ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟΝ ΣΧΟΛΕΙΟΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

Παραδοθέντα κατὰ τὸ Σχολικὸν ἔτος 1887 – 1888

ΥΠΟ

Π. ΠΡΩΤΟΠΑΠΑΔΑΚΗ

Καθηγητοῦ παρὰ τῷ αὐτῷ Σχολείῳ

ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ

Ἐκ τοῦ Λιθογραφείου τοῦ Στρατιωτικοῦ Σχολείου

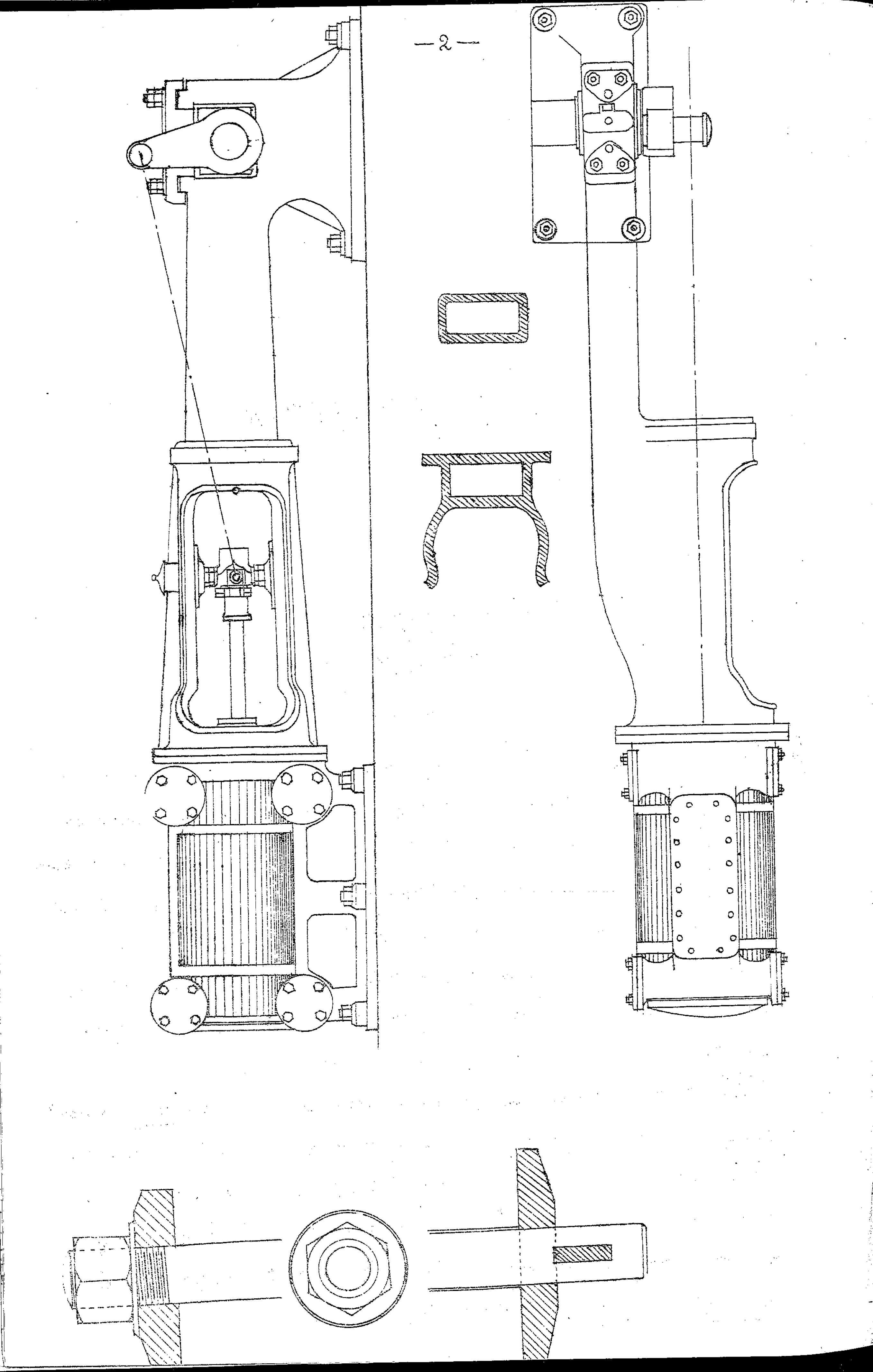
1888

Μηχανολογία

Γεωμετρική σπουδή τῶν μηχανισμῶν

Βάθρον (bati) — Ἐν τῇ μηχανῇ διακρίνομεν ἐν πρώτοις τό βάθρον (bati) ἀποτελούμενον ἔκ τινος ἀμεταστάτως κειμένης οἰκοδομῆς, ἥτις ὑποβαστάζει τά κινούμενα ὄργανα τῆς μηχανῆς, τό βάθρον θεωροῦμεν ὡς ἀπολύτως ἠρεμοῦν, [δύναται ἐν τούτοις νά ἔχῃ σχετικήν κίνησιν ὡς πρός τήν γῆν, ὡς ἐν ταῖς μηχαναῖς τῶν πλοίων καί ταῖς σιδηροδρομικαῖς ἀτμαμάξαις] καί παραβάλωμεν πρός αὐτό τάς κινήσεις τῶν ὀργάνων τῆς μηχανῆς.

Ἐν τοῖς κινουμένοις ὀργάνοις, διακρίνομεν τά κύρια καί τά δευτερεύοντα ὄργανα τῆς μηχανῆς, τά πρῶτα ὑποβαστάζονται ἀπ' εὐθείας ὑπό τοῦ βάθρου. τά δευτερεύοντα ὄργανα φέρονται ὑπό ἄλλων κινουμένων ὀργάνων, καί ἡ κίνησις αὐτῶν ὡς πρός τό σταθερόν βάθρον προσδιορίζε-



ται διά τῆς κινήσεως αὐτῶν ἐν σχέσει πρός τά κύρια ὄργανα μεθ' ὧν συνδέονται ἀπ' εὐθείας, καί τῆς κινήσεως τῶν τελευταίων τούτων ὡς πρός τό βάθρον.

Ὅταν ἡ μετάδοσις τῆς κινήσεως δέν γίνεται δι' ἀμέσου ἐπαφῆς τῶν ὀργάνων ἐπ' ἀλλήλων, μεταχειριζόμεθα πρός τοῦτο στερεούς συνδέσμους, ἱμάντας, σχοινία καί ἁλύσους δι' ὧν μεταδίδομεν τήν κίνησιν ἀφ' ἑνός ὀργάνου εἰς ἕτερον, καί τά ὁποῖα ὀνομάζομεν συνδετικά ὄργανα.

Αἱ κινήσεις τῶν κυρίων ὀργάνων περιορίζονται διά τούς ἑξῆς λόγους: ἵνα διάφορα μέρη (portions) δύο ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν ἐφαρμόζωσιν ἀκριβῶς κατά τήν σχετικήν αὐτῶν κίνησιν, ὀφείλουσιν αἱ ἐπιφάνειαι αὗται νά εἶναι ἐπίπεδοι, κυκλικαί ἤ ἑλικοειδεῖς.

Ὅθεν ἡ κίνησις τῶν κυρίων ὀργάνων, περιορίζεται εἰς τήν

1.— Εὐθύγραμμον μεταβατικήν κίνησιν κατ' ἀνάγκην περιωρισμένων διαστάσεων, καί ἐάν ἡ κίνησις τῆς μηχανῆς διαρκεῖ ἐπί πολύν χρόνον, εἶναι αὕτη κατ' ἀνάγκην παλινδρομική δηλ. ἐκτελεῖται διαδοχικῶς κατ' ἀντιθέτους φοράς.

2.— Ἁπλῆν περιστροφικήν κίνησιν περί σταθερόν ἄξονα, ἥτις δύναται νά εἶναι συνεχής ἤ παλινδρομική, καί τήν ὁποίαν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὀνομάζομεν αἰωρουμένην κίνησιν.

3.— Ἑλικοειδῆ κίνησιν, περί ἧς ἐπαναλαμβάνομεν, ὅτι εἴπομεν περί τῆς μεταβατικῆς κινήσεως.

Ἕδρανα ὀνομάζομεν τάς ἐπιφανείας τῆς μετά τοῦ βάθρου ἐπαφῆς τῶν κυρίων ὀργάνων καί τούτων μετά τῶν δευτερευόντων ὀργάνων τῆς μηχανῆς μεθ' ὧν ἀμέσως συνδέονται. Διακρίνομεν δ' ἔ ταῦτα εἰς πέδιλα (patins) ὅταν τά ὄργανα φέρωνται ὑπό εὐθυγράμμου μεταβατικῆς κινήσεως. δακτυλίους χοινικίδας (tou rillons, virols καί pivots) ὅταν τά ὄργανα φέρονται ὑπό περιστροφικῆς κινήσεως, καί εἰς κοχλίας ἐν τῇ ἑλικοειδεῖ κινήσει.

Τά ἕδρανα ὁδηγοῦσι τάς κινήσεις τῶν ὀργάνων, ἅτινα ὑποβαστάζουσι καί ἡ μορφή αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως αὐτῶν τῶν κινήσεων. τά ἕδρανα ὀργάνου φερομένου ὑπό εὐθυγράμμου μεταβατικῆς κινήσεως πρέπει νά ἔχουν ἐπιφανείας ἐπιπέδους ἤ κυλινδρικάς καί ἀκριβῶς εὐθυγράμμους κατά τήν φοράν τῆς κινήσεως.

Τά ἕδρανα τῶν ὑπό περιστροφικῆς κινήσεως φερομένων ὀργάνων ὀφείλουν νά παρουσιάζουν ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς. τά ἕδρανα τῶν ὑπό ἑλικοειδοῦς κινήσεως φερομένων ὀργάνων, πρέπει νά εἶναι ἀκριβεῖς ἕλικες ὧν τό βῆμα ἰσοῦται τῷ τῆς ἑλικοειδοῦς κινήσεως.

Αἱ ἐπιφάνειαι δι' ὧν τά διάφορα ὄργανα στηρίζονται ἐπί τῶν ἑδράνων πρέπει νά ἐφαρμόζωσιν ἀκριβῶς ἐπί τῶν τελευταίων τούτων.

Αἱ σχετικαί κινήσεις τῶν δευτερευόντων ὀργάνων ὡς πρός τά πρωτεύοντα ὄργανα, μεθ' ὧν συνδέονται ἀπ' εὐθείας εἶναι αἱ αὐταί, οἷαι αἱ κινήσεις τῶν ὀργάνων τούτων ὡς πρός τήν βάσιν. ἀλλ' αἱ κινήσεις τῶν δευτερευόντων ὀργάνων ὡς πρός τήν βάσιν δύνανται νά εἶναι οἷαιδήποτε προκύπτουσαι ἐκ τῆς συνθέσεως εὐθυγράμμων μεταβατικῶν καί περιστροφικῶν κινήσεων.

Ὁ στοιχειώδης συνδυασμός ἐν μηχανισμῷ τινί σύγκειται, ἐκ δύο κυρίων ὀργάνων, ὧν τό ἕν μεταδίδει τήν κίνησιν αὐτοῦ εἰς τό ἕτερον.

Τό ὄργανον ἐξ οὗ προέρχεται ἡ κίνησις εἶναι τό κινητήριον ὄργανον τό δεχόμενον τήν κίνησιν, εἶναι τό κινούμενον ὄργα-

νον.

Τά δύο ταῦτα ὄργανα συνδέονται πρός ἄλληλα διαφοροτρόπως.

I.— δι' ἀμέσου ἐπαφῆς { ἐπαφή κυλινδήσεως / ἐπαφή ὀλισθήσεως.

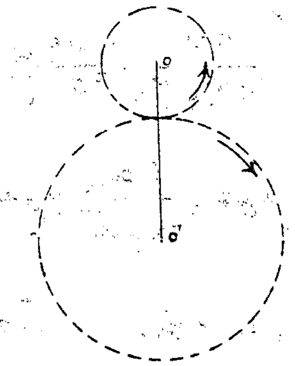
II.— Σύνδεσις διά στερεῶν συνδέσμων.

III.— Σύνδεσις δι' ἐλαστικῶν συνδέσμων καί σχοινίων μέ πολλούς ἑλιγμούς.

IV.— διά μέσου ῥευστοῦ τινος.

Μετασχηματισμός περιστροφικῆς κινήσεως ω περί σταθερόν ἄξονα O εἰς ἑτέραν ἐπίσης περιστροφικήν ω' περί τόν ἄξονα O' παράλληλον τῷ O οὕτως ὥστε ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων $\frac{\omega}{\omega'}$ νά μένῃ σταθερός καί ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

Ἔστωσαν O καί O' οἱ ἄξονες τῆς περιστροφῆς. ποία εἶναι ἡ σχετική κίνησις τοῦ συστήματος [O] ὡς πρός τό σύστημα [O'] τό πρῶτον στρέφεται περί τόν ἄξονα O μέ περιστροφικήν ταχύτητα ω τό δεύτερον περί τόν ἄξονα O' μέ περιστροφικήν ταχύτητα ω', ὥστε ἐάν πρός στιγμήν ἐφαρμόσωμεν ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων περιστροφικήν κίνησιν περί τόν ἄξονα O' μέ περιστροφικήν ταχύτητα ω ἡ σχετική θέσις τῶν συστημάτων δέν μεταβάλλεται ἐκ τούτου, καί ἡ προκύπτουσα κίνησις διά τό σύστημα O εἶναι ἡ σχετική αὐτοῦ κίνησις [§] ὡς πρός τό σύστημα O', τό σύστημα O φέρεται ἤδη ὑπό δύο περιστροφικῶν κινήσεων περί τούς ἄξονας O καί O' μέ ἀμοιβαίας



ταχύτητας ω καί ω', καί γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐκ τῶν δύο τούτων συγχρόνων περιστροφικῶν καί τῆς αὐτῆς φορᾶς κινήσεων προκύπτουσα κίνησις εἶναι καί αὕτη περιστροφική περί τινα ἄξονα α, οὗτινος ἡ θέσις προσδιορίζεται διά τῆς σχέσεως

$$\frac{o\alpha}{o'\alpha}=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\alpha}{\alpha'}\,(\text{σταθερά ποσότης})$$

καί μέ περιστροφικήν ταχύτητα $\Omega=\omega+\omega'$.

Τό σημεῖον α εἶναι τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς ἐν τῇ σχετικῇ κινήσει τοῦ συστήματος [0] ὡς πρός τό σύστημα 0. ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{o\alpha}{o'\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha'}$$

ἐξάγομεν

$$\frac{o\alpha}{o\alpha+o'\alpha}=\frac{o\alpha}{oo'}=\frac{\alpha}{\alpha+\alpha'}\quad\text{καί}\quad\frac{o\alpha+o'\alpha}{o'\alpha}=\frac{oo'}{o'\alpha}=\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha'}$$

ἤ

$$o\alpha=\frac{oo'\cdot\alpha}{\alpha+\alpha'}=\text{σταθερόν}\quad\text{καί}\quad o'\alpha=oo'\frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}=\text{σταθ.}$$

τουτέστιν $o\alpha$ καί $o'\alpha$ εἶναι μεγέθη σταθερά καί ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ στιγμιαίου κέντρου τῆς περιστροφῆς α διαγράφει ἐν τῷ κινουμένῳ ἐπιπέδῳ τοῦ συστήματος [0] κύκλον μέ κέντρον τό 0 καί ἀκτῖνα τήν $o\alpha$. καί ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ συστήματος [0'], ὅπερ ἐκλαμβάνομεν ὡς ἀκίνητον ἵνα προσδιορίσωμεν τήν σχετικήν κίνησιν τοῦ πρώτου ὡς πρός τό δεύτερον, τό αὐτό στιγμιαῖον κέντρον διαγράφει ἕτερον κύκλον μέ κέντρον τό 0' καί ἀκτῖνα τήν $o'\alpha$.

Ὥστε [§] ἡ σχετική κίνησις τοῦ συστήματος [0]

ὡς πρός τό σύστημα [0'] εἶναι κυλίνδησις τῆς περί τόν ἄξονα 0 κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $o\alpha$, ἐπί τῆς περί τόν ἄξονα 0' κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $o'\alpha$.

Ἐάν ἤδη ἐπανέλθωμεν εἰς τήν πραγματικήν καί οὐχί πλέον τήν σχετικήν κίνησιν τῶν δύο συστημάτων [0] καί [0'] περί τούς ἄξονας 0 καί 0' βλέπομεν, ὅτι τά ἐπί τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν [$o\alpha$] καί [$o'\alpha$] σημεῖα φέρονται ὑπό τῆς αὐτῆς ταχύτητος

$$\omega\cdot o\alpha=\omega'\cdot o'\alpha\quad\text{ἤ}\quad\omega\alpha=\omega'\alpha'$$

διότι αἱ σταθεραί ποσότητες α καί α' δύνανται νά θεωρηθῶσιν ὡς ἴσαι ταῖς ἀκτῖσι $o\alpha$ καί $o'\alpha$ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν. διά τά ἐπί τῆς γραμμῆς τῆς ἐπαφῆς ἴδια κείμενα σημεῖα θεωρούμενα ὡς ἀνήκοντα ἑκατέρα τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἡ ταχύτης εἶναι ἡ αὐτή ὄχι μόνον κατά τό μέγεθος, ἀλλά καί κατά τήν φοράν.

Τάς κυλινδρικάς ταύτας ἐπιφανείας ὀνομάζομεν <u>θεμελιώδεις ἐπιφανείας</u> τῶν συστημάτων.

Ἴδωμεν ἤδη τίνι τρόπῳ δύναται νά μεταδοθῇ ἡ κίνησις ἀπό τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον σύστημα.

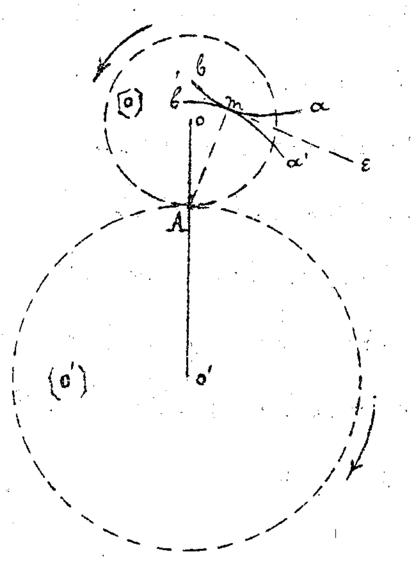
Ἐάν ἡ ἀντίστασις A τήν ὁποίαν προτιθέμεθα νά νικήσωμεν διά τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ συστήματος [0'] εἶναι σχετικῶς μικρά, οὕτως ὥστε νά μή ἐπέρχεται ὀλίσθησις τῶν θεμελιωδῶν ἐπιφανειῶν ἐπ' ἀλλήλων, δυνάμεθα δι' ἁπλῆς συνοχῆς (adherence) προερχομένης ἐκ μικρᾶς πιέσεως τῆς μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἐπί τῆς ἑτέρας καί δι' ἁπλῆς ἐπαφῆς κυλινδήσεως νά μεταδώσωμεν τήν περιστροφικήν κίνησιν τοῦ συστήματος [0] εἰς τό σύστημα [0'] τροποποιοῦντες αὐτήν κατά τόν λόγον $\frac{\alpha}{\alpha'}$ ὡς ἐκ τῆς προστριβῆς τῶν θεμελιωδῶν

ἐπιφανειῶν ἐπ' ἀλλήλων φθείρονται αὗται καί ἀναγκαζόμεθα οὕ-
τω νά μετατοπίζωμεν τούς ἄξονας τῆς περιστροφῆς ἵνα διατηρῶ-
μεν τήν ἐπαφήν τῶν ἐπιφανειῶν τούτων. ἀλλ' ἐκτός τούτου,

Ἐάν ἡ ἀντίστασις *A* εἶναι ὁπωσδήποτε σπουδαία αἱ θε-
μελιώδεις ἐπιφάνειαι ὀλισθαίνουσαι ἐπ' ἀλλήλων δέν δύναν-
ται νά μεταβιβάσωσιν τήν κίνησιν τοῦ ἑνός τῶν συστημάτων
εἰς τό ἕτερον καί ἀναγκαζόμεθα νά προστρέξωμεν εἰς τήν προσ-
θήκην ἐξοχῶν ἤ ὀδόντων ἐπί τῶν θεμελιωδῶν ἐπιφαφανειῶν, καί
μεταβάλλωμεν οὕτω τήν ἐπαφήν κυλινδήσεως εἰς ἐπαφήν κυλιν-
δήσεως καί ὀλισθήσεως συνάμα ἰσχυροτέραν τῆς πρώτης δι'
ἧς νικῶντες τήν ἀντίστασιν *A* μεταδίδομεν τήν κίνησιν ἀπό
τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον σύστημα. Ὁ προκύπτων στοιχειώδης συν-
δυασμός τῶν δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν καλεῖται ὀδοντωτόν κυλιν-
δρικόν τύμπανον, τό ἐντός τῆς θεμελιώδους περιφερείας κύκλου
ἐμπεριεχόμενον μέρος τῆς διατομῆς του καλεῖται πλευρόν (flanc)
τό ἐκτός αὐτῆς ὄψις τῆς διατομῆς.

Ἔστω ἤδη αβ ἡ διατομή (section droite) τοῦ τῷ συστήματι [O] ἀνήκοντος ὀδόντος καί α'β' ἡ διατομή τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὀδόντος ἐν τῷ συστήματι [O']. καί *m* τό σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

Κατά τήν περιστροφικήν κίνησιν τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν περί τούς ἄξονας O καί O' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀδόντος αβ τοῦ τροχοῦ O ἐφάπτεται διηνεκῶς τῆς ἐπιφανείας α'β' τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὀδόντος τοῦ τροχοῦ O'. ὥστε ἡ καμπύλη α'β' δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἡ περιβάλλουσα γραμμή τῆς καμπύλης αβ κατά



τήν κυλίνδησιν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου O, δι' οὗ ἐπιτυγχάνομεν τήν σχετικήν κίνησιν τοῦ τροχοῦ O ὡς πρός τόν τροχόν O'. ἡ σχετική αὕτη κίνησις ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν ἀναλύεται ἐν τέλει εἰς περιστροφικήν κίνησιν περί ἄξονα παράλληλον τοῖς O καί O' καί διερχόμενον διά τοῦ σημείου *A* μέ γωνιαίαν ταχύτητα $= \omega + \omega'$. τήν περιστροφικήν ταύτην κίνησιν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν [§] δι' ἑτέρας ἴσης αὐτῇ περί ἄξονα διερχόμενον διά τοῦ σημείου *m* καί διά μεταβατικῆς κινήσεως μέ ταχύτητα ἴσην τῇ ταχύτητι τοῦ σημείου *m* $(\omega+\omega')Am$ καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ *Am*. ἐξ οὗ εἰκάζομεν ὅτι ἡ σχετική κίνησις τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς *m* τῆς καμπύλης αβ ὡς πρός τήν καμπύλην α'β' δέν εἶναι πλέον ἁπλῆ κυλίνδησις ὡς ἀνωτέρω, ἀλλά συνοδεύεται αὕτη καί μέ ὀλίσθησιν παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ὁποίας μόνον δύναται νά ὀλισθήσῃ τό σημεῖον m καί ἐπειδή ἡ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ μεταβατική κίνησις τοῦ σημείου m εἶναι κάθετος τῇ εὐθείᾳ Am ἡ εὐθεία αὕτη Am συμπίπτει μέ τήν κάθετον τῇ καμπύλῃ αβ παρά τό σημεῖον m, ὅπερ ἐγινώσκομεν ἐκ τῶν προηγουμένων [§].

Ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν ἡ μεταβατική ταχύτης τοῦ σημείου m παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ $mε$ εἶναι $(\omega+\omega')Am$. καί ἐάν παραστήσωμεν διά ds τό ὑπό τοῦ σημείου A διαγραφόμενον στοιχειῶδες τόξον κατά τήν κυλίνδισιν τῆς περιφερείας O ἐπί τῆς περιφερείας O' ἐν τῷ βραχυτάτῳ χρονικῷ διαστήματι dt ἔχομεν

$$ds = OA.\omega dt = OA'\omega' dt \quad \text{ἤ} \quad \omega dt \frac{ds}{OA} \quad \omega' dt = \frac{ds}{OA'}$$

ὅθεν

$$(\omega+\omega')Am.\,dt = \left[\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA'}\right]Am.ds = \left[\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right]p.ds$$

Ἡ γνῶσις τῆς καθέτου Am μᾶς ἐπιτρέπει νά χαράξωμεν τήν διατομήν τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ O', γνωστῆς οὔσης τῆς διατομῆς τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ O.

Ἔστω τῷ ὄντι αβ ἡ δοθεῖσα διατομή τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ O, καί ληφθήτωσαν ἐπί τῆς θεμελιώδους περιφερείας O τά τόξα O-1, 1-2, 2-3 . . . 8-9 ἴσα πρός ἄλληλα, καί ἀρκούντως μικρά, ὥστε νά δύνανται ταῦτα νά συγχωνευθῶσι μετά τῆς χορδῆς αὐτῶν *sans erreur sensible* καί ἐκ τῶν σημείων 0, 1, 2, . . . 9, ἀχθήτωσαν αἱ τῇ καμπύλῃ αβ κάθετοι ou_0 $1u_1$ $2u_2$ . . . $9u_9$.

ληφθήτωσαν πρός τούτοις ἐπί τῆς θεμελιώδους περιφερείας τοῦ τροχοῦ O' τά τόξα Ao', $o'1'$, $1'$-$2'$, $2'$-$3'$ . . . $8'$.$9'$ ἴσα τοῖς ἀντιστοιχοῦσιν αὐτοῖς Ao, $o.1$, 1.2, 2.3 . . . 8.9 καί γραφήτωσαν περιφέρειαι κύκλων μέ κέντρα τά o', $1'$, $2'$ . . . $9'$ καί ἀκτῖνας ἴσας ταῖς καθέτοις τῇ αβ, ou_0 $1u_1$ $2u_2$ . . . $9u_9$ αἱ κυκλικαί αὗται περιφέρειαι ἐφάπτονται τῆς καμπύλης $α'β'$, ἥν δυνάμεθα οὕτω εὐκόλως νά χαράξωμεν. ἐκ τῆς κατασκευῆς δέ ταύτης φαίνεται ὅτι ἡ ἐπαφή ὑπάρχει πάντοτε μεταξύ τῆς ὄψεως ἑνός ὀδόντος καί τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος αὐτῷ.

Οἱ ὀδόντες ὀδοντωτοῦ τροχοῦ σύγκεινται ἐκ δύο διατομῶν συμμετρικῶν ὡς πρός τήν ἀκτῖνα τήν ἑνώνουσαν τό κέντρον τῆς θεμελιώδους περιφερείας μέ τό σημεῖον μέσον τοῦ ὑπό τῆς διατομῆς ἐπί τῆς περιφερείας προσδιοριζομένου τόξου.

Ἡ ἑτέρα τῶν διατομῶν τούτων χρησιμεύει ἁπλῶς κατά τήν μετατροπήν τῆς φορᾶς τῆς περιστροφικῆς κινήσεως, δηλ. ὑπάρχει μόνον, ὅταν τό ὀδοντωτόν τύμπανον εἶναι ἀντιστρέψιμον (*reciproque*).

Τό <u>βῆμα</u> ὀδοντωτοῦ τυμπάνου εἶναι τό μῆκος a τοῦ ὑπό τῶν μέσων σημείων δύο διαδοχικῶν ὀδόντων προσδιοριζομένου ἐπί τῆς θεμελιώδους περιφερείας τόξου.

Τό <u>διάστημα</u> ἑνός ὀδόντος εἶναι τό μῆκος i τοῦ μεταξύ δύο ὀδόντων ἐμπεριεχομένου τόξου τῆς θεμελιώδους ἐπιφανείας.

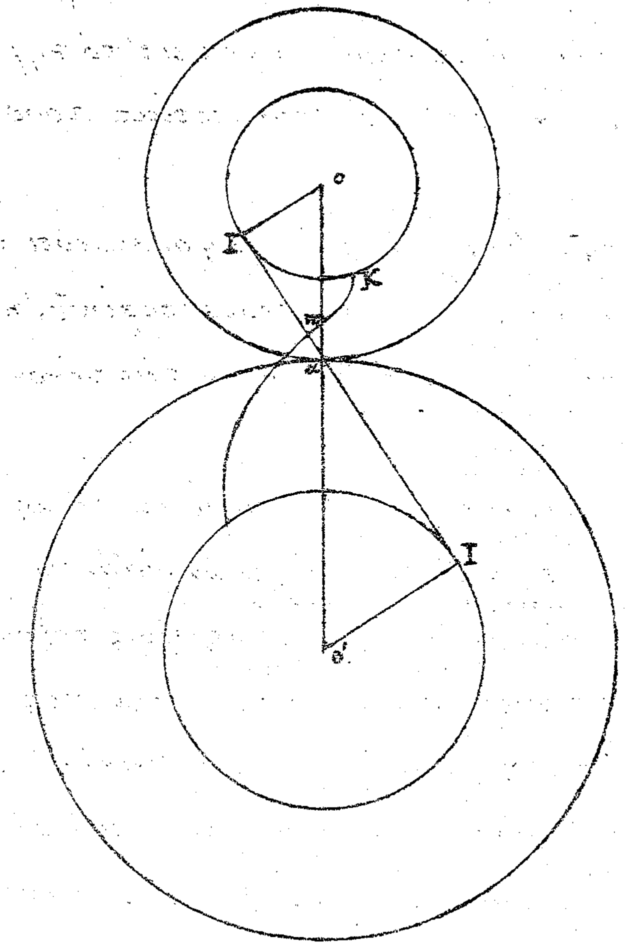
<u>Ἡ βάσις</u> τοῦ ὀδόντος ἤ τό πάχος αὐτοῦ τό μῆκος $ε$ τοῦ τόξου τῆς θεμελιώδους περιφερείας τό ἐμπεριεχόμενον ἐν ἑνί ὀδόντι.

καί ἔχομεν προφανῶς

$$\alpha = e + i$$

τό βῆμα εἶναι μέρος ὑποπολλαπλάσιον καί τῶν δύο θεμελιωδῶν ἐπιφανειῶν καί ἔχει τό αὐτό μέγεθος ἐπ' ἀμφοτέρων.

Ὀδοντωτόν τύμπανον μέ κυκλικῆς ἐνειλιγμένης (à developpante de cercle)



Εἰς τό τύμπανον τοῦτο λαμβάνωμεν ὡς διατομήν τῶν ὀ-

δόντων τοῦ τροχοῦ O τήν ἐνειλιγμένην τοῦ κύκλου OI καί προσδιορίζομεν τήν διατομήν τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ O' διά τῆς περιβαλλούσης τῆς ἐξειλιγμένης Km. ἵνα προσδιορίσωμεν τό σημεῖον m ὅπου ἡ ἐξειλιγμένη Km ἐφάπτεται τῆς περιβαλλούσης αὐτῆς καταβιβάζομεν τήν amI κάθετον ἐπί τῆς ἐξειλιγμένης Km καί κατά συνέπειαν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου O. προσδιορίζομεν οὕτω τό σημεῖον m. Καί ἐάν ἀπό τοῦ κέντρου O' τοῦ ἑτέρου τροχοῦ καταβιβάσωμεν τήν O'I' κάθετον ἐπί τῆς εὐθείας aI ἔχομεν

$$\frac{O'I'}{OI} = \frac{O'\alpha}{O\alpha} \quad \text{ἤ} \quad O'I' = OI\,\frac{O'\alpha}{O\alpha} = \text{σταθερόν}$$

ὥστε ἡ κάθετος aI τῇ ζητουμένῃ περιβαλούσῃ ἐφάπτεται τοῦ σταθεροῦ κύκλου O'I' καί ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι developpante τοῦ κύκλου τούτου.

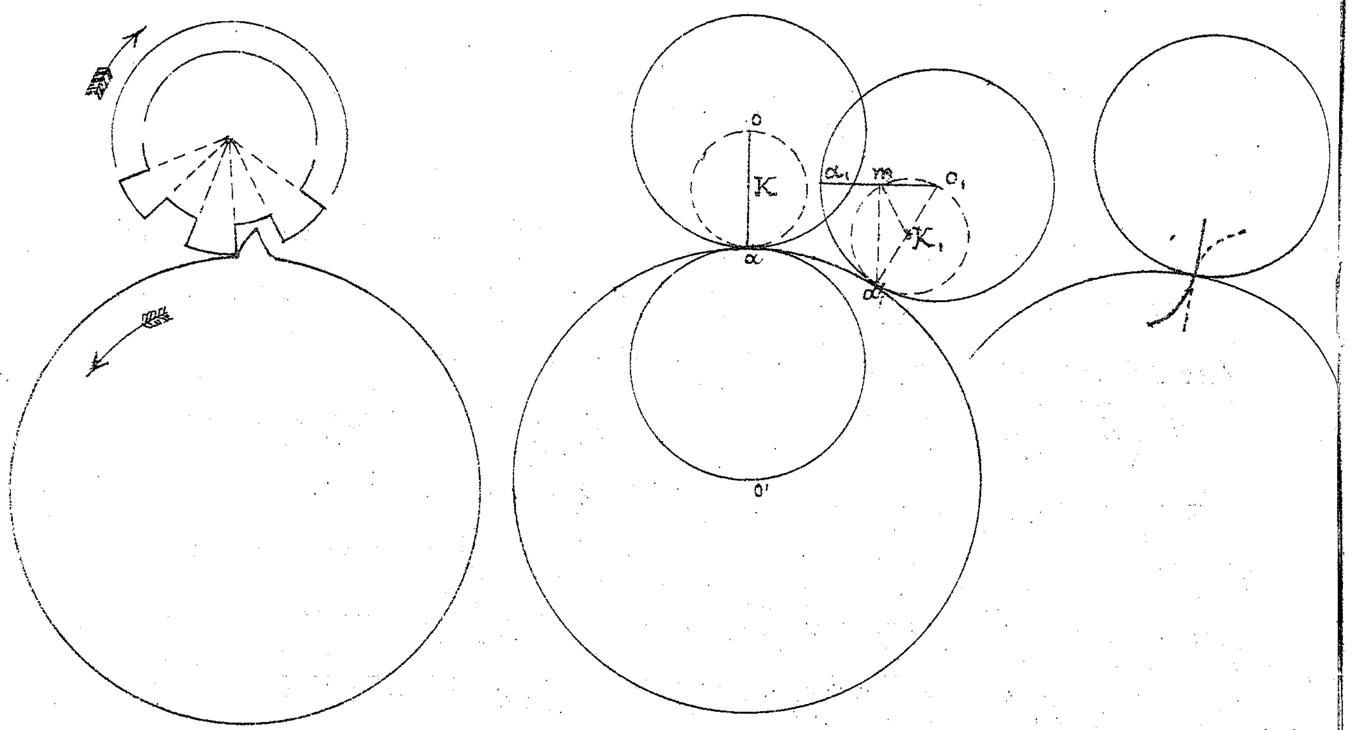
Ἡ χάραξις τῆς ἐνειλιγμένης developpante κύκλου τινός γίνεται ὡς ἐμφαίνει τοῦτο τό ὄπισθεν σχῆμα.

Ἵνα τό ὀδοντωτόν τύμπανον εἶναι ἀντιστρέψιμον σχηματίζομεν ἕκαστον ὀδόντα ἐκ δύο συμμετρικῶν μερῶν καί περιορίζομεν τάς ὄψεις οὕτως ὥστε, ὅταν δύο ὀδόντες εἶναι συμπεπλεγμένοι πρός ἀλλήλους ἐπί τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τελευτᾷ ἡ ἐπαφή διά τό ἀκόλουθον ζεῦγος, καί ἄρχεται συγχρόνως διά τό προηγούμενον.

Ἐδῶ δέν παρουσιάζεται τό ἄτοπον ὅπερ ἀνεγνωρίσαμεν εἰς τό προηγούμενον τύμπανον. διότι ἡ διατομή εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ R καί R'.

Ὀδοντωτός τύμπανος μέ εὐθυγράμμους πλευράς

Le flanc τῶν ὀδόντων ἑνός τῶν τροχῶν O συμπίπτει μέ τήν ἀκτῖνα Oα τοῦ θεμελιώδους κύκλου τοῦ αὐτοῦ τροχοῦ.



ἵνα εὕρωμεν τήν διατομήν τῆς ὄψεως τοῦ τροχοῦ O' κυλινδοῦμεν τήν περιφέρειαν O ἐπί τῆς περιφερείας O' καί προσδιορίζομεν τήν ἐκ τῆς κυλινδήσεως ταύτης προκύπτουσαν περιβάλλουσαν τῆς ἀκτῖνος Oα τό σημεῖον m ἀνήκει εἰς τήν περιβάλλουσαν [§]

Ἔστω πρός τοῦτο O_1 ἑτέρα θέσις τῆς περιφερείας O. τό τόξον $\alpha'\alpha_1 = \alpha'\alpha$ ἀλλά καί τό τόξον $\alpha' m = \alpha'\alpha$,

διότι

$$\text{τόξον } \alpha'\alpha_1 = o\alpha' \cdot \widehat{\alpha' o \alpha_1} = 2K_1\alpha' \cdot \widehat{\alpha' o_1 \alpha_1}$$

$$\text{τόξον } \alpha' m = K_1\alpha' \cdot \widehat{\alpha' K_1 m} = K_1\alpha' \cdot 2\,\widehat{\alpha' o_1 \alpha_1} \quad \text{ὥστε} \quad \alpha' m = \alpha'\alpha_1 = \alpha'\alpha$$

τό σημεῖον m ἀνήκει κατά συνέπειαν εἰς τήν ἐπικυκλοειδῆ τήν διαγραφομένην ὑπό τοῦ σημείου α τῆς περιφερείας K κατά τήν κυλίνδησιν αὐτῆς ἐπί τῆς περιφερείας O'. καί ἡ κυκλοειδής αὐτη, εἶναι ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα ἡ ἀποτελοῦσα τήν ὄψιν τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ O'.

καί βλέπομεν, ὅτι κατά τήν πραγματικήν κίνησιν τῶν τροχῶν τά σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τῆς ὄψεως τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ O' μετά τῆς πλευρᾶς τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ O κεῖνται ἐπί τῆς περιφερείας K. ὅπερ μᾶς ἐπιτρέπει νά περιορίσωμεν τό μῆκος τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ O.

Ἐάν ἤδη ἐπαναλάβωμεν τά αὐτά καί διά τόν τροχόν O' θά προσδιορίσωμεν τάς ὄψεις τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ O καί τάς πλευράς τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ O' καί τό τύμπανον καθίσταται ἀντιστρέψιμον πρέπει νά ἔχωμεν $n \geq 10 + 5\frac{R}{R'}$.

Ἄτοπα τού μέ εὐθυγράμμους πλευράς τυμπάνου.

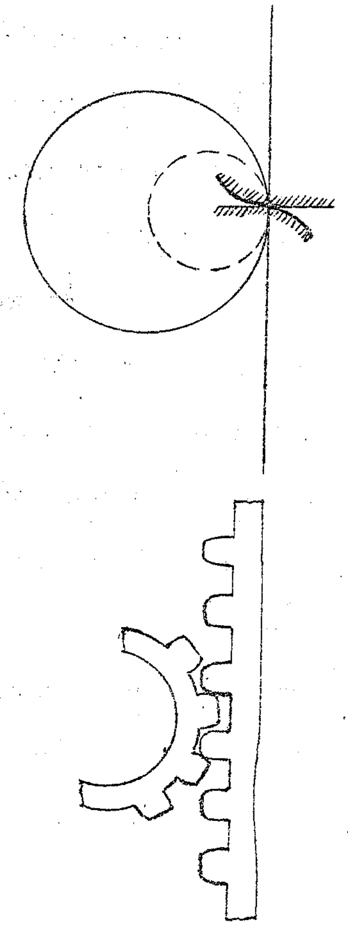
Εἷς τροχός δέν δύναται νά ὁδηγήσῃ πολλούς ἄλλους τροχούς διαμέτρων, ἀφ' οὗ ἡ διατομή τῶν ὀδόντων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαμέτρου ταύτης.

<u>Cremaillère</u>. Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς μιᾶς θεμελιωδῶν περιφερειῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον ἔχομεν τό engre-

nage á. cremaillére, εν ῳ ἡ μία τῶν θεμελιωδῶν περιφερειῶν ἀντικατεστάθη ὑπό εὐθείας γραμμῆς.

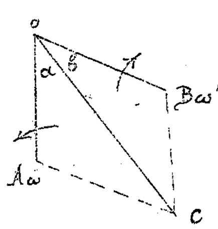
ἐν τῷ τυμπάνῳ τούτῳ ἡ περιστροφική κίνησις τοῦ τροχοῦ μετασχηματίζεται εἰς τήν εὐθύγραμμον κίνησιν τοῦ στελέχους.

Ἡ χάραξις τῶν ὀδόντων γίνεται ὅπως καί προηγουμένως. ἡ περιφέρεια τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ σύγκειται ἐκ τῶν ἀκτίνων τῶν developpantes τοῦ κύκλου, καί ὁ τῶν ὀδόντων τῆς cremaillére ἐξ εὐθειῶν καθέτων τῇ θεμελιώδει εὐθείᾳ καί ἐκ τόξων κυκλοειδοῦς διαγραφομένης διά τῆς κυλινδήσεως τοῦ κύκλου ἐπί τῆς εὐθείας ταύτης.



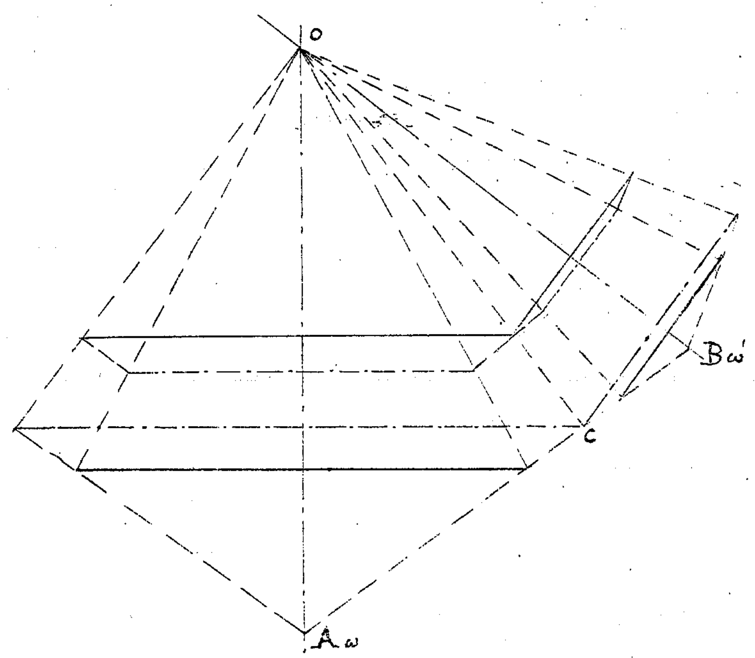
Κωνοειδῆ τύμπανα.

Μετασχηματισμός περιστροφικῆς κινήσεως ω περί τόν σταθερόν ἄξονα OA εἰς ἑτέραν ἐπίσης περιστροφικήν περί τόν ἄξονα OB συμπίπτοντα με τόν πρῶτον παρά τό σημεῖον O, οὕτως ὥστε ὁ λόγος $\frac{\omega}{\omega'}$ τῶν γωνιαίων ταχυτήτων νά μένῃ σταθερός καί ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{\alpha'}$. ποία εἶναι ἡ σχετική κίνησις τοῦ συστήματος [OB] ὡς πρός τό σύστημα [OA].



Τό σύστημα [OB] στρέφεται περί τοῦ ἄξονα OB με ταχύτητα ω' καί ἵνα προσδιορίσωμεν τήν σχετικήν αὐτοῦ κίνησιν ὡς πρός τό σύστημα [OA] πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ τελευταίου τούτου τήν περιστροφικήν κίνησιν ω κατά τήν αὐτήν φοράν διά καί ἡ ω'. ἡ ἐκ τῆς συγχρόνου ἐπενεργείας τῶν δύο τούτων περιστροφικῶν κινήσεων προκύπτουσα κίνησις εἶναι καί αὕτη [ ] περιστροφική περί τόν ἄξονα OC. καί ἐπειδή ἡ γωνία AOB εἶναι σταθερά καί $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\omega'}{\omega} =$ σταθερόν καί αἱ γωνίαι α καί β εἶναι σταθεραί καί ἡ εὐθεῖα OC διαγράφει κώνους εὐθεῖς περί τούς ἄξονας OA καί OB. οὕτως ὥστε ἡ σχετική κίνησις τοῦ συστήματος [OB] ὡς πρός τό σύστημα [OA] εἶναι κυλίνδησις τοῦ κώνου [OB] ἐπί τοῦ κώνου [OA]. (θεμελιώδεις κῶνοι).

Τέμνοντες δέ τούς δύο τούτους θεμελιώδεις κώνους διά σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐχούσης κέντρον τό O. προσδιορίζομεν ἐπ' αὐτῆς δύο θεμελιώδεις περιφερείας ἐφ' ὧν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν ὅσα εἴπομεν περί τῶν κυλινδρικῶν τυμπάνων, καί προσδιορίσωμεν οὕτω ἐπί τῆς σφαίρας τάς καμπύλας, τάς ὁποίας προσδιωρίσαμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καί ἐχρησίμευσαν ὡς ὁδηγήτριαι γραμμαί τῶν ἀποτελουσῶν τό τύμπανον κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν. αἱ σφαιρικαί αὗται καμπύλαι μετά τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας προσδιορίζουσι τάς κωνικάς ἐπιφανείας τῶν κωνικῶν τυμπάνων. δι' ὧν μετατρέπομεν τήν περί τόν ἄξονα OA περιστροφικήν κίνησιν, εἰς ἑτέραν ἐπίσης περιστροφικήν περί τόν ἄξονα OB. ἀλλ' ἡ κατασκευή αὕτη παρουσιάζει δυσκολίας τινάς περί τήν ἐκτέλεσιν, καί προτιμᾶται συνήθως ἐν τῇ πράξει ἡ ἀκόλουθος κατά προσέγγισιν κατασκευή.



Ἐκ τοῦ σημείου C τοῦ τελικοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς ἀχθήτω ἡ εὐθεῖα ACB κάθετος ἐπί τῆς OC καί συμπίπτουσα μέ τούς ἄξονας OA καί OB παρά τά σημεῖα A καί B, ἡ εὐθεῖα αὕτη

BA περιστρεφομένη περί τούς ἄξονας OB καί OA διαγράφει δύο εὐθείας κωνικάς ἐπιφανείας ἐφαπτομένας τῇ σφαίρᾳ OC καί ἐχούσας κοινόν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τό AB. τό πρόβλημα λύεται διά τῆς ἐξαιρέσεως τῆς καμπύλης καθ' ἥν τέμνονται αἱ ἐπί τῶν θεμελιωδῶν κώνων ἐφηρμοσμέναι κωνικαί ἐπιφάνειαι τῶν ὀδόντων καί οἱ κῶνοι AC καί BC.

Πρός τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ κωνικαί ἐπιφάνειαι τῶν ὀδόντων ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐπί μικροῦ μόνον μέρους ἑκατέρωθεν τῆς γενετείρας τῆς ἐπαφῆς OC καί δυνάμεθα κατά συνέπειαν νά θεωρήσωμεν τάς ἐφαπτομένας ἀλλήλαις διατομάς ὡς ἐμπεριεχομένας ἐν τῷ κοινῷ ἐφαπτομένῳ ἐπιπέδῳ BCA καθ' ὅλην τήν διάρκειαν τῆς ἐπαφῆς. ἴδωμεν ἤδη τίνι τρόπῳ ὁδηγοῦνται ἀμοιβαίως αἱ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ διατομαί.

Τήν περί τόν ἄξονα OA περιστροφικήν κίνησιν ω δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διά δύο ἄλλων περιστροφικῶν ἐπίσης κινήσεων ω_1, ω_2 περί τούς ἄξονας AC καί ἑτέραν διερχομένην διά τοῦ σημείου A καί κάθετον ἐπί τῆς εὐθείας AC ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OAB.

Τήν περί τόν ἄξονα OB περιστροφικήν κίνησιν ω' δυνάμεθα ἐπίσης ν' ἀντικαταστήσωμεν διά δύο ἄλλων περιστροφικῶν κινήσεων ω_1', ω_2' περί τόν ἄξονα BC καί τήν ἐπ' αὐτοῦ ἀπό τοῦ σημείου B, κάθετον εὐθεῖαν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ AOB. ἡ κίνησις τοῦ σημείου C εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων τούτων περιστροφικῶν κινήσεων, ὧν τάς δύο ω_1, ω_1' περί τόν ἄξονα AB δυνάμεθα νά παραλείψωμεν, διότι ἡ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσα ταχύτης εἶναι ἐλαχίστη ὡς καί ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπαφῆς, τὰ μεγέθη τῶν δύο ἄλλων περιστροφικῶν κινήσεων περὶ τοὺς ἄξονας (A) καὶ (B) καθέτους τῇ εὐθείᾳ AB ἐν τῷ ἐπιπέδῳ AOB εἰσί

$$\omega_1 = \omega \; \sigma\upsilon\nu(\widehat{AOC})$$
$$\omega_1' = \omega' \; \sigma\upsilon\nu(\widehat{BOC})$$

ἀλλ' ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν, ὅτι

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\eta\mu(\widehat{BOC})}{\eta\mu(\widehat{AOC})}$$

ὥστε

$$\frac{\omega_1}{\omega_1'} = \frac{\eta\mu.(\widehat{BOC})}{\eta\mu.(AOC)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(\widehat{AOC})}{\sigma\upsilon\nu(\widehat{BOC})} = \frac{\varepsilon\varphi(\widehat{BOC})}{\varepsilon\varphi(\widehat{AOC})} = \frac{CB}{CA}$$

ἐξ οὗ καταφαίνεται, ὅτι οἱ κωνικοὶ τομεῖς ὁδηγοῦνται ἀμοιβαίως περὶ τὸ σημεῖον C διὰ διατομῶν ὀδόντων, ὡς εἰ ἀνῆκον οὗτοι εἰς κυλινδρικὸν τύμπανον τοῦ ὁποίου αἱ θεμελιώδεις περιφέρειαι θὰ εἶχον ἀκτῖνας CA καὶ CB καὶ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τὸ C. ὅταν οἱ δύο οὗτοι τομεῖς δὲν ἐφάπτονται πλέον ἀλλήλων ἀντικαθίστανται ὑπὸ δύο ἑτέρων ὁμοίων ἐπὶ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν αὐτὸν συλλογισμόν, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Δυνάμεθα οὕτω νὰ χαράξωμεν τοὺς ὀδόντας τοῦ τυμπάνου ὡς ἑξῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ACB ἀνελίσσομεν τὰς δύο κωνικὰς ἐπιφανείας (AC) καὶ (BC) καὶ ἔχομεν οὕτω δύο τομεῖς κύκλου AC καὶ BC ὧν τὰ τόξα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς θεμελιώδεις περιφερείας κυλινδρικοῦ τυμπάνου καὶ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὸ κατὰ μίαν οἱανδήποτε τῶν ἀνωτέρω ἐξετασθεισῶν μεθόδων. [σχεδὸν πάντοτε προτιμᾶται τὸ τύμπανον μὲ εὐθυγράμμους πλευράς] δέον

πρὸς τοῦτο τὸ βῆμα νὰ εἶναι ὑποπλάσιον καὶ τῶν δύο τομέων. ἀφ' οὗ χαράξωμεν τοὺς ὀδόντας τυλίσσομεν κατόπιν ἐκ νέου τοὺς τομεῖς ἐπὶ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν καὶ μεταχειριζόμεθα τὰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ χαραχθείσας καμπύλας τῶν ὀδόντων ὡς ἰθυνούσας τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν αἵτινες προσδιορίζουσι τοὺς πραγματικοὺς τροχοὺς τοῦ κωνικοῦ τυμπάνου.

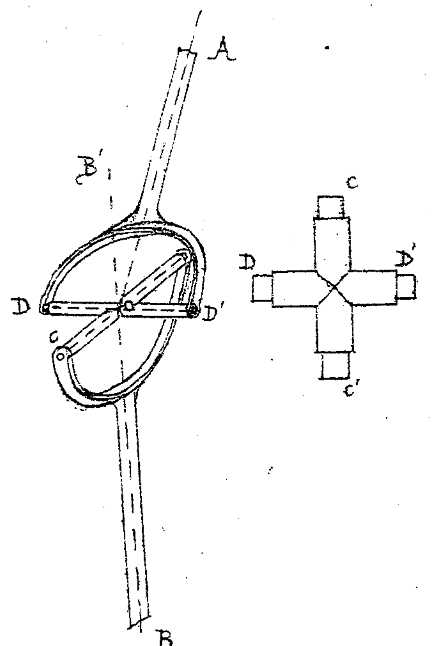
Τὸ τύμπανον περιορίζεται ἑκατέρωθεν ὑπὸ δύο tronc de cône ὅπως ἐμφαίνει τὸ κάτωθι σχῆμα.

—

Ἁρμός τοῦ Cardan ἤ παγκόσμιος

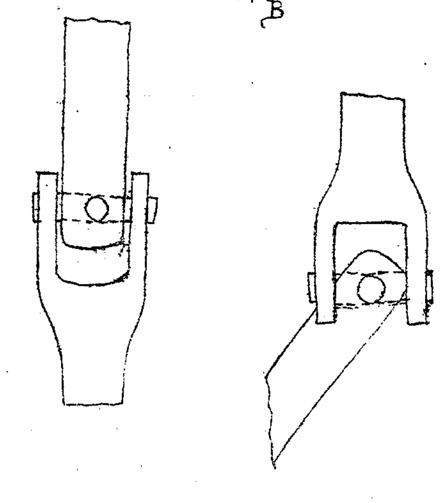
Διά τῶν κωνικῶν τυμπάνων μετεσχηματίσαμεν τήν περί τόν ἄξονα OA περιστροφικήν κίνησιν ω εἰς ἑτέραν ω' περί τόν ἄξονα OB τοιαύτην ὥστε

$\frac{\omega}{\omega'}$ = σταθεράν.



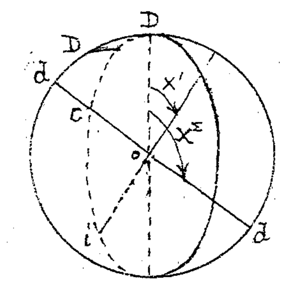
Δυνάμεθα ὅμως καί δι' ἄλλου μέσου νά μετατρέψωμεν τήν περί τόν ἄξονα OA περιστροφικήν κίνησιν ω εἰς ἑτέραν ω' περί τόν ἄξονα OB ἀλλά ὁ λόγος $\frac{\omega}{\omega'}$ τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων δέν εἶναι πλέον σταθερός.

Πρός τοῦτο θεωρήσωμεν σταυρόν συμπαγῆ τόν $cc'DD'$ καί δύο βάκτρα OA καί OB, ὧν τήν κατασκευήν δεικνύομεν διά τοῦ κατωτέρω σχήματος. καί ἑνώσωμεν τά βάκτρα ταῦτα διά



τοῦ συμπαγοῦς σταυροῦ ὅπως τοῦτο ἐμφαίνεται ἐν τοῖς αὐτοῖς σχήμασι. ἐάν ἤδη ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ ἄξονος OA τήν περι-

στροφικήν κίνησιν ω τά σημεῖα D καί D' τοῦ σταυροῦ εὑρίσκονται ἐπί τῆς σφαίρας $[OD]$ καί διαγράφουσι τόν κύκλον OD ἐν τῷ ἐπιπέδῳ DD' καθέτῳ τῷ ἄξονι OA. Τά σημεῖα c καί c' τοῦ αὐτοῦ σταυροῦ εὑρίσκονται ἐπί τῆς αὐτῆς σφαίρας $[OD]$ καί διαγράφουσιν ἕτερον κύκλον OC, οὗτινος τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον τῷ ἄξονι OB. ἡ δίεδρος γωνία α τῶν δύο τούτων κύκλων ἰσοῦται τῇ ὑπό τῶν ἀξόνων OA καί OB σχηματιζομένῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ $B\hat{O}A$ καί ἔχομεν ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ dcD.



$$\text{συν}\, c\hat{o}d = \text{συν}\, x . \text{συν}\, x' + \text{ημ}\, x\, \text{ημ}\, x' \text{συν}\, \alpha$$

καί ἐπειδή cod εἶναι ὀρθή

$$-\text{συν}\, x . \text{συν}\, x' = \text{ημ} . x . \text{ημ}\, x' \text{συν}\, \alpha$$

ἤ

$$(1) \qquad \text{εφ}\, x = -\frac{1}{\text{συν}\alpha}\, \text{εφ}\, x'^{-1}$$

καί λαμβάνοντες τήν διαφορικήν ὡς πρός τόν χρόνον t ἔχομεν

$$\frac{1}{\text{συν}^2 \alpha'}\ \frac{dx'}{dt} = +\frac{1}{\text{συν}\alpha}\ \frac{\text{εφ}^{-2} x}{\text{συν}^2 x}\ \frac{dx}{dt}$$

ἤ

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{\text{συν}\alpha}\ \frac{\text{συν}^2 x'}{\cancel{\text{συν}^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\text{συν}^2 x}}{\text{ημ}^2 x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\text{συν}\alpha}\ \frac{\text{συν}^2 x'}{\text{ημ}^2 x}\ \frac{du}{dt}$$

ἀλλά

$$\frac{dx}{dt} = \omega \text{ καί } \frac{dx'}{dt} = \omega' \quad \text{ὥστε}$$

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu^2 x}\sigma\upsilon\nu^2 x'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu^2 x}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x'}$$

καί ἐπειδή

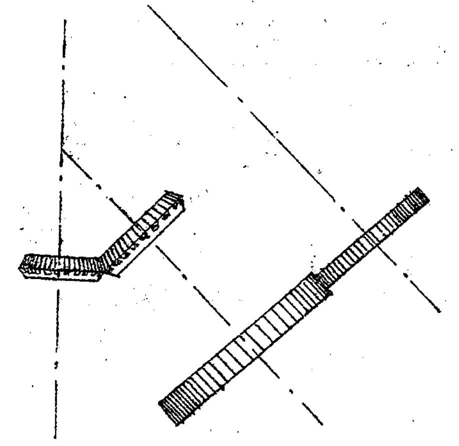
$$\varepsilon\varphi^2 x'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\varepsilon\varphi^2 x}$$

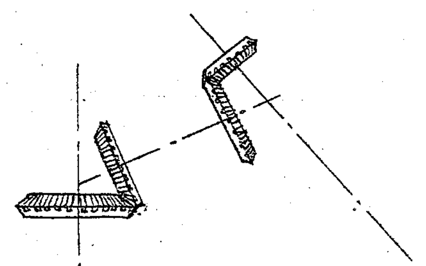
$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\eta\mu^2 x+1-\eta\mu^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\eta\mu^2 x(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\eta\mu^2 x\,\eta\mu^2\alpha}$$

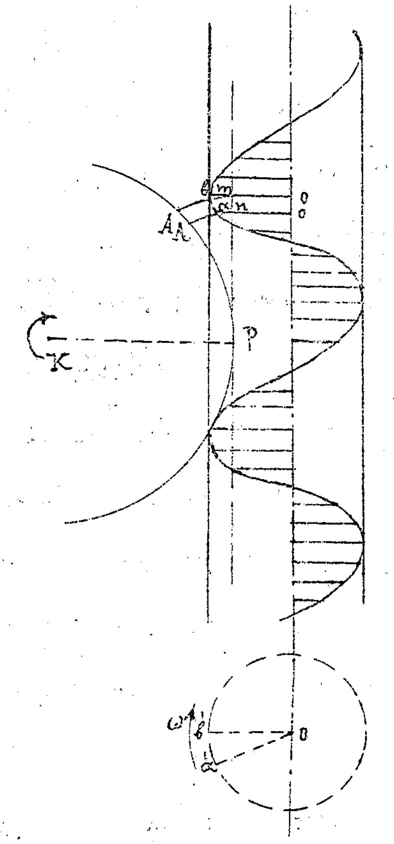
οὕτω ὁ λόγος τῶν περιστροφικῶν ταχυτήτων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γωνίας x καί μεταβάλλεται κατά τήν διάρκειαν ἑνός τετάρτου τῆς περιστροφῆς διά τήν τιμήν $x=0$ $\frac{\omega'}{\omega}=\sigma\upsilon\nu\alpha$ διά τήν τιμήν $x=\frac{\pi}{2}$. $\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ ἐάν ἡ γωνία α εἶναι πολύ μικρά συνα τείνει πρός τήν μονάδα καί δύο αὗται τιμαί τοῦ λόγου $\frac{\omega'}{\omega}$ ὀλίγον μόνον διαφέρουσιν ἀλλήλων. ἐάν $\alpha=90°$ $\frac{\omega'}{\omega}=0$ ἡ μετάδοσις τῆς περιστροφικῆς κινήσεως εἶναι ἀδύνατος. τοῦτο εὐκόλως ἐννοεῖται καί ἐκ τοῦ σχήματος.

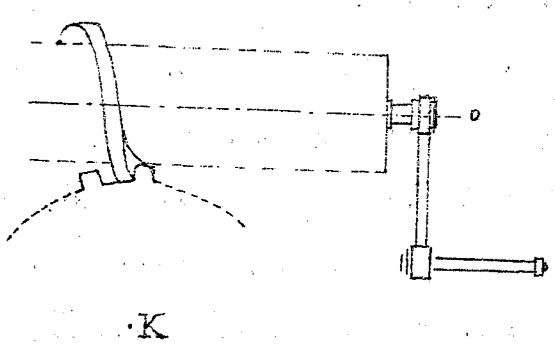
Μετασχηματισμός περιστροφικῶν κινήσεων περί ἄξονας μή συναντῶντας ἀλλήλους.





Ἐάν οἱ ἄξονες καίτοι μή συναντώμενοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλων μεταχειριζόμεθα διά τόν μετασχηματισμόν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως.





Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τόν τροχόν διά τῆς ὑπό τοῦ ἐπιπέδου OK τομῆς αὐτοῦ ὑποθέτοντες αὐτόν ἄνευ πάχους βλέπομεν, ὅτι οὗτος ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας de la vis a filet carré ἐν ἑνί σημείῳ m τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OK γενετείρας αὐτῆς οβ. ἐάν ἤδη στρέψωμεν τήν vis sans fin ἡ γενέτειρα οβ ἀντικαθίσταται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OK ὑπό τῆς γενετείρας οα. ἥτις εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\frac{h\omega dt}{2\pi}$ τῆς οβ τό σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ μετά τῆς γενετείρας οα εἶναι νῦν n καί ὁ τροχός K περιεστράφη

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

κατά τήν ὑπό τοῦ βέλους δεικνυομένην φοράν.

Αἱ γενέτειραι $o\beta$, $o\alpha$.... παριστῶσι τάς διαδοχικάς θέσεις τοῦ flanc μιᾶς crémaillère φερομένης μετά ταχύτητος $\frac{h\omega}{2\pi}$ παραλλήλως τῷ ἄξονι O. καί τό profil τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ προσδιορίζεται ὅπως εἰς τό engrenage à crémaillère. ἡ διατομή Am εἶναι ἐξειλιγμένη καμπύλη τοῦ κύκλου K. ἀλλ' ὁ τροχός K ἔχει καί πάχος καί δέον νά εὑρεθῇ ἡ ὁρίζουσα τούς ὀδόντας ἐπιφάνεια, ἧς γνωρίζομεν νῦν τήν διά τοῦ ἐπιπέδου OK τομήν.

ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἐφάπτεται διαρκῶς τοῦ ἑλικοειδοῦς τοῦ κοχλίου. τά ἐφαπτόμενα τῆς ἑλικοειδοῦς ἐπιφανείας ἐπίπεδα εἰς τά διάφορα αὐτῆς σημεῖα m, n.... προσδιορίζονται ὑπό τῆς γενετείρας $o\beta$ καί τῆς ἐφαπτομένης τῷ ὁδηγοῦντι ἕλικι καί σχηματίζουσιν οὕτω σταθεράν γωνίαν τήν θ μετά τοῦ ἐπιπέδου OK. τήν περιβάλλουσαν τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἐπιπέδων ἐπιφάνειαν δυνάμεθα νά λάβωμεν ὡς ἐπιφάνειαν ὁρίζουσαν τούς ὀδόντας τοῦ τροχοῦ: ἡ περιβάλλουσα αὕτη ἐπιφάνεια εἶναι ῥαβδωτή. αἱ προβολαί τῶν γενετειρῶν αὐτῆς ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος εἶναι κάθετοι τῇ καμπύλῃ Am καί κατά συνέπειαν ἐφάπτονται τοῦ κύκλου K: σχηματίζουσι δέ μετά τῶν προβολῶν αὐτῶν τήν σταθεράν γωνίαν θ: ἀλλά γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὁριζομένη οὕτω ἐπιφάνεια εἶναι hélicoïde développable, γεωμετρικός τόπος τῶν ἐφαπτομένων ἕλικί τινι κεχαραγμένῳ ἐπί τῆς ὑπό τοῦ κύκλου K προσδιοριζομένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

K εἶναι $\omega' r' = \frac{h\omega}{2\pi}$ ὥστε

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{h}{2\pi r'} = \frac{2\pi r\,\text{συνεφ}\,\theta}{2\pi r'}$$

δυνάμεθα νά εὕρωμεν καί τήν ὀλίσθησεν.

Ἡ ταχύτης v τοῦ σημείου m τῆς vis εἶναι ωr καί κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ OK ἡ ταχύτης v' τοῦ σημείου m τοῦ τροχοῦ εἶναι $\omega'.Km$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OK ἡ σχετική ταχύτης u τοῦ σημείου m τοῦ τροχοῦ ὡς πρός τό σημεῖον m τῆς vis εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς v' καί $-v$ ὥστε

$$u = \sqrt{v^2 + v'^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + \omega'^2(r'^2 + y^2)} \quad \text{ὅπου } y = mp.$$

$$= \omega r\sqrt{1 + \cot^2\theta\left(1 + \frac{y^2}{r'^2}\right)}$$

ἐπειδή y εἶναι πολύ μικρόν δυνάμεθα νά γράψωμεν

$$u = \omega r\sqrt{1 + \text{συνεφ}^2\theta} = \frac{\omega r}{\eta\mu\,\theta}$$

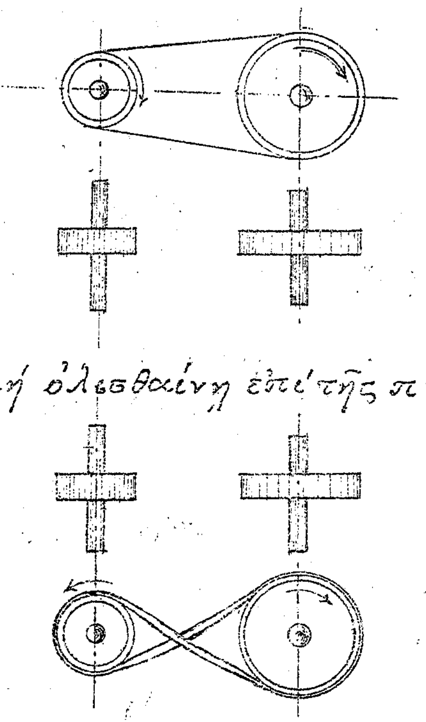
Μετάδοσις τῆς κινήσεως διά ἱμάντων.

Ἀντί τῶν ὀδοντωτῶν τυμπάνων δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν τούς ἱμάντας διά τόν μετασχηματισμόν περιστροφικῆς τινος κινήσεως ω περί τόν ἄξονα O εἰς ἑτέραν ω' περί τόν ἄξονα O' παράλληλον τῷ πρώτῳ καί μέ λόγον $\frac{\omega'}{\omega}$ σταθερόν.

Πρός τοῦτο ἐφαρμόζομεν ἐπί τῶν ἀξόνων O καί O′ δύο τύμπανα O καί O′A′ ὧν αἱ ἀκτῖνες ἐπαληθεύουσι τήν σχέσιν

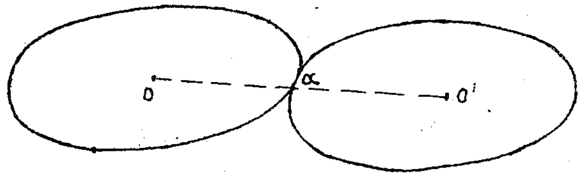
$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{\omega}{\omega'}$$

καί περιτυλίσσομεν ἱμάντα ἐπί τῶν τυμπάνων μέ ἀρκετήν τάσιν ὥστε αὕτη νά μή ὀλισθαίνῃ ἐπί τῆς περιφερείας τούτων.



Μετασχηματισμός περιστροφικῆς κινήσεως ω περί τόν ἄξονα O εἰς ἑτέραν ω′ περί τόν ἄξονα O′ μέ λόγον $\frac{\omega'}{\omega}$ μεταβλητόν.

κατά τά προαποδειχθέντα ἡ σχετική κίνησις τῶν καμπύλων πρέπει νά εἶναι κυλίνδησις τῆς μιᾶς ἐπί τῆς ἑτέρας.



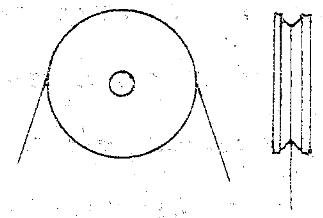
ἵνα εὕρωμεν τήν σχετικήν κίνησιν τῆς καμπύλης [O′] ὡς πρός τήν καμπύλην [O] δέον νά στρέψωμεν καί τάς δύο ὁμοῦ περί τόν ἄξονα O μέ περιστροφικήν ταχύτητα $-\omega$ τό σημεῖον O′ διαγράφει κύκλον περί τό σημεῖον O. ἀλλά καθ' ὑπόθεσιν ἡ κίνησις αὕτη εἶναι κυλίνδησις τῆς καμπύλης O′ ἐπί τῆς καμπύλης O καί κατά συνέπειαν τό στιγμιαῖον κέντρον

τῆς περιστροφῆς εἶναι τό α ἐπί τῆς ἀκτῖνος OO′ οὕτω εἰς τάς κυλινδουμένας καμπύλας τό σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εὑρίσκεται ἐπί τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τῆς περιστροφῆς.

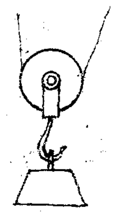
Καί τἀνάπαλιν ἐάν ληφθῇ οἱαδήποτε καμπύλη καί προσδιορίσωμεν ἑτέραν τοιαύτην ὥστε διά τῆς κυλινδήσεως αὐτῆς ἐπί τῆς πρώτης σημεῖόν τι τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς διαγράφει κύκλον, αἱ δύο καμπύλαι δύνανται νά κυλινδοῦνται ἡ μία ἐπί τῆς ἑτέρας, διότι ἐάν περιστρέψωμεν τάς καμπύλας ὁμοῦ περί τό κέντρον O τοῦ κύκλου δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν τό σημεῖον O′ τῆς ἑτέρας εἰς τήν ἀρχικήν αὐτοῦ θέσιν καί οὕτω αἱ συνθῆκαι τῆς σχετικῆς κινήσεως πραγματοποιοῦνται.

παράδειγμα. — Δύο ἐλλείψεις ἐφαπτόμεναι ἀρχικῶς εἰς τάς κορυφάς αὐτῶν πληροῦσι τάς συνθήκας ταύτας.

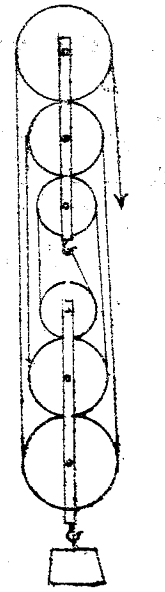
Μετασχηματισμός εὐθυγράμμου κινήσεως εἰς ἑτέρας εὐθύγραμμον κίνησιν



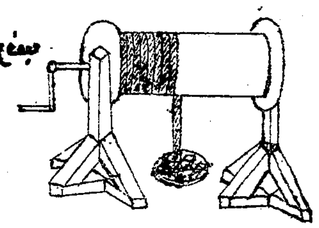
Σταθερά τροχαλιά



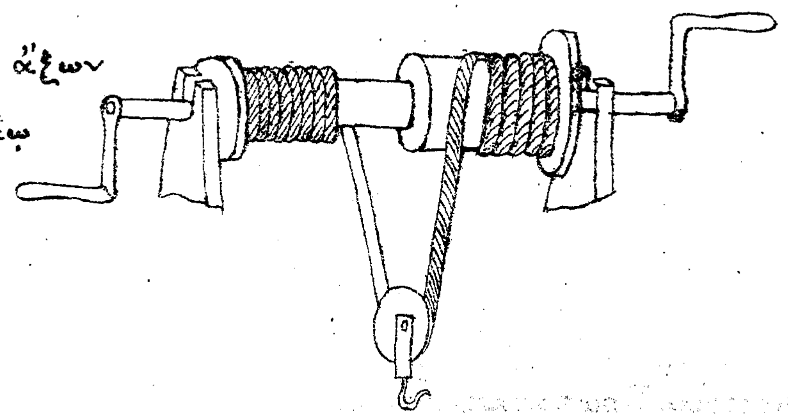
κινουμένη τροχαλιά



Σύστημα τροχαλιῶν (Palan)



ἄξων ἐν περιτροχίῳ (Treuil)

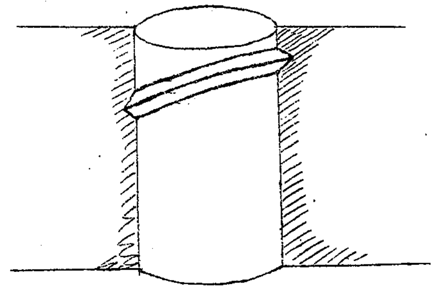


Διαφορικός ἄξων ἐν περιτροχίῳ

Κοχλίας

Μετασχηματισμός κυκλικῆς εἰς εὐθύγραμμον κίνησιν διά τοῦ κοχλίου.

Ἐάν ὑποθέσωμεν τόν κοχλίαν σταθερόν καί καλέσωμεν h τό βῆμα τῆς ἕλικος, δι' ἑκάστην περιστροφήν τοῦ κοχλίου, τό περικόχλιον ὑψοῦται κατά h.



Ἐάν περιστρέψωμεν τόν κοχλίαν κατά γωνίαν θ, τό περικόχλιον ὑψοῦται κατά Z καί ἔχομεν

$$\frac{Z}{h} = \frac{R\theta}{2\pi R}$$

ἤ

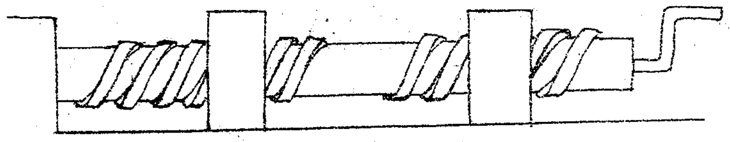
$$Z = \frac{hR}{2\pi R}\,\theta$$

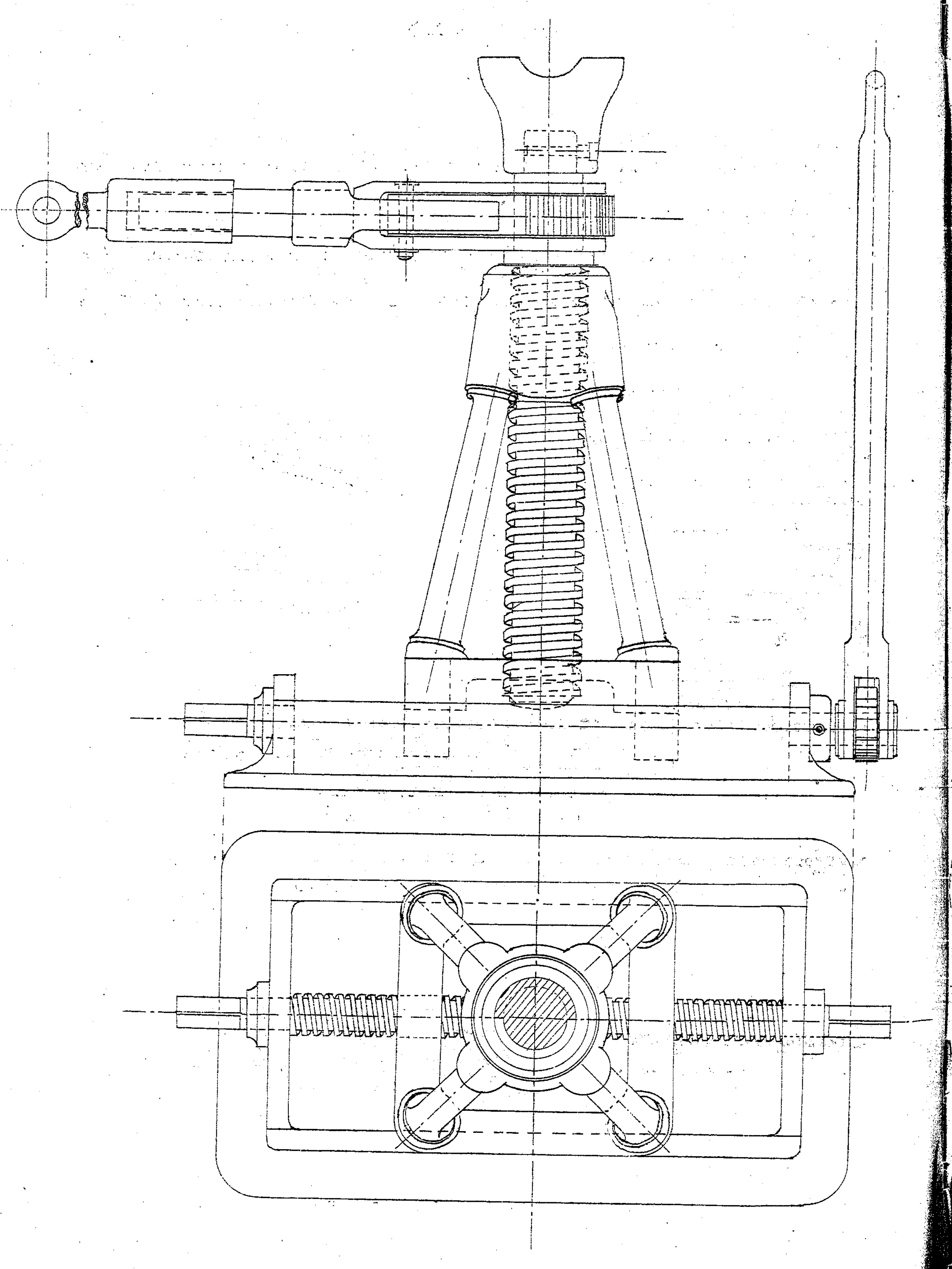
ἡ μεταβατική ταχύτης τοῦ περικοχλίου εἶναι λοιπόν

$$V = \frac{dZ}{dt} = \frac{h}{2\pi}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{h\omega}{2\pi}$$

ἀνεξάρτητος δηλ. τῆς ἀκτῖνος τοῦ κοχλίου.

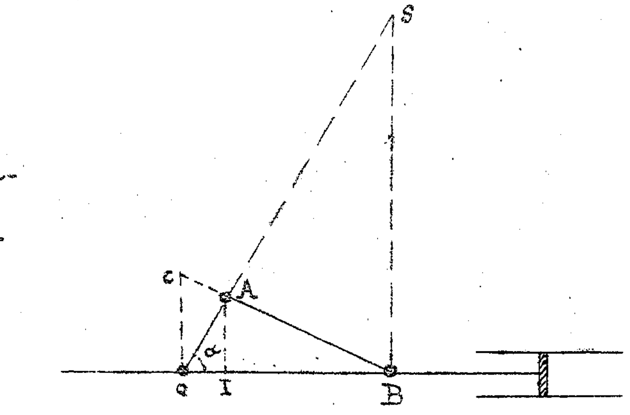
Διαφορικός κοχλίας.



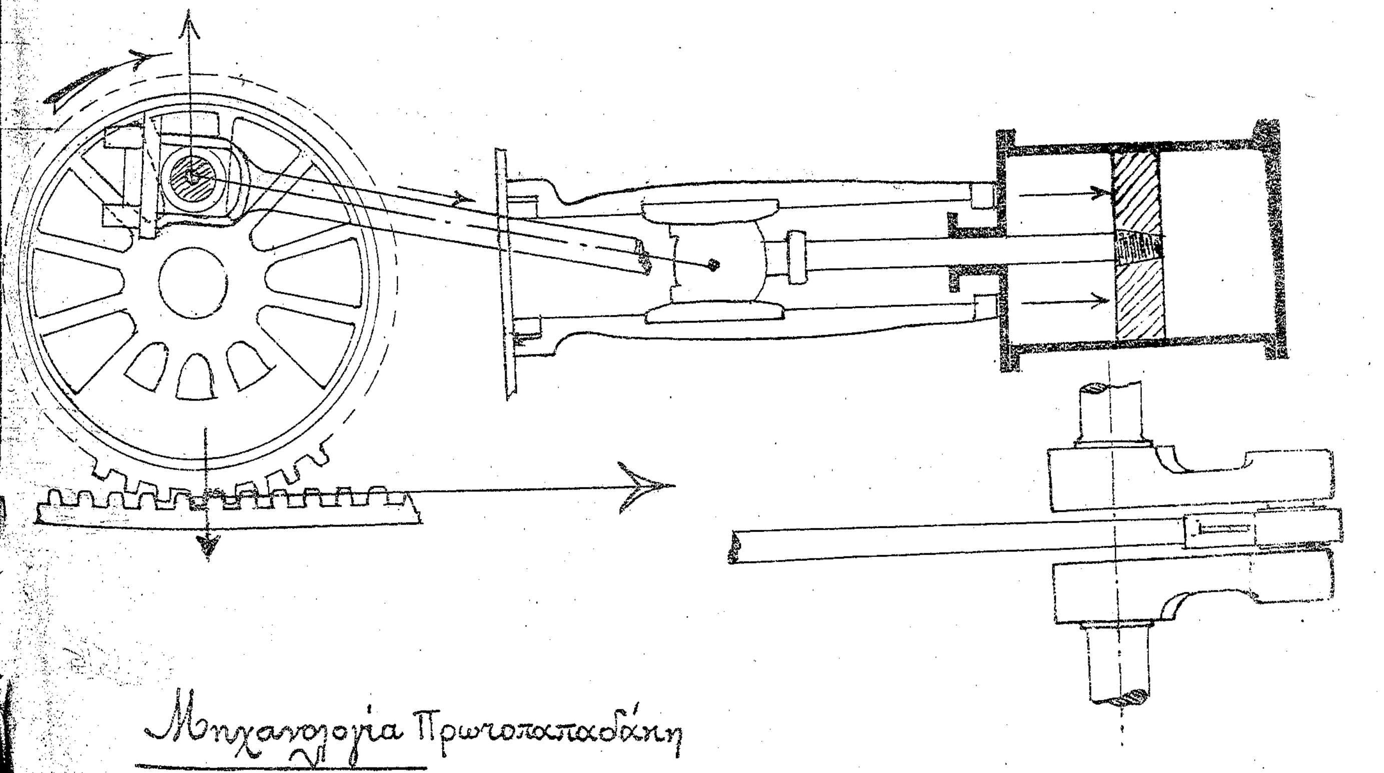


Μετασχηματισμός συνεχοῦς περιστροφικῆς κινήσεως εἰς εὐθύγραμμον παλινδρομικήν

Ἐπί τοῦ περιστροφομένου ἄξονος ἐφαρμόζομεν σταθερῶς στρόφαλον ἐνηρθρωμένον εἰς τό ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ, μετά διωστῆρος. ὁ διωστήρ οὗτος εἶναι ἐπίσης ἐνηρθρωμένος διά τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων αὐτοῦ μετά βάκτρου οὗτινος τά διάφορα σημεῖα φέρονται ὑπό εὐθυγράμμου παλινδρομικῆς κινήσεως.



Λόγος τῆς περί τόν ἄξονα ο περιστροφικῆς ταχύτητος ω πρός τήν εὐθύγραμμον ταχύτητα V τοῦ σημείου B.



Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

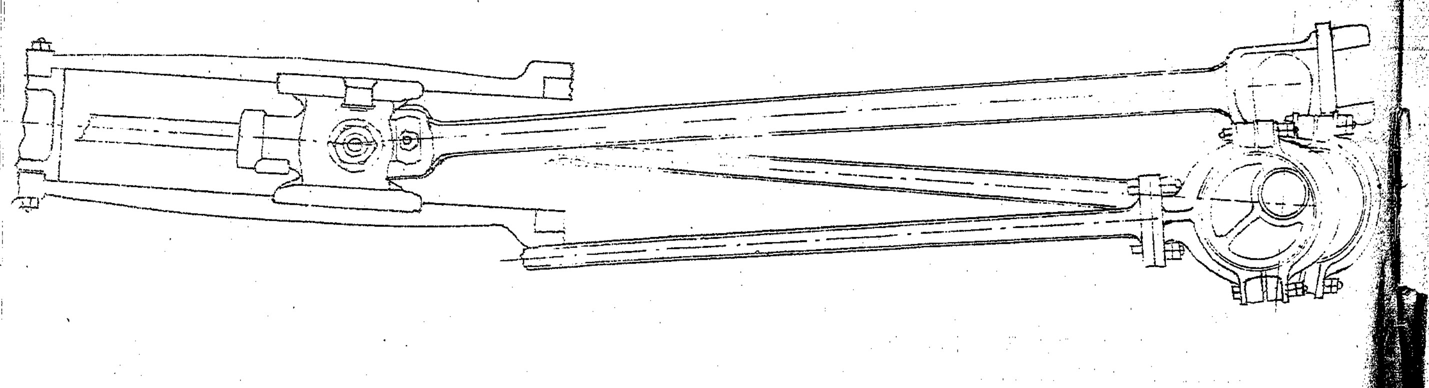
Τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς τοῦ διωστῆρος AB εἶναι S ἡ ταχύτης τοῦ σημείου A εἶναι ωr. ἀλλ' ἐάν θεωρήσωμεν τό σημεῖον A περιστρεφόμενον περί τό σημεῖον S μέ περιστροφικήν ταχύτητα ω' ἡ γραμμική ταχύτης αὐτοῦ ἐκφράζεται διά $\omega'.SA$ καί ἐπειδή $\omega r = \omega' SA$ ἔπεται $\omega' = \frac{\omega r}{SA}$
ἡ ταχύτης τοῦ σημείου B εἶναι λοιπόν $v = \frac{\omega r}{SA}.SB$
καί ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων AOC καί ASB ἐξάγομεν

$$\frac{SB}{SA} = \frac{OC}{r}$$

ὥστε ἡ ταχύτης v τοῦ σημείου B εἶναι $v = \omega.OC$ $\frac{v}{\omega} = OC$
εἰς τήν σχέσιν ταύτην δυνάμεθα νά δώσωμεν καί τήν μᾶλλον ἐν χρήσει ἑξῆς μορφήν.
ἡ ταχύτης V τοῦ σημείου I εἶναι $\frac{d.OI}{dt} = \frac{d(r\omega s\alpha)}{dt} = -r\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -AI\omega$

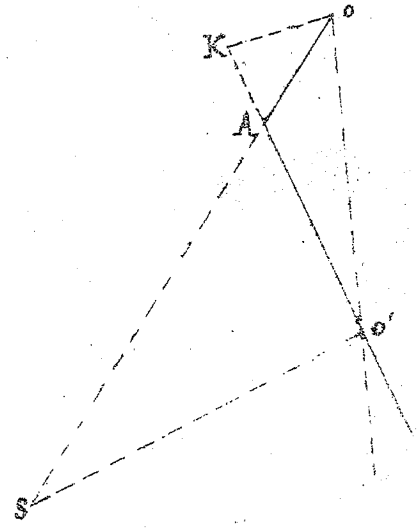
Κυκλικά ἔκκεντρα μέ κλοιόν

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ κνώδαξ τοῦ στροφάλου αὐξάνει μέχρις οὗ καλύψῃ τόν ἄξονα τῆς περιστροφῆς ἔχομεν τό μέκλοιον κυκλικόν ἔκκεντρον.



Αἰωρουμένη μηχανή

Τό βάκτρον τοῦ ἐμβόλου συνδέεται ἀπ' εὐθείας μετά τοῦ στροφάλου. ὁ κύλινδρος αἰωρεῖται περί ἄξονα ὁ παράλληλον τῷ ἄξονι O τοῦ στροφάλου. τό βάκτρον τοῦ ἐμβόλου ἐνηρθρωμένον παρά τῷ σημείῳ A μετά τοῦ στροφάλου, OA διέρχεται διαρκῶς διά τοῦ σταθεροῦ σημείου O' τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς αὐτοῦ εἶναι τό S. αἱ ταχύτητες τοῦ σημείου A περί τά σημεῖα O καί S εἶναι



ωOA καί $\omega'.SA = \omega.OA$

ὅθεν ἡ περιστροφική στιγμιαία ταχύτης περί τό σημεῖον S εἶναι

$$\omega' = \omega\frac{OA}{SA} = \frac{\omega r}{OSA}$$

ἡ ταχύτης (γραμμική) τοῦ σημείου O' εἶναι λοιπόν

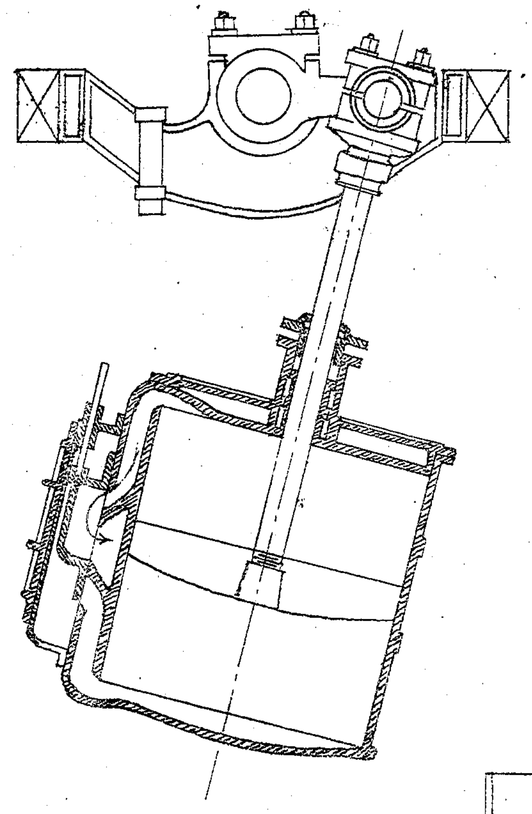
$$v = \omega\frac{OA}{SA}.O'S = \omega r\frac{O'S}{SA}$$

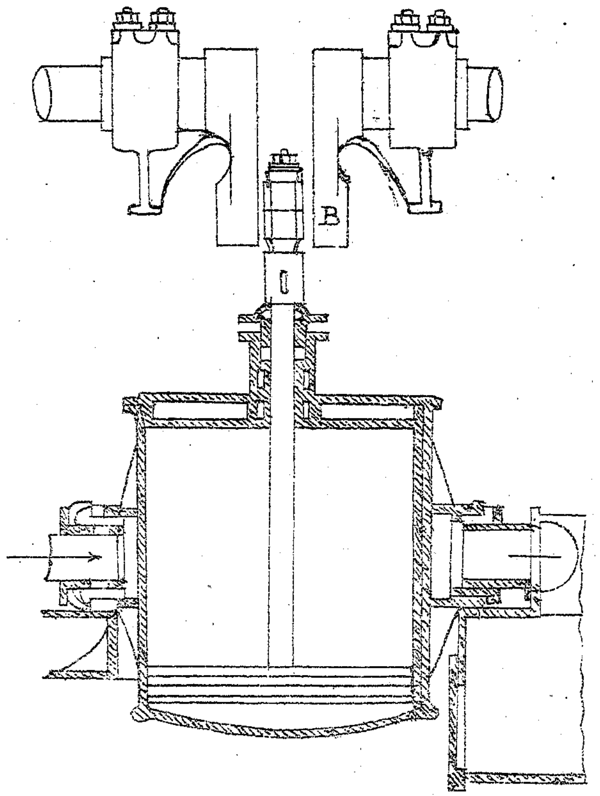
ἀλλά

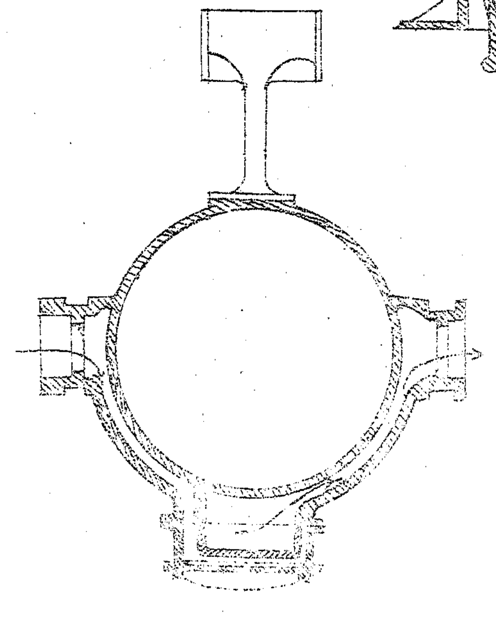
$$\frac{O'S}{SA} = \frac{OK}{r}$$

ὥστε

$$v = \omega r\frac{OK}{r} = \omega.OK$$



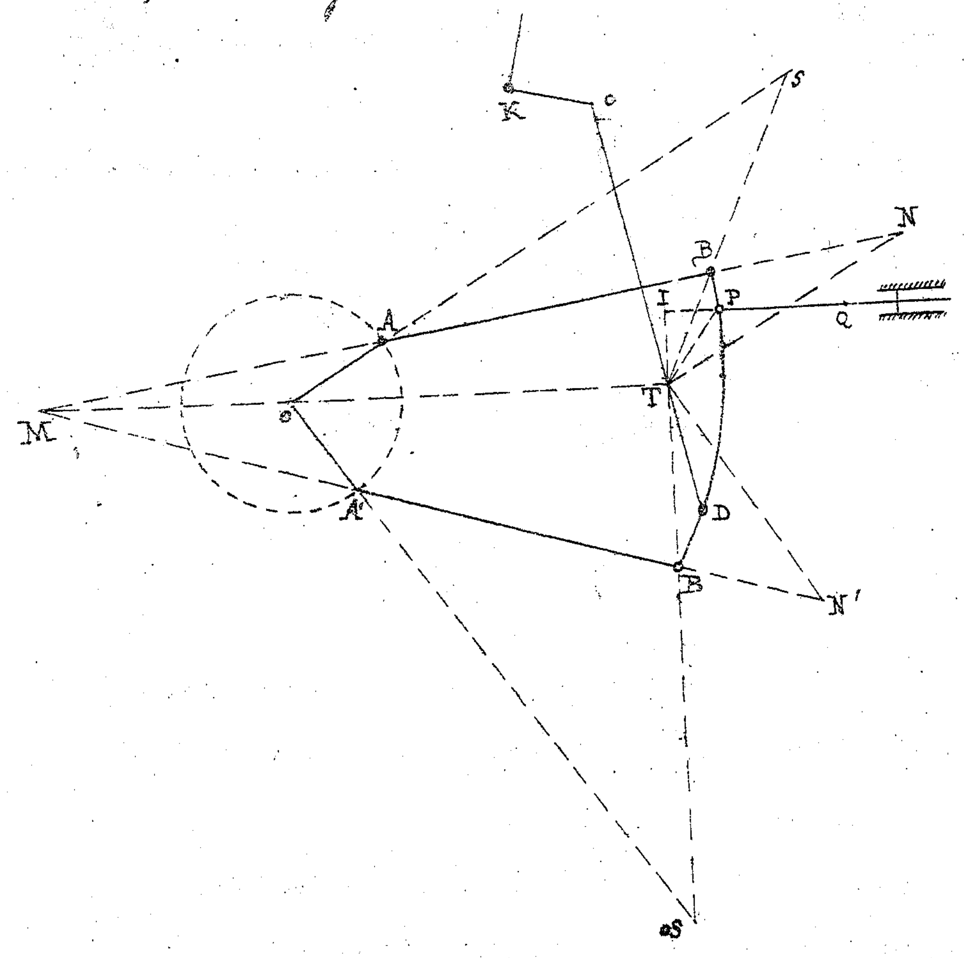




Ὠλκός

Ζητήσωμεν ἤδη μηχανισμόν τινα διά τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νά μετατρέψωμεν περιστροφικήν τινα κίνησιν περί ἄξονα τόν O εἰς ἑτέραν εὐθύγραμμον παλινδρομικήν, τῆς ὁποίας νά δυνάμεθα νά μεταβάλλωμεν τήν φοράν καί τό πλάτος κατά βούλησιν ἤ αὐτομάτως ἐντός ὡρισμένων ὁρίων.

Ὁ πρός τήν μετατροπήν ταύτην μεταχειριζόμενος μηχανισμός ἐφευρέθη τό πρῶτον ὑπό τοῦ Stephenson καί καλεῖται ὠλκός τοῦ Stephenson.



δι' ὡρισμένην θέσιν τῆς ὠλκοῦ BB' τό σημεῖον C εἶναι σταθερόν καί τό σημεῖον D κατά τήν κίνησιν τῆς ὤλκου στρέφεται περί τό σημεῖον C τό στιγμιαῖον κέντρον περιστροφῆς τῆς ὤλκου εὑρίσκεται λοιπόν ἐπί τῆς εὐθείας CD. ἔστω T τό σημεῖον τοῦτο καί ω' ἡ περί τοῦτο στιγμιαία περιστροφική ταχύτης τῆς ὤλκου. τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς τοῦ διωστῆρος AB εἶναι S καί τό τῆς $A'B'$ εἶναι S'.

Ἡ ταχύτης τοῦ A εἶναι $\omega.OA$ ἡ περί τό σημεῖον S στιγμιαία περιστροφική ταχύτης τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι $\omega.\frac{OA}{SA}$. ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ στιγμιαία γραμμική ταχύτης τοῦ B εἶναι $\omega.\frac{OA}{SA}.SB$ κατά συνέπειαν ἡ στιγμιαία περιστροφική ταχύτης ω' τοῦ αὐτοῦ σημείου περί τό σημεῖον T εἶναι

$$\omega'=\omega\frac{OA}{SA}.\frac{SB}{TB} \quad \text{διά τοῦ αὐτοῦ τρόπου} \quad \omega'=\omega\frac{OA'}{S'A'}.\frac{S'B'}{TB'}$$

ἀχθήτωσαν αἱ TN καί TN' παράλληλοι ταῖς OA καί OA' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων BTN καί ASB ἐξάγομεν

$$\frac{TN}{BT}=\frac{AS}{SB} \qquad TN=\frac{AS.BT}{SB}$$

ἐξ οὗ

$$\omega'=\omega\frac{OA}{TN} \qquad \omega'=\omega\frac{OA'}{TN'}$$

καί

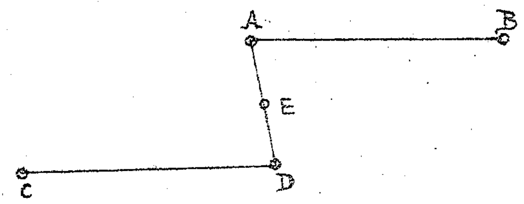
$$\frac{OA}{TN}=\frac{OA'}{TN'}$$

αἱ εὐθεῖαι AB καί $A'B'$ συναντῶνται λοιπόν ἐπί τῆς εὐθείας OT. οὕτω τό σημεῖον T προσδιορίζεται ὑπό τῶν εὐθειῶν CD καί MO (Θεώρημα τοῦ Κου Phillips)

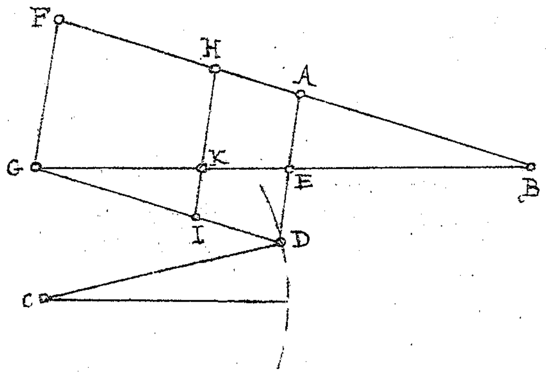
Ἡ ταχύτης τοῦ σημείου P εἶναι $\omega'.TP$ κάθετος τῇ εὐθείᾳ TP· ἡ συνισταμένη τῆς ταχύτητος ταύτης παραλλήλως τῇ PQ εἶναι $\omega'TI=$ τῇ ταχύτητι V τοῦ σύρτου.

$$V=\omega'TI=\omega\frac{OA}{TN}.TI.$$

Παραλληλόγραμμον τοῦ Watt. — Ἐάν AB καί CD εἶναι δύο ἴσαι ἀκτῖνες κι- — νούμεναι — περί τούς ἄξονας B καί C καί ἡνωμέναι διά διωστῆρος AD τό σημεῖον E διαγράφει ἐπαισθητῶς εὐθεῖαν γραμμήν.



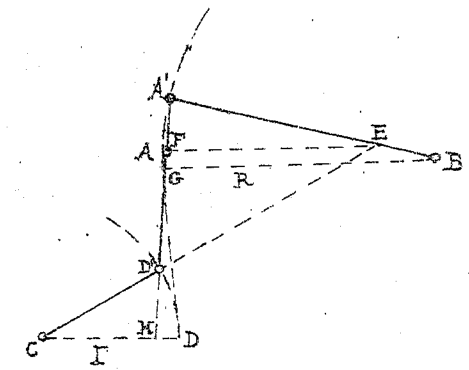
Ἐάν προεκτείνωμεν τόν μέχρι τοῦ AF καί συμπληρώσωμεν τό ἔναρθρον παραλληλόγραμμον $ADGF$ οὕτως ὥστε G νά εὑρίσκηται ἐπί τῆς προεκτάσεως ~~τοῦ~~ BE, τά σημεῖα G καί E διαγράφουσιν ὁμοίας καμπύλας ὡς ~~πρός~~ τό B.



Εἰς τό σημεῖον G ἐναρθροῦται τό βάκτρον τοῦ ἐμβόλου καί εἰς τό σημεῖον E τό βάκτρον τῆς ἀεραντλίας.

Εὐκόλως δέ βλέπομεν, ὅτι καί τό σημεῖον K διαγράφει καμπύλην ὁμοίαν ταῖς E καί G.

Ἡ ὑπόθεσις $AB=CD$ δέν εἶναι ἀναγκαία. Ἔστωσαν τῷ ὄντι δύο ἀκτῖνες AB καί CD ὧν τά μήκη εἶναι R καί r ὁριζόντιοι ἐν τῇ ἀρχικῇ αὐτῶν θέσει, αἰωρούμεναι περί τά σταθερά σημεῖα B



καί C, καί ἡνωμέναι διά τοῦ διωστῆρος AD. ποῖον εἶναι τό σημεῖον F τῆς εὐθείας AD, τό ὁποῖον διαγράφει εὐθεῖαν γραμμήν κατακόρυφον.

Τό σημεῖον τοῦτο F εὑρίσκεται προφανῶς ἐπί τῆς ὁριζοντίου τοῦ στιγμιαίου κέντρου τῆς περιστροφῆς E τοῦ διωστῆρος.

Ἐάν ἡ ἐπί τῆς κατακορύφου κλίσις εἶναι μικρά, ἔχομεν

$A'G = DH$

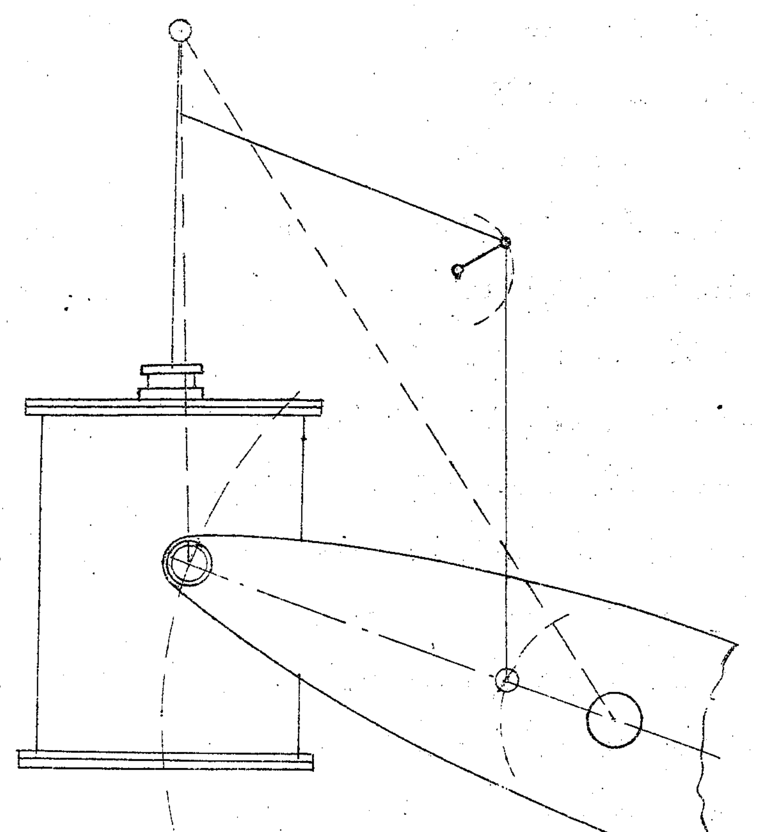
ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου

$$\frac{A'F}{A'G} = \frac{FE}{GB} \qquad \frac{FD}{D'H \text{ ἢ } A'G} = \frac{FE}{CH}$$

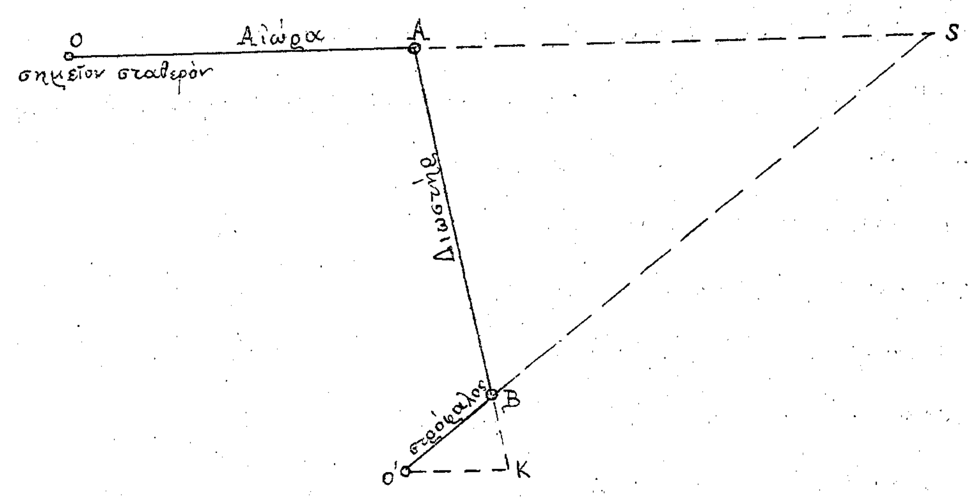
ὅθεν

$$\frac{A'F}{FD} = \frac{CH}{GB} = \text{σχεδόν } \frac{r}{R}$$

ὥστε τό σημεῖον F τό ὁποῖον διαγράφει κατακόρυφον εὐθεῖαν, εἶναι σχεδόν σταθερόν ἐπί τοῦ διωστῆρος.



Μετασχηματισμός συνεχοῦς περιστροφικῆς κινήσεως εἰς ἑτέρας περιστροφικῆς παλινδρομικῆς καί τανάπαλιν



στιγμιαία περιστροφική ταχύτης περί τό σημεῖον S εἶναι $\omega \frac{OA}{SA}$

ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ σημείου B εἶναι $\omega \frac{OA}{SA} . SB$, καί ἡ περί τό σημεῖον O' περιστροφική ταχύτης $\omega \frac{OA}{SA} . \frac{SB}{O'B}$. ἐάν δέ φέρωμεν $O'K$ παράλληλον τῇ OA ἔχομεν

$$\frac{SB}{SA} = \frac{O'B}{O'K}$$

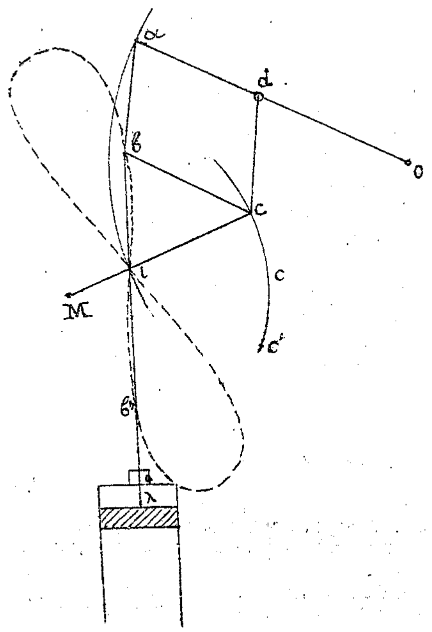
λοιπόν

$$\omega' = \omega \frac{OA}{O'K}$$

Ἄρθρωσις τοῦ βάκτρου τοῦ ἐμβόλου μετὰ τῆς αἰώρας. ἤ παραλληλόγραμμον τοῦ Watt.

—

Ὁ Watt μετεβίβαζε τὴν εὐθύγραμμον παλινδρομικὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου εἰς τὸν περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον O περιστρεφόμενον δι' ἐνάρθρου παραλληλογράμμου $\alpha\beta c d$. καὶ παρετήρησεν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου, τὸ σημεῖον C διαγράφει καμπύλην τινά, ἀντὶ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν ἐγγύτατον αὐτῆς κύκλον μεταξὺ τῶν σημείων CC''.



ἐὰν ἤδη ἑνώσωμεν τὸ κινητὸν σημεῖον C μὲ τὸ σταθερὸν σημεῖον C μὲ τὸ σταθερὸν σημεῖον M δι' ἐνάρθρου δοκοῦ MC καὶ ἀναγκάσωμεν τὸ σημεῖον C νὰ διαγράφῃ ἀκριβῶς κύκλον καὶ οὐχὶ μόνον κατὰ προσέγγισιν τὸ σημεῖον β τοῦ βάκτρου τοῦ ἐμβόλου. δὲν διαγράφει τὴν εὐθεῖαν βλ, ἀλλὰ τὴν προσεγγίζουσαν ταύτῃ καμπύλην $\beta\iota\beta''$.

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸ ἔναρθρον παραλληλόγραμμον εἰς τὰς ἀπωτάτας $A'B'C'D'$ καὶ $A''B''C''D''$ καὶ τὴν μέσην ABC θέσεις αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ὁ ὑπὸ τοῦ σημείου C διαγραφόμενος κύ-

κλος προσδιορίζεται ὑπὸ τῶν τριῶν σημείων $C'CC''$ καὶ ἔχει τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας BC, ἐὰν δὲ σχηματίσωμεν $A'B'OH'$ βλέπομεν, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον H' διαγράφει σταθερὸν κύκλον. τὸ σημεῖον B' διαγράφει λοιπὸν καμπύλην, ἥτις εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος ὡρισμένου σημείου εὐθείας τινός, τῆς ὁποίας δύο ἕτερα σημεῖα ἐπίσης ὡρισμένα, διαγράφουσι σταθεροὺς κύκλους $H'H$ καὶ $C'C''$. δυνάμεθα οὕτω νὰ χαράξωμεν τὴν ὑπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ βάκτρου τοῦ ἐμβόλου διαγραφομένην καμπύλην (courbe à longue).

Ἂς ζητήσωμεν ἤδη τὴν σχέσιν τὴν συνδέουσαν τὴν γραμμικὴν ταχύτητα V τοῦ ἐμβόλου μετὰ τῆς περὶ τὸ σημεῖον O περιστροφικῆς ταχύτητος ω τοῦ

Τὸ στιγμιαῖον κέντρον περιστροφῆς τῆς δοκοῦ $B'C'$ εἶναι τὸ S. Τὸ τῆς δοκοῦ $C'D'$ εἶναι τὸ T. Ἔστωσαν δὲ ω' καὶ ω'' αἱ περὶ τὰ κέντρα ταῦτα περιστροφικαὶ ταχύτητες ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ σημείου B' ἐκφράζεται διὰ $\omega'.B'S$ ἀλλ' αὕτη μᾶς εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση τῇ V ἔστω $\omega'=\frac{V}{B'S}$ καὶ ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ σημείου C' εἶναι $\omega'.SC'=V\frac{SC'}{B'S}$ ἐπειδὴ ἡ περὶ τὸ σημεῖον T περιστροφικὴ ταχύτης εἶναι ω'' ἔπεται ὅτι $\omega''TC'=V\frac{SC'}{B'S}$ ὥστε $\omega''=V\frac{SC'}{B'S.TC'}$ ὅθεν ἡ ταχύτης τοῦ σημείου D' εἶναι $\omega''.TD'=V\frac{SC'.TD'}{SB'.TC'}$ ἀλλὰ τὸ σημεῖον D' στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον O μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα ω ὥστε ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι $\omega.OD'$ καὶ ἔχομεν

$$\omega.OD'=V\frac{SC'.TD'}{SB'.TC'} \qquad \omega=\frac{V}{SB'}\cdot\frac{SC'}{TC'}\cdot\frac{TD'}{OD'}$$

ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τριγώνων $TC'D'$ καὶ TOS ἐξάγομεν

$$\frac{SC'}{T'C'} = \frac{OD'}{TD'}$$

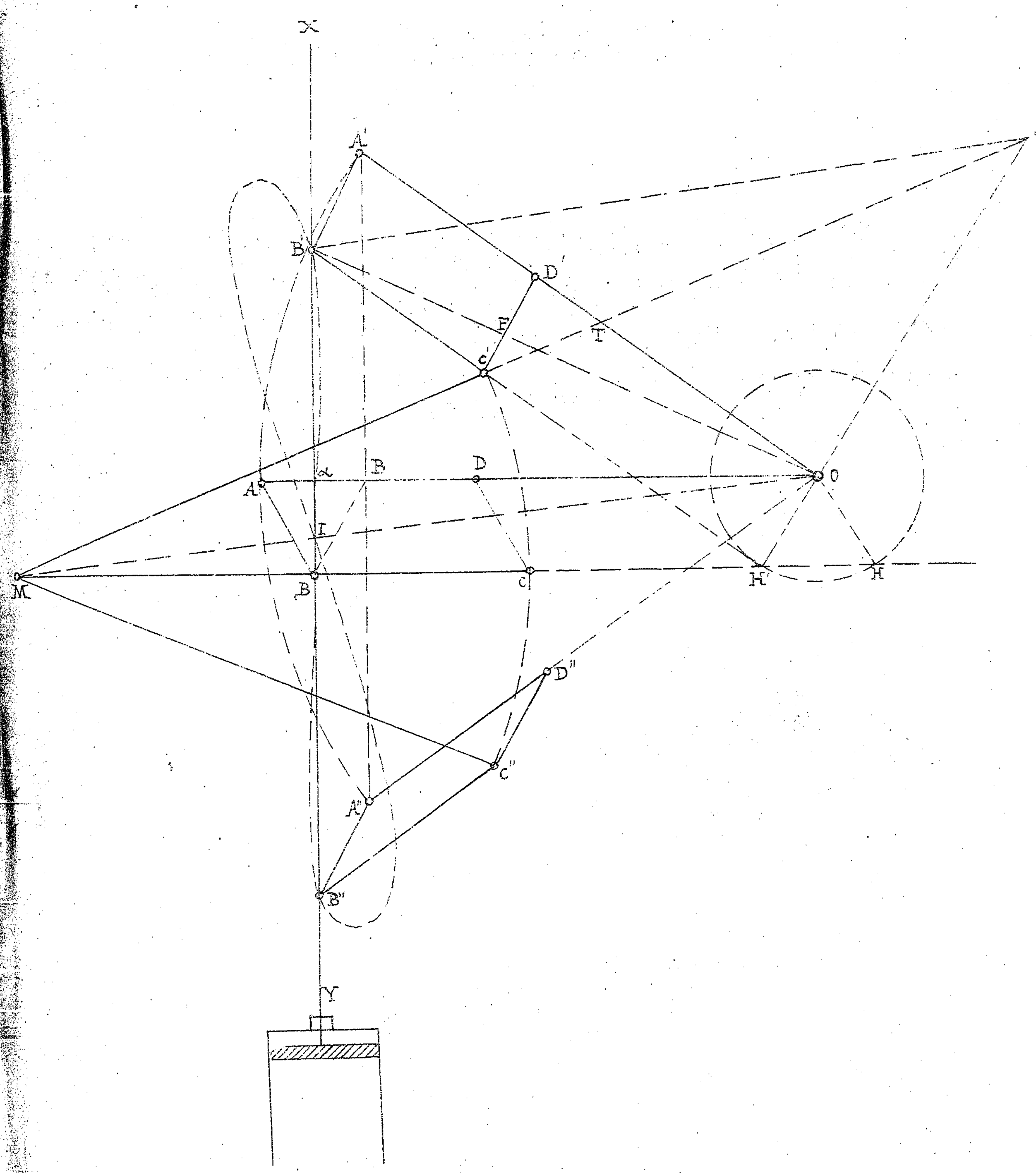
ὥστε

$$\omega = \frac{V}{SB'} \qquad V = \omega . SB'$$

οὕτω ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἡ αὐτή ὡς εἰ ἡ περί τόν ἄξονα O περιστροφική ταχύτης τῆς αἰώρας μετετρέπετο ἀνά πᾶσαν στιγμήν εἰς τήν αὐτήν περί τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς περιστροφικήν κίνησιν.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $OD'F$ καί $FC'B'$ ἐξάγομεν $\frac{C'F}{D'F} = \frac{FO}{FB'} = \frac{OD}{A'D'} =$ σταθ. ἐξ οὗ $C'F =$ σταθερόν $OF = KOB'$ δηλαδή τό σημεῖον F εἰς ὅ ἡ εὐθεῖα OB' συναντᾷ τήν δοκόν $C'D'$ εἶναι ἀμετάβλητον ἐπ' αὐτῆς καί διαγράφει καμπύλην παράλληλον τῇ ὑπό τοῦ σημείου B διαγραφομένῃ.

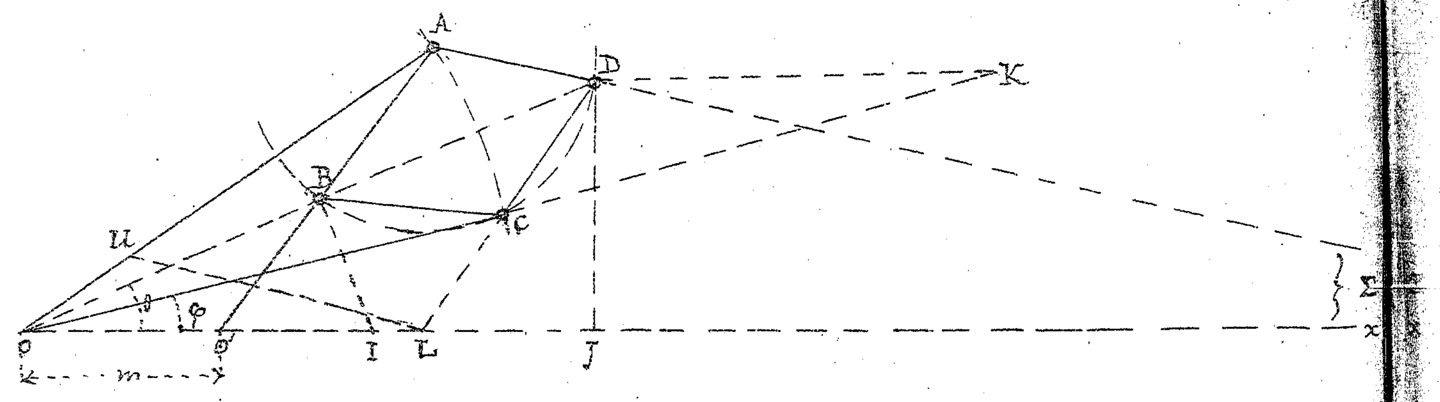
ἐπωφελοῦνται τῆς ἰδιότητος ταύτης διά τήν κίνησιν ἑτέρου ἐμβόλου ἐνηρθρωμένου παρά τῷ σημείῳ F μετά τῆς δοκοῦ $C'D'$.



Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

Ἔναρθρον σύστημα τοῦ Peaucellier

OA καί OB εἶναι δοκοί ἴσαι περιστρεφόμεναι περί τό σημεῖον O. $ABCD$ ἔναρθρον παραλληλόγραμμον ἐνηρθρωμένον εἰς τά ἄκρα αὐτῶν A καί C $O'B=OO'$ ἔναρθρος εἰς τό B καί δυναμένη νά περιστραφῇ περί τό O'.



H εὐθεῖα BD, κάθετος εἰς τό μέσον τῆς AC διέρχεται διά τοῦ σημείου O. τά σημεῖα BCD εὑρίσκονται ἐπί κύκλου ἔχοντος κέντρον τό A ὥστε

$$OB=\frac{R^2-\alpha^2}{\rho}=\rho_1^{\circ} \qquad OB.OD=\overline{OA}^2-\overline{BA}^2=\text{σταθερᾷ ποσότητι}\,(K^2-\alpha^2)$$

ἡ ὑπό τοῦ σημείου D διαγραφομένη καμπύλη εἶναι λοιπόν ἡ

transformée par rayons vecteurs reciproques τῆς ὑπό τοῦ σημείου B διαγραφομένης καμπύλης. ἀλλά τό σημεῖον B διαγράφει τόν κύκλον $O'B=R'$. λοιπόν καί τό σημεῖον D διαγράφει ὡρισμένον κύκλον, [οὗτινος ἡ ἐξίσωσις εὑρίσκεται εὐκόλως. τῷ ὄντι

$$R'^2=\overline{O'B}^2=\rho_1^2+m^2-2m.\rho_1\cos\theta$$

ἤ ἕνεκεν τοῦ (1)

$$R'^2=\frac{(R^2-\alpha^2)^2}{\rho^2}+m^2-2m\frac{R^2-\alpha^2}{\rho}\cos\theta$$

$$(2) \qquad \rho^2(R'^2-m^2)+2m(R^2-\alpha^2\cos\theta\;\rho=(R^2-\alpha^2)^2$$

$$(x^2+y^2)\,(R'^2-m^2)+2m[R^2-\alpha^2]x=(R^2-\alpha^2)^2$$

τό κέντρον τοῦ κύκλου τούτου εὑρίσκεται ἐπί τοῦ OX εἰς ἀπόστασιν

$$x_1=\frac{m(R^2-\alpha^2)}{R'^2-m^2}$$

τοῦ σημείου O καί ἔχει ὡς ἀκτῖνα $R_1=\pm R'\dfrac{R^2-\alpha^2}{R'^2-m^2}$]

Οὕτω μεταβάλλοντες τήν ἀπόστασιν $m=OO'$ τῶν σταθερῶν σημείων O καί O' δυνάμεθα νά διαγράψωμεν διά τοῦ σημείου D κύκλον οἱονδήποτε. ἐάν ἤδη λάβωμεν $R'=O'B=m$ ἡ ἀκτίς τοῦ ὑπό τοῦ σημείου D διαγραφομένου κύκλου αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον καί ἡ περιφέρεια αὐτοῦ μεταβάλλεται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν τήν DJ κάθετον ἐπί τῆς OO' καί εἰς ἀπόστασιν $x=\dfrac{R^2-\alpha^2}{2m}$.

ἥν δίδει ἡ ἐξίσωσις (2), ὅπερ ἠδυνάμεθα νά εὕρωμεν καί ἀπ' εὐθείας, διότι ἐάν φέρωμεν τήν BI κάθετον ἐπί τῆς OB τά τρίγωνα $OD\jmath$ καί OBI εἶναι ὅμοια καί ἔχομεν $\frac{O\jmath}{OB}=\frac{OD}{OI}$ καί ἐπειδή O, B καί I εὑρίσκονται ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας $OI=2OO=2m$ ἔχομεν

$$O\jmath=\frac{OB.OD}{2m}=\frac{R^2-\alpha^2}{2m}=\text{σταθ.}$$ κατά συνέπειαν D διαγράφει τήν εὐθεῖαν $D\jmath$.

OC = balancier OB = contrebalancier.

σχέσις μεταξύ τῆς ταχύτητος V τοῦ σημείου D καί τῆς περί τόν ἄξονα O περιστροφικῆς ταχύτητος ω. ἔχομεν

$$(2)\quad D\jmath=y=O\jmath\, tg\theta=\frac{R^2-\alpha^2}{2m}tg\theta \qquad OB=2m\cos\theta \ (3)$$

καί ἐν τῷ τριγώνῳ CBO

$$\alpha^2=\overline{OB}^2+R^2-2OB.R\cos(\theta-\varphi)$$

ἤ ἐκ τοῦ (3)

$$(4)\quad \alpha^2=4m^2\cos^2\theta+R^2-4mR\cos\theta\cos(\theta-\varphi)$$

διά τῆς ἀπαλειφῆς τοῦ θ μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (2) καί (4) εὑρίσκομεν σχέσιν τινα μεταξύ τοῦ y καί φ καί κατά συνέπειαν μεταξύ τοῦ $\frac{dy}{dt}=V$ καί $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$.

Ἤδη ἄς ζητήσωμεν τήν σχέσιν τήν συνδέουσαν τά περιστροφικάς ταχύτητας ω καί ω' τῆς OC καί OA. K εἶναι τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς τῆς CD. Ἔστω ω_1 ἡ περί τό στιγμιαῖον τοῦτο κέντρον περιστροφική ταχύτης. ἡ γραμμική ταχύτης τοῦ σημείου D εἶναι ἀφ' ἑνός V ἀφ' ἑτέρου $\omega_1 KD$ ὥστε $\omega_1=\frac{V}{KD}$ καί ἡ γραμμική ταχύτης τοῦ σημείου C εἶναι $\omega_1.KC=\frac{V}{KD}.KC$ ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι $\omega.OC$ ὥστε $\omega.OC=\frac{V}{KD}.KC$ ἤ $V=\omega\frac{OC}{KC}.KD$ τά τρίγωνα OCL καί CDK δίδουσιν $\frac{OC}{CK}=\frac{OL}{DK}$ ὥστε

$$V=\omega.O\Sigma$$

ἐάν Σ' εἶναι τό σημεῖον εἰς ὅ συναντῶνται αἱ εὐθεῖαι Ou καί AD ἔχομεν ἐπίσης

$$V'=\omega'.O\Sigma'$$

ὅθεν

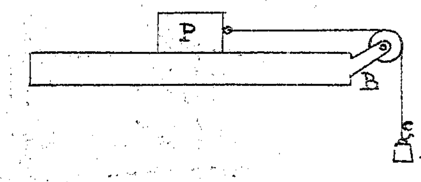
$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{O\Sigma}{O\Sigma'}$$

ἔστω Σu παράλληλος τῇ AD ἔχομεν $\frac{O\Sigma}{O\Sigma'}=\frac{Ou}{OA}$ ὥστε

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{Ou}{OA}$$

Περί προστριβῆς

Νοήσωμεν τράπεζαν ὁριζόντιον AB καί ἐπ' αὐτῆς ἐναποτεθειμένον σῶμα P. τό σῶμα τοῦτο εὑρίσκεται ὑπό τήν ἐπενέργειαν δύο δυνάμεων: τοῦ βάρους αὐτοῦ P καί τῆς ἐπ' αὐτοῦ ἀντιδράσεως τῆς τραπέζης, ἥν μέχρι τοῦδε ὑπεθέσαμεν ἴσην καί ἀντίθετον τῷ βάρει P. αἱ δυνάμεις αὗται, ἀμφότεραι κατακόρυφοι οὐδεμίαν ὁριζόντιον συνιστῶσαν ἔχουσι καί κατά συνέπειαν ἐάν ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ σώματος ὁριζόντιον δύναμιν, ἔστω καί ἐλαχίστην,

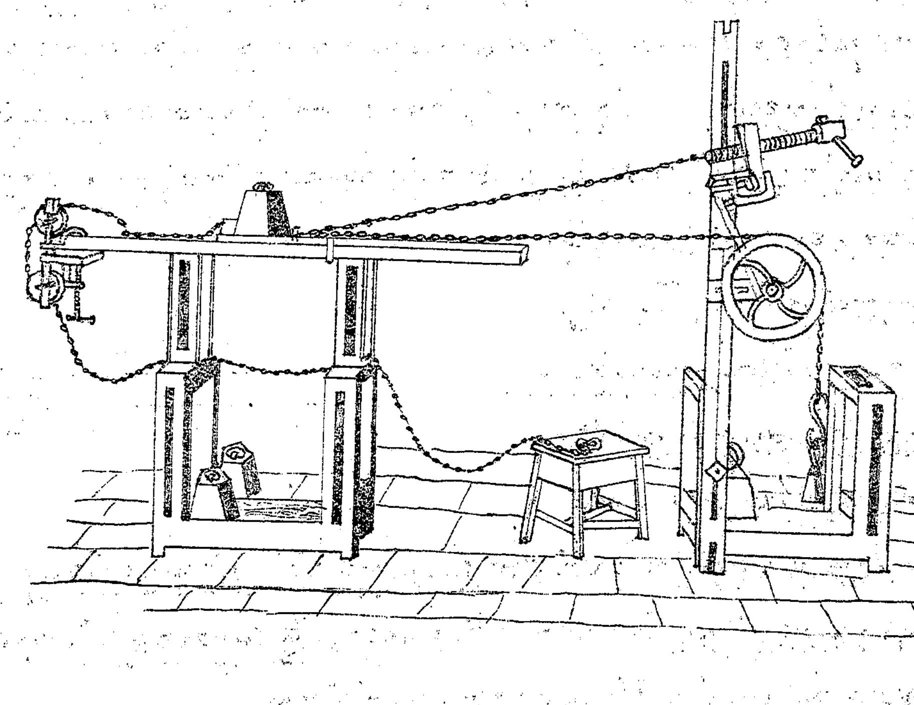


Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

ὑπό οὐδεμιᾶς ἑτέρας δυνάμεως ἀντισταθμεζεται αὕτη, καί τό σῶμα ἔπρεπε νά τεθῇ εἰς κίνησιν.

Ἡ καθημερινή πεῖρα ἐν τούτοις μᾶς διδάσκει τό ἐναντίον, βλέπομεν δηλ. ὅτι, ὅπως θέσωμεν τό σῶμα P εἰς κίνησιν ὁριζοντίως ἐπί τῆς τραπέζης, δέον νά ἐφαρμόσωμεν ἐπ᾽ αὐτοῦ δύναμιν p ἐντάσεως σχετικῶς μεγάλης, διότι εἰς τήν κίνησιν αὐτοῦ ἀνθίσταται ἡ ἐπί τῆς τραπέζης προστριβή του, ἥτις κατά συνέπειαν πρέπει νά θεωρηθῇ ὡς δύναμις, ἀναπτυσσομένη παρά τοῖς σημείοις τῆς ἐπαφῆς τό σώματων P καί AB καί ἔχουσα ὡρισμένην ἔντασιν καί φοράν.

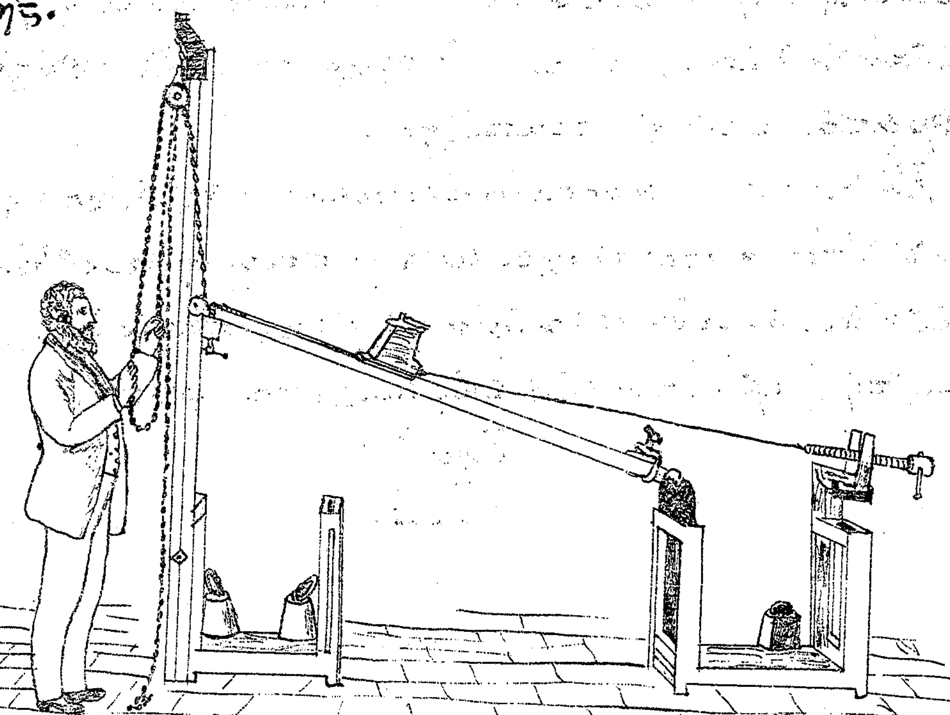
Ἐάν λ. χ. ὡς ἐμφαίνει τοῦτο τό ἄνω σχῆμα ἀναρτήσωμεν ἀπό τοῦ σημείου C βάρος p σχετικῶς μικρόν τό σῶμα P ἐξακολουθεῖ ἠρεμοῦν. ἐάν αὐξήσωμεν τό βάρος τοῦτο μικρόν κατά μικρόν φθάνει στιγμή, καθ᾽ ἥν τό βάρος P τίθεται εἰς κίνησιν ὀλισθαῖνον ἐπί τῆς τραπέζης AB.



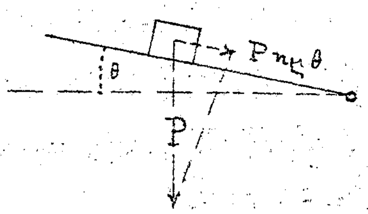
Ἡ ἔντασις τοῦ βάρους p καθ᾽ ἥν στιγμήν τίθεται εἰς κίνησιν τό βάρος P, μετρεῖ τήν δύναμιν τῆς προστριβῆς ἐξολισθήσεως (ἀντιστοιχοῦσαν τῇ ταχύτητι μηδέν) τοῦ βάρους P ἐπί τῆς τραπέζης AB. Ἡ δέ φορά τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς εἶναι πάντοτε ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς κινήσεως ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἀναπτύσσεται ἡ προστριβή.

Τήν δύναμιν τῆς προστριβῆς δυνάμεθα λοιπόν νά θεωρήσωμεν ὡς ἀντίδρασιν ἐξασκουμένην ὑπό τοῦ σώματος AB ἐπί τοῦ σώματος P ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ἐπαφῆς τῶν σωμάτων τούτων, καί θά καλέσωμεν αὐτήν ἐφαπτομένην ἀντίδρασιν, πρός διάκρισιν ἀπό τῆς καθέτου ἀντιδράσεως P.

Τήν ἔντασιν καί τήν φοράν τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως δυνάμεθα νά διακρίνωμεν καί ὡς ἑξῆς, διά τῆς ἐν τῷ κάτωθι σχήματι ἐμφαινομένης συσκευῆς.



Τό βάρος P θέτομεν ἐπί σανίδος ὁριζοντίου δυναμένης νά περιστραφῇ περί ὁριζόντιον ἄξονα τόν α, τό βάρος P ὅταν ἡ σανίς εἶναι ὁριζόντιος ἕνεκα τῆς ἀκαμψίας αὐτῆς δέν ἐνδίδει εἰς τό κατακορύφως ἐπενεργοῦν βάρος P καί μένει τοῦτο ἐντελῶς ἀκίνητον. Ἐάν ὅμως στρέψωμεν τήν σανίδα περί τόν ἄξονα α κατά γωνίαν θ, ἡ βαρύτης δίδει μίαν συνιστῶσαν, τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις εἶναι P ἡμ θ, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἔπρεπε τό σῶμα νά τεθῇ εἰς κίνησιν καί ὅμως ἐκ πείρας γνωρίζομεν, ὅτι δέν συμβαίνει τοῦτο, ἀλλά τό σῶμα ἐξακολουθεῖ ἠρεμοῦν ἐνόσῳ τοὐλάχιστον ἡ γωνία θ εἶναι μικροτέρα ὡρισμένου τινός ὁρίου, διότι εἰς τήν κίνησιν τοῦ σώματος ἀνθίσταται ἡ δύναμις τῆς ἐπί τῆς σανίδος προστριβῆς αὐτοῦ, τήν ὁποίαν ὑπερνικᾷ ἡ συνιστῶσα P ἡμ θ, ἔνθα θ εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα κλίσις εἰς τήν ἔναρξιν τῆς ὀλισθήσεως τοῦ σώματος ἐπί τῆς τραπέζης.



Ἐάν λοιπόν προσδιορίσωμεν ἀπ' εὐθείας τήν γωνίαν θ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν στιγμήν καθ' ἥν ἄρχεται ὀλισθαῖνον τό σῶμα ἐπί τῆς σανίδος, ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς ἐκφράζεται διά

$$P \text{ ἡμ.} \theta$$

Πειραματική σπουδή τῆς προστριβῆς

Ἀνεγνωρίσαμεν ἀνωτέρω, ὅτι κατά τήν σχετικήν ὀλίσθησιν δύο σωμάτων οἱωνδήποτε ἐφαπτομένων ἀλλήλοις, ἀναπτύσσεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐπαφῆς δύναμίς τις (δύναμις τῆς προστριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως) ἐπιβραδύνουσα τήν σχετικήν κίνησιν τῶν σωμάτων τούτων. Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τῆς φύσεως τῶν σωμάτων, ἀλλά καί τῆς τῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλαις ἐπιφανειῶν.

Τούς νόμους τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς ἐσπούδασαν πειραματικῶς ὁ Coulomb καί μετ' αὐτόν ὁ στρατηγός Morin, καί εὗρον, ὅτι

1.— Ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς δύο σωμάτων εἶναι ἀνάλογος τῆς πιέσεως ἥν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν.

2.— Ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μεγέθους τῶν προστριβομένων ἐμβαδῶν, ὅταν ἡ ὀλική πίεσις ἥν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων μένει ἀμετάβλητος.

3.— Ἅμα ἀρχίσει ἡ σχετική ὀλίσθησις τῶν σωμάτων, ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς ὀλισθαίνουσι τά σώματα ἐπ' ἀλλήλων.

4.— Ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῶν προστριβομένων σωμάτων, τοῦ κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον λείου τῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλαις ἐπιφανειῶν καί τῶν οὐσιῶν, τάς ὁποίας παρενθέτομεν μεταξύ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

5.— Ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς κατά τήν ἔναρξιν τῆς ὀλισθήσεως, εἶναι κατά τι μεγαλειτέρα τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς κατά τήν σχετικήν κίνησιν τῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλοις σωμάτων.

Ἵνα κατανοήσωμεν σαφέστερον τήν ἀκρίβειαν καί τήν γενικότητα τῶν νόμων τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς παραθέτομεν ἐνταῦθα σειράν πειραμάτων τῆς προστριβῆς ξύλων ἐπί ξύλων, ἅτινα ἐξετέλεσεν ὁ ἄγγλος ἀστρονόμος Ball διά τῆς ἐν τῇ σελίδι ἐμφαινομένης συσκευῆς, τῶν ὁποίων τά ἐξαγόμενα ἐμφαίνονται περιληπτικῶς ἐν ταῖς κάτωθι πίναξι.

Ὁ πρῶτος πίναξ ἀναφέρεται εἰς πειράματα ἐν οἷς τά πρός ἄλληλα σώματα ἠρεμοῦσιν ἐντελῶς.

ἀριθμός πειραμάτων	Βάρος τοῦ προστριβομένου ξύλου	Δύναμις ἀναγκαία ὅπως θέσῃ εἰς κίνησιν τό ξύλον: 1η σειρά πειραμάτων	Δύναμις ἀναγκαία ὅπως θέσῃ εἰς κίνησιν τό ξύλον: 2α σειρά πειραμάτων	Μέση τιμή τῶν δύο σειρῶν πειραμάτων	
1	P= 14	5	8	6, 5	
2	2P= 28	15	16	15,5	
3	3P= 42	20	15	17,5	
4	4P=56	29	24	26,5	
5	5P= 70	33	31	32,0	

6	6P = 84	43	33	38.0
7	7P = 98	42	38	40.0
8	8P= 112	50	33	41.5

Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ὑπό τό αὐτό βάρος P, 2P, . . . αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαί τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς δέν εἶναι αἱ αὐταί εἰς τήν πρώτην καί τήν δευτέραν σειράν τῶν πειραμάτων, ἅτινα ἐν τούτοις ἐξετελέσθησαν ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας.

Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς δέν μένει λοιπόν σταθερά ἀλλά μεταβάλλεται, καίτοι τά προστριβόμενα ἀλλήλοις σώματα μένουσιν ὑπό τάς αὐτάς πρακτικάς συνθήκας.

Ἀφ' ἑτέρου παραβάλλοντες τό 6ον καί 7ον πείραμα τῆς πρώτης σειρᾶς τό ἕβδομον καί ὄγδοον τῆς δευτέρας σειρᾶς βλέπομεν, ὅτι εἰς μεγαλείτερον βάρος P ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα δύναμις προστριβῆς.

Αἱ ἀνωμαλίαι αὗται ἐξαφανίζονται ἐν μέρει, ἐάν ἀντί νά ἐφαρμόσωμεν τήν δύναμιν p ἐπί τοῦ βάρους P ἠρεμοῦντος θέσωμεν αὐτό πρῶτον εἰς κίνησιν διά τοῦ ἐν τῷ σχήματι ἐμφαινομένου κοχλίου καί ζητήσωμεν τήν δύναμιν p, ἥτις εἶναι ἱκανή νά διατηρήσῃ τήν κίνησιν τοῦ βάρους P πρός ἥν ἀνθίσταται ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς.

Τ' ἀντιστοιχοῦντα τῇ περιπτώσει ταύτῃ πειραματικά ἀποτελέσματα ἐμφαίνονται περιληπτικῶς ἐν τῷ κάτωθι πίνακι.

ἀριθμός πειραμάτων	βάρος τοῦ προστριβομένου ξύλου	Δύναμις ἀναγκαία διά τήν διατήρησιν τῆς κινήσεως τοῦ P: 1η σειρά πειραμάτων	Δύναμις ἀναγκαία διά τήν διατήρησιν τῆς κινήσεως τοῦ P: 2α σειρά πειραμάτων	Μέση τιμή τῶν δύο σειρῶν πειραμάτων
1	P = 14	4. 9	4. 9	p = 4. 9
2	2P = 28	8. 5	8. 6	8. 5
3	3P = 42	12. 6	12. 4	12. 5
4	4P = 56	16. 3	16. 2	16. 2
5	5P = 70	19. 7	20. 0	19. 8
6	6P = 84	23 7	23. 0	23. 4
7	7P = 98	26. 5	26. 1	26. 3
8	8P = 112	29.7	29.9	29.8

αἱ δύο σειραί πειραμάτων συμφωνοῦσιν ἐνταῦθα πληρέστατα καί δυνάμεθα νά λάβωμεν τάς μέσας τιμάς κατά προσέγγισιν ἴσας μέ τήν δύναμιν τῆς προστριβῆς ἥν ἀναπτύσσουσι τά ξύλα ἐφ' ὧν ἐξετελέσαμεν τά πειράματα. καί βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{p}{P}$ εἶναι ὡς ἔγγιστα σταθερός, καί ἴσος μέ 0.27. ὥστε $p=0.27P$.

Εἰδική προστριβή κατά — τήν ἔναρξιν τῆς ὀλισθήσεως. — Ἡ ἀναπτυσσομένη δύναμις τῆς προστριβῆς κατά τήν ἔναρξιν τῆς ὀλισθήσεως εἶναι συνήθως μεγαλειτέρα τῆς ἀναπτυσσομένης κατά τήν ὀλίσθησιν προστριβῆς. Τοῦτο ὅμως ὀφείλεται ἁπλῶς εἰς τήν δύναμιν τήν ὁποίαν πρέπει νά καταναλώσωμεν διά

νά μεταδώσωμεν εἰς τό σῶμα τήν ταχύτητα τῆς ὀλισθήσεως.

Οἱ ἐν τῇ τρίτῃ καί τετάρτῃ στήλῃ τοῦ ἄνω πίνακος ἀριθμοί ἐμφαίνουσιν τήν δύναμιν, ἥτις εἶναι ἀναγκαία διά τήν διατήρησιν τῆς κινήσεως τοῦ βάρους P ἐπί τῆς τραπέζης, καί τῆς τροχαλιᾶς περί τόν ἄξονά της, τήν προστριβήν, ἥτις ἀναπτύσσεται ἐν τῇ κινήσει τῆς τροχαλιᾶς περί τόν ἄξονά της, θά ὑπολογίσωμεν κατόπιν, καί ἵνα εὕρωμεν τήν πραγματικήν ἔντασιν τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς, δέον ν' ἀφαιρέσωμεν, τήν προστριβήν τῆς τροχαλιᾶς ἀπό τούς ἀριθμούς τῆς τρίτης καί τετάρτης στήλης καί τότε φθάνομεν εἰς τά ἐν τῇ στήλῃ 3 τοῦ κάτωθι πίνακος ἐμπεριεχόμενα ἀποτελέσματα,

ἀριθμός πειραμάτων	βάρος τοῦ προστριβομένου ξύλου	Μέση τιμή τῆς παρατηρηθείσης ἐντάσεως τῆς προστριβῆς p	Μέση τιμή τῆς ὑπολογισθείσης ἐντάσεως τῆς προστριβῆς διά τοῦ τύπου $p=0.27P$.	Διάφορα
1	14	4. 7	3. 8	— 0. 9
2	28	8. 2	7. 6	— 0.6
3	42	12.2	11. 3	— 0. 9
4	56	15. 8	15. 1	— 0. 7
5	70	19.4	18. 9	— 0. 5
6	84	23.0	22. 7	— 0.3
7	98	25.8	26. 5	+ 0. 7
8	112	29.3	30. 2	+ 0. 9

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νά λάβωμεν ὡς συντελεστής τῆς προστριβῆς τῶν ξύλων ἐφ' ὧν ἐξετελέσαμεν τά πειράματα τόν ἀριθμόν 0.27.

Ὁ πρῶτος καί 5ος νόμος δύναται λοιπόν νά θεωρηθῇ ὡς κατά προσέγγισιν ἀκριβεῖς.

2ος. Νόμος. — Ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς, ὅταν ἡ ὁλική πίεσις μένει ἀμετάβλητος, εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μεγέθους τῶν πρός ἄλληλα προστριβομένων ἐμβαδῶν.

Ὁ δεύτερος οὗτος νόμος εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τοῦ πρώτου ὑποτιθεμένου ἀληθοῦς.

Τῷ ὄντι ἐάν ἡ ὁλική πίεσις P μένει ἀμετάβλητος. ἡ κατά μονάδα ἐπιφανείας πίεσις $\frac{P}{\Omega}$ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ Ω. ἡ κατά μονάδα ἐπιφανείας ἀναπτυσσομένη δύναμις τῆς προστριβῆς εἶναι λοιπόν $f\frac{P}{\Omega}$ καί ἡ ὅλη δύναμις τῆς προστριβῆς εἶναι $\Omega . f\frac{P}{\Omega} = fP$ ἀνεξάρτητος δηλ. τοῦ μεγέθους τοῦ ἐμβαδοῦ Ω.

Ὁ Νόμος οὗτος ὅμως, καθώς καί ὁ πρῶτος δέν εἶναι καθ' ὅλα ἀκριβής παρά ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἥν ἡ ταχύτης τῆς σχετικῆς ὀλισθήσεως τῶν προστριβομένων σωμάτων εἶναι σχετικῶς μικρά.

Ἐν τοῖς ἄνω μνημονευθεῖσι πειράμασιν αὐτοῦ ὁ γενικός ἐπιθεωρητής τῶν μεταλλείων Bochet παρετήρησεν ὅτι

„Ἐν ὅσῳ τά προστριβόμενα ἀλλήλοις ἐμβαδά εἶναι σχετικῶς μεγάλα, καί κατά συνέπειαν ἡ κατά μονά-

δα ἐπιφανείας πίεσις σχετικῶς μικρά, ἡ μεταβολή τῶν προστριβομένων ἐμβαδῶν, οὐδαμῶς ἐπηρεάζει τόν συντελεστήν τῆς προστριβῆς ἐν ὅσῳ ἡ ταχύτης τῆς ὀλισθήσεως εἶναι μικρά. Ἐάν ὅμως αὐξήσῃ σχετικῶς ἡ ταχύτης τῆς ὀλισθήσεως. τότε ἐν ὅσῳ ἐλαττοῦνται τά προστριβόμενα ἐμβαδά, (καί κατά συνέπειαν ἡ κατά μονάδα ἐμβαδοῦ πίεσις αὐξάνει) ἐλαττοῦται καί ὁ συντελεστής τῆς προστριβῆς.

Αἰτία τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς. — Ἡ κατά τήν σχετικήν ὀλίσθησιν τῶν σωμάτων ἀναπτυσσομένη δύναμις τῆς προστριβῆς ὀφείλεται πιθανῶς εἰς τήν ἀντίδρασιν, τήν ὁποίαν ἀντιτάσσουν εἰς τήν σχετικήν ὀλίσθησιν τῶν σωμάτων αἱ ἀνωμαλίαι καί τραχύτητες τῶν προστριβομένων ἀλλήλαις ἐπιφανειῶν. αἱ ἐξοχαί τῆς μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν εἰσερχόμεναι εἰς τάς ἐσοχάς τῆς ἑτέρας ἀνθίστανται εἰς τήν ὀλίσθησιν ἥτις ἐπερχομένη ἐπιφέρει καί τήν ἀπόσπασιν τῶν ἐξοχῶν τούτων, ἐξ οὗ καί ἡ ἐν πάσῃ τριβῇ παρατηρουμένη φθορά. Ὅσῳ δέ ἡ φθορά αὕτη εἶναι μεγαλειτέρα, κατά τοσοῦτον καί ἡ κατά τήν προστριβήν ἀναπτυσσομένη δύναμις εἶναι μεγαλειτέρα.

Ἐννοεῖται ἤδη ὅτι ἡ ἀπόσπασις αὕτη τῶν μορίων τῶν προστριβομένων σωμάτων δέν παρουσιάζει τήν αὐτήν ἀντίδρασιν διά σώματα διαφόρου φύσεως, ὥστε ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς εἶναι διάφορος διά τά διάφορα σώματα.

Ἐκ τῆς αἰτίας ταύτης τῆς δυνάμεως τῆς προστριβῆς συμπεραίνομεν ἐπίσης ὅτι ὅσῳ ὀλιγώτερον ἐμπλέκονται αἱ ἀνωμαλίαι τὰς ὁποίας παρουσιάζουσιν αἱ προστριβόμεναι ἐπιφάνειαι τόσῳ ἀσθενεστέρα εἶναι καὶ ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς. ὅσῳ δὲ μεγαλειτέρα εἶναι ἡ σχετικὴ ταχύτης τῆς ὀλισθήσεως, κατὰ τοσοῦτον καὶ ὁ ἀναγκαῖος διὰ τὴν
εἶναι μικρότερος. ὥστε ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς ἔπρεπε νὰ ἐλαττοῦται καθ᾽ ὅσον αὐξάνει ἡ ταχύτης τῆς ὀλισθήσεως ἐν ᾧ ὁ τῶν ἄνω μνημονευθέντων πειραματικῶν νόμων τοῦ Morin παραδέχεται τὴν προστριβὴν ὡς ἀνεξάρτητον τῆς σχετικῆς ταχύτητος τῆς ὀλισθήσεως.

ὁ Κος Bochet ἐν τούτοις εἰς τὰ πειράματά του παρετήρησεν, ὅτι ἡ δύναμις τῆς προστριβῆς εἶναι τῷ ὄντι συνάρτησις τῆς ταχύτητος τῆς ὀλισθήσεως, καὶ ἔδωκε τὸν τύπον

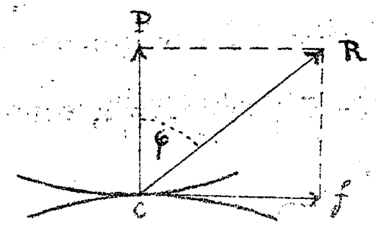
$$F' = \frac{F}{1+0.03V}$$

ἔνθα F' παριστᾷ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τῇ ταχύτητι V προστριβήν,

F παριστᾷ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς μικρὰν ταχύτητα προστριβήν.

καὶ V τὴν ταχύτητα τῆς ὀλισθήσεως εἰς μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἐν συνόψει ἐὰν θεωρήσωμεν δύο σώματα ὀλισθαίνοντα ἐπ᾽ ἀλλήλων καὶ καλέσωμεν



P καὶ καλέσωμεν P τὴν συγκρατοῦσαν τὴν ἐπαφὴν τῶν ἐπιφανειῶν πίεσιν, ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν σχετικὴν ὀλίσθησιν δύναμίς τις F ἴση μὲ

$$F = fP$$

καὶ διευθυνομένη κατ᾽ ἀντίθετον τῆς σχετικῆς ταχύτητος φοράν, τὸν ἀριθμὸν f ἐκαλέσαμεν συντελεστὴν τῆς προστριβῆς ἐν τῷ τριγώνῳ CRP ἔχομεν

$$F = P\,\varepsilon\varphi\,\varphi$$

ὅθεν

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = f$$

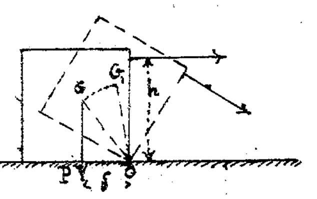
ἔχομεν ἐπίσης

$$F = R\,\eta\mu\varphi = \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}}$$

Πίναξ τῶν τιμῶν τοῦ f καὶ φ

φύσις τῶν προστριβομένων ἐπιφανειῶν	ἐν κινήσει f	ἐν κινήσει φ	κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ὀλισθήσεως f	κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ὀλισθήσεως φ
ξύλον ἐπὶ ξύλου (στεγνά)....	0,36	19° 18	0.50	26° 34′
(μὲ λιπαρὰν οὐσίαν)	0,07	4° 0′	0.20	11° 19′
ξύλα καὶ μέταλλα (στεγνά)...	0.42	22° 47′	0.60	30° 58′
(μὲ λιπαρὰν οὐσίαν)	0.08	4° 35′	0.12	6° 51′
μέταλλον ἐπὶ μετάλλου (στεγνά)	0.19	10° 46′	0.19	10° 46′
(μὲ λιπαρὰν οὐσίαν)..	0.09	5° 9′	0.10	5° 43′
σχοινίον βρεγμένον ἐπὶ ξύλου	0.33	18° 16	0.87	41° 2′
σχοινίον ἐπὶ χυτοσιδήρου...	0.15	8° 32′	〃	〃
δέρμα ἐπὶ ξύλου ἢ μετάλλου (στεγν.)	0.30	16° 42′	0.47	25° 11
(μὲ λιπαρὰν οὐσίαν)	0.20	11° 19′	〃	〃
σίδηρος ἐπὶ πέτρας	0.45	24° 14′	〃	〃
πέτρα ἐπὶ ξύλου	0.40	21° 48′	〃	〃
πέτρα ἐπὶ πέτρας	0.76	37° 14′	〃	〃

Ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας τό σῶμα P ὑπό τήν ἐπήρειαν ὁριζοντίου δυνάμεως F μικροτέρας τῆς t, καταλλήλως ἐφηρμοσμένης ἐπ' αὐτοῦ δύναται νά μετατοπισθῇ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου AB, ὄχι ὅμως ὀλισθαῖνον ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει, ἀλλά κυλινδούμενον μετατοπιζόμενον δηλαδή οὕτως, ὥστε ἀνά πᾶσαν στιγμήν νά στρέφηται περί ἄξονα κείμενον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐπαφῆς τῶν σωμάτων.

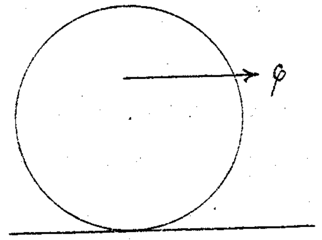


κατά τήν μετατόπισιν ταύτην. τό κέντρον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἀνυψοῦται καί κατά συνέπειαν ἡ δύναμις F καταβάλλει κατά τήν ἔναρξιν τῆς ἀνυψώσεως τήν ἀντιδρῶσαν βαρύτητα P καί ἔχομεν

$$P\delta = Fh \quad \text{ἤ} \quad F = \frac{P\delta}{h}$$

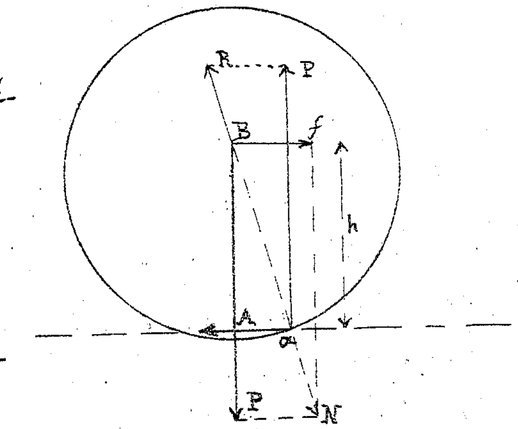
βλέπομεν οὕτω, ὅτι αὐξάνοντες τήν ἀπό τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς ο ἀπόστασιν h τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F ἐλαττοῦμεν τήν ἔντασιν ταύτης κατά βούλησιν.

Ἀλλ' ἐάν ὑποθέσωμεν τό κυλινδούμενον σῶμα κυλινδρικόν, τά μέν τῶν μορίων αὐτοῦ ἀνέρχονται κατά τήν κυλίνδησιν, τά δέ κατέρχονται, τό κέντρον ὅμως τῆς μάζης αὐτοῦ διατηρεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ὕψει, καί κατά συνέπειαν μή ἔχοντες οὐδεμίαν ἀντίστασιν νά ὑπερνικήσωμεν κατά τήν κυλίνδησιν δι' ἐλαχίστης τινος δυνάμεως t ἐφαρμοζο-



μένης ἐπί τοῦ κυλίνδρου, ὤφειλεν οὗτος νά τίθεται εἰς κίνησιν.

Ἡ πεῖρα ἐν τούτοις μᾶς διδάσκει, ὅτι δέν συμβαίνει τοῦτο, καί βλέπομεν ὅτι ἐάν ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ὁριζόντιον δύναμιν φ εἰς ἀπόστασιν h ἀπό τοῦ ἐπιπέδου, ὁ κύλινδρος ἐξακολουθεῖ ἠρεμῶν μέχρις οὗ ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως φ φθάσει ὡρισμένον τι ὅριον F καί τοτε (ἐάν ἡ ἀπόστασις h πληροῖ συνθήκην τινά, τήν ὁποίαν θά ὑποδείξωμεν ἀμέσως κατωτέρω) ὁ κύλινδρος ἀρχίζει κυλινδούμενος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου.

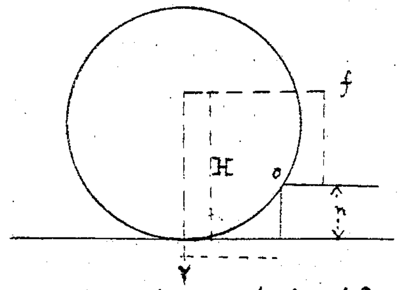


Κατά τήν στιγμήν ταύτην τῆς ἐνάρξεως τῆς κυλινδήσεως αἱ ἐπί τοῦ κυλίνδρου ἐφηρμοσμέναι δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι P, F καί ἡ ἀντίδρασις R, ἥν ἐξασκεῖ τό ἐπίπεδον ἐπί τοῦ κυλίνδρου. Ἡ τελευταία αὕτη ὡς ἐκ τῆς ἰσορροπίας εἶναι ἴση τῇ συνισταμένῃ N τῆς P καί F καί ἀντιθέτου φορᾶς, δέν διέρχεται λοιπόν διά τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς A, ἀλλά πρό αὐτοῦ παρά τῷ σημείῳ α ὅπερ εἶναι ἀδύνατον ἐάν δέν ὑποθέσωμεν, ὅτι παρά τῷ σημείῳ τούτῳ τῆς ἐπαφῆς ἐπῆλθε deformation τῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλαις ἐπιφανειῶν. Τήν ἀντίδρασιν R δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν διά δύο δυνάμεων αP καί αF ἴσων κατά τήν ἔντασιν ταῖς P καί F ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς. ὁ κύλινδρος εὑρίσκεται ἤδη ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ζευγῶν $BP.\alpha P$ καί $BF.\alpha F$ καί καλοῦντες δ τήν ἀπόστασιν $A\alpha$ ἔχομεν

$$P\delta = Fh \quad \text{ὅθεν} \quad F = \frac{P\delta}{h}$$

πειραματικῶς δέ ἀποδείκνυται, ὅτι δ εἶναι μικρά μέν, ἀλλά πεπερασμένη ποσότης. ἐν συνόψει ἡ ἐπί τοῦ κυλίνδρου ἐφαρμογή τῆς δυνάμεως F μετατοπίζει τὴν κατακόρυφον ἀντίδρασιν ἣν ἐξασκεῖ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν φορὰν αὐτῆς εἰς ἀπόστασιν δ ἀπὸ τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου A τῆς ἐπαφῆς, παρεισάγουσα καὶ ἐφαπτομένην ἀντίδρασιν παρὰ τῷ αὐτῷ σημείῳ A ἴσην καὶ ἀντίθετον τῇ F.

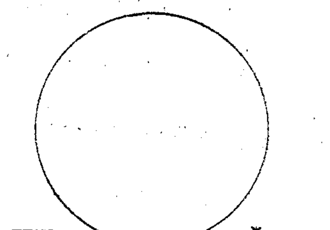
παραδεχόμενοι δὲ τὴν ἐπερχομένην deformation ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῆς ἐπαφῆς νοοῦμεν καὶ τὴν προέλευσιν τῆς ἀντιδράσεως τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν θέτοντες εἰς κίνησιν τὸν κύλινδρον.



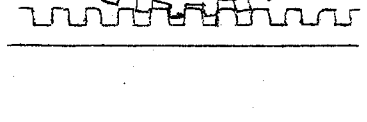
Θεωρήσωμεν πρὸς τοῦτο κύλινδρον καὶ πρὸ αὐτοῦ πρόσκομμα ὕψους η, ἵνα οὗτος ὑπερβῇ τὸ πρόσκομμα τοῦτο δέον ἡ δύναμις F κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυλίνδρου περὶ τὸν ἄξονα O νὰ ὑπερνικήσῃ τὴν ἀντίδρασιν τῆς βαρύτητος P δέον πρὸς τοῦτο νὰ ἔχωμεν. $P\delta = F(H-\eta) = Fh$

ὅθεν
$$F = \frac{P\delta}{h}$$

αὕτη δὲ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἄνω εὑρεθεῖσαν τιμὴν ἐὰν ὑποθέσωμεν η ἀρκούντως μικρὸν καὶ ὀφείλομεν εἰς τὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐπαφῆς ἐπερχομένην deformation



ὡς ἐκ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον τῆς μάζης τοῦ κυλίνδρου δὲν διατηρεῖται κατὰ τὴν κυλίνδησιν ἐν τῷ αὐτῷ ὕψει ἀλλ᾿ ἀνέρχεται καὶ κατέρχεται κατὰ τὰ ἀπειροστὰ ὕψη μήκους η. Ἐνδέχεται ὅμως ἡ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐφηρμοσμένη δύναμις F νὰ ἐπιφέρῃ τὴν ὀλίσθησιν αὐτοῦ ἀντὶ τῆς κυλινδήσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὰς συνθήκας, αἵτινες διακρίνουσι τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις. Ἡ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐφαρμογὴ τῆς δυνάμεως F ἀναπτύσσει ὡς εἴδομεν τοῦτο ἀνωτέρω παρὰ τῷ σημείῳ O ὁριζόντιον ἀντίδρασιν $O\alpha$ ἐπενεργοῦσαν ἐπ᾿ αὐτοῦ ἴσην τῇ $\frac{P\delta}{h}$ καὶ ἀνθισταμένην εἰς τὴν κυλίνδησιν αὐτοῦ. Ἡ ἀνθισταμένη εἰς τὴν ὀλίσθησιν ἀντίδρασις εἶναι Pf ὥστε ἔχομεν $\frac{P\delta}{h} > Pf$ ἢ $\frac{\delta}{h} > f$ ἡ ὀλίσθησις ἄρχεται πρὸ τῆς κυλινδήσεως. ἐὰν δὲ $\frac{P\delta}{h} < Pf$ ἢ $\frac{\delta}{h} < f$ ἡ κυλίνδησις ἄρχεται πρὸ τῆς ὀλισθήσεως. —



Δυναμικὴ σπουδὴ τῶν μηχανῶν

Περὶ ἐνεργείας καὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτῆς εἰς δυναμικὴν ἐργασίαν

§ 1ον. Περὶ μηχανικῆς ἐργασίας

Οὐδένα λανθάνει βεβαίως ἡ σημασία, τὴν ὁποίαν ἀποδίδομεν ἐν γένει εἰς τὴν λέξιν ἐργασία, ἥτις ὑπονοεῖ πάντοτε προκαταβληθεῖσάν τινα προσπάθειαν καὶ κόπωσιν προερχομένην ἐξ αὐτῆς. Ἐν τούτοις νομίζω ἀναγκαῖον ἐνταῦθα τὴν διάκρισιν μεταξὺ τῆς διανοητικῆς ἐργασίας καὶ τῆς σωματικῆς ἢ μηχανικῆς οὕτως εἰπεῖν ἐργασίας, τὴν ὁποίαν μόνην ἐξετάζει ἡ μηχανική, καὶ ἥτις ἐκτελεῖται ἁπλῶς διὰ τῆς μυώδους δυνάμεως τῶν ζώων καὶ τῶν λοιπῶν κινητηρίων δυνάμεων, ἃς ἡ φύσις ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσίν μας.

Καὶ ἂν μὲν ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται ὑπὸ τῆς μυώδους δυνάμεως τῶν ζώων, λαμβάνομεν ἀμυδράν τινα ἰδέαν περὶ τῆς ποσότητος αὐτῆς ἐκ τῆς προκυπτούσης κοπώσεως τοῦ ἐργαζομένου ζώου καὶ τῆς προσπαθείας, ἣν καταβάλλει τοῦτο περὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἐργασίας ταύτης. Τὴν καταβαλλομένην ὅμως ταύτην προσπάθειαν καὶ τὴν ἐκ ταύτης προκύπτουσαν κόπωσιν, δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀκριβῶς, διὰ συγκεκριμένης τινὸς ποσότητος καὶ εἰσαγάγωμεν ταύτην εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας· ἄλλως τε ἐὰν ἡ ἐργασία ἐκτελῆται οὐχί πλέον ὑπό τῆς προσπαθείας ἥν καταβάλλει ἡ ἔμψυχος μηχανή, τό ζῶον, ἀλλ' ὑπό κινητηρίου τινός φυσικῆς δυνάμεως καί διά μέσου ἀψύχου μηχανῆς, οὔτε προσπάθεια καταβάλλεται, οὔτε κόπωσις ἐπέρχεται, τήν ὁποίαν θά ἠδυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν, ἔστω καί ἀορίστως πως, διά τήν καταμέτρησιν τῆς παραγομένης ἐργασίας.

Δέον λοιπόν νά ὁρίσωμεν ἀκριβῶς, μαθηματικῶς, τήν σημασίαν, ἥν ἀποδίδομεν ἐνταῦθα εἰς τήν λέξιν ἐργασία, καί πορισθῶμεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, τό ἀριθμητικόν στοιχεῖον, ὅπερ καταμετρεῖ τήν ποσότητα αὐτῆς, καί τό ὁποῖον μόνον δυνάμεθα νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν εἰς τούς ὑπολογισμούς μας.

Μηχανική ἐργασία — Τήν ἐργασίαν, οἵαν ἐννοοῦμεν αὐτήν ἐν τῇ μηχανικῇ καί ταῖς βιομηχάνοις ἐν γένει τέχναις, ὁρίζει σαφῶς ὁ στρατηγός Poncelet, λέγων

« Ὅταν ὑπερνικῶμεν καί καταστρέφωμεν οὕτως εἰπεῖν διά τάς ἀνάγκας τῶν βιομηχάνων ἐν γένει τεχνῶν, τάς ἀντιστάσεις τάς ὁποίας, ἀντιτάσσουν εἰς ἡμᾶς δυνάμεις, οἷαι ἡ συγκρατοῦσα πρός ἄλληλα τά ὑλικά μόρια τῶν σωμάτων, ἡ δύναμις τῶν ἐλατηρίων, ἡ ἑλκτική δύναμις τῆς βαρύτητος, ἡ δύναμις τῆς ἀδρανείας τῆς ὕλης κλπ. ὅταν λέγω ὑπερνικῶμεν, δι' οἱωνδήποτε μέσων, τάς ὑπό τῶν δυνάμεων τούτων ἀντιτασσομένας ἡμῖν ἀντιστάσεις, ἐργαζόμεθα. ἐργαζόμεθα πρός τούτοις ὅταν λειαίνωμεν σῶμά τι διά τῆς προστριβῆς αὐτοῦ ἐφ' ἑτέρου σώματος, ὅταν κατακόπτωμεν αὐτό εἰς πλείονα τεμάχια, ὅταν ἀνυψοῦμεν φορτία, ὅταν ἕλκωμεν ἅμαξάν τινα ἐπί τῆς ὁδοῦ, ὅταν εκτείνωμεν ἐλατήριόν τι, ὅταν βάλλωμεν βλῆμμά τι, καί αἱ ἀνθιστάμεναι

ἡμῖν δυνάμεις, ἀνανεοῦνται διαρκῶς ἀπό στιγμῆς εἰς στιγμήν, καθ' ὅλην τήν διάρκειαν τῆς ἐργασίας μας. οὕτω

Ἡ μηχανική ἐργασία ὑποθέτει ἀντίστασιν ὑπερνικωμένην καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ διαστήματος, ὅπερ διανύει τό σημεῖον τοῦ σώματος ἐφ' οὗ ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος ἐπενέργεια τῆς ἀνθισταμένης εἰς τήν κίνησιν αὐτοῦ δυνάμεως διαρκῶς καί οὐχί διά μίαν μόνον στιγμήν ἅπαξ διά παντός.

Ἵνα ἀποκόψωμεν διά τινος ἐργαλείου ἐλάχιστον μόριον ὕλης ἐκ τοῦ σώματος, εἰς ὅ εἶναι προσκεκολλημένον τοῦτο π.χ. ὄχι μόνον ἀπαιτεῖται δύναμις ἐπενεργοῦσα κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς ἀντιστάσεως, τήν ὁποίαν ἀντιτάσσει τό μόριον τοῦ σώματος κατά τήν ἀποκοπήν αὐτοῦ, ἀλλά δέον νά προχωρήσῃ καί ἡ ἄκρα τοῦ ἐργαλείου κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἀντιστάσεως. Τό μῆκος τοῦ ἀποκοπέντος μέρους τοῦ σώματος, εἶναι προφανῶς ἀνάλογον τοῦ ὑπό τῆς ἄκρας τοῦ ἐργαλείου διανυθέντος διαστήματος. Ἡ δύναμις δέ τήν ὁποίαν ἀντιτάσσει τοῦτο εἰς τό ἐργαλεῖον, εἶναι καί αὕτη ἀνάλογος τοῦ πάχους καί τοῦ πλάτους τοῦ ἀποκοπέντος τεμαχίου. ἀλλά τό μέγεθος τοῦ ἀποκοπέντος τούτου τεμαχίου παριστᾷ τήν ἐργασίαν, τήν ὁποίαν ἐξετελέσαμεν. Οὕτω ἡ παραγομένη ἐργασία αὐξάνει ἀναλόγως τῆς ἐντάσεως τῆς ὑπερνικωμένης ἀντιστάσεως καί τοῦ διανυθέντος μήκους κατά τήν διεύθυνσιν αὐτῆς τῆς ἀντιστάσεως. »

Ἄλλο σαφέστατον παράδειγμα ἐργασίας, μᾶς παρουσιάζει ἡ ἀντίστασις, τήν ὁποίαν ἀπαντῶμεν κατά τήν ἀνύψωσιν φορτίου τινός ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Ἡ ἀντίστασις προέρχεται ἐνταῦθα ἐκ τῆς ἑλκτικῆς δυνάμέως ἣν ἐξασκεῖ διαρκῶς ἡ γῆ ἐπί τοῦ ἀνυψουμένου φορτίου, ἐκ τῆς βαρύτητος, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας, ἀνά πᾶσαν στιγμήν τό σῶμα τείνει νά κινηθῇ πρός τά κάτω, καί τήν ὁποίαν ὑπερνικῶμεν διά δυνάμεως, ἴσης καί ἀντιθέτου τῷ βάρει τοῦ σώματος, ἥτις ὑποβαστάζει τοῦτο καί ἐμποδίζει τήν κατάπτωσίν του.

Ἡ ὑπερνικῶσα τήν ἀντίστασιν τῆς βαρύτητος καί ὑποβαστάζουσα τό ἀνυψούμενον σῶμα δύναμις, εἶναι ἐνταῦθα ἡ μυώδης δύναμις τοῦ ζώου [ἤ ἡ ἄψυχος δύναμις μηχανῆς τινος, τήν ὁποίαν ἠδυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν διά τήν αὐτήν ἐργασίαν], ὅπερ ἐκτελεῖ τήν ἐργασίαν ταύτην, καί ἡ ὁποία εἶναι τοσούτῳ μεγαλειτέρα, ὅσῳ τό φορτίον καί τό ὕψος εἰς ὅ προτιθέμεθα ν' ἀνυψώσωμεν τοῦτο εἶναι μεγαλείτερον.

Ἄς ὑποθέσωμεν λ.χ. ὅτι μᾶς ἀνετέθη ἡ ἐργασία τῆς ἀνυψώσεως βάρους ζυγίζοντος 100 χιλιογ. εἰς ὕψος 10 μέτρων. Τήν ἐργασίαν ταύτην δυνάμεθα νά ἐκτελέσωμεν ὡς ἑξῆς. φέρομεν πρῶτον τό βάρος 50 χιλιογρ. εἰς τό προταθέν ὕψος 10 μέτρων, καί ἐξετελέσαμεν οὕτω τό ἥμισυ τῆς ἐργασίας, κατόπιν ἐπανερχόμενοι ἀναβιβάζομεν διά τοῦ αὐτοῦ τρόπου καί τά ὑπολειπόμενα 50 χιλιογρ. εἰς τό αὐτό ὕψος, καί ἡ ὅλη ἐργασία ἐξετελέσθη.

Ἡ ἐργασία αὐτή εἶναι λοιπόν ἀνάλογος τοῦ ἀνυψωθέντος βάρους, τουτέστιν τῆς ἀντιστάσεως τῆς βαρύτητος, ἣν ἐδέησε νά ὑπερνικήσωμεν διά ν' ἀνυψώσωμεν τό προταθέν βάρος.

Ἀλλ' ἠδυνάμεθα νά πράξωμεν καί τοῦτο, φθάσαντες μέ τό πρῶτον φορτίον τῶν 50 χιλιογρ. εἰς τό ὕψος τῶν 100 μέτρων, ἠδυνάμεθα νά ἐξακολουθήσωμεν ἀναβαίνοντες, καί

φέρωμεν τό φορτίον τῶν 50 χιλιογρ. ὑψηλότερον εἰς ὕψος 10 ἔτι μέτρων, τουτέστιν εἰς ὕψος 20 μέτρων ἀπό τοῦ ἐδάφους. ἡ δευτέρα δ' αὕτη ἐργασία εἶναι προφανῶς ἡ αὐτή μέ ἐκείνην, τήν ὁποίαν ἐξετελέσαμεν προηγουμένως, ἐπανερχόμενοι εἰς τό ἀρχικόν σημεῖον, λαμβάνοντες τά ὑπολειπόμενα 50 χιλιογ. καί ἀνυψοῦντες αὐτά εἰς τά πρῶτα 10 μέτρα.

Ἡ ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία εἶναι ἡ αὐτή, οἵα καί ἡ ἐν τῇ πρώτῃ, ἀλλ' ἐνταῦθα εἶναι αὕτη ἀνάλογος τοῦ ὕψους ⟨20 μέτρων⟩ εἰς ὅ ἀνυψώσαμεν τό βάρος (50 χιλ.)

Ἐν ταῖς δυσί ταύταις περιπτώσεσι τό ἀνυψωθέν βάρος, καί τό ὕψος, εἰς ὅ τοῦτο ἀνυψώθη εἶναι διάφορα· ἡ ἐκτελεσθεῖσα ὅμως ἐργασία εἶναι ἡ αὐτή ὡς καί τό γινόμενον,

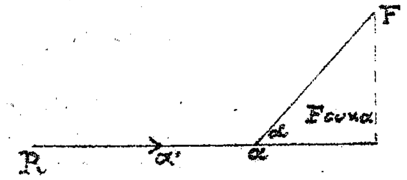
ἀνυψωθέν βάρος X ὕψος εἰς ὅ τοῦτο ἀνυψώθη

$$100 \times 10 = 50 \times 20 = 1000$$

εἶναι ἐπίσης τό αὐτό εἰς τάς δύο περιπτώσεις, καί λαμβάνομεν τοῦτο ὡς μέτρον τῆς ἐκτελεσθείσης ἐργασίας. Οὕτω

Μέτρον τῆς ὑπό δυνάμεως τινος ἐκτελουμένης ἐργασίας. Ἐάν ἡ ἐπενέργεια σταθερᾶς τινος δυνάμεως F ἐξασκῆται ὑπερνικῶσα σταθεράν ἐπίσης ἀντίστασιν R, ἡ ἐργασία τήν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ἵνα καταβάλῃ τήν ἀνθισταμένην ἀντίστασιν, ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι μετρεῖται διά τοῦ γινομένου τῆς ἀντιστάσεως ταύτης ἐπί τό διάστημα l, τό ὁποῖον διανύει κατά τήν φοράν τῆς καταβαλλομένης ἀντιστάσεως τό σημεῖον, ἐφ' οὗ ἡ ἀντίστασις ἐξασκεῖ τήν ἄμεσον ἐπενέργειαν αὐτῆς, κατά τό αὐτό χρονικόν διάστημα. ἀλλ' ἡ καταβαλλομένη ἀντίστασις R ἰσοῦται προφανῶς τῇ συνισταμένῃ τῆς δυνάμεως F κατά τήν διεύθυνσιν αὐτῆς τῆς ἀντιστάσεως, ἥτις συμπίπτει καί αὐτή μέ τήν διεύθυνσιν τοῦ ὑπό τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως R διανυθέντος διαστήματος. ὥστε

$$R = F\text{συν}.\,\alpha$$



ὅπου α παριστᾷ τήν ὑπό τῆς δυνάμεως F καί τῆς ἀντιστάσεως R ἐμπεριεχομένην γωνίαν. πολλαπλασιάζοντες ἐπί τό κατά τό χρονικόν διάστημα t διανυθέν μῆκος $l = \alpha\alpha'$ ὑπό τοῦ σημείου α, ἐνῷ ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος ἐπενέργεια τῆς ἀντιστάσεως R, εὑρίσκομεν,

$$Rl = F\text{συν}\,\alpha \,.\, l = F\,.\,l\,\text{συν}.\,\alpha$$

τό πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης μετρεῖ τήν ἐργασίαν ἥν ἐξετέλεσεν ἡ σταθερά δύναμις F διά νά ὑπερνικήσῃ τήν ἀνθισταμένην ἀντίστασιν R, κατά τήν μετάβασιν τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς (τῆς ἀντιστάσεως) ἀπό τοῦ α εἰς τό α' ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι t. καί τό δεύτερον λοιπόν μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, δύναται νά ληφθῇ ὡς μέτρον τῆς ποσότητος τῆς αὐτῆς ἐργασίας. Ἀλλά τό δεύτερον τοῦτο μέλος δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἴσον τῇ προβολῇ $F\text{συν}\alpha$ τῆς δυνάμεως F ἐπί τοῦ διανυθέντος διαστήματος $\alpha\alpha' = l$, πολλαπλασιαζομένη ἐπί τό μῆκος τοῦτο l, ἤ ὡς ἴσον τῇ δυνάμει F πολλαπλασιαζομένῃ ἐπί τήν προβολήν $l\,\text{συν}\,\alpha$ τοῦ διανυθέντος διαστήματος l ἐπί αὐτῆς τῆς δυνάμεως F. καί φθάνομεν οὕτω εἰς τόν ὁρισμόν, ὅστις σᾶς ἐδόθη ἐν τῇ θεωρητικῇ μηχανικῇ, ἔνθα

καλοῦσιν ἐργασίαν δυνάμεώς τινος τό γινόμενον αὐτῆς ἐπί τό ὑπό τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς διανυόμενον διάστημα, ὑπολογιζόμενον τοῦτο κατά τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως ἤ τό γινόμενον τοῦ ὑπό τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως διανυθέντος διαστήματος ἐπί τήν προβολήν τῆς δυνάμεως ἐπ' αὐτοῦ.

Τήν φυσικήν ἤ μᾶλλον τήν μηχανικήν σημασίαν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐργασίας δυνάμεώς τινος, οἷα ἐδόθη ὑμῖν αὕτη ἐν τῇ θεωρητικῇ μηχανικῇ, ἐννοήσατε ἐλπίζω σαφῶς ἐκ τῶν προτέρων λεπτομερειῶν, ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις F καί ἡ ἐπ' αὐτῆς ὑπερνικωμένη ἀντίστασις R, εἶναι ἀμφότεραι σταθεραί κατά τό μέγεθος καί τήν φοράν. Ἐάν ὅμως αἱ δυνάμεις αὗται μεταβάλλωνται προϊόντος τοῦ χρόνου, τότε ἐξετάζομεν τήν ὑπό τῆς δυνάμεως F παραγομένην ἐργασίαν ἐν χρονικῷ διαστήματι dt ἀρκούντως βραχεῖ, ὥστε κατά τήν διάρκειαν αὐτοῦ νά δυνηθῶμεν νά θεωρήσωμεν F ὡς σταθεράν καί ἐφαρμόσωμεν τήν ἀνωτέρω σχέσιν

$$d\tau = \text{ἐργασία} = F\text{συν}(F.\,ds)\,ds$$

κατά τό χρονικόν διάστημα dt, ἐνῷ τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως διήνυσε τό διάστημα ds ὑπολογιζόμενον κατά τήν διεύθυνσιν αὐτῆς. Καί ἵνα εὕρωμεν τήν ὁλικήν ἐργασίαν ἥν παράγει ἡ δύναμις F ἐν τῷ πεπερασμένῳ χρονικῷ διαστήματι t, λαμβάνομεν τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα $\int_0^t F\text{συν}(F.\,ds)\,ds$ τῆς στοιχειώδους ἐργασίας, $F\,ds\,\text{συν}(F,\,ds)$ ἥν ἐξετέλεσεν ἡ δύναμις F κατά τά ἀλληλοδιάδοχα χρονικά διαστήματα dt μέχρι τοῦ χρόνου t. καί ἔχομεν

$$\text{ὁλική ἐργασία} = \mathcal{T} = \int_0^t F \,\text{συν}(\widehat{F.ds})\, ds.$$

Ἐργασία συστήματος δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί ἑνός σημείου. — Ἐάν ἤδη ἔχωμεν σύστημα δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί ἑνός σημείου, γνωρίζομεν ὅτι τάς δυνάμεις ταύτας δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διά τῆς συνισταμένης αὐτῶν, ἧς ἡ προβολή ἐπί τῆς φορᾶς τοῦ ὑπό τοῦ σημείου τούτου διανυομένου διαστήματος ds, ἰσοῦται μέ τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων ἐπί τῆς αὐτῆς φορᾶς. ἔχομεν λοιπόν

$$R\,\text{συν}(R, ds) = F\,\text{συν}(F, ds) + F_1\,\text{συν}(F_1, ds) + \dots$$

ἐάν δέ πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη ἐπί ds ἔχομεν

$$R\,ds\,\text{συν}(R\,ds) = F\,ds\,\text{συν}(F, ds) + F_1\,ds\,\text{συν}(F_1\,ds) + \dots$$

ἤ

$$R\,dr = F\,df + F_1\,df_1 + \dots$$

ἔνθα dr ἐμφαίνει τήν προβολήν τοῦ ds ἐπί τῆς συνισταμένης R καί df_i τήν προβολήν τοῦ ds ἐπί τῆς δυνάμεως F_i

ὥστε

Ἡ στοιχειώδης ἐργασία τήν ὁποίαν ἐκτελεῖ σύστημα δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί ἑνός σημείου, ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν στοιχειωδῶν ἐργασιῶν τάς ὁποίας ἐκτελοῦσιν αἱ δυνάμεις αὗται ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων θεωρούμεναι. Τό ἄθροισμα δέ τοῦτο ἰσοῦται μέ τήν στοιχειώδη ἐργασίαν τήν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων.

Τοῦτο ἀληθεύει καί διά τήν ὁλικήν ἐργασίαν, διότι ἔχομεν

$$\mathcal{T} = \int R\,dr = \Sigma \int F\,\text{συν}(F, ds)\, ds$$

Ἐργασία συστήματος δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί ὑλικοῦ συστήματος. — Θεωρήσωμεν τήν περίπτωσιν καθ' ἥν δυνάμεις $F, F_1, \dots$ ἐπενεργοῦσιν ἐπί ὑλικοῦ συστήματος οἱουδήποτε, καί ζητήσωμεν τήν ὑπό τῶν δυνάμεων τούτων ἐκτελουμένην ἐργασίαν κατά τήν μετατόπισιν τοῦ συστήματος. δι' ἕκαστον σημεῖον τοῦ συστήματος δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν προηγουμένην σχέσιν,

$$\mathcal{T} = \Sigma \int F\,\text{συν}(F, ds)\, ds$$

καί ἀθροίζοντες τάς σχέσεις ταύτας δι' ὅλα τά σημεῖα ἔχομεν ὁμοίαν τινά σχέσιν

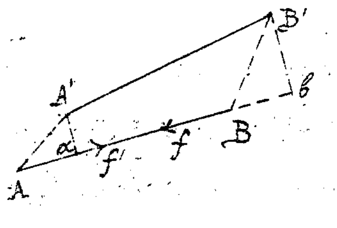
$$\mathcal{T} = \Sigma \int F\,\text{συν}(F, ds)\, ds$$

ὅθεν: *Ἡ ὁλική ἐργασία οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί ὑλικοῦ συστήματος, ἡ καταναλωθεῖσα δι' ὡρισμένην μετατόπισιν τοῦ συστήματος τούτου, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἐργασιῶν ἑκάστης τῶν ἐπί τοῦ συστήματος τούτου, ἐφηρμοσμένων δυνάμεων.*

Σύνδεσμοι (liaisons). — Ἐάν θελήσωμεν νά ἐφαρμόσωμεν τ' ἀνωτέρω εἰς τάς συνήθεις μηχανάς τῆς βιομηχανίας, ἀπαντῶμεν ἀμέσως δυσκολίαν σχεδόν ἀνυπέρβλητον· αἱ μηχαναί αὗται, σύγκεινται ἀπό ὄργανα, καί ταῦτα ἀπό ἀπειράριθμα ὑλικά ἄτομα, ἅτινα ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων ἰσαρίθμους δράσεις καί ἀντιδράσεις, τάς ὁποίας δέον νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, διά τόν ὑπολογισμόν τῆς ἐργασίας, ὅστις καθίσταται οὕτω δυσκολώτατος, τήν δυσκολίαν ταύτην ἀποφεύγομεν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς συνδέσμους (liaisons) ἤ συνθήκας εἰς ἅς ὑπόκεινται τ' ἀποτελοῦντα τάς μηχανικάς ὑλικά συστήματα. Τάς συνθήκας ταύτας θά διακρίνωμεν εἰς τρία εἴδη.

Σύνδεσμοι πρώτου εἴδους — 1. Ὅταν σημεῖά τινα τοῦ συστήματος διατηροῦσιν ἀμεταβλήτους τάς σχετικάς ἀποστάσεις των, ὅπως συμβαίνη τοῦτο διά τά στερεά συστήματα.

Ἔστωσαν A καί B δύο τοιαῦτα σημεῖα, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις AB τηρεῖται ἀμετάβλητος· τό σημεῖον A ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ σημείου B δρᾶσιν F κατά τήν εὐθεῖαν AB. ἐκ τοῦ τρίτου δέ νόμου τῆς κινήσεως, γνωρίζομεν ὅτι καί τό σημεῖον B ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ A ἀντίδρασιν F' ἀκριβῶς ἴσην καί ἀντίθετον τῇ F.



Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι στοιχειώδης τις μετατόπισις τοῦ συστήματος εἰς ὅ ἀνήκουσι τά σημεῖα A καί B ἔφερεν αὐτά εἰς τήν θέσιν A', B', ἡ ὑπό τῶν δυνάμεων F καί F' ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία κατά τήν μετατόπισιν ταύτην εἶναι

$$F, B\beta \quad \text{καί} \quad F'. A\alpha = F. A\alpha$$

ἔχομεν δέ

$$\alpha\beta = A'B' \,\text{συν}(\widehat{A'B'. AB}) = \text{καθ' ὑπόθεσιν} = AB \,\text{συν}(\widehat{A'B'. AB})$$

καί ἐπειδή ἡ γωνία τῶν τμημάτων AB καί $A'B'$ εἶναι ἀπειροστή ἔχομεν

$$\text{συν}(A'B', AB) = 1 \text{ καί κατά συνέπειαν } \alpha\beta = AB.$$

ὅθεν καί $A\alpha = AB - \alpha B = \alpha\beta - \alpha B = B\beta$

αἱ ἐργασίαι τῶν δυνάμεων F καί F' εἶναι λοιπόν ἴσαι καί ἐπειδή αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς τό ἄθροισμα τῶν ἐργασιῶν τούτων ἰσοῦται τῷ μηδενί.

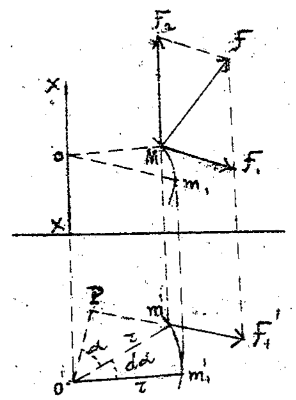
Σύνδεσμοι δευτέρου εἴδους — Σημεῖά τινα τοῦ συστήματος ὑποχρεοῦνται νά κινῶνται ἐπί σταθερῶν καμπύλων ἤ ἐπιφανειῶν, ὅπως συμβαίνη τοῦτο διά τάς ἐθυνούσας, περιστρεφομένους ἄξονας κλπ. ὅταν δέν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τάς ἐκ τῆς προστριβῆς ἀναπτυσσομένας ἀντιδράσεις, ἑκάστη τῶν καμπύλων ἤ ἐπιφανειῶν, ἅς κατ' ἀνάγκην διαγράφουν τά σημεῖα τοῦ συστήματος, ἐξασκεῖ ἐπί τούτων ἀντίδρασιν κάθετον ἐπ' αὐτῆς καί ἴσην τῇ δράσει, ἥτις τείνει ν' ἀπομακρύνῃ τό σημεῖον ἀπ' αὐτῆς. ὥστε ἡ ἐργασία τῆς ἀντιδράσεως ταύτης μηδενίζεται.

Σύνδεσμοι τρίτου εἴδους — Τοῦτο συμβαίνει, καί ὅταν δύο στερεά συστήματα ἐφάπτονται ἀλλήλων ὅπως ἐξάγεται τοῦτο ἐκ τῶν δύο προηγουμένων περιπτώσεων.

Βλέπομεν, οὕτω, ὅτι κατά τόν ὑπολογισμόν τῆς ἐργασίας τῶν ἐπί ὑλικοῦ τινος συστήματος ἐφηρμοσμένων δυνάμεων, δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τάς ἐσωτερικάς δυνάμεις. ἐσωτερικάς δέ δυνάμεις ἐννοοῦμεν ἐκείνας, τάς ὁποίας ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων τ' ἀποτελοῦντα τό ὑλικόν σύστημα μέρη.

Προστριβή — Μόνον τάς ἐκ τῆς προστριβῆς (ἴδε παράρτημα I). ἀναπτυσσομένας δυνάμεις καίτοι ἐσωτερικάς δέν δυνάμεθα νά παραλείψωμεν, διότι δέν ἐλάβαμεν αὐτάς ὑπ' ὄψιν εἰ τοῖς προηγουμένοις, καί πρέπει νά συγκαταλέγωμεν αὐτάς μετά τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

Ἐργασία τῶν δυνάμεων ἐν τῇ περιστροφικῇ κινήσει. — Θεωρήσωμεν ὑλικόν τι σύστημα στρεφόμενον περί τόν ἄξονα XOX καί δύναμιν τινα F ἐφηρμοσμένην ἐπί τοῦ σημείου m τοῦ συστήματος, τήν δύναμιν F δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διά δύο ἄλλων, τήν μέν F_2 παράλληλον τῇ XoX τήν δέ F_1 κάθετον ἐπί τῆς F_2.



Ἡ κατά τήν στοιχειώδη περιστροφήν dα τοῦ συστήματος ἐκτελεσθεῖσα ὑπό τῆς δυνάμεως F_2 ἐργασία ἰσοῦται τῷ μηδενί, διότι εἶναι κάθετος ἐπί τοῦ ὑπό τοῦ σημείου m διαγραφομένου τόξου mm_1. ἡ ὑπό τῆς δυνάμεως F_1 ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία εἶναι

$$d\tau = F_1 m'm'_1 \,\text{συν}(F_1, m'm'_1) = F_1 m'm'_1 \,\text{συν}\,\alpha$$

ἀλλά

$$m'm'_1 = \tau d\alpha \quad \text{καί} \quad oP = \tau\,\text{συν}\,\alpha = p \quad \text{ὥστε} \quad m'm'_1 = \frac{p}{\text{συν}\,\alpha} d\alpha$$

ὥστε

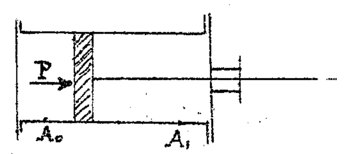
$$d\tau = F_1 \frac{p\,d\alpha}{\text{συν}\,\alpha}\text{συν}\,\alpha = F_1 p\, d\alpha$$

τό γινόμενον $F_1 p$ εἶναι ἡ ῥοπή τῆς δυνάμεως F_1 ὡς πρός τό σημεῖον O, ἤ ἡ ῥοπή τῆς δυνάμεως F ὡς πρός τόν ἄξονα τῆς περιστροφῆς XOX.

Κινητήριος καί ἀνθισταμένη ἐργασία. — Ἐν ὑλικῷ συστήματι εὑρισκομένῳ ὑπό τήν ἐπενέργειαν οἱωνδήποτε δυνάμεων καλοῦμεν κινητήριον ἐργασίαν (travail moteur) τό ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἐργασιῶν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί ἀνθισταμένην ἐργασίαν (travail resistant) τό ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ἐργασιῶν τῶν αὐτῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων (ἀντιστάσεων).

Ἐργασία ἐκτελουμένη ὑπό πεπιεσμένου ῥευστοῦ. — Προτιθέμεθα ἐνταῦθα νά ὑπολογίσωμεν τήν ἐργασίαν ῥευστοῦ τινος ἀερίου λ.χ. ἐξασκοῦντος πίεσιν p (κατά μονάδα ἐμβαδοῦ) ἐπί ἑνός ἐμβόλου A.

Ἐάν παραστήσωμεν διά S τό ὅλον ἐμβαδόν τοῦ ἐμβόλου, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη πίεσις εἶναι κάθετος αὐτῷ καί ἴση μέ



$$pS$$

ἡ ὑπό τῆς πιέσεως ταύτης ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία κατά τήν μετατόπισιν dx τοῦ ἐμβόλου εἶναι

$$pSdx$$

ἀλλά Sdx εἶναι ὁ ὑπό τοῦ ἐμβόλου διαγραφείς χῶρος dV κατά τήν μετατόπισιν dx ὥστε

$$d\tau = p\,dV$$

καί ἡ ὅλη ἐργασία κατά τήν μετάβασιν τοῦ ἐμβόλου ἀπό τῆς θέσεως A_0 εἰς τήν θέσιν A_1 εἶναι

$$\tau = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv$$

ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι κινητήριος ἐάν ὁ ὄγκος V αὐξάνει, καί ἀνθισταμένη ἐάν ὁ αὐτός ὄγκος ἐλαττοῦται.

Σημ. Ἐν τῷ ὑπολογισμῷ τῆς ἐργασίας $\int p dv$ πρέπει νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τάς μονάδας μέ τάς ὁποίας μετροῦμεν τήν πίεσιν τόν ὄγκον καί τήν ἐργασίαν.

Ἡ πίεσις p δίδεται συνήθως εἰς χιλιόγραμμα κατά τετραγωνικόν ὑφεκατόμ. τό ἐμβαδόν S εἰς τετραγωνικά μέτρα καί τότε ἡ ἐπί τοῦ ἐμβόλου ἐξασκουμένη ὁλική πίεσις εἶναι $p.100^2 S$

Τό διανυόμενον διάστημα x δίδεται εἰς μέτρα καί τότε ἡ ἐργασία εἶναι

$$p.100^2 S.x \text{ χιλιογραμμόμετρα}$$

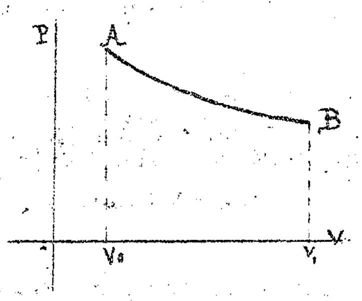
Sx εἶναι ὁ ὄγκος εἰς κυβικά μέτρα. ἐάν ὁ ὄγκος V μᾶς ἐδίδετο εἰς λίτρας θά εἴχομεν

$$Sx = \frac{V}{10^3} \text{ κυβικά μέτρα}$$

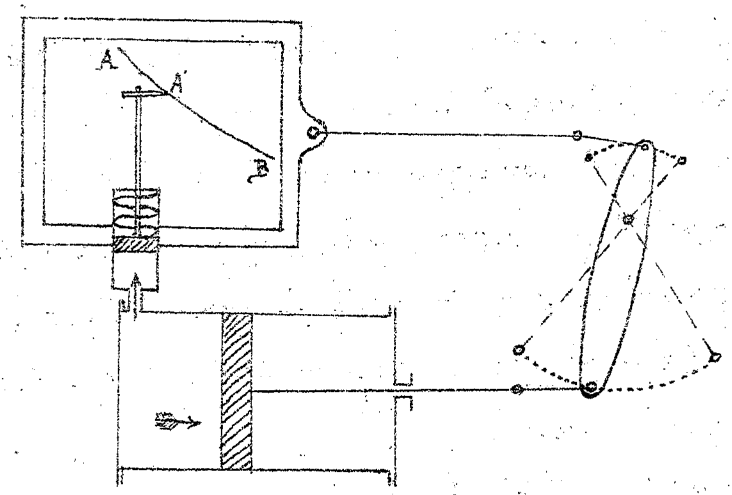
καί ἡ ἐργασία

$$p.100^2 Sx = p.100^2 \frac{V}{10^3} = 10pV \text{ χιλιογραμμόμετρα}$$

Γραφική παράστασις τῆς ἐργασίας $\int p dv$. — Ἐάν ἐπί τῆς εὐθείας OV λάβωμεν τμήματα ἀνάλογα τῶν ὄγκων τοῦ ἀερίου κατά τήν διαστολήν ἤ συστολήν αὐτοῦ καί ἐπί τῆς OB τμήματα ἀνάλογα ταῖς ἀντιστοιχούσαις πιέσεσι p ἔχομεν καμπύλην τήν AB καί τό ἐμβαδόν $V_0 ABV_1$ ἰσοῦται μέ τήν ὁλικήν ἐργασίαν $\int_{V_0}^{V_1} p dv$.



Δεῖκται πιέσεως (indicateurs de pression) — Τήν καμπύλην AB δυνάμεθα εὐκόλως νά χαράξωμεν διά τῶν λεγομένων δεικτῶν πιέσεως, τῶν ὁποίων ἡ ἀρχή ἐμφαίνεται ἐν τῷ κάτωθι διαγράμματι ἔνθα ἡ γραφίς A διαγράφει τήν καμπύλην AB.



Δύναμις ἑνός κινητῆρος. — Τήν δύναμιν κινητηρίου τινός μηχανῆς μετροῦμεν διά τῆς ἐργασίας τήν ὁποίαν δύναται νά μᾶς παράσχῃ αὕτη ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου, ἐν ἑνί δευτερολέπτῳ λ.χ.

Ἔστω $\mathcal{E}$ ἡ ἐργασία ἡ παραγομένη ἐπί τῆς ἐπί τῆς ἑτέρας τῶν ἑδρῶν τοῦ ἐμβόλου ἐξασκουμένης πιέσεως εἰς ἑκάστην περίοδον καί n ὁ ἀριθμός τῶν περιόδων εἰς ἕκαστον λεπτόν τῆς ὥρας. Ὑποθέσωμεν δέ ὅτι ἡ πίεσις ἐξασκεῖται ἐξ ἴσου ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἑδρῶν τοῦ ἐμβόλου παράγουσα τήν αὐτήν ποσότητα ἐργασίας. Ἡ ἐν μιᾷ περιόδῳ παρεχομένη ἡμῖν ἐργασία ὑπό τῆς μηχανῆς εἶναι $2\mathcal{E}$, καί ἡ ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ τῆς ὥρας ἐκτελουμένη ἐργασία εἶναι $2\mathcal{E}n$.

Ἡ δύναμις F τοῦ κινητῆρος ἐκφράζεται λοιπόν διά τοῦ τύπου

$$F=\frac{2\mathcal{T}n}{60}$$

Μέχρι τοῦδε μετεχειρίσθημεν τήν παραγωγόν τῆς ἐργασίας δύναμιν F, ἵνα καταβάλωμεν ἀντίστασίν τινα R, ἥτις ἀνθίσταται εἰς τήν κίνησιν αὐτῆς. ἐάν ὅμως ἐκλείψῃ ἡ ἀντίστασις αὕτη, καί ἐξακολουθήσῃ ἐν τούτοις ἐπενεργοῦσα ἐπί τοῦ σώματος ἡ παραγωγός τῆς ἐργασίας δύναμις, τ' ἀποτελέσματα τῆς ἐπενεργείας αὐτῆς ἀποκαλύπτονται εἰς ἡμᾶς, οὐχί πλέον ὡς ἐκτέλεσις μηχανικῆς τινος ἐργασίας, ἀλλ' ὡς μεταβολή ἐπερχομένη ἐν τῇ ταχύτητι τοῦ κινουμένου ἤ ἠρεμοῦντος σώματος, ἐφ' οὗ ἐξασκεῖται ἡ ἄμεσος ἐπενέργεια τῆς δυνάμεως F, καί ἡ μεταβολή αὕτη τῆς ταχύτητος ἐπέρχεται κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἐπενεργούσης δυνάμεως.

Γνωρίζομεν δέ ὅτι τό μέτρον δυνάμεώς τινος F, ἥτις ἐπιφέρει μεταβολήν τινα dv ἐν τῇ ταχύτητι τοῦ σώματος, ἐφ' οὗ αὕτη ἐπενεργεῖ ἀπ' εὐθείας, καί ἔνθα οὐδεμίαν ἄλλην ἀντίστασιν ἔχει νά ὑπερνικήσῃ ἐκτός τήν τῆς ἀδρανείας τῆς ὕλης, τό μέτρον λέγω τῆς ἐπενεργείας $F.dt$ τῆς δυνάμεως ταύτης κατά τό χρονικόν διάστημα dt εἶναι κατά τόν θεμελιώδη δεύτερον νόμον τῆς κινήσεως τό γινόμενον $m.dv$ τῆς μάζης τοῦ κινουμένου σώματος ἐπί τήν μεταβολήν dv, ἥν αὕτη ἐπιφέρει ἐν τῇ ταχύτητι αὐτοῦ, ὑπολογιζομένη κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἐπενεργούσης δυνάμεως, τουτέστιν ἐπί τήν ἐπιτάχυνσιν, ἥν ἐπιφέρει εἰς τήν κίνησιν τοῦ σώματος κατά τό αὐτό χρονικόν διάστημα. ὅθεν

$$F dt=m.dv \quad καί \quad \int_0^t F dt=m(v-v_0)$$

ἐάν μετεχειριζόμεθα τήν αὐτήν δύναμιν F κατά τό αὐτό χρονικόν διάστημα dt, διά νά ὑπερνικήσωμεν ἀντίστασίν τινα R, καί παραγάγωμεν οὕτω μηχανικήν τινα ἐργασίαν $d\tau$, θά ἐμετρεῖτο αὕτη διά τοῦ γινομένου $F.ds$ συν$(F.ds)$

ὥστε ἀφ' ἑνός ἔχομεν $\quad F\,dt=m.dv$

καί ἀφ' ἑτέρου $\quad F$ συν$(F{:}ds)\,ds=d\tau$

ἀλλά συν$(F,ds)\,ds=v\,dt$

ὥστε ἡ δευτέρα τῶν ἄνω σχέσεων λαμβάνει τήν μορφήν

$$F.\,v\,dt=d\tau \quad ἤ \quad F dt=\frac{d\tau}{v}$$

καί παραβάλλοντες αὐτήν πρός τήν πρώτην σχέσιν ἐξάγομεν

$$d\tau=m v\,dv$$

εἰς τό ἀποτέλεσμα τοῦτο δυνάμεθα νά φθάσωμεν καί ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς.

Ἡ ἐπενεργός δύναμις F, ἐπενεργοῦσα ἐπί τῆς μάζης m κατά τό χρονικόν διάστημα dt, μετετόπισεν αὐτήν ἐναντίον τῆς ἀντιστάσεως τῆς ἀδρανείας αὐτῆς, κατά διάστημά τι οὗ τό μῆκος ἰσοῦται τῇ $v\,dt$. διά τήν μετατόπισιν ταύτην τοῦ σώματος ἡ ἐπενεργός δύναμις εἰς ἥν ὀφείλεται ἡ ταχύτης v τοῦ σώματος εἰργάσθη, καί ἡ ἐργασία $d\tau$ τήν ὁποίαν κατηνάλωσε μετρεῖται ὡς εἴδομεν τοῦτο ἀνωτέρω διά τοῦ γινομένου $F v\,dt$, ἀλλά καθ' ἥν στιγμήν ἡ ταχύτης ἦτο v, ἡ δύναμις F εἶχεν ὡς μέτρον τό γινόμενον $m\frac{dv}{dt}$ (δεύτερος νόμος τῆς κινήσεως) καί ἐπειδή ὑποθέτομεν αὐτήν σταθεράν κατά τό χρονικόν διάστημα dt ἔχομεν,

$$d\tau=F v\,dt=m\frac{dv}{dt}v\,dt=m v\,dv$$

ὥστε ἐάν μετεχειριζόμεθα τήν δύναμιν F, τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι δυνάμεθα νά διαθέσωμεν κατά βούλησιν, κατά τό χρονικόν διάστημα dt, πρός παραγωγήν ἐργασίας, ἠθέλομεν παράγει ποσότητα τοιαύτης ἴσην τῇ $d\tau$. ἐάν ὅμως μεταχειρισθῶμεν τήν αὐτήν δύναμιν F κατά τό αὐτό χρονικόν διάστημα dt, οὐχί πλέον πρός παραγωγήν ἐργασίας, ἀλλ᾿ ἁπλῶς ἵνα θέσωμεν εἰς κίνησιν σῶμά τι μάζης m ἤ μεταβάλωμεν τήν κίνησιν μεθ᾿ ἧς ἤδη φέρεται τοῦτο, θά ἐπιφέρομεν εἰς τήν ταχύτητα τοῦ σώματος μεταβολήν ταχύτητος dv, συνδεομένην πρός τήν ἐργασίαν, ἥν ἡ αὐτή δύναμις παρέχει ἡμῖν ἐν αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι διά τῆς σχέσεως,

$$d\tau = mv\,dv$$

ἤ

$$d\tau = \frac{m(v+dv)^2 - mv^2}{2}$$

διότι $2v\,dv = (v+dv)^2 - v^2$ ἐάν παραλείψωμεν τήν δευτεροβάθμιον ἐλαχίστην ποσότητα dv^2.

Ἡ δέ ἐργασία τ ἥν παρέχει ἡμῖν ἡ δύναμις F (σταθερά ἤ μεταβαλλομένη) κατά τό πεπερασμένον χρονικόν διάστημα t συνδέεται πρός τήν μεταβολήν, ἥν αὕτη ἐπιφέρει εἰς τήν ταχύτητα τοῦ σώματος, ἄν οὐδεμίαν ἄλλην ἀντίστασιν ἐκτός τήν τῆς ἀδρανείας τῆς μάζης αὐτοῦ ἔχει νά ὑπερνικήσῃ αὕτη, διά τῆς σχέσεως

$$\int_0^t d\tau = \int_0^t mv\,dv$$

ἤ ἐκτελοῦντες τάς ὁλοκληρώσεις καί παριστῶντες διά v καί v_0 τάς ἀμοιβαίας ταχύτητας, μεθ᾿ ὧν φέρεται ἡ μάζα κατά τήν ἔναρξιν καί τό τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος t, ἔχομεν τήν θεμελιώδη σχέσιν,

$$\tau = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \; *$$

---

* Σημ. Ἐάν δύναμις F εἶναι σταθερά τήν ἔντασιν καί τήν φο-

ἐν τῇ σχέσει ταύτῃ ἀναγνωρίζετε θεμελιώδη τινά ἐξίσωσιν ἥν σᾶς ἀπέδειξαν ἐν τῇ δυναμικῇ ὑπό τήν ἐπωνυμίαν ἐξίσωσις τῶν ζωσῶν δυνάμεων, καί βλέπετε ἤδη σαφῶς τήν φυσικήν ἤ μηχανικήν ἑρμηνείαν, ἥτις δέον ν᾿ ἀποδοθῇ εἰς τήν σχέσιν ταύτην, ἥτις μᾶς διδάσκει, ὅτι ἡ ἐργασία ἥν ἐδέησε νά καταναλώσῃ ἡ ἐπενεργός δύναμις F, ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι t, ὅπως νικήσῃ τήν δύναμιν τῆς ἀδρανείας τῆς μάζης m, καί μεταβάλλει τήν ταχύτητα αὐτῆς ἀπό v_0 εἰς v μετρεῖται διά τῆς διαφορᾶς

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Ἐν συνόψει <u>τήν ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι t ἐπενέργειαν τῆς δυνάμεως F δυνάμεως F δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν πρός παραγωγήν βιομηχανικῆς τινος ἐργασίας τ ἥτις μετρεῖται διά τοῦ ἀθροίσματος, $\int_0^t F\,\text{συν}(F.ds)\,ds$ ἤ πρός μετατροπήν τῆς ταχύτητος κινουμένης μάζης ἀπό v_0 εἰς v, καί ἡ μετατροπή αὕτη τῆς ταχύτητος καταναλίσκει ἐργασίαν ἴσην τῇ ποσότητι $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$.</u>

ράν εὑρίσκομεν τήν σχέσιν ταύτην συλλογιζόμενοι ὡς ἑξῆς.

Θεωρήσωμεν μάζαν τινά m φερομένην ἁπλῶς ὑπό μεταβατικῆς κινήσεως καί σταθεράν τινα δύναμιν F ἐφηρμοσμένην ἐπ᾿ αὐτῆς.

κατά τό χρονικόν διάστημα t ἡ ὤθησις τῆς δυνάμεως Ft ἰσοῦται τῇ ἐπαυξήσει τῆς ποσότητος τῆς κινήσεως $mv' - mv$ ὥστε

$$Ft = m(v' - v)$$

ἀλλ᾿ ἐπειδή ἡ δύναμις F εἶναι σταθερά $\frac{v'+v}{2}$ παριστᾷ τήν μέσην ταχύτητα τῆς μάζης m καί ἔχομεν, $\frac{S}{t} = \frac{v'+v}{2}$

πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη τάς δύο ταύτας σχέσεις ἔχομεν

$$FS = \frac{m}{2}(v'-v)(v'+v) = \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

Ἐάν ἡ ἐπενέργεια τῆς δυνάμεως F ἐξασκῆται οὐχί πλέον κατά τήν φοράν τῆς κινήσεως, ἀλλά κατ᾽ἀντίθετον ταύτης διεύθυνσιν, μεταβάλλεται αὕτη εἰς ἀντίστασιν, τήν ὁποίαν τό κινούμενον σῶμα ὑπερνικᾷ, καί ἐκτελεῖ τοῦτο ἐργασίαν. Τί καταναλίσκει δέ διά τήν παραγωγήν τῆς ἐργασίας ταύτης; ποία ἡ ἐν τῇ κινήσει αὐτοῦ ἐπερχομένη μεταβολή, εἰς ἥν δέον ν᾽ἀποδώσωμεν τήν παραγωγήν τῆς ἐργασίας; Ἡ μόνη μεταβολή τήν ὁποίαν παρατηροῦμεν ἐν τῷ κινουμένῳ σώματι εἶναι ἡ ἐπιβραδυνομένη αὐτοῦ κίνησις ἡ ἐνέργεια τῆς ἀντιστάσεως R ἐπέφερε λοιπόν ἐλάττωσιν εἰς τήν ταχύτητα τοῦ σώματος μεταβαλοῦσα ταύτην ἀπό v εἰς v_0 κατά τό χρονικόν διάστημα t. καί ἡ μεταξύ τῆς παραχθείσης ὑπό τῆς κινουμένης μάζης m ἐργασίας καί τῆς ἐπελθούσης ἐν τῇ ταχύτητι αὐτῆς μεταβολῆς ὑφίσταται, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν ἡ σχέσις,

$$\mathcal{T} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

οὕτω, ἐάν ἀντιτάξωμεν κινουμένη μάζη m ἐλευθέρα τῆς ἐπενεργείας πάσης ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἀντίστασίν τινα R, ἥν καταβάλλει αὕτη, ὅπως ἐξακολουθήσῃ τήν κίνησιν αὐτῆς, παράγει αὕτη ἐργασίαν, ἀλλά παρατηροῦμεν συνάμα, ὅτι ἐπιβραδύνεται ἡ κίνησις τοῦ σώματος, ἐλαττουμένης τῆς ταχύτητος αὐτοῦ ἀπό v εἰς v_0. Διά νά καταβάλωμεν λοιπόν τήν ἀντίστασιν R καί παραγάγωμεν ἐργασίαν, δέον νά καταναλώσωμεν μέρος τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος $(v - v_0)$. Ἡ διά τῆς καταναλώσεως δέ τῆς ταχύτητος ταύτης παραγομένη ἐργασία μετρεῖται διά τῆς διαφορᾶς,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

εἶναι δηλ. αὕτη ἴση μέ τήν ἐργασίαν τήν ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι καταναλωθεῖσαν προηγουμένως ὑπό τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως F, πρός ἐπιτάχυνσιν τῆς κινήσεως τῆς αὐτῆς μάζης m, μεταδιδούσης εἰς αὐτήν ταχύτητα, ἴσην ἀκριβῶς ἐκείνης, ἥν ἀπώλεσε νῦν ἡ κινουμένη μάζα πρός παραγωγήν τῆς αὐτῆς ἐργασίας.

Ἐν συνόψει ἀνεγνωρίσαμεν, ὅτι,

1ον) Δυνάμεθα νά παραγάγωμεν μηχανικήν ἐργασίαν νικῶντες ὡρισμένην ἀντίστασιν R, ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι, διά τῆς ἀμέσου ἐπενεργείας ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως F, καί ἡ ποσότης τῆς ἐν τῷ χρονικῷ τούτῳ διαστήματι παραγομένης ἐργασίας ὑπό τῆς δυνάμεως F μετρεῖται διά τοῦ ἀθροίσματος

$$\int_0^t F \,\text{συν}(F, ds)\, ds = \mathcal{T}$$

2ον) Ἐάν καταναλώσωμεν ἐργασίαν ἴσην μέ τήν ἀνωτέρω παραχθεῖσαν διά τῆς ἀμέσου ἐπενεργείας τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως F, ὅπως θέσωμεν εἰς κίνησιν ἠρεμοῦσαν μάζαν m, εἰς τήν κίνησιν τῆς ὁποίας οὐδεμία ἄλλη δύναμις ἀνθίσταται, ἐκτός τῆς ἐν αὐτῇ ἐνυπαρχούσης δυνάμεως τῆς ἀδρανείας μεταδίδομεν εἰς τήν μάζαν ταχύτητα v_1 συνδεομένην πρός τήν καταναλωθεῖσαν ἐργασίαν διά τῆς σχέσεως

$$\mathcal{T} = \frac{mv^2}{2}$$

[ἐάν ἡ μάζα m ἐκέκτητο ἤδη ταχύτητα v_0 καθ᾽ἥν στιγμήν ἠρχίσαμεν ἐπενεργοῦντες ἐπ᾽αὐτῆς, ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἀντικαθίσταται διά τῆς ἀκολούθου

$$\mathcal{T} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \;]$$

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

3ον) Ἐάν ἤδη ἀντιτάξωμεν εἰς τήν μέ ταχύτητα V κινουμένην μᾶζαν m ἀντίστασίν τινα R, ὑπερνικᾷ αὕτη τήν ἀντίστασιν ταύτην, ἀλλ' ἡ ταχύτης αὐτῆς ἐλαττοῦται, καί ἄν ἡ δύναμις R ἐξακολουθῇ ἀνθισταμένη εἰς τήν κίνησιν τῆς μάζης m ἡ ταχύτης αὐτῆς ἀπόλυται καθ' ὁλοκληρίαν καί ἐπανέρχεται αὕτη εἰς τήν ἠρεμίαν. Κατά τήν στιγμήν ταύτην ἡ διά τῆς ὑπερνικήσεως τῆς ἀντιστάσεως R παραχθεῖσα ἐργασία ἰσοῦται μέ ἐκείνην τήν ὁποίαν κατηναλώσαμεν ἵνα θέσωμεν εἰς κίνησιν τήν ἠρεμοῦσαν μᾶζαν m καί μεταδώσωμεν εἰς αὐτήν τήν ταχύτητα V. ἡ ἐργασία αὕτη ἰσοῦται δηλ. μέ

$$\frac{mV^2}{2}$$

ἤ μέ

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}$$

ἐάν ἡ τῇ κινήσει τῆς μάζης m ἀνθισταμένη ἀντίστασις, παύει καθ' ἥν στιγμήν φέρεται αὕτη μετά ταχύτητος V_0.

Ἐνέργεια. Ἐάν ἤδη ὀνομάσωμεν ἐνέργειαν τήν ἰδιότητα (capacité) ἥν κέκτηται σῶμά τι πρός παραγωγήν ἐργασίας δυνάμεθα ἐκ τῶν προηγουμένων νά διακρίνωμεν ἐν ἑκάστῳ σώματι δύο εἴδη ἐνεργείας, δι' ὧν δύναται τό σῶμα νά παραγάγῃ ἐργασίαν τινά.

Λανθάνουσα ἐνέργεια. (énergie potentielle). Τό ἕν τῶν εἰδῶν τούτων τῆς ἐνεργείας κέκτηνται τά σώματα καί ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκόμενα, ἡ ἐνέργεια αὕτη ὀφείλεται τῇ σχετικῇ θέσει τοῦ σώματος, ὡς πρός τά περικυκλοῦντα αὐτό ἕτερα σώματα, ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῶν ὁποίων προέρχονται αἱ ἐπί τοῦ θεωρουμένου σώματος ἐπενεργοῦσαι ἐξωτερικαί

δυνάμεις, εἰς ἅς ὀφείλεται καί ἡ παραγομένη ἤ μᾶλλον δυναμένη νά παραχθῇ ἐργασία, ἐάν τό σῶμα ἀφεθῇ ἐλεύθερον ὑπό τήν ἐπενέργειαν τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐνταῦθα εἶναι καθώς βλέπετε, ἀνάλογος τῆς ἐργασίας ἐκείνης, ἥν παρηγάγομεν προηγουμένως, ὑπερνικῶντες ὡρισμένην τινά ἀντίστασιν διά τῆς ἀμέσου ἐπενεργείας ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως καί τήν ὁποίαν ἐμετρήσαμεν διά τοῦ ἀθροίσματος $\int F \operatorname{συν}(\widehat{F, ds})\, ds$. Τό ὀφειλόμενον τῇ θέσει τοῦ σώματος μέρος τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας, ἥν κέκτηται τοῦτο καλοῦμεν στατικήν ἤ μᾶλλον λανθάνουσαν ἐνέργειαν τοῦ σώματος.

Κινητική ἐνέργεια (énergie cinetique). Ἕτερον μέρος τῆς ἐνεργείας, ἥν κέκτηται σῶμά τι ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τήν κατάστασιν κινήσεως, εἰς ἥν εὑρίσκεται τοῦτο, ὀφείλεται τῇ ταχύτητι μεθ' ἧς τοῦτο φέρεται. εἴδομεν τῷ ὄντι ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι διά τῆς κινήσεως σώματός τινος δυνάμεθα νά ὑπερνικήσωμεν ἀντίστασίν τινα R καί παραγάγωμεν ἐργασίαν τινά, χωρίς νά δαπανήσωμεν τήν ἐλαχίστην ἐξωτερικήν δύναμιν, ἀλλά ἐπιβραδύνοντες ἁπλῶς τήν κίνησιν τοῦ σώματος διά τῆς ἐλαττώσεως τῆς ταχύτητος αὐτοῦ.

Ἡ ὑπό τοῦ κινουμένου σώματος παραγομένη ἐργασία, ὀφείλεται λοιπόν ἁπλῶς τῇ ταχύτητι αὐτοῦ. ἡ καταμετροῦσα δέ τήν ὑπό τοῦ κινουμένου σώματος παραγομένην ἐργασίαν, συνάρτησις τῆς ταχύτητος εἶναι ἡ

$$\frac{mV^2}{2}$$

τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν κινητικήν ἐνέργειαν τοῦ κινουμένου σώματος, διότι ὡς μᾶς διδάσκει τοῦτο ἡ σχέσις $\mathcal{T} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ διά τῆς $\begin{cases}\text{αὐξήσεως}\\ \text{ἐλαττώσεως}\end{cases}$ τῆς ποσότητος ταύτης, $\begin{cases}\text{ἐλαττοῦται}\\ \text{αὐξάνει}\end{cases}$ καί ἡ ὑπό τοῦ κινουμένου σώματος παραγομένη ἐργασία κατά τήν κίνησιν αὐτοῦ, ἐκ τῆς ὁλικῆς δέ ποσότητος, τῆς ἐν τῷ κινουμένῳ σώματι ἐμπεριεχομένης κινητικῆς ἐνεργείας, ἐξαρτᾶται καί ἡ μηχανική ἐργασία, ἥν δύναται τοῦτο νά παραγάγῃ διά τῆς καταναλώσεως τῆς ὁλικῆς αὐτοῦ ταχύτητος, καί τῆς ἐπανόδου του εἰς τήν ἠρεμίαν.

Ἐν συνόψει βλέπομεν ὅτι, τά σώματα ἐν ἠρεμίᾳ ἤ ἐν κινήσει κέκτηνται ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς αὐτῶν θέσεως ἐν τῷ διαστήματι, καί ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς φέρονται, ἰδιότητά τινα (capacité) πρός παραγωγήν μηχανικῆς ἐργασίας, ἰδιότητα (capacité) τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν ἐνέργειαν τοῦ σώματος καί τήν ὁποίαν μετροῦμεν διά τῆς ποσότητος τῆς ἐργασίας, ἥν τό σῶμα δύναται νά μᾶς παράσχῃ.

Τήν ἐν τῷ σώματι ἐνυπάρχουσαν ἐνέργειαν, διακρίνομεν εἰς λανθάνουσαν ἐνέργειαν, ὀφειλομένην κυρίως εἰς τήν σχετικήν θέσιν τοῦ σώματος, ὅπερ ὑφίσταται τήν ἐπήρειαν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τάς ὁποίας ἐξασκοῦσιν ἐπ' αὐτοῦ τά περικυκλοῦντα αὐτό ἕτερα σώματα. Τήν ποσότητα δέ τῆς ἐν τῷ σώματι λανθανούσης ταύτης ἐνεργείας, μετροῦμεν διά τῆς ἐργασίας $\int F$συν.$(F, ds)\, ds$, ἥν δύνανται νά παράσχωσιν ἡμῖν αἱ ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργοῦσαι ἐξωτερικαί δυνάμεις, ἐάν τοῦτο ἀφεθῇ ἐλεύθερον ὑπό τήν ἐπήρειαν αὐτῶν,

καί

Κινητικήν ἐνέργειαν

ἐνυπάρχουσαν κυρίως ἐν τοῖς κινουμένοις σώμασι, καί ὀφει-

λομένην τῇ ταχύτητι μεθ' ἧς ταῦτα φέρονται ἐν τῷ διαστήματι. Τήν ποσότητα τῆς ἐν τῷ σώματι κινητικῆς ταύτης ἐνεργείας μετροῦμεν διά τῆς ἐργασίας, ἥν δύναται τοῦτο νά μᾶς παράσχῃ διά τῆς ἐλαττώσεως τῆς ταχύτητος αὐτοῦ, καί ἥτις, ὡς εἴδομεν τοῦτο ἀνωτέρω ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐπελθοῦσαν ἐν τῇ συναρτήσει $\frac{mv^2}{2}$ μεταβολήν $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, κατά τό χρονικόν διάστημα, καθ' ὅ μετεχειρίσθημεν τό κινούμενον σῶμα πρός παραγωγήν μηχανικῆς ἐργασίας.

οὕτω

1ον) Ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια σώματός τινος εὑρισκομένου ὑπό τήν ἐπενέργειαν δυνάμεώς τινος F καί δυναμένου νά διατρέξῃ διάστημα μήκους l μετρεῖται διά τοῦ ἀθροίσματος:

$$\int_0^l F\,\text{συν}(F, ds)\, ds$$

ἥτις ἐμφαίνει καί τήν ποσότητα τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, τό σῶμα ὡς ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ, ἥν δύναται νά παράσχῃ ἡμῖν.

2ον) Ἡ κινητική ἐνέργεια μάζης m φερομένης μέ ταχύτητα v μετρεῖται διά τῆς συναρτήσεως.

$$\frac{mv^2}{2}$$

ἥτις ἐμφαίνει καί τήν ἐργασίαν, ἥν δύναται νά παράσχῃ ἡμῖν τό σῶμα ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς φέρεται τοῦτο.

Καί δυνάμεθα ἤδη νά ἐκφράσωμεν τά ἐν τῇ παραγράφῳ [18] λέγοντες.

1ον) Διά τῆς λανθανούσης ἐνεργείας σώματός τινος δυνάμεθα νά παραγάγωμεν μηχανικήν ἐργασίαν ἴσην αὐτῇ.

2ον) Τήν μηχανικήν ταύτην ἐργασίαν δυνάμεθα νά καταναλώσωμεν πρός ἐπαύξησιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἐτέρου σώματος. καί

3ον) Τήν οὕτω παραχθεῖσαν κινητικήν ἐνέργειαν δυνάμεθα ἐκ νέου νά μεταχειρισθῶμεν πρός παραγωγήν μηχανικῆς ἐργασίας, τῆς ὁποίας ἡ ποσότης δύναται νά φθάσῃ οὐχί ὅμως καί νά ὑπερβῇ ἐκείνην ἣν κατηναλώσαμεν, πρός παραγωγήν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ἣν μεταχειριζόμεθα ἐνταῦθα.

Οὕτω διά τῆς λανθανούσης ἐνεργείας, ἣν κατηναλώσαμεν παρηγάγομεν μηχανικήν ἐργασίαν, ἣν μετεχειρίσθημεν πρός ἐπαύξησιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος, καί τήν ἐπελθοῦσαν ταύτην ἐπαύξησιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν πρός παραγωγήν τῆς αὐτῆς μηχανικῆς ἐργασίας, δηλ. πρός ἐπαύξησιν τῆς λανθανούσης ἐνεργείας κατά ποσότητα ἴσην ἀκριβῶς ἐκείνης, ἣν κατηναλώσαμεν πρό ὀλίγου.

Ἐν ἄλλαις λέξεσι

Τήν $\left\{\begin{array}{l}\text{κινητικήν}\\ \text{λανθάνουσαν}\end{array}\right.$ ἐνέργειαν σώματός τινος δυνάμεθα νά μετατρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον $\left\{\begin{array}{l}\text{λανθάνουσαν}\\ \text{κινητικήν}\end{array}\right.$ ἐνέργειαν· καθ᾽ ὅσον δηλ. ἐλαττοῦμεν τήν $\left\{\begin{array}{l}\text{κινητικήν}\\ \text{λανθάνουσαν}\end{array}\right.$ ἐνέργειαν τοῦ σώματος, κατά τοσοῦτον ἐπαυξάνομεν τήν $\left\{\begin{array}{l}\text{λανθάνουσαν}\\ \text{κινητικήν}\end{array}\right.$ ἐνέργειαν αὐτοῦ ὥστε,

Τό ἄθροισμα τῆς λανθανούσης καί κινητικῆς ἐνεργείας σώματός τινος εἶναι σταθερόν. καί ἐν τῇ προτάσει ταύτῃ ἔγκειται ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας (*principe de la conservation de l'energie*) σώματός τινος, ἥτις ἀποτελεῖ τήν μεγαλειτέραν καί ὑψηλοτέραν ἀνακάλυψιν τοῦ αἰῶνός μας, καί κατά τήν ὁποίαν.

Ἡ ἐν σώματί τινι ἐνυπάρχουσα ὁλική ἐνέργεια μορ-

φήν μόνον ἀλλάσσει κατά τήν κίνησιν τοῦ σώματος, χωρίς νά δύναται ν᾽ αὐξηθῇ οὐδέ νά ἐλαττωθῇ τό παράπαν.

Ἐάν ἀντί ἑνός ὑλικοῦ σημείου ἔχομεν ὑλικόν σύστημα ἡ ἄνω σχέσις

$$T=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}$$

μετατρέπεται εἰς τήν ἀκόλουθον

$$T=\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}$$

Ἐφαρμογή εἰς τὴν κίνησιν τῶν μηχανῶν. — Ἡ ἐργασία T εἶναι τό ἄθροισμα δύο ὅρων τῆς κινητηρίου ἐργασίας (*travail moteur*) T_m καί τῆς ἀνθισταμένης ἐργασίας (*travail resistant*) $-T_r$.

Ὥστε τήν ἄνω σχέσιν δυνάμεθα νά γράψωμεν καί ὡς ἑξῆς

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=T_m-T_r$$

ἐάν $T_m>T_r$ ἡ ταχύτης τῶν ὀργάνων τῆς μηχανῆς αὐξάνει.

Περίπτωσις τῆς ὁμοιομόρφου κινήσεως. — Ἐάν τά διάφορα σημεῖα τῆς μηχανῆς φέρονται ὑπό ὁμοιομόρφου κινήσεως ἔχομεν $v=v_0$ ὅθεν $\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma m\frac{v_0^2}{2}=0$ καί

$$T_m=T_r$$

Ἡ κινητήριος ἐργασία ἰσοῦται τῇ ἀνθισταμένῃ ἐργασίᾳ.

Περίπτωσις τῆς περιοδικῆς κινήσεως — Ἐάν ἡ κίνησις τῆς μηχανῆς εἶναι περιοδική εἰς τό τέλος ἑκάστης περιόδου $v=v_0$ καί ἔχομεν ἐπίσης

$$T_m=T_r$$

Παθητικαί αντιστάσεις. — Αι ανθιστάμεναι δυνάμεις είναι δύο ειδών.

1ον) Αι αντιστοιχούσαι εις την εργασίαν την οποίαν προτιθέμεθα να εκτελέσωμεν τη βοηθεία της μηχανής, τας οποίας καλούμεν ωφελίμους αντιστάσεις (resistances utiles). Η εργασία των δυνάμεων τούτων, είναι η ωφέλιμος εργασία travail utile)

2ον) Αι παθητικαί αντιστάσεις (resistances passives) προκύπτουσαι εκ της προστριβής κλπ.

έχομεν λοιπόν

$$\tau_m = \tau_u + \tau_f$$

και ο τελευταίος ούτος όρος τ_f δεν χρησιμοποιείται ωφελίμως δια την εργασίαν, την οποίαν προτιθέμεθα να εκτελέσωμεν.

Πρόσοδος της μηχανής. — Την πρόσοδον της μηχανής μετρούμεν δια του λόγου.

$$\frac{\tau_u}{\tau_m} = \frac{\tau_m - \tau_f}{\tau_m} = 1 - \frac{\tau_f}{\tau_m}$$

της χρησιμοποιουμένης προς την διαθέσιμον εργασίαν.

Αίτια ανωμαλίας εν τη κινήσει των μηχανών — Τα κύρια αίτια των ανωμαλιών τας οποίας παρατηρούμεν εν τη κινήσει των μηχανών, της μεταβολής δηλ. της ταχύτητος των οργάνων αυτής είναι

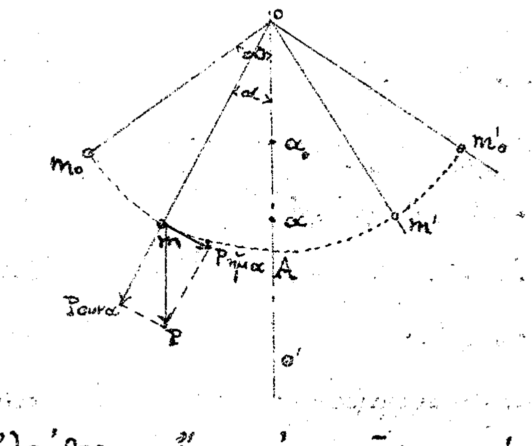
1ον) Η παλινδρομική κίνησις των οργάνων της μηχανής,

2ον) Η κατά διαλείμματα εκτέλεσις της εργασίας, και

Εφαρμογή του άνω νόμου

1ον. εν τη κινήσει του εκκρεμούς — Ας εφαρμόσωμεν τ' ανωτέρω εν τη κινήσει του αιωρουμένου εκκρεμούς ένθα αναγκάζομεν ίσα ίσα το πίπτον βάρος να μετατρέψη την εκ της πτώσεως κτηθείσαν κινητικήν ενέργειαν εις ισοδύναμον λανθάνουσαν ενέργειαν, δια της εκ νέου ανυψώσεως αυτού εις το αυτό ύψος, αφ' ου κατέπεσεν.

Θεωρήσωμεν προς τούτο βάρος P κρεμάμενον από τινος σημείου O δια νήματος Om_o.



Εάν εκκλίνωμεν το βάρος τούτο από της κατακορύφου μεθ' ης συμπίπτει, κρατούντες πάντοτε τεταμένον το νήμα Om_o, κατά γωνίαν $m_o O O' = \alpha_o$, και αφήσωμεν ελεύθερον άνευ αρχικής ταχύτητος, καταπίπτει τούτο διαγράφον περιφέρειαν κύκλου με κέντρον το O και ακτίνα την $Om_o = l$. η επιφέρουσα την κατάπτωσιν του σώματος δύναμις είναι η επ' αυτού επενέργεια της βαρύτητος P, την οποίαν δυνάμεθα ν' αναλύσωμεν κατά την προεκβολήν της Om και την εφαπτομένην τω κύκλω παρά το αυτό σημείον m, εις δύο άλλας P συν. α και P ημ. α. εις την τελευταίαν δε ταύτην οφείλεται η παρά το σημείον m ταχύτης του σώματος $-l\frac{d\alpha}{dt} = v$ [το σημείον είναι − διότι η γωνία α ελαττούται κατά την πτώσιν του m ώστε $d\alpha$ είναι αρνητικόν]

Η παρά το αυτό σημείον επιτάχυνσις του σώματος είναι $-l\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ώστε $P\,\eta\mu\,\alpha = -\frac{P}{g}\,l\,\frac{d^2\alpha}{dt}$ ή $-l\frac{d^2\alpha}{dt^2} = g\,\eta\mu.\alpha$

πολλαπλασιάζοντες τα δύο μέλη της εξισώσεως ταύτης επί

$2\frac{da}{dt}$ καί όλοκληροῦντες ἔχομεν

$$l\left[\frac{da}{dt}\right]^2 = 2g[\text{συν.}\alpha - \text{συν.}\alpha_o]$$

καί ἐπειδή $V = -l\frac{da}{dt}$ ὑψοῦντες εἰς τό τετράγωνον $V^2 = l^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2$.

ἔχομεν τέλος, $V^2 = 2g[l\text{συν.}\alpha - l\text{συν}\alpha_o] = 2g[o\alpha - o\alpha_o] = 2gh$

ἔνθα h παριστᾷ τό ὕψος ἀφ' οὗ κατέπεσε τό σῶμα.

ἐκ τῆς σχέσεως δέ ταύτης βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ὑπό τοῦ πίπτον-
τος σώματος κτηθεῖσα κινητική ἐνέργεια

$$\frac{mV^2}{2} = mgh = Ph$$

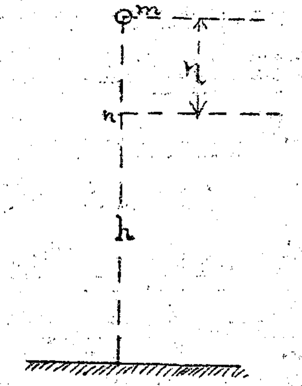
εἶναι ἡ αὐτή, ὡς εἰ τό σῶμα ἔπιπτε κατακορύφως.
παρά τό κατώτατον αὐτοῦ σημεῖον A τό σῶμα κέκτηται ταχύ-
τητα ἴσην τῇ $\sqrt{2g.\alpha_o A}$ καί κινητικήν ἐνέργειαν $P.\alpha_o A$ ἐξακο-
λουθεῖ λοιπόν τοῦτο κινούμενον, ἀνυψούμενον μέχρις οὗ ἡ
ταχύτης αὐτοῦ μηδενισθῇ ἐντελῶς. ἀλλά τότε ἐκ προηγουμέ-
νης τινός σχέσεως συν.α = συν α_o καί κατά συνέπειαν τό βάρος P
εὑρίσκεται εἰς τό αὐτό ὕψος ἀφ' οὗ κατέπεσε τοῦτο ἀρχικῶς.
ἐπανακτᾷ κατά συνέπειαν καί τήν πρώτην του ἐνέργειαν.
καί βλέπομεν σαφῶς, ὅτι
διά τῆς ἀνυψώσεως τοῦ βάρους P ἀπό τοῦ σημείου A εἰς τό σημεῖον
m_o κατηναλώσαμεν μηχανικήν τινα ἐργασίαν $P.A\alpha_o$, ἥν κέκτη-
ται ἤδη τό σῶμα εἰς λανθάνουσαν μορφήν καί δύναται νά μας πα-
ράσχῃ ταύτην διά τῆς πτώσεώς του, ἐάν θελήσωμεν νά ὑπερνι-
κήσωμεν δι' αὐτῆς ἀντίστασίν τινα. Ἀλλ' ἐάν ἀφήσωμεν τό σῶ-
μα νά καταπέσῃ ἐλευθέρως, μεταβάλλει τοῦτο τήν λανθάνουσαν ἐ-
νέργειαν αὐτοῦ εἰς κινητικήν ἐνέργειαν ἀπό τοῦ σημείου m_o μέχρι
τοῦ σημείου A, διά τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς κινήσεώς του, ἀπό τοῦ
σημείου τούτου ὅμως, ἡ κατά τήν πτῶσιν κτηθεῖσα κινητική
ἐνέργεια, ἀπό τοῦ σημείου m_o μέχρι τοῦ σημείου A, χρησιμοποι-

εῖται διά τήν ἐκ νέου ἀνύψωσιν τοῦ βάρους, μετασχηματιζομένη οὕτω ἐκ
νέου εἰς λανθάνουσα ἐνέργειαν. Ἐν οἵῳ δήποτε σημείῳ m, ἡ ὁλική ἐνέρ-
γεια τοῦ σώματος ἰσοῦται τῇ ἐνεργείᾳ ἥν κέκτηται τοῦτο παρά τό
σημεῖον m_o.

Ὅταν δέ τό σῶμα εὑρίσκηται ἐν τῷ αὐτῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ mn'
κέκτηται τήν αὐτήν ποσότητα κινητικῆς καί λανθανούσης ἐνεργείας.

2ον— Ἐν τῇ κατακορύφῳ— Ὑποθέσωμεν ἤδη σῶμά τι μάζης m εὑρισκό-
πτώσει τῶν σωμάτων— μενον εἰς ὕψος h ἀπό τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς.
Ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεως τοῦ σώματος m ὡς πρός τήν γῆν, κέκτη-
ται τοῦτο λανθάνουσαν ἐνέργειαν ἴσην ἐκείνης, ἥν δύναται νά παρα-
γάγῃ ἡ βαρύτης, ἐξασκουμένη ἐπί τοῦ σώματος, ὑπερνικῶντος καί
τούτου ἀντίστασίν τινα, τήν ὁποίαν τῷ ἀντιτάσσομεν, μέχρι τῆς
ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς πτώσεως αὐτοῦ.

Ἡ ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργοῦσα δύναμις τῆς βαρύτητος εἶναι
ἴση μέ τό βάρος αὐτοῦ $P = mg$. τό διάστημα τό ὁποῖον δύναται νά
διανύσῃ τό αὐτό σῶμα ἀφιέμενον ἐλεύθερον ὑπό τήν ἐπενέργειαν τῆς
βαρύτητος εἶναι h, ὥστε ἡ δυναμένη νά πα-
ραχθῇ ὑπό τῆς βαρύτητος ἐργασία κατά
τήν πτῶσιν τοῦ σώματος ἰσοῦται μέ Ph
αὐτή εἶναι καί ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια τῆς
μάζης m εὑρισκομένης εἰς τό ὕψος h. καί
αὐτή εἶναι ἡ ὁλική ἐνέργεια τῆς μάζης
ταύτης, διότι ἐάν ὑποθέσωμεν αὐτήν ἠρε-
μοῦσαν ἡ κινητική αὐτῆς ἐνέργεια εἶναι μηδέν.



Ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι τό σῶμα πίπτει μέχρι τοῦ σημείου n, ἐλεύ-
θερον πάσης ἀντιστάσεως κατά τήν πτῶσιν αὐτοῦ, καθώς γνωρί-
ζομεν ἀπέκτησε τοῦτο ταχύτητα V ἴσην τῇ $\sqrt{2g\eta}$, ἔνθα η παρι-

στᾳ τό ὕψος mn.

Ὥστε εὑρισκόμενον παρά τό σημεῖον n τό σῶμα φέρεται ὑπό ταχύτητος V καί κατά συνέπειαν κέκτηται κινητικήν ἐνέργειαν ἴσην τῇ $\frac{mv^2}{2}=\frac{Pv^2}{2g}$, τήν ὁποίαν δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν πρός παραγωγήν ἐργασίας ἴσης καθώς βλέπετε ἐκείνης, ἥν δύναται νά παραγάγῃ ἡ μᾶζα m πίπτουσα ἐπί τοῦ ὕψους $\eta=\frac{v^2}{2g}$, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Ἡ δέ λανθάνουσα ἐνέργεια τοῦ σώματος παρά τό σημεῖον n εἶναι,

$$P(h-\eta)=P\left(h-\frac{v^2}{2g}\right)$$

ὥστε ἡ κατά τήν πτῶσιν τοῦ σώματος, ἀπό τοῦ σημείου m εἰς τό σημεῖον n ἀπολεσθεῖσα λανθάνουσα ἐνέργεια Ph ἰσοῦται τῇ ὑπό τοῦ αὐτοῦ σώματος κτηθείσῃ κινητικῇ ἐνεργείᾳ $\frac{Pv^2}{2g}$ καί ἡ ὁλική ἐνέργεια,

$$P(h-\eta)+\frac{Pv^2}{2g}$$
$$=P\left(h-\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{Pv^2}{2g}=Ph$$

τοῦ σώματος εἶναι παρά τό σημεῖον n, οἵα καί παρά τό σημεῖον m, μέ μόνην τήν διαφοράν, ὅτι μέρος τῆς παρά τό σημεῖον m λανθανούσης ἐνεργείας τοῦ σώματος, ἤλλαξε μορφήν μεταβληθέν εἰς ἴσην ἀκριβῶς ποσότητα κινητικῆς ἐνεργείας, τήν ὁποίαν δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν πρός παραγωγήν μηχανικῆς ἐργασίας ἀπαράλλακτα, ὅπως καί τήν ἰσοδύναμον αὐτῇ ποσότητα λανθανούσης ἐνεργείας.

Ὥστε κατά τήν κίνησιν τοῦ σώματος ἀπό τοῦ σημείου m μέχρι τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς δέν ἀπώλεσε τοῦτο οὐδέ τήν ἐλαχίστην ποσότητα τῆς ἐνεργείας, ἥν ἐκέκτητο παρά τό σημεῖον m ὡς ἐκ τῆς πρός τήν γῆν σχετικῆς θέσεως αὐτοῦ. κατά τήν πτῶσιν αὐτοῦ, τό σῶμα ἀπέκτησε τῷ ὄντι κινητικήν ἐνέργειαν

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{Pv^2}{2g}\;\frac{P.2gh}{2g}=Ph$$

ἴσην ἀκριβῶς ἐκείνης ἥν ἐκέκτητο παρά τό σημεῖον m, ἀλλ' αὕτη ἦτο λανθάνουσα, ἐν ᾧ ἡ νῦν ἐνέργεια τοῦ σώματος εἶναι κινητική ὑπό τήν ἔποψιν ὅμως τῆς χρήσεως τούτων πρός παραγωγήν μηχανικῆς ἐργασίας, τά δύο ταῦτα εἴδη τῆς ἐργασίας εἶναι ἰσοδύναμα, καί ἄν ἦτο δυνατόν νά ἐπινοηθῇ συσκευή τις ἄνευ προστριβῆς καί ἐσωτερικῶν ἀντιστάσεων τῶν ὀργάνων αὐτῆς θά ἠδυνάμεθα, χρησιμοποιοῦντες, διά τῆς συσκευῆς ταύτης τήν κινητικήν ἐνέργειαν, ἥν κέκτηται ἡ μᾶζα φθάνουσα εἰς τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, ν'ἀνυψώσωμεν τό βάρος P ἀκριβῶς εἰς τό σημεῖον m, ἀφοῦ τοῦτο κατέπεσε, καί ἐπαναφέρωμεν αὐτό εἰς τήν προτέραν του κατάστασιν, ὡς πρός τήν ἐν αὐτῷ ἐνυπάρχουσαν λανθάνουσαν ἐνέργειαν.

Ἀλλ' ὅταν ἐν τῇ κατακορύφῳ ἐλευθέρᾳ πτώσει σώματός τινος, φθάσῃ τοῦτο μέχρι τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς μέ κτηθεῖσαν ταχύτητα V καί κινητικήν ἐνέργειαν $\frac{Pv^2}{2g}=Ph$ ἀμέσως ἤ μετά τινα ἀναπηδήματα σταματᾷ ἀναλόγως τῆς ἐλαστικότητος αὐτοῦ καί τῆς κρουομένης ἐπιφανείας, καί ἵνα τό καταστήσωμεν ἐκ νέου ἱκανόν πρός παραγωγήν τῆς αὐτῆς μηχανικῆς ἐργασίας, δέον ν'ἀνυψώσωμεν αὐτό εἰς τό ὕψος h ἤ νά μεταδώσωμεν εἰς αὐτό ταχύτητα V δι' ἀμέσου ὠθήσεως, καί καταναλίσκομεν οὕτω ἐνέργειαν, ἐνῷ διά τῆς πτώσεως τοῦ σώματος οὐδεμίαν τοιαύτην ἐκερδήσαμεν. τί ἔγεινε λοιπόν ἡ κινητική ἐνέργεια $\frac{Pv^2}{2g}$, τήν ὁποίαν ἐκέκτητο τό σῶμα φθάσαν ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς· ἀπώλετο αὕτη ἐντελῶς, ἀλλά ὁ νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας καταστρέφεται τότε ἤ μήπως μετεβλήθη αὕτη εἰς ἄλλο εἶδος ἐνεργείας, τό ὁποῖον δέν ἐξητάσαμεν ἀπόμη μέχρι τοῦδε· ἵνα ἀπαντήσωμεν εἰς τοῦτο δέον νά ἐξετάσωμεν ἐκ τοῦ σύνεγγυς τό φαινόμενον τῆς κρούσεως τοῦ σώματος ἐπί τῆς γῆς, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας προέρχεται ἡ φαινομενική αὕτη ἀπώλεια τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ πίπτοντος σώματος.

Φαινόμενον τῆς κρούσεως

Ἡ ἀρχή τοῦ d'Alembert μᾶς διδάσκει, ὅτι ἐάν ἔχωμεν σῶμα κινούμενον ὑπό τήν ἐπήρειαν δυνάμεων X, Y, Z ἔχομεν μεταξύ τῶν ἐπιταχύνσεων τῶν διαφόρων μορίων τοῦ σώματος καί τῶν δυνάμεων X, Y, Z τήν σχέσιν

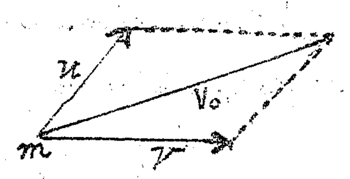
$$(1)\quad \Sigma\left[X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right]\delta x + \Sigma\left[Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right]\delta y + \Sigma\left[Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right]\delta z = 0$$

ἔνθα $\delta x, \delta y, \delta z$ παριστῶσι στοιχειώδη τινα φανταστικήν μετατόπισιν τοῦ μορίου m ἐπιτρεπομένην ὑπό τῶν συνδέσμων τοῦ συστήματος.

Ἐάν ὑποθέσωμεν τήν ἔντασιν τῶν δυνάμεων ἀρκετά μεγάλην, οὕτως ὥστε νά ἐπιφέρωσιν ἐπαισθητήν μεταβολήν εἰς τήν ταχύτητα τοῦ σώματος ἐν χρονικῷ διαστήματι ἀρκούντως βραχεῖ, ὥστε νά ὑποθέσωμεν, ὅτι $\delta x, \delta y, \delta z$ δέν μετεβλήθησαν ἐν τῷ χρονικῷ τούτῳ διαστήματι, ἔχομεν ὁλοκληροῦντες τήν ἄνω σχέσιν.

$$(2)\quad \Sigma\left(\int_{t_0}^{t} X\,dt - m\left(\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right]\delta x + \Sigma\left\{\int_{t_0}^{t} Y\,dt - m\left[\frac{dy}{dt} - \left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right]\right\}\delta y + \Sigma\left\{\int_{t_0}^{t} Z\,dt - m\left[\frac{dz}{dt} - \left(\frac{dt}{dt_0}\right)_0\right]\right\}\delta z = 0$$

Ἔστω ἤδη V_0 ἡ ταχύτης τοῦ μορίου m κατά τήν στιγμήν t_0, V ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοῦ σημείου κατά



τὴν στιγμὴν t, ἡ ταχύτης V_0 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη τῆς V καὶ μιᾶς τρίτης ταχύτητος U, ἣν καλοῦμεν ἀπωλεσθεῖσαν ταχύτητα. τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς σχέσεως

$$\bar{U} = \bar{V}_0 - \bar{V} \quad \text{ἢ} \quad U_x = V_{0x} - V_x$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὴν μάζαν m ἔχομεν

$$mU_x = mV_{0x} - mV_x = m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \frac{dx}{dt}\right]$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν (2) ἔχομεν

$$(3) \quad \Sigma\left\{\int_{t_0}^{t} X\,dt + mU_x\right\}\delta x + \Sigma\left\{\int_{t_0}^{t} Y\,dt + mU_y\right\}\delta y + \Sigma\left\{\int_{t_0}^{t} Z\,dt + mU_z\right\}\delta z = 0$$

Εὐθεῖα κροῦσις δύο ἐλαστικῶν σφαιρῶν — Δύο σφαῖραι μάζης m καὶ m', κινοῦνται μὲ μεταβατικὴν κίνησιν υ καὶ υ' οὕτω ὥστε τὰ κέντρα των διαγράφουσι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ κρούονται ἀμοιβαίως.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν πρώτην φάσιν $(\tau - t_0)$ τῆς κρούσεως μέχρι τέλους δηλ. τῆς συνθλίψεως

$$\Sigma\left\{\int_{t_0}^{t} X\,dt + \mathcal{M}U_x\right\} = 0$$

ἀλλ' ἐνταῦθα $\int_{t_0}^{t} X\,dt = 0$ διότι εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δράσεων καὶ ἀντιδράσεων, ἃς ἐξασκοῦσιν ἀμοιβαίως ἐπ' ἀλλήλων αἱ δύο σφαῖραι καὶ αἵτινες εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. δι' ἑκατέρας τῶν σφαιρῶν ἔχομεν τῷ ὄντι

$$m(\upsilon - u) = \int_{t_0}^{\tau} P\,dt = R$$

$$m'(u - \upsilon') = \int_{t_0}^{t} P\,dt = R$$

ὅθεν $\mathcal{M}U_x = 0 = m(\upsilon - u) + m'(\upsilon' - u)$

ἔνθα u παριστᾷ τὴν κοινὴν ταχύτητα τῶν σφαιρῶν εἰς τὸ τέλος τῆς περιόδου τῆς συνθλίψεως ὥστε

$$u(m + m') = m\upsilon + m'\upsilon'$$

$$u = \frac{m\upsilon + m'\upsilon'}{m + m'} = \upsilon + \frac{m'}{m + m'}(\upsilon' - \upsilon) = \upsilon' + \frac{m}{m + m'}(\upsilon - \upsilon') = \frac{P\upsilon + P'\upsilon'}{P + P'}$$

Ἐὰν τὰ σώματα οὐδεμίαν ἔχουσιν ἐλαστικότητα τότε τὸ φαινόμενον τῆς κρούσεως λήγει μετὰ τῆς περιόδου τῆς συνθλίψεως καὶ τὰ σώματα ἐξακολουθοῦσι κινούμενα μὲ τὴν κοινὴν ταχύτητα u, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ κέντρου τῆς μάζης τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως, ἢ ἐὰν

$$m\upsilon = m'\upsilon'$$

καταστρέφεται ἡ κίνησις αὐτῶν ἐκ τῆς κρούσεως καὶ μένουσιν ἀμφότερα ἐν ἠρεμίᾳ.

Βλέπομεν ἐπίσης ἐὰν ὑποθέσωμεν $\upsilon > \upsilon'$, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ κρούοντος σώματος ἐλαττοῦται κατὰ

$$\frac{m'}{m + m'}(\upsilon - \upsilon')$$

ἐνῷ ἡ ταχύτης τοῦ κρουομένου σώματος αὐξάνει κατὰ

$$\frac{m}{m + m'}(\upsilon - \upsilon')$$

ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν σωμάτων ἠρεμεῖ $(\upsilon' = 0)$ ἡ μετὰ τὴν κροῦσιν κοινὴ ταχύτης εἶναι

$$\frac{m\upsilon}{m + m'}$$

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

Απώλεια κινητικής ενεργείας εν τη κρούσει των μη ελαστικών σωμάτων.

Ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος πρό τῆς κρούσεως ἦτο

$$\frac{1}{2}(mv^2+m'v'^2)$$

μετά τήν κροῦσιν εἶναι αὕτη

$$\frac{mu^2}{2}+\frac{m'u^2}{2}$$

ἡ ἀπωλεσθεῖσα κινητική ἐνέργεια εἶναι λοιπόν

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{m'v'^2}{2}-\frac{mu^2}{2}-\frac{m'u^2}{2}=\frac{m'u^2}{2}=\frac{1}{2}m(v^2-u^2)+\frac{1}{2}m'(v'^2-u^2)$$

$$=\frac{1}{2}m(v-u)(v+u)+\frac{1}{2}m'(v'+u)(v'+u)$$

ἥτις ὡς ἐκ τῆς σχέσεως $m(v-u)=-m'(v'-u)$ μετατρέπεται εἰς

$$\frac{1}{2}m(v-u)(v+u)-\frac{1}{2}m(v'-u)(v'+u)$$

$$=\frac{1}{2}m(v-u)\left[v+\cancel{u}\ v'-\cancel{u}\right]=\frac{1}{2}m(v-u)(v-v')$$

ἀλλά

$$v-u=\frac{m'}{m+m'}(v-v')$$

ὥστε

$$\text{ἀπωλεσθεῖσα κινητική ἐνέργεια}=\frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{PP'}{g(P+P')}(v-v')^2$$

ἀλλ' ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων ( ) ἔχομεν

$$\frac{m}{m+m'}(v-v')=u-v' \qquad \frac{m'}{m+m'}(v-v')=v-u$$

ὥστε

$$\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2=(u-v')(v-u)(m+m')=m(u-v')(v-u)+m'(u-v')(v-K)$$

ἀλλά

$$m(v-u)=m'(u-v')$$

καί ἀντικαθιστῶντες

$$\frac{1}{2}m'(u-v')^2+\frac{1}{2}m(v-u)^2=\text{ἀπωλεσθεῖσαν κινητ. ἐνέργειαν}$$

ὅθεν τό θεώρημα τοῦ Carnot.

Ἡ ὀφειλομένη τῇ κρούσει ἀπώλεια κινητικῆς ἐνεργείας ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐνεργειῶν, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τάς ἀπωλεσθείσας ὑπό τῶν σωμάτων ταχύτητας μετά τήν κροῦσιν.

Ἐφαρμογή au battage de pilote de fondation.

Ἔστω P τό βάρος τοῦ P' τό βάρος τοῦ πασσάλου, καί H τό ὕψος τῆς πτώσεως, ἡ ἀπωλεσθεῖσα κινητική ἐνέργεια ὡς ἐκ τῆς κρούσεως εἶναι κατά τά προηγούμενα.

$$\frac{P'}{P+P'}PH$$

ἔχει δέ αὕτη ὡς ἀποτέλεσμα τήν παραμόρφωσιν τοῦ πασσάλου, ἡ χρησιμοποιουμένη λοιπόν διά τήν εἴσδυσιν τοῦ πασσάλου ἐν τῷ ἐδάφει εἶναι.

$$PH-\frac{P'}{P+P'}PH=PH\frac{P}{P+P'}=\frac{PH}{1+\frac{P'}{P}}$$

ὅσῳ μεγαλείτερον εἶναι λοιπόν τό βάρος τοῦ τόσῳ μεγαλειτέρα καί ἡ ὠφέλιμος ἐργασία τήν ὁποίαν ἐπιζητοῦμεν, καί κατά συνέπειαν τόσῳ μικροτέρα ἡ παραμόρφωσις τοῦ πασσάλου. ἐκ τούτου ἐξηγεῖται τό διατί ὅταν ζητοῦμεν νά ἐμπήξωμεν ἧλον μέ ἐλαφράν μάζαν καμπυλοῦται οὗτος εὐκολώτερον παρά ὅταν ἡ μάζα εἶναι μεγάλη.

Ἐάν τά σώματα εἶχον ταχύτητας ἀντιθέτου φορᾶς ἡ ἀπωλεσθεῖσα ἐνέργεια θά ἦτο.

$$\frac{1}{2}\,\frac{mm'}{m+m'}(v+v')^2$$

ἐάν τό ἕτερον τῶν σωμάτων ἠρεμεῖ ἔχομεν ($v'=0$

$$\frac{1}{2}\,\frac{m'}{m+m'}\,mv^2$$

Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Carnot. —— Τήν ἄνω εὑρεθεῖσαν συνάρτησιν

$$\frac{1}{2}m'(v'-u)^2+\frac{1}{2}m(v-u)^2$$

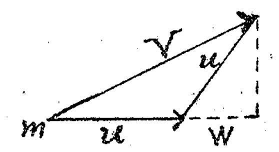
ἥτις ἐκφράζει τήν ἀπωλεσθεῖσαν κινητικήν ἐνέργειαν ἐν τῇ κρούσει δύο σφαιρῶν μή ἐλαστικῶν κινουμένων ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυνάμεθα νά γενικεύσωμεν διά σώματα ἅτινα δέν κινοῦνται παραλλήλως, ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν V καί $\mathcal{U}$ αἱ ταχύτητες τοῦ μορίου m πρό καί

μετά τήν κροῦσιν.

ἡ ἐκ τῆς κρούσεως ἀπωλεσθεῖσα παρά τοῦ μορίου τούτου ταχύτης εἶναι u

ἔχομεν δέ ἐν τῷ ἔναντι τριγώνῳ



$$V^2=\mathcal{U}^2+u^2+2\mathcal{U}.w$$

καί πολλαπλασιάζοντες ἐπί τήν μάζαν τοῦ μορίου

$$mV^2=m\mathcal{U}^2+mu^2+2m\mathcal{U}.w$$

καί ἀθροίζοντες δι' ὅλα τά μόρια τοῦ σώματος ἔχομεν

$$\Sigma mV^2-\Sigma m\mathcal{U}^2=\Sigma mu^2+2\Sigma m\mathcal{U}.w$$

ἀλλ' εἴδομεν προηγουμένως αἱ ποσότητες κινήσεως τῶν ἀπωλεσθεισῶν ταχυτήτων ἰσορροποῦσιν ἐπί τῶν δύο σωμάτων ὑποτιθεμένων ὡς ἀποτελούντων ἕν καί μόνον σύστημα μετά τήν κροῦσιν λοιπόν καί ἡ ἐργασία τῶν ποσοτήτων κινήσεως εἶναι ἴση τῷ μηδενί.

ποσότης κινήσεως ὀφειλομένη τῇ ἀπωλεσθείσῃ ταχύτητι $=mu$

προβολή αὐτῆς ἐπί τῆς $m\mathcal{U}$ . . . . $=mw$

διανυθέν διάστημα . . . . $=\mathcal{U}.dt$

ἐργασία ποσότητος κινήσεως προβαλλομένη ἐπί τῆς $m\mathcal{U}=mw.\mathcal{U}dt$

ὥστε

$$\Sigma mw.\mathcal{U}dt=0=dt\,\Sigma mw.\mathcal{U}$$

καί ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\Sigma mV^2-\Sigma m\mathcal{U}^2=\Sigma mu^2$$

Περίπτωσις τῶν ἐντελῶς ἐλαστικῶν σωμάτων. — Ἐάν δέ τά σώματα εἶναι ἐντελῶς ἐλαστικά, τότε αἱ σφαῖραι ἐπανακτῶσι μετά τήν κροῦσιν τήν προτέραν αὐτῶν μορφήν καί ἐξακολουθοῦσι κινούμεναι μέ ταχύτητας w καί w'. αἱ ἀναπτυσσόμεναι δέ ἐν τῇ περιόδῳ ταύτῃ ἐλαστικαί δυνάμεις εἶναι ἀκριβῶς ἴσαι καί ἀντίθετοι ἐκείνων, αἵτινες ἀνεπτύχθησαν κατά τήν περίοδον τῆς συνθλίψεως. ἡ κατά τάς δύο ταύτας περιόδους ἐκτελεσθεῖσα λοιπόν ὑπό τῶν ἀναπτυχθεισῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων ἐργασία εἶναι ἴση τῷ μηδενί καί κατά συνέπειαν

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} - \Sigma \frac{mV_0^2}{2} = 0$$

ἀλλ' ἐνταῦθα

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} = \frac{mW^2}{2} + \frac{m'W'^2}{2}$$

ὥστε
$$m(W^2 - v^2) + m'(W'^2 - v'^2) = 0$$

ἐξ οὗ εἰκάζομεν, ὅτι ἐν τῇ κρούσει τῶν ἐντελῶς ἐλαστικῶν σωμάτων ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι ἡ αὐτή πρό καί μετά τήν κροῦσιν. οὐδεμίαν δηλ. ἀπώλειαν κινητικῆς ἐνεργείας ἐπιφέρει ἡ κροῦσις.

καί ὡς ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως

$$mv + m'v' = mW + m'W'$$

ἤ (2) $$m(w - v) + m'(w' - v') = 0$$

Τήν σχέσιν (1) δυνάμεθα νά γράψωμεν καί ὡς ἑξῆς.

$$m(w - v)(w + v) = -m'(w' - v')(w' + v')$$

καί συνδυάζοντες ταύτην μετά τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν

(3) $$(w + v) = (w' + v') \quad ἤ \quad v - v' = w' - w$$

σχέσις, ἥτις ἐκφράζει, ὅτι ἡ σχετική ταχύτης τῶν σωμάτων διατηρεῖται ἡ αὐτή πρό καί μετά τήν κροῦσιν, ἀλλ' ἤλλαξε φοράς.

ἐκ τῶν σχέσεων (2) καί (3) πορίζόμεθα ἤδη

$$w = 2\frac{mv + m'v'}{m + m'} - v = 2u - v$$

$$w' = 2\frac{mv + m'v'}{m + m'} - v' = 2u - v'$$

ἡ κοινή ταχύτης τῶν σωμάτων κατά τήν στιγμήν τοῦ τέλους τῆς συνθλίψεως εἶναι u. ἐάν ὑποθέσωμεν $v > v'$ τότε κατά τήν πρώτην ταύτην περίοδον τῆς κρούσεως ἡ μάζα m ἀπώλεσε ταχύτητα $v - u$, ἡ μάζα m' προσεκτήσατο ταχύτητα $u - v'$. Κατά τήν δευτέραν δέ περίοδον ἡ μάζα m ἀπώλεσεν ἐπίσης ταχύτητα

$$u - (2u - v) = v - u$$ ὅσην δηλ. καί ἐν τῇ πρώτῃ περιόδῳ, ἐνῷ ἡ μάζα m' προσεκτήσατο ταχύτητα

$$(2u - v') - u = u - v'$$

ὅσην δηλ. καί ἐν τῇ πρώτῃ περιόδῳ.

Ὑποθέσωμεν $m = m'$ τότε

$$w = v + v' - v = v' \qquad w' = v + v' - v' = v$$

Τά σώματα ἀντήλλαξαν λοιπόν τάς ταχύτητάς των, ἐάν δέ τό ἕν τούτων εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ, τότε τό μέ ταχύτητα v κροῦσιν σῶμα θέτει εἰς κίνησιν τό ἠρεμοῦν σῶμα μέ ταχύτητα v, τοῦτο δέ καταλαμβάνει τήν θέσεν τοῦ πρώτου μένον ἀκίνητον.

ὑποθέσωμεν $m < m'$ ἀλλά $v' = 0$ τότε ἔχομεν

$$w = \frac{2mv}{m+m'} - v = \frac{v(m-m')}{m+m'} \qquad w' = \frac{2mv}{m+m'}.$$

καί βλέπομεν, ὅτι ἐάν $m' > m$ ἡ ταχύτης w εἶναι ἀρνητική.

Τό μέ ταχύτητα v κροῦον σῶμα ἐξακολουθεῖ λοιπόν μετά τήν κροῦσιν κινούμενον κατά τήν αὐτήν ὡς καί πρότερον φοράν ἐάν ἡ μάζα του εἶναι μεγαλειτέρα ἐκείνης ἐφ' ἧς προσπίπτει $m > m'$ ἢ στρέφεται πρός τά ὀπίσω ἐάν ἡ μάζα του εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκινήτου μάζης.

Ἐάν ἡ μάζα m' εἶναι πολύ μεγάλη παραβαλλομένη πρός τήν μάζαν m δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τό κλάσμα $\frac{2mv}{m+m'}$.
καί ἔχομεν

$$w = -v \qquad w' = \text{ἐλαχίστη}$$

ἐκ τούτου ἐξηγεῖται ἡ ἐπί τοῦ γόνατος ἐργασία τῶν ὑποδηματοποιῶν ἡ τοποθεσία ἑνός ἄκμονος ἐπί βάσεως οὐχί πολύ στερεᾶς.

Συνοψίζοντες βλέπομεν, ὅτι

Ἐάν δύο σφαῖραι μαζῶν m καί m' κινούμεναι ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας μέ ταχύτητας v καί v' συναντηθῶσιν, ἡ κροῦσις αὐτῶν μεταβάλλει τάς ταχύτητάς των, καί ἄν αἱ σφαῖραι οὐδεμίαν ἔχουσιν ἐλαστικότητα ἐξακολουθοῦσι μετά τήν κροῦσιν κινούμεναι ἡνωμέναι μέ

κοινήν ταχύτητα τήν

$$u = \frac{mv+m'v'}{m+m'}$$

ἐάν τοὐναντίον αἱ σφαῖραι εἶναι ἐντελῶς ἐλαστικαί τότε μετά τήν κροῦσιν κινοῦνται αὗται μέ ταχύτητας

$$w = 2\,\frac{mv+m'v'}{m+m'} - v = 2u - v$$

$$w' = 2\,\frac{mv+m'v'}{m+m'} - v' = 2u - v'$$

ἐκ τῶν τριῶν τούτων σχέσεων ἐξάγομεν ὅτι

Ἡ ταχύτης u εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου τῆς μάζης τοῦ συστήματος πρό τῆς κρούσεως. μετά τήν κροῦσιν ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου τῆς μάζης εἶναι

$$\frac{mw+m'w'}{m+m'} = \frac{m(2u-v)+m'(2u-v')}{m+m'} = \frac{2u(m+m')-(mv+m'v')}{m+m'}$$

$$= 2u - \frac{mv+m'v'}{m+m'} = 2u - u = u$$

Ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου τῆς μάζης τοῦ συστήματος διατηρεῖται λοιπόν μετά τήν κροῦσιν, οἷα καί πρό τῆς κρούσεως.

Εὐθεῖα κροῦσις τῶν ἡμιελαστικῶν σωμάτων —

Μέχρι τοῦδε ἐν σχέσει πρός τό φαινόμενον τῆς κρούσεως ἐξητάσαμεν δύο περιπτώσεις τῶν ἐντελῶς ἐλαστικῶν καί μή ἐλαστικῶν σωμάτων. ἀλλ' ἐν τῇ φύσει τοιαῦτα σώματα δέν ὑπάρχουσιν, εὑρίσκονται δέ μεταξύ τῶν δύο τούτων ἐσχάτων περιπτώσεων, καί ὅπως ἐφαρμόσωμεν ἐπί τῶν σωμάτων τούτων τά ἄνω εὑρεθέντα ἀποτελέσματα δέον νά τροποποιήσωμεν αὐτά ὡς ἑξῆς.

Ἐάν τά σώματα δέν εἶχον οὐδεμίαν ἐλαστικότητα ἡ ἐπί τῆς κρούσεως προκύπτουσα ἀπώλεια κινητικῆς ἐνεργείας θά ἦτο κατά τά προηγούμενα.

$$\frac{1}{2}\left[m(v-u)^2+m'(v'-u)^2\right]$$

ἀλλ' ἐνταῦθα τά σώματα ἔχουσιν ἐλαστικότητά τινα οὐχί ὅμως ἐντελῆ· ἡ ἀπολεσθεῖσα κινητική ἐνέργεια εἶναι λοιπόν

$$\frac{1}{2}\left[m(v-u)^2+m'(v'-u)^2\right]\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$$

ἔνθα

$$0<\varepsilon<1$$

ἀφ' ἑτέρου ἡ αὐτή κινητική ἐνέργεια ἐκφράζεται διά τῆς σχέσεως

$$\frac{1}{2}\left\{m(v^2-u^2)+m'(v'^2-u'^2)\right\}$$

ὥστε

$$m(v^2-u^2)+m'(v'^2-u'^2)=\varepsilon\left\{m(v-u)^2+m'(v'-u)^2\right\}$$

ἔχομεν δέ καί τήν θεμελιώδη σχέσιν

$$m(v-u)=m'(u'-v')$$

καί ἐκ τῶν δύο τούτων πορίζόμεθα

$$v-u=\frac{2m'(v-v')}{(m+m')(1+\varepsilon)}$$

$$v'-u'=\frac{2m(v-v')}{(m+m')(1+\varepsilon)}$$

ἔστω H τό ὕψος τῆς πτώσεως τοῦ βάρους P πίπτοντος ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἡ κινητική ἐνέργεια πρό τῆς κρούσεως εἶναι

$$PH$$

μετά τήν κροῦσιν ἠλαττώθη αὕτη εἰς

$$PH(1-\varepsilon)$$

τό ὕψος εἰς ὅ ἀνέρχεται ἐκ νέου τό βάρος P εἶναι $H(1-\varepsilon)$ σφαῖρα ἐξ ἐλεφαντόδοντος λ.χ. πίπτουσα ἐπί μαρμαρίνου τραπέζης ἀπό ὕψους H ἀνέρχεται μετά τήν κροῦσιν εἰς ὕψος $\frac{2}{3}H$. ἔχομεν λοιπόν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ

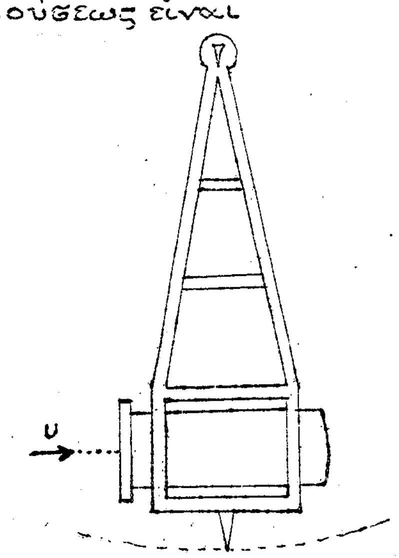
$$1-\varepsilon=\frac{2}{3}\quad \varepsilon=\frac{1}{3}$$

Ἐφαρμογαί τινές τῶν ἄνω εὑρεθέντων ἀποτελεσμάτων

1ον. Βλητικόν ἐκκρεμές — Τό βλητικόν ἐκκρεμές ἐμφαινόμενον ἐν τῷ ἔναντι σχήματι χρησιμεύει διά τήν καταμέτρησιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος τῶν βλημάτων. Τό ἐκκρεμές τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπό κωνικόν ὄγκον, κοῖλον πλήρη ἄμμου, οὗτινος τήν βάσιν φράττομεν διά ψιλοῦ φύλλου μολύβδου δυναμένου νά διαπερασθῇ εὐκόλως ὑπό τοῦ βλήματος.

Ἔστω p τό βάρος τοῦ βλήματος καί υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἡ ποσότης κινήσεως πρό τῆς κρούσεως εἶναι

$$\frac{p}{g}\upsilon$$



Ἐάν δέ καλέσωμεν m τήν μᾶζαν ἑνός μορίου τοῦ ἐκκρεμοῦς καί τοῦ βλήματος καί u τήν ταχύτητα τούτου μετά τήν κροῦσιν, ἡ ποσότης κινήσεως εἶναι

$$\Sigma m u$$

γνωρίζομεν δέ ὅτι ἡ ποσότης κινήσεως διατηρεῖται ἡ αὐτή πρό καί μετά τήν κροῦσιν ὥστε,

$$\frac{p}{g}\upsilon = \Sigma m u$$

καί πολλαπλασιάζοντες ἐπί l (ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς κρούσεως ἀπό τοῦ ἄξονος τῆς ἀναρτήσεως ἔχομεν

$$\frac{p}{g}\upsilon l = \Sigma m u l$$

καί ἐπειδή $u = \omega_0 l$ ἔνθα ω_0 εἶναι ἡ ἀρχική περιστροφική ταχύτης τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἔχομεν τέλος

$$\frac{p}{g}\upsilon l = \omega_0 \Sigma m l^2 = \omega_0 I$$

ἔνθα I εἶναι ἡ ῥοπή ἀδρανείας τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡς πρός τόν ἄξονα τῆς ἀναρτήσεως, τήν ὁποίαν εὕρομεν ἴσην μέ (ἴδε σημείωσιν ἀμέσως κατωτέρω).

$$I = \frac{Pd\lambda}{g}$$

ἔνθα P εἶναι τό βάρος τοῦ ἐκκρεμοῦς μετά τοῦ βλήματος d ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς μάζης ἀπό τοῦ ἄξονος τῆς ἀναρτήσεως καί λ τό μῆκος τοῦ συγχρόνου ἐκκρεμοῦς. ἀλλ' ἡ σχέσις

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2(\mathcal{T} - \mathcal{T}_0)$$

μᾶς δίδει ἐνταῦθα

$$I(\omega^2 - \omega_0^2) = -2Pd(1 - \text{συν}\,\alpha)$$

καί ἵνα εὕρωμεν τήν μεγίστην τιμήν α_1 τῆς α τήν ὁποίαν μᾶς δίδει τό βλητικόν ἐκκρεμές ὑποθέτομεν $\omega = 0$ ὥστε

$$I\omega_0 = 2Pd(1 - \text{συν}\,\alpha_1) = \frac{p}{g}\upsilon l$$

ὅθεν

$$\upsilon = 2\frac{g}{pl}\sqrt{PId}\,.\,\text{ημ}\frac{\alpha_1}{2} = 2\frac{P}{p}\cdot\frac{P}{l}\sqrt{g\lambda}\;\text{ημ}\frac{\alpha_1}{2}$$

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

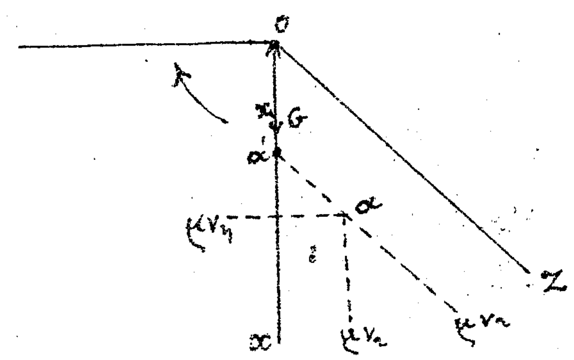
Αποφυγή της κοπώσεως του άξονος της αιωρήσεως — Ίδωμεν ήδη τίνι τρόπῳ πρέπει να διαθέσωμεν τό βλητικόν έκκρεμές και απο-φύγωμεν τήν κρούσιν καί κόπωσιν τής συσκευής τής αναρτήσεως.

Έστωσαν

oz ό άξων τής αιωρήσεως

Gx ή διά τού κέντρου τής μάζης G τού έκκρεμούς διερχομένη κατακόρυφος

oy κάθετος επί τού επιπέδου ZOx.



v_x, v_y, v_z αί συνιστώσαι τής ταχύτητος τού βλήματος, ούτινος ή μάζα είναι μ παραλλήλως τοίς άξοσιν ox, oy καί oz.

αί συνιστώσαι τής ποσότητος κινήσεως τού βλήματος παραλλήλως τοίς άξοσιν είναι

$$\mu v_x \quad \mu v_y \quad \mu v_z$$

αί συνιστώσαι τής ποσότητος κινήσεως τού έκκρεμούς παραλλήλως τοίς αυτοίς άξοσιν είναι

$$-\Sigma m\omega y \quad \Sigma m\omega x \quad \text{μηδέν}$$

ίνα δέ ουδεμία επέλθη κόπωσις τῷ άξονι OZ εκ τής κρούσεως, δέον νά γίνη αύτη ώς εί ό άξων ήτο εντελώς ελεύθερος.

ώς εί δηλ. αί αντιδράσεις τών στηριγμάτων αυτού ήσαν ίσαι τῷ μηδενί καί τότε έχομεν νά καλέσωμεν M τήν μάζαν τού έκκρεμούς.

$$(1) \qquad \mu v_x = 0 \qquad \mu v_y = M\omega_1 x_1 \qquad \mu v_z = 0$$

όθεν

$$v_x = v_z = 0$$

λοιπόν

$$v = v_y$$

Η ταχύτης τού βλήματος πρέπει λοιπόν νά είναι κάθετος τῷ επιπέδῳ GZ.

Εκ τής δευτέρας σχέσεως πορίζομεθα

$$(2) \qquad \omega_0 = \frac{\mu v}{M x_1}$$

Αί ροπαί τής ποσότητος κινήσεως πρό καί μετά τήν κρούσιν είναι αί αυταί ώστε εάν καλέσωμεν α τό σημείον τής κρούσεως καί θέσωμεν $x' = o\alpha'$ $y' = \alpha'\alpha$.

$$(3) \qquad \mu v z' = \Sigma m\omega_0 x z = \omega_0 \Sigma m x z$$

$$(4) \qquad 0 = \Sigma m\omega_0 y z = \omega_0 \Sigma m y z$$

$$(5) \qquad \mu v x' = I\omega_0 = I\frac{\mu v}{M x_1}$$

όθεν

$$M x_1 x' = I$$

τό σημείον α πρέπει λοιπόν νά ευρίσκηται εν τῷ διά τού άξονος τής αιωρήσεως διερχομένῳ οριζοντίῳ επιπέδῳ.

εκ τών σχέσεων (2) καί πορίζομεθα

$$\frac{\mu v z'}{\Sigma m x z} = \frac{\mu v}{M x_1} \quad ή \quad z' = \frac{\Sigma m x z}{M x_1}$$

ίνα έχωμεν $z' = 0$ δέον νά έχωμεν $\Sigma m x z = 0$ καί επειδή εκ τής σχέσεως (4) έχομεν ήδη $\Sigma m y z = 0$, πρέπει ό άξων τής αναρτήσεως νά είναι πρωτεύων άξων αδρανείας.

—

Ὀπισθοχώρησις τῶν τηλεβόλων ὅπλων. — Ἔστω P τὸ βάρος τοῦ τηλεβόλου, p τὸ βάρος τοῦ βλήματος. V ἡ ταχύτης τῆς ὀπισθοχωρήσεως τοῦ τηλεβόλου καὶ υ ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. q τὸ βάρος ἑνὸς μορίου τῶν ἀερίων, ἅτινα δίδει ἡ πυρῖτις καὶ w ἡ ταχύτης αὐτοῦ. τὴν ἀνάφλεξιν τῆς πυρίτιδος δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν στιγμιαίαν καὶ ἀφομοιώσωμεν μὲ τὴν κροῦσιν δύο σωμάτων. ἔχομεν τότε

$$\frac{p}{g}\upsilon+\Sigma\frac{q}{g}w-\frac{P}{g}V=0$$

δὲν γνωρίζομεν τὴν ταχύτητα w ἀλλὰ τὰ παρὰ τῷ βλήματι μόρια ἔχουσι ταχύτητα υ τὰ εἰς τὸ βάθος τοῦ τηλεβόλου V καὶ δυνάμεθα κατὰ προσέγγισιν νὰ λάβωμεν $w=\frac{\upsilon+V}{2}$ καὶ τότε

$$p\upsilon+p'\frac{\upsilon+V}{2}-PV=0$$

ἔνθα p' εἶναι τὸ βάρος τῆς πυρίτιδος. ὅθεν

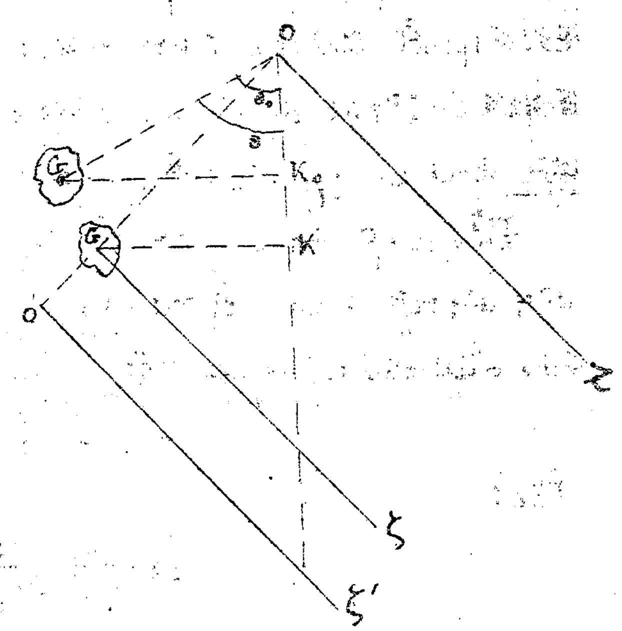
$$V=\frac{2p+p'}{-p+2P}\upsilon=\frac{p+\frac{p'}{2}}{P-\frac{p'}{2}}\upsilon=\frac{p+\frac{p'}{2}}{P}\upsilon$$

τὸ υ προσδιορίζεται διὰ τοῦ βλητικοῦ ἐκκρεμοῦς.

Σημείωσις

Κίνησις τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς ἐν τῷ κενῷ — Σύνθετον ἐκκρεμὲς καλοῦμεν σῶμα στερεὸν πεπερασμένων διαστάσεων κινούμενον περὶ σταθερὸν ὁριζόντιον ἄξονα.

Ὡς ἐπίπεδον τοῦ σχήματος λαμβάνομεν τὸ διὰ τοῦ κέντρου τῆς μάζης G φερόμενον καθέτως τῷ ἄξονι oz. Ἡ ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ σώματος ἀπὸ τῆς θέσεως G_0 εἰς τὴν θέσιν G εἶναι $Mg\,KK_0=Mgl(\text{συν}\theta-\text{συν}\theta_0)$ ἐκ τῶν προηγουμένων δὲ ἔχομεν



$$\frac{I}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=Mgl(\text{συν}\theta-\text{συν}\theta_0)$$

διότι

$$\frac{d\theta_0}{dt}=0$$

ἔνθα I παριστᾷ τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα oz. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{d\theta}{dt}=\omega$, ἡ ἄνω σχέσις μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{I}{2}\omega^2=Mgl(\text{συν}\theta-\text{συν}\theta_0)$$

καὶ θέτοντες

$$\lambda=\frac{I}{Ml}$$

ἔχομεν

$$\omega^2=\frac{2g}{\lambda}(\text{συν}\theta-\text{συν}\theta_0)$$

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

Ἡ σχέσις δὲ αὕτη προσδιορίζει τήν κίνησιν ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς [ ] μήκους λ ὥστε

ἡ κίνησις τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς $\mathcal{M}$ εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν κίνησιν ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, οὗτινο τό μῆκος εἶναι.

$$\lambda = \frac{I}{\mathcal{M}l}$$

Ἐάν ἀπό τοῦ σημείου O λάβωμεν τό σημεῖον O' εἰς ἀπόστασιν λ καί φέρωμεν τήν εὐθεῖαν $O\zeta'$ παράλληλον τῆς OZ, ὅλα τά σημεῖα αὐτῆς κινοῦνται ὡς ἐάν ἦσαν ἀνεξάρτητα τοῦ σώματος· τήν εὐθεῖαν ταύτην ὀνομάζομεν ἄξονα αἰωρήσεως καί τό σημεῖον O' κέντρον αἰωρήσεως.

Ἐάν παραστήσωμεν διά I_1 τήν ῥοπήν ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα Ot παράλληλον τῷ OZ καί διερχόμενον διά τοῦ κέντρου τῆς μάζης τοῦ σώματος ἔχομεν [ ]

$$I = I_1 + \mathcal{M}l^2$$

ὅθεν

$$\lambda = \frac{I}{\mathcal{M}l} = \frac{I_1}{\mathcal{M}l} + l$$

Ἡ ἀπόστασις OO' εἶναι λοιπόν μεγαλειτέρα τῆς OG καί τό κέντρον τῆς μάζης κεῖται μεταξύ τῶν σημείων O καί O'.

Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως πορίζόμεθα

$$l(\lambda - l) = \frac{I_1}{\mathcal{M}} \quad \text{ἤ} \quad OG \cdot O'G = \frac{I}{\mathcal{M}}$$

ἐκ τῆς συμμετρίας δέ τῆς σχέσεως ταύτης ὡς πρός τάς ἀποστάσεις OG καί OG' βλέπομεν ὅτι

ὅταν ὁ ἄξων τῆς αἰωρήσεως γίνεται ἄξων de suspension ἀντιστρόφως ὁ ἄξων de suspension γίνεται ἄξων αἰωρήσεως. —

Θέσις τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχοῦσα καί τῆς ἐλαχίστης τιμῆς τῆς διαρκείας τῆς αἰωρήσεως ——

Ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως T εἶναι [ ].

$$T = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\, f(\theta_0 \ldots)$$

ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις l σταθερόν καί τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς ἀναρτήσεως OZ μεταβαλλομένην· ὁ ἄξων οὗτος ἐφάπτεται διαρκῶς σφαίρας μέ κέντρον τό G καί ἀκτῖνα l.

Ἐκ τῆς σχέσεως δέ

$$\lambda = \frac{I_1}{\mathcal{M}l} + \lambda$$

βλέπομεν ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμή τοῦ l ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἐλαχίστην ῥοπήν τοῦ I_1.

Ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως T εἶναι λοιπόν ἐλαχίστη ὅταν ὁ ἄξων $G\zeta$ συμπίπτει μέ τόν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τήν ἐλαχίστην ῥοπήν ἀδρανείας C ἄξονα. ἔχομεν λοιπόν

$$\text{ἐλαχ. τοῦ } \lambda = \frac{C}{\mathcal{M}l} + l$$

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν τήν ἀπόστασιν l μεταβαλλομένην ἡ ἐλαχίστη τιμή τοῦ l, ἥν προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$\frac{d\lambda}{dl} = 1 - \frac{C}{\mathcal{M}l^2} = 0$$

ή

$$l=\sqrt{\frac{c}{M}}$$

Ούτω ο αντιστοιχών εις την ελαχίστην τιμήν της διαρκείας της αιωρήσεως άξων της αναρτήσεως ευρίσκεται εις απόστασιν $\sqrt{\frac{c}{M}}$ από του διά του κέντρου της μάζης άξονος, ούτινος η ροπή αδρανείας είναι C και είναι παράλληλος αυτώ.

Προσδιορισμός της ροπής αδρανείας ετερογενούς σώματος οιασδήποτε μορφής. — Τον προσδιορισμόν της ροπής αδρανείας σώματος ετερογενούς ως προς ωρισμένον άξονα, όταν η εξεύρεσις αυτής διά του υπολογισμού είναι αδύνατος επιτυγχάνομεν ως εξής.

Κατασκευάζομεν σύνθετον εκκρεμές μετά προταθέν σώμα και υποβάλλομεν τούτο εις μικράς αιωρήσεις, ών προσδιορίζομεν διά της απ' ευθείας παρατηρήσεως την διάρκειαν T.

έχομεν δέ

$$T=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

προσδιορίζομεν δέ και το κέντρον μάζης του σώματος κατά προσέγγισιν και έχομεν ούτω λ.

αλλά εν τοις προηγουμένοις είδομεν ότι

$$I=Ml\lambda$$

εάν λάβωμεν ως άξονα αναρτήσεως τον άξονα ως προς τον οποίον ζητούμεν την ροπήν αδρανείας.

M, l, λ, είναι γνωσταί ποσότητες και κατά συνέπειαν I.

Ανακεφαλαιούντες βλέπομεν, ότι

Εν τη κρούσει δύο σωμάτων με ταχύτητας v και v', ών η ετέρα δύναται να ή ίση με το μηδέν.

1ον. Εάν μέν τα σώματα είναι εντελώς ελαστικά η όλη κινητική ενέργεια, ήν κέκτηνται ταύτα μετά την κρούσιν, είναι ίση με την κινητικήν ενέργειαν, ήν εκέκτηντο ταύτα και πρό της κρούσεως.

2ον. Εάν τα σώματα στερούνται πάσης ελαστικότητος, τότε η κινητική ενέργεια τούτων μετά την κρούσιν είναι ελάσσων της κινητικής ενεργείας των αυτών σωμάτων πρό της κρούσεως κατά

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{PP'}{g(P+P')}(v-v')^2$$

3ον. Αλλ' εν τη φύσει δεν έχομεν σώματα εντελώς ελαστικά αλλ' ουδέ και στερούμενα πάσης ελαστικότητος· υπάρχουσι τα φυσικά σώματα πλησιάζουσι τα πρώτα ή τα δεύτερα, καθ' όσον είναι πλέον ή έλασσον ελαστικά, και είδομεν, ότι εν τη περιπτώσει ταύτη η μετά την κρούσιν κινητική ενέργεια των σωμάτων τούτων είναι ελάσσων της πρό της κρούσεως κατά

$$\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\frac{PP'}{g(P+P)}(v-v')^2$$

Ένθα το μέγεθος του συντελεστού ε (coefficient de restitution) χαρακτηρίζει την κατά το μάλλον ή ήττον ελαστικότητα του σώματος.

Αλλ' υπάρχουσι και άλλαι περιπτώσεις, εν αίς η όλη κινητήριος εργασία καταστρέφεται. γνωρίζομεν λ.χ. ότι ένα θέσωμεν σώμα τι βάρους P εις κίνησιν επί οριζοντίου επιπέδου και μεταδώσωμεν εἰς αὐτό ὡρισμένην ταχύτητα υ, δέον νά καταναλώσωμεν δύναμίν τινα, τῆς ὁποίας ἡ ἐργασία εἶναι $\frac{P\upsilon^2}{2g}$, οἱαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ ταχύτης υ τό σῶμα P ἐπανέρχεται μετά ὡρισμένον χρονικόν διάστημα εἰς τήν ἠρεμίαν καθ' ὅλην δέ τήν διάρκειαν τῆς κινήσεως οὐδεμίαν παρήγαγεν ὠφέλιμον ἐργασίαν, καθ' ἅ κινούμενον καθέτως τῇ βαρύτητι.

Ἡ ὅλη κινητική ἐνέργεια, ἥν μετεδώκαμεν εἰς τό σῶμα δι' ἀμέσου ὠθήσεως ἀπώλετο λοιπόν ἐνταῦθα.

Ἀλλ' ἐάν ἡ ἀπώλεια αὕτη εἶναι πραγματική, ὁ νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας δέν εἶναι ἀληθής, ἤ μήπως μετεσχηματίσθη αὕτη εἰς ἄλλο εἶδος ἐργασίας, τό ὁποῖον δέν ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε.

Ὅπως βεβαιωθῶμεν περί τούτου δέον νά ἐξετάσωμεν καί φυσικῶς τό φαινόμενον τῆς κρούσεως καί τῆς προστριβῆς τῶν σωμάτων, βλέπομεν δέ τότε, ὅτι εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις ταύτας, τά κρουόμενα τά προστριβόμενα πρός ἄλληλα σώματα θερμαίνονται καί πρέπει νά ἐξετάσωμεν, ἐάν δέν ὑπάρχει σχέσεις τις μεταξύ τῆς παραγομένης ποσότητος ——— θερμότητος καί τῆς μηχανικῆς ἐργασίας, καί ἄν ὑπάρχῃ τοιαύτη ποία εἶναι.

Πρός τοῦτο δέν δυνάμεθα εἰμή νά προστρέξωμεν εἰς τήν πειραματικήν μέθοδον, ἥτις μόνη δύναται νά μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς τήν ἀλήθειαν, ἀφ' οὗ πρῶτον ὁρίσωμεν ἀκριβῶς τήν ἔννοιαν, τήν ὁποίαν ἀποδίδομεν εἰς τήν φράσιν ποσότης θερμότητος, καί τόν τρόπον τῆς καταμετρήσεως αὐτῆς.

Ποσότης θερμότητος.— Τήν ἔντασιν ὡρισμένης πηγῆς θερμότητος δυνάμεθα προφανῶς νά μετρήσωμεν δι' ὡρισμένου τινος ἀποτελέσματος, ὅπερ ἐπιφέρει ἐν τῇ καταστάσει ὡρισμένου σώματος

ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι δυνάμεθα λ.χ. νά λάβωμεν ὡς μέτρον τῆς ἐντάσεως τῆς πηγῆς τόν ἀριθμόν χιλιογράμμων πάγου τόν ὁποῖον δύναται ἡ πηγή νά τήξῃ ἐν ἑνί δευτερολέπτῳ, ὑπό θερμοκρασίαν μηδέν διότι ἡ τῆξις ἑνός χιλιογράμμου πάγου ὑπό θερμοκρασίαν μηδέν εἶναι φαινόμενον καθ' ὅλα ἀπαράλλακτον τῇ τήξει ἑνός ἑτέρου χιλιογράμμου πάγου ὑπό τήν αὐτήν θερμοκρασίαν.

Δυνάμεθα ἐπίσης νά λάβωμεν ὡς μέτρον τῆς ἐντάσεως τῆς πηγῆς τόν ἀριθμόν χιλιογράμμων πάγου, οὗτινος τήν θερμοκρασίαν δύναται ν' ἀνυψώσῃ ἡ πηγή ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι ἀπό τόν βαθμόν 0 εἰς τόν βαθμόν 1 τῆς ἑκατονταβάθμου κλίμακος, διότι ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας ἑνός χιλιογράμμου ὕδατος ἀπό τόν βαθμόν 0 εἰς τόν βαθμόν 1 εἶναι φαινόμενον καθ' ὅλα ὅμοιον μέ τήν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἑνός ἑτέρου χιλιογράμμου ὕδατος ἀπό τοῦ βαθμοῦ 0 εἰς τόν βαθμόν 1.

Ὡς θερμομονάδα δέ λαμβάνομεν τήν ποσότητα θερμότητος, ἥτις δύναται ν' ἀνυψώσῃ τήν θερμοκρασίαν ἑνός χιλιογράμμου ὕδατος ἀπό τοῦ βαθμοῦ μηδέν εἰς τοῦ βαθμοῦ 1 τῆς ἑκατονταβάθμου κλίμακος.

Τῆς θερμομονάδος ὁρισθείσης οὕτω ἐπανέρχομαι εἰς τό φαινόμενον τῆς ἀναπτυσσομένης θερμότητος ἐν τοῖς φαινομένοις τῆς κρούσεως τῶν ἀτελῶς ἐλαστικῶν σωμάτων καί τῆς προστριβῆς καί λέγω, ὅτι

Ἡ ἀναφαινομένη αὕτη θερμότης εὑρίσκεται ἐν ὡρισμένῃ πρός τήν ἀπολεσθεῖσαν ἐργασίαν σχέσει τοιαύτῃ, ὥστε δι' ἕκαστον χιλιογραμμόμετρον ἀφανιζομένης ἐργασίας ἀναφαίνεται θερμότης ἴση μέ $\frac{1}{425}$ θερμομονάδος.

Ἴδωμεν ἐάν ὑπάρχουσι φαινόμενα ἔνθα διά τῆς ἐξαφανίσεως τῆς θερμότητος παράγεται μηχανική ἐργασία. Εὔκολον καί καταφανές πρός τοῦτο παράδειγμα μᾶς παρέχει ἡ λειτουργία μιᾶς ἀτμομηχανῆς, τῆς ὁποίας τά συστατικά μέρη εἶναι, ὁ λέβης ἔνθα ἐξατμίζεται τό ὕδωρ ὑπό ὡρισμένην θερμοκρασίαν καί πίεσιν,

ὁ κύλινδρος ἐν ᾧ κινεῖται τό ἔμβολον ὑπό τήν ἐπενέργειαν τοῦ ὑπό τοῦ λέβητος παρεχομένου ἀτμοῦ, τήν κίνησιν δέ ταύτην δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν, ὅπως ὑπερνικήσωμεν ἀντίστασίν τινα καί ἐκτελοῦμεν οὕτω μηχανικήν ἐργασίαν καί τό ψυγεῖον ἔνθα ἐκκινοῦται ὁ ἀτμός μετά τό πέρας τῆς ἐπί τοῦ ἐμβόλου ἐπενεργείας αὐτοῦ, ἐκεῖθεν δέ συμπυκνούμενος ἐπανέρχεται ἐκ νέου εἰς τόν λέβητα, ὅπως ἀκολουθήσῃ ἐκ νέου τήν αὐτήν πορείαν.

Ὑπό θερμομηχανικήν ἔποψιν, δυνάμεθα νά διακρίνωμεν ἐνταῦθα τριά διάφορα φαινόμενα.

1ον. Διά τήν ἐξάτμισιν τοῦ ὕδατος ἐν τῷ λέβητι πρέπει νά τῷ μεταδώσωμεν ποσότητά τινα θερμότητος Q_0 θερμομονάδων.

2ον. Ὅταν ὁ ἀτμός κενωθῇ ἐν τῷ ψυγείῳ ἀποψύχεται καί ἐγκαταλείπει ποσότητα θερμότητος Q_1 θερμομονάδων.

3ον. Ὡς ἐκ τῆς κινήσεως τοῦ ἐμβόλου παρήχθη μηχανική τις ἐργασία $\mathcal{T}$ χιλιογραμμομέτρων.

Ἐπί πολύν χρόνον ἡ ποσότης θερμότητος Q_0 ἐνομίζετο ἴση τῇ ποσότητι Q_1 ἀλλ' ὁ διάσημος Μηχανικός *Hirn* ἀπέδειξεν πειραματικῶς ὅτι $Q_0 > Q_1$.

Κατά τήν διάβασιν τοῦ ἀτμοῦ ἀπό τοῦ λέβητος εἰς τό ψυγεῖον ἀπώλετο λοιπόν ποσότης θερμότητος $Q_0 - Q_1 = Q$, παρήχθη δέ ἄνευ φαινομένης καταναλώσεως μηχανικῆς ἐνεργείας ἐργασία $\mathcal{T}$ χιλιογραμμομέτρων.

ὑπάρχει σχέσις τις μεταξύ τῆς παραχθείσης μηχανικῆς ἐργασίας καί τῆς ἐξαφανισθείσης θερμότητος.

Δι' ἀκριβεστάτων πειραμάτων ἀπέδειξεν ὁ *Hirn*, ὅτι δι' ἑκάστην ἐξαφανισθεῖσαν θερμομονάδα παρήχθησαν 425 χιλιογραμμόμετρα μηχανικῆς ἐργασίας.

ἀνακεφαλαιοῦντες ἤδη λέγομεν, ὅτι

ἐν παντί μετασχηματισμῷ ἐνεργείας, ὁσάκις ἀναφαίνεται θερμότης ἐξαφανίζεται μηχανική ἐργασία, ὁσάκις ἐξαφανίζεται θερμότης παράγεται μηχανική ἐργασία.

εἰς ἑκάστην θερμομονάδα, ἐξαφανιζομένης ἤ ἀναφαινομένης θερμότητος, ἀντιστοιχοῦσι 425 χιλιογραμμόμετρα, ἀναπτυσσομένης ἤ ἐξαφανιζομένης μηχανικῆς ἐργασίας.

Συνοψίζοντες βλέπομεν, ὅτι ἐάν ἀπό τῆς καταναλωθείσης ἐπί ὑλικοῦ τινος συστήματος ποσότητος ἐργασίας $\mathcal{T}$ (ἡ ἐργασία $\mathcal{T}$ εἶναι ἡ διαφορά τῆς μεταδοθείσης εἰς τό σύστημα ἐργασίας $\mathcal{T}_m$ καί τῆς ἐργασίας $\mathcal{T}_r$, ἥν μᾶς παρέσχε τοῦτο) ἀφαιρέσωμεν τήν κτηθεῖσαν ὑπό τοῦ συστήματος κινητικήν ἐνέργειαν, $\frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2)$ ἔχομεν τήν διαφοράν

$$\mathcal{T} - \frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2)$$

ἥτις εἶναι εἰς σταθερόν λόγον μετά τῆς ἀναφανείσης θερμότητος Q.

$$\frac{\mathcal{T} - \frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2)}{Q} = E$$

ἔνθα ὁ ἀριθμός E, ὅν καλοῦμεν <u>μηχανικόν ἰσότιμον</u> τῆς θερμότητος εἶναι σταθερός. τόν ἀντίστροφον αὐτοῦ $A = \frac{1}{E}$ καλοῦμεν θερμικόν ἰσότιμον τῆς μηχανικῆς ἐργασίας.

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

ὁ Νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας συμπληρούμενος ὡς ἄνω ἐκφράζεται λοιπόν διά τῆς σχέσεως.

$$\mathcal{T}=\frac{1}{2}\Sigma m v^2-\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2+EQ$$

ἡ ἰσότιμος τῇ κτηθείσῃ κινητικῇ ἐνεργείᾳ μηχανική ἐργασία εἶναι

$$\mathcal{T}'=\frac{1}{2}\Sigma m v^2-\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$$

καί δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἄνω σχέσιν ὡς ἑξῆς

$$\mathcal{T}-\mathcal{T}'=EQ$$

ὅπερ ἐκφράζομεν λέγοντες, ὅτι ἡ μηχανική ἐργασία $\mathcal{T}-\mathcal{T}'$ μετεσχηματίσθη εἰς θερμότητα. ἡ δέ σχέσις $EQ=\mathcal{T}$ ἐκφράζει τήν πρώτην ἀρχήν (ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας) τῆς μηχανικῆς θεωρίας τῆς θερμότητος.

Πειραματικός προσδιορισμός τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος.

Πειράματα τοῦ Hirn πρός καταμέτρησιν τῆς ἀναπτυσσομένης ἐν τῇ κρούσει τῶν σωμάτων θερμότητος.

Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα διά τήν καταμέτρησιν ταύτην συσκευή ἐμφαίνεται ἐν τῷ κάτωθι σχήματι ἔνθα A εἶναι κύλινδρος βάρους P ἐκ (grès) ἀνηρτημένος διά δύο σχοινίων χρησιμευόντων ὡς ἄκμων. ἕτερος σιδηροῦς κύλινδρος βάρους p ἀνηρτημένος κατά τόν αὐτόν τρόπον ἀποτελεῖ τήν σφῦραν μεταξύ τῶν δύο τοποθετεῖται τεμάχιον μολύβδου βάρους ϖ.

Ἀνυψοῦμεν τό βάρος p εἰς ὕψος h, καί ἀφίνομεν τοῦτο νά καταπέσῃ, καθ' ἥν στιγμήν κρούει τοῦτο τόν μόλυβδον ἔχει ταχύτητα $v=\sqrt{2gh}$ καί κινητικήν ἐνέργειαν $\frac{1}{2}\frac{p}{g}\cdot 2gh=ph$. Μετά τήν κροῦσιν ἡ σφῦρα ἀνέρχεται εἰς ὕψος h'. καθ' ἥν στιγμήν ἐχωρίζετο τοῦ μολύβδου εἶχε λοιπόν ταχύτητα $\sqrt{2gh'}$ καί εἶχε κινητικήν ἐνέργειαν ph' μετά τήν κροῦσιν. ἡ ὑπό τοῦ κυλίνδρου p ἀπολεσθεῖσα κινητική ἐνέργεια εἶναι λοιπόν $p(h-h')$. μέρος τῆς ἐνεργείας ταύτης PH ἐχρησιμοποιήθη ὅπως ἀνυψώσῃ τόν κύλινδρον A εἰς ὕψος H εἰς τό ὑπόλοιπον.

$$p(h-h')-PH$$

τῆς ἀπολεσθείσης ἐνεργείας ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀναπτυχθεῖσα θερμότης Q, τήν ὁποίαν μετροῦμεν ἀφίνοντες τόν μόλυβδον νά πέσῃ ἔν τινι calorimetre.

ἐφαρμογή·

$p = 350^{\chi\iota\lambda.}$ $P = 941^{\chi\iota\lambda.}$ $h = 1^{m}.166$ $h' = 0.087$ $H =$

$\varpi = 2{,}948$

$p(h-h') - (P+\varpi)H = 280{,}42$ χιλιογραμμόμετρα

ἀναφανεῖσα ἐν τῷ calorimetre θερμότης

$Q = 0.65955$ θερμομονάδας

$$\frac{\mathcal{T}}{Q} = E = \frac{280.42}{0.65955} = 425$$

Πειράματα τοῦ Joule πρός καταμέτρησιν τῆς ἀναπτυσσομένης ἐν τῇ προστριβῇ τῶν σωμάτων θερμότητος.

Προσδιορισμός τοῦ E διά τῶν C καί c.

Γενίκευσις τοῦ νόμου τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας.

Τόν νόμον τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἀπεδείξαμεν ἤδη ἐν τῇ περιπτώσει τῶν μηχανικῶν ἐν γένει καί θερμικῶν φαινομένων. Ἡ σπουδαιότης ὅμως τοῦ νόμου τούτου

ἐπεκτείνεται καί πέραν τῶν φαινομένων τούτων καί ἐγένετο ἤδη ἡ πειραματική ἐπαλήθευσις τοῦ νόμου τούτου εἰς ὅλα ἐν γένει τά φυσικά καί χημικά φαινόμενα.

Χημικά φαινόμενα

Ὅταν δύο σώματα A καί B ἑνοῦνται ἐπέρχεται ἐν γένει ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας. ἵνα δ' ἐπαναφέρωμεν τό σύνθετον σῶμα εἰς τήν ἀρχικήν θερμοκρασίαν τῶν συστατικῶν αὐτοῦ μερῶν δέον ν' ἀφαιρέσωμεν ποσότητά τινα θερμομονάδων. Τήν θερμότητα ταύτην καλοῦμεν θερμότητα ἀναπτυχθεῖσαν ἐν τῇ ἑνώσει τῶν δύο σωμάτων.

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι οὐδεμία ἐξωτερική ἐνέργεια παρεμβαίνει ἐν τῇ συνθέσει τῶν σωμάτων. ἡ ἐνέργεια αὐτῶν ὤφειλε νά διατηρηθῇ, δηλ. ἡ ἐνέργεια τοῦ composé νά εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῆς ἐνεργείας τῶν συνθετικῶν μερῶν $u_1 + u_2$. ἀλλ' ἵνα ἐπαναφέρωμεν τό σῶμα εἰς τήν ἀρχικήν θερμοκρασίαν τῶν συστατικῶν μερῶν τῷ ἀφῃρέσαμεν θερμότητα Q, ὥστε ἡ ὅλη ἐνέργεια τοῦ composé εἶναι νῦν,

$$u_1 + u_2 - EQ$$

EQ εἶναι ἡ ἐσωτερική ἐργασία, ἥν ἀνέπτυξαν αἱ ἐσωτερικαί δυνάμεις κατά τήν ἕνωσιν.

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

Ἀνθρακικόν ὀξύ. — Διά δύο τρόπων δυνάμεθα νά παραγάγωμεν ἀνθρακικόν ὀξύ.

1ον. Ἀπ' εὐθείας διά τῆς ἑνώσεως 6 γραμ. ἄνθρακος μετά 16 γραμ. ὀξυγόνου, ἅτινα ἑνούμενα μᾶς δίδουν 22 γραμ. ἀνθρακικοῦ ὀξέος. Ἡ καῦσις ἀναπτύσσει 47 θερμομονάδας, δηλ. τό ὀξυγόνον καί ὁ ἄνθραξ λαμβανόμενα ὑπό θερμοκρασίαν 0° καί ἐξ ὀξυγόνου καί ὁ ἄνθραξ... γινόμενα, ὅπως παραγάγωσιν ἀνθρακικόν ὀξύ ὑπό τήν θερμοκρασίαν 0° καί τοῦτο ἀναπτύσσουσι 47 θερμομονάδων θερμότητα.

2ον. 6 γραμ. ἄνθρακος + 8 γραμ. ὀξυγόνου παράγουσι 14 γραμ. CO ἀναπτύσσοντα θερμότητα 34,5 θερμομονάδων.

14 γραμ. CO + 8 γραμ. ὀξυγόνου = 22 γραμ. CO^2 ἀναπτύσσοντα 12,5 θερμομονάδων θερμότητα. ὅθεν
ὁλική ἀναπτυχθεῖσα θερμότης = 34,5 + 12,5 = 47 θερμομονάδας.
λοιπόν: Ἡ ἐσωτερική ἐνέργεια 6 γραμ. ἄνθρακος καί 16 γραμ. ὀξυγόνου εἶναι ἀνωτέρα κατά 47 x 425 χιλιογράμμετρα τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας 22 γραμμαρίων ἀνθρακικοῦ ὀξέος

Χλωροῦχος ἄργυρος. — 35.5 γραμ. χλώρου + 108 γραμ. ἀργύρου παράγουσι 143,5 γραμμάρια χλωρούχου ἀργύρου ἀναπτύσσοντα 29,2 θερμομονάδας.
108 γραμμάρια ἀργύρου ἑνούμενα μέ ἰώδιον παράγουσιν ἰωδοῦχον ἄργυρον ἀναπτύσσοντα 19,7 θερμομονάδας. τόν ἰωδοῦχον τοῦτον ἄργυρον δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν διά τοῦ χλώρου καί παραγάγωμεν χλωροῦχον ἄργυρον μέ ἀνάπτυξιν 9,5 θερμομονάδων, ὅθεν

ὁλική θερμότης ἀναπτυχθεῖσα = 19,7 + 9,5 = 29,2.

Ἠλεκτρικά φαινόμενα. — πείραμα τοῦ Foucault. Δίσκος στρεφόμενος μεταξύ τῶν πόλων ἑνός ἠλεκτρομαγνήτου. προσδιορισμός τοῦ μηχανικοῦ ἰσοτίμου τῆς θερμότητος ἐν τῷ πειράματι τούτῳ ὑπό τοῦ Violle.

Ἠλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. —

Ἠλεκτροχημικά φαινόμενα —

Ἀνακεφαλαίωσις. — Ἀνακεφαλαιοῦντες ἤδη ἐν ὀλίγαις λέξεσιν τά προηγούμενα λέγομεν ὅτι σῶμά τι δέν δύναται νά ὑποστῇ τροποποίησιν οἱανδήποτε μηχανικήν, φυσικήν ἤ χημικήν, χωρίς νά ἐξασκήσῃ ἐπενέργειάν τινα ἐπί τῶν περικυκλούντων αὐτό ἐξωτερικῶν σωμάτων. Τήν τροποποίησιν ταύτην συνοδεύει ὡρισμένη ποσότης ἀναφαινομένης ἐνεργείας. ἀπεδείξαμεν δέ, ὅτι, ὅσην ἐνέργειαν ἀπόλλυσι τό ἕν τῶν σωμάτων τόσην ἀκριβῶς κερδίζουσι τά λοιπά, οὕτως ὥστε ἡ ὁλική ποσότης ἐνεργείας ἣν κέκτηται τό σύστημα τῶν σωμάτων μένει ἡ αὐτή καί μόνον ἡ μορφή αὐτῆς μεταβάλλεται, παρουσιαζομένης, ὁτέ μέν ὑπό τήν μορφήν κινητικῆς, ὁτέ δέ ὑπό τήν μορφήν λανθανούσης ἐνεργείας καί ἄλλοτε ὑπό τήν μορφήν θερμότητος ἤ χημικῆς affinité.

Ἡ ἐν τῷ σύμπαντι ὁλική ἐνέργεια εἶναι λοιπόν σταθερά καί ἄφθαρτος, ὅπως καί ἡ ἐν αὐτῷ διεσπαρμένη ὕλη· μετασχηματίζεται ὅμως αὕτη διαρκῶς μεταφερομένη ἀφ' ἑνός εἰς ἕτερον σῶμα. Ἐν τῇ τροπῇ δέ τῶν μετασχηματισμῶν τούτων πρός τάς ἀνάγκας μας ἔγκειται ἡ χρησιμοποίησις τῶν φυσικῶν δυνάμεων.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν διά τῶν μηχανῶν, ἡ σπουδή τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τό κύριον μέρος τῶν μαθημάτων τούτων καί τάς ὁποίας θά ἐξετάσωμεν ἀφοῦ πρῶτον ἀναζητήσωμεν τήν πηγήν τῶν φυσικῶν δυνάμεων τάς ὁποίας προτιθέμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν διά τούτων.

Πηγαί ἐνεργείας

Αἱ πηγαί ἐνεργείας τάς ὁποίας δυνάμεθα νά διαθέσωμεν εἶναι.

1ον. τά ἔμψυχα ζῶα.

2ον. σώματα δυνάμενα νά καταπέσωσιν { στερεά / ῥευστά

3ον. ἄνεμοι καί ῥεύματα.

4ον. Ἡ ἐν τῇ φύσει ἀπαντῶσα καύσιμος ὕλη.

1ον. <u>Ἔμψυχα ζῶα.</u> Τήν ἄμεσον αἰτίαν τῆς ἐργασίας, ἣν μᾶς παρέχωσι τά ζῶα εὑρίσκομεν ἐν τῇ τροφῇ, ἣν ἀναλίσκουσι ταῦτα.

Διά τῶν χημικῶν μετασχηματισμῶν, οἵτινες ἐκτελοῦνται ἐν τῷ ἐργαστηρίῳ τοῦ σώματος τοῦ ζώου ἡ τροφή μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἴσην ἐκείνης, ἣν θά μᾶς ἔδιδεν ἡ ὑπό τοῦ ζώου καταναλισκομένη τροφή ἐάν ἐκαίετο αὕτη ἀπ' εὐθείας.

Ἡ παραχθεῖσα θερμότης δύναται ἤδη νά χρησιμοποιηθῇ πρός παραγωγήν μηχανικῆς ἐργασίας.

Ἡ τροφή τῶν ζώων δύναται νά θεωρηθῇ ὡς κυρίως φυτική. γνωρίζομεν δέ, ὅτι ἡ φυτική ἐν γένει ζωή ὀφείλεται τῇ ἐπιδράσει τῶν θερμικῶν καί φωτιστικῶν ἀκτίνων τοῦ Ἡλίου.

<u>Ἡ ὑπό τῶν ἐμψύχων ζώων παρεχομένη ἡμῖν ἐνέργεια ἔχει λοιπόν τήν ἀρχικήν αἰτίαν της ἐν ταῖς ἀκτῖσι τοῦ Ἡλίου.</u>

2ον. <u>Σώματα δυνάμενα νά καταπέσωσι.</u>

Διά μακρῶν ἀνεπτύξαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις, ὅτι τά δυνάμενα νά καταπέσωσι σώματα παρέχουσιν ἐν τῇ πτώσει μηχανικήν ἐργασίαν, κέκτηνται δηλαδή ἐνέργειαν. Ἡ ἐν ὑψηλαῖς χώραις θέσις τῶν στερεῶν σωμάτων, εἶναι ἀποτέλεσμα τῶν γεωλογικῶν φαινομένων παρελθουσῶν ἐποχῶν, ὀφείλεται δ' αὕτη εἰς τήν αὐτήν ἀρχικήν αἰτίαν, εἰς ἣν καί ἡ σημερινή ἐσωτερική θερμότης τῆς γῆς, ἥτις ὅμως ἐλάχιστον μέχρι τοῦδε ἐχρησιμοποιήθη διά τῶν Ἡφαιστείων καί θερμῶν πηγῶν.

Τά ὑγρά σώματα, τά ὕδατα εὑρισκόμενα ἐν ὑψηλαῖς χώραις ὡς ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῶν ἡλιακῶν ἀκτίνων ἐπί τῶν καλυπτόντων τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς ὑδάτων.

Ὡς ἐκ τῆς ἐπενεργείας ταύτης ἐξατμίζονται τά ὕδατα ἀνέρχονται μέχρι τῶν ὑψηλοτέρων κορυφῶν τῶν ὀρέων ἔνθα συμπυκνούμενα καταπίπτουσιν ἐκ νέου παρέχοντα ἡμῖν καταπληκτικήν ποσότητα ἐνεργείας ὑπό λανθάνουσαν ἤ κινητικήν μορφήν. οὕτω

Ἡ ἐκ τῆς ῥοῆς τῶν ὑδάτων παρεχομένη ἡμῖν ἐνέργεια ἔχει τήν ἀρχικήν πηγήν της ἐν ταῖς ἀκτῖσιν, ἅς ἐκπέμπει ἡμῖν ὁ Ἥλιος.

3ον. Ἄνεμοι καί θαλάσσια ῥεύματα.

Ἡ κινητική ἐνέργεια, ἥν παρέχουσιν ἡμῖν ταῦτα ὀφείλεται τῇ ἀνίσῳ θερμάνσει μερῶν τινῶν τῆς ἀτμοσφαίρας καί τῆς θαλάσσης· ἔχει δηλαδή καί αὕτη τήν πηγήν της ἐν ταῖς ἀκτῖσιν, ἅς ἐκπέμπει ἡμῖν ὁ Ἥλιος.

Μετά τῶν θαλασσίων ῥευμάτων δυνάμεθα νά συμπεριλάβωμεν καί τό φαινόμενον τῶν παλιρροιῶν, ὅπερ ὀφείλεται κυρίως εἰς τήν ἐνέργειαν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς γῆς περί τόν ἄξονά της.

4ον. Ἡ ἐν τῇ φύσει ἀπαντῶσα καύσιμος ὕλη ὀφείλεται ἐπίσης εἰς τήν ἐναποταμιευθεῖσαν ἐνέργειαν τῶν ἡλιακῶν ἀκτίνων ὑπό τῆς φυτικῆς ζωῆς τῶν διαφόρων γεωλογικῶν ἐποχῶν. τήν ἀρχικήν αἰτίαν καί ταύτης τῆς πηγῆς τῆς ἐνεργείας εὑρίσκομεν λοιπόν καί ἐνταῦθα ἐν ταῖς ἀκτῖσιν, ἅς ἐξέπεμπε κατά τάς γεωλογικάς ἐποχάς ὁ Ἥλιος ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς.

Οὕτω λοιπόν ὁ ἀρχικός καί μόνος πρόγονος ἁπάσης τῆς ἐνεργείας, ἥν δυνάμεθα σήμερον νά χρησιμοποιήσωμεν εἶναι ὁ Ἥλιος.

Τήν καταπληκτικήν δέ ταύτην ποσότητα ἐνεργείας, ἥν μᾶς παρέσχεν οὗτος καί ἐξακολουθεῖ νά μᾶς παρέχῃ τόσῳ δαψιλῶς, προσεκτήσατο καί οὗτος ἀρχικῶς ἐκ τῆς ὀφειλομένης τῇ παγκοσμίῳ ἕλξει λανθανούσης ἐνεργείας.

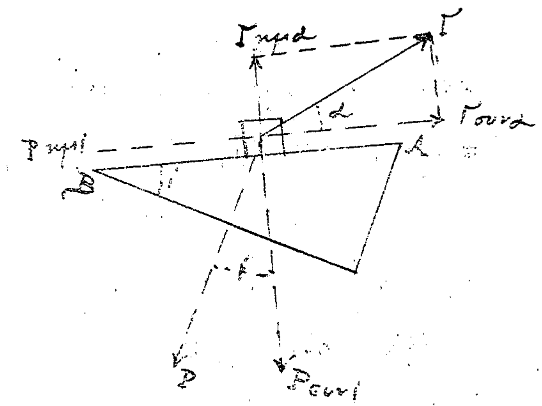
Τάς μηχανάς δυνάμεθα νά διακρίνωμεν εἰς δύο εἴδη.

Μηχανάς μεγάλης δυνάμεως, οἷαι εἶναι αἱ ὑδραυλικαί μηχαναί, ἀτμομηχαναί κλπ.

Καί αἱ ἁπλαῖ λεγόμεναι μηχαναί (poiuers) τάς ὁποίας μεταχειριζόμεθα ἐν τῇ καθημερινῇ χρήσει. Τήν σπουδήν τῶν κυριωτέρων τούτων παραθέτομεν ἀμέσως κατωτέρω.

Ἁπλαῖ μηχαναί (powers).

Κεκλιμένον ἐπίπεδον.— Ἔστω βάρος P ἐπί ἐπιπέδου σχηματίζοντος μετά τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν i, καί ἐπ' αὐτοῦ ἐφηρμοσμένη δύναμις F σχηματίζουσι μετά τοῦ ἐπιπέδου γωνίαν α. ποίαν ἔντασιν πρέπει νά δώσωμεν εἰς τήν δύναμιν F διά νά σύρωμεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τό βάρος P πρός τά ἄνω;



εἰς τήν πρός τ' ἄνω μετατόπισιν τοῦ βάρους P ἀνθίσταται ἡ βαρύτης - - - - - - - - - - - - - - - P.

ἡ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου προστριβή αὐτοῦ - - - - - - - $f[P\sigma\upsilon\nu.i - F\eta\mu.\alpha]$

Τήν ἀντίστασιν δέ τῶν δύο τούτων δυνάμεων θά ὑπερνικήσωμεν διά τῆς δυνάμεως - - - - - - - - - - - - - - F

ὥστε ἐκ τοῦ νόμου τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας

$$P\delta h + f\,(P\sigma\upsilon\nu.i - F\eta\mu\,\alpha)\,\delta s = F\delta f$$

ἀλλά

$$\delta f = \delta s\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\delta h = \delta s\,\eta\mu.i$$

ὅθεν

$$P\eta\mu.i + f\,(P\sigma\upsilon\nu.i - F\eta\mu\alpha) = F\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἤ

$$F = \frac{\eta\mu.i + f\sigma\upsilon\nu.i}{\sigma\upsilon\nu.\alpha + f\,\eta\mu.\alpha}\,P$$

ἵνα εὕρωμεν τήν δύναμιν F_1 τήν ὁποίαν πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ βάρους P διά νά ἐμποδίσωμεν τήν κατάπτωσιν αὐτοῦ ἐπί τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀρκεῖ νά ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ ἄνω σχέσει f διά τοῦ $-f$ καί ἔχομεν

$$F_1 = \frac{\eta\mu.i - f\sigma\upsilon\nu.i}{\sigma\upsilon\nu.\alpha - f\,\eta\mu\,\alpha}\,P$$

καί ἵνα τό βάρος μένει ἀκίνητον ἄνευ ἐξωτερικῆς δυνάμεως συγκρατούσης τοῦτο δέον νά ἔχωμεν

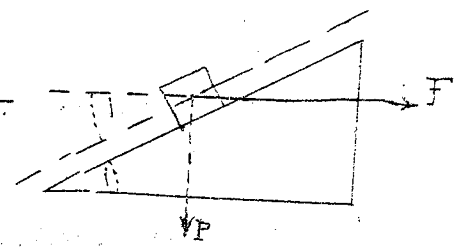
$$F_1 = 0 \quad \text{ἤ} \quad \eta\mu i - f\sigma\upsilon\nu.i = 0 \quad \text{ὅθεν } f = \varepsilon\varphi.i$$

ἡ γωνία i πρέπει δηλ. νά εἶναι ἴση μέ τήν γωνίαν τῆς τριβῆς φ καί βλέπομεν, ὅτι διά τοῦ τρόπου τούτου δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τούς συντελεστάς τῆς τριβῆς.

Ἐάν F εἶναι παράλληλος τῇ AB ἔχομεν $\alpha = 0$ καί $F = P$ $[\eta\mu i + f\sigma\upsilon\nu.i)$.

ἐάν F εἶναι ὁριζόντιος ἔχομεν α ἀρνητικόν ὥστε $\eta\mu(-\alpha) = -\eta\mu\alpha$ καί

$$F = P\,\frac{\eta\mu.i + f\sigma\upsilon\nu i}{\sigma\upsilon\nu i - f\eta\mu i} = P\,\frac{f + \varepsilon\varphi i}{1 - f\varepsilon\varphi i}$$



καί ἐάν θέσωμεν $\varepsilon\varphi i = \frac{1}{f}$ ἔχομεν $F = \infty$

ἡ πίεσις, ἥν ὑφίσταται τό κεκλιμένον ἐπίπεδον εἶναι

$$P\sigma\upsilon\nu.i + F\eta\mu.i = \frac{P}{\sigma\upsilon\nu i - f\eta\mu i}$$

ἐάν ἡ γωνία i εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας φ, ὄχι μόνον δέν κατέρχεται ὡς ἐκ τοῦ ἰδίου βάρους τό σῶμα P ἀλλά πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτοῦ καί δύναμιν ἴσην μέ

$$F' = P\,\frac{f - \varepsilon\varphi i}{1 + f\varepsilon\varphi i}$$

Γωνία α ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν ἐλαχίστην τιμήν τῆς δυνάμεως F.

Ἄς ἐπαναλάβωμεν τήν γενικήν σχέσιν

$$F = \frac{\eta\mu i + f\sigma\upsilon\nu.i}{\sigma\upsilon\nu\alpha + f\eta\mu\,\alpha}\,P \qquad (1)$$

καί ζητήσωμεν τήν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τήν ἐλαχίστην τιμήν τῆς δυνάμεως F γωνίαν α.

Ἡ ζητουμένη τιμή τῆς γωνίας α ὁρίζεται λοιπόν διά τῆς σχέσεως

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = f \quad \text{καί τότε}$$

$$F = \frac{Pf}{1+f}\,[\sigma\upsilon\nu i - f\eta\mu i]$$

δέν ἕπεται ὅμως ὅτι καί ἡ ἐκτελουμένη χρήσιμος ἐργασία φθάνει τήν μεγίστην αὐτῆς τιμήν διά τήν ἄνω κλίσιν τῆς δυνάμεως F.

ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν μετατόπισιν ds ἐργασία εἶναι ἤδη

$$[P\eta\mu.i + f(P\sigma\upsilon\nu i - F\eta\mu\alpha)]\,ds$$

ἐνῷ ἄν δέν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τήν δύναμιν τῆς προστριβῆς ἡ ἀντιστοιχοῦσα τῇ αὐτῇ μετατοπίσει ds ἐργασία εἶναι

$$P\eta\mu i.ds$$

ὁ λόγος τῶν δύο τούτων ἐργασιῶν εἶναι

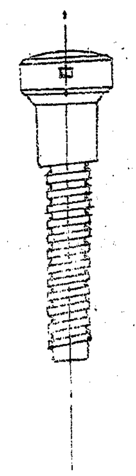
$$\frac{P\eta\mu i + f(P\sigma\upsilon\nu i - F\eta\mu\alpha)}{P\eta\mu i}$$

ἤ ἀντικαθιστῶντες F διά τῆς τιμῆς του (1) καί ἁπλοποιοῦντες

$$\frac{f\sigma\upsilon\nu i + \eta\mu i}{\eta\mu i(1+f\varepsilon\varphi\alpha)} = \frac{f\frac{\sigma\upsilon\nu i}{\eta\mu.i}+1}{1+f\varepsilon\varphi\alpha} =$$

$$= \frac{1+f\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi i}{1+f\varepsilon\varphi\alpha}$$

ὁ λόγος οὗτος ἐλαττοῦται ἐπ' ἄπειρον ἐν ὅσῳ αὐξάνει ἡ γωνία α.



Κοχλίας — Διά τοῦ ἐν τῷ ἔναντι σχήματι ἐμφαινομένου κοχλίου προτιθέμεθα ν' ἀνυψώσωμεν βάρος P, δι' ὁριζοντίου δυνάμεως F ἐφηρμοσμένης ἐπ' αὐτοῦ· τό βάρος P δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὡς ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐπί τῆς ὅλης ἕλικος τοῦ κοχλίου, ταύτην δέ ν' ἀφομοιώσωμεν μέ κεκλιμένον ἐπίπεδον σχη-

ματίζον μετά τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν i ἧς ἡ ἐφαπτομένη εἶναι $\frac{h}{2\Pi r}$ ἔνθα h εἶναι τό βῆμα τῆς ἕλικος καί r ἡ ἀκτίς τοῦ κυλίνδρου τοῦ κοχλίου.

ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἀναγκαία ὁριζόντιος δύναμις διά τήν κίνησιν τοῦ βάρους P ἐπί τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου i εἶναι

$$P\frac{f+\varepsilon\varphi i}{1-f\varepsilon\varphi i} = P\frac{\varepsilon\varphi.\varphi+\varepsilon\varphi i}{1-\varepsilon\varphi.\varphi\,\varepsilon\varphi i} = P\varepsilon\varphi(\varphi - i)$$

ἔνθα f εἶναι ὁ συντελεστής τῆς προστριβῆς τοῦ κοχλίου ἐν τῷ περικοχλίῳ του,

Τήν τιμήν τῆς F δυνάμεθα νά γράψωμεν καί ὡς ἑξῆς

$$F = P\varepsilon\varphi i + fP\frac{1+\varepsilon\varphi^2 i}{1-f\varepsilon\varphi i}$$

καί βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τό μέρος τῆς δυνάμεως F τό καταναλισκόμενον διά νά ὑπερνικήσῃ τήν προστριβήν εἶναι

$$fP\frac{1+\varepsilon\varphi^2 i}{1-f\varepsilon\varphi i}$$

Ἄς ἐπανέλθωμεν ἐν τῇ περιπτώσει ἔνθα $i<\varphi$ ἵνα στρέψωμεν τόν κοχλίαν καταβιβάζοντες τό βάρος P δέον νά ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτοῦ δύναμιν F' ἀντίθετον τῆς F καί ἐντάσεως

$$F' = P\frac{f-\varepsilon\varphi\alpha}{1+f\varepsilon\varphi\alpha}$$

ἡ περίπτωσις αὕτη ἀπαντᾷ εἰς τούς συνδετῆρας κοχλίας.

ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ὁ κοχλίας ὑπό τήν ἐπήρειαν δυνάμεως ἐφηρμοσμένης εἰς ἀπόστασιν d ἀπό τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ὑπέστη περιστροφήν θ. ἡ δύναμις F ἐξετέλεσεν ἐργασίαν $Fd\theta$ ἡ ἀνθισταμένη ἐργασία εἶναι

$$P\,\frac{f+\varepsilon\varphi i}{1-f\varepsilon\varphi i}\,.\,r\theta$$

διότι $r\theta$ εἶναι τὸ διανυόμενον διάστημα προβαλλόμενον ἐπὶ τῆς δυνάμεως F.

ὥστε

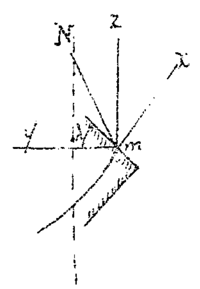
$$F\delta = P\,\frac{f+\varepsilon\varphi i}{1-f\varepsilon\varphi i}\,r \quad \text{ἢ} \quad F = P\,\frac{r}{\delta}\,\frac{f+\varepsilon\varphi i}{1-f\varepsilon\varphi i} = P\,\frac{r}{\delta}\,\varepsilon\varphi(\varphi-i)$$

ἐὰν ἔχωμεν

$i<\varphi$ ἡ ἀνύψωσις τοῦ βάρους θὰ ἐπέλθῃ.

$i=\varphi$ αἱ παθητικαὶ ἀντιστάσεις τοῦ κοχλίου συγκρατοῦσι τὸ βάρος P.

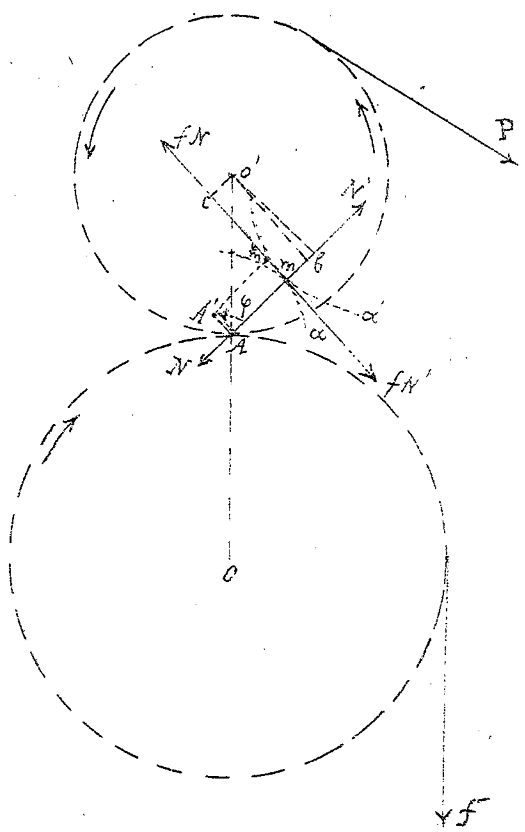
$i>\varphi$ ὁ κοχλίας κατέρχεται.



Κοχλίας μὲ τετραγωνικόν. — filet —

Ὀδοντωτὰ τύμπανα — Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι ἐν τῇ σχετικῇ κινήσει τῶν ὀδοντωτῶν τυμπάνων τούτων O, κυλινδοῦται καὶ ὀλισθαίνει συνάμα ἐπὶ τοῦ ἑτέρου O.

Ἔστω F ἡ κινοῦσα τὸ τύμπανον O δύναμις. P ἡ διὰ τοῦ τυμπάνου O' ὑπερνικωμένη ἀντίστασις m τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν ma καὶ ma' τῶν ὀδόντων τῶν τυμπάνων O καὶ O'. ὡς ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τοῦ τυμπάνου O ἐξασκεῖ τοῦτο ἐπὶ τοῦ τυμπάνου O' πίεσιν N'. ἐπειδὴ τὸ τελευταῖον τοῦτο ὀλισθαίνει ἐπὶ τοῦ πρώτου, ἀναπτύσσεται παρὰ τῷ σημείῳ τῆς ἐπαφῆς m προστριβὴ ἐξ ὀλισθήσεως ἐντάσεως fN καὶ φορᾶς ἀντιθέτου τῇ ὀλισθήσει. διὰ τῆς δυνάμεως N' ὑπερνικῶνται αἱ ἀντιστάσεις fN' καὶ P περὶ τὸ σημεῖον O', καὶ ἐξισοῦντες τὴν κινητήριον καὶ ἀνθισταμένην ἐργασίαν ἔχομεν



$$PR' = N'O'b + fN'.O'c$$

καὶ ἐπειδὴ $O'b = R'\eta\mu\varphi \qquad O'c = bm = Ab - Am = R'\sigma\upsilon\nu\varphi - \rho$

ἔχομεν $$PR' = N'R'\eta\mu\varphi + N'f\,(R'\sigma\upsilon\nu\varphi - p)$$

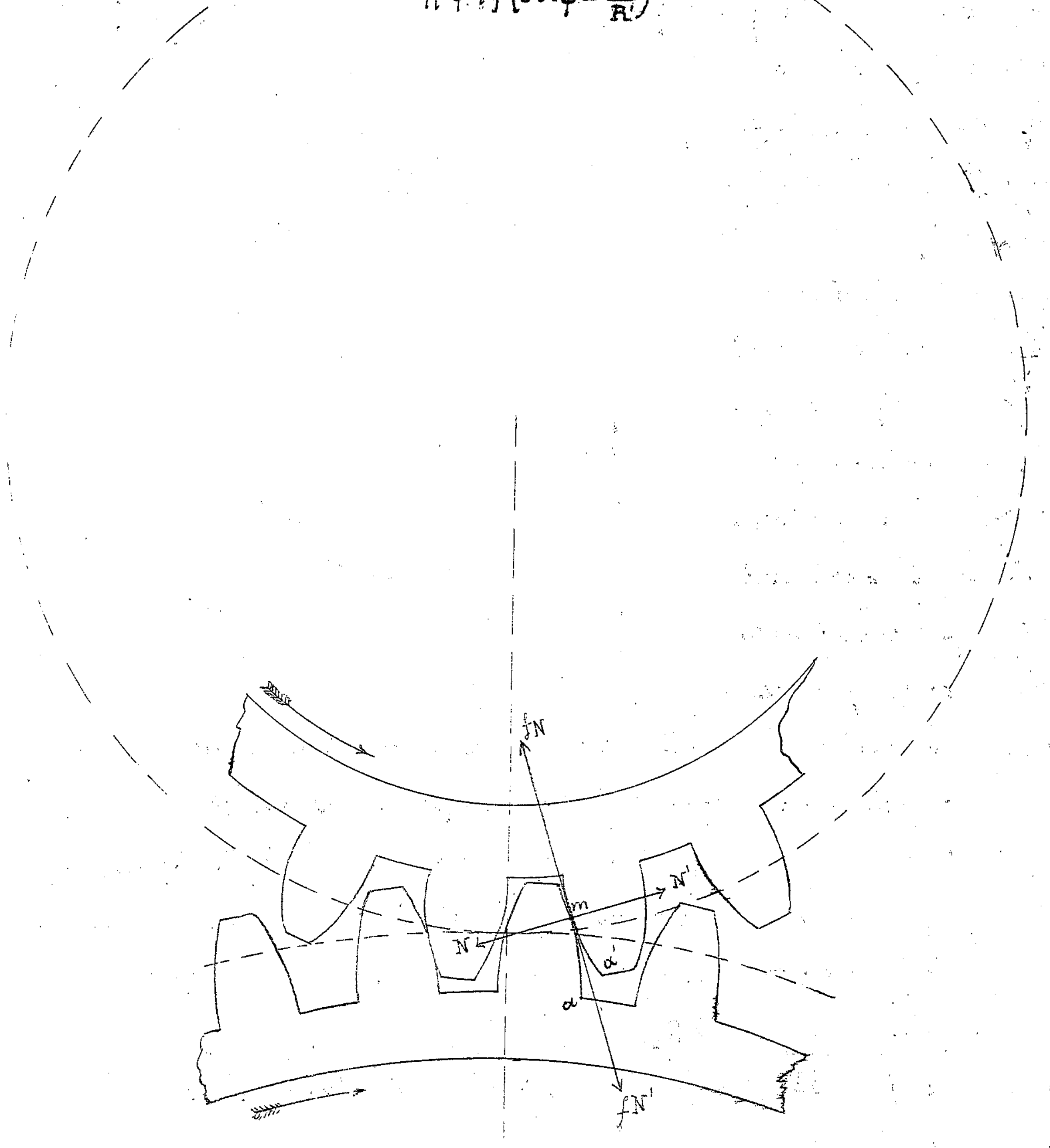
ἤ $$P = N'\left[\eta\mu\varphi + f\left(\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{p}{R'}\right)\right]$$

Θεωροῦντες ἤδη τήν ἀντίδρασιν N, ἥν ἐξασκεῖ τό τύμπανον O' ἐπί τοῦ τυμπάνου O καί συλλογιζόμενοι κατά τά προηγούμενα ἔχομεν

$$F = N\left[\eta\mu\varphi + f\left(\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{p}{R}\right)\right]$$

καί διαιροῦντες, ἐπειδή $N = N'$ ἔχομεν

$$F = \frac{\eta\mu\varphi + f\left(\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{p}{R}\right)}{\eta\mu\varphi + f\left(\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{p}{R'}\right)}P$$



ἐάν ἡ προστριβή δέν ὑπῆρχε $(f=0)$ ἡ ἄνω σχέσις θά ἔδιδε

$$F = P$$

ἡ ὑπό τῆς προστριβῆς καταναλισκομένη δύναμις εἶναι λοιπόν

$$F - P = \frac{fp\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right]}{\eta\mu\varphi + f\left[\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{p}{R'}\right]}P = \Phi$$

ἡ ὀφειλομένη δέ τῇ προστριβῇ ἐργασία εἶναι

$$\int \Phi . AA'$$

ἔχομεν δέ $$dp = A'i = AA'\,\eta\mu.\widehat{A'Ai} = AA'\,\eta\mu\varphi$$

ὅθεν $$AA' = \frac{dp}{\eta\mu\varphi}$$

καί

$$\text{ἐργασία προστριβῆς} = \int \Phi \frac{dp}{\eta\mu\varphi} = Pf\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right]\int \frac{p\,dp}{\eta\mu\varphi\left[\eta\mu\varphi + f\left(\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{p}{R'}\right)\right]}$$

ἐάν ὑποθέσωμεν φ σταθερόν ἐκ τῆς σχέσεως

$$dp = ds\,\eta\mu\varphi \text{ ἔχομεν } p = s\,\eta\mu\varphi.$$

καί παραλείψωμεν f εἰς τόν παρονομαστήν ἔχομεν

$$\int \frac{p\,dp}{\eta\mu\varphi\left[\eta\mu\varphi + f\left(\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{p}{R'}\right)\right]} = \int \frac{\eta\mu^2\varphi\, s\,ds}{\eta\mu^2\varphi} = \frac{s^2}{2}$$

καί

$$\mathcal{T}_f = Pf\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right]\frac{s^2}{2}$$

ἔνθα s παριστᾷ τό βῆμα τοῦ τυμπάνου

ἀλλ' ἡ ἐκτελεσθεῖσα ἐργασία $\mathcal{T}_\varepsilon$ εἶναι $= Ps$ ὥστε

$$\frac{\mathcal{T}_f}{\mathcal{T}_\varepsilon} = f\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right]\frac{s}{2}$$

καί ἐπειδή

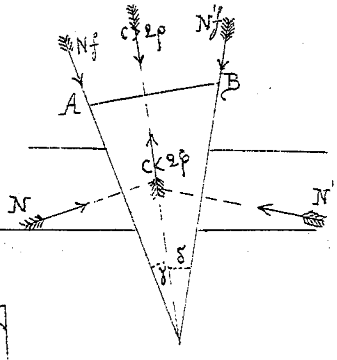
$$ns = 2\pi R$$

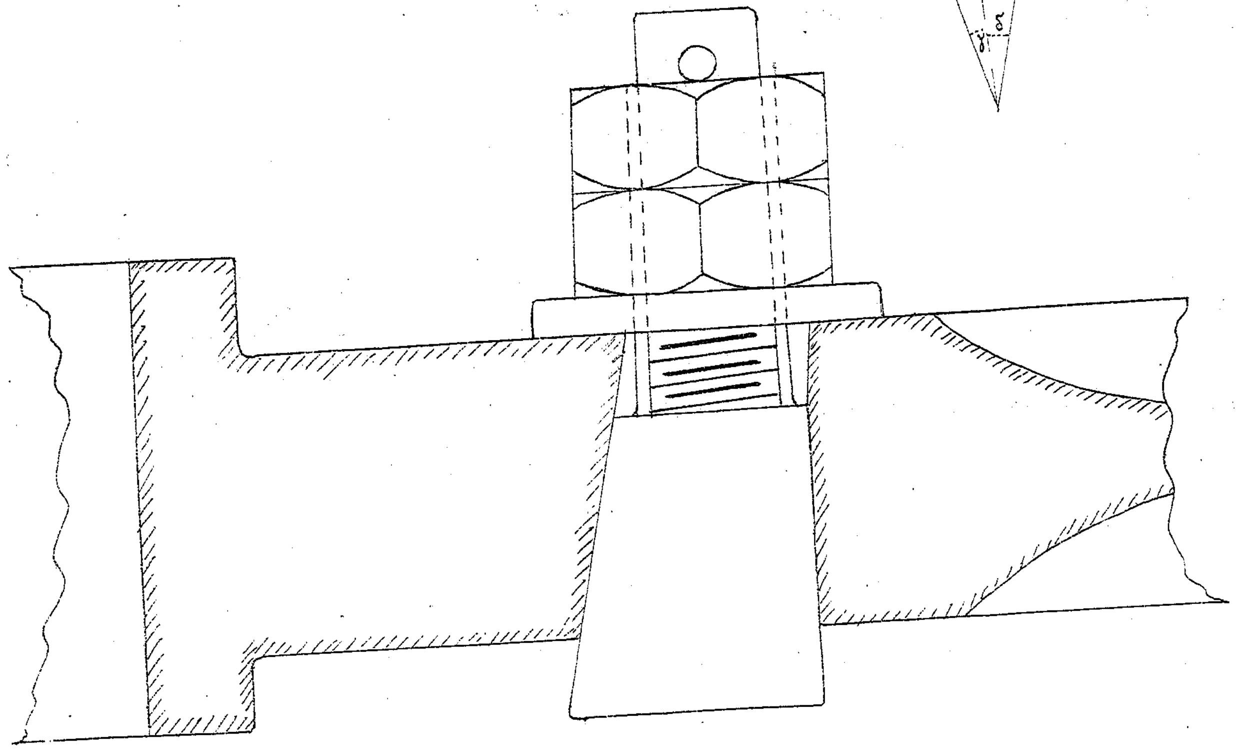
$$n's = 2\pi R' \quad \text{ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν}$$

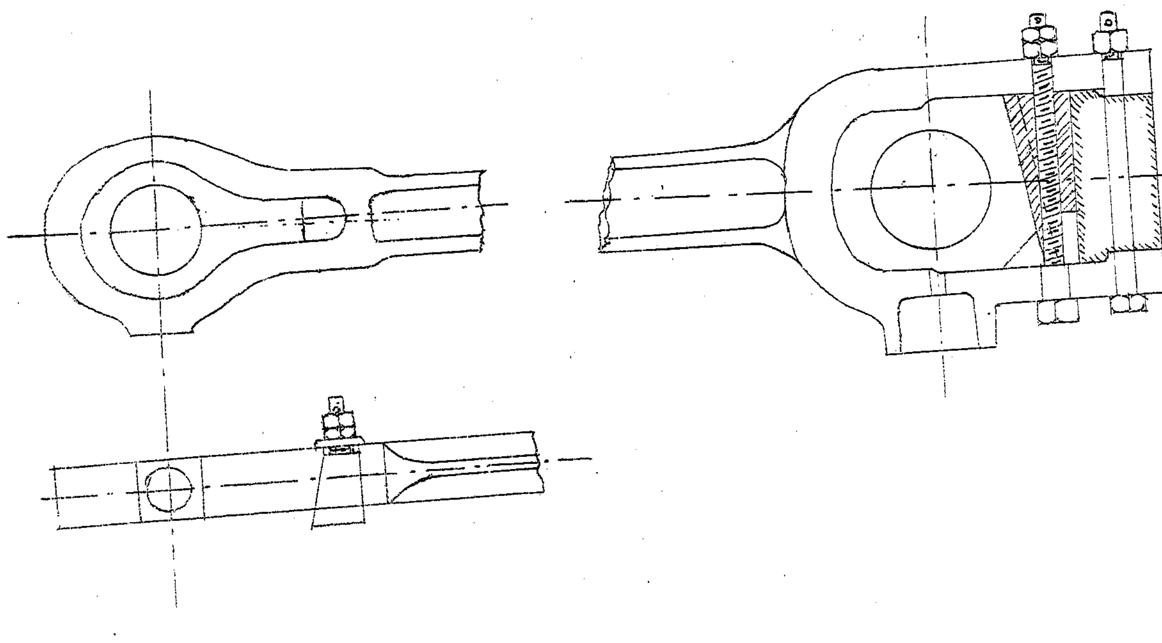
$$\frac{\mathcal{T}_f}{\mathcal{T}_\varepsilon} = f\pi\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right]$$

Ἐάν τό τύμπανον O' εἶναι ἐσωτερικόν πρέπει νά θέσωμεν $-R'$ ἀντί R'

Σφήν. — Σφῆνα καλοῦμεν πρισματικόν τι σῶμα ἐμφαινόμενον ἐν τῷ ἔναντι σχήματι διά τοῦ ὁποίου εἰσδύοντος βιαίως μεταξύ δύο σωμάτων, ἤ δύο μερῶν ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σώματος, χωρίζομεν ταῦτα.





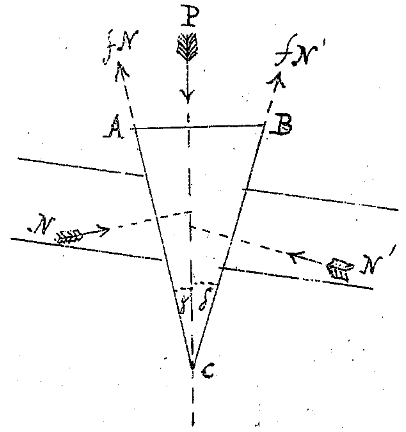


Ἔστω τοιαύτη σφήν ἡ ABC καί ἡ δύναμις P ἐφηρμοσμένη ἐπ' αὐτῆς, οὕτως ὥστε ἡ σφήν οὐδεμίαν να ἔχῃ τάσιν πρός στροφήν. τότε τό ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργουσῶν δυνάμεων ὡς πρός ἕν σημεῖον οἱονδήποτε τό C λ.χ. ἰσοῦται τῷ μηδενί καί ἔχομεν

$$N.TC = P.CK + N'.CT$$

ἔνθα N καί N' εἶναι αἱ ἀντιδράσεις, ἅς ὑφίσταται ἡ σφήν ἐκ τῶν χωριζομένων μερῶν.

ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται, καί ἐπί τό ἁπλούστερον, ὅτι ἡ δύναμις P διέρχεται διά τῆς αἰχμῆς C τῆς σφηνός, οὖσα κάθετος τῇ AB.



Ἐκτός τῶν ἀντιδράσεων N καί N', ἅς ἐξασκοῦσι τά χωριζόμενα μέρη ἔχομεν καί τάς ὀφειλομένας τῇ προστριβῇ ἀντιδράσεις fN καί fN', ὡς ἐκ τῆς ἰσορροπίας δέ προβάλλοντες ἐπί τῆς δυνάμεως P ἔχομεν,

$$P = f\,[N\,συν\,γ + N'\,συν.\,δ] + N\,ἡμ\,γ + N'\,ημ.\,δ$$
$$= N\,[ημ\,γ + f\,συν.\,γ] + N'\,[ἡμ\,δ + f\,συν\,δ]$$

προβάλλοντες ἐπί τῆς κεφαλῆς AB ἔχομεν

$$N f\,ἡμ\,γ - N' f\,ἡμ\,δ - N\,συν\,γ + N\,συν\,δ = 0$$

ὅθεν.

$$N\,[συν\,γ - f\,ἡμ\,γ] = N'\,[συν\,δ - f\,ἡμ\,δ]$$

ἐκ τῆς προηγουμένης δέ σχέσεως καί ταύτης πορίζόμεθα

$$N = P\,\frac{συν\,δ - f\,ἡμ\,δ}{(1-f^2)\,ἡμ(γ+δ) + 2f\,συν(γ+δ)} = P\,\frac{συν\,δ - f\,ἡμ\,δ}{(1-f^2)\,ἡμ\,C + 2f\,συν\,C}$$

ή τέλος επειδή $f = \text{εφ.}\,\varphi$

$$N = P\,\frac{\text{συν}(\varphi+\delta)}{\text{ημ.}(2\varphi+c)}\,\text{συν.}\varphi$$

και διά του αυτού τρόπου

$$N' = P\,\frac{\text{συν}(\varphi+\gamma)}{\text{ημ}(2\varphi+c)}\,\text{συν}\varphi$$

όπως εισέλθη η σφήν εν τω σώματι δέον να έχωμεν

$$N>0 \qquad N'>0$$

ή

$$\varphi+\delta<90^\circ \qquad \varphi+\gamma<90^\circ$$

και συνδυάζοντες τας δύο ταύτας ανισότητας

$$2\varphi+\delta+\gamma = 2\varphi+c<180^\circ$$

τέλος

$$c<180-2\varphi$$

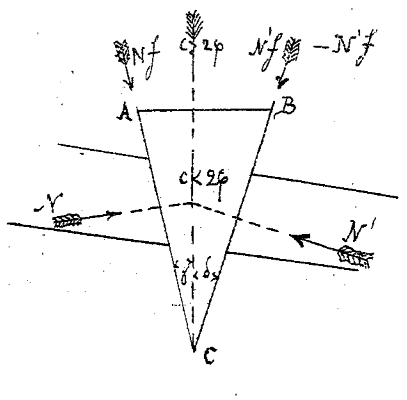
αι αμβλείαι σφήνες εισέρχονται λοιπόν δυσκολώτερον των οξειών.

<u>περίπτωσις καθ' ην η σφήν ωθείται εκ της αντιδράσεως των χωριζομένων μερών.</u>

Εάν η σφήν ωθείται προς τα έξω ως εκ των αντιδράσεων N και N' η προστριβή επενεργεί κατ' αντίθετον φοράν. δέον λοιπόν εις τας προηγουμένας σχέσεις ν' αντικαταστήσωμεν Nf και $N'f$ διά $-Nf$ και $-N'f$ και έχομεν

$$N = P\frac{\text{συν}\delta+f\,\text{ημ}\delta}{(1-f^2)\,\text{ημ}c-2f\,\text{συν}c} = P\frac{\text{συν}(\delta-\varphi)}{\text{ημ}(c-2\varphi)}\,\text{συν}\varphi$$

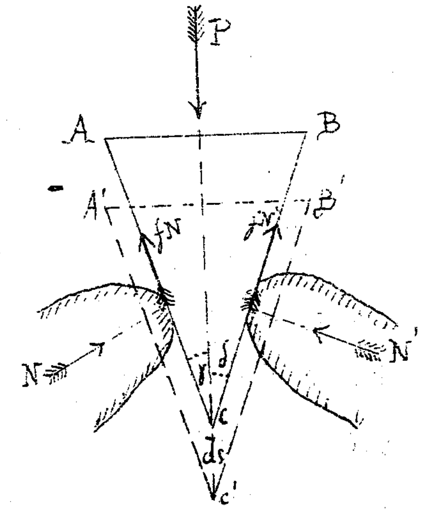
$$N' = P\frac{\text{συν}\gamma+f\,\text{ημ}\gamma}{(1-f^2)\,\text{ημ}c-2f\,\text{συν}c} = P\frac{\text{συν}(\gamma-\varphi)}{\text{ημ}(c-2\varphi)}\,\text{συν}\varphi$$



αλλά N, N', $\text{συν}(\delta-\varphi)\,\text{συν}\varphi$, και $\text{συν}(\gamma-\varphi)\,\text{συν}\varphi$ είναι θετικαί ποσότητες ώστε εάν $c>2\varphi$ P είναι θετική και κατά συνέπειαν η σφήν ωθείται προς τα έξω συγκρατουμένη υπό της δυνάμεως P. εάν $c<2\varphi$, P είναι αρνητική, και η σφήν όχι μόνον δεν ωθείται προς τα έξω, αλλ' απαιτείται και ελκτική τις δύναμις διά την εξαγωγήν αυτής. (περίπτωσις ενός σώματος).

<u>Χρήσιμος εργασία.</u> Ας υποθέσωμεν, ότι η σφήν επροχώρησεν εν τω σώματι κατά διάστημα ds η υπό της δυνάμεως P εκτελεσθείσα εργασία είναι

$$P\,ds = N\,\frac{\text{ημ}(2\varphi+c)}{\text{συν}(\varphi+\delta)\,\text{συν}\varphi}\,ds = T_m$$



η χρησιμοποιηθείσα εργασία είναι η εργασία των αντιδράσεων N και N'.

$$T_n = N'ds\,\text{ημ}\delta + N\,ds\,\text{ημ}\gamma$$

ή αντικαθιστώντες

$$T_n = N\,ds\left[\text{ημ}\gamma + \text{ημ}\delta\,\frac{\text{συν}\gamma-f\,\text{ημ}\gamma}{\text{συν}\delta-f\,\text{ημ}\delta}\right] = N\,ds\,\frac{\text{ημ}c-2f\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημ}\delta}{\text{συν}\delta-f\,\text{ημ}\delta}$$

αλλά

$$2\,\text{ημ}\gamma\,\text{ημ}\delta = \text{συν}(\gamma-\delta)-\text{συν}(\gamma+\delta) = \text{συν}(\gamma-\delta)-\text{συν}c \quad \text{και} \quad f=\text{εφ.}\varphi$$

αντικαθιστώντες έχομεν.

$$T_n = N\,ds\,\frac{\text{ημ}(\varphi+c)-\text{ημ}\varphi\,\text{συν}(\gamma-\delta)}{\text{συν}(\varphi+\delta)}$$

ώστε

$$\frac{T_n}{T_m} = \frac{\text{ημ}(\varphi+c)-\text{ημ}\varphi\,\text{συν}(\gamma-\delta)}{\text{ημ}(2\varphi+c)}\,\text{συν}\varphi$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν τήν γωνίαν C δεδομένην, ἡ μεγαλειτέρα τιμή τοῦ λόγου $\frac{T_n}{T_m}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν γ ἤ $\delta = o$. ἡ σφήν δηλαδή πρέπει νά εἶναι ὀρθογώνιος.

ἡ ἐλαχίστη τιμή τοῦ αὐτοῦ λόγου ἐπιτυγχάνεται ἐάν θέσωμεν

$$\gamma = \delta = \frac{c}{2}$$

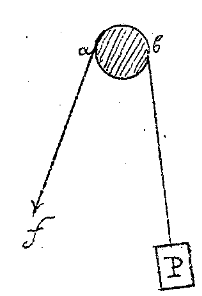
τότε ἡ σφήν εἶναι ἰσοσκελής.

Τροχαλία

Ἡ τροχαλία εἶναι τροχίσκος δυνάμενος νά περιστραφῇ περί ἄξονα διερχόμενον διά τοῦ κέντρου του καί χρησιμεύων ἰδίᾳ διά τήν παραλλαγήν τῆς φορᾶς ὡρισμένης τινός ἀντιστάσεως, δι' ἧς ἐνίοτε κερδίζομεν μηχανικήν ἐργασίαν. Ὑποθέσωμεν λ.χ. ὅτι μᾶς ἀνετέθη ἡ ἀνύψωσις τοῦ βάρους P εἰς ὕψος H. ἐάν ἀναβιβάσωμεν τοῦτο ἀπ' εὐθείας, ἐκτός τῆς ἐργασίας PH, ἣν δέον νά καταβάλωμεν πρός τοῦτο πρέπει ν' ἀνυψώσωμεν καί τό ἴδιον σῶμα μας, δι' ὃ καταναλίσκομεν ἀνάλογον ἐργασίαν. Ἐάν τοὐναντίον ἀλλάξωμεν τήν διεύθυνσιν τῆς ἀντιστάσεως τῆς βαρύτητος ἀναρτῶντες τό βάρος P εἰς τό ἄκρον σχοινίου τινός οὗτινος τό ἕτερον ἄκρον περῶμεν διά πασσάλου ἐμπεπηγμένου ὑπεράνω τοῦ ὕψους H, δυνάμεθα νά ὑψώσωμεν τό βάρος P εἰς τό ὕψος H ἀποφεύγοντες καί τοῦ ἰδίου σώματος τήν ἀνύψωσιν κερδίζοντες κατά συνέπειαν τήν καταβληθησομένην πρός

τοῦτο ἐργασίαν.

Ἴδωμεν ποίαν δύναμιν F πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ σχοινίου διά ν' ἀνυψώσωμεν τό βάρος P. Ἡ ἐργασία, ἣν ἐκτελεῖ ἡ δύναμις F διά τήν ἀνύψωσιν τοῦ βάρους P εἰς ὕψος η εἶναι ἀφ' ἑνός $F\eta$ καί ἀφ' ἑτέρου $P\eta$. ὥστε

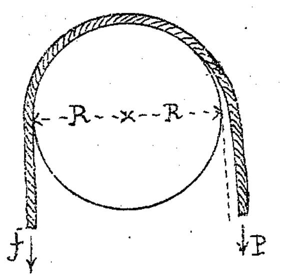


$$F\eta = P\eta \quad \text{ἤ} \quad F = P$$

ἡ δύναμις λοιπόν τήν ὁποίαν πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ ἄκρου τοῦ σχοινίου διά νά ὑψώσωμεν τό βάρος P, ἔπρεπε νά εἶναι ἴση μέ P, καί ὅμως ἡ πεῖρα μᾶς διδάσκει ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι σχεδόν τριπλασία τῆς P, ἡ συσκευή λοιπόν τήν ὁποίαν ἐπενοήσαμεν διά τήν ἀνύψωσιν τοῦ βάρους P εἶναι λίαν ἀπρόσφορος καί πρέπει νά ζητήσωμεν τήν τελειοποίησιν αὐτῆς. ἀλλά πρός τοῦτο πρέπει πρῶτον νά εὕρωμεν τάς ἀτελείας αὐτοῦ τά αἴτια δηλαδή εἰς ἃ ὀφείλεται ἡ μεγάλη τιμή τῆς δυνάμεως F σχετικῶς πρός τό βάρος P.

<u>Ἀκαμψία τοῦ σχοινίου</u> — Ἐάν ἔχωμεν κύλινδρον τόν στρεφόμενον περί τόν ἄξονά του καί σχοινίον ἐπ' αὐτοῦ ὑποκείμενον εἰς τήν ἐπενέργειαν δυνάμεώς τινος F καί ἀντιστάσεως P, παρατηροῦμεν ὅτι καί ἐάν δέν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τήν δύναμιν τῆς προστριβῆς τοῦ σχοινίου ἐπί τοῦ κυλίνδρου, ἡ δύναμις F ὑπερέχει κατά τι τῆς δυνάμεως P, ἡ διαφορά δέ αὕτη ὀφείλεται εἰς τήν ἀκαμψίαν τοῦ σχοινίου.

Τῷ ὄντι ἐπί τοῦ μέρους τῆς δυνάμεως F τό σχοινίον ἐκτυλισσόμενον εφαρμόζει ακριβώς επί του κυλίνδρου, ενώ τουναντίον εκ του μέρους της αντιστάσεως P ως εκ της ακαμψίας του το τυλισσόμενον σχοινίον δεν ευρίσκεται εις επαφήν μετά του κυλίνδρου αλλ' εις απόστασίν τινα ε ώστε αντί της σχέσεως.



$$PR=FR$$

δέον νά γράψωμεν

$$P(R+\varepsilon)=FR \text{ ή } F=P\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

Πειραματικώς δέ ο Coulomb εύρεν ότι η διαφορά

$$F-P \text{ είναι} = \frac{\alpha+bP}{2R}$$

όθεν

$$\varepsilon=\frac{\alpha+bP}{2P}$$

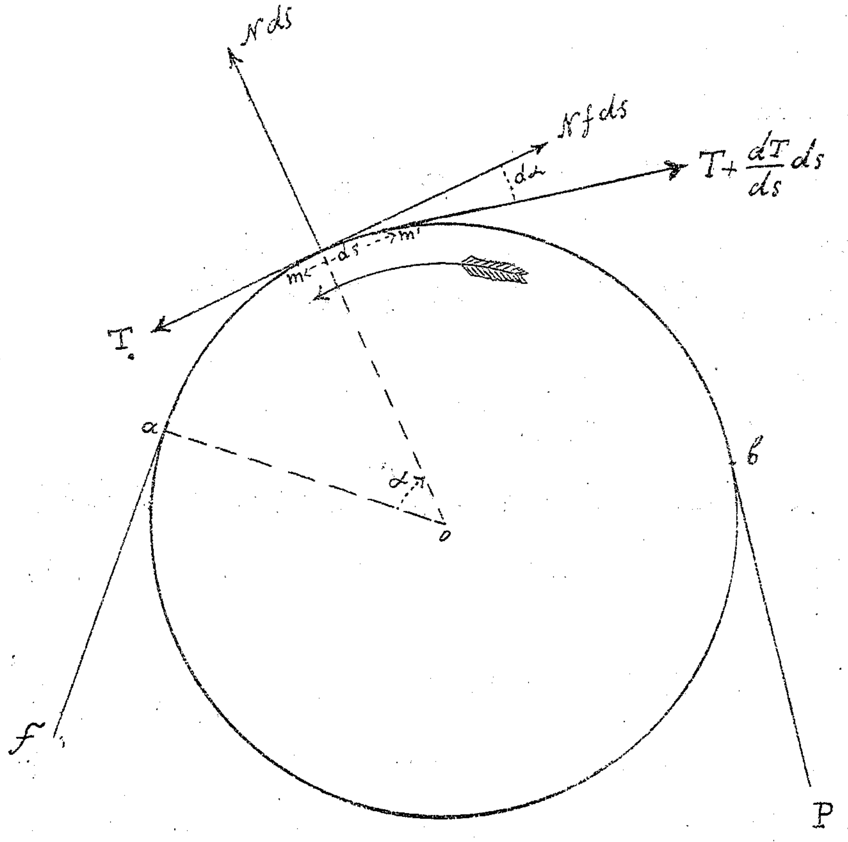
ένθα α και b είναι αριθμητικοί συντελεσταί, ών αι τιμαί δίδονται εν τω κάτωθι πίνακι:

Είδος σχοινίου	διάμετρος	βάρος κατά μέτρον μήκους	α	b
λευκά σχοινία εκ 30 νημάτων	m 0, 020	χιλιογ. 0, 283	0, 222	0.0097
15 ——	0, 014	0, 145	0, 064	0.0055
6 ——	0, 009	0, 052	0, 011	0.0024
σχοινία πισσωμένα εκ 30 νημ.	0, 024	0, 333	0, 350	0.0126
15 ——	0, 017	0, 163	0, 106	0.0061
6 ——	0, 010	0, 069	0, 021	0,0026

2ον. προστριβή του σχοινίου —— επί του κυλίνδρου —— ——

Αλλ' εκτός της ακαμψίας του σχοινίου έχομεν να υπερνικήσωμεν και την δύναμιν της προστριβής αυτού επί του πασσάλου.

Θεωρήσωμεν πρός τούτο στοιχειώδες τμήμα ds του σχοινίου, όπερ είναι τεταμένον, ως εί ήσαν εφηρμοσμέναι επί των άκρων



αυτού m και m' δυνάμεις αμοιβαίως ίσαι ταις

$$T \text{ και } T+\frac{dT}{ds}ds$$

έστω πρός τούτοις Nds η κάθετος αντίδρασις του πασσάλου επί του σχοινίου. η δύναμις της προστριβής είναι κατά συνέπειαν $f.Nds$. το τμήμα mm' του σχοινίου ισορροπεί υπό την επήρειαν των δυνάμεων,

$$T \qquad N ds \qquad f N ds \text{ καί } T + \frac{dT}{ds} ds$$

προβάλλοντες επί της καθέτου N έχομεν $\left[T + \frac{dT}{ds} ds\right]$ ημ. $d\alpha - N ds = 0$

προβάλλοντες επί της εφαπτομένης T έχομεν $\left[T + \frac{dT}{ds} ds\right]$ συν $d\alpha +$ $N f ds - T = 0$.

ή παραλείποντες τάς δευτοροβαθμίους απειροστάς ποσότητας καί αντικαθιστώντες ημ. $d\alpha$ διά τού $d\alpha$ καί συν$d\alpha$ διά της μονάδος έχομεν

$$T d\alpha = N ds \quad \text{καί} \quad \frac{dT}{ds} ds + f N ds = 0$$

καί απαλείφοντες N έχομεν

$$\frac{dT}{ds} ds + f \cdot T d\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dT}{T} = -f d\alpha$$

καί ολοκληρούντες

$$\text{λογ.} T = -f\alpha + \text{στ}: \text{ ή τελος } T = c e^{-f\alpha}$$

αλλά παρά τό σημείον α ένθα $\alpha = 0$ έχομεν $T = F$ ώστε

$$T = F e^{-f\alpha}$$

σχέσις, ήτις μας δίδει τήν τάσιν του σχοινίου καθ' όλον τό μήκος του τόξου $\alpha\beta$: εφαρμόζοντες ταύτην παρά τό σημείον β έχομεν

$$P = F e^{-f\alpha_1} \quad \text{ή} \quad F = P e^{f\alpha_1}$$

ένθα α_1 εμφαίνει τήν γνωστήν γωνίαν $\widehat{\alpha o \beta}$

όπως λοιπόν η δύναμις F παρασύρη τό σχοινίον δι' ολισθήσεως επί του κυλίνδρου δεόν νά ή ανωτέρα της $Pe^{f\alpha_1}$

εν τη σχέσει

$$F = P e^{f\alpha}$$

βλέπομεν ευκόλως, ότι F αυξάνει ταχέως μετ τήν γωνίαν α. ούτω εάν υποθέσωμεν $f = 0.20$* καί

---

* τιμαί του f διά τάς συνηθεστέρας περιπτώσεις
ιμάντες κοινοί επί ξυλίνων κυλίνδρων $f = 0.47$
" καινουργείς .... $= 0.50$
μεταχειρισμένοι .... $= 0.28$
ιμάντες υγροί επί χυτοσιδηρών κυλίνδρων $= 0.38$
σχοινία εκ κανάβεως επί ξυλίνων κυλίνδρων $= 0.50$

$\alpha = \Pi$ .... έχομεν .... $F = Pe^{0.62832} = 1.8744 \cdot P$

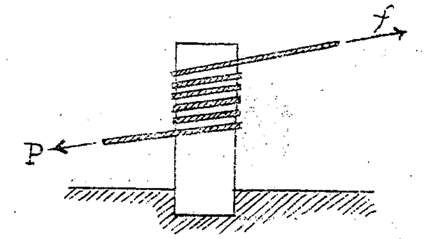
$\alpha = 2\Pi$ ήτοι διά μίαν ολόκληρον στροφήν $F = Pe^{1.25664} = 3.5136 \cdot P$

$\alpha = 4\Pi$ ήτοι διά δύο στροφάς ...... $F = \quad = 12,3453 \cdot P$

$\alpha = 6\Pi$ ήτοι διά τρείς στροφάς ...... $F \quad = 43,3763 \cdot P$

καί εν γένει διά n στροφάς έχομεν $F = Pe^{f 2\pi n}$

δεν δυσκολευόμεθα ήδη νά εννοήσωμεν πώς διά μικράς σχετικώς δυνάμεως F εφηρμοσμένης εις τό άκρον σχοινίου περιτετυλιγμένου πολλάκις επί κατακορύφου τινός πασσάλου, δυνάμεθα νά συγκρατήσωμεν ολόκληρον πλοίον



Η δύναμις R της προστριβής του σχοινίου επί του πασσάλου είναι προφανώς

$$R = F - P = Pe^{f\alpha} - P = P\left(e^{f\alpha} - 1\right)$$

καί η εργασία, ήν καταναλίσκει η προστριβή διά τήν στοιχειώδη μετατόπισιν ds είναι

$$P\left(e^{f\alpha} - 1\right) ds$$

ούτω λοιπόν, όπως υψώσωμεν τό βάρος P δεόν νά καταβάλωμεν τάς τρείς δυνάμεις

$$\underset{\text{βάρος}}{P} \qquad \underbrace{\underset{\text{ακαμψία}}{\frac{\alpha + \beta P}{2r}} \qquad \text{καί} \qquad \underset{\text{προστριβή επί του πασσάλου}}{P\left(e^{f\alpha} - 1\right)}}_{\text{του σχοινίου}}$$

εάν υποθέσωμεν $P = 10^{\text{χιλ.}}$ $\quad 2r = 0.040 \quad \alpha = \Pi \quad \alpha = 0,2 \quad \beta = 0,1$

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

ἔχομεν

$$\frac{\alpha+\beta P}{2r}=15 \qquad P\left(e^{f\alpha}-1\right)=0.8744\,P=8{,}744$$

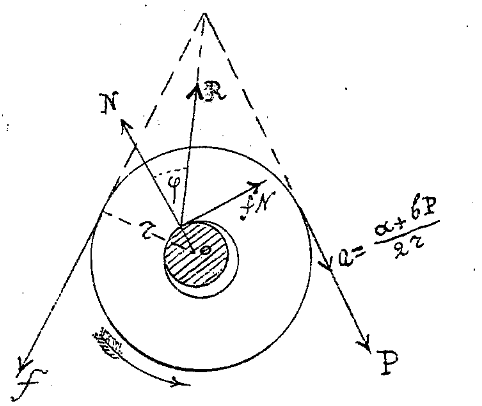
ὥστε

$$F=10+15+8.744=33{,}744$$

Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας εἶναι οὕτω μεγίστη, καί πρέπει νά ζητήσωμεν τήν ἐλάττωσιν αὐτῆς τροποποιοῦντες τήν ἄνω συσκευήν. Τήν ἐλάττωσιν ταύτην ἐπιτυγχάνομεν διά τῆς τροχαλιᾶς, ἥτις εἶναι δίσκος ἔχων τήν ἔναντι μορφήν καί δυνάμενος νά περιστραφῇ περί τόν σταθερόν ἄξονα O.

Διά τῆς μετατροπῆς ταύτης ἐλαττοῦμεν τήν ἐκ τῆς προστριβῆς τοῦ σχοινίου ἐπί τῆς τροχαλιᾶς προκύπτουσαν ἀπώλειαν ἐνεργείας. ἤδη ἡ προστριβή ἠλαττώθη σπουδαίως ἐξασκουμένη μεταξύ τοῦ τροχίσκου καί τοῦ ἄξονος O.

Τήν δύναμιν F, ἥτις εἶναι ἱκανή νά ὑπερνικήσῃ τήν ἀντίστα-



σιν P, δυνάμεθα ἤδη εὐκόλως νά ὑπολογίσωμεν ὡς ἑξῆς. ἐπί τοῦ συστήματος τοῦ σχοινίου καί τῆς τροχαλιᾶς εἶναι ἐφηρμοσμέναι αἱ δυνάμεις F καί P, ὧν ἡ πρώτη ἐφάπτεται τῆς τροχαλιᾶς ἡ δέ δευτέρα κεῖται εἰς ἀπόστασιν $\varepsilon=\frac{\alpha+\beta P}{2P}$, καί ἡ ἀντίδρασις R τοῦ ἄξονος ἐπί τοῦ τροχίσκου. ἡ τελευταία αὐ-

τη εἶναι ἴση καί ἀντίθετος τῇ συνισταμένῃ τῆς F καί P καί κατά συνέπειαν ἡ ἔντασις αὐτῆς ὁρίζεται διά τῆς σχέσεως

$$R=\sqrt{P^2+F^2+2PF\,\text{συν}(P,F)}$$

ὡς ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐργασίας ἔχομεν ἐξισοῦντες τήν ἀνθισταμένην πρός τήν κινητήριον ἐργασίαν

$$(1) \qquad Fr=Pr+\frac{1}{2}(\alpha+\beta P)+\frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{F^2+P^2+2PF\,\text{συν}(P,F)}$$

ἔχομεν οὕτω τήν ἔντασιν τῆς F διά μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἧς ἡ θετική μόνον ῥίζα εἶναι παραδεκτέα, διότι πρέπει νά ἔχωμεν

$$F > P+\frac{\alpha+\beta P}{2r}$$

ἐάν αἱ δυνάμεις F καί P εἶναι παράλληλοι ἔχομεν συν$(P,F)=1$ καί ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς τήν ἀκόλουθον

$$Fr=Pr+\frac{1}{2}(\alpha+\beta P)+\frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}}(F+P)$$

ἤ

$$F\left[1+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\right]=\frac{\alpha}{2r}+P\left[1+\frac{\beta}{2r}+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\right]$$

ἤ ἁπλούστερον

$$(2) \qquad F=\alpha+\beta P$$

ἔνθα α καί β εἶναι δύο ἀριθμητικοί συντελεσταί χαρακτηρίζοντες τό δοθέν σύστημα τροχαλιᾶς καί σχοινίου.

ἀριθμητική ἐφαρμογή. —

Ὑποθέσωμεν

Τήν ἀκτῖνα τῆς τροχαλιᾶς, πλέον τήν ἀκτῖνα τοῦ σχοινίου … $= 0.0593^{m}$

τήν ἀκτῖνα τοῦ ἄξονος - - - - - - - - - - - - - - - - $= 0.0105^{m}$

τόν συντελεστήν τῆς προστριβῆς f τοῦ τροχίσκου ἐπί τοῦ ἄξονος - - $= 0.155^{m}$

τήν διάμετρον τοῦ σχοινίου - - - - - - - - - - - - - - - $= 0.018^{m}$

ἐκ τοῦ πίνακος (   ) ἔχομεν

$$\alpha = 0.106 \qquad \beta = 0.0061$$

ἀντικαθιστῶντες δέ εὑρίσκομεν

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = \frac{0.155}{\sqrt{1,024}} = \frac{0.155}{1.010} = 0.1534$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{0.0105}{0.0593} = 0.177 \qquad \frac{\alpha}{2r} = \frac{0,1060}{0.1186} = 0.893$$

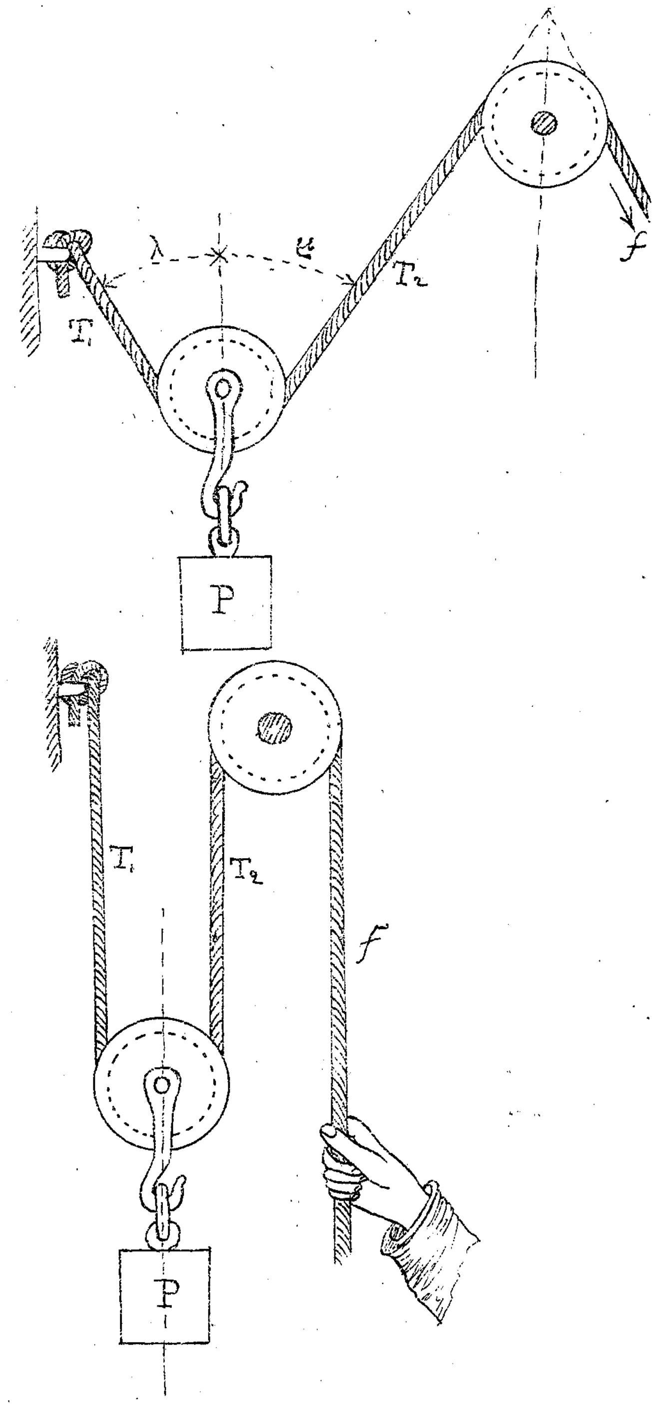
$$\frac{\rho}{r}\,\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = 0,0271 \qquad \frac{\beta}{2r} = \frac{0.0061}{0.1186} = 0.051$$

ὥστε

$$F \times 1,0271 = 0.893 + P \times 1,0781$$

$$F = 0.869 + 1,05P$$

κινουμένη τροχαλιά. —— Βλέπομεν οὕτω ὅτι καί ἐν τῇ συσκευῇ ταύτῃ ἡ δύναμις F εἶναι μεγαλειτέρα τῆς P, καί δέν ἐπωφελούμεθα ποσῶς ἐκ τῆς συσκευῆς τῆς σταθερᾶς τροχαλιᾶς. Τροποποιοῦντες ὅμως τήν συσκευήν ταύτην ἐ-



λάχιστον, ὡς ἐμφαίνεται τοῦτο ἐν τῷ ἔναντι σχήματι δυνάμεθα νά ἐλαττώσωμεν επαισθητώς και την έντασιν της δυνάμεως F. και καλέσωμεν T_1 και T_2 τάς τάσεις των τμημάτων του σχοινίου προσδιορίζομεν ευκόλως ταύτας, διότι έχομεν

$$T_1 \,\text{συν}\,\lambda + T_2\,\text{συν}\,\mu = P \qquad \text{όθεν} \left\{ \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{P\,\text{ημ.}\,\mu}{\text{ημ}(\lambda+\mu)} \\ T_2 = \dfrac{P\,\text{ημ.}\,\lambda}{\text{ημ}(\mu+\lambda)} \end{array} \right.$$
$$T_1\,\text{ημ.}\,\lambda + T_2\,\text{ημ.}\,\mu = 0$$

δυνάμεθα ήδη να γράψωμεν την σχέσιν (1) της προηγουμένης παραγράφου και προσδιορίσωμεν ούτω την υπάρχουσαν μεταξύ της αντιστάσεως P και της δυνάμεως F σχέσιν, ας υποθέσωμεν επί το απλούστερον

$$\lambda = \mu = 0$$

και F παράλληλον τη P ως εμφαίνεται τούτο εν τω έναντι σχήματι.

εφαρμόζοντες την σχέσιν 2 της προηγουμένης παραγράφου έχομεν

$$T_2 = \alpha + \beta T_1$$
$$F = \alpha + \beta T_2$$

όθεν

$$F = \alpha + \beta(\alpha + \beta T_1)$$

ως επί της ισορροπίας δε της κινουμένης τροχαλιάς, έχομεν

$$P = T_1 + T_2 = T_1 + \alpha + \beta T_1$$

όθεν

$$T = \frac{P-\alpha}{1+\beta}$$

λοιπόν

$$F = \alpha + \beta\left[\alpha + \beta\,\frac{P-\alpha}{1+\beta}\right]$$

και αντικαθιστώντες τάς αριθμητικάς τιμάς του προηγουμένου παραδείγματος ευρίσκομεν

$$F = 1,44 + 0.54P$$

και βλέπομεν, ότι ενταύθα η δύναμις F ηλαττώθη σχεδόν κατά το ήμισυ. εάν έλειπεν η προστριβή και η ακαμψία του σχοινίου θα είχομεν ακριβώς $F = \dfrac{P}{2}$.

Διά τάς έναντι δε εμφαινομένας συσκευάς έχομεν κατά τον αυτόν τρόπον.

$$t_2 = \alpha + \beta t_1 \text{ - } = \alpha\,\frac{1-\beta}{1-\beta} + \beta t_1$$
$$t_3 = \alpha + \beta t_2 = \alpha + \beta(\alpha + \beta t_1) = \alpha(1+\beta) + \beta^2 t_1 \text{ - - - - - - } = \alpha\,\frac{1-\beta^2}{1-\beta} + \beta^2 t_1$$
$$t_4 = \alpha + \beta t_3 = \alpha + \beta\left[\alpha\,\frac{1-\beta^2}{1-\beta} + \beta^2 t_1\right] = \alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^3 t_1 \text{ - - - } = \alpha\,\frac{1-\beta^3}{1-\beta} + \beta^3 t_1$$

- -

- -

$$t_n = \alpha + \beta t_{n-1} = \alpha(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{n-2}) + \beta^{n-1} t_1 \text{ - - - - - - } = \alpha\,\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta} + \beta^{n-1} t_1$$

ως επί της ισορροπίας διά της κινουμένης θήκης των τροχαλιών έχομεν

$$P = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = \alpha\left\{\frac{n-1-\beta-\beta^2-\dots-\beta^{n-1}}{1-\beta}\right\} + (1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{n-1})\,t_1$$

όθεν

$$P = \alpha\left\{\frac{n}{1-\beta} - \frac{(1-\beta^n)}{(1-\beta)^2}\right\} + \frac{1-\beta^n}{1-\beta}\,t_1 \quad \text{ή}$$

$$t_1 = P\,\frac{1-\beta}{1-\beta^n} - \alpha\left[\frac{n}{1-\beta^n} - \frac{1}{1-\beta}\right]$$

και τέλος

$$F = t_{n+1} = \alpha\left[\frac{n\beta^n}{\beta^n-1} - \frac{1}{\beta-1}\right] + \frac{(\beta-1)\beta^n}{\beta^n-1}\,P$$

ας εφαρμόσωμεν τον τύπον τούτον εν τη συσκευή του έναντι σχήματος ληφθείσαν εν τοις μαθήμασι του Poncelet ένθα

$r = \overset{m}{0.}0593 \qquad \rho = 0.0105 \qquad f = 0.155 \qquad \dfrac{f}{\sqrt{1+f^2}} = 0.153$

$$\alpha = 0.15 \qquad b = 0.081$$

$$\alpha = 1,6459 \qquad \beta = 1.1267 \qquad n = 8$$

$$\beta^n = 2,596 \qquad \frac{\beta^n}{\beta^{n-1}} = 1,6265$$

έχομεν τέλος

$$F = 8,43 + 0,206\,P \text{ χιλιόγραμμα}$$

εάν δεν υπήρχον παθητικαί αντιστάσεις θα είχομεν απλώς

$$F = 0.125\,P$$

ώστε διά τάς παθητικάς αντιστάσεις καταναλίσκεται δύναμις

$$8,43 + 0.081\,P$$

πρόοδος της συσκευής

$$\frac{8,43+0,081P}{0.125\,P} = 1,65 + \frac{67.44}{P}$$

άξων εν περιτροχίω. — (treuil) — Ενταύθα εκτός των δυνάμεων F καί P έχομεν την απαμψίαν των σχοινίων κατά μήκος των οποίων επενεργούσιν αι δυνάμεις F καί P καί την προστριβήν των κνωδάκων επί των εδράνων. Την τελευταίαν ταύτην δυνάμεθα νά υπολογίσωμεν συλλογιζόμενοι ως εξής.

ολίσθησις του κνώδακος επί του εδράνου — Ως εκ των επί της συσκευής επενεργουσών δυνάμεων, ο κνώδαξ K ολισθαίνει κατ' αρχάς εν τω εδράνω εξακολουθεί δε η ολίσθησις εν όσω η συνισταμένη των επί του συστήματος επενεργουσών εξωτερικών δυνάμεων, δεν διέρχε-

ται διά του σημείου της επαφής m καί η εφαπτομένη συνιστώσα αυτής δεν υπερνικήση την προστριβήν εξ ολισθήσεως έχομεν δηλαδή

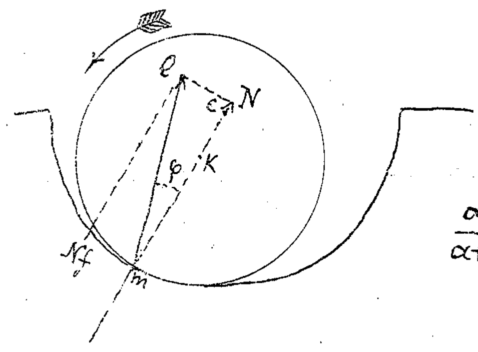
$$Q\,\eta\mu\,\varphi = Nf$$

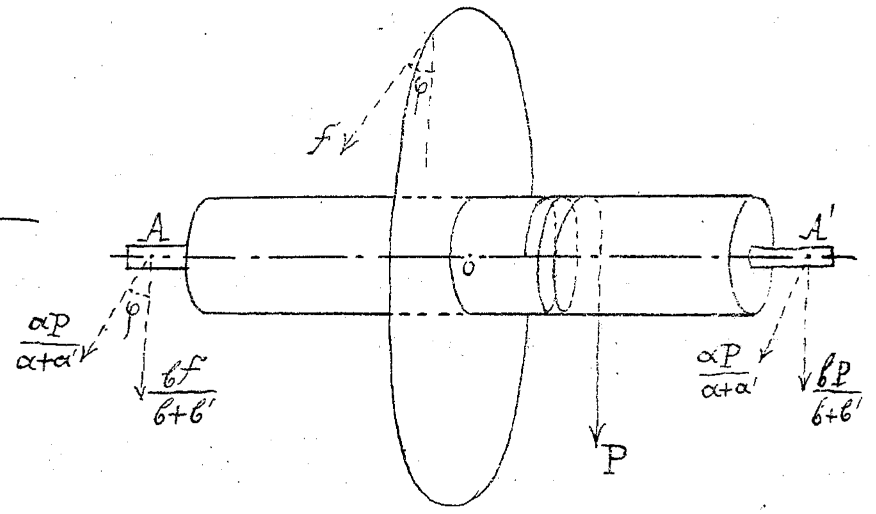
αλλ

$$\eta\mu\,\varphi = \frac{\varepsilon\varphi\,\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

όθεν

$$Nf = Q\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$





η δε εργασία της δυνάμεως ταύτης διά περιστροφήν α είναι

$$Nf\cdot\rho\alpha = Q\rho\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\alpha$$

ένθα ρ παριστά την ακτίνα του κνώδακος.

Την δύναμιν Q υπολογίζομεν ευκόλως μεταφέροντες τάς δυνάμεις F καί P παρά τοις σημείοις A καί A'. Έστωσαν πρός τούτο φ η γωνία την οποίαν σχηματίζει η δύναμις F μετά της κατακορύφου, α καί α' αι αποστάσεις του περιτροχίου από των κνωδάκων A καί A'. b καί b' αἱ ἀποστάσεις τοῦ κύκλου τῆς ἐπαφῆς τῆς ἀντιστάσεως P ἀπό τῶν αὐτῶν κνωδάκων τήν δύναμιν P δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν εἰς δύο ἄλλας παρά τοῖς σημείοις A καί A', ἀμοιβαίως ἴσας ταῖς

$$\frac{b'P}{b+b'} \quad \text{καί} \quad \frac{bP}{b+b'}$$

τήν δύναμιν F δυνάμεθα ἐπίσης νά μεταφέρωμεν παραλλήλως ἑαυτῇ παρά τοῖς σημείοις A καί A' καί ἀντικαταστήσωμεν διά δύο ἄλλων ἀμοιβαίων ἴσων ταῖς

$$\frac{\alpha' F}{\alpha+\alpha'} \text{ καί } \frac{\alpha F}{\alpha+\alpha'}$$

συνθέτοντες ἤδη τάς παρά τοῖς σημείοις A καί A' ἐφηρμοσμένας δυνάμεις ἔχομεν

$$l_1=\frac{1}{d}\sqrt{(b'P)^2+(\alpha'F^2)+2\alpha' b' PF \text{συν}\varphi}$$

$$l_1'=\frac{1}{d}\sqrt{(bP)^2+(\alpha F)^2+2\alpha b PF \text{συν}\varphi}$$

ἔνθα d παριστᾷ τήν ἀπόστασιν $AA'=\alpha+\alpha'=b+b'$

ἀλλά

$$l=l_1+l_1'$$

Ὡς ἐκ τῆς διατηρήσεως δέ τῆς ἐργασίας τῶν ἐπί τῆς συσκευῆς ἐφηρμοσμένων δυνάμεων, παραλείποντες τήν ἀκαμψίαν τῶν σχοινίων ἔχομεν

$$FR=Pr+\frac{1}{d}\left\{\sqrt{(bP)^2(\alpha F)^2+2\alpha b PF\text{συν}\varphi}+\sqrt{(b'+P)^2+(\alpha' F)^2+2\alpha' b' PF\text{συν}\varphi}\right\}\frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}}$$

ἐάν δέ καί ἡ δύναμις F εἶναι κατακόρυφος ἔχομεν συν$\varphi=1$

ὅθεν

$$FR=Pr+\frac{1}{d}\left\{Pd+Fd\right\}=Pr+(P+F)\frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}}$$

$$F=P\,\frac{r+\dfrac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}}}{R+\rho\dfrac{f}{\sqrt{1+f^2}}}$$

Ἐπαλήθευσις τοῦ νόμου τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἐν τῇ κινήσει τῶν μηχανῶν

Ἴδωμεν ἤδη κατά πόσον ἐπαληθεύει ὁ νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἐν τῇ κινήσει τῶν μηχανῶν.

Ἐάν ἐξετάσωμεν μετά προσοχῆς μηχανήν τινα ἐργαζομένην διακρίνομεν εὐκόλως δύο συστήματα δυνάμεων ἐπενεργουσῶν ἐπ' αὐτῆς.

1ον. Τό σύστημα τῶν κινητηρίων δυνάμεων, οἷον ἡ ὑπό τοῦ ἀτμοῦ ἐξασκουμένη ἐπί τοῦ ἐμβόλου πίεσις ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς, τό βάρος καί ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος ἐν τοῖς ὑδραυλικοῖς τροχοῖς.

2ον. Τό σύστημα τῶν ἀντιστάσεων, τάς ὁποίας προτιθέμεθα νά ὑπερνικήσωμεν διά τῆς μηχανῆς, οἷον τήν ἀνύψωσιν βάρους τινος κλπ.

Ἡ ὑπό τῶν πρώτων ἐκτελουμένη ἐργασία $\mathcal{T}_m$ εἶναι ἡ κινητήριος ἐργασία.

Ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τάς ὑπερνικωμένας ἀντιστάσεις ἐργασία $\mathcal{T}_r$ εἶναι ἡ ἀνθισταμένη ἐργασία, καί ὁ νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἐκφράζεται διά τῆς σχέσεως

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r$$

ἔνθα v_0 καί v παριστῶσι τήν ταχύτητα τοῦ μορίου m τῆς μηχανῆς κατά τήν ἀρχήν καί τό τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τήν κινητήριον ἐργασίαν $\mathcal{T}_m$ καί τήν ἀνθισταμένην ἐργασίαν $\mathcal{T}_r$.

Ἐν τῇ κινήσει τῶν μηχανῶν ἡ ταχύτης τῶν ἀποτελούντων ταύτην διαφόρων ὀργάνων δέν εἶναι σταθερά, ἀλλά μεταβάλλεται· ἡ μεταβολή ὅμως αὕτη εἶναι περιοδική, οὕτως ὥστε μετά παρέλευσιν ὡρισμένου τινός χρονικοῦ διαστηστήματος, ὅπερ ἀποτελεῖ τήν περίοδον τῆς κινήσεως, τά διάφορα ὄργανα τῆς μηχανῆς, διέρχονται διαδοχικῶς διά τῶν αὐτῶν βαθμῶν ταχύτητος, δι' ὧν διῆλθον καί κατά τήν προηγουμένην περίοδον.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀνθισταμένη $\mathcal{T}_r$ καί κινητήριος $\mathcal{T}_m$ ἐργασία ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τό χρονικόν διάστημα μιᾶς περιόδου. τότε

$$v_0 = v \qquad \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma \frac{mv^2}{2}$$

καί ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_r$$

ὁ νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας μᾶς λέγει λοιπόν, ὅτι ἡ κινητήριος εἶναι ἴση μέ τήν ἀνθισταμένην ἐργασίαν, καί ὅτι ἡ μηχανή ἐχρησίμευσεν ἁπλῶς εἰς τό νά μετατρέψῃ τήν ἐργασίαν τῶν κινητηρίων δυνάμεων, εἰς ἀνθισταμένην ὠφέλιμον ἐργασίαν, χωρίς νά παραλλάξῃ ταύτην ποσῶς ὡς πρός τήν ποσότητα.

Ὑποθέσωμεν λ.χ. ὅτι ἔχομεν ὑδραυλικόν τροχόν κινούμενος δι' ὕδατος πίπτοντος ἀπό ὡρισμένον ὕψος Η· τόν τροχόν τοῦτον δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν, ὅπως κινήσωμεν ἀντλίαν τινά καί φέρωμεν δι' αὐτῆς ὕδωρ εἰς τό ὕψος ἀκριβῶς, ὅθεν καταπίπτει τό κινοῦν τόν τροχόν ὕδωρ· ἡ ἄνω σχέσις μᾶς διδάσκει, ὅτι ἐν ὡρισμένῳ χρονικῷ διαστήματι θά φέρωμεν εἰς τό ὕψος Η τήν αὐτήν ἀκριβῶς ποσότητα ὕδατος, ὅση κατέπεσεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους διά νά κινήσῃ τόν τροχόν.

Καί ὅμως ἡ πεῖρα μᾶς διδάσκει, ὅτι οὐδέποτε συμβαίνει τοῦτο, ὅτι τό εἰς ὕψος Η ἀνυψωθέν ὕδωρ εἶναι πάντοτε ἔλασσον τοῦ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους καταπεσόντος διά νά κινήσῃ τήν ἀντλίαν καί ἐν γένει ὅτι ἐν τῇ κινήσει πάσης μηχανῆς οὐδέποτε ἡ κινητήριος εἶναι ἴση μέ τήν ἀνθισταμένην ἐργασίαν, ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη εἶναι πάντοτε ἐλάσσων τῆς πρώτης, καί ἐν ἧ περιπτώσει οὐδεμία ἐπιτάχυνσις ἐπέρχεται ἐν τῇ κινήσει τῶν ὀργάνων τῆς μηχανῆς. Ἐξαφανίζεται λοιπόν κατά τόν μετασχηματισμόν τῆς κινητηρίου εἰς ἀνθισταμένην ἐργασίαν ποσότης τοιαύτης ἴση μέ

$$\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_f$$

ἐναντίον τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, τήν ὁποίαν ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω.

Πρόσοδος τῆς μηχανῆς. — Τήν πρόσοδον τῆς μηχανῆς μετροῦμεν διά τοῦ λόγου.

$$\frac{\mathcal{T}_r}{\mathcal{T}_m} = 1 - \frac{\mathcal{T}_f}{\mathcal{T}_m}$$

ὅπως αὐξήσωμεν λοιπόν τήν πρόσοδον τῆς μηχανῆς διά δεδομένην κινητήριον ἐργασίαν $\mathcal{T}_m$ δέον νά ἐλαττώσωμεν τόν ὅρον $\mathcal{T}_f$.

Τήν πηγήν δέ ταύτην τῆς ἀπολεσθείσης ἐργασίας $\mathcal{T}_f$ εὑρίσκομεν ἐάν ἐξετάσωμεν ἐπισταμένως τήν κίνησιν τῶν διαφόρων ὀργάνων τῆς μηχανῆς, βλέπομεν, ὅτι τό μέρος τῆς ἐργασίας $\mathcal{T}_f$, ὅπερ ἀπωλέσθη εἶναι κατά τοσοῦτον ἔλασσον καθ' ὅσον τά διάφορα ταῦτα ὄργανα ἐν τῇ κινήσει των προστρίβοντα ὀλιγώτερον τά μέν ἐπί τῶν δε. ἡ φαινομενική αὕτη ἀπώλεια τῆς ἐργασίας σχετίζεται λοιπόν μετό φαινόμενον τῆς προστριβῆς καί τήν ὀφειλομένην ταύτη ἀνάπτυξιν θερμότητος, σχέσιν τήν ὁποίαν εὕρομεν ἤδη ἀνωτέρω.

Αἴτια ἀνωμαλίας ἐν τῇ κινήσει τῶν μηχανῶν. — Τά κύρια αἴτια τῶν ἀνωμαλιῶν τάς ὁποίας παρατηροῦμεν ἐν τῇ κινήσει τῶν μηχανῶν, τῆς μεταβολῆς δηλ. τῆς ταχύτητος τῶν ὀργάνων αὐτῆς εἶναι

1ον. Ἡ παλινδρομική κίνησις τῶν ὀργάνων τῆς μηχανῆς.

2ον. Ἡ κατά διαλείμματα ἐκτέλεσις τῆς ἐργασίας (*laminoir, marteau, pilon*) καί

3ον. Ἡ συνεχής μεταβολή τῆς ἀντιστάσεως, τήν ὁποίαν προτι-

θέμεθα νά καταβάλωμεν διά τῆς μηχανῆς.

Τάς ἐκ τῆς δευτέρας αἰτίας προκυπτούσας ἀνωμαλίας ἀποφεύγομεν διά τῶν σφονδύλων, καί τάς ἐκ τῆς τρίτης διά τῶν ρυθμιστῶν, τήν φύσιν καί τήν κατασκευήν τῶν ὁποίων θά σπουδάσωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἀφοῦ πρῶτον ἐξετάσωμεν τήν ἐν τῇ ταχύτητι ἐπερχομένην μεταβολήν κατά τήν περί σταθερόν ἄξονα περιστροφήν τοῦ ὀργάνου.

Ἀνωτέρω εὕρομεν τήν σχέσιν

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \mathcal{T}$$

ἔνθα m ἐμφαίνει τήν μᾶζαν σημείου τινός τοῦ σώματος.

v τήν ταχύτητα αὐτοῦ εἰς τόν χρόνον t

v_0 d^{α} d^{o} t_0

$\mathcal{T}$ Τήν ὁλικήν ἐργασίαν τῶν ἐπί τοῦ σώματος ἐφηρμοσμένων ἐξωτερικῶν δυνάμεων κατά τό χρονικόν διάστημα $t - t_0$.

Ἔστωσαν ω καί ω_0 αἱ περιστροφικαί ταχύτητες εἰς τούς χρόνους t καί t_0 ἔχομεν

$$v = \omega r \qquad\qquad v_0 = \omega_0 r$$

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m \omega^2 r^2 = \omega^2 \Sigma m r^2 \qquad \Sigma m v_0^2 = \Sigma m \omega_0^2 r^2 = \omega_0^2 \Sigma m r^2$$

καί ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\Sigma m r^2 = \mathcal{T}$$

ἤ

$$\frac{I}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \mathcal{T}$$

ἔνθα I εἶναι ἡ ῥοπή ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

Περὶ σφονδύλων

Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως ἔχομεν

$$\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2)=\frac{\tau}{I}$$

καὶ βλέπομεν ὅτι, διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς αὐτῆς ποσότητος ἐργασίας, ὅσῳ μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας I τοῦ περιστροφομένου σώματος τόσῳ μικροτέρα εἶναι ἡ ἐπερχομένη ἐν τῇ περιστροφικῇ ταχύτητι μεταβολή.

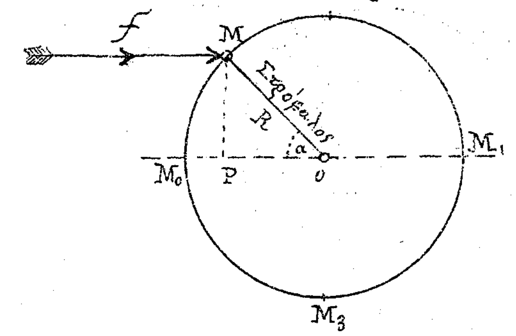
Τὴν ἰδιότητα ταύτην χρησιμοποιοῦμεν ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς, ἔνθα ὄχι μόνον ἡ ἀνθισταμένη ἀλλὰ καὶ ἡ κινητήριος δύναμις μεταβάλλονται διαρκῶς καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβόλου.

Διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὰς ἐπακολουθούσας μεταβολὰς τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τῆς ἀτράκτου, ἀρκεῖ κατὰ τὰ προηγούμενα ν' αὐξήσωμεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας αὐτῆς, ὅπερ ἐπιτυγχάνομεν διὰ τῆς ἐπ' αὐτῆς προσθήκης τοῦ σφονδύλου.

Οὗτος ἐναποταμιεύει τὸ περίσσευμα τῆς κινητηρίου δυνάμεως ὑπὸ μορφὴν κινητικῆς ἐνεργείας καὶ ἀποδίδει τοῦτο ἅμα ἡ καταβαλλομένη ἀντίστασις αὐξήσῃ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τῷ ὄντι, ὅτι ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν προτιθέμεθα νὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ μηχανῆς λειτουργούσης ἄνευ

ἐντονώσεως εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ ἔργον αὐτῆς ἴσον μὲ τ· ἡ περὶ τὸν ἄξονα O ῥοπὴ αὐτῆς εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση τῇ M.



Ἡ περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ῥοπὴ τῆς κινητηρίου δυνάμεως F εἶναι τοὐναντίον περιοδική. Ἐὰν παραλείψωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ βάκτρου τοῦ ἐμβόλου κλίσιν τοῦ διωστῆρος F εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν φορὰν καὶ ἡ ῥοπὴ αὐτῆς περὶ τὸν ἄξονα O εἶναι

$$F.MP=FR\,\eta\mu\alpha$$

μηδενίζεται λοιπὸν τοῦτο παρὰ τοῖς σημείοις M_0 καὶ M_1 εἰς τὰ πέρατα δηλ. τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβόλου, καὶ τὴν μεγαλειτέραν αὐτοῦ τιμὴν λαμβάνει παρὰ τοῖς σημείοις M_2 καὶ M_3 περὶ τὰ μέσα τῆς αὐτῆς διαδρομῆς.

Διὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν ἡ ἀνθισταμένη ἐργασία εἶναι $2\Pi M$ καὶ ἡ κινητήριος,

$$2\int_0^{\pi} FR\,\eta\mu\alpha=4FR$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ κίνησις τῆς μηχανῆς εἶναι περιοδικὴ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης περιόδου $v=v_0$ καὶ

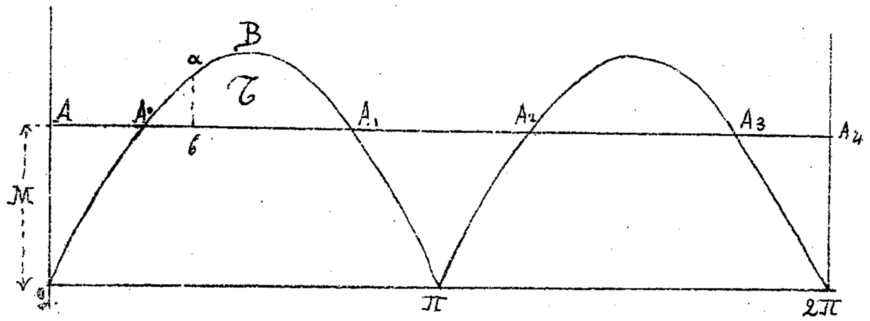
$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2-\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2=0$$

ὥστε καὶ $\tau_m=\tau_r$ ἢ $4FR=2\Pi M$ ὅθεν $M=\frac{2FR}{\Pi}$ ἐὰν χαράξωμεν τὰς δύο καμπύλας.

Μηχανολογία Πρωτοπαπαδάκη

$$y = M \quad \text{καί} \quad y = FR\,\eta\mu\alpha$$

ἔχομεν τό κάτωθι διάγραμμα.



καί βλέπομεν, ὅτι εἰς τά τέσσαρα σημεῖα A_0 A_1 A_2 καί A_3 αἱ κινητήριοι δυνάμεις ἰσορροποῦσι τάς ἀνθισταμένας δυνάμεις εἰς τά σημεῖα ταῦτα λοιπόν ἡ ταχύτης V διέρχεται διά μιᾶς μεγίστης (A_1 καί A_3) ἢ μιᾶς ἐλαχίστης (A_0 καί A_2) τιμῆς.

Τήν ἀντιστοιχοῦσαν τῷ ἐμβαδῷ A_0BA_1 ἐργασίαν ὑπολογίζομεν εὐκόλως ὡς ἐξῆς ἔχομεν

$$ab = FR\,\eta\mu\alpha - M = FR\,\eta\mu\alpha\,\frac{2FR}{\pi}$$

ἐργασία διά τήν περιστροφήν $d\alpha = FR\,\eta\mu\alpha\,d\alpha - \frac{2FR}{\pi}\,d\alpha$

ἐργασία διά τήν περιστροφήν $\alpha_1 - \alpha_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} FR\,\eta\mu\alpha\,d\alpha - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{2FR}{\pi}\,d\alpha = 2FR\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$
$\left(\frac{1}{2}\eta\mu\alpha - \frac{1}{\pi}\right)d\alpha.$

ἔνθα α_0 καί α_1 εἶναι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τοῖς σημείοις A_0 καί A_1 γωνίαι α.

ταύτας δ' εὑρίσκομεν θέτοντες

$$FR\,\eta\mu\alpha = M = \frac{2FR}{\pi} \quad \text{ἤ} \quad \eta\mu\alpha = \frac{2}{\pi}$$

ἐάν ἐκτελέσωμεν τά ὁλοκληρωτικά ἀθροίσματα εὑρίσκομεν

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\frac{1}{2}\eta\mu\alpha - \frac{1}{\pi}\right)d\alpha = 0.210$$

ὥστε

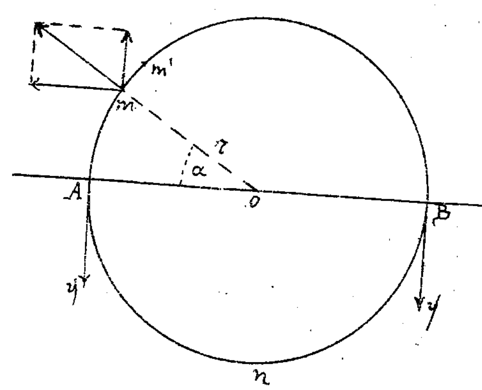
$$\frac{1}{2}\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)\Sigma m\tau^2 = 0.210 \times 2FR$$

ὑπολογισμός τοῦ σφονδύλου

Ἡ ἐπί τῆς περιστροφῆς τοῦ σφονδύλου ἀναπτυσσομένη κεντρόφυξ δύναμις δύναται νά ἐπιφέρῃ τήν ῥῆξιν τούτου.

Ἐάν θεωρήσωμεν διάμετρόν τινα τοῦ σφονδύλου τήν AB, βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐπί τῆς περιστροφῆς ἀναπτυσσομένη κεντρόφυξ δύναμις τείνει νά χωρίσῃ τό μέρος AmB ἐπί τοῦ μέρους AnB. Μόνη ἡ δύναμις τῆς συνοχῆς τῶν μορίων, τῆς ὁποίας ἡ συνισταμένη εἶναι y ἀνθίσταται εἰς τήν ῥῆξιν, ἥτις τείνει νά ἐπέλθῃ παρά τοῖς σημείοις A καί B.

Τήν δύναμιν ταύτην y προτιθέμεθα νά ὑπολογίσωμεν ἐνταῦθα.



ἔστω V ἡ ταχύτης τοῦ σημείου m

τ ἡ ἀκτίς om

p τό κατά μονάδα μήκους βάρος τοῦ σφονδύλου.

Ἡ κεντρόφυξ δύναμις τοῦ στοιχείου $mm' = ds$ εἶναι

$$\frac{p\,ds}{g}\,\frac{v^2}{\tau}$$

δυνάμεθα δέ νά τήν ἀναλύσωμεν εἰς δύο

τήν μίαν παράλληλον τῇ AB, ἥτις δέν ἐπηρεάζει ποσῶς τήν ἔντασιν τῆς y, καί τήν ἄλλην κάθετον τῇ AB, τῆς ὁποίας ἡ τιμή εἶναι

$$\frac{p\,ds}{g}\,\frac{v^2}{\tau}\,\eta\mu\alpha$$

ἔχομεν λοιπόν

$$2y=\int_0^\pi \frac{pds}{g}\frac{V^2}{r}\,ημ\,α=\frac{p}{g}\frac{V^2}{r}\int_0^\pi ds\,ημ\,α$$

ἀλλά ds ἡμ α εἶναι ἡ προσβολή τοῦ mm' ἐπί τῆς AB. ὥστε

$$\int_0^\pi ds\,ημ\,α=AB=2r$$

ὅθεν

$$y=\frac{p}{g}v^2$$

Ἔστω ἤδη S τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς A, δ τό εἰδικόν βάρος τοῦ μετάλλου καί T ἡ κατά μονάδα ἐμβαδοῦ ἀντοχή εἰς τήν ῥῆξιν. δέον νά ἔχωμεν

$$y=ST \text{ καί ἐπειδή } p=S\delta.$$

$$T=\delta\frac{V^2}{g}$$

ἐάν $V=30^m$ εὑρίσκομεν $y=0.71^K$ κατά χιλιοστόμετρον^2 διά στρόφαλον ἐκ χυτοσιδήρου

—

Ῥυθμισταί

—

Διά τῶν ῥυθμιστῶν ἐλαττοῦμεν ἤ αὐξάνομεν αὐτομάτως τήν κινητήριον δύναμιν τῆς μηχανῆς ἀναλόγως τῆς ἐντάσεως τῆς ἀντιστάσεως τήν ὁποίαν προτεθέμεθα νά ὑπερνικήσωμεν.

Ὁ μᾶλλον ἐν χρήσει ῥυθμιστής εἶναι ὁ τοῦ *Watt* συγκείμενος ἐκ δύο βαρέων σφαιρῶν AA κρεμαμένων εἰς τά ἄκρα δύο βραχιόνων OA, ἐνηρθρωμένων καί τούτων παρά τῷ σημείῳ O μετά τοῦ κατακορύφου ἄξονος OX φερομένου ὑπό περιστροφικῆς κινήσεως, τήν ὁποίαν τῷ μεταδίδει ἡ ἄτρακτος τῆς μηχανῆς. Ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἄξονος OX ἀναπτυσσομένη

κεντρόφυξ δύναμις ἀπομακρύνει τάς σφαίρας A τοῦ ἄξονος ox, καί ἐκ τῆς μετατοπίσεως τούτων ῥυθμίζεται καί ἡ εἰς τόν κύλινδρον εἰσαγωγή τοῦ ἀτμοῦ.

Ὑπολογισμός τοῦ ῥυθμιστοῦ τοῦ Watt. — Ὁ ὑπολογισμός τοῦ ῥυθμιστοῦ, ἐάν παραλειφθῇ ἡ προστριβή γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἑκάστη σφαῖρα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπήρειαν δύο δυνάμεων τοῦ βάρους αὐτῆς P καί τῆς ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ἀναπτυσσομένης κεντρόφυγος δυνάμεως $\frac{P}{g}\omega^2 r$

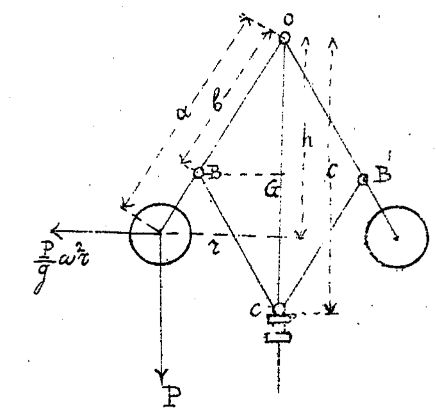
ἔχομεν δέ

ῥοπή τῆς P περί τό σημεῖον $O=Pr$

ῥοπή τῆς $\frac{P}{g}\omega^2 r$ $\;d^\circ\;$ $=\frac{P}{g}\omega^2 r h$

καί ἐκ τῆς ἰσορροπίας

$$\frac{P}{g}\omega^2 r h=Pr$$



ἤ

$$\omega^2\frac{h}{g}=1 \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{h}}$$

Ἔστω T ἡ διάρκεια μιᾶς περιόδου· τότε

$$T\omega=2\pi \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ἡ αὐτή δηλ. μέ τήν διάρκειαν τῆς αἰωρήσεως ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς μήκους h.

Ἔστω n ὁ ἀριθμός τῶν κατά ἕν λεπτόν τῆς ὥρας ἐκτελουμένων περιστροφῶν ἔχομεν

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \qquad n = \frac{6}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{29{,}88}{\sqrt{h}}$$

διὰ τὴν κατακόρυφον μετατόπισιν dh τῶν σφαιρῶν ὑπολογίζομεν τὴν κατακόρυφον μετατόπισιν τοῦ manchon ὡς ἑξῆς.

$OBCB$ εἶναι ῥόμβος, ὥστε

$$CO = c = 2OG \qquad \frac{OG}{h} = \frac{b}{a}$$

ὅθεν

$$OG = \frac{b}{a}h \qquad c = \frac{2b}{a}h \qquad dc = \frac{2b}{a}dh \qquad \frac{dc}{c} = \frac{dh}{h}$$

ἐκ τῆς σχέσεως δὲ $\frac{\omega^2 h}{g} = 1$ πορίζόμεθα

$$\frac{2\,d\omega}{\omega} = -\frac{dh}{h} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\,d\omega}{\omega} = -\frac{dc}{c}$$

Τέλος