§16) εἶναι

$$\frac{\upsilon^2}{2g} + \frac{p'}{\varpi} + \mu\eta\delta\acute{\epsilon}\nu$$

ἡ παρὰ τὸ σημεῖον m_0 πίεσις εἶναι $p + \varpi\alpha$ [ ]

καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἄνω μνημονευθείσης ἐξισώσεως (§16) εἶναι

$$\mu\eta\delta\acute{\epsilon}\nu + \frac{p + \varpi\alpha}{\varpi} + \beta$$

καὶ κατὰ τὴν σχέσιν τοῦ Bernouilli

$$\frac{\upsilon^2}{2g} + \frac{p'}{\varpi} + \mu\eta\delta\acute{\epsilon}\nu = \mu\eta\delta\acute{\epsilon}\nu + \frac{p + \varpi\alpha}{\varpi} + \beta$$

ἤ

$$\frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{p - p'}{\varpi} + \alpha + \beta = \frac{p - p'}{\varpi} + H$$

ὅθεν

$$\upsilon = \sqrt{2g\left[H + \frac{p - p'}{\varpi}\right]}$$

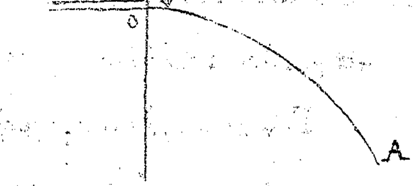
ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐν τῷ ἀγγείῳ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ εἶναι ἡ αὐτὴ ἔχομεν $p = p'$ καὶ ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\upsilon = \sqrt{2gH}.$$

ἔνθα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν H ὡς ἴσον μὲ τὸ βάθος τοῦ ἀγγείου. Τὴν τελευταίαν ταύτην σχέσιν πρῶτος ὁ Toricelli ἀνεκάλυψε

Ὁ νόμος οὗτος εὐκόλως ἐπαληθεύεται καὶ πειραματικῶς τὰ ὑγρὰ μόρια διαγράφουσι τῷ ὄντι τὴν παραβολὴν OA

$$x = \upsilon t \qquad y = \frac{1}{2} g t^2$$



ἢ ἀπαλείφοντες τὸ t

$$x^2 = 4Hy$$

τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἀπ' εὐθείας καὶ βεβαιούμεθα οὕτω ὅτι τὰ ὑγρὰ μόρια ἐν τῇ ῥοῇ των ἀκολουθοῦσι τὴν παραβολὴν ταύτην.

Ἔκροσ. Ὁ ἔκρους μετρᾶται διὰ τῆς ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῆς συρροῆς ποσότητος ὕδατος ἥτις εἶναι

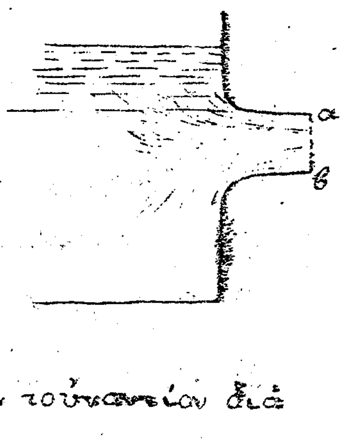
$$Q = \omega v = m\Omega \sqrt{2g\left[H + \frac{p-p'}{\varpi}\right]}$$

ἢ ἐὰν $p = p'$

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH}$$

Αὐλὸς ἐκρ. τῆρ §3. Τὸ προστιθέμενον τῷ στομείῳ τῆς ἐκροῆς παράρτημα καλοῦμεν αὐτὸν ἐκρυτῆρα· καὶ ἔχει οὕτω τὴν αὐτὴν μορφὴν μὲ τὴν ὑγρὰν φλέβα καὶ ἐκτείνεται μέχρι τῆς τομῆς τῆς συρροῆς καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ ω τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αβ ὁ ἔκρους εἶναι

$$Q = \omega\sqrt{2gH}$$



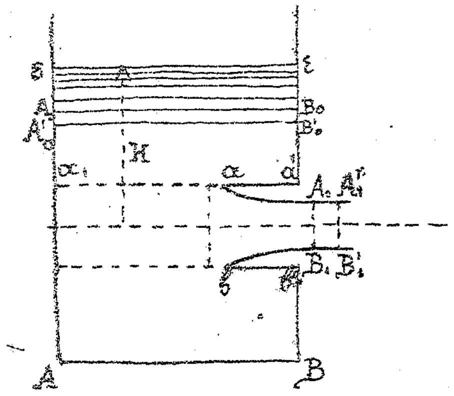
δηλαδὴ $m = 1$,

Διὰ τοῦ ἐκρυτῆρος τούτου αὐλοῦ ἐπιτυγχάνομεν δηλαδὴ τὸν μεγαλείτερον ἔκρουν.

Αὐλὸς ἐκρ. εἰσδύων §4. Τὸν ἀσθενέστερον ἔκρουν ἐπιτυγχάνομεν τοὐναντίον διὰ τοῦ εἰσδύοντος αὐλοῦ τοῦ Borda· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν

Τὸν συντελεστὴν τῆς συστολῆς ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ποσοτήτων τῆς κινήσεως ὅπερ μᾶς διδάσκει ὅτι

προβάλλοντες ἐπὶ ἄξονά τινος τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως mv καὶ τὴν ὤθησιν τῆς δυνάμεως Ft εὑρίσκομεν ποσότητας ἴσας.



Ἂς λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν προβολῶν τὸν ἄξονα τοῦ στομείου καὶ θεωρήσωμεν τὴν ὑγρὰν μάζαν τὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς τῆς συρροῆς A_1B_1 καὶ ἑτέρας τινὸς A_0B_0 ἀρκούντως ἀπομεμακρυσμένης ἐν τῷ ἐσωτερικῷ τοῦ δοχείου ὥστε νὰ ὑποθέσωμεν τὴν ταχύτητα v_0 μικρὰν καὶ παραλείψωμεν αὐτήν· ἐπὶ τῆς μάζης ταύτης θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ποσοτήτων τῶν κινήσεων. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἡ μάζα αὕτη κινεῖται καὶ καταλαμβάνει τὴν θέσιν $A_0'B_0'A_1'B_1'$ καὶ ἐπειδὴ ἡ κίνησις ὑποτίθεται ἐνδελεχὴς (permanente) αἱ ταχύτητες τῶν μορίων τῆς μάζης $A_0'B_0'A_1B_1$ εἶναι αἱ αὐταὶ κατὰ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt· οἱ ὅροι λοιπὸν τοὺς ὁποίους δίδουσι εἰς τὸ ἄθροισμα Σmv ἐξαφανίζονται καὶ οὕτω ἀντὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ποσοτήτων τῆς κινήσεως ἐπὶ τῆς ὅλης μάζης $A_0B_0A_1B_1$ ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τῆς στοιχειώδους μάζης $A_0B_0A_0'B_0'$ θεωροῦντες αὐτὴν ὡς μεταβαίνουσαν ἀπὸ τῆς θέσεως $A_0B_0A_0'B_0'$ εἰς τὴν θέσιν $A_1B_1A_1'B_1'$.

Ἔστω υ ἡ ταχύτης ἐν τῇ τομῇ τῆς συρροῆς ἧς τὸ ἐμβαδὸν παριστῶμεν διὰ τοῦ ω ἔχομεν

$$\text{ὄγκος } A_1B_1A_1'B_1' = \omega v\,dt$$

$$\text{βάρος ὄγκου } A_1B_1A_1'B_1' = \varpi\omega v\,dt$$

$$\text{μάζα ὄγκου } A_1B_1A_1'B_1' = \frac{\varpi}{g}\omega v\,dt$$

ποσότης κινήσεως ὄγκου $A_1B_1A_1'B_1' =$ μᾶζα x v $= \frac{\varpi}{g}\, \omega v^2 dt$

καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Toricelli $v^2 = 2gH$ ἔχομεν

ποσότης κινήσεως $A_1B_1A_1'B_1' = 2\varpi\omega H dt$

ἡ ποσότης κινήσεως τῆς μάζης $A_0B_0A_0'B_0'$ εἶναι μηδὲν διότι παραλείπομεν ὡς ἐλαχίστην τὴν ταχύτητα αὐτῆς v_0.–

Ἴδωμεν ἤδη τὰς ἐπὶ τῆς μάζης $A_0B_0A_1B_1$ ἐπενεργούσας ἐξωτερικὰς δυνάμεις· αὗται εἶναι ἡ βαρύτης τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος τῆς ὀπῆς εἶναι μηδὲν καὶ αἱ πιέσεις ἃς ὑφίσταται ἡ μᾶζα ἐκ τοῦ περικυκλοῦντος αὐτὴν ῥευστοῦ καὶ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν ἀμέσως εἰς ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ πίεσιν ὀφειλομένην τῷ βάρει αὐτοῦ τοῦ ῥευστοῦ· ἕνεκα δὲ τῆς βαρύτητος τῶν κινήσεων ὑποθέτομεν αὐτὰς ἐξασκουμένας ὡς ἐν τῇ ὑδροστατικῇ. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐξασκεῖται ἀπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τῶν παρειῶν aA_1B_1b καὶ ἐπὶ τῆς τομῆς τῆς συρροῆς· καὶ διὰ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εε ἐπὶ τῆς παρειᾶς A_0B_0 τῆς θεωρουμένης μάζης ἡ πίεσις αὕτη ἐξασκεῖται καὶ ἐπὶ τῶν παρειῶν τοῦ ἀγγείου, αἵτινες ἐξασκοῦσι καὶ αὗται ἐπὶ τοῦ ῥευστοῦ ἴσην ἀντίδρασιν

Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐξασκεῖται λοιπὸν ἐφ᾽ ὅλης τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ θεωρουμένου ῥευστοῦ ὄγκου $A_0B_0A_1B_1$ καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ ἄξονός τινος μηδενίζεται.

Μένει νῦν ἡ ἐκ τοῦ βάρους τοῦ ῥευστοῦ προκύπτουσα πίεσις. αὕτη εἶναι ϖh ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κειμένῳ εἰς ἀπόστασιν h ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας εε. ἐξασκεῖται δὲ ἐπὶ τῆς θεωρουμένης ῥευστῆς μάζης ἀπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας A_0B_0 καὶ διὰ τῆς ἀντιδράσεως τῶν παρειῶν ἐπὶ τῆς λοιπῆς ἐπιφανείας τοῦ ὄγκου A_0B_0ab. ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας A_0B_0 ἐξασκουμένης πιέσεως

καθὼς καὶ ἐκείνης ἣν ἐξασκεῖ ἡ παρειὰ AB καὶ αἱ aa', bb' μηδενίζονται ὡς κάθετοι τῷ ἄξονι τῆς προβολῆς· αἱ ὑπὸ τῶν παρειῶν A_0A_1 καὶ B_1a', b_1A καὶ $b'B$ ἐξασκούμεναι πιέσεις μηδενίζονται καὶ αὗται ἐν τῇ προβολῇ διότι δίδουσι στοιχειώδεις πιέσεις ἴσας ἀνὰ δύο καὶ ἀντιθέτου φορᾶς μένει λοιπὸν μόνη ἡ ὑπὸ τῆς παρειᾶς a_1b_1 ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς ῥευστῆς μάζης πίεσις καὶ ἡ τιμὴ αὐτῆς ἰσοῦται μὲ $\varpi\Omega H$ ἔνθα H ἐμφαίνει τὴν ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εε ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τοῦ ἐμβαδοῦ $\Omega = a_1b_1$.

Τὸ θεώρημα τῶν ποσοτήτων τῶν κινήσεων μᾶς δίδει λοιπὸν

$$2\varpi\omega H dt = \varpi\Omega H dt$$

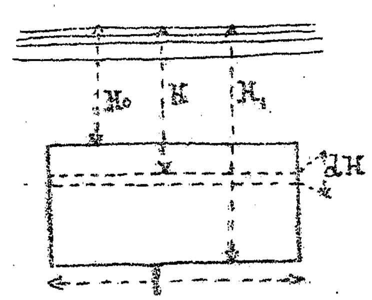
ὅθεν

$$2\omega = \Omega$$

ἡ μεγαλειτέρα συστολὴ ἀντιστοιχεῖ τῷ $m = \frac{1}{2}$

Ἐφαρμογὴ ἐπὶ ὀρθογωνίου στομίου.

25. Ἐνταῦθα ἔχομεν $Y - y =$ σταθερὰ $= l$ καὶ ἡ ἄνω σχέσις [ ] μᾶς δίδει



$$Q = ml\sqrt{2g}\int_{H_0}^{H_1}\sqrt{H}\,dH$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα

$$Q = \frac{2}{3} ml\sqrt{2g}\left[H_1^{\frac{3}{2}} - H_0^{\frac{3}{2}}\right]$$

Ἐὰν ἐφηρμόζομεν ἐπὶ τῆς ἄνω ὀρθογωνίου ὀπῆς τὸν τύπον ( )

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH}$$

διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἔκρου μεταχειριζόμενοι τὴν παρὰ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ ὀρθογωνίου ταχύτητα θὰ ἔχομεν

$$Q' = m l \left[H_1 - H_0\right] \sqrt{2g \frac{H_1 + H_0}{2}}$$

καὶ εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος

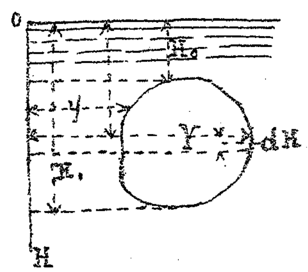
$$\frac{Q}{Q'} = 0{,}9952$$

εἶναι σχεδὸν ἴσος τῇ μονάδι· καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν Q' ἀντὶ τοῦ Q, ὄχι μόνον διὰ τὰ ὀρθογώνια στόμια ἀλλὰ δι' οἱονδήποτε στόμιον ἔχον ἄξονα συμμετρίας ὁριζόντιον, διότι δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν αὐτὴν εἰς ὀρθογώνια καθέτως τῷ ἄξονι τῆς συμμετρίας καὶ ἀποφεύγομεν οὕτω τὰς ἄνω ὁλοκληρώσεις.

Μεγάλα ὀξυχειλῆ στόμια

26. Ὑποθέσωμεν νῦν ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ στομίου, δι' οὗ ἐκτελεῖται ἡ ῥοὴ εἶναι σχετικῶς μεγάλη καὶ ἔστωσαν

$$y = f(H) \quad \text{καὶ} \quad Y = F(H)$$



αἱ παριστῶσαι τὰ δύο μέρη τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐξισώσεις· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ στομίου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑποδιαιρέσωμεν εἰς ἀπειροστὰ ὁριζόντια ἐμβαδὰ

$$(Y - y)\, dH$$

καὶ ὑποθέτομεν ὅτι δι' ἑκάστου τῶν στοιχειωδῶν τούτων στο-

μίων ἡ ῥοὴ ἐκτελεῖται ὡς εἰ εὑρίσκετο αὐτὴ μόνη ἐπὶ στερεᾶς παρειᾶς μετὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, τὴν ὁποίαν ὑπὸ ἐπιφύλαξιν μόνον παραδεχόμεθα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμώσωμεν καὶ ἐνταῦθα τὰ ἀποτελέσματα εἰς ἃ ἐφθάσαμεν ἀνωτέρω ἐν τῇ σπουδῇ τῶν μικρῶν στομίων καὶ ἔχομεν διὰ τὴν στοιχειώδη ἐκροὴν

$$dQ = \mu \left[Y - y\right] dH \sqrt{2gH}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες εὑρίσκομεν διὰ τὴν ὁλικὴν ἐκροήν.

$$Q = \int_{H_0}^{H_1} \mu (Y - y) \sqrt{2gH}\, dH$$

ὁ συντελεστὴς μ μᾶς εἶναι ἄγνωστος καὶ ἐνδέχεται νὰ μεταβάλληται οὗτος ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τοῦ στομίου· δυνάμεθα ὅμως νὰ νοήσωμεν συντελεστήν τινα σταθερὸν m τοιοῦτον ὥστε ἐὰν ἀποδίδωμεν εἰς τὸν μ τὴν τιμὴν τοῦ m τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα νὰ μὴ μεταβληθῇ· ὁ σταθερὸς συντελεστὴς m εἶναι δηλαδὴ ἡ μέση τιμὴ τοῦ μεταβαλλομένου συντελεστοῦ μ καὶ τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν.

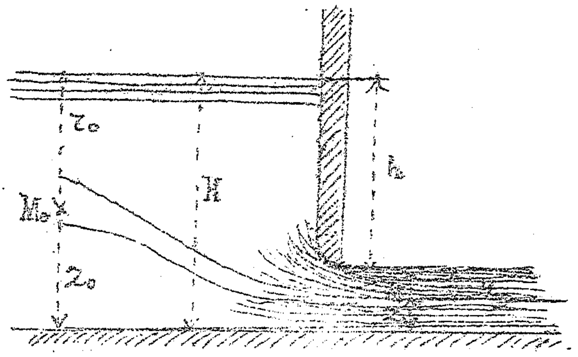
$$Q = m\sqrt{2g} \int_{H_0}^{H_1} \left[F(H) - f(H)\right] \sqrt{H}\, dH$$

τὰς τιμὰς H_0 καὶ H_1 εὑρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως

$$f(H) = F[H]$$

Μεγάλα στόμια μετά παραρτημάτων

27. Ὅταν τό ῥευστόν ἐξερχόμενον τοῦ στομίου τῆς ἐκροῆς δέν ῥέει ἐλευθέρως ἐν τῷ ἀέρι, ἀλλ' ἀπαντᾷ παραρτήματα ὡς λ.χ. ὀχετόν κ.τ.λ. ἡ ῥοή τοῦ ῥευστοῦ τροποποιεῖται καί δέον νά ἐξετάσωμεν τάς κυριωτέρας περιπτώσεις ἵνα προσδιορίσωμεν τήν εἰς τόν ἔκρουν ἐπερχομένην μεταβολήν.



Ὑδροχόη. Ἐάν λόγου χάριν τό στόμιον τῆς ἐκροῆς ἀκολουθεῖται ὑπό ὀχετοῦ ὅν καλοῦμεν ὑδροχόην καί ἐνῷ ἐκτελεῖται ἡ ῥοή προσδιορίζομεν τήν ταχύτητα ὡς ἑξῆς.

Ἐν τῇ τομῇ M ἔνθα ἡ ταχύτης εἶναι $υ$ ἡ κίνησις εἶναι ὁμοιόρροπος καί δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν τάς πιέσεις ἐξασκουμένας ὅπως καί ἐν τῇ ὑδροστατικῇ· τό αὐτό δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν καί παρά τό σημεῖον M_0 ἔνθα ἡ ταχύτης εἶναι $υ_0$· καί ἐάν παραστήσωμεν διά p τήν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν καί ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Bernoulli ἔχομεν

$$\frac{υ^2}{2g}+\frac{p+\sigma y}{\sigma}+Z=\frac{υ_0^2}{2g}+\frac{p+\ldots}{\sigma}$$

ἤ

$$\frac{υ^2}{2g}=\frac{υ_0^2}{2g}+(y_0+Z_0)-(y-Z)=\frac{υ_0^2}{2g}+h$$

ὅθεν

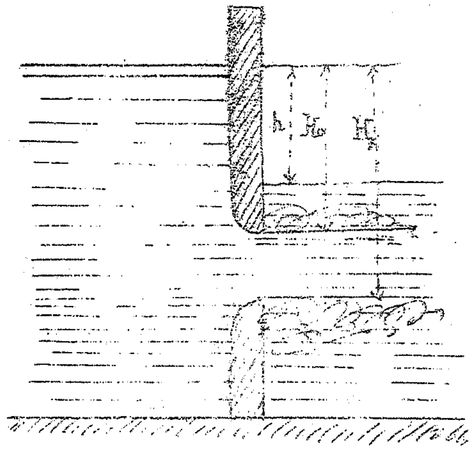
$$υ^2=υ_0^2+2gh$$

καί βλέπομεν ὅτι ἡ ταχύτης ἐν τῷ στομίῳ τῆς ἐκροῆς εἶναι ἡ αὐτή εἰς ὅλα τά σημεῖα αὐτοῦ καί ἀνεξάρτητος τοῦ βάθους εἰς ὅ εὑρίσκονται ταῦτα· ἡ ταχύτης ἐξαρτᾶται ἁπλῶς ἀπό τοῦ βάθους h τοῦ ἀνωτάτου χείλους τοῦ στομίου ὑπό τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος ἐνῷ προηγουμένως εὕρομεν ὅτι ἡ ταχύτης εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ὕψους τοῦ ῥευστοῦ.

Ἀφοῦ δέ ἡ ταχύτης εἶναι ἡ αὐτή εἰς ὅλα τά σημεῖα τοῦ στομίου ἡ ῥοή ἐκτελεῖται κατά παραλλήλους τομάς καί τόν ἔκρουν προσδιορίζομεν διά τοῦ τύπου

$$Q=ml(H-h)\sqrt{υ_0^2+2gh}$$

Στόμιον ἐμβεβαπτισμένον καθ' ὁλοκληρίαν ἐν τῷ ῥευστῷ. 28. Ὑποθέτοντες καί ἐνταῦθα ὅτι ἡ πίεσις μεταβάλλεται ἀπό σημείου εἰς σημεῖον κατά τούς ὑδροστατικούς νόμους (διότι ἡ ῥοή ἐκτελεῖται κατά τομάς παραλλήλους ἤ εἶναι πολύ βραδεῖα εἰς τά μέρη ἔνθα τό ῥευστόν φέρεται ὑπό στροβιλοειδῶν κινήσεων) ἔχομεν ὅπως καί ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει ἔχομεν

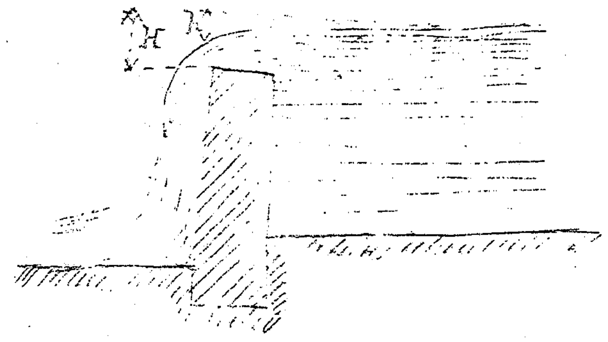


$$υ^2=υ_0^2+2gh$$

καί τόν ἔκρουν προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$Q = m l \left[H_1 - H_0\right] \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

ἐάν ὑποθέσωμεν $h = H_0$ ἐπανερχόμεθα εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν.



Ροή ἐξ ὑπερχειλισμοῦ. 29. Καί ἐνταῦθα ὡς ἐν τοῖς δύο προηγουμένοις παραδείγμασιν ἔχομεν

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

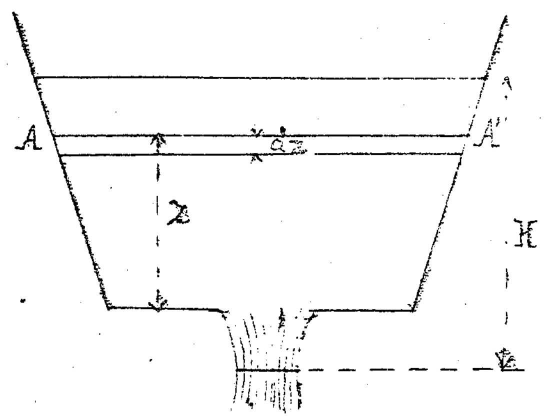
ἔνθα h ἐμφαίνει τήν διαφοράν τοῦ ὕψους τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ῥευστοῦ ἄνωθεν τοῦ ἐξωτερικοῦ χείλους τοῦ συγκρατοῦντος τό ῥευστόν τοίχου· h ὅμως δέν προσδιωρίσθη μέχρι τοῦδε πειραματικῶς.

Τόν ἔκρουν προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$Q = \left(H - h\right) \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Ροή μεταβαλλομένη. 30. Μέχρι τοῦδε ὑποθέτομεν μόνιμον τήν ῥοήν [ ] καί θά ἐξετάσωμεν ἤδη ἐν συντόμῳ τί συμβαίνει ἐάν ἡ ῥοή δέν εἶναι μόνιμος, ἀλλά μεταβάλλεται ἀπό στιγμῆς εἰς στιγμήν.

Θά ὑποθέσωμεν πρός τοῦτο ὅτι κατά τό βραχύτερον χρονικόν διάστημα dt ἡ ῥοή ἐκτελεῖται κατά τούς νόμους τῆς μονίμου κινήσεως τούς ὁποίους εὕρομεν ἀνωτέρω.



Ὑποθέτομεν λ.χ. ὅτι κατά

τό βραχύτατον χρονικόν διάστημα dt ἡ ταχύτης ἐν τῇ συνεσταλμένῃ τομῇ εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου τοῦ Toricelli

$$v = \sqrt{2gz}$$

καί κατά συνέπειαν ἡ διά τῆς ὀπῆς Ω τοῦ ἀγγείου ῥεύσασα ποσότης ὕδατος ἰσοῦται μέ

$$m\Omega v = m\Omega \sqrt{2gz}\, dt$$

Ἀλλ' ἐάν παραστήσωμεν διά A τήν τομήν τοῦ ἀγγείου AA' εἰς τό ὕψος z ἀπό τοῦ πυθμένος αὐτοῦ καί διά dz τήν κατάβασιν τῆς στάθμης τοῦ ῥευστοῦ ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt ἡ ποσότης τοῦ κατά τό χρονικόν τοῦτο διάστημα ῥεύσαντος ὕδατος ἰσοῦται ἐπίσης μέ

$$A\,dz$$

ὥστε ἔχομεν τήν σχέσιν

$$A\,dz = m\Omega \sqrt{2gz}\, dt$$

ἔνθα A εἶναι γνωστή συνάρτησις τοῦ z

Τήν σχέσιν ταύτην δυνάμεθα νά μετατρέψωμεν ὡς ἑξῆς

$$dt = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \frac{A}{\sqrt{z}}\, dz$$

καί ὁλοκληροῦντες

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_z^H \frac{A}{\sqrt{z}}\, dz = \frac{0{,}363}{\Omega} \int_z^H \frac{A}{\sqrt{z}}\, dz$$

ἔνθα H παριστᾷ τήν ἐν τῷ ἀγγείῳ ἀρχικήν στάθμην τοῦ ῥευστοῦ ἐάν ὑποθέσωμεν τό ἀγγεῖον κυλινδρικόν $A=\text{σταθ.}$ καί ἔχομεν

$$t=\frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_z^H\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{A}{m\Omega}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{H}-\sqrt{z}\right]$$

πολλαπλασιάζοντες διά $\sqrt{2g}$ ἔχομεν

$$\sqrt{2gz}=v=\sqrt{2gH}-\frac{m\Omega}{A}gt$$

καί βλέπομεν ὅτι

Ἡ ταχύτης τῆς ῥοῆς ἐλαττοῦται ἀναλόγως τοῦ χρόνου.

Τόν ἀναγκαῖον διά τήν ἐντελῆ κένωσιν τοῦ ἀγγείου χρόνου T εὑρίσκομεν ὑποθέτοντες $z=0$ ὅθεν

$$T=\frac{A}{m\Omega}\sqrt{\frac{2H}{g}}=0{,}727\frac{A\sqrt{H}}{\Omega}$$

Ἐάν ἡ ῥοή ἦτο μόνιμος καί παραστήσωμεν διά T' τό ἀναγκαῖον χρονικόν διάστημα διά τήν κένωσιν τῆς αὐτῆς ποσότητος ῥευστοῦ θά ἔχωμεν

$$AH=m\Omega\sqrt{2gH}\,T' \quad \text{ἤ} \quad T'=\frac{A}{m\Omega}\sqrt{\frac{H}{2g}}=0{,}363\,\frac{A\sqrt{H}}{\Omega}$$

καί παραβάλλοντες τούς χρόνους T καί T' εὑρίσκομεν

$$T=2T'.$$

ἀποτέλεσμα τό ὁποῖον ἐπηλήθευσε πειραματικῶς ὁ Mariotte

τοῦ θεμελιώδους τύπου

$$t=\frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_z^H\frac{A}{\sqrt{z}}\,dz$$

τῆς μεταβαλλομένης ῥοῆς ἐγένετο χρῆσις εἰς σπουδαῖα ὑδραυλικά ἔργα προκειμένου περί τῆς ἀποξηράνσεως τῶν λιμνῶν τοῦ Lungern εἰς τό Underwald καί τοῦ Fucino εἰς τάς Abruzzes,

διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀναγκαίου διά τήν ἀποξήρανσιν χρόνου.

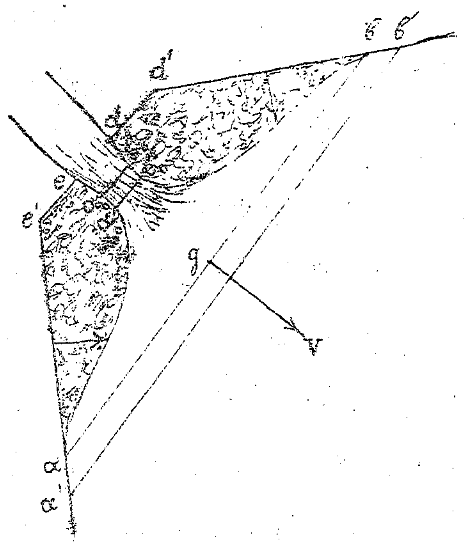
Πρός τοῦτο γίνεται πρῶτον ἡ χωροστάθμησις τῆς λίμνης καί προσδιορίζονται αἱ ἰσοϋψεῖς καμπύλαι αἵτινες μᾶς δίδουσιν A ἐκτελοῦντες τότε τήν ἄνω ὁλοκλήρωσιν ἔχομεν T.

Ἀλλ' ἐάν ἡ λίμνη δέχεται διαρκῶς τά ὕδατα τῶν περικυκλούντων αὐτήν κοιλάδων συμποσούμενα εἰς q ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου δέον νά τροποποιηθῇ ὁ θεμελιώδης τύπος ὡς ἑξῆς

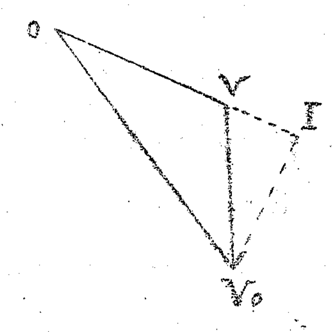
$$t=\frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_z^H\frac{A}{\sqrt{z}}\,dz-\int q\,dt$$

Ἀπότομος μεταβολή τῆς τομῆς τοῦ ἀγγείου.

31. Ὅταν ἐν τῇ ῥοῇ τοῦ ὕδατος ἐπέλθῃ ἀπότομος μεταβολή ἐν τῇ τομῇ τοῦ ἐμπεριέχοντος τοῦτο ἀγγείου ὅπως ἐν τῷ κάτωθι σχήματι ἐπέρχονται καί στροβιλοειδεῖς κινήσεις περί τήν φλέβα $ea_0\,db_0$ αἱ ὁποῖαι δέν ἀκολουθοῦσι τήν γενικήν ῥοήν τοῦ ὕδατος· ὡς ἐκ τῆς προστριβῆς ὅμως τοῦ ῥέοντος ὕδατος τῆς φλεβός $ea_0\,db_0$ ἐπί τοῦ περικυκλοῦντος αὐτήν ῥευστοῦ ὅπερ εἶναι εἰς στάσιμον κατάστασιν προκύπτει ἀπώλεια τις τῆς ἐν αὐτῇ ἐμπεριεχομένης κινητικῆς ἐνεργείας τήν ὁποίαν ὁ Belanger ὑπελόγισεν ὡς ἑξῆς.



Ἔστω ab ἡ τομή ἀφ' ἧς ἡ κίνησις τῆς φλεβός ἐπανακτᾷ τήν προτέραν κανονικήν ῥοήν αὐτῆς καί $ov_0=V_0$ ἡ ταχύτης τῆς ῥοῆς ἐν τῇ



τομῇ $\alpha_0\beta_0$, $OV = V$ ἡ ταχύτης τῆς ῥοῆς ἐν τῇ τομῇ $\alpha\beta$.
ἡ μεταξὺ τῶν τιμῶν $\alpha_0\beta_0$ καὶ $\alpha\beta$ ἀπολεσθεῖσα ταχύτης εἶναι $U = VV_0$ καὶ ἐὰν προβάλωμεν αὐτὴν ἐπὶ τῆς εὐθείας OV καὶ παραστήσωμεν διὰ u τὴν προβολὴν αὐτῆς VI ἔχομεν ἐν τῷ τριγώνῳ OVV_0

$$V_0^2 = V^2 + U^2 + 2Vu$$

ὅθεν

$$(1) \qquad \frac{V_0^2 - V^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{Vu}{g} = \text{ἀπολεσθεῖσαν κινητικὴν ἐνέργειαν}$$

τὴν ποσότητα $\frac{1}{g}Vu$ προσδιορίζομεν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ποσοτήτων τῶν κινήσεων τῆς μάζης $\alpha_0\beta_0\alpha\beta$ ἐν προβολῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας gV κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt.

Τὴν ὑπὸ στροβιλοειδῶν κινήσεων φερομένην μάζαν $\alpha\beta d'de e'$ δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὡς στάσιμον. Τὴν μάζαν $\alpha'_0\beta'\alpha\beta$ παραλείπομεν ὡς κεκτημένην τὴν αὐτὴν ποσότητα κινήσεως κατὰ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ πέρας τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt· ὥστε μένει μόνη ἡ μάζα $\alpha_0\beta_0\alpha'_0\beta'_0$ ἥτις μετὰ τὸ πέρας τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt κατέχει τὴν θέσιν $\alpha\beta\alpha'\beta'$. ἡ μάζα αὕτη ἰσοῦται μὲ $\frac{\varpi}{g} \cdot \omega V dt$ ἔνθα ϖ παριστᾷ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ῥευστοῦ ω τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς $\alpha\beta$ καὶ V τὴν ταχύτητα ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ.

Ἡ ποσότης τῆς κινήσεως αὐτῆς ἀρχομένου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἦτο $\frac{\varpi}{g}\omega V dt V_0$ καὶ προβαλλομένη ἐπὶ τῆς εὐθείας gV γίνεται $\frac{\varpi}{g}\omega V dt(V+u)$

Ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τῆς αὐτῆς μάζης $\alpha\beta\alpha'\beta'$ μετὰ τὸ πέρας τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt εἶναι $\frac{\varpi}{g}\omega V dt V$.

Ὥστε ἡ ἐν τῇ ποσότητι τῆς κινήσεως τῆς μάζης ἐπελθοῦσα

μεταβολὴ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt εἶναι

$$\frac{\varpi}{g}\omega V dt V - \frac{\varpi}{g}\omega V dt(V+u) = -\frac{\varpi}{g}\omega V dt . u$$

Ἴδωμεν νῦν τὴν ἐπὶ τῆς αὐτῆς μάζης $\alpha_0\beta_0\alpha\beta$ ἐξασκουμένην ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν πιέσεων τῶν παρειῶν τοῦ ἀγγείου ὤθησιν

Τὰς πιέσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ὑδροστατικῆς διότι ἐν τῇ ζώνῃ τῶν στροβιλοειδῶν κινήσεων.

Ἡ κίνησις εἶναι βραδεῖα [ ] καὶ ἐν ταῖς τομαῖς $\alpha_0\beta_0$ καὶ $\alpha\beta$ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος καὶ ὁμοιόμορφος [ ]

Ἔστω p_0 ἡ ἐν τῇ τομῇ $\alpha_0\beta_0$ καὶ τῇ ζώνῃ τῶν στροβιλοειδῶν πίεσις καὶ p ἡ ἐν τῇ τομῇ $\alpha\beta$.

Ἡ μάζα $\alpha_0\beta\alpha\beta$ εὑρίσκεται οὕτω ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῆς πιέσεως $p_0\alpha_0\beta_0$ ἐπὶ τῆς τομῆς $\alpha_0\beta_0$ τῆς πιέσεως $p.\alpha\beta$ ἐπὶ τῆς τομῆς $\alpha\beta$ καὶ τῶν ἐκ τῆς πιέσεως p_0 ἐπὶ τῶν παρειῶν $\alpha e'\alpha\beta$ καὶ $e e' d d'$ ἐξασκουμένων ὑπ' αὐτῶν ἀντιδράσεων ἐπὶ τῆς ῥευστῆς μάζης $\alpha_0\beta_0\alpha\beta$..

Ἡ ἐπὶ τῆς εὐθείας gV προβολὴ τῆς ὑπὸ τῆς παρειᾶς $\alpha e' e d d'\beta$ ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ ῥευστοῦ πιέσεως ἰσοῦται (3) μὲ τὸ γινόμενον p_0 ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ ἐμβαδοῦ $\alpha e' e d d'\beta$ ἐπὶ τῆς τομῆς $\alpha\beta$· ἡ προβολὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου εἶναι $\omega - \omega_0$ καὶ ἡ ζητουμένη πίεσις $p_0(\omega - \omega_0)$.

Ἡ ῥευστὴ μάζα εὑρίσκεται λοιπὸν ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τριῶν πιέσεων $p_0\omega_0$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\alpha_0\beta_0$, $p\omega$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\alpha\beta$ καὶ $p_0(\omega - \omega_0)$ ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτῆς ἀντιδράσεως τῆς παρειᾶς $\alpha e' e d d'\beta$ ὥστε ἡ ὁλικὴ ὤθησις τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων (τῆς βαρύτητος παραλειπομένης) εἶναι

$$\left[p_0\omega_0 - p\omega + p_0(\omega-\omega_0)\right]dt = (p_0-p)\,\omega\,dt$$

καί τό θεμελιῶδες θεώρημα τῶν ποσοτήτων τῶν κινήσεων μᾶς δίδει

$$-\frac{\varpi}{g}\,\omega V dt.u = (p_0-p)\,\omega\,dt$$

ἤ

$$\frac{Vu}{g} = \frac{p-p_0}{\varpi}$$

καί ἡ ἄνω σχέσις (1) μετατρέπεται εἰς

$$(1) \qquad \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\varpi}$$

οὕτω ἡ ἀπολεσθεῖσα κινητική ἐνέργεια μετρᾶται διά τοῦ ἀθροίσματος

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\varpi}$$

τήν ἄνω σχέσιν (1) δυνάμεθα νά γράψωμεν καί ὡς ἑξῆς

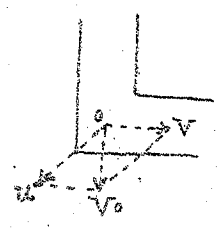
$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_0-p}{\varpi} - \frac{U^2}{2g}$$

καί βλέπομεν οὕτω τήν διαφοράν μεταξύ τοῦ τύπου τούτου καί τοῦ τύπου τοῦ Bernoulli.

Ἐν ᾗ περιπτώσει ὁ σωλήν ἐν ᾧ ἐκτελεῖται ἡ ροή εἶναι εὐθύγραμμος ἔχομεν $U = V_0 - V$

ὅθεν
$$\frac{V(V-V_0)}{g} = \frac{p_0-p}{\varpi}$$

Ἐάν οἱ σωλῆνες εἶναι διευθετημένοι καθέτως πρός ἀλλήλους ἀλλ' ἔχουσι τήν αὐτήν τιμήν $V=V_0$ καί ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OVV_0



$$U^2 = 2V_0^2$$

ὅθεν

$$\frac{p_0-p}{\varpi} = \frac{V_0^2}{g}$$

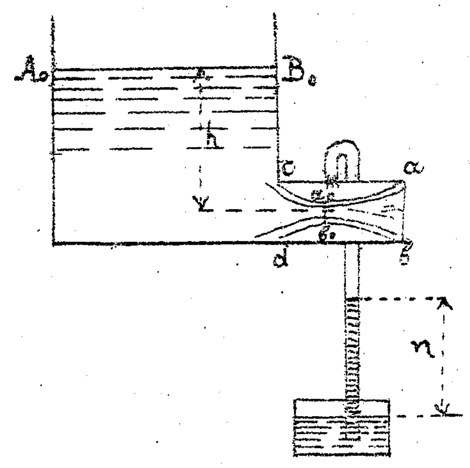
Ροή κυλινδρικοῦ ὀριζοντίου αὐλοῦ ἐκρυτῆρος.

32. Μεταξύ τῆς ἀνωτάτης στάθμης A_0B_0 καί τῆς τομῆς τῆς συρροῆς ἡ ροή ἐκτελεῖται κατά τόν τύπον τοῦ D Bernoulli

$$(1) \qquad \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{p_a-p_0}{\varpi}$$

ἔνθα v_0 παριστᾷ τήν ταχύτητα τῆς ροῆς ἐν τῇ τομῇ τῆς συρροῆς a_0b_0

h τό ὕψος μεταξύ τῆς ἀνωτάτης στάθμης A_0B_0 καί τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῆς τομῆς τῆς συρροῆς p_a τήν ἐπί τῆς ἀνωτάτης στάθμης ἐξασκουμένην ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν p τήν πίεσιν ἐν τῇ τομῇ τῆς συρροῆς καί ϖ τό εἰδικόν βάρος τοῦ ρευστοῦ.



Ἐξερχόμενον τῆς τομῆς τῆς συρροῆς τό ρευστόν ἐπεκτείνεται ὡς εἰ εἰσήρχετο εἰς σωλῆνα μεγαλειτέρων διαστάσεων καί μεταξύ τῆς τομῆς τῆς συρροῆς a_0b_0 καί τῆς ab ἐκτελεῖται αὕτη κατά τόν ἄνω τύπον τοῦ Belanger.

$$(2) \qquad \frac{v^2}{2g} - \frac{v^0}{2g} = \frac{p_0-p_a}{\varpi} - \frac{u^2}{2g} = \frac{p_0-p_a}{\varpi} - \frac{(v_0-v)^2}{2g}$$

ἔνθα

v παριστᾷ τήν ταχύτητα τῆς ροῆς ἐν τῇ τομῇ ab.

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ ω_0 καὶ ω τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν $\alpha_0\beta_0$ καὶ $\alpha\beta$ ἔχομεν

$$(3) \qquad \upsilon\omega = \upsilon_0\omega_0 = m\upsilon_0\omega \qquad \text{ὅθεν} \quad \upsilon_0 = \frac{\upsilon}{m}$$

ἔνθα m παριστᾷ τὸν συντελεστὴν τῆς συστολῆς.

Ἐὰν τὸ ῥέον ῥευστὸν εἶναι ὕδωρ ἔχομεν

$$\varpi = 1000 \quad p_a = 10336 \quad g = 9,81 \quad m = 0.62$$

καὶ αἱ ἐξισώσεις (1),(2),(3) προσδιορίζουσι τὰς τρεῖς ἀγνώστους

$$\upsilon \quad \upsilon_0 \quad \text{καὶ} \quad p_0$$

αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δίδουν

$$\frac{\upsilon^2}{2g} = h - \frac{(\upsilon_0-\upsilon)^2}{2g} = h - \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 \frac{\upsilon^2}{2g}$$

ὅθεν

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}} = \mu\sqrt{2gh} = 0,85\sqrt{2gh}$$

Διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεως εὗρον $\mu = 0,82$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) ἐξάγομεν

$$\upsilon_0 = \frac{\upsilon}{m} = \frac{\mu\sqrt{2gh}}{m} = 1.32\sqrt{2gh}$$

ἄνευ τοῦ κυλινδρικοῦ αὐλοῦ ἐκρυτῆρος θὰ εἴχομεν $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$.
ἐπῆλθε λοιπὸν ἐπαύξησις ἐν τῇ ταχύτητι κατὰ $\frac{1}{3}$ περίπου
αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (3) δίδουν

$$\frac{p_a - p_0}{\varpi} = -h + \frac{V^2}{m^2 2g} = h\left[\frac{\mu^2}{m^2} - 1\right]$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες μ διὰ 0,82 καὶ m διὰ 0,62 εὑρίσκομεν

$$\frac{p_a - p_0}{\varpi} = 0.75h$$

δηλαδὴ ἡ ἐν τῷ ἐκρυτῆρι ἐπελθοῦσα κατάπτωσις πιέσεως ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς πιέσεως ἣν ὑφίσταται τοῦτο ἐπὶ τοῦ κέντρου του.

Διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεως ὅπως ἐμφαίνει τοῦτο τὸ σχῆμα ἔνθα $\eta = \frac{p_a - p_0}{\varpi}$ ὁ Venturi εὗρε $\eta = 0.74h$.

Ἡ πίεσις καταπίπτει λοιπὸν ἐν τῇ τομῇ τῆς συρροῆς. ἐὰν δὲν ὑπῆρχε ὁ κυλινδρικὸς ἐκρυτὴρ θὰ ἦτο αὕτη p_a διὰ τῆς προσθήκης αὐτοῦ καταπίπτει αὕτη εἰς $p_a - 0.75\varpi h$.

Ἐκ τῆς καταπτώσεως δὲ ταύτης τῆς πιέσεως ἐν τῇ τομῇ τῆς συρροῆς ἐπέρχεται καὶ ἐπαύξησις τῆς καταναλώσεως ἔχομεν τῷ ὄντι

$$Q = \upsilon\omega = \mu\omega\sqrt{2gh} = 0.82\,\omega\sqrt{2gh}$$

ἄνευ τοῦ κυλινδρικοῦ ἔχομεν θὰ ἔχωμεν

$$Q' = m\omega\sqrt{2gh} = 0.62\,\omega\sqrt{2gh}$$

καὶ ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον ἔκρουν εἶναι

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{0.82}{0.62} = 1.32$$

ἡ προσθήκη λοιπὸν τοῦ κυλινδρικοῦ ἐκρυτῆρος ἐπαυξάνει κατὰ ἓν τρίτον τὸν ἔκρουν.

Ἡ κατάπτωσις ὅμως τῆς πιέσεως δύναται νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐν τῇ τομῇ τῆς συρροῆς πίεσις νὰ μὴ εἶναι ἀρκοῦσα διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ῥοῆς.
διότι διὰ νὰ ὑπάρξῃ ῥοὴ δέον νὰ ἔχωμεν

$$\frac{p_a - p_0}{\varpi} < \frac{p_a}{\varpi}$$

ἢ ἐάν τό ῥευστόν εἶναι ὕδωρ

$$0.75H < 10^{\mu}.336$$

ἤ

$$H < 13^{\mu}.75$$

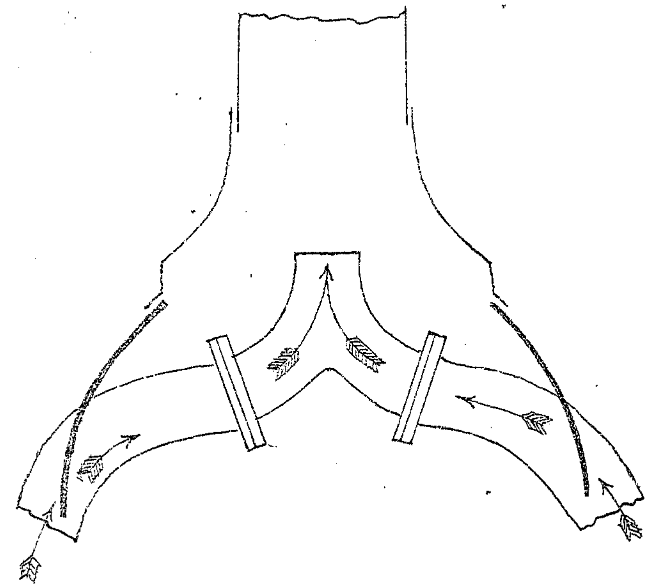
Ἐάν τό ὕψος τοῦ ὕδατος ὑπερβῇ, λοιπόν τά $13^{\mu}.75$ ἡ ῥοή εἶναι ἀδύνατος.

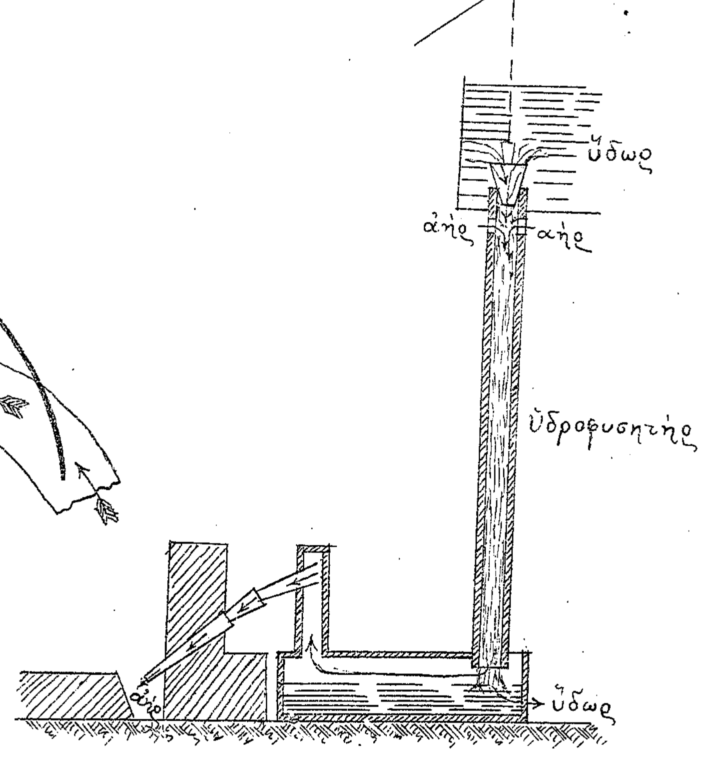
Ἡ ἐν τῷ ἐσωτερικῷ τοῦ σωλῆνος ἐπερχομένη αὕτη κατάπτωσις τῆς πιέσεως εἶναι φαινόμενον ὅλως δι' ὅλου θεμελιῶδες καί παρουσιάζει σπουδαιοτάτας ἐφαρμογάς.

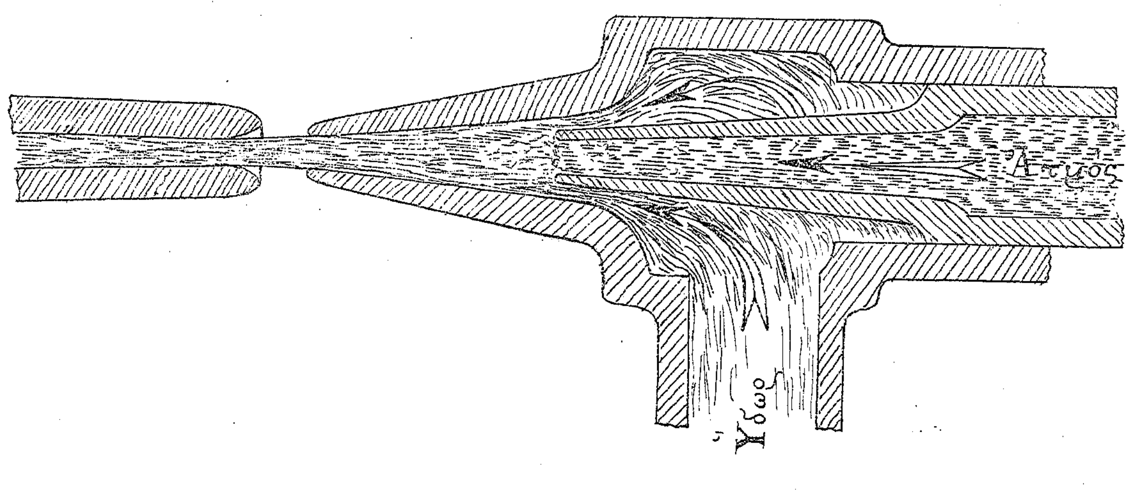
Ἐπί τῆς ἀρχῆς ταύτης βασίζονται καί αἱ κάτωθι συσκευαί τοῦ ὑδροφυσητῆρος (trompe).

(injecteur)

(echappement des locomotives)







Κεφάλαιον ΙΙΙ

Ῥοὴ ἐν ᾗ περιπτώσει λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ προστριβή.

33. Μέχρι τοῦδε ἐπραγματεύθημεν τὴν κίνησιν τῶν ῥευστῶν ἀνεξαρτήτως τῆς προστριβῆς, ἣν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων καὶ ἐπὶ τῶν παρειῶν τῶν ἀγγείων ἐν οἷς ταῦτα ἐμπεριέχονται τὰ ῥευστὰ μόρια. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὴν κίνησιν αὐτῶν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν προστριβὴν ταύτην καὶ θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις τὴν τῶν σωλήνων διοχετεύσεως καὶ τὴν τῶν διωρυγος.

§ 1ον Ῥοὴ διὰ σωλήνων

34. Δυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα νὰ προστρέξωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦ Bernoulli τροποποιηθέντα (§) ἀλλὰ δέον ἐν πρώτοις νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἄγνωστον συνάρτησιν R ἥτις ἐκφράζει τὴν κατὰ μονάδα τοῦ μήκους προστριβήν.

Θὰ βασισθῶμεν πρὸς τοῦτο εἰς τρεῖς πειραματικὰς προτάσεις περὶ τῆς προστριβῆς τῶν ῥευστῶν καὶ ἰδίᾳ τοῦ ὕδατος αἵτινες εἶναι γνωσταὶ καὶ ὑπὸ τὴν ἐπωνυμίαν : νόμοι

τῆς προστριβῆς τῶν ῥευστῶν.

1ον Ἡ προστριβὴ τοῦ ὕδατος εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν διαβρέχει τοῦτο.

2ον Ἡ προστριβὴ τοῦ ὕδατος ἐν ὡρισμένῳ τινὶ σημείῳ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς πιέσεως παρὰ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ

3ον Ἡ προστριβὴ τοῦ ὕδατος ἐν τοῖς σωλῆσιν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μέσης ταχύτητος μεθ' ἧς φέρεται τοῦτο καὶ εἶναι συνάρτησίς τις φ(v) τῆς ταχύτητος ταύτης. Πρέπει ὅμως νὰ ὁρίσωμεν ἀκριβῶς τί ἐννοοῦμεν μὲ τὴν φράσιν μέση ταχύτης.

Τὰ μόρια τοῦ ὕδατος τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν μετὰ τῆς παρειᾶς τοῦ σωλῆνος ἐν ᾧ ἐκτελεῖται ἡ ῥοή, ἐπιβραδύνονται ἐν τῇ κινήσει των ὡς ἐκ τῆς προστριβῆς αὐτῶν ἐπὶ τοῦ μετάλλου. Τὰ ἀμέσως κατόπιν μόρια προστρίβονται καὶ ταῦτα ὄχι πλέον ἐπὶ τοῦ μετάλλου, ἀλλὰ ἐπὶ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὕδατος, ἥτις εὑρίσκεται εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν μετὰ τοῦ μετάλλου. Ἐπιβραδύνονται λοιπὸν καὶ ταῦτα ἐν τῇ κινήσει των ὄχι ὅμως ὅσῳ τὰ πρῶτα καὶ οὕτω ἡ ταχύτης βαίνει αὐξάνουσα ἀπὸ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς κυλινδρικῆς φλεβὸς μέχρι τοῦ κέντρου.

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ Ω τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐγκαρσίας ἐσωτερικῆς τομῆς τοῦ σωλῆνος καὶ διὰ Q τὸν ἔκρουν, τὴν μέσην ταχύτητα μετροῦμεν διὰ τοῦ λόγου $\frac{Q}{\Omega}$ καὶ ἔχομεν

$$v = \frac{Q}{\Omega} \quad \text{ἢ} \quad Q = \Omega v$$

διὰ τῶν τριῶν τούτων νόμων τῆς προστριβῆς τοῦ ὕδατος καθίσταται εὔκολος ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως R.

1ον ἡ διαβρεχομένη ἐπιφάνεια τῆς μονάδος τοῦ μήκους τοῦ σωλῆνος μετρεῖται διά τῆς περιμέτρου αὐτοῦ χ καί κατασύνέπειαν

$$R = \varpi \chi \varphi(v)$$

ἔνθα ϖ ἐμφαίνει τό εἰδικόν βάρος τοῦ ῥευστοῦ, τό ὁποῖον θέτομεν ὡς παράγοντα καί τοῦτο δυνάμεθα νά πράξωμεν διότι $\varphi(v)$ δέν ἔχει ἀκόμη προσδιορισθῆ.

Εἰς τήν ἄγνωστον συνάρτησιν $\varphi(v)$ ἐδόθησαν διάφοροι μορφαί ἡ πρώτη ἐδόθη ὑπό τοῦ Coulomb

$$\varphi(v) = av + bv^2$$

καί εἰς τούς σταθερούς συντελεστάς ἐδόθησαν διάφοροι τιμαί.

$a = 0.0000173314$	$b = 0.000348259$	ὑπό τοῦ Prony
$a' = 0.0000188400$	$b = 0.000342500$	ὑπό τοῦ Dubuisson
$a = 0.0000223580$	$b = 0.000280320$	ὑπό τοῦ Eytelwein.

Οἱ μηχανικοί Darcy καί Bazin ὑποθέτουν τούς συντελεστάς a καί b συναρτήσεις τῆς διαμέτρου τοῦ κυλίνδρου καί ἔδωκαν τάς ἀκολούθους τιμάς·

$$a = 0.000032 + \frac{0.00000001504}{D^2}$$

$$b = 0.000442 + \frac{0.000012440000}{D}$$

Ὁ de Saint Venant ἔδωκε τήν μορφήν

$$\varphi(u) = Au^n$$

ἔνθα

$$n = \frac{12}{7} \qquad A = 0.0002957$$

35. Ἐάν ὑποθέσωμεν τόν σωλῆνα κυλινδρικόν ἡ μέση ταχύτης u εἶναι ἡ αὐτή δι' ὅλας τάς τομάς διότι

$$Q = \Omega u$$

καί Ω καί Q εἶναι σταθεραί.

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι καί ἐν ἑκάστῳ νήματι ἡ ταχύτης μένει σταθερά ἀπό μιᾶς εἰς ἑτέραν τομήν, τότε ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Bernoulli (18).

$v = v_0$ ὅθεν

ἔντασις τῆς ῥοῆς − ἀπώλεια ἐντάσεως τῆς ῥοῆς $= 0$

ἔντασις τῆς ῥοῆς = ἀπώλεια ἐντάσεως τῆς ῥοῆς

Ἐάν παραστήσωμεν διά j τήν ἀπώλειαν τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς ἔχομεν

$$j = \frac{1}{\varpi}\int_0^l \frac{R}{\omega}\, ds$$

ἀλλ' ὡς ἀνωτέρω

$$R = \varpi \chi \varphi(u)$$

καί καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ σωλῆνος π.χ. καί $\varphi(u)$ μένουσιν ἀμετάβλητα

ὅθεν
$$j = \frac{R}{\varpi \omega}\int_0^l ds = \frac{R}{\varpi \omega} = \frac{Rl}{\varpi \omega l}$$

ὥστε ἡ κατά μονάδα μήκους ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς ἑνός νήματος εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀναπτυσσομένης ἀντιστάσεως καί ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ βάρους τοῦ νήματος.

Ἐν μιᾷ τομῇ τά διάφορα νήματα διέρχονται ταύτην καθέτως καί ἐπειδή εἰς τά διάφορα σημεῖα τῆς τομῆς ἀκολουθοῦσι τόν ὑδροστατικόν νόμον καί ὅλα τά νήματα ἔχουσι τήν αὐτὴν πιεζομετρικὴν γραμμήν. Ἐάν λοιπόν προσθέσωμεν τούς ἀριθμητάς τῶν κλασμάτων $\frac{R\ell}{\varpi P}$ ἅτινα ἐμφαίνουσι τήν ἀπώλειαν τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς ἐν τοῖς διαφόροις νάμασι θά ἔχωμεν τήν ὅλην ἀπώλειαν τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς καί δυνάμεθα νά εἴπωμεν

Ἡ ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς μεταξύ δύο τομῶν ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῆς ὅλης ἀντιστάσεως, ἥτις ἀναπτύσσεται ἐν τῷ ῥευστῷ μεταξύ τῶν τομῶν τούτων, διά τοῦ βάρους τοῦ ῥευστοῦ τό ὁποῖον περιλαμβάνουσιν αὗται.

εὕρομεν ὅτι ἡ ὁλική αὕτη ἀντίστασις εἶναι

$$R\ell = \ell\varpi \times \varphi(u)$$

ὥστε

$$J=\frac{\chi}{\Omega}\varphi(u)$$

καί ἐπειδή

$$Q=\Omega u \qquad u=\frac{Q}{\Omega}$$

ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$J=\frac{\chi}{\Omega}\varphi\left(\frac{Q}{\Omega}\right)$$

ἐάν δέ λάβωμεν τήν τομήν Ω κυκλικήν ἔχομεν

$$\chi=\Pi D \qquad \Omega=\Pi\frac{D^2}{4}$$

καί ἡ ἄνω σχέσις λαμβάνει τήν μορφήν

$$J=\frac{4}{D}\varphi\left[\frac{4Q}{\Pi D^2}\right] \text{ ἤ } \frac{1}{4}JD=\varphi\left[\frac{4Q}{\Pi D^2}\right]$$

γνωρίζομεν δέ ὅτι $\varphi(u)$ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός τό u καί αὐξάνει μετ'αὐτοῦ, καί ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως βλέπομεν ὅτι J ἤ ἡ ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς εἶναι ἀντι-

στρόφως ἀνάλογος τῆς πέμπτης δυνάμεως τῆς διαμέτρου τοῦ σωλῆνος.

Ἡ ἐκ τῆς προστριβῆς προκύπτουσα ἀπώλεια τῆς ῥοῆς εἶναι λοιπόν

$$\frac{4}{D}\varphi\left(\frac{4Q}{\Pi D^2}\right)$$

36. Ἀλλ' ἐκτός τῆς προστριβῆς εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι καί ἐξ ἄλλων αἰτίων δύναται νά ἐπέλθῃ ἡ ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς καί ταῦτα συναντῶμεν.

1ον Τόν ἀμέσως μετά τήν δεξαμενήν σωλῆνα ὅστις ἐκφέρει τήν συστολήν τῆς τομῆς καί ἡ ἐκ ταύτης προκύπτουσα ἀπώλεια ἐντάσεως τῆς ῥοῆς εἶναι

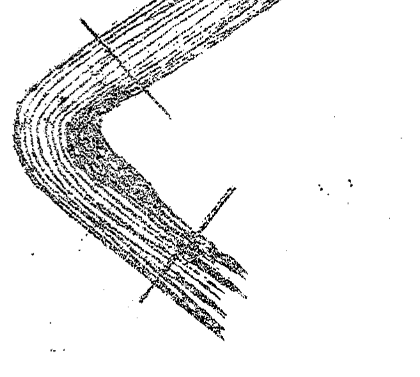
$$\frac{1}{2}\,\frac{u^2}{2g}$$

Ἐάν τό διά τοῦ σωλῆνος φερόμενον ὕδωρ χύνεται οὐχί ἐν τῷ ἀέρι ἀλλ' εἰς ἑτέραν δεξαμενήν πλήρη ὕδατος ἡ ταχύτης του καταστρέφεται ἐξ ὁλοκλήρου καί ἐπέρχεται ἀπώλεια περί τήν ἔντασιν τῆς ῥοῆς ἴση τῇ

$$\frac{u^2}{2g}$$

Ἐάν ὁ σωλήν παρουσιάζῃ γωνιῶδές τι μέρος ἐπέρχεται ἀπώλεια ἴση μέ $\left(0.0186+\frac{0.0039}{\tau}\right)\frac{L}{\tau}\,\frac{u^2}{2g}$

ἔνθα τ παριστᾷ τήν γωνίαν τοῦ γωνιώδους μέρους καί L τό μῆκος αὐτοῦ.



Ὅλαι αὗται αἱ ἐκφράσεις τῆς ἀπωλείας τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς εἶναι πολλαπλάσια τοῦ $\frac{u^2}{2g}$ καί δυνάμεθα νά τάς συμπεριλάβωμεν εἰς ἕνα καὶ μόνον ὅρον

$$\alpha \frac{u^2}{2g}$$

37. Ἐάν λοιπόν παραστήσωμεν διά j τήν ἔντασιν τῆς ῥοῆς μεταξύ τοῦ σημείου ἔνθα εὑρίσκεται ἡ δεξαμενή καί τοῦ σημείου τῆς πόλεως ἔνθα προτιθέμεθα νά μεταφέρωμεν τό ὕδωρ (τήν διαφοράν δηλάδή τῶν πιεζομετρικῶν ὑψῶν εἰς τά δύο ταῦτα σημεῖα) ἔχομεν

$$\text{ἔντασις τῆς ῥοῆς } j = \text{ἀπώλεια ἐντάσεως τῆς ῥοῆς } \gamma + \alpha \frac{u^2}{2g}$$

ἤ

$$j = \frac{4}{D}\varphi\left[\frac{4Q}{\Pi D^2}\right] + \alpha\frac{u^2}{2g}$$

ἤ

$$\frac{D}{4}j - \varphi\left[\frac{4Q}{\Pi D^2}\right] - \frac{2\alpha Q^2}{g\Pi^2 D^3} = 0$$

σχέσις μεταξύ D καί Q ὥστε γνωρίζοντες τήν μίαν τῶν ποσοτήτων τούτων δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν ἄλλην.
ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τοῦ 5ου βαθμοῦ καί ἔχει πάντοτε μίαν ῥίζαν ἐν τῇ περιπτώσει $\alpha = 0$ κατεσκευάσθησαν οἱ ἀναγκαῖοι διά τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης πίνακες καί εὑρίσκονται εἰς τά εἰδικά βιβλία τῆς ὑδραυλικῆς.

Διανομή τῶν ὑδάτων ἐν ταῖς πόλεσι

38. Διά τῆς προηγουμένης σχέσεως

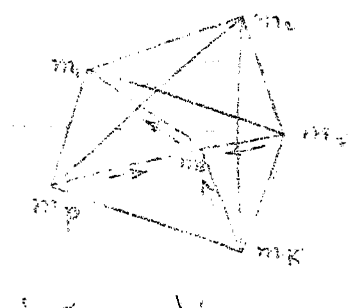
$$(1) \qquad \frac{D}{4}j - \varphi\left[\frac{4Q}{\Pi D^2}\right] - \frac{2\alpha Q^2}{g\Pi^2 D^3} = 0$$

λύεται καί τό πρόβλημα τῆς διανομῆς τῶν ὑδάτων ἐν ταῖς πόλεσιν, ὅπερ δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὑπό δύο ἐπόψεις

1ον Δοθέντων p σημείων

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \; \ldots\ldots \; m_K \; \ldots\ldots \; m_p$$

εἰς διάφορα ὕψη ἀπό ὡρισμένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου συνδεδεμένων πρός ἄλληλα διά q σωλήνων τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τάς διαμέτρους D καί τά μήκη l.



Ζητεῖται νά προσδιορισθῶσιν τά παρά τοῖς σημείοις m πιεζομετρικά ὕψη καί ἡ τιμή τοῦ ἔχρου ἐν ἑκάστῳ σωλῆνι.

2ον Δοθέντων τῶν p σημείων m καί τῶν q σωλήνων προσδιορίσαι τάς διαμέτρους τῶν τελευταίων τούτων οὕτως ὥστε νά ἔχωμεν διά τόν παρά τοῖς σημείοις m ἔχρουν τιμάς ὡρισμένας καί γνωστάς ἐκ τῶν προτέρων.

Λύσις τοῦ 39. Αἱ γνωσταί ποσότητες ἐνταῦθα εἶναι αἱ διάμετροι D καί
πρώτου προ τά μήκη l τῶν q σωλήνων τοῦ συμπλέγματος.
βλήματος. Αἱ ἄγνωστοι εἶναι τά παρά τοῖς σημείοις m πιεζομετρικά ὕψη y ἅτινα εἰσί p τόν ἀριθμόν καί αἱ ἡ τιμή τοῦ ἔχρου ἐν ἑκάστῳ σωλῆνι δηλ. q ἕτεροι ἄγνωστοι. Τό ὅλον δηλ. $p+q$ ἄγνωστοι.

Ἡ σχέσις (1) ἐφαρμοζομένη ἐπί ἑνός ἑκάστου τῶν σωλήνων μᾶς δίδει q ἐξισώσεις, αἵτινες ἐμπεριέχουσι τάς q ἀγνώστους Q καί τάς p ἀγνώστους y διότι ἔχομεν

$$j_{KK'} = \frac{y_K - y_{K'}}{l_{KK'}}$$

Ἐάν ἤδη ἐκφράσωμεν ὅτι τό ὕδωρ τό ὁποῖον δέχεται τό σημεῖον m_K ἀπό τούς σωλῆνας, οἵτινες φέρουσιν ὕδωρ πρός τό σημεῖον τοῦτο ἰσοῦται μέ τό ὕδωρ ὅπερ στέλλει τό αὐτό σημεῖον m_K διά τῶν σωλήνων, οἵτινες λαμβάνουσιν ὕδωρ ἀπό τοῦ αὐτοῦ σημείου ἔχομεν ἑτέρας p ἐξισώσεις διά τά p σημεῖα m.

Ἔχομεν λοιπόν ἐν ὅλῳ $p+q$ ἐξισώσεις διά νά προσδιορίσωμεν $p+q$ ἀγνώστους καί τό πρόβλημα ἐλύθη.

Πρέπει ὅμως μετά τόν προσδιορισμόν τῶν $p+q$ ἀγνώστων τούτων νά ἐπαληθεύσωμεν τάς τιμάς αὐτῶν, διότι τό σύστημα τῶν p τελευταίων ἐξισώσεων λαμβάνομεν οὕτως εἰπεῖν αὐθαιρέτως, διότι μή γνωρίζοντες τά παρά τοῖς σημείοις m διάφορα πιεζομετρικά ὕψη δέν δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς τόν παρά τῷ σημείῳ m_K τρόπον τῆς ῥοῆς τοῦ ὕδατος καί εὕρομεν τήν ποσότητα τήν ὁποίαν δέχεται τό σημεῖον τοῦτο καί τήν ποσότητα τήν ὁποίαν ἀποστέλλει.

Λύσις τοῦ Ἐνταῦθα μᾶς ἐδόθησαν τά σημεῖα m καί ἡ τιμή τοῦ ἔχρου
δευτέρου ἐν ἑκάστῳ σωλῆνι καί ἔχομεν νά προσδιορίσωμεν q διαμέ-
προβλήμα- τρους D καί p πιεζομετρικά ὕψη.
τος. Ἡ σχέσις (1) ἐφαρμοζομένη δι' ἕκαστον σωλῆνα μᾶς δίδει καί ἐνταῦθα q ἐξισώσεις, αἵτινες προσδιορίζουσι τάς q ἀγνώστους D ὡς συναρτήσεις τῶν πιεζομετρικῶν ὑψῶν y. τά τελευταῖα ταῦτα εἶναι ὅμως ἄγνωστα καί μένουσιν ἀπροσδιόριστα. δέν δυνάμεθα τῷ ὄντι ἐνταῦθα νά μεταχειρισθῶμεν τό σύστημα τῶν p ἐξισώσεων, διότι δέν γνωρίζομεν τίνι τρόπῳ θά γίνῃ ἡ διανομή τοῦ ὕδατος δι' ἑκάστου τῶν σημείων m.

Σημ. Ἐν τῇ πράξει πρέπει νά διπλασιάσωμεν τόν ἔχρουν ὅν προυθέμεθα νά ἔχωμεν εἰς ἕκαστον σημεῖον m ἕνεκα τῶν καθιζημάτων (incrustations) καί ἄλλων αἰτίων, ἅτινα μέ τόν χρόνον ἐπιφέρουσι τήν ἐλάττωσιν τοῦ ἔχρου.

§2ον Διώρυγες

41. Ἐν τῇ ῥοῇ τῶν ὑδάτων ἐν ταῖς διώρυξι θά διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις

1ον Τήν ὁμοιόμορφον ῥοήν.

2ον Τήν μεταβαλλομένην ῥοήν

Ἐν τῇ ὁμοιομόρφῳ ῥοῇ ἡ ἐγκαρσία τομή εἶναι σταθερά (ὡς ἐκ τῆς σχέσεως $Q=\Omega v$) καί εὑρισκόμεθα οὕτω ἐν τῇ περιπτώσει τῶν κυλινδρικῶν σωλήνων μέ τήν διαφοράν ὅτι ἐνταῦθα ἡ πίεσις μένει ἀμετάβλητος ἐφ' ὅλης τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ἕνεκα τῆς εὐθυγράμμου καί ὁμοιομόρφου πιέσεως δυνάμεθα νά ἐκλάβωμεν τάς πιέσεις ὡς ἐξασκουμένας ὑδροστατικῶς· καί τότε ἐν τῇ αὐτῇ ἐγκαρσίᾳ τομῇ τό πιεζομετρικόν ὕψος εἶναι τό αὐτό δι' ὅλα τά σημεῖα τῆς τομῆς, 10,336 δηλαδή ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ πιεζομετρική γραμμή εἶναι παράλληλος τῇ ἐλευθέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ ῥευστοῦ καί ἡ κινητική ἔντασις μεταξύ δύο οἱωνδήποτε τομῶν τήν ὁποίαν συνήθως μετροῦμεν διά τῆς καταπτώσεως τῆς πιεζομετρικῆς γραμμῆς μεταξύ τῶν τομῶν τούτων δύναται ἐνταῦθα νά μετρηθῇ ἐπί τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἤ καί ἐπί τοῦ πυθμένος τῆς διώρυγος ἥτις εἶναι καί αὕτη παράλληλος τῇ ἐλευθέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὕδατος διότι τό βάθος ἐν τῇ διώρυγι εἶναι σταθερόν.

ἡ κινητική ἔντασις μεταξύ δύο τομῶν κειμένων εἰς ἀπόστασιν ρ εἶναι λοιπόν $\rho \eta\mu i$ (ἔνθα i παριστᾷ τήν γωνίαν τοῦ πυθμένος μετά ὁριζοντίου τινός γραμμῆς) ἀλλ' ἡ ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως μεταξύ τῶν αὐτῶν τομῶν ἰσοῦται τῇ κινητικῇ ἐντάσει ὥστε

$$J\rho = \rho\,\eta\mu i \qquad \text{ἤ} \qquad J = \eta\mu i = i$$

διότι ἡ γωνία i εἶναι συνήθως πολύ μικρά.
ἡ θεμελιώδης σχέσις ( ) $J = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u)$
λαμβάνει λοιπόν ἐνταῦθα τήν μορφήν

$$i = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u)$$

Εἰς τήν συνάρτησιν $\varphi(u)$ ἐδόθησαν καί ἐνταῦθα διάφοροι μορφαί ἡ πρώτη εἶναι

$$\varphi(u) = au + bu^2$$

ἀλλ' οἱ συντελεσταί ἐνταῦθα δέν εἶναι οἷοι ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ἔχομεν ἐνταῦθα

$$a = 0.0000444499 \qquad b = 0.000309314.$$

Ὁ Κύριος Bazin ἔδωκεν εἰς τήν συνάρτησιν $\varphi(u)$ τήν μορφήν

$$\varphi(u) = B_1 u^2 = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\rho}\right) u^2$$

ἔνθα ρ παριστᾷ τήν μέσην ἀκτῖνα $\frac{\Omega}{\chi}$ τῆς τομῆς αἱ σταθεραί α καί β μεταβάλλουσι τάς τιμάς των ἀναλόγως τῆς φύσεως τῶν παρειῶν τῆς διώρυγος

Λεῖαι παρειαί (ciment ξυλεία ρυκανισμένη)	$\alpha = 0.00015$	$\beta = 0.03$
λίθοι λαξευτοί, ὀπτόπλινθοι, σανίδες	$\alpha = 0.00019$	$\beta = 0.07$
παρειαί οὐχί κανονικαί (moellons)	$\alpha = 0.00024$	$\beta = 0.25$
παρειαί ἐκ γῆς	$\alpha = 0.00028$	$\beta = 1.25$

42. Ἐν τῇ προκαταρκτικῇ σπουδῇ τῆς κατασκευῆς μιᾶς διώρυγος ἔχομεν τάς πέντε ποσότητας

$$Q \quad u \quad i \quad \Omega \quad \chi$$

συνδεομένας διά δύο μόνον σχέσεων

$$Q = \Omega u \qquad \text{καί} \qquad i = \frac{\chi}{\Omega}\varphi(u)$$

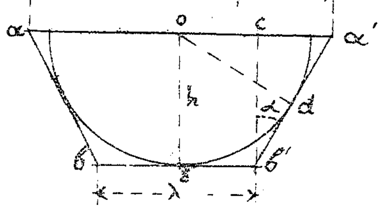
καί δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν κατά βούλησιν τρεῖς ἐκ τῶν ποσοτήτων τούτων.

Ὁ ἔκρους Q εἶναι συνήθως γνωστός· ἡ ταχύτης u εἶναι πάντοτε ἄγνωστος.

Εἰς μίαν μόνον περίπτωσιν γνωρίζομεν αὐτήν ἐκ τῶν προτέρων· ὅταν προτιθέμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν τομήν Ω οὕτως ὥστε αἱ προκύπτουσαι ἐκχωματώσεις νά εἶναι ὅσῳ τό δυνατόν ἐλάχιστοι καί κατά συνέπειαν καί ἡ δαπάνη· ὡς ἐκ τῆς σχέσεως δέ $Q = \Omega u$ ἔνθα Q εἶναι σταθερά u αὐξάνει καθ' ὅσον Ω ἐλαττοῦται, ἡ τιμή ὅμως τῆς ταχύτητος u δέν δύναται νά ὑπερβῇ ὅριόν τι πέραν τοῦ ὁποίου αἱ παρειαί τῆς διώρυγος θά παρεσύροντο ὑπό τῆς ῥοῆς (ταχύτητος τοῦ πυθμένος)· τήν μεγίστην αὐτήν τιμήν τῆς u δυνάμεθα νά λάβωμεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὡς γνωστήν.

43. Ἡ κλίσις εἶναι ἀνάλογος τοῦ λόγου $\frac{\chi}{\Omega}$ δέον λοιπόν νά προσδιορίσωμεν τήν γεωμετρικήν μορφήν τῆς τομῆς, οὕτως ὥστε $\frac{\chi}{\Omega}$ νά εἶναι ἐλάχιστον.

Γνωρίζομεν δέ ἐκ τῆς γεωμετρίας ὅτι ἡ καμπύλη ἡ ἐμπεριέχουσα τό μεγαλείτερον ἐμβαδόν ὑπό δεδομένην περιφέρειαν εἶνε ὁ κύκλος ὥστε ἡ μᾶλλον συμφέρουσα τομή διά τήν διώρυγα εἶναι τό ἡμικύκλιον τό ὁποῖον ἐν τῇ πράξει ἀντικαθιστῶμεν διά τραπεζοειδοῦς ἰσοσκελοῦς τομῆς καί πρέπει νά προσδιορίσωμεν μεταξύ ὅλων αὐτῶν τῶν τραπεζ ἐκεῖνο διά τό ὁποῖον $\frac{X}{\Omega}$ λαμβάνει τήν ἐλαχίστην τιμήν αὐτοῦ· ἔχομεν



$$\Omega = h(\lambda + h\,\varepsilon\varphi\alpha)$$

$$X = \lambda + \frac{2h}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

ὑποθέτοντες τήν μίαν τῶν ποσοτήτων τούτων σταθεράν προσδιορίζομεν τήν ἐλαχίστην τιμήν τῆς ἑτέρας διά τῆς σχέσεως

$$d\Omega = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad dX = 0$$

ἤ

$$d\Omega = h\,d\lambda + \lambda\,dh + 2h\,\varepsilon\varphi\alpha\,.\,dh = 0 \quad \text{ἤ} \quad d\lambda + \frac{2\,dh}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = dX = 0$$

καί ἐξισοῦντες πρός ἀλλήλας τάς δύο τιμάς τοῦ $\frac{d\lambda}{dh}$ ἔχομεν

$$\frac{\lambda}{2} + h\,\varepsilon\varphi\alpha = \frac{h}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}\alpha\alpha' = \alpha б$$

τά ὀρθογώνια τρίγωνα οdά καί бεά εἶναι ἴσα διότι ἔχουσι τήν ὑποτείνουσαν ἴσην καί μίαν γωνίαν κοινήν ὥστε

$$od = \varepsilon б = o\varepsilon$$

ὁ πυθμήν καί ἡ παρειά εὑρίσκονται λοιπόν εἰς τήν αὐτήν ἀπό

στασιν ἀπό τοῦ μέσου ο τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας καί τοῦ ὕδατος καί κατά συνέπειαν τό διά τήν τομήν τῆς διώρυγος προτιμώτερον τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς κύκλον καί τότε λαμβάνοντες τήν γωνίαν α προσδιορίζομεν ἐντελῶς τήν τομήν.

Παράδειγμα. 44. Ποίαν κλίσιν πρέπει νά δώσωμεν εἰς μίαν διώρυγα $1{,}75^{\mu}$ πλάτους $0{,}75^{\mu}$ βάθους διά νά ἐπιτευχθῇ ἡ ἐκροή 20000 κυβικῶν μέτρων ὕδατος εἰς 24 ὥρας.

$$X = 1{,}75 + 2 \times 0.75 = 3^{m}.250$$

$$\Omega = 1.75 \times 0.75 = 1^{m^2}.312$$

Ἡ τιμή τοῦ ἔκρου κατά δευτερόλεπτον εἶναι

$$Q = \frac{20000}{24 \times 60 \times 60} = 0^{m^3}.231$$

ἡ μέση ταχύτης εἶναι λοιπόν

$$u = \frac{Q}{\Omega} = \frac{0.231}{1.312} = 0^{\mu}.176$$

καί ἐάν μεταχειρισθῶμεν τήν μορφήν

$$\varphi(u) = Bu^2 = 0.0004\,u^2$$

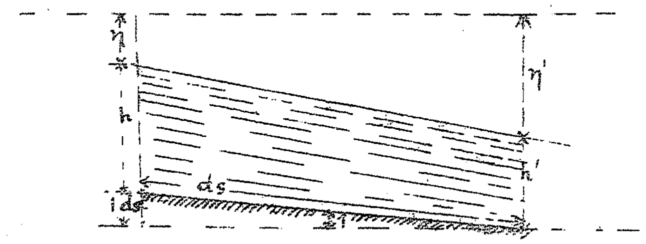
ἔχομεν

$$i = \frac{X}{\Omega}\,\varphi(u) = \frac{3.250}{1.312} \times 0.0004\,(0.176)^2 = 0.$$

Μεταβαλλομένη ῥοὴ ἐν ταῖς διώρυξι

45. Ἐνταῦθα ἡ ταχύτης μεταβάλλεται ἀπό τομῆς εἰς τομήν καί ἐπειδή $Q=\Omega u$ μένει σταθερόν ω μεταβάλλεται κάθώς καί τό βάθος $\bar{h}$ ἀπό τομῆς εἰς τομήν.

Ὑποθέτομεν ὅμως τήν κίνησιν ἐνδελεχῆ οὕτως ὥστε νά δυνάμεθα νά ἐφαρμώσωμεν τό Θεώρημα τοῦ Bernoulli εἰς τό ἀπειροστόν τμῆμα τοῦ ἔναντι σχήματος. ἡ πιεζομετρική γραμμή εἶναι καί ἐνταῦθα μία παράλληλος τῇ ἀνωτάτῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὕδατος εἰς ὕψος $10^{\mu},3$ ἀπ' αὐτῆς.



ἡ ἀπώλεια τῆς ἐντάσεως τῆς ῥοῆς μεταξύ δύο τομῶν εἶναι λοιπόν $\eta'-\eta$ καί ἐνταῦθα $d\eta$ ἔχομεν λοιπόν.

$$\frac{u\,du}{g} = d\eta - \frac{R\,ds}{\omega\Omega} \qquad (1)$$

καί ἐπειδή

$$Q=\Omega u \quad \text{ἤ} \quad Q^2\Omega^{-2} = u^2$$

διαφοροῦντες

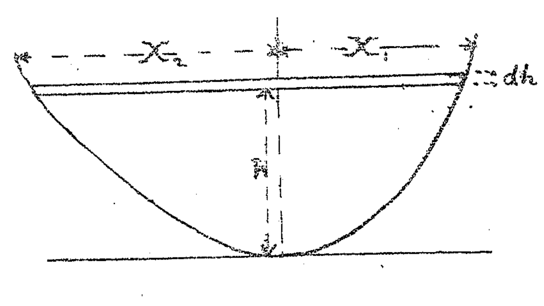
$$2u\,du = -2Q^2\Omega^{-3}\,d\Omega$$

ἤ

$$u\,du = -Q^2\,\Omega^{-3}\,d\Omega = -\frac{Q^2}{\Omega^3}\,d\Omega$$

τήν τομήν Ω προσδιορίζομεν διά τῶν δύο συναρτήσεων

$$x_1 = f_1(\bar{h}) \qquad x_2 = f_2(\bar{h})$$



καί ἔχομεν

$$d\Omega = x\,d\bar{h}$$

ὥστε

$$u\,du = -\frac{Q^2}{\Omega}\,x\,d\bar{h}$$

ἔχομεν δέ εἰς τό προηγούμενον σχῆμα

$$i\,ds = d(\eta+\bar{h}) \qquad \text{ὅθεν} \qquad d\eta = i\,ds - d\bar{h}$$

ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι καθ' ἅ γνωρίζομεν $\omega \times \varphi(u)$ ὥστε

$$\frac{R}{\omega\Omega} = \frac{x}{\Omega}\,\varphi\left(\frac{Q}{\Omega}\right)$$

ἡ ἐξίσωσις (1) τοῦ Bernoulli μετατρέπεται διά τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν ποσοτήτων τούτων εἰς

$$-\frac{Q^2 x}{g\Omega^3 du} = (i\,ds - d\bar{h}) - \frac{x}{\Omega}\,\varphi\left(\frac{Q}{\Omega}\right) ds$$

ὅθεν ἐξάγομεν

$$ds = \frac{1 - \dfrac{Q^2 x}{g\Omega^3}}{i - \dfrac{x}{\Omega}\,\varphi\left(\dfrac{Q}{\Omega}\right)}\,d\bar{h}$$

Καταμέτρησις τοῦ ἔχρου Q καί τῆς ταχύτητος v ῥεύματός τινος

Καταμέ- 46. Ἐλάχιστα ῥεύματα συνάζομεν τήν ὕλην ποσότητα τοῦ τηρήσεως τοῦ ὕδατος καί καταμετροῦμεν αὐτήν.

ἔχρου. Ῥεύματα μέσης σπουδαιότητος. Χωρίζομεν τό ῥεῦμα εἰς ὡρισμένον ἀριθμόν μικροτέρων ῥευμάτων καί καταμετροῦμεν ἕν ἕξ αὐτῶν.

Ῥεύματα ῥέοντα διά διαφράγματος. Ἀνοίγομεν τό διάφραγμα οὕτως ὥστε ἡ ὄπισθεν τούτου στάθμη τοῦ ὕδατος ἐν τῷ ὀχετῷ νά μένῃ σταθερά καί τότε δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (Σελὶς 39).

$$Q=\frac{2}{3}ml\sqrt{2g}\left[H_1^{3/2}-H_0^{3/2}\right]$$

Ῥεύματα μεγάλων ποταμῶν. Μετροῦμεν τήν ταχύτητα V ἐν τῷ μέσῳ τοῦ ποταμοῦ καί ἐπί τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος καί λαμβάνομεν διά τήν μέσην ταχύτητα u τήν τιμήν

$$u=V\frac{V+2.37}{V+3.15} \qquad \text{ἤ} \quad \frac{V}{u}=1+14\sqrt{\frac{\Omega i}{\chi}}$$

καί μετροῦμεν τόν ἔχρουν διά τῆς σχέσεως

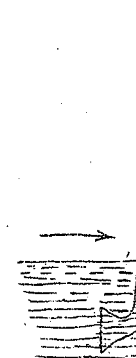
$$Q=\Omega u$$

ἀφ' οὗ πρῶτον προσδιορίσωμεν τήν τιμήν τοῦ Ω διά

Γ. Κατά μέτρησις τῆς ταχύτητος 47 1ον Flotteur.

2ον Σωλήν τοῦ Pitot ἔχομεν τόν ἐμπειρικόν τύπον

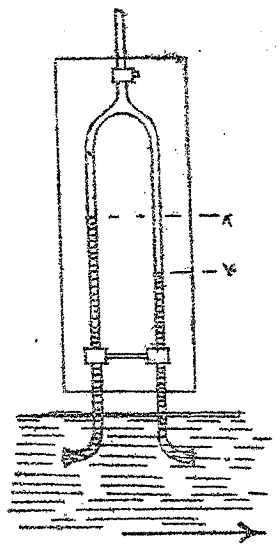
$$h=\frac{3}{2}\frac{v^2}{2g} \qquad \text{ἤ} \quad v=3{,}62\sqrt{h}$$



Συμπιεζόμετρον τοῦ Darcy καί Baumgarten συγκείμενον ἀπό δύο σωλῆνας τοῦ Pitot. Ἡ ταχύτης ἐνταῦθα μετρεῖται διά τοῦ ἐμπει-

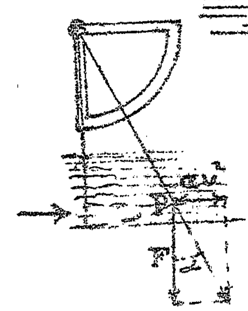
ἐμπειρικοῦ τύπου

$$v=c\sqrt{2g(h+h')}$$



ἔνθα c εἶναι ἡ σταθερά τῆς συσκευῆς.

Ἐκκρεμές τοῦ Castelli. Ἔχομεν αὐτό = F εφα ἕνα F παριστᾷ τήν διαφοράν τοῦ βάρους P καί τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως ἐξάγομεν $v=B\sqrt{\varepsilon\varphi\alpha}$ ἔνθα B εἶναι ἡ σταθερά τοῦ ἐργαλείου



Σπουδή τῶν ὑδραυλικῶν μηχανῶν.

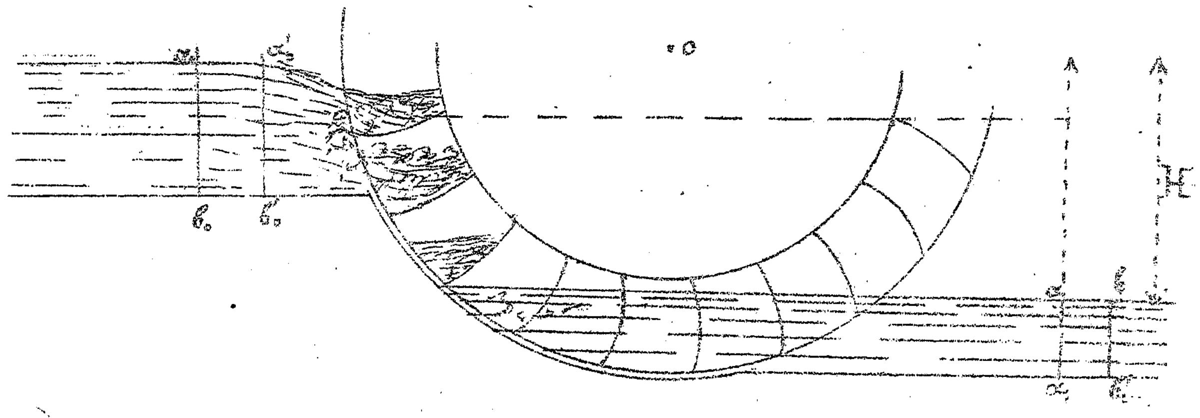
Γενικότης ὁριζοντίων ὑδραυλικῶν τροχῶν. Ὑποθέτομεν τόν ὑδραυλικόν τροχόν μέ ἄξονα ὁριζόντιον. Εἶναι ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ὁ τροχός δηλαδή ἀντικαθίσταται ὑπό ὑδροστροβίλου οἱ κάτωθι συλλογισμοί ἐφαρμόζονται αὐτολεξεί.

Ἔστω λοιπόν ὁ ὁριζόντιος τροχός O, ὅστις τίθεται εἰς κίνησιν διά τῆς μεταβάσεως μάζης τινός $\frac{P}{g}$ ὕδατος ἀπό τῆς θέσεως $a_0 a'_0 b_0 b'_0$ εἰς τήν θέσιν $aa'bb'$.

Ἐν τῇ θέσει $a_0 b_0 a'_0 b'_0$ ἡ ῥευστή μᾶζα κέκτηται [illegible]

Ὑδραυλική Π. Πρωτοπαπαδάκη.

σαν ἐνέργειαν PH καί κινητικήν ἐνέργειαν $\frac{P}{g}\frac{V_0^2}{2}$ ἔνθα V_0 παριστᾷ τήν ταχύτητα ἐν τῇ διατομῇ $\alpha_0\beta_0$.



Εἰς τήν δευτέραν αὐτῆς θέσιν $\alpha\beta\alpha'\beta'$ ἡ μάζα $\frac{P}{g}$ κέκτηται μόνον κινητικήν ἐνέργειαν $\frac{P}{g}\frac{V^2}{2}$ (ἔνθα V παριστᾷ τήν ταχύτητα ἐν τῇ διατομῇ $\alpha\alpha'$) ἀπώλεσε δέ πᾶσαν τήν λανθάνουσαν ἐνέργειαν αὐτῆς. Ἡ ἐνέργεια.

$$PH+\frac{P}{g}\frac{V_0^2}{2}-\frac{P}{g}\frac{V^2}{2}$$

τήν ἀπώλεσεν ἡ ῥευστή μάζα κατά τήν μετάβασιν αὐτῆς ἀπό τῆς ἀρχικῆς θέσεως $\alpha_0\beta_0\alpha_0'\beta_0'$ εἰς τήν τελικήν μετεσχηματίσθη εἰς ἐργασίαν ζ ἥτις μετεβιβάσθη εἰς τόν κινητῆρα. μέρος αὐτῆς ἀπώλετο καί ἐν τῇ κρούσει τοῦ ὕδατος ἐπί τῆς κώπης τοῦ τροχοῦ. καί ἐάν παραστήσωμεν διά u τήν ἐκ τῆς κρούσεως ἐπελθοῦσαν ἀπώλειαν ταχύτητος ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἐργασία εἶναι $\frac{P}{g}\frac{u^2}{2}$. ὥστε ἡ ὅλη ἐργασία τήν ὁποίαν ἐξετέλεσεν ἡ ῥευστή μάζα κατά τήν μετάβασιν αὐτῆς ἀπό τῆς θέσεως $\alpha_0\beta_0\alpha_0'\beta_0'$ εἰς τήν θέσιν $\alpha\beta\alpha'\beta'$ εἶναι $\zeta+\frac{P}{g}\frac{u^2}{2}$ καί ἔχομεν τήν σχέσιν

$$PH+\frac{P}{g}\frac{V_0^2}{2}-\frac{P}{g}\frac{V^2}{2}=\zeta+\frac{P}{g}\frac{u^2}{2}$$

$$\zeta=P\left[H+\frac{V_0^2}{2g}-\frac{u^2+V^2}{2g}\right]$$

Οὕτω ἡ πτῶσις τοῦ ὕδατος παρέχει ἡμῖν ποσότητα ἐνεργείας ἴσην μέ

$$P\left(H+\frac{V_0^2}{2g}\right)$$

ἡμεῖς δέ χρησιμοποιοῦμεν μέρος μόνον αὐτῆς ἴσον τῷ

$$P\left[H+\frac{V_0^2}{2g}\right]-P\frac{u^2+V^2}{2g}$$

διά ν' αὐξήσωμεν δέ ὅσῳ τό δυνατόν τήν χρησιμοποιουμένην ταύτην μερίδα τῆς παρεχομένης ἡμῖν ἐνεργείας δέον νά ἐλαττώσωμεν ὅσω τό δυνατόν τῆς ποσότητος u καί V νά κατασκευάσωμεν δηλαδή τροχόν τοιοῦτον, ὥστε τό ὕδωρ νά εἰσέρχηται ἄνευ κρούσεως ἐπί τῶν κωπῶν αὐτοῦ καί νά ἐξέρχηται ἄνευ ταχύτητος.

ἡ πρόσοδος μ τοῦ ὑδραυλικοῦ κινητῆρος εἶναι

$$\mu=\frac{P\left[H+\frac{V_0^2}{2g}\right]-P\frac{u^2+V^2}{2g}}{P\left[H+\frac{V_0^2}{2g}\right]}\qquad 1-\frac{u^2+V^2}{2gH+V_0^2}$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν V_0 ἀρκούντως μικράν ὥστε νά παραλείψωμεν τό τετράγωνον V_0^2 ἡ πρόσοδος τοῦ κινητῆρος ἐκφράζεται διά

$$\mu=1-\frac{u^2+V^2}{2gH}$$

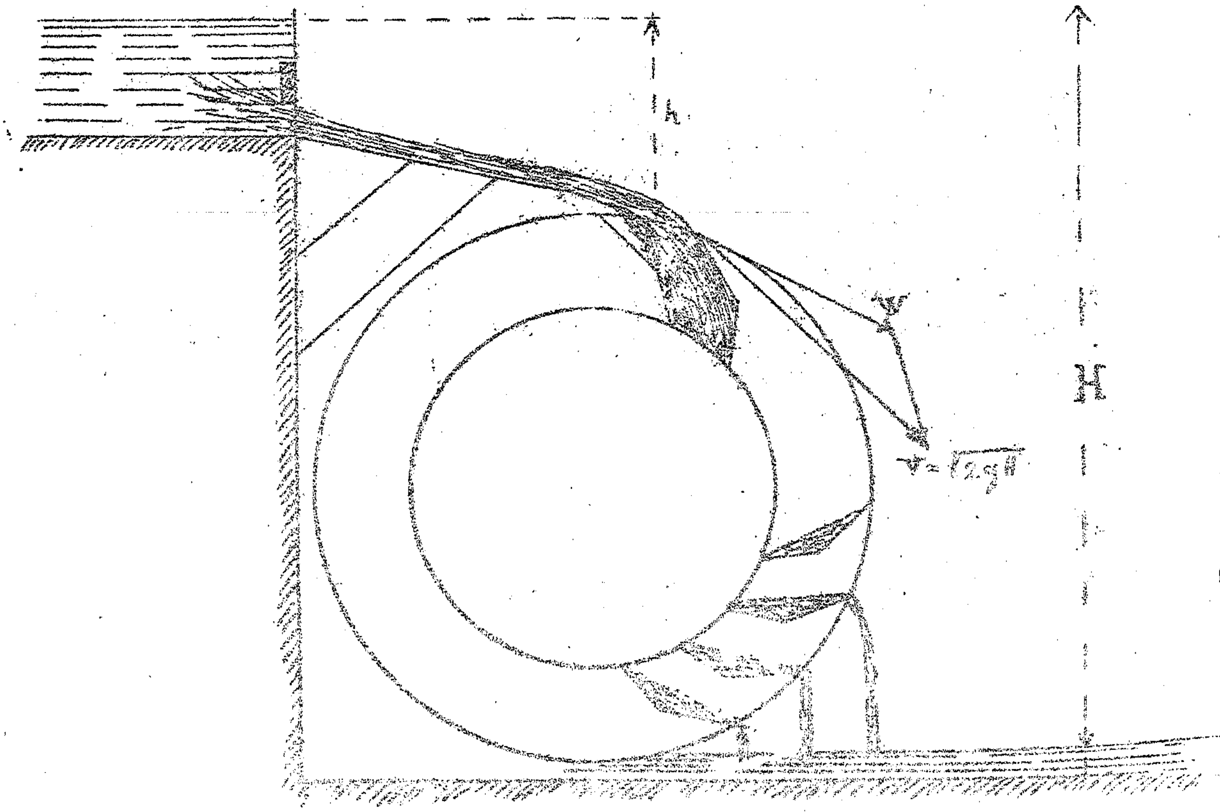
Ἐάν P παριστᾷ τό βάρος τοῦ ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου κατάρρέοντος ὕδατος ζ παριστᾷ τήν συλλεγομένην ὑπό τοῦ κινητῆρος ἐνέργειαν ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι.

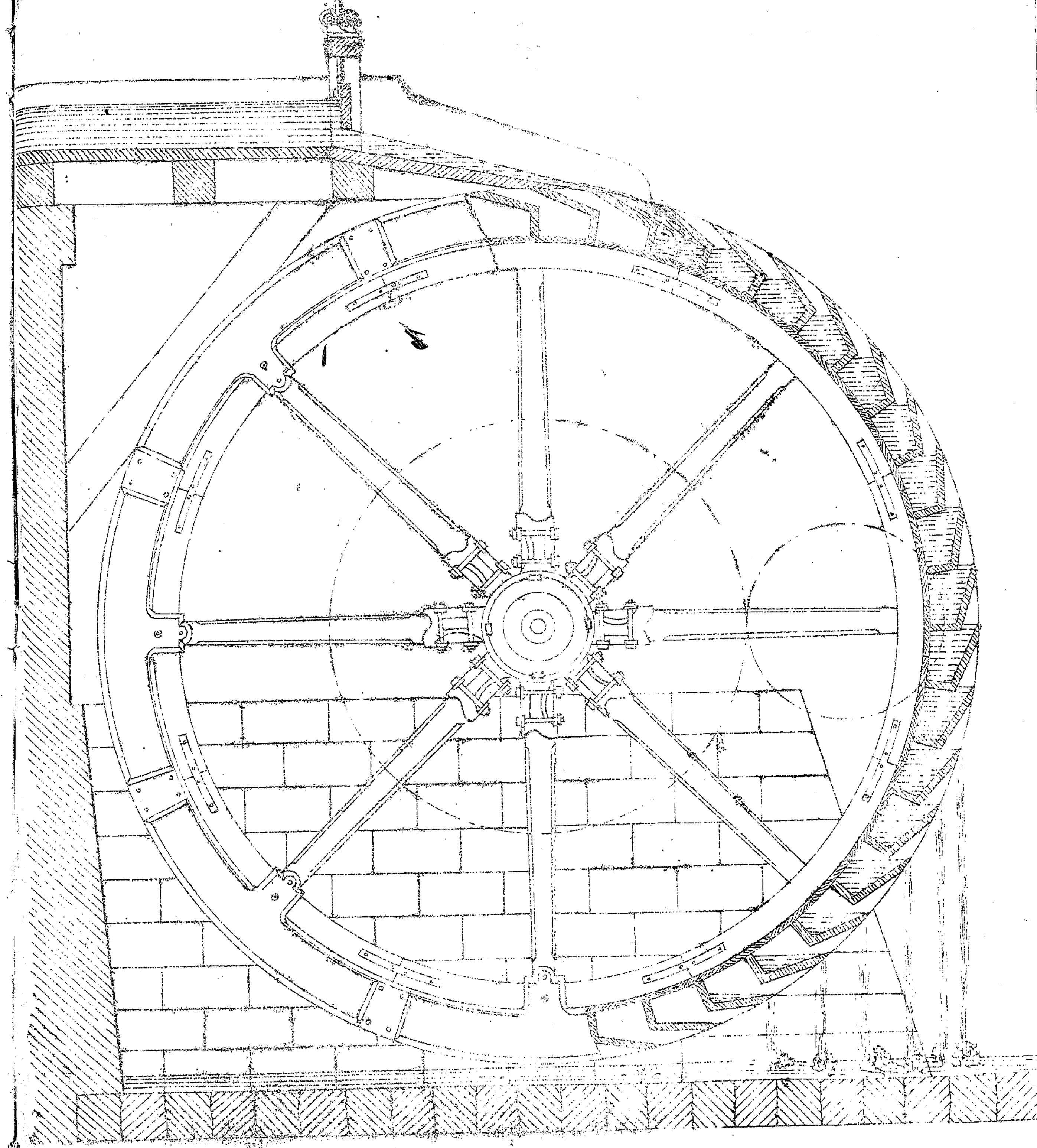
§1ος Ὑδραυλικοὶ τροχοί

Τροχὸς μὲ σκάφας. Ὁ τροχὸς οὗτος δέχεται τὸ ὕδωρ ἄνωθεν ἐντὸς σκαφῶν, τὰς ὁποίας φέρει καθ' ὅλην τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν εἴσοδον αὐτοῦ ἐν τῇ σκάφῃ τοῦ τροχοῦ τὸ ὕδωρ κέκτηται ταχύτητα ἴσην μὲ $\sqrt{2gh}$ ἡ ταχύτης ἐν τῇ ἐξωτερικῇ περιφερείᾳ τοῦ τροχοῦ εἶναι W καὶ τὸ ὕδωρ μετά τινας στιγμὰς ἀπὸ τῆς ἐν τῇ σκάφῃ εἰσόδου του φέρεται καὶ τοῦτο μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα W ἡ ἀπωλεσθεῖσα ταχύτης u ὡς ἐκ τῆς κρούσεως τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν ἐν τῇ σκάφῃ εἴσοδόν του παρίσταται λοιπὸν διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος WV

ὅθεν
$$\bar{u} = \bar{V} - \bar{W}$$
ἤ
$$u^2 = V^2 + W^2 - 2VW\,\text{συν}(V,W)$$





ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος κατά τήν ἔξοδον αὐτοῦ ἐκ τῆς σκάφης εἶναι W ὥστε

$$u^2+W=V^2+2W^2-2VW\,\text{συν}(V,W)$$

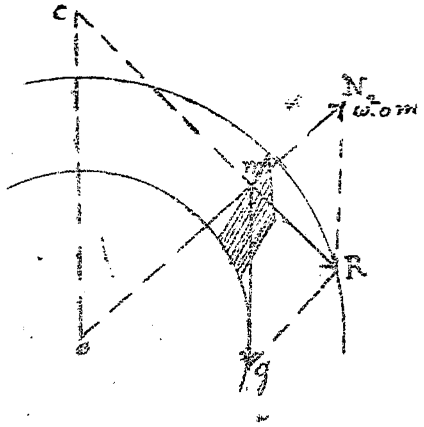
καί ἡ μή χρησιμοποιηθεῖσα ἐνέργεια ( ) εἶναι

$$\frac{P}{2g}\left[V^2-2W^2-2VW\,\text{συν}(V,W)\right]$$

Ἐνταῦθα ὅμως καί ἕτερον μέρος τῆς διαθεσίμου ἐνεργείας δέν χρησιμοποιεῖται, διότι τό ὕδωρ δέν μένει ἐν τῇ σκάφῃ μέχρι τοῦ κατωτάτου βάθους H, ἀλλ' ἀρχίζει νά χύνηται ἤδη ἀπό τινος ὕψους καί διά νά εὕρωμεν τήν πρόσοδον τοῦ τροχοῦ τούτου πρέπει νά ὑπολογίσωμεν καί τό μέρος τοῦτο τῆς ἐνεργείας, το ὁποῖον δέν μετατρέπεται εἰς χρήσιμον ἐργασίαν.

Πρέπει πρός τοῦτο νά προσδιορίσωμεν πρῶτον τήν ἐν τῇ σκάφῃ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος.

Ἡ περιστροφική ταχύτης τοῦ τροχοῦ εἶναι σχετικῶς μικρά καί δυνάμεθα ἀνά πᾶσαν στιγμήν νά θεωρήσωμεν τό ἐν τῇ σκαφῃ ὕδωρ ἐν ἰσορροπίᾳ καί τοτε [ ] ἡ συνισταμένη R τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι κάθετος ἐπί τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.



Ἄς θεωρήσωμεν λοιπόν ρευστόν τεμόριον m ἐπί τῆς ἐλευθέρας ταύτης ἐπιφανείας αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι ἡ [illegible] ... ἐκ τῆς [illegible] κατήσεως τοῦ [illegible] [illegible] περιστροφῆς [illegible] τῆς [illegible] ἡ τιμὴ εἶναι $\widehat{\omega}$ om, ἔνθα ω [illegible] περί τό σημεῖον O περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ τροχοῦ τὰ δύο μέγεθα mos καί mRN εἶναι [illegible] καί δίδουσι

$$\frac{Os}{Om}=\frac{g}{mN}=\frac{g}{\omega^2 Om} \quad \text{ἤ} \quad Os=\frac{g}{\omega^2}$$

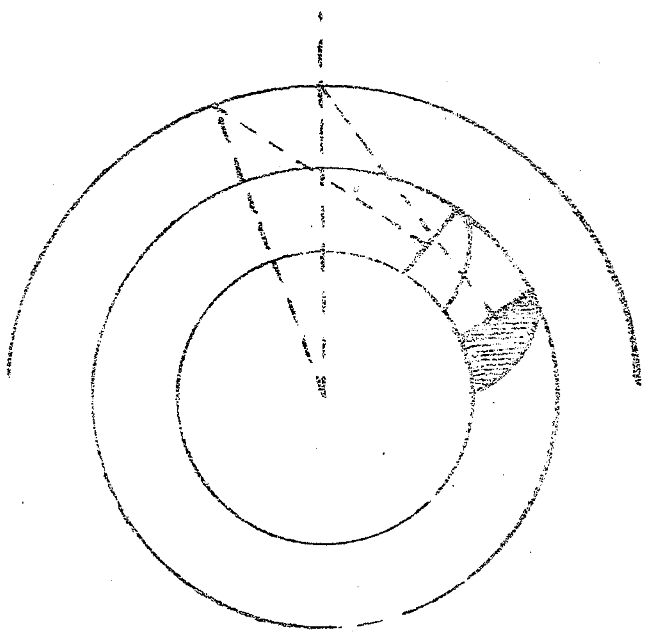
καί ἐπειδή ω εἶναι σταθερά Os εἶναι σταθερόν ἡ κάθετος mR ἐπί τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἐν τῇ σκάφῃ διέρχεται λοιπόν διά τοῦ σταθεροῦ σημείου C ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι λοιπόν κύκλος μέ κέντρον τό C τό ὁποῖον δυνάμεθα νά χαράξωμεν καί ὁ ὁποῖος θά μᾶς ἐπιτρέψῃ νά εὕρωμεν τήν στιγμήν τῆς ἐνάρξεως καί τοῦ τέλους τῆς ἐκχύσεως.

Πρός τοῦτο χαράσσομεν εὐθεῖαν τινα NM τοιαύτην ὥστε τό ὑπ' αὐτῆς καί τῆς παρειᾶς τῆς σκάφης ΣM περιερχόμενον ἐμβαδόν νά εἶναι ἴσον μέ τό ἥμισυ τοῦ ὑπό τῶν δύο παρειῶν τῆς σκάφης περιεχομένου ἐμβαδοῦ (τοῦτο λαμβάνομεν αὐθαιρέτως) καί τότε ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τά κυκλικά τόξα [illegible] τήν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος διά τῶν [illegible] δυνάμεθα νά ἐκλάβωμεν τήν εὐθεῖαν MN ὡς [illegible] τήν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος ἐν τῇ σκάφῃ. αἱ γραμμαί αἱ ὁρίζουσαι τήν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος ἀπό στιγμῆς εἰς στιγμήν εἶναι λοιπόν $M'''N'''$, $M''N''$ $M'N'$ MN (αἱ γραμμαί αὗται εἶναι τοιαῦται, ὥστε τά ὑπ' αὐτῶν καί τῆς

παρειᾶς $M\Sigma$ ἐμπεριεχόμενα ἐμβαδά νά εἶναι ἴσα πρός ἄλληλα) καί ἡ ἔκχυσις τοῦ ὕδατος ἀρχίζει προφανῶς, καθ' ἣν στιγμήν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος συμπίπτει μετά τῆς εὐθείας MN καί τελευτᾷ καθ' ἣν στιγμήν ἡ αὐτή ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος συμπίπτει μετά τῆς παρά τό σημεῖον M ἐφαπτομένης τῇ παρειᾷ τῆς σκάφης, τήν προσδιορίζομεν εὐκόλως, διότι γνωρίζομεν τήν μορφήν τῆς παρειᾶς ταύτης.

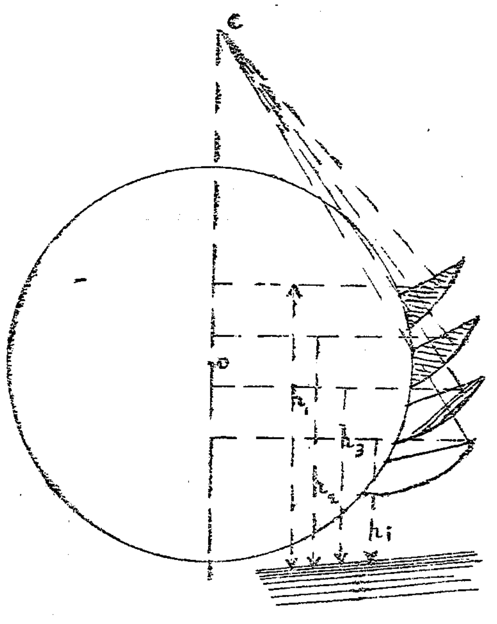
Εὐκόλως ἤδη δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν θέσιν ἐν ᾗ ἀρχίζει νά χύνηται τό ἐν ὡρισμένῃ τινι σκάφῃ ἐμπεριεχόμενον ὕδωρ.

Λαμβάνομεν πρός τοῦτο τήν σκάφην ΣM καί χωρίζομεν τήν εὐθεῖαν MN οὕτως ὥστε τό ἐμβαδόν $M\Sigma N$ νά εἶναι ἴσον μέ τό ἥμισυ τοῦ ὑπό τῶν δύο παρειῶν τῆς σκάφης περιεχομένου ἐμβαδοῦ.



Γνωρίζομεν δέ ὅτι τό κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ὁρίζοντος τήν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος εὑρίσκεται ἐπί τῆς καθέτου ἐπί τό μέσον τῆς εὐθείας MN καί εἰς ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἴσην μέ $\frac{g}{\omega^2}$ ἐπί τῆς κατακορύφου OC' τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ· διά νά εὕρω λοιπόν τήν πραγματικήν θέσιν τῆς σκάφης ΣΜ καθ' ἥν στιγμήν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ἐν αὐτῇ ἐμπεριεχομένου ὕδατος συμπίπτει μέ τήν εὐθεῖαν MN δέον νά στρέφω τόν ὅλον τροχόν πρός τά δεξιά κατά γωνίαν ἴσην τῇ COC' καί ἔχω οὕτω τήν σκάφην ΣΜ ἐν τῇ θέσει $\Sigma_1 M_1$ ἔνθα ἀρχίζει ἡ ἔκχυσις.

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη τήν ἐργασίαν, τήν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἡ βαρύτης ὡς ἐκ τῆς καταπτώσεως τοῦ ὕδατος, καθ' ὅν χρόνον ὁ τροχός ὑφίσταται περιστροφήν ἴσην μέ τό πλάτος μιᾶς σκάφης καί τόν ὑπολογισμόν τῆς ἐργασίας τῆς βαρύτητος χωρίζομεν εἰς δύο μέρη· τό ἕν σχετικόν τάς ἀνωτέρας σκάφας μέχρι τῆς $\Sigma_1 M_1$ ἔνθα ἡ ὁλική ποσότης τοῦ εἰς τήν σκάφην τοῦ εἰσελθόντος ὕδατος παρέμειναν ἐν αὐτῇ καί τό ἕτερον σχετικόν πρός τάς μέ τήν $\Sigma_1 M_1$ σκάφας ἔνθα τό ἐν αὐταῖς περιεχόμενον ὕδωρ ἤρχισε νά χύνηται.



Ἔστωσαν ἐν ὡρισμένη τινι στιγμῇ $h_1 h_2 \ldots h_i$ τά ὕψη ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ καταρρου τῶν κέντρων τῆς βαρύτητος τοῦ ὕδατος ἐν ταῖς σκάφαις ἐν αἷς ἤρξατο ἡ ἔκχυσις, q ἡ τομή τοῦ ἐν μιᾷ σκάφῃ ἐμπεριεχομένου ὕδατος καί z τό ἀπό στιγμῆς εἰς στιγμήν μεταβαλλόμενον ὕψος τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῆς τομῆς q ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ καταρρου.

Τό βάρος τοῦ ἐν τῇ σκάφῃ ἐμπεριεχομένου ὕδατος εἶναι $\Pi q l$ ἔνθα l ἐμφαίνει τό μῆκος τῆς σκάφης. ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν στιγμιαίαν κατάπτωσιν αὐτοῦ στοιχειώδης ἐργασία εἶναι

$$-\Pi q l \, dz$$

καί ἡ ὅλη ἐργασία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς περιστροφήν τοῦ τροχοῦ ἴσην μέ τό πλάτος μιᾶς σκάφης εἶναι

διά τό ἐν τῇ πρώτῃ σκάφῃ ἐμπεριεχόμενον ὕδωρ $\quad -\Pi l \int_{h_1}^{h_2} q_1 \, dz$

" δευτέρᾳ " $\quad -\Pi l \int_{h_2}^{h_3} q_2 \, dz$

— — — — — — — — — —

διά τό ἐν τῇ τελευταίᾳ $\quad -\Pi l \int_{h_i}^{0} q_i \, dz$

Καί ἡ ὅλη ἐργασία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τό ἐν ταῖς σκάφαις, ἐν αἷς ἤρξατο ἤδη ἡ ἔκχυσις, ἐμπεριεχόμενον ὕδωρ εἶναι

$$-\Pi l \left[\int_{h_1}^{h_2} q_1 \, dz + \int_{h_2}^{h_3} q_2 \, dz + \cdots + \int_{h_i}^{0} q_i \, dz \right] = +\Pi l \int_0^{h_i} \left[q_{h_1} + q_{h_2} + \cdots + q_{h_i} \right] dz$$

Ἄθροισμα τό ὁποῖον δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν διά τῆς κατά προσέγγισιν μεθόδου τοῦ Simpson ἤ τοῦ Poncelet.

Προσδιωρίσαμεν οὕτω τήν ἐργασίαν διά περιστροφήν τοῦ τροχοῦ ἴσην μέ τό πλάτος τῆς σκάφης τήν ὁποίαν πρέπει νῦν νά ἀναγάγωμεν εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου.

Ἔστωσαν πρός τοῦτο

R ἡ ἐξωτερική ἀκτίς τοῦ τροχοῦ

n ὁ ἀριθμός τῶν σκαφῶν τάς ὁποίας φέρει

ν ὁ ἀριθμός τῶν σκαφῶν αἵτινες διέρχονται δι' ὡρισμένου τινός σημείου ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου.

τό πλάτος μιᾶς σκάφης ἰσοῦται μέ $\frac{2\pi R}{n}$

τό ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα ὑπό σημ...

ου τινός τής έξωτερικής περιφερείας τού τροχού είναι W καί τούτο φέρει $\frac{W}{\frac{2\varpi R}{n}}$ σκάφας ὥστε $v = \frac{nW}{2\varpi R}$

κατά συνέπειαν ή έν τή μονάδι χρόνου έργασία τοῦ ὕδατος έν ταῖς σκάφαις ἔνθα ἤρξατο ἤδη ἡ ἔκχυσις

$$v\Pi \rho \int_0^{h_i} q\,dz = \frac{nW\Pi\rho}{2\varpi R}\int_0^{h_i} q\,dz$$

Ἡ έργασία τής βαρύτητος ἡ σχετική πρός τάς σκάφας ἐν αἷς οὐδεμία ἔκχυσις ἐγένετο είναι

$$\Pi Q\left[H-h_1\right]$$

Ἡ ὀφειλομένη τῇ βαρύτητι ὁλική ἐργασία είναι λοιπόν

$$\Pi Q\left[H-h_1\right] + n\frac{W\Pi\rho}{2\varpi R}\int_0^{h_1} q\,dz$$

Ἡ ὁλική ἐνέργεια τήν ὁποίαν μεταδίδει λοιπόν εἰς τόν τροχόν καταπίπτον τό ὕδωρ εἶναι

$$\mathcal{T} = \Pi Q\left[H-h_1\right] + \frac{nW\Pi\rho}{2\varpi R}\int_0^{h_1} q\,dz - \frac{\Pi Q}{2g}\left[V^2 + 2W^2 - 2VW\sigma\upsilon\nu(v,W)\right]$$

ἡ πρόσοδος τοῦ τροχοῦ τούτου είναι λοιπόν

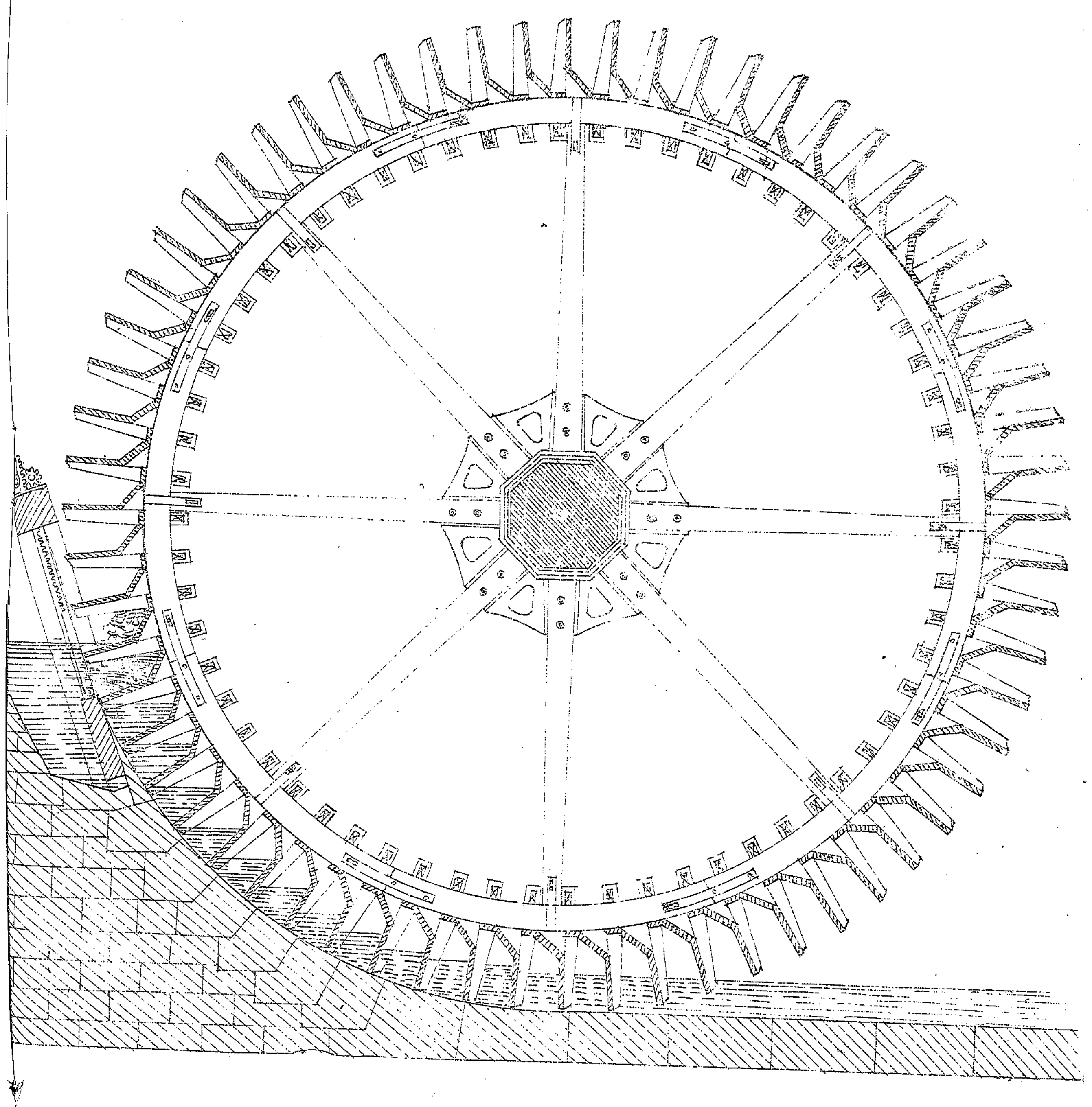
$$\mu = 1 - \frac{h_1 + V^2 + 2W^2 - 2vW\sigma\upsilon\nu(v,W) - \frac{nW\rho}{2\varpi R\,Q}\int_0^{h_1} q\,dz}{2gH}$$

ἤ ἐάν παραλείψωμεν τήν πρόωρον ἔκχυσιν ὑποθέτοντες $h_1=0$

$$\mu = 1 - \frac{v^2 + 2W^2 - 2vW\sigma\upsilon\nu(v,W)}{2gH}$$

Τήν μεγίστην τιμήν τής προσόδου ταύτης εὑρίσκομεν θέτοντες

$$W = \frac{V}{2}\sigma\upsilon\nu(v,W)$$



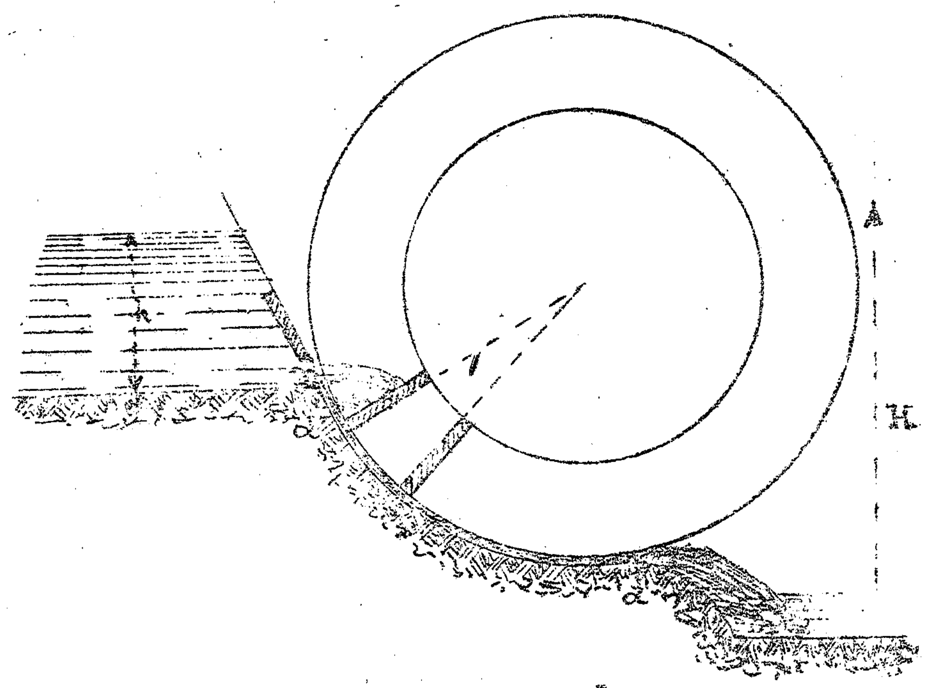
καί τότε

$$\mu = 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{2gH}\left[1 + \eta\mu^2(v,w)\right] = 1 - \frac{1}{2}\frac{h}{H}\left[1 + \eta\mu^2(v,w)\right] \text{ διότι } v^2 = 2gh$$

καί βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ αὐξήσωμεν τήν πρόσοδον τοῦ κινητῆρος πρέπει νά ἐλαττώσωμεν ὅσῳ τό δυνατόν τήν γωνίαν $\widehat{v,w}$ καί νά δώσωμεν εἰς τόν τροχόν ταχύτητα ἐπαληθεύουσαν τήν σχέσιν

$$W = \frac{v}{2}\,\sigma\upsilon\nu(v,w)$$

Τροχοί δε- Οἱ τροχοί οὗτοι σύγκεινται ἀπό κώπας ἐπιπέδους αἵτινες
χόμενοι τὸ συντρέχουσι πρός τό κέντρον τῆς περιστροφῆς.
ὕδωρ πλα- Ἡ ἐκ τῶν προύσεων τοῦ ὕδατος ἐπί τῶν κωπῶν προκύπτου-
γίως σα ἀπώλεια ἐνεργείας εἶναι καί ἐνταῦθα ὡς ἐν τῷ προηγου-
μένῳ τροχῷ.



$$\frac{\Pi Q}{2g}\left[v^2 + w^2 - 2vw\,\sigma\upsilon\nu(v,w)\right]$$

Ἐνταῦθα δέν ὑπάρχει ἀπώλεια ἐνεργείας ὡς ἐκ τῆς προώρου ἐκχύσεως, ἀλλά διά τοῦ μεταξύ τοῦ τροχοῦ καί τοῦ περιβάλλοντος αὐτόν τοίχου αα διαστήματος ἐκρέει ποσότης ὕδατος

$$\Pi\omega\sqrt{2gh}$$

ἔνθα ω ἐμφαίνει τήν τομήν τοῦ κενοῦ τούτου ἡ ἐκ τῆς ῥοῆς ταύτης προκύπτουσα ἀπώλεια ἐνεργείας εἶναι

$$\Pi\omega\sqrt{2gh}\,H$$

ὥστε ἡ παρεχομένη εἰς τόν κινητῆρα ἐνέργεια μετρεῖται διά

$$\mathcal{T}=\Pi QH-\frac{\Pi Q}{2g}\left[v^2+2w^2-2vw\,\sigma\upsilon\nu(v,w)\right]-\frac{\omega\sqrt{2gh}}{Q}$$

ἡ πρόσοδος εἶναι λοιπόν

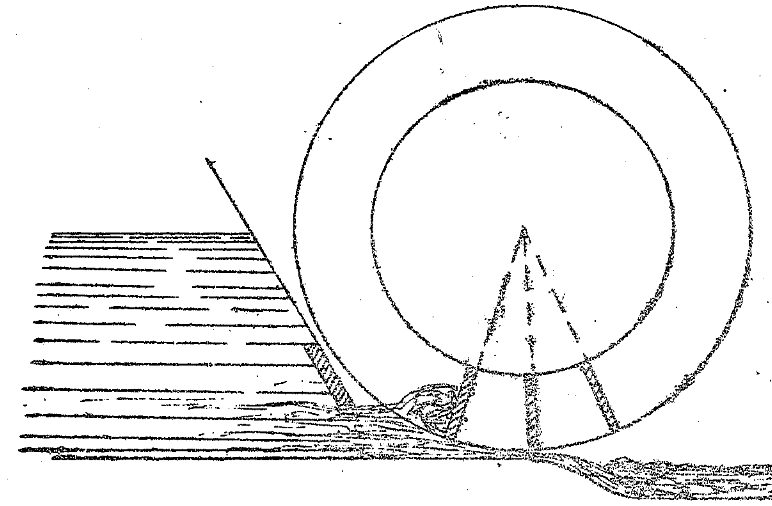
$$\mu=1-\frac{1}{2gH}\left[v^2+2W^2-2vW\,\sigma\upsilon\nu(v,W)\right]-\frac{\omega\sqrt{2gh}}{Q}$$

τήν μεγίστην πρόσοδον ἐπιτυγχάνομεν θέτοντες

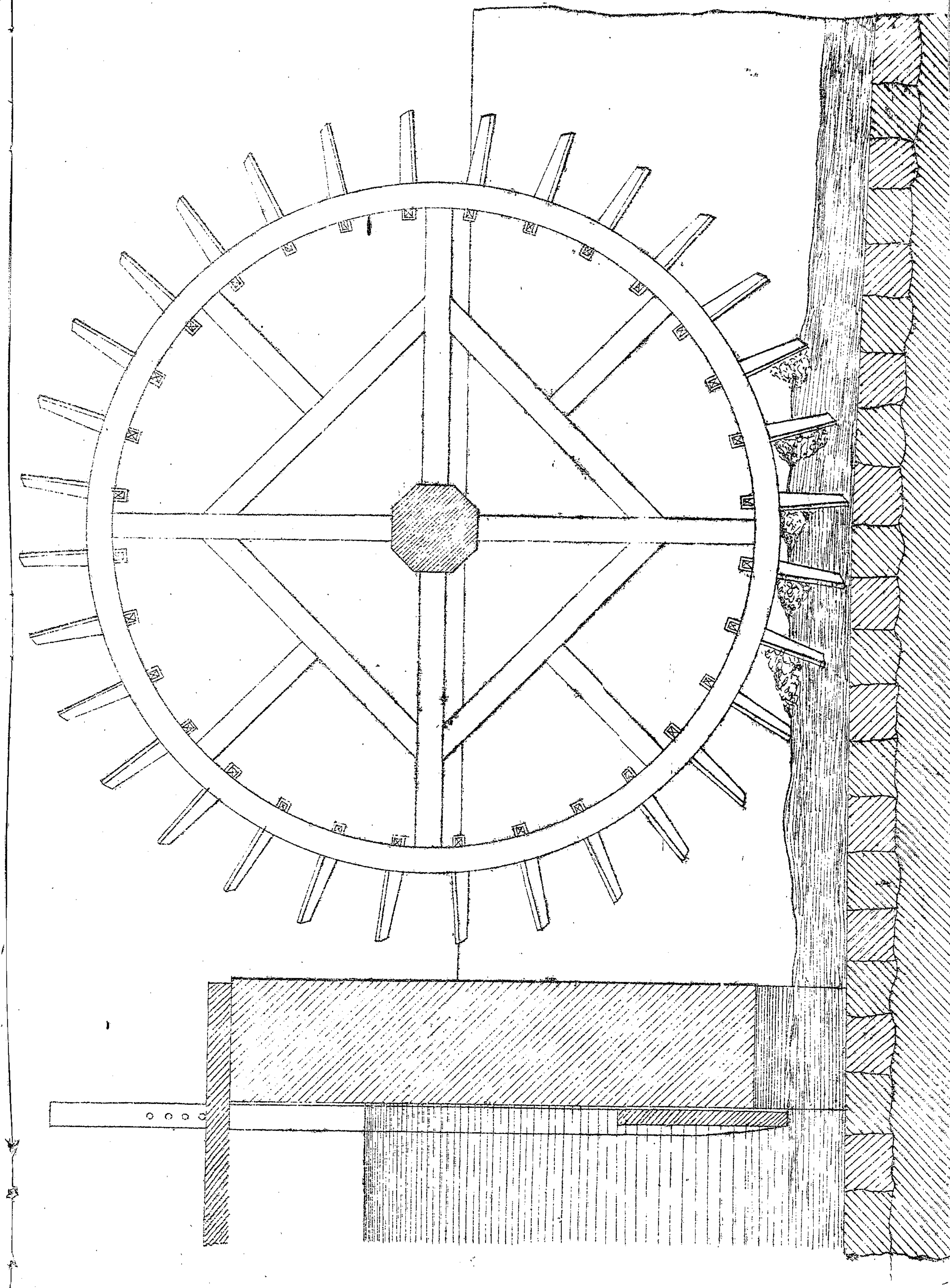
$$W=\frac{v}{2}\,\sigma\upsilon\nu(v,W)$$

καί εἶναι αὕτη

$$\mu=1-\frac{1}{2}\,\frac{h}{H}\left[1+\eta\mu^2(v,w)\right]-\frac{\omega\sqrt{2gH}}{Q}$$



Ἡ τιμή τοῦ μ μεταβάλλεται ἀπό 0,50 εἰς 0,70 διά Η ἐρ-



περιεχόμενον μεταξὺ $1,20^{\mu}$ καὶ 2,50.

Τροχὸς δεχό- Ἐὰν ὑποθέσωμεν $H=h$ καὶ $\widehat{v,w}=0$ ἔχομεν τὸν τροχὸν δ-
μένος τὸ ὕ- στις δέχεται τὸ ὕδωρ εἰς τὸ κάτω μέρος αὐτοῦ.
δωρ κάτωθεν ἡ μεγίστη πρόσοδος εἶναι

$$\mu=\frac{1}{2}-\frac{\omega\sqrt{2gH}}{Q}$$

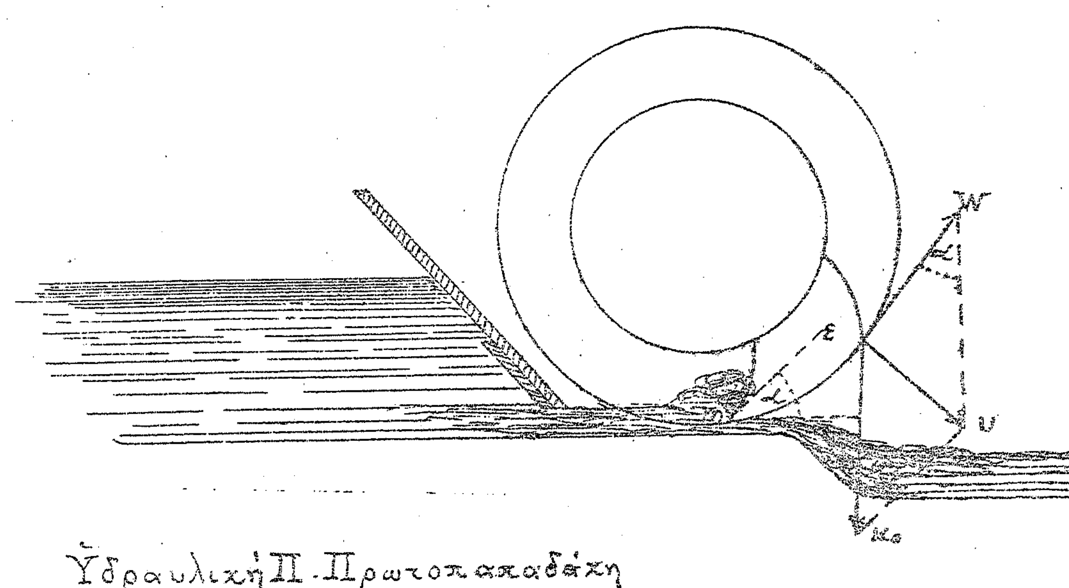
καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν

$$W=\frac{V}{2}$$

ἐν τῇ πράξει λαμβάνουσι $W=\frac{2V}{5}$ ἡ πρόσοδος εἶναι περίπου 33%
τοὺς τρόπους τούτους μεταχειριζόμεθα μόνον ὅταν ἡ πτῶσις
τοῦ ὕδατος δὲν ὑπερβαίνει τὰ $1,30^{\mu}$.

Τροχὸς μὲ κα- Ἡ γενικὴ διάταξις τοῦ τροχοῦ τούτου εἶναι οἵα καὶ ἡ τοῦ
μπύλας κώπας προηγουμένου, ἀλλ' αἱ κῶπαι αὐτοῦ εἶναι καμπύλαι καὶ se ra-
τοῦ Poncelet. ccordent πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν τοῦ τροχοῦ ὑπὸ
γωνίαν $\alpha=30°$.

Ἔστω V ἡ ἀπόλυτος ταχύτης τοῦ ὑγροῦ καθ' ἣν στιγμὴν ἀ-
φικνεῖται τοῦτο ἐπὶ τῆς κώπης παρὰ τὸ σημεῖον m καὶ W ἡ



ταχύτης τῶν σημείων τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ· ἡ σχετική ταχύτης τοῦ ὑγροῦ ὡς πρός τόν τροχόν εἶναι $V-W$· ἡ συνιστῶσα τῆς σχετικῆς ταύτης ταχύτητος παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ $m\varepsilon$ τῆς κάτης εἶναι

$$(V-W)\,\text{συν}\,\alpha$$

καί καθέτως αὐτῇ ἡ συνιστῶσα τῆς αὐτῆς ταχύτητος εἶναι

$$(V-W)\,\text{ημ}\,\alpha$$

ἡ τελευταία αὕτη καταστρέφεται ὡς ἐκ τῆς κρούσεως καί ἡ ἐκ ταύτης προκύπτουσα ἀπώλεια κινητικῆς ἐνεργείας διά τήν μονάδα τοῦ βάρους εἶναι

$$(1) \qquad \frac{(V-W)^2\,\text{ημ}^2\alpha}{2g}$$

τό ὕδωρ ὡς ἐκ τῆς παραλλήλως τῇ $m\varepsilon$ συνιστώσης

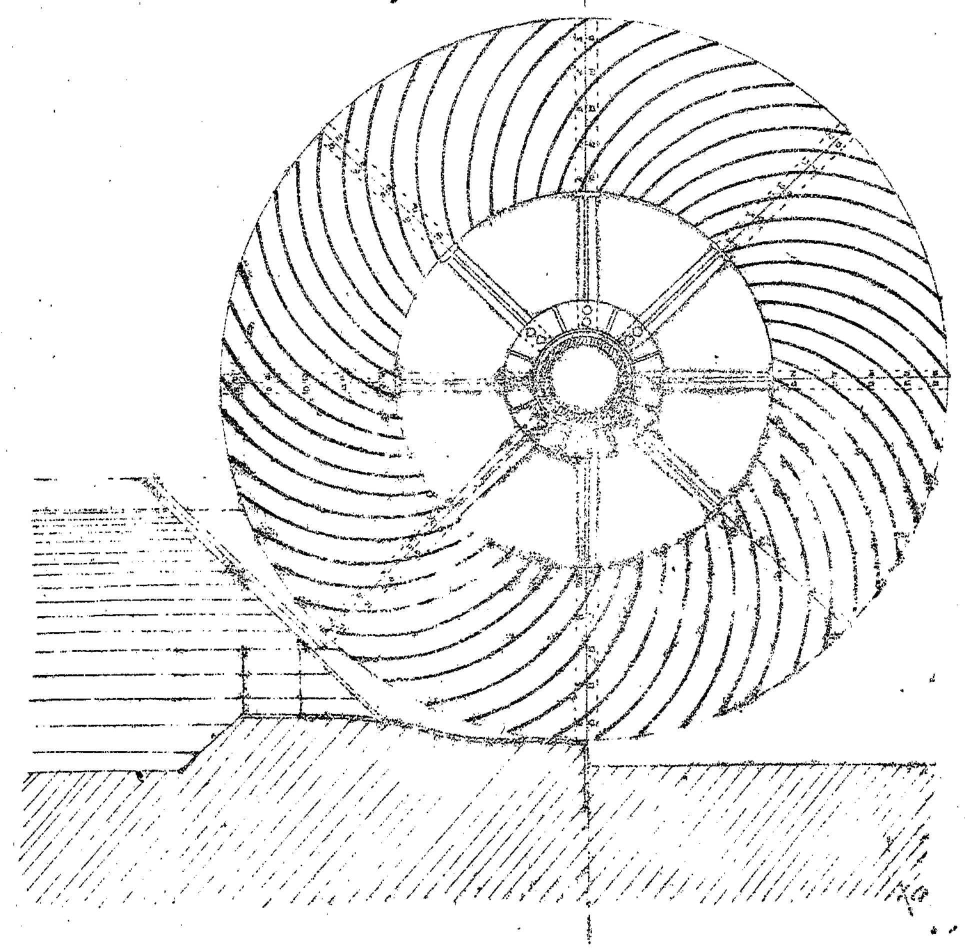
$$(V-W)\,\text{συν}\,\alpha$$

τῆς σχετικῆς ταχύτητος ἀνῆλθε μέχρις ὕψους τινός καί κατέπεσε πάλιν ἐξ αὐτοῦ. ἐξερχόμενον δέ παρά τό σημεῖον m κέκτηται σχετικήν ταχύτητα ἴσην καί ἀντίθετον τῇ $(V-W)\,\text{συν}\,\alpha = u_0$

ἡ ἀπόλυτος ταχύτης αὐτοῦ υ εἶναι λοιπόν ἡ συνισταμένη τῶν δύο ταχυτήτων u_0 καί W καί ἔχομεν

$$\upsilon^2 = u_0^2 + W^2 - 2u_0 W\,\text{συν}\,\alpha = (V-W)^2\,\text{συν}^2\alpha + W^2 - 2(V-W)W\,\text{συν}^2\alpha$$

ἡ ἀπόλυτος αὕτη ταχύτης υ, ἥν κέκτηται τό ρευστόν καθ' ἥν στιγμήν ἐγκαταλείπει τόν τροχόν δέν ἐχρησιμοποιήθη πρός



παραγωγήν ἐργασίας. Ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα ἀπώλεια ἐνεργείας διά τήν μονάδα τοῦ βάρους τοῦ ῥευστοῦ εἶναι

$$\frac{w^2}{2g}$$

ἤ

$$\frac{(V-W)^2 \sigma\upsilon\nu^2\alpha + W^2 - 2W(V-W)\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2g}$$

τήν ἐκ τῆς κρούσεως προκύψασαν ἀπώλειαν ἐνεργείας εὕρομεν ἴσην μέ

$$\frac{(V-W)^2 \eta\mu^2\alpha}{2g}$$

ὥστε ἡ ὁλική ἐνέργεια ἥτις δέν ἐχρησιμοποιήθη πρός παραγωγήν ἐργασίας εἶναι

$$\frac{(V-W)^2 \sigma\upsilon\nu^2\alpha + W^2 - 2W(V-W)\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2g} + \frac{(V-W)^2 \eta\mu^2\alpha}{2g} = \frac{(V-W)^2 + W^2 - 2W(V-W)\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2g}$$

τήν ἐλαχίστην τιμήν αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν θέτοντες

$$W = \frac{V}{2}$$

καί αὕτη εἶναι $\frac{1}{2}\frac{V^2}{2g}\eta\mu^2\alpha$

ἡ μεταδοθεῖσα λοιπόν εἰς τόν ὑδραυλικόν κινητήρα ἐνέργεια εἶναι

$$\mathcal{T} = P\left[H + \frac{V^2}{2g}\right] - \frac{P}{2}\frac{V^2}{2g}\eta\mu^2\alpha$$

καί κατά συνέπειαν ἡ πρόσοδος αὐτοῦ μετρεῖται διά

$$\mu = 1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{V^2}{2g}\eta\mu^2\alpha}{H + \frac{V^2}{2g}}$$

καί ἐπειδή $V^2 = 2gH$ ἡ πρόσοδος ἐκφράζεται διά τοῦ τύπου

$$\mu = 1 - \frac{1}{4} \eta\mu^2\alpha$$

ἐάν λάβωμεν $\alpha = 30°$ ἔχομεν $\mu = \frac{7}{8} = 0.875$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὡς ἀνωτέρω $W = \frac{V}{2}$ ἡ τιμή τῆς ἀπολύτου ταχύτητος υ τοῦ ῥευστοῦ καθ' ἥν στιγμήν ἐγκαταλείπει τοῦτο τόν τροχόν εἶναι

$$\upsilon = \frac{V}{2} \eta\mu\alpha$$

καί βλέπομεν ὅτι ἐάν $\alpha = 0$ ἔχομεν $\upsilon = 0$ ὥστε ἐάν ἡ κώπη ἐφήπτετο τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ παρά τό σημεῖον m ἡ ἔξοδος θά ἦτο ἀδύνατος.

ἔχομεν πρός τούτοις

$$\upsilon = \frac{V}{2} \eta\mu\alpha = W\eta\mu\alpha$$

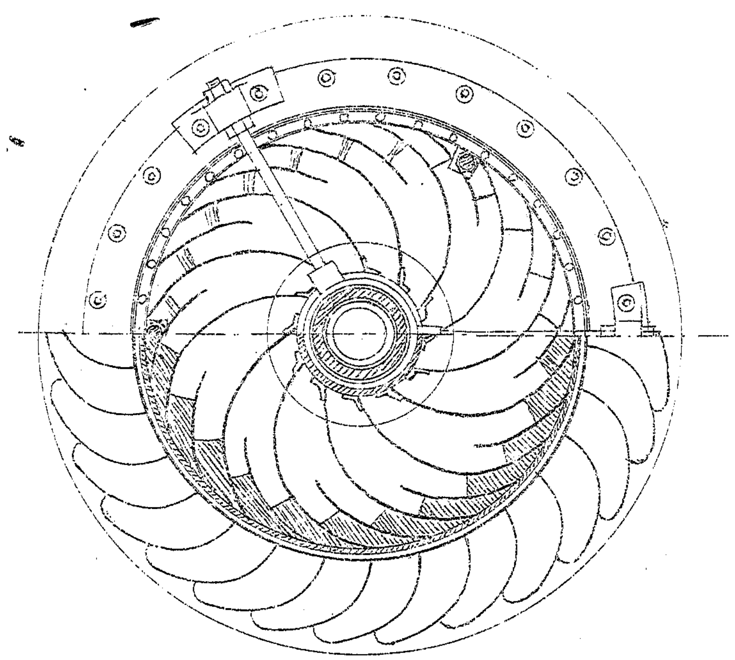
δηλαδή ἡ ταχύτης υ εἶναι κάθετος ἐπί τῆς κώπης

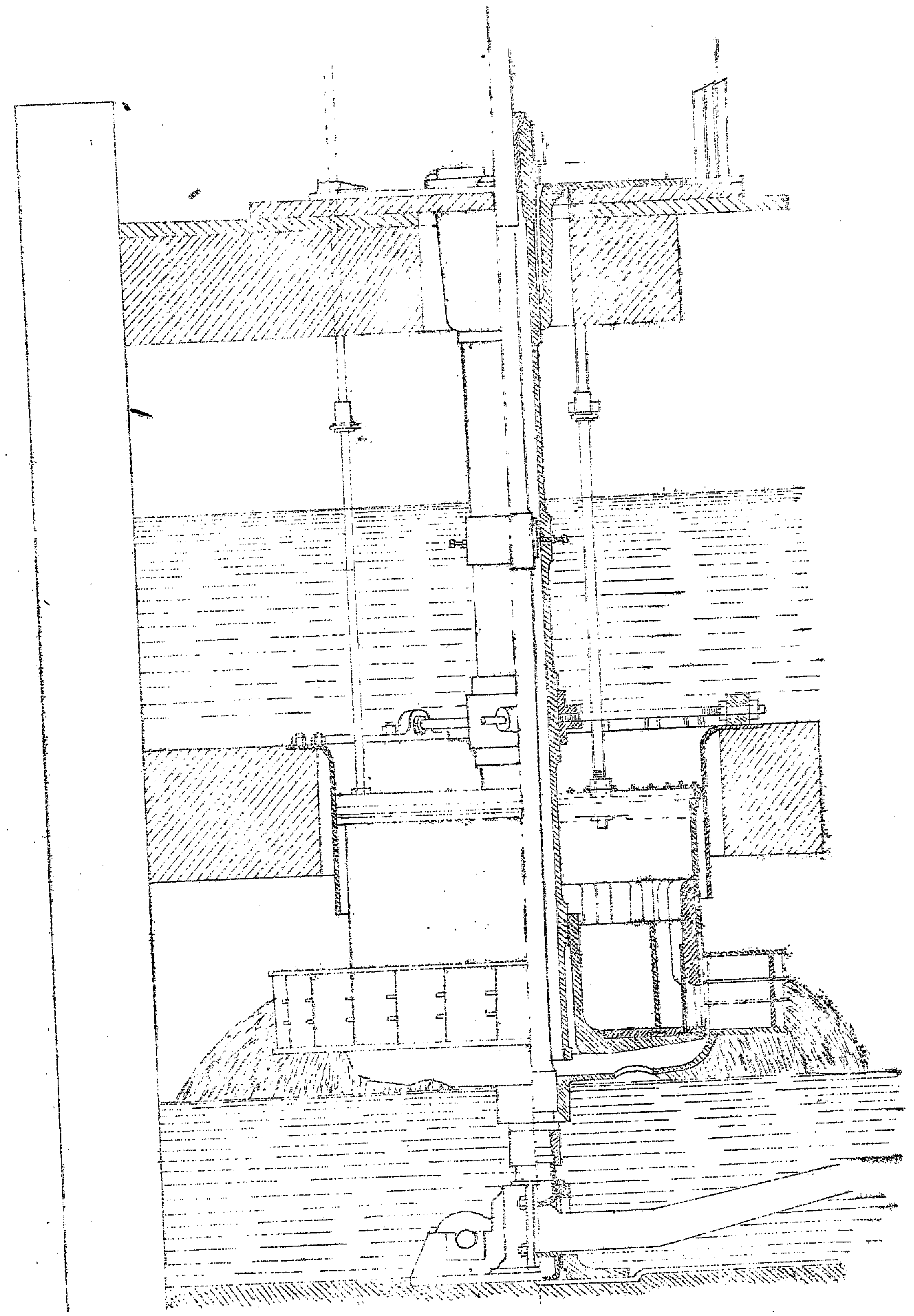
---

§ 2ον Ὑδροστρόβιλοι

Οἱ ὑδροστρόβιλοι εἶναι μηχαναί ἀνάλογοι τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν, ἀλλά περιστρέφονται περί κατακορύφους ἄξονας, ἐνῷ ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω οἱ ὑδραυλικοί τροχοί περιστρέφονται περί ὁριζοντίους ἄξονας.

Ἐν τῷ ὑδροστροβίλῳ διακρίνομεν δύο κυρίως μέρη τόν διανομέα καί τόν κυρίως δοχέα





Ὁ διανομεὺς συνίσταται ἀπό στεφανὴν κυκλικὴν φέρουσαν χώπας ἀκτινοειδεῖς αἵτινες σχηματίζουσιν αὐλοὺς διά τῶν ὁποίων ῥέει τό ὕδωρ εἰσερχόμενον εἰς τοὺς αὐλοὺς τοῦ δοχέως σχηματιζομένους καί τούτους ἀπό κώπας τάς ὁποίας φέρει ἑτέρα κυκλικὴ στεφάνη, ἥτις ἀποτελεῖ τόν δοχέα.

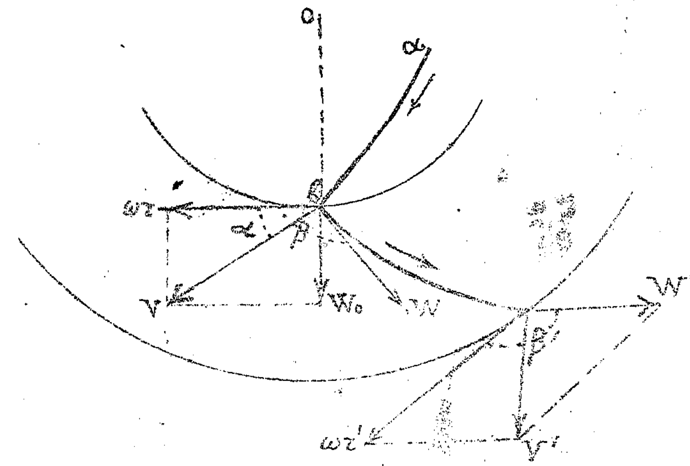
Ὁ διανομεὺς καί ὁ δοχεὺς εὑρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ (ὑδροστρόβιλος Fourneyron) ἤ ὁ διανομεὺς ἔχει τὴν αὐτὴν μέ τόν δοχέα διάμετρον καί κεῖται ὑπεράνω αὐτοῦ.

Ὑδροστρόβιλος Fourneyron.

Ἐάν σημάνωμεν h τό ὕψος τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῶν ὀφθαλμῶν τῶν διανεμόντων καί δεχομένων αὐλῶν τοῦ ὑδροστροβίλου, ἡ ταχύτης V τοῦ ὕδατος καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἐξέρχεται τοῦ διανομέως διά νά εἰσέλθῃ εἰς τόν δοχέα προσδιορίζεται διά τοῦ τύπου τοῦ Bernoulli

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_a - p}{\varpi} \tag{1}$$

ἔνθα p_a ἐμφαίνει τὴν ἐπί τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ῥευστοῦ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καί p τὴν παρά τῷ κέντρῳ τῆς βαρύτητος τῶν αὐλῶν πίεσιν.



Ἐάν παραστήσωμεν διά ω τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τοῦ ὑδροστροβίλου ἡ ταχύτης ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ διανομέως εἶναι ωτ, ἔνθα τ παριστᾷ τήν ἀπό τοῦ κέντρου O τοῦ ὑδροστροβίλου ἀπόστασιν τοῦ σημείου β.

ἡ σχετική ταχύτης W_0 τοῦ ὕδατος ὡς πρός τόν δοχέα εἶναι ἡ γεωμετρική διαφορά $\bar{v}-\bar{\omega\tau}$ καί παρίσταται διά τοῦ τμήματος βW_0

ἔχομεν δέ ἐν τῷ τριγώνῳ β. ν. ωτ.

$$(2)\qquad W_0^2=V^2+\omega^2\tau^2-2V\omega\tau\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha$$

Ἔστω W ἡ σχετική ταχύτης τοῦ ὕδατος ἐν τῷ αὐλῷ τοῦ δοχέως, ἥν παριστῶμεν διά τοῦ τμήματος βW. προβαλλομένη ἐπ' αὐτῆς ἡ ταχύτης W_0 δίδει

$$V\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)-\omega\tau\,\sigma\upsilon\nu\beta$$

ἡ αὐτή ταχύτης W_0 προβαλλομένη ἐπί ἄξονος καθέτου τῇ ταχύτητι βW δίδει

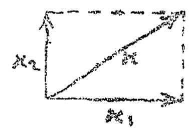
$$V\eta\mu(\beta-\alpha)-\omega\tau\,\eta\mu\beta$$

ἤδη ἡ σχετική ταχύτης τοῦ ὕδατος ἐν τῷ αὐλῷ τοῦ δοχέως εἶναι ἁπλῶς W. ἀπώλεσε λοιπόν τοῦτο ταχύτητα

$$u_1=\left[V\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)-\omega\tau\,\sigma\upsilon\nu\beta\right]-W$$

παραλλήλως τῇ εὐθείᾳ βW καί

$$u_2=V\eta\mu(\beta-\alpha)-\omega\tau\,\eta\mu\beta$$



καθέτως τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ βW

τό τετράγωνον τῆς ὅλης ἀπολεσθείσης ταχύτητος u εἶναι λοιπόν

$$(3)\qquad u^2=\left[V\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)-\omega\tau\,\sigma\upsilon\nu\beta-W\right]^2+\left[V\eta\mu(\beta-\alpha)-\omega\tau\,\eta\mu\beta\right]^2$$

$$=V^2+W^2+\omega^2\tau^2-2V\omega\tau\,\sigma\upsilon\nu\alpha-2VW\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)+2\omega\tau W\sigma\upsilon\nu\beta$$

πρέπει νῦν νά εὕρωμεν τήν σχετικήν ταχύτητα W' ἥν κέκτηται τό ὕδωρ ἐγκαταλεῖπον τόν δοχέα αὕτη μᾶς δίδεται ὑπό τοῦ τύπου τοῦ Bernouilli ἐφαρμοζομένου ἐν τῇ περιπτώσει τῶν σχετικῶν κινήσεων [ ]

$$(4)\qquad -\frac{W'^2-W_0^2}{2g}=\frac{p-p_a}{\varpi}-h-\frac{u^2}{2g}+\frac{(\tau'^2-\tau^2)}{2g}\omega^2$$

Ἔνθα h' ἐμφαίνει τό ὕψος τῶν κέντρων τῆς βαρύτητος τῶν ὀφθαλμῶν τῶν αὐλῶν ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ καταρρου

τ καί τ' τήν ἐσωτερικήν καί ἐξωτερικήν ἀκτῖνα τοῦ τροχοῦ τοῦ δοχέως. προσθέτοντες τάς σχέσεις (1) καί (4) ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (2) καί (3) καί παρατηροῦντες ὅτι

$$h-h'=H\ (\text{ὕψος τῆς καταπτώσεως τοῦ ὕδατος})$$

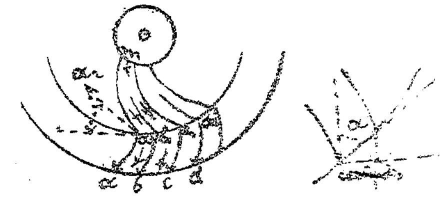
εὑρίσκομεν

$$(5)\qquad W'^2+W^2+V^2-2VW\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)+2\omega\tau W\sigma\upsilon\nu\beta=2gH+(\tau'^2-\tau^2)\omega^2$$

ἄς ὀνομάσωμεν ἤδη ε τήν κεντρικήν γωνίαν τοῦ τόξου $\alpha_1\beta_1$ τήν κεντρικήν γωνίαν τοῦ τόξου αβ λαμβάνομεν ἐπίσης ἴσην μέ ε. Τότε τό μῆκος τοῦ τόξου $\alpha_1\beta_1$ εἶνε τε· τό μῆκος τοῦ τόξου αβ εἶνε τ'ε.

Τό τόξον $\alpha_1\beta_1$ προβαλλόμενον ἐπί μιᾶς καθέτου τῇ ἐφαπτομένῃ $\alpha_1\alpha_2$ τῆς κώπης $\alpha_1 m$ δίδει

$\alpha_1\beta_1\eta\mu\alpha$ ἤ $\tau\varepsilon\eta\mu\alpha$



προβαλλόμενον ἐπί μιᾶς καθέτου τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς κώπης τοῦ δοχέως (ἴδε προηγούμενον σχῆμα)

$$\alpha_1 \beta_1 \eta\mu\beta \quad \text{ἢ} \quad \tau\varepsilon\eta\mu\beta$$

Τὸ τόξον $\alpha\beta$ προβαλλόμενον ἐπίσης ἐπὶ μιᾶς καθέτου τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς κώπης τοῦ δοχέως ἐν τῇ ἐξωτερικῇ περιφερείᾳ δίδει (ἴδε προηγούμ. σχῆμα).

$$\alpha\beta\eta\mu\beta' \quad \text{ἢ} \quad \tau'\varepsilon\eta\mu\beta'$$

καὶ ἐὰν ὀνομάσωμεν τὸ κοινὸν ὕψος τῶν αὐλῶν τοῦ διανομέως καὶ τοῦ δοχέως καὶ Q τὸν ἔκρουν καὶ n τὸν ἀριθμὸν τῶν αὐλῶν οἵτινες διέρχονται ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου δι' ὡρισμένου σημείου ἔχομεν προφανῶς

$$Q = n.V\eta.\varepsilon\tau\eta\mu\alpha = n.W.\eta.\varepsilon\tau\eta\mu\beta = n.W.\eta.\varepsilon\tau'\eta\mu\beta'$$

ὅθεν

$$V = W'\frac{\tau'}{\tau}\cdot\frac{\eta\mu\beta'}{\eta\mu\alpha} \qquad W = W'\frac{\tau'}{\tau}\cdot\frac{\eta\mu\beta'}{\eta\mu\beta}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (5) ἔχομεν

$$W'^2\left[1+\frac{\tau'^2}{\tau^2}\eta\mu^2\beta'\left(\frac{1}{\eta\mu^2\beta}+\frac{1}{\eta\mu^2\alpha}\right)-2\frac{\tau'^2}{\tau^2}\cdot\frac{\eta\mu^2\beta\,\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)}{\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta}\right]+2W'\tau'\omega\,\eta\mu\beta'\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi\beta = 2gH+(\tau'^2-\tau^2)\omega^2$$

ἐξίσωσις ἥτις προσδιορίζει W καὶ κατὰ συνέπειαν Q.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\beta = 0$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi\beta = 0$ καὶ βλέπομεν ὅτι Q αὐξάνει ἀναλόγως τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τοῦ ὑδροστροβίλου.

ἡ ἀπολεσθεῖσα ἐνέργεια εἶναι $\frac{u^2+V'^2}{2g}$ ἔνθα V τὴν ἀπόλυτον ταχύτητα τοῦ ὕδατος, καθ' ἣν στιγμὴν ἐγκαταλείπει τοῦτο τὸν ὑδροστρόβιλον ἔχομεν δὲ προφανῶς.

$$V'^2 = W'^2 + \omega^2\tau'^2 - 2\omega\tau'W'\sigma\upsilon\nu\beta'$$

ἡ πρόσοδος τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι

$$\mu = 1 - \frac{u^2+V'^2}{2gH}$$

καὶ διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{d\mu}{d\omega} = 0$$

εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὴν μεγίστην πρόσοδον ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ω.

Ἐν τῇ πράξει λαμβάνουσι

$$\frac{\tau}{\tau'} = \begin{cases} 0.75 \\ 0.70 \\ 0.65 \end{cases} \quad \text{ἐάν} \quad \begin{cases} H \leq 2^m \\ 2^m < H \leq 6^m \\ H > 6^m \end{cases}$$

α ἀπὸ $25°$ μέχρι $35°$ $\qquad \beta = 90°$

β' ἀπὸ $20°$ μέχρι $25°$

Ἡ πρόσοδος μ φθάνει μέχρι τοῦ 0.80.

Ὑδροστρόβιλος Fontaine. Ἐνταῦθα ὁ διανομεὺς ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸν δοχέα διάμετρον καὶ κεῖται ὑπεράνω αὐτοῦ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐφαρμώσωμεν τοὺς τύπους τοῦ προηγουμένου παραδείγματος ἐὰν ὑποθέσωμεν $\tau = \tau'$. ὁ ἔκρους Q εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος ω.

Ὑδροστρόβιλος Poncelet. Ὁ ὑδροστρόβιλος οὗτος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τροχὸν τοῦ Poncelet [ ] τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐνταῦθα ἀντὶ νὰ εἶναι ὁριζόντιος αἱ κῶπαι ἐφάπτονται τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ.

τὸ ὕδωρ ἀφικνεῖται δι' ὀρθογωνίου ἀγωγοῦ καὶ ὅλο εἰ

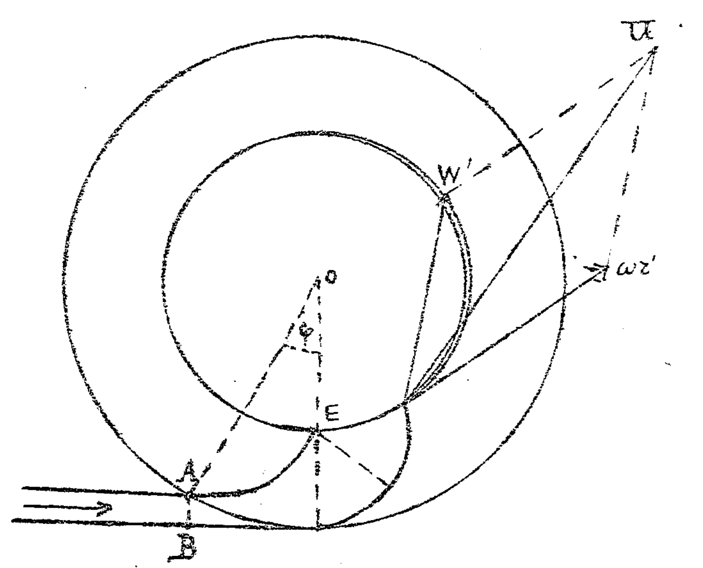
Ὑδραυλικὴ Π. Πρωτοπαπαδάκη

ὕψος τοῦ αὐλοῦ

Ἐάν παραστή σωμεν διά v τήν ταχύτητα ἐν τῇ τομῇ AB τοῦ ἀγωγοῦ p τήν πίεσιν ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ

H τό ὕψος τῆς κατα πτώσεως τοῦ ὕδατος

p_a τήν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν



Τό θεώρημα τοῦ Bernoulli δίδει

$$\frac{v^2}{2g} = H + \frac{p_a - p}{\varpi} \qquad (1)$$

ἡ σχετική ταχύτης τοῦ ὕδατος ὡς πρός τόν τροχόν κατά τήν εἴσοδον αὐτοῦ εἰς τόν αὐλόν εἶναι $V - \omega r$ ἔνθα $r = OA$ καί ἐάν παραστήσωμεν διά W' τήν σχετικήν ταχύτητα τοῦ ὕδατος κατά τήν ἔξοδον αὐτοῦ ἐκ τοῦ αὐλοῦ καί ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Bernoulli ἐν τῇ περιπτώσει τῶν σχετικῶν κινήσεων [ ] ἔχομεν

$$\frac{W'^2}{2g} - \frac{(V-\omega r)}{2g} = \frac{p - p_a}{\varpi} - \omega^2 \frac{(r^2 - r'^2}{2g} \qquad (2)$$

ἤ

$$\frac{W'^2 - 2\omega r V}{2g} = H + \frac{\omega^2 r'^2}{2g} \qquad (3)$$

διότι ἐνταῦθα οὐδεμία κρούσις ὑπάρχει ἐπιφέρουσα ἀπώλειαν ταχύτητος.

r' εἶναι ἡ ἀκτίς OE.

καί ἐάν παραστήσωμεν διά

ε τό πλάτος AB τοῦ ἀγωγοῦ τοῦ ὕδατος

β τήν γωνίαν τῆς ταχύτητος W' μέ τήν ἐσωτερικήν στεφάνην

ἔχομεν ὑποθέτοντες τήν γωνίαν φ ἀρκούντως μικράν

$$V\varepsilon = r'\varphi W' \eta\mu\beta$$

ἀλλά

$$\varepsilon = r(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = r\frac{\varphi^2}{2} \qquad \text{ὅθεν} \qquad \varphi = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{r}}$$

καί

$$V = r'\sqrt{\frac{2\varepsilon}{r\varepsilon}}\, W' \eta\mu\beta$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (3) εὑρίσκομεν

$$W'^2 - 2\omega r'\sqrt{\frac{2r}{\varepsilon}}\, W' \eta\mu\beta = 2gH + \omega^2 r'^2 \qquad (4)$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό ὕδωρ ἐξερχόμενον τοῦ ὑδροστροβίλου κέκτηται ἀπόλυτον ταχύτητα u ἐμπεριέχει ἀκόμη κινητικήν ἐνέργειαν

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{W'^2 + \omega^2 r'^2 + 2\omega r' W' \sigma\upsilon\nu\beta}{2g} \qquad (5)$$

ἥτις δέν μετεδόθη εἰς τόν ὑδροστρόβιλον τήν τιμήν τῆς ἀπολεσθείσης ταύτης ἐνεργείας εὑρίσκομεν ἐάν ἀντικαταστήσωμεν W' διά τῆς τιμῆς του τήν ὁποίαν πορίζόμεθα ἐκ τῆς σχέσεως (4). Ἐπειδή δέ δέν ἐπῆλθεν ἀπώλεια ἐκ κρούσεως $\frac{u^2}{2g}$ παριστᾷ τήν ὅλην ἀπολεσθεῖσαν ἐνέργειαν.

Ἡ πρόσοδος ἐνταῦθα εἶναι

$$\mu = 1 - \frac{u^2}{2gH}$$

θά εὕρωμεν δέ τήν μᾶλλον προσοδοφόρον περιστροφικήν ταχύτητα τοῦ ὑδροστροβίλου διά τῆς συνθήκης

u^2 ἐλάχιστον δηλαδή $\frac{du}{dw}=0$

Ἀνακε- Ἀνακεφαλαιοῦντες βλέπομεν ὅτι τάς ὑδραυλικάς μηχανάς,
φαλαί τάς ὁποίας ἐξητάσαμεν δυνάμεθα νά διακρίνωμεν εἰς δύο κυρί-
ωσις ως τύπους.

Τάς περιστρεφομένας περί ὁριζοντίους ἄξονας τάς ὁποίας ὠνομάσαμεν ὑδραυλικούς τροχούς καί τάς περιστρεφομένας περί κατακορύφους ἄξονας τάς ὁποίας ὠνομάσαμεν ὑδροστροβίλους.

Ἐν τοῖς ὑδραυλικοῖς τροχοῖς διεκρίναμεν τούς δεχομένους τό ὕδωρ ἐκ τῶν ἄνω ἐν αὐτοῖς χρησιμοποιοῦμεν τήν ἐν τῷ ὕδατι λαμβάνουσαν ἐνέργειαν διά τῆς καταπτώσεως αὐτοῦ, τούς δεχομένους τό ὕδωρ παραπλεύρως, ἐν οἷς χρησιμοποιοῦμεν ἐν μέρει τήν λανθάνουσαν καί ἐν μέρει την κινητικήν ἐνέργειαν τοῦ ὕδατος, καί τούς δεχομένους τό ὕδωρ κάτωθεν, ἐν οἷς μόνον κινητικήν ἐνέργειαν χρησιμοποιοῦμεν διά τῆς κρούσεως τοῦ ὕδατος ἐπί τῆς κώπης τοῦ τροχοῦ.

Ἐκ τῆς κρούσεως ταύτης προκύπτει ἀπώλεια ἐνεργείας τήν ὁποίαν ἀποφεύγομεν κατά μέγα μέρος διά τοῦ τροχοῦ τοῦ Poncelet.

Ἀναλόγως τῶν περιστάσεων καί τοῦ ὕψους Η τῆς καταπτώσεως τό ὁποῖον διαθέτομεν θά μεταχειρισθῶμεν τον μέν ἤ τόν δέ τῶν τροχῶν τούτων.

Ἐν τοῖς ὑδροστροβίλοις διεκρίναμεν τρία εἴδη εἰς τούς πρώτους ὁ διανομεύς καί ὁ δοχεύς εὑρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ καί τό ὕδωρ ρέει ὁριζόντιον ἐκ τοῦ κέντρου πρός τήν περιφέρειαν. Εἰς τους δευτέρους ὁ διανομεύς ἔχει τήν αὐτήν διάμετρον μέ τόν δοχέα καί κεῖται ὑπεράνω αὐτοῦ. Εἰς τόν τρίτον τό ὕδωρ ρέει ἐκ τῆς περιφερείας πρός τό κέντρον

Παράρτημα Ὑδραυλικῆς (Σελ. 21)

Διάφοροι μορφαί τῆς ἐνεργείας ἥν κέκτηται μάζα ὕδατος κινουμένη ὑπό τήν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος

Ὑποθέσωμεν ρεῦμα ὕδατος παρέχον Q κυβικά μέτρα ὕδατος κατά δευτερόλεπτον δυνάμενον νά καταπέσῃ ἀπό ὕψους Η.
δυνάμενον κατά συνέπειαν νά μᾶς παράσχῃ ἐργασίαν ὡς ἐκ τοῦ βάρους του Π Q Η χιλιογραμμέτρων κατά δευτερόλεπτον.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ποσότης αὕτη τοῦ ὕδατος κατέπεσεν ἤδη ἀπό ὕψους Η-Ζ ἐλευθέρως χωρίς νά ὑπερνικήσῃ οὐδεμίαν ἀντίστασιν καί δέν ἔχει πλέον νά διανύσῃ παρά Ζ μέτρα.

Ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια τήν ὁποίαν ἤδη κέκτηται εἶναι

$$\Pi Q Z$$

ἀλλ' ἔχει ἤδη ταχύτητα

$$V=\sqrt{2g(H-Z)}$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀρχική αὐτοῦ ταχύτης εἰς τό ὕψος Η ἦτο μηδέν καί κατά συνέπειαν κέκτηται κινητικήν ἐνέργειαν ἴσην μέ

$$m\frac{v^2}{2}=\frac{\Pi Q}{2g}v^2=\Pi Q\left[H-Z\right.$$

ἥτις προστιθεμένη εἰς τήν λανθάνουσαν ἐνέργειαν $\Pi Q Z$ ἥν ἤδη κέκτηται ἡ πίπτουσα μάζα ὕδατος μᾶς δίδει

$$\Pi Q\left[H-Z+Z\right]=\Pi Q H$$

τήν ὁλικήν δηλαδή ἐνέργειαν ἥν κέκτηται ἡ μάζα εἰς τό ὕψος H.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τό ὕδωρ ἀντί νά καταπέση ἐλευθέρως καταπίπτει ἐντός σωλῆνος ἔχοντος ὕψος H καί ἀρκετον πλάτος ὥστε νά παραλείψωμεν τήν ταχύτητα καί ὅτι τό ὕδωρ ἐν τῇ πτώσει του οὐδεμίαν ἀντίστασιν ἔχει νά ὑπερνικήση ὅταν τά ΠQ χιλιόγραμμα ὕδατος κατέπεσαν ἀπό ὕψος $H-Z$ κέκτηνται ἀκόμη ὡς ἐκ τοῦ βάρους των λανθάνουσαν ἐνέργειαν ἴσην μέ

$\Pi Q Z$ χιλιογραμμόμετρα

οὐδεμίαν δέ κινητικήν ἐνέργειαν ἀφ' οὗ δέν ἔχουν καί ταχύτητα ἀλλά τό ὑπεράνω αὐτῶν εὑρισκόμενον ῥευστόν ἐξασκεῖ πίεσιν

$$p=\Pi(H-Z)$$

κατά τετραγωνικόν μέτρον γνωρίζομεν δέ ὅτι διά τῆς πιέσεως ταύτης τό ὕδωρ δύναται νά παραγάγη ἐργασίαν ἴσην μέ

$$pQ=\Pi Q(H-Z)\text{ χιλιογραμμόμετρα}$$

ὥστε ἡ ὁλική ἐνέργεια τήν ὁποίαν ἤδη κέκτηται εἶναι

$$\Pi Q(H-Z)+\Pi Q Z=\Pi Q H$$

ἴση δηλ. ἐκείνης ἥν ἐκέκτητο εὑρισκόμενον εἰς τό ὕψος H.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ εἰς ὕψος H ἄνευ ταχύτητος εὑρισκομένη ῥευστή μάζα ἥτις κέκτηται λανθάνουσαν ἐνέργειαν $\Pi Q H$ χιλιογραμμόμετρα. ἀπό ὕψους $H-Z$ (χωρίς νά ὑπερνικήση οὐδεμίαν ἀντίστασιν) ἀποκτῶσα ταχύτητα v καί εὑρισκομένη ὑπό πίεσιν p κατά τά ἀνωτέρω ἤ ἀπό ὕψους Z καταπεσοῦσα ῥευστή μάζα κέκτηται ἤδη

ὡς ἐκ τοῦ βάρους της ΠQ λανθάνουσαν ἐνέργειαν ἴσην μέ $\Pi Q Z$ χιλιογραμμομέτρων

ὡς ἐκ τῆς πιέσεως p ἥν ὑφίσταται λανθάνουσαν ἐνέργειαν ἴσην μέ $pQ=$ χιλιογραμμομέτρων

ὡς ἐκ τῆς ταχύτητός της v κινητικήν ἐνέργειαν ἴσην μέ $\frac{\Pi Q}{2g}v^2$ χιλιογραμμομέτρων.

Κατά συνέπειαν ἡ ὅλη ἐνέργεια τῆς μάζης εἶναι

$$\Pi Q(H-Z)+\frac{\Pi Q}{2g}v^2$$

ἀφοῦ δέ οὐδεμίαν ἐνίκησεν ἀντίστασιν ἐν τῇ καταπτώσει της ἡ ῥευστή μάζα, ἡ ὅλη ἐνέργεια τήν ὁποίαν κέκτηται νῦν εὑρισκομένη εἰς ὕψος $(H-Z)$ ἰσοῦται τῇ ἐνεργείᾳ $\Pi Q H$ ἥν ἐκέκτητο εὑρισκομένη εἰς ὕψος H. ὅθεν

$$\Pi Q Z+pQ+\frac{\Pi Q}{2g}v^2=\Pi Q H$$

ἤ διαιροῦντες διά ΠQ

$$\frac{v^2}{2g}+Z+\frac{p}{\Pi}=H$$

Ὑδραυλικῆς Παράρτημα II

(Προσθήκη εἰς τήν σημείωσιν § 16 Σελ 20)

Ἔστωσαν τά ὑλικά συστήματα $[m], [m'], [m''] \ldots$ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τά κέντρα τῶν μαζῶν ξ, η, ζ. ξ', η', ζ', $\xi'', \eta'', \zeta'' \ldots$ λέγω ὅτι τό κέντρον μάζης τοῦ ἐκ τῶν μερικῶν συστημάτων $[m], [m]', [m]'' \ldots$ προκύπτοντος ὅλου ὑλικοῦ συστήματος $\Sigma[m]$ προσδιορίζεται διά τῶν σχέσεων

$$\Xi = \frac{\xi[m]+\xi'[m]'+\xi''[m]''+\ldots}{\Sigma[m]}$$

$$H = \frac{\eta[m]+\eta'[m]'+\eta''[m]''+\ldots}{\Sigma[m]}$$

$$Z = \frac{\zeta[m]+\zeta'[m]'+\zeta''[m]''+\ldots}{\Sigma[m]}$$

τῷ ὄντι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κέντρου τῆς μάζης πορίζόμεθα

$$(1) \qquad \xi[m] = \Sigma m x \qquad \xi'[m]' = \Sigma m' x' \qquad \xi''[m]'' = \Sigma m'' x'' + \ldots$$

καί

$$(2) \qquad \Xi\,\Sigma[m] = \Sigma m x + \Sigma m' x' + \Sigma m'' x'' + \ldots$$

ἀλλ' ἐάν προσθέσωμεν κατά μέλη τάς σχέσεις (1) εὑρίσκομεν

$$\xi[m]+\xi'[m]'+\xi''[m]''+\ldots = \Sigma m x + \Sigma m' x' + \Sigma m'' x'' + \ldots$$

καί ἐκ τῆς σχέσεως (2)

$$\Xi\,\Sigma[m] = \xi[m]+\xi'[m]'+\xi''[m]''+\ldots$$

ο. ε. δ.

ὑποθέσωμεν τήν βαρύτητα ἐνεργοῦσαν ἐπί τοῦ ὑλικοῦ συστήματος $[m]$ καί ἔστωσαν $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots$ αἱ ἀποστάσεις τῶν μορίων m ἀπό τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου xoy κατά τόν χρόνον t καί $Z'_0, Z'_1, Z'_2 \ldots$ αἱ ἀποστάσεις τῶν αὐτῶν μορίων ἀπό τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κατά τόν χρόνον t'

Ἡ ὑπό τῆς βαρύτητος ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία κατά τό χρονικόν διάστημα $t'-t$ εἶναι

$$m g(Z'_0-Z_0)+m_1 g(Z'_1-Z_1)+m_2 g(Z'_2-Z_2)+\ldots$$

$$= g[\Sigma m Z' - \Sigma m Z] = g[\zeta'\Sigma m - \zeta\Sigma m] = [\zeta'-\zeta]\, g\Sigma m$$

καί ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς ὅλης μάζης τοῦ σώματος ἐπί τήν προβολήν τῆς μετατοπίσεως τοῦ κέντρου τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπί τῆς κατακορύφου.

Ἐάν τό ὑλικόν σύστημα $[m]$ κατά τόν χρόνον t δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ δύο μερῶν μ_1 καί μ_2 καί κατά τόν χρόνον t' ἐκ δύο ἄλλων μερῶν μ'_1 καί μ'_2 ἰσοδυνάμων μέ τά μ_1 καί μ_2 ἀλλά τοιούτων ὥστε τό κέντρον τῆς μάζης τοῦ συστήματος μ'_2 νά συμπίπτῃ μέ τό κέντρον τῆς μάζης τοῦ συστήματος μ_2 λέγω ὅτι ἡ ὑπό τῆς βαρύτητος ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία εἶναι ἡ αὐτή μέ ἐκείνην τήν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἐπί τῆς μάζης μ_1 κατά τήν μετάβασιν αὐτῆς ἀπό τῆς θέσεως μ_1 εἰς τήν θέσιν μ'_1.

Ἔστωσαν τῷ ὄντι $\zeta_1, \zeta_2, \zeta'_1, \zeta'_2 \cdot Z_1, Z'_1$ αἱ ἀπό ὁριζοντίου τινος ἐπιπέδου ἀποστάσεις τῶν κέντρων τῆς μάζης τῶν συστημάτων μ_1 μ_2 $[m]$ κατά τούς χρόνους t καί t' ἐκ τῶν προηγουμένων

ἔχομεν

$$Z_1 \Sigma m = \mu_1 \zeta_1 + \mu_2 \zeta_2 \qquad Z_1' \Sigma m = \mu_1' \zeta_1' + \mu_2' \zeta_2'$$

καί ἀφαιροῦντες

$$(Z_1' - Z_1) \Sigma m = \mu_1 (\zeta_1' - \zeta_1) + \mu_2 (\zeta_2' - \zeta_2)$$

ἀλλά καθ' ὑπόθεσιν $\zeta_2' = \zeta_2$ ὥστε

$$(Z_1' - Z_1) \Sigma m = \mu_1 (\zeta_1' - \zeta_1)$$

καί.

$$g (Z_1' - Z_1) \Sigma m = \mu_1 g (\zeta_1' - \zeta_1).$$

ο.ε.δ.