ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟΝ ΣΧΟΛΕΙΟΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ

Παραδοθέντα κατὰ τὸ Σχολικὸν ἔτος 1887—1888

ΥΠΟ

Π. ΠΡΩΤΟΠΑΠΑΔΑΚΗ

Καθηγητοῦ παρὰ τῷ αὐτῷ Σχολείῳ

ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ

Ἐκ τοῦ Λιθογραφείου τοῦ Στρατιωτικοῦ Σχολείου

1888

Στοιχεῖα Κινηματικῆς

Ὁρισμός

Τὴν μετάβασιν ὑλικοῦ σώματος ἀπὸ τῆς θέσεως A_1 εἰς ἑτέραν A_2 δὲν δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν, εἰμὴ συνεχῆ καὶ ἀδιάκοπον. Τὸ σῶμα δηλαδή, ὅπερ ἐν ὡρισμένῳ χρόνῳ κατέχει τὴν θέσιν A_1, δὲν δύναται νὰ καθέξῃ τὴν θέσιν A_2 χωρὶς νὰ διαβῇ διὰ συνεχοῦς σειρᾶς μετατοπίσεων ἐν τῷ μεταξὺ τῶν θέσεων A_1 καὶ A_2 χώρῳ.

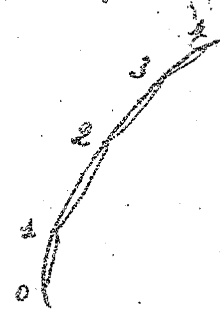
Κίνησις Τὴν συνεχῆ ταύτην σειρὰν τῶν μετατοπίσεων τοῦ σώματος καλοῦμεν κίνησιν αὐτοῦ καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς μηχανικῆς τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τῆς κινήσεως ἐν γένει τῶν σωμάτων, ἀνεξαρτήτως τῶν παραγουσῶν αὐτὴν δυνάμεων καλοῦμεν κινηματικήν.

Σῶμα στερεὸν καὶ ὑλικὸν σημεῖον Τὰ στερεὰ σώματα περὶ τῆς κινήσεως τῶν ὁποίων θὰ πραγματευθῶμεν ἐνταῦθα ἀποκλειστικῶς, θεωροῦμεν ὡς συγκείμενα ἐξ ὑλικῶν μορίων ἐλαχίστων ἢ ὑλικῶν σημείων συνδεδεμένων πρὸς ἄλληλα οὕτως ὥστε αἱ σχετικαὶ αὐτῶν ἀποστάσεις ἐν τῷ διαστήματι νὰ μένωσι σταθεραὶ καὶ ἀμετάβλητοι.

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεως, ἣν κατέχουσιν ἐν τῷ διαστήματι τὰ ὑλικὰ σημεῖα σώματος στερεοῦ, προσδιορίζει καὶ τὴν θέσιν αὐτοῦ τοῦ σώματος. Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν σπουδὴν τῆς κινηματικῆς διὰ τῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου, δι' ἧς διευκολύνεται κατόπιν ἡ σπουδὴ τῆς γενικῆς κινήσεως οἱουδήποτε.

στερεοῦ σώματος.

Τροχιά Σημεῖον κινούμενον διαγράφει γραμμήν (<u>τροχιά τοῦ κινητοῦ</u>) τήν ὁποίαν, ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διά πολυγωνικῆς γραμμῆς 1,2,3,4.... ἀπείρου ἀριθμοῦ πλευρῶν ἐλαχίστου μεγέθους.



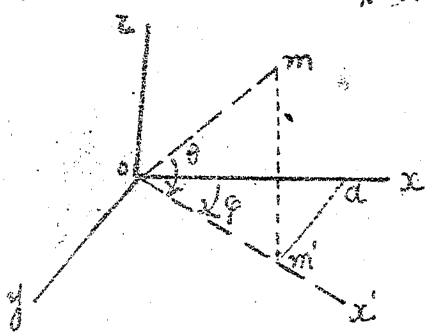
σχ. 1.

Φορά κινήσεως. <u>Φοράν τῆς κινήσεως</u> τοῦ κινητοῦ, ἐν ᾗ στιγμῇ τοῦτο συμπίπτει μέ τό σημεῖον 2 τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ καλοῦμεν τήν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς 2,3 (ἥτις ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν συμπίπτει μέ τήν διεύθυνσιν τῆς παρά τό τό σημεῖον 2 ἐφαπτομένης), ἥν διαγράφει τό κινητόν ἀφ' οὗ διέλθη τοῦ σημείου 2.

Σημείωσις. Ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις τῶν σημείων 1, 2, 3... τῆς τροχιᾶς δύναται νά προσδιορισθῇ διά πολλῶν συστημάτων συντεταγμένων, ὧν τά μᾶλλον ἐν χρήσει εἶναι τ' ἀκόλουθα δύο.

1ον) Τό τῶν εὐθυγράμμων κυρίως ὀρθογωνίων συντεταγμένων, ἐν αἷς τό σημεῖον m προσδιορίζεται διά τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ

Σχ. 2.



$x = oa \quad y = am' \quad z = m'm$

ἀπό τριῶν ἐπιπέδων

$zoy \quad xoz \quad yox$

καθέτων πρός ἄλληλα.

τάς συντεταγμένας $x\,y\,z$ δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς ποσότητος t (τοῦ χρόνου)

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad z=\chi(t)$$

2) Τό σημεῖον m δύναται νά προσδιορισθῇ καί διά τῆς ἀκτῖνος $om=\rho$, τῆς γωνίας $\widehat{xox'}=\varphi$ καί τῆς γωνίας $\widehat{mom}=\theta$.

Τό σύστημα τοῦτο καλεῖται σφαιρικόν σύστημα συντεταγμένων,

καί μεταβαίνομεν ἀπό τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον διά τῶν τύπων

$$x=\rho\ \text{συν.}\theta\ \text{συν}\varphi \qquad y=\rho\ \text{συν}\theta\ \text{ημ.}\varphi \qquad z=\rho\ \text{ημ.}\theta$$

ἐν ᾗ περιπτώσει φ ἰσοῦται τῷ μηδενί ἔχομεν τάς πολικάς λεγομένας συντεταγμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoz

$$x=\rho\ \text{συν.}\theta \qquad z=\rho\ \text{ημ.}\theta\ .$$

Τό μῆκος ds τοῦ τόξου 1,2 προσδιορίζεται διά

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=dt\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\,\text{συν}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Ἡ συνδέουσα δύο διαδοχικά σημεῖα 1, 2 τῆς τροχιᾶς εὐθεῖα καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς παρά τό σημεῖον 1.

Τό ὑπό δύο διαδοχικῶν ἐφαπτομένων 1.2, 2.3 προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον καλεῖται ἐγγύτατον τῇ τροχιᾷ ἐπίπεδον παρά τό σημεῖον 2. τό τόξον 1-2-3 εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ. (Ἡ χαρακτηριστική τοῦ παρά τό σημεῖον 2 ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εὐθεῖα συμπίπτει μέ τήν παρά τό αὐτό σημεῖον ἐφαπτομένην)

Ἡ τροχιά εἶναι,

<u>Εὐθύγραμμος</u> ἐάν ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως εἶναι σταθερά, δηλαδή ἐάν αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς τροχιᾶς εἰς τά διάφορα αὐτῆς σημεῖα συμπίπτωσιν ἀλλήλαις.

<u>Καμπύλη</u> ἐάν αἱ διαδοχικαί ἐφαπτόμεναι 1.2, 2.3 σχηματίζουσι γωνίαν φ.

<u>Ἐπίπεδος</u> ἐάν ἡ φορά τῆς κινήσεως ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ εὑρίσκεται ἐν τῷ αὐτῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ

<u>Στρεβλή</u> ἐάν τά διαδοχικά ἐγγύτατα ἐπίπεδα 1.2.3, 2.3.4 σχηματίζωσι γωνίαν τήν ψ.

Αἱ παρά τό σημεῖον 1 κάθετοι τῇ πλευρᾷ 1.2 καλοῦνται κάθετοι τῇ τροχιᾷ παρά τό σημεῖον 2, καί προσδιορίζουσι τό κάθετον τῇ τροχιᾷ παρά τό σημεῖον 1 ἐπίπεδον.

Τό κάθετον καί ἐγγύτατον ἐπίπεδον διά τῆς τομῆς των προσδιορίζουσι τήν ἀντιστοιχοῦσαν κάθετον τῇ τροχιᾷ παρά τό σημεῖον 1.

Ἡ καμπυλότης τῆς τροχιᾶς παρά τό σημεῖον 1 μετρεῖται διά τοῦ λόγου $\frac{\varphi}{ds} = k$.

Ἡ στρέψις τῆς τροχιᾶς παρά τό σημεῖον 1 μετρεῖται διά τοῦ λόγου $\frac{\psi}{ds} = \tau$. Ὁ ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ διά τῶν σημείων 1, 2, 3 διερχόμενος κύκλος καλεῖται ἐγγύτατος τῇ καμπύλῃ κύκλος παρά τό σημεῖον 2. Ὁ κύκλος οὗτος ἐφάπτεται τῇ τροχιᾷ παρά τό σημεῖον 2 καί ἔχει τήν αὐτήν καμπυλότητα. Τό κέντρον αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐπί τῆς πρωτευούσης καθέτου καί καλεῖται κέντρον καμπυλότητος παρά τό αὐτό σημεῖον ἡ ἀκτίς του ἰσοῦται μέ $\frac{1}{k} = R$ καί καλεῖται ἀκτίς καμπυλότητος.

Ἡ ἀπό τοῦ κέντρου τοῦ παρά τό σημεῖον 2 ἐγγυτάτου κύκλου, ἐπί τοῦ παρά τό αὐτό σημεῖον ἐγγυτάτου ἐπιπέδου κάθετος καλεῖται ἄξων τῆς καμπυλότητος (ὁ ἄξων οὗτος συμπίπτει μέ τήν χαρακτηριστικήν εὐθεῖαν τοῦ καθέτου ἐπιπέδου).

Κεφάλαιον 1.

Περί κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου

Ἡ σπουδή τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου σκοπεῖ,

1ον Τόν προσδιορισμόν τῆς ὑπό τοῦ κινητοῦ διαγραφομένης τροχιᾶς καί,

2ον Τῆς τροχιᾶς προσδιορισθείσης, τήν εὕρεσιν τῆς θέσεως, ἥν κατέχει τό κινητόν ἐπ' αὐτῆς ἐν ὡρισμένῃ τινί στιγμῇ, ἢ κατάπαλιν, τόν προσδιορισμόν δηλαδή τοῦ χρόνου κατά τόν ὁποῖον διέρχεται τό κινητόν δι' ὡρισμένου σημείου τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ.

ἐξίσωσις τῆς κινήσεως ἐπί τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ

Τό δεύτερον τοῦτο πρόβλημα λύεται τελείως ἐάν, προσδιορισθείσης τῆς τροχιᾶς, γνωρίζωμεν καί τήν σχέσιν (<u>ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως ἐπί τῆς τροχιᾶς</u>)

$$(1)\quad s = f(t)$$

τήν συνδέουσαν τά τόξα αὐτῆς 01, 02, 03, 04 .... ἅτινα παριστῶμεν διά τοῦ s (ὑπολογιζόμενα ἀπό τοῦ σταθεροῦ σημείου 0, θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τούτου) πρός τά χρονικά διαστήματα t_1, t_2, t_3, t_4 ... ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν ... (1)

Ἡ σχέσις (1) προσδιορίζει, ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ, τό σημεῖον τῆς τροχιᾶς μεθ' οὗ συμπίπτει τό ἐπ' αὐτῆς κινούμενον κινητόν, ὅταν καί αὕτη εἶναι προσδιωρισμένη, ὅταν δηλαδή, (θεωροῦντες, ὅπως εἴπομεν τοῦτο ἀνωτέρω, τήν τροχιάν, ὡς συγκειμένην ἐξ εὐθυγράμμων μερῶν ἀπείρως μικρῶν, ὧν ἕκαστον διανύεται ἐν ἴσῳ χρονικῷ διαστήματι dt) δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ t, τήν φοράν καί τό μέγεθος τῆς διαγραφείσης πλευρᾶς 1, 2, κατά τήν διάρκειαν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. Τά μεγέθη τῶν πλευρῶν τοῦ ἀντικαθιστῶντος τήν τροχιάν εὐθυγράμμου πολυγώνου (σχ. 1.) συνδέονται προφανῶς μέ τήν κατά τό μᾶλλον καί ἧττον ταχεῖαν κίνησιν, μεθ' ἧς φέρεται τό κινητόν διερχόμενον διά τῶν σημείων 1, 2, 3.., καί ἡ διεύθυνσις τῶν πλευρῶν τούτων συμπίπτει μέ τήν φοράν τῆς κινήσεως, καί ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς.

Ἐν συνόψει, ὁ προσδιορισμός τῆς τροχιᾶς ἀπαιτεῖ τήν γνῶσιν <u>τῆς ταχύτητος</u> τοῦ κινητοῦ καί τῆς φορᾶς τῆς κινήσεως.

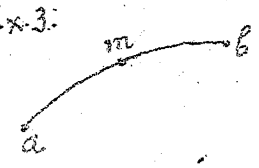
(1) Σημ. Ἐν τῇ σχέσει $s = f(t)$, s καί t δέν παριστῶσιν αὐτά τά τόξα καί τόν χρόνον, διότι δέν δυνάμεθα νά συγκρίνωμεν δύο ποσότητας διαφόρου φύσεως, οἷαι εἰσί τό διάστημα καί ὁ χρόνος. s καί t εἶναι δύο ἀριθμοί ἐμφαίνοντες ὁ μέν s τό πολλα- [illegible]

§ 2. Περί ταχύτητος

Είπομεν ήδη ανωτέρω τί εννοούμεν μέ τήν φράσιν φορά κινήσεως, τήν οποίαν ονομάζομεν αδιακρίτως καί φοράν ταχύτητος, αφού πρώτον ορίσωμεν ακριβώς τήν έννοιαν, ήν αποδίδομεν εις τήν λέξιν ταχύτης, καί υποδείξωμεν τίνι τρόπω, καταμετρούμεν αυτήν καί παριστώμεν δι' αριθμού τινός, τόν οποίον μόνον δυνάμεθα νά λάβωμεν υπ' όψει εις τούς υπολογισμούς, ών θά κάμωμεν χρήσιν τή σπουδή της κινήσεως.

Τήν πρώτην ιδέαν της κατά τό μάλλον ή ήττον ταχείας κινήσεως του κινητού m κατά τήν μετάβασιν αυτού από του σημείου α εις τό σημείον β, σχηματίζομεν εκ της παραβολής του μήκους amb του διαγραφέντος υπ' αυτού τόξου πρός τόν χρόνον $t-t_0$, εν ώ τούτο διηνύθη. καί δυνάμεθα νά λάβωμεν τόν λόγον τούτον $\frac{\text{τόξον } amb}{\text{χρόνον } t-t_0}$ ώς μέτρον της ταχύτητος του κινητού κατά τήν μετάβασιν αυτού από του σημείου α εις τό σημείον β. εάν δέ τό κινητόν m διέτρεξεν ομοιομόρφως καί ισοταχώς τό τόξον amb, τουτέστιν, εάν τά εν ίσοις χρόνοις διανυόμενα διαστήματα είναι ίσα, οπουδήποτε της τροχιάς amb καί άν θεωρηθώσι ταύτα, ή ταχύτης του κινητού είναι σταθερά καί ή σχέσις ή συνδέουσα τά διανυόμενα διαστήματα πρός τούς χρόνους εν οίς ταύτα διηνύθησαν λαμβάνει τήν απλουστάτην μορφήν,

Σχ. 3.



$$s = s_0 + v(t-t_0)$$

γον των διανυομένων τόξων πρός τήν καταμετρούσαν αυτά μονάδα, [τό μέτρον], ό δέ t τόν λόγον των κατά τήν πορείαν του κινητού παρερχομένων χρονικών διαστημάτων πρός τήν καταμετρούσαν αυτά μονάδα (τό δευτερόλεπτον).

εν ή καταφαίνεται αμέσως, ότι, εν τή περιπτώσει ταύτη, τά διανυόμενα επί της τροχιάς τόξα $s-s_0$ μεταβάλλονται ομοιομόρφως, προϊόντος του χρόνου, αυξανόμενα-ελαττούμενα κατά μήκη ίσα εν ίσοις χρονικοίς διαστήμασι, εάν η ποσότης v είναι θετική-αρνητική, καί όντα διαρκώς ανάλογα των χρόνων εν οίς ταύτα διηνύθησαν. εάν δέ θεωρήσωμεν τό μήκος του διανυθέντος τόξου σ κατά τόν χρόνον $t+1$, βλέπομεν ότι τούτο ισούται μέ $s-v$,

$$\sigma = s_0 + v(t-t_0+1) = s_0 + v(t-t_0) + v = s+v$$

ούτως ώστε η αύξησις-ελάττωσις, ήν υφίστανται εν μιά μονάδι χρόνου τά διανυόμενα διαστήματα, ισούται τή ποσότητι v ήτις διά τόν λόγον τούτον δύναται νά ληφθή ώς μέτρον της ταχύτητος του κινητού εν τή απλουστάτη ταύτη κινήσει ήν ονομάζομεν ομοιόμορφον ή ισοταχή κίνησιν.

Τήν ποσότητα $v = \frac{s-s_0}{t-t_0}$ ήτις μάς χρησιμεύει ώς μέτρον απλώς της ισοταχούς κινήσεως, καλούμεν πρός συντομίαν ταχύτητα του κινητού.

Ούτως ώστε, όταν λέγωμεν, ότι η ταχύτης κινουμένου σημείου ισούται μέ ± 5, εννοούμεν, ότι τό κινητόν φέρεται υπό κινήσεως, δι' ής τά επί της τροχιάς διανυόμενα διαστήματα αυξάνουσιν-ελαττούνται κατά πέντε μέτρα εν χρονικώ διαστήματι ενός δευτερολέπτου.—

Ταχύτης εν τή μεταβαλλομένη ή ανισοταχεί κινήσει.

3) Άλλ' εν τώ μεταξύ τούτω η ταχύτης του κινητού δυνατόν νά μεταβάλληται από σημείου εις σημείον της τροχιάς αυτού, καί τότε ο λόγος $\frac{s-s_0}{t-t_0}$ μετρεί τήν μέσην μόνον ταχύτητα, μεθ' ής φέρομεν έτερον κινητόν, θά διέγραφε εν τώ αυτώ χρόνω μετά πρώτου, τό μήκος του τόξου amb, χωρίς όμως νά συμπίπτη

μετ' αὐτοῦ διαρκῶς κατά τήν ἀπό τοῦ σημείου a εἰς τό b μετάβασιν, οὐχί δέ καί τήν ἀπόλυτον ταχύτητα τοῦ κινητοῦ, καθ' ἥν στιγμήν τοῦτο συμπίπτει μετά σημείου οἱουδήποτε m τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ amb, ἧς τό μέτρον δέον νά ζητήσωμεν ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς κινήσεως $s=f(t)$, ἥτις συνδέει τά διανυόμενα διαστήματα πρός τούς χρόνους ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ σχέσις $s=f(t)$ δέν εἶναι τόσω ἁπλῆ, ὅσω ἡ προσδιορίζουσα τήν ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσαν ὁμαλόμορφον ἤ ἰσοταχῆ κίνησιν, ἡ ἐξεύρεσις τῆς ποσότητος, ἥτις καταμετρεῖ τήν ταχύτητα μεθ' ἧς φέρεται τό κινητόν ἐν ὡρισμένῳ τινί σημείῳ a_1 τῆς τροχιᾶς του καθίσταται κάπως δυσκολωτέρα, καί ἵνα ὁρίσωμεν ἀκριβῶς τί ἐννοοῦμεν μέ τήν φράσιν *ταχύτης τοῦ κινητοῦ*, καθ' ἥν στιγμήν τοῦτο διέρχεται διά τοῦ σημείου 1 τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, ἀναγκαζόμεθα νά προστρέξωμεν εἰς τήν ἀρχήν τῆς ἀδρανείας, ἥτις μᾶς διδάσκει, ὅτι: *ὑλικόν τι σῶμα ἠρεμοῦν, δέν δύναται νά τεθῇ ἀφ' ἑαυτοῦ εἰς κίνησιν, ἄνευ τῆς ἐπιδράσεως ἐξωτερικῶν αἰτιῶν, αἵτινες ἐνεργοῦσαι ἐπ' αὐτοῦ τό θέτουσιν εἰς κίνησιν, ἤ τροποποιοῦσι τήν ἤδη ὑπάρχουσαν διά συνεχοῦς μεταβολῆς τῆς φορᾶς καί τοῦ μεγέθους τῆς ταχύτητος, ἐάν δέ αἱ ἐξωτερικαί αὗται αἰτίαι παύσωσιν ἐνεργοῦσαι, καθ' ἥν στιγμήν τό κινητόν διέρχεται διά τοῦ σημείου 1 τῆς τροχιᾶς του, θά ἐξακολουθήσῃ τοῦτο κινούμενον ἐπί τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς παρά τό σημεῖον 1 ὁμοιομόρφως καί ἰσοταχῶς.*

Τήν ταχύτητα τῆς ἰσοταχοῦς ταύτης κινήσεως, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ταχύτητι μεθ' ἧς τό κινητόν διέτρεξε τό τόξον 1,2 καί ἥτις μετρεῖται προφανῶς διά τοῦ λόγου $\frac{ds}{dt}$ καλοῦμεν *ταχύτητα* τοῦ κινητοῦ καθ' ἥν στιγμήν τοῦτο διέρχεται διά

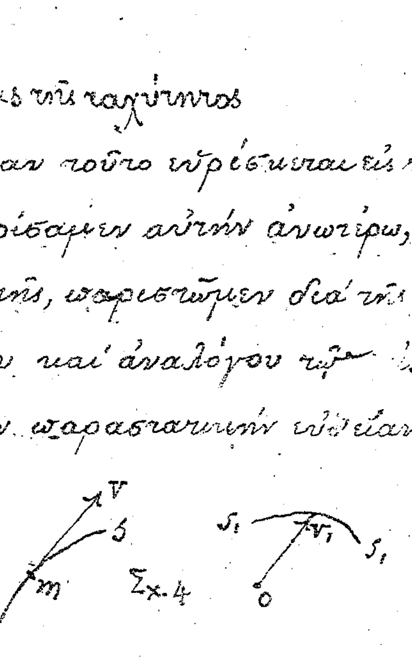
τοῦ σημείου 1 τῆς τροχιᾶς του, καί ἔχομεν,

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t)$$

Ἀλλά ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τό μῆκος $ds = v\,dt$ τοῦ τόξου 1,2, οὐχί δέ καί τήν διεύθυνσιν αὐτοῦ, ἥτις μᾶς εἶναι ἀναγκαία διά τόν ἐντελῆ προσδιορισμόν τῆς τροχιᾶς, καί περί τῆς ὁποίας θά πραγματευθῶμεν κατωτέρω.

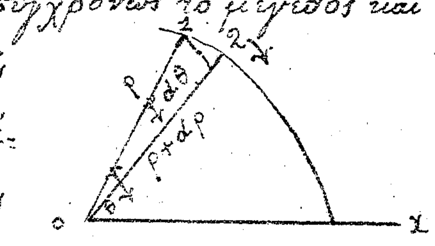
Γεωμετρική παράστασις τῆς ταχύτητος

4) Τήν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τό σημεῖον m τῆς τροχιᾶς του, ὅπως ὡρίσαμεν αὐτήν ἀνωτέρω, ὡς πρός τό μέγεθος καί τήν φοράν αὐτῆς, παριστῶμεν διά τῆς εὐθείας mv ἤ διά τῆς ov, παραλλήλου καί ἀναλόγου τῷ ἀλγεβρικῷ αὐτῆς μεγέθει, ἥν ὀνομάζομεν παραστατικήν εὐθεῖαν τῆς *ταχύτητος* τοῦ σημείου m διατρέχοντος τήν τροχιάν s τό σημεῖον v διαγράφει ὡρισμένην καμπύλην s_1, τήν ὁποίαν ὁ Ἄγγλος γεωμέτρης Hamilton ὠνόμασεν *ὁδογράφον καμπύλην* τοῦ κινητοῦ m. Ἡ καμπύλη αὕτη, προσδιορίζει τῷ ὄντι, ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ διά τῆς ἀκτῖνος OV, τό μέγεθος καί τήν φοράν τῆς ταχύτητος τοῦ κινη-



Σχ. 4

Σημ. Διά τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγάδων ποσοτήτων, δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν συγχρόνως τό μέγεθος καί τήν φοράν τοῦ τόξου 1.2. Ἔστωσαν πρός τοῦτο ρ καί θ αἱ πολικαί συντεταγμέναι τοῦ σημείου 1 τῆς τροχιᾶς ἡ ἀκτίς 0.1 προσδιορίζεται ὡς πρός τό μῆκος καί τήν φοράν αὐτῆς διά τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ $\rho e^{i\theta}$ οὗτινος ἡ διαφορική $e^{i\theta}[d\rho+i\rho\, d\theta]$ παριστᾷ κατά τό μέγεθος καί τήν φοράν τό τόξον 1, 2. οὕτ...



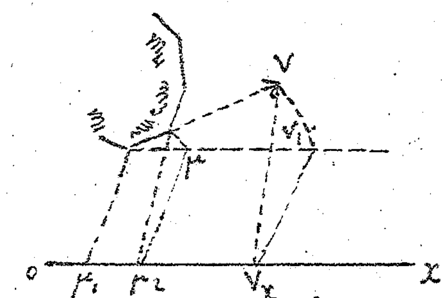
[illegible] κινητικῆς

τοῦ m, τά στοιχειώδη τόξα τῆς ὁδογράφου καμπύλης παριστῶσι τήν γεωμετρικήν διαφορικήν $\frac{dv}{dt}$ τῆς ταχύτητος, ἥτις ὡς θά ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, χρησιμεύει πρός καταμέτρησιν τῆς βαθμιαίας καί συνεχοῦς μεταβολῆς τοῦ μήκους καί τῆς φορᾶς αὐτῆς τῆς ταχύτητος.

Μία ἐκ τῶν ὡραιοτέρων ἰδιοτήτων τῆς ὁδογράφου καμπύλης ἥν ἀρκοῦμαι νά προτείνω ὡς ἄσκησιν, εἶναι, ὅτι ἡ ὁδογράφος καμπύλη τῶν περί τόν Ἥλιον κινουμένων πλανητῶν εἶναι κύκλος.

Προβολή τῆς κινήσεως σημείου τινός ἐπί εὐθείας — ἐπιπέδου γραμμῆς.

Σχ. 5



5) Ἔστω $m_1, m_2, m_3, m_4 \ldots$ ἡ ὑπό τοῦ κινητοῦ m διαγραφομένη τροχιά, καί $m_1 v$ ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ παρά τό σημεῖον m_1. προβάλλοντες τό σχῆμα παραλλήλως ἐπιπέδῳ τινί $m_2 \mu \mu_2$ ἐπί τοῦ ἄξονος - ἐπιπέδου ox, βλέπομεν, ὅτι, ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $m_1 \mu m_2$ καί $m_1 v_1 v$ ἔχομεν

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 v} = \frac{m_1 \mu}{m_1 v_1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 V_x}$$

ἀλλά

$$m_1 m_2 = m_1 v . dt$$

ὥστε

$$dt = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 v_x} \text{ ἤ } \mu_1 \mu_2 = \mu_1 V_x . dt$$

$\mu_1 V_x$ εἶναι λοιπόν ἡ παραστατική εὐθεῖα τοῦ ἐπί τῆς εὐθείας — τοῦ ἐπιπέδου ox κινουμένου κινητοῦ μ, ὅπερ εἶναι ἡ προβο-

ἐάν ἀντί τῆς Ἀλγεβρικῆς διαφορικῆς ds ἥτις μᾶς δίδει τό μέγεθος ἁπλῶς τῆς ταχύτητος λάβωμεν τήν γεωμετρικήν διαφορικήν ἔχομεν συγχρόνως τό μέγεθος καί τήν φοράν τῆς ταχύτητος.-

λή τοῦ κινητοῦ m, ἐπί τῆς εὐθείας καί τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἀλλά καί ἡ εὐθεῖα $\mu_1 V_x$ εἶναι ἡ προβολή τῆς παραστατικῆς εὐθείας $m_1 v$ τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ παρά τό σημεῖον m_1 ὅθεν ἐξάγεται ὅτι

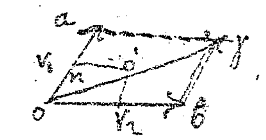
ἡ ταχύτης v_x τῆς ἐπί τοῦ ἄξονος ox προβολῆς μ τοῦ κινητοῦ m ἰσοῦται τῇ προβολῇ v συν. α τῆς ταχύτητος V τοῦ κινητοῦ m

$$V_x = V \text{ συν. } \alpha \text{ ἤ } = \frac{dx}{dt} \text{ συν. } \alpha \qquad (1)$$

Ἐκ τούτου καί ἐκ τοῦ ὅτι, τά ἀποτελέσματα τῆς ἐνεργείας διαφόρων δυνάμεων ἐπί ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σώματος, εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς συγχρόνου ἤ μεμονωμένης ἐνεργείας τῶν δυνάμεων τούτων, ἕπεται, ὅτι

Σύνθεσις ταυτοχρόνων ταχυτήτων

6) Ἐάν κινητόν σημεῖον, τείνει ταυτοχρόνως νά κινηθῇ κατά δύο διαφόρους διευθύνσεις oa καί ob, μέ ταχύτητας v_1, v_2 παριστανομένας διά τῶν εὐθειῶν oa καί ob, τό κινητόν, ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ συγχρόνου ἐνεργείας τῶν δύο ταχυτήτων v_1 καί v_2 θ' ἀκολουθήσῃ πράγματι τήν διαγώνιον oγ τοῦ παραλληλογράμμου oaγb μέ ταχύτητα V τῆς ὁποίας ἡ παραστατική εὐθεῖα εἶναι oγ.



Ἰδοῦ ὄντι, ἐάν ἐπί τοῦ κινητοῦ ἐνήργει μόνη ἡ ταχύτης V_1 κατά τό χρονικόν διάστημα dt θά διέτρεχε τοῦτο τό μῆκος $on = v_1 dt$ ἐάν ἤδη, εἰς ἥν εὑρίσκεται θέσιν n τό κινητόν, ἐπενεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ ἡ ταχύτης v_2 θά διατρέξῃ τοῦτο κατά τό αὐτό χρονικόν διάστημα dt τό μῆκος $no' = v_2 dt$ παραλλήλως τῇ εὐθείᾳ ob, οὕτως ὥστε, ἡ πραγματική θέσις τοῦ κινητοῦ μετά τό πέρας τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἔσται ό καί ἐπειδή

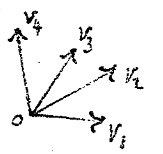
$$\frac{on}{no'} = \frac{v_1}{v_2} \quad \frac{oa}{ob}$$

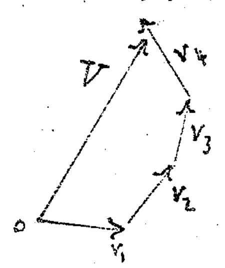
(1) Σημ. ἐκ τούτου ὅτι $\frac{ds}{dt}$ συν. $\alpha = \frac{dx}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ συν. $\beta = \frac{dy}{dt}$. $\frac{ds}{dt}$ συν. $\gamma = \frac{dz}{dt}$ ἤγουν.

ἕπεται ὅτι ἡ φορά τῆς ταχύτητος συμπίπτει μέ τήν διαγώνιον Oγ τοῦ παραλληλογράμμου Oαγβ.

Λέγω δ' ὅτι, καί τό ἀλγεβρικόν αὐτῆς μέγεθος, ἔχει ὡς παραστατικήν εὐθεῖαν τήν διαγώνιον Oγ.

Τῷ ὄντι ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν, ὅτι, ἡ προβολή τοῦ κινητοῦ O ἐπί τῆς εὐθείας Oα, συμπίπτει διαρκῶς μέ τι σημεῖον κινούμενον ἐπί τῆς εὐθείας ταύτης, μέ ταχύτητα ἴσην τῇ ἐπί τῆς εὐθείας Oα προβολῇ τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ O, ἀλλ' ἡ ταχύτης τοῦ σημείου η παρίσταται διά τῆς εὐθείας Oα, ἥτις εἶναι ἡ προβολή τῆς Oγ παραλλήλως τῇ Oβ. κατά συνέπειαν ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ O εἶναι ἡ διαγώνιος Oγ τοῦ παραλληλογράμμου Oαγβ. αἱ ταχύτητες V_1 καί V_2 προστίθενται λοιπόν γεωμετρικῶς, καί δυνάμεθα νά εἴπωμεν συμβολικῶς, ὅτι αἱ ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπενεργοῦσαι ταχύτητες $V_1, V_2, V_3, V_4 \ldots$ προστίθενται γεωμετρικῶς καί δίδουσιν ἄθροισμα τήν ταχύτητα V. δηλαδή ἄν παραστήσωμεν διά τῶν γεωμετρικῶν ποσοτήτων





$$x_1+\tau_{-1}y_1,\ x_2+\tau_{-1}y_2,\ x_3+\tau_1-y_3,\ x_4+\tau_1-y_4\cdots$$

τάς παραστατικάς εὐθείας τῶν ταχυτήτων Ov_1, Ov_2, Ov_3, Ov_4 τό ἀλγεβρικόν αὐτῶν ἄθροισμα

$$[x_1+x_2+x_3+x_4\cdots]+\tau_{-1}[y_1+y_2+y_3+y_4\cdots]$$

τες εἰς τό τετράγωνον καί προσθέτοντες βλέπομεν ὅτι

$$[\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

καί ἐπειδή $\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma=1$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ὅπερ ἀποδεικνύει τό θεώρημα τῆς συνθέσεως τῶν ταχυτήτων.

παριστᾷ τήν εὐθεῖαν V συνισταμένην τῶν $v_1\, v_2\, v_3\, v_4$, καί πρός συντομίαν περί τήν ἔκφρασιν λέγομεν.

Ἡ συνισταμένη V οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ταχυτήτων $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots$ ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν.

Τιμή τῆς ταχύτητος ἐκφραζομένη διά τῶν εὐθυγράμμων ἤ σφαιρικῶν συντεταγμένων καί διάφοροι συνιστῶσαι αὐτῆς. — Ζ.) Ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, τό σημεῖον τοῦ διαστήματος μεθ' οὗ συμπίπτει τό κινητόν, ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ, δύναται νά προσδιορισθῇ διά τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων αὐτοῦ x, y, z ἤ διά τῶν σφαιρικῶν ν, θ, φ καί ἐκ τῶν προηγουμένων καταφαίνεται, ὅτι, ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ συστήματι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος παραλλήλως τοῖς ἄξοσι Ox, Oy, Oz, εἰσίν

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

τό μέγεθος τῆς ταχύτητος προσδιορίζεται διά τοῦ τύπου

$$V=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

καί ἡ φορά αὐτῆς διά τῶν τύπων

$$V\cdot\text{συν}\,\alpha=\frac{dx}{dt},\quad V\,\text{συν}\,\beta=\frac{dy}{dt},\quad V\cdot\text{συν}\,\gamma=\frac{dz}{dt}$$

οἵτινες προσδιορίζουσι τάς ὑπό τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος καί τῶν τριῶν ἀξόνων O(x, y, z) ὁριζομένας γωνίας α β γ.

Ἐν τῷ σφαιρικῷ συστήματι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος εἰσίν $\frac{dz}{dt}$ παραλλήλως τῇ ἀκτῖνι OM, ἥτις καί ὀνομάζεται (vitesse de glissement) ταχύτης ὀλισθήσεως $\tau\frac{d\theta}{dt}$ παραλλήλως τῇ καθέτῳ ἐπί τῆς ἀκτῖνος OM ἐν τῷ ἐπιπέδῳ MOZ, ἥτις ὀνομάζεται περιστροφική ταχύτης (vitesse de circulation) καί $z\,\text{συν}\,\theta\frac{d\varphi}{dt}$ καθέσεως ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο ὡρισμένων προσδιοριζομένου ἐπιπέδου. Τὴν παράγωγον $\frac{d\theta}{dt}=\omega$ τῆς γωνίας θ ὀνομάζομεν γωνιαίαν ταχύτητα (vitesse angulaire) ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος ἐνταῦθα προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$v=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\,\eta\mu^2\theta\,\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Ἀνακεφαλαίωσις τῶν ἀφορώντων τὴν ταχύτητα.

8.) Ἀνακεφαλαιοῦντες ἤδη τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ ἀποδειχθέντα βλέπομεν, ὅτι

ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $s=f(t)$ τὴν σχέσιν τὴν συνδέουσαν τὰ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ διανυόμενα τόξα πρὸς τοὺς χρόνους, ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν.

1ον.— Ἡ ταχύτης V τοῦ κινητοῦ ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ μετρεῖται διὰ τοῦ λόγου $\frac{ds}{dt}$, τοῦ ἐν τῷ βραχυτάτῳ χρονικῷ διαστήματι dt διανυθέντος τόξου ὡς πρὸς τὸν χρόνον τοῦτον, καὶ ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀλγέβρας ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον $f'(t)$ τῆς συναρτήσεως $f(t)$.

$$V=\frac{ds}{dt}=f'(t).$$

2ον.— Ἡ ἐπὶ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου προβολὴ τῆς ταχύτητος V σημείου κινουμένου ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι ἰσοῦται τῇ ταχύτητι V_1 τῆς διατρεχούσης τὸν ἄξονα ἢ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αὐτοῦ, ἢ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha$$

3ον.— Ἐὰν ὑλικὸν σημεῖον τείνῃ νὰ κινηθῇ συγχρόνως κατὰ δύο διαφόρους διευθύνσεις Oα καὶ Oβ μὲ ταχύτητας ἴσας ταῖς

εὐθείαις ταύταις, ἡ προκύπτουσα φορὰ τῆς κινήσεώς του ἔσεται κατὰ τῆς διαγωνίου τοῦ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Oα καὶ Oβ ὁριζομένου παραλληλογράμμου καὶ τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος ἰσοῦται τῇ διαγωνίῳ ταύτῃ. Καὶ ἐν γένει ἡ συνισταμένη V οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ταχυτήτων $v_1, v_2, \dots v_4$, μεθ' ὧν φέρεται ταυτοχρόνως κινητόν τι σημεῖον, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν.

4ον.— Ἐὰν ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ προσδιορίζηται δι' εὐθυγράμμων συντεταγμένων x y z αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος $\frac{ds}{dt}$ παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν εἶναι

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

τὸ δὲ μέγεθος καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς ἐν συστήματι ὀρθογωνίων συντεταγμένων, προσδιορίζονται διὰ τῶν τύπων

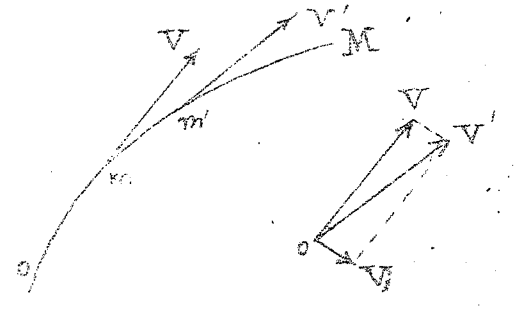
$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\,\sigma\upsilon\nu\,\beta,\quad \frac{dz}{dt}=\frac{ds}{dt}\,\sigma\upsilon\nu\,\gamma.$$

ὅπου α β γ παριστῶσι τὰς μετὰ τῶν ἀξόνων $O(x, y, z)$ γωνίας τῆς παραστατικῆς εὐθείας τῆς ταχύτητος.

§3.— Περὶ ἐπιταχύνσεως.—

9.— Γνωσθέντος ἤδη τοῦ τρόπου, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην δύο διαφόρων ταχυτήτων, δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸ μῆκος καί τήν φοράν αὐτῆς, μεταβολή ἥτις εἰσφέρει τήν καμπυλότητα τῆς τροχιᾶς καί τήν ἐπ' αὐτῆς ἐπιταχυνομένην ἤ βραδύνουσαν κίνησιν.



Ἐπιτάχυνσις. — Ἔστω πρός τοῦτο OM ἡ τροχιά τοῦ κινητοῦ σημείου καί m, m' δύο διαδοχικαί θέσεις αὐτοῦ, ἐν αἷς εὑρίσκεται κατά τούς χρόνους t καί t+dt, ov καί ov' αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ παρά τά σημεῖα m καί m'.

Ἡ διά τῆς εὐθείας ov παριστωμένη ταχύτης, μεθ' ἧς ἐφέρετο τό κινητόν παρά τό σημεῖον m τῆς τροχιᾶς του, μετεβλήθη ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt καί κατά τήν φοράν, εἰς τήν διά τῆς εὐθείας ov' παριστωμένην ταχύτητα· ἀλλ' ἡ μεταβολή αὕτη δέν ἠδύνατο νά ἐπέλθῃ (ἀρχή ἀδρανείας) ἄνευ ἐξωτερικῆς τινος ἐπιδράσεως, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἡ κίνησις τοῦ κινητοῦ ἐτροποποιήθη διά τῆς εἰσαγωγῆς προσθέτου τινός ταχύτητος v_1, ἧς ἡ παραστατική εὐθεῖα ov_1 εἶναι ἴση καί παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ vv' τοῦ τριγώνου ovv'. Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς δέ προσθέσεως ταύτης καί τῆς ταχύτητος v παρά τό σημεῖον m, προκύπτει ἡ τελική ταχύτης v' παρά τό σημεῖον m'.

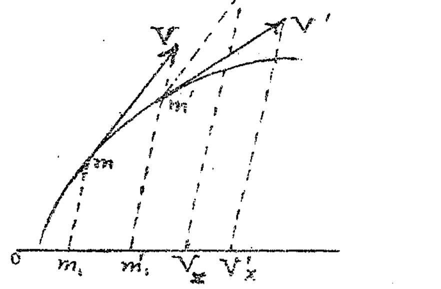
Τήν ὑπό τοῦ κινητοῦ κτηθεῖσαν ταύτην ταχύτητα v_1 κατά τήν ἀπό τοῦ σημείου m εἰς τό σημεῖον m' μετάβασιν αὐτοῦ ἐν χρονικῷ διαστήματι dt, θεωρουμένην ὡς πρός τό μέγεθος καί τήν φοράν αὐτῆς, θά ὀνομάζωμεν στοιχειώδη ὁλικήν ἐπιτάχυνσιν τοῦ κινητοῦ παρά τοῦ σημείου m, καί τήν αὐτήν ποσότητα διαιρουμένην διά τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ὁλικήν ἐπιτάχυνσιν τοῦ κινητοῦ παρά τό σημεῖον m.

Ἐκ τοῦ σχ. 6 δέ καί τῶν πρίν ἀποδειχθέντων καταφαίνεται ὅτι ἡ ὁλική ἐπιτάχυνσις φαινομένου ὁλικοῦ σημείου εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ τῆς τροχιᾶς καί ἰσοῦται τῇ γεωμετρικῇ διαφορικῇ $\frac{dv}{dt}$ τῆς ταχύτητος· ἐάν δέ ἡ τροχιά εἶναι εὐθύγραμμος καί ἡ ὁλική ἐπιτάχυνσις ἰσοῦται μέ

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{v\,dv}{ds} = \frac{d\frac{v^2}{2}}{ds}$$

ἐάν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά κατά τό μέγεθος καί τήν φοράν, ἡ ταχύτης μεταβάλλεται ὁμοιομόρφως καί ἡ κίνησις καλεῖται ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένη· ἀπαντᾷ δέ συχνάκις ἐν τοῖς φυσικοῖς φαινομένοις ἡ κίνησις αὕτη (ἴδε ἐφαρμογάς).

Ἡ ἐπιτάχυνσις ὡς βλέπομεν εἶναι γεωμετρικόν μέγεθος τῆς αὐτῆς φύσεως μέ τήν ταχύτητα, καί κατά συνέπειαν αἱ προβλητικαί ἰδιότητες αὐτῆς ἐπί ἄξονος ἤ ἐπιπέδου ὡς καί ἡ σύνθεσις δύο διαφόρων ἐπιταχύνσεων ἐπενεργουσῶν ταὐτοχρόνως ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου ἕπονται αὐταί μέ τάς ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ἀποδειχθείσας διά τήν ταχύτητα.



Προβολή τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπί ἄξονος.

10.— Ἔστω τῷ ὄντι s ἡ τροχιά τοῦ κινητοῦ καί παρασταθήτωσαν διά τῶν εὐθειῶν mv m'v' αἱ ταχύτητες αὐτοῦ παρά τοῖς σημείοις m καί m', ἀχθήτω δέ ἡ εὐθεῖα mv_1 ἴση καί παράλληλος τῇ εὐθείᾳ m'v', ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ παρά τό σημεῖον m παρίσταται διά τῆς εὐθείας v_1v' προβαλλομένης ἐπί τοῦ ἄξονος ox παραλλήλως πρός ἑαυτόν τι, καί καλοῦντες v_x καί v'_x τάς προβολάς τῶν ταχυτήτων Av_1 καί Av' ἔχομεν

προβ τοῦ Av_1 + προβ τοῦ v_1v' = προβ. τοῦ Av'

ἤ v_x + προβ. τῆς ἐπιταχύνσεως = v'_x

προβ. τῆς ἐπιταχύνσεως = $v'_x - v_x$

καί τό δεύτερον μέρος τῆς ἰσότητος παριστᾷ ἀκριβῶς τήν στοιχειώδη ἐπιτάχυνσιν dv τῆς ἐπί τοῦ ἄξονος ox κινήσεως τῆς προβολῆς τοῦ κινητοῦ σημείου.

Ὅθεν ἡ ἐπί ἄξονος προβολή τῆς ἐπιταχύνσεως κινητοῦ σημείου ἰσοῦται τῇ ἐπιταχύνσει τῆς διαγραφούσης τόν ἄξονα προβολῆς αὐτοῦ. Αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐπιταχύνσεως κινητοῦ προσδιοριζομένου δι' εὐθυγράμμων συντεταγμένων x y z παραλλήλων τοῖς ἄξοσιν εἰσιν.

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}$$

καί ἡ τιμή τῆς ὀλικῆς ἐπιταχύνσεως ἐν συστήματι ὀρθογωνίων ἀξόνων,

$$\varphi = \sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}}$$

τά δ' ὁρίζοντα τήν φοράν αὐτῆς συνημίτονα προσδιορίζονται διά τῶν τύπων

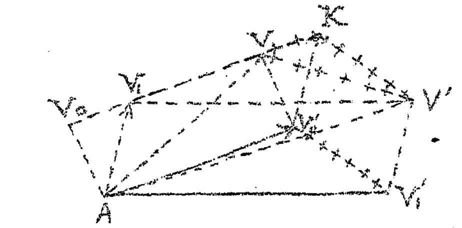
$$\varphi\ \text{συν}\ \alpha=\frac{d^2x}{dt^2},\quad \varphi\ \text{συν}\ \beta=\frac{d^2y}{dt^2},\quad \varphi\ \text{συν}\ \gamma=\frac{d^2z}{dt^2}$$

Σύνθεσις τῶν ἐπιταχύνσεων.—

11.— Κινητόν τι σημεῖον α φέρεται ταυτοχρόνως ὑπό δύο ἀνισοταχῶν κινήσεων καί ζητεῖται ἡ ἐκ τῶν δύο

ταυτοχρόνων ἐπιταχύνσεων προκύπτουσα τελική ἐπιτάχυνσις.

Ἔστωσαν AV_0 καί AV'_0 αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι τῶν ταχυτήτων τῶν δύο κινήσεων κατά τόν χρόνον t αἵτινες, ὡς ἐκ τῶν προαποδειχθέντων γνωρίζομεν, ἰσοδυναμοῦσι τῇ συνισταμένῃ αὐτῶν AV. Ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς ὀλικῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι ἡ VV' ἥτις ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν εὐθειῶν VK καί KV', ὧν ἡ μέν KV' ἴση καί παράλληλος τῇ V_0V_1 παριστᾷ τήν ἐκ τῆς μιᾶς τῶν κινήσεων προερχομένην ἐπιτάχυνσιν, ἡ δέ ἑτέρα VK τήν ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν κινήσεων προερχομένην ἐπίσης ἐπιτάχυνσιν ὅθεν

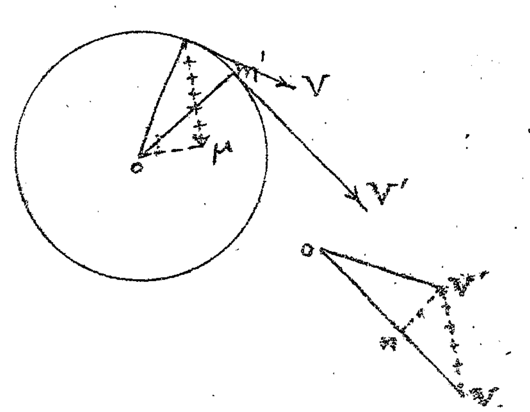


Ἡ ἐκ τῶν δύο συγχρόνως ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπενεργουσῶν ἀνισοταχῶν κινήσεων προκύπτουσα ἐπιτάχυνσις ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκ τῶν συγχρόνων κινήσεων προερχομένων μερικῶν ἐπιταχύνσεων καί ἐν γένει ἡ συνισταμένη Φ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπιταχύνσεων $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_4$, μεθ' ὧν φέρεται συγχρόνως κινητόν τι σημεῖον, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ αὐτῶν ἀθροίσματι,

$$\bar{\Phi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 + \cdots + \bar{\varphi}_4$$

Ἐφαρμογή ἐν τῇ κυκλικῇ κινήσει.—

12.— Θεωρηθήτω κινητόν τι διαγράφον περιφέρειαν κύκλου ἀνισοταχῶς καί ἔστωσαν ον καί ον' αἱ παρασταὐικαί εὐθεῖαι τῶν ταχυτήτων τοῦ κινητοῦ παρά τά διαδοχικά σημεῖα m καί m', διῶν διέρχεται τό κινητόν κατά τό χρονικόν διάστημα dt.



Κεντρομόλος καί ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις.

Ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι νν' = φdt καί δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη δύο ἄλλων ἐπιταχύνσεων nν' παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ καί nν καθέτου αὐτῇ. -

Ἡ τιμή τῆς $\frac{nv}{dt}$ ἥν ὀνομάζομεν καί ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ $\frac{v'-v}{dt}=\frac{dv}{dt}$ καί ἐπιταχύνει τήν κίνησιν ἐπί τῆς τροχιᾶς. Ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων omm' καί ονn μᾶς δίδει

$$\frac{vn}{mm'}=\frac{ov}{om}$$

$$vn = mm'\frac{ov}{R} = vdt\,\frac{ov}{R} = \frac{v^2}{R}$$

ὥστε ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις $\frac{vn}{dt}=\frac{v^2}{R}$ καί ἐπιφέρει τήν καμπυλότητα τῆς τροχιᾶς.

Ἐάν ἡ ἐπί τοῦ κύκλου κίνησις εἶναι ἰσοταχής ἀτ=ο καί ἡ ὁλική ἐπιτάχυνσις εἶναι κεντρομόλος καί ἴση τῇ $\frac{v^2}{R}$.

Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν ἄνω τύπων.

Ἐάν ἐκ τοῦ m φέρωμεν τήν εὐθεῖαν mμ ἴσην καί παρά-

λληλον τῇ ἐπιταχύνσει νν' = φdt καί καταβιβάσωμεν ἀπό τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτῆς τήν OK ἔχομεν

$$\text{κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις} = φ\ ημ\ β = \frac{v^2}{R}$$

ὅθεν

$$φ = \frac{v^2}{R\,ημ\,β}$$

ἀλλά

$$mK = R\,ημ.\,β$$

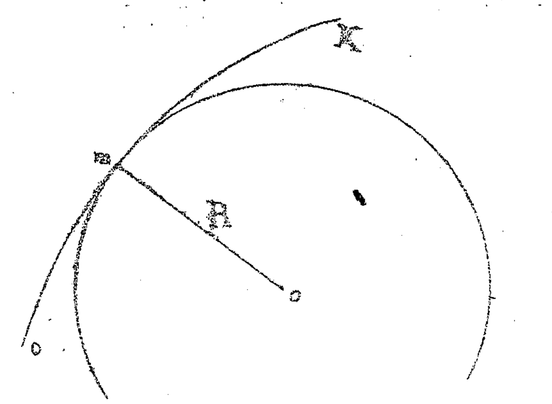
καί

$$φ = \frac{v^2}{mK}$$

οὕτω Ἡ ὁλική ἐπιτάχυνσις παρά τό σημεῖον m ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς ταχύτητος παρά τό αὐτό σημεῖον διά τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπό τῆς φορᾶς αὐτῆς προσδιοριζομένης ἐν τῷ κύκλῳ χορδῆς.

Κίνησις ἐπί οἱασδήποτε καμπύλης. —

13.) Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν κινητόν κινούμενον ἐπί οἱασδήποτε καμπύλης OK γνωρίζομεν ἐκ τῆς γεωμετρίας, ὅτι παρά τό σημεῖον m τό τόξον τῆς καμπύλης δύναται νά ἀντικατασταθῇ ὑπό τοῦ τόξου τοῦ ἐγγυτάτου τῇ καμπύλῃ κύκλου C, οὕτως ὥστε τό κινητόν δύναται νά θεωρηθῇ ὡς



κινούμενον ἐπί τοῦ κύκλου παρά τό σημεῖον m ὅθεν ἡ κεντρομόλος καί ἐφαπτομένη ἐπιτάχυνσις παρά τό σημεῖον m τῆς καμπύλης τροχιᾶς OK παρίστανται διά

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\ \text{καί}\ \frac{V^2}{R}$$

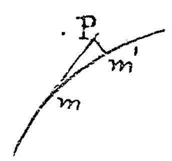
Κινητική Πρωτοπαθεία

ὅπου R ἐμφαίνει τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος παρὰ τὸ σημεῖον m, καὶ βλέπομεν ἤδη διατί ὠνομάσαμεν τὴν γεωμετρικὴν ποσότητα $\frac{dv}{dt}$ ὁλικὴν ἐπιτάχυνσιν· διότι αὕτη δὲν συμπίπτει μὲ τὴν κυρίως ἐπιτάχυνσιν τὴν ἐν τῇ τροχιᾷ κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως παρατηρουμένην, ἥτις ἰσοῦται τῇ $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ καὶ ἀποτελεῖ μίαν μόνον τῶν συνιστωσῶν τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως τὴν ἐφαπτομένην ἐπιτάχυνσιν.

Αὕτη ἐπηρεάζει καθὼς βλέπομεν ἀμέσως τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος ἐπιταχύνουσα ἢ ἐπιβραδύνουσα τὴν κίνησιν τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του.

Τουναντίον ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις $\frac{V^2}{R}$ οὐδόλως ἐπηρεάζει τὸ μέγεθος τῆς ταχύτητος, ἀλλὰ μόνον τὴν φορὰν αὐτῆς ἐπιφέρουσα οὕτω τὴν παρεκτροπὴν (deviation) τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς, ἣν τείνει ν᾽ ἀκολουθήσῃ ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν.

Ἡ ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως προκύπτουσα αὕτη παρεκτροπὴ μετρεῖται διὰ τοῦ στοιχειώδους τμήματος m'P, ὅπου mP ἰσοῦται μὲ Vdt καὶ mm' εἶναι τὸ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt διανυθὲν τόξον καὶ ἔχομεν



$$Pm' = \varphi \frac{dt^2}{2}$$

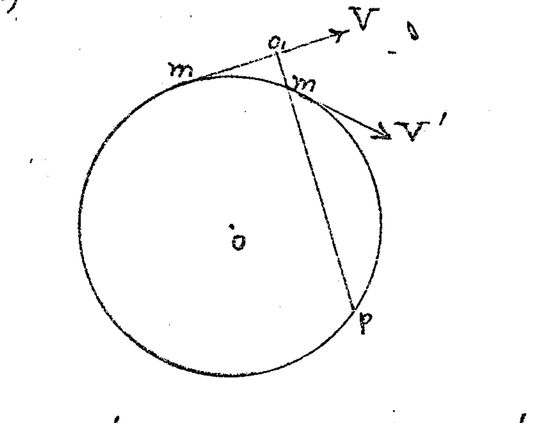
Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν σταθερὰν κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τμῆμα Pm' ὡς διανυθὲν διὰ κινήσεως ὁμοιομόρφως ἐπιταχυνομένης.

Παρεκτροπὴ ὀφειλομένη τῇ ἐπιταχύνσει.—

Ἀλλ᾽ ἰδοὺ καὶ ἑτέρα ἀπόδειξις τούτου, οὐδὲν προϋποθέτουσα περὶ τῆς φύσεως τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τροχιὰν διὰ τοῦ ἐγγυτάτου αὐτῆς κύκλου παρὰ τὸ σημεῖον m, παριστῶντες διὰ V καὶ V' τὰς ταχύ-

τητας τοῦ κινητοῦ παρὰ τὰ σημεῖα m καὶ m' καὶ mqp παράλληλον τῇ ἐπιταχύνσει ἔχομεν (12)



$$\varphi = 2\frac{v^2}{mp}$$

ἀλλ᾽ ἐν τῷ κύκλῳ

$$\overline{mq}^2 = m'q \,.\, m'p$$

καὶ περιοριζόμενοι εἰς τὰς πρωτοβαθμίους τιμὰς τῶν ἐλαχίστων ποσοτήτων m'q mq .... δυνάμεθα ν᾽ ἀντικαταστήσωμεν qp διὰ τοῦ m'p καὶ mq διὰ τοῦ mm'=vdt καὶ οὕτω ἔχομεν

$$v^2\overline{dt}^2 = qm' . m'p = qm' . \frac{2v^2}{\varphi}$$

ὅθεν

$$qm' = \varphi \frac{dt^2}{2}$$

Ἀνακεφαλαίωσις ἀφορῶσα τὴν ἐπιτάχυνσιν.—

14) Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ ἀποδειχθέντα, βλέπομεν ὅτι

1ον.— Ἡ ἐπιτάχυνσις φ κινουμένου ἐν τῷ διαστήματι σημείου m τουτέστιν ἡ γεωμετρικὴ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸ βραχύτατον χρονικὸν διάστημα dt, καθ᾽ ὃ τοῦτο μεταβαίνει ἐκ τοῦ σημείου m εἰς τὸ ἀμέσως κατόπιν m' παρίσταται διὰ τῆς γεωμετρικῆς διαφορικῆς $\frac{d\vec{v}}{dt}$ τῆς ταχύτητος διαιρουμένης διὰ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. Ἐὰν δὲ ἡ τροχιὰ εἶναι εὐθύγραμμος διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς διαφορικῆς $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$

$\varphi = \frac{dV}{dt}$ καὶ ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$

2ον Ἡ ἐπὶ ἄξονος ἢ ἐπιπέδου προβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως φ σημείου κινουμένου ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ἰσοῦται τῇ ἐπιταχύνσει φ_x τῆς διατρεχούσης τὸν ἄξονα ἢ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αὐτοῦ. Ἐάν ἡ προβολή γίνῃ ὀρθογωνίως ἔχομεν

$$\varphi_x = \varphi \,\text{συν}\, \alpha = \frac{d^2x}{dt^2}$$

3ον.— Ἡ ἐκ δύο συγχρόνως ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐνεργουσῶν ἀνεξαρτήτων κινήσεων προκύπτουσα ἐπιτάχυνσις, ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκ τῶν συγχρόνων κινήσεων προκυπτουσῶν μερικῶν ἐπιταχύνσεων.

Καί ἐν γένει ἡ συνισταμένη Φ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπιταχύνσεων $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ μεθ' ὧν φέρεται συγχρόνως κινητόν τι σημεῖον ἰσοῦται τῷ γεωμετρικῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν.

4ον.— Αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐπιταχύνσεως φ κινητοῦ προσδιοριζομένου δι' εὐθυγράμμων συντεταγμένων x, y, z, παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

καί ἡ φορά καί τό μέγεθος τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως φ ἐν ὀρθογωνίῳ συστήματι συντεταγμένων προσδιορίζονται διά τῶν τύπων

$$\varphi \,\text{συν}\, \alpha = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \varphi \,\text{συν}\, \beta = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \varphi \,\text{συν}\, \gamma = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

ὅπου α β γ παριστῶσι τάς μετά τῶν ἀξόνων γωνίας τῆς παραστατικῆς εὐθείας τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως.

5ον.— Ἡ ὁλική ἐπιτάχυνσις κινητοῦ, καθ' ὅν χρόνον συμπίπτει τοῦτο μέ τό σημεῖον m τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς ταχύτητος παρά τό σημεῖον m, διαιρουμένου διά τοῦ ἡμίσεως τῆς [illegible] τῆς φορᾶς αὐτῆς προσδιοριζομένης ἐν τῷ παρά τό σημεῖον m ἐγγυτάτῳ κύκλῳ χορδῆς.

6ον.— Αἱ συνιστῶσαι τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως παραλλή-

λως τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς τροχιᾶς (φορά τῆς κινήσεως), καί τῇ ἀκτῖνι τῆς καμπυλότητος, ἅς καλοῦμεν ἐφαπτομένην καί κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν, ἔχουσι τάς ἀλγεβρικάς τιμάς

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) \quad \text{καί} \quad \frac{V^2}{R}$$

ἔνθα R ἐμφαίνει τήν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος παρά τό σημεῖον m.

Ἐξισώσεις καί γενικά θεωρήματα ἀφορῶντα τήν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου.

15.— Γνωρίζοντες τήν ἐπιτάχυνσιν μεθ' ἧς φέρεται κινητόν σημεῖον δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν τροχιάν αὐτοῦ καί τήν ἐπ' αὐτῆς ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν x y z αἱ εὐθύγραμμοι συντεταγμέναι καί $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox, oy, oz· ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν ὅτι

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

καί τάς ἐξισώσεις ταύτας ὀνομάζομεν ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

Ὁλοκληροῦντες τάς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν τάς συνιστώσας τῆς ταχύτητος,

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \int \varphi_x \, dt + C, \quad \frac{dy}{dt} = V_y = \int \varphi_y \, dt + C', \quad \frac{dz}{dt} = V_z = \int \varphi_z \, dt + C''$$

ὁλοκληροῦντες ἐκ νέου εὑρίσκομεν τάς συντεταγμένας

$$x=\int dt\int \varphi_x\, dt + ct + c_1$$
$$y=\int dt\int \varphi_y\, dt + c't + c_1'$$
$$z=\int dt\int \varphi_z\, dt + c''t + c_1''$$

ἀλλά διά τήν ἐκτέλεσιν τῶν ὁλοκληρώσεων τούτων ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου t, ὅπερ σπανίως συμβαίνει, διά τοῦτο θά προβῶμεν νῦν εἰς τήν ἀπόδειξιν γενικῶν τινων θεωρημάτων, δι' ὧν δυνάμεθα ν' ἀποφύγωμεν τήν μίαν τοὐλάχιστον τῶν ὁλοκληρώσεων τούτων.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi_x=\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \varphi_y=\frac{d^2y}{dt^2}$$

πολλαπλασιάζοντες τά μέλη τῆς πρώτης μέ y καί τά τῆς δευτέρας μέ x καί ἀφαιροῦντες ἐξάγομεν

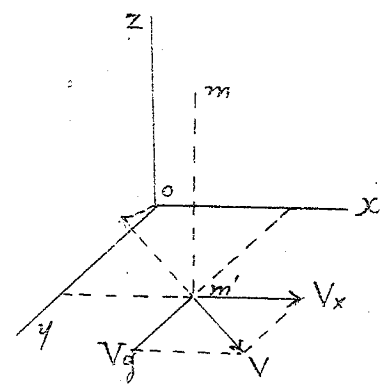
$$x\varphi_y-y\varphi_x=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right]$$

καί ὁλοκληροῦντες

$$\left[x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right]_0^t=\int_0^t(x\varphi_y-y\varphi_x)\,dt$$

ἤ

$$(xV_y-yV_x)_0^t=\int_0^t(x\varphi_y-y\varphi_x)\,dt$$



ὅπου V_x, V_y εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος V παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν Ox καί Oy. Ἐάν δέ παραστήσωμεν διά $p=OP$ τήν ἀπό τοῦ σημείου O κάθετον OP ἐπί τῆς εὐθείας mV, διά x καί y τάς ἀπό τοῦ αὐτοῦ σημείου O καθέτους ἐπί τῶν εὐθειῶν $m'V_y$ καί $m'V_x$ ἔχομεν (σ)

$$V\cdot p=xV_x-yV_y.$$

Ἐάν ἐπίσης παραστήσωμεν διά φ τήν προβολήν τῆς ἐπιταχύν-

σεως ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy καί q τήν ἀπό τοῦ σημείου O ἀπόστασιν αὐτῆς, ἔχομεν

$$x\varphi_y-y\varphi_x=\varphi q,$$

κατά συνέπειαν ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἀνωτέρω σχέσει εὑρίσκομεν

$$Vp-V_0p_0=\int_0^t\varphi.q\,dt.$$

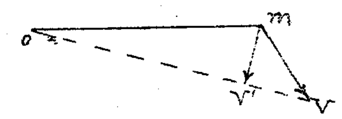
Ἡ ῥοπή* τῆς ταχύτητος V ὡς πρός τό σημεῖον O ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρωτικῷ ἀθροίσματι τῆς ῥοπῆς τῆς ἐπιταχύνσεως ὡς πρός τό αὐτό σημεῖον O.

---

*Σημ. 1 — Ῥοπήν εὐθυγράμμου τμήματος mV ὡς πρός τό σημεῖον O ὀνομάζομεν τό γινόμενον τοῦ μήκους mV τοῦ τμήματος, ἐπί τήν ἀπό τοῦ σημείου O ἐπί τῆς φορᾶς τοῦ τμήματος κάθετον.

Σημ. 2. — Ἐάν ἡ ἐπιτάχυνσις διέρχηται διαρκῶς διά σταθεροῦ τινος σημείου O ἔχομεν

$$q=0$$

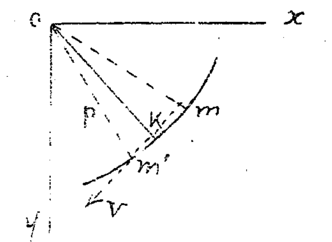


καί κατά συνέπειαν

$$Vp-V_0p_0=0 \text{ ἤ } Vp=V_0p_0=\text{σταθερόν}.$$

(ἡ κίνησις εἶναι ἐπίπεδος διότι ἡ ἐπιτάχυνσις VV' διέρχεται διά τοῦ σημείου O καί κατά συνέπειαν mV' εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OmV).

ἀλλά $\quad V.p=\dfrac{mm'}{dt}.OK=\text{σταθερόν}=2C$



$$2\,\text{ἐμβαδόν } Omm'=2Cdt$$

ἤ

$$d(mOm')=Cdt$$

καί ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$\text{ἐμβαδόν } m_0Om=Ct+C'$$

δηλ. τά ὑπό τῆς ἀκτῖνος Om διαγραφόμενα ἐμβαδά εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων, ἐν οἷς διαγράφονται.

Τό ἐμβαδόν $\quad mOm'=\dfrac{mOm'.r.r}{2}=\dfrac{\omega dt r^2}{2}$

ἤ

$$Cdt=\frac{\omega dt r^2}{2}$$

ἤ

$$\omega=\frac{2C}{r^2}$$

Ανωτέρω απεδείξαμεν (§12.) την σχέσιν

$$\frac{dv}{dt} = \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi, ds)$$

ή πολλαπλασιάζοντες τα δύο μέλη διά $Vdt = ds$

$$V.\,dV = \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi . ds)\, ds$$

και ολοκληρούντες

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi . ds)\, ds$$

εις την σχέσιν ταύτην ηδυνάμεθα να φθάσωμεν και ως εξής

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ή

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz = \frac{1}{2} d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

και

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi . s)\, ds$$

ώστε

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = \int \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi . s)\, ds$$

Η αύξησις, ην υφίσταται το ημιάθροισμα του τετραγώνου της ταχύτητος ισούται με το ολοκληρωτικόν άθροισμα του γινομένου της επιταχύνσεως επί την επ' αυτής (της επιταχύνσεως) προβολήν του διανυθέντος διαστήματος εν τω αυτώ χρονικώ διαστήματι.

Σημ.— Υπάρχουν περιπτώσεις, καθ' ας το δεύτερον μέλος της εξισώσεως ολοκληρούται ευκόλως.

1ον.— Εάν η επιτάχυνσις φ είναι σταθερά και εφάπτηται διαρκώς της τροχιάς.

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi . s) = 1 \quad \text{και} \quad \int_{s_0}^{s} \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi . s)\, ds = \varphi \int_{s_0}^{s} ds = \varphi(s - s_0)$$

2ον.— Εάν η επιτάχυνσις φ είναι σταθερά και παράλληλος ωρι-

ούτω η γωνιακή ταχύτης είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου της ακτίνος OM.

σμένη διευθύνσει OZ

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi, s) = \frac{dz}{ds} \quad \text{και} \quad \int_{s_0}^{s} \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi, s)\, ds = \varphi \int_{s_0}^{s} dz = \varphi(z - z_0)$$

3ον.— Εάν η επιτάχυνσις διέρχεται διά σταθερού σημείου O και $\varphi = f(r)$.

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi, s)\, ds = dr \quad \text{και} \quad \int_{s_0}^{s} \varphi\, \sigma\upsilon\nu(\varphi, s)\, ds = \int_{r_0}^{r} (r)\, dr$$

Ασκήσεις

16.— Ομαλώς επιταχυνομένη κίνησις

Ομαλώς επιταχυνομένην κίνησιν ωνομάσαμεν ανωτέρω την μεταβαλλομένην ευθύγραμμον κίνησιν, εν ή η επιτάχυνσις είναι σταθερά, τουτέστιν ο λόγος της ταχύτητος V προς τον χρόνον t είναι σταθερός και ίσος τω φ.

$$v = v_0 + \varphi t$$

τα διανυόμενα χρονικά διαστήματα προσδιορίζονται διά της σχέσεως.

$$s = \int v\, dt = \int (v_0 + \varphi t)\, dt = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

ώστε η γενικωτέρα εξίσωσις της ομαλώς επιταχυνομένης κινήσεως είναι προφανώς

$$(1) \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

και η ταχύτης

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + \varphi t$$

ή

$$s - s_0 = t\left[v_0 + \frac{1}{2}\varphi t\right]$$

ή

$$(1) \qquad \frac{s - s_0}{t} = v_0 + \varphi \frac{t}{2}$$

Κυριακή Πρωτοπαπαδάκη

τὸ τέσσαρον ἡ μέση ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t = t_0$ ἰσοῦται μὲ τὴν πραγματικὴν αὐτοῦ ταχύτητα κατὰ τὴν στιγμὴν $\frac{t+t_0}{2}$. ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (1) $\frac{1}{2}\varphi . t$ διὰ $v - v_0$ ἔχομεν

$$\frac{s-s_0}{t} = \frac{v+v}{2} \qquad (2)$$

τουτέστι

τὰ ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἴσα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα θὰ διήνυε τὸ κινητὸν κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα, ἐὰν ἐφέρετο μετὰ ταχύτητος $\frac{v+v_0}{2}$ ἐν ἰσοταχεῖ κινήσει.

Ἐκ τῆς σχέσεως $v = v_0 + \varphi t$ ἐξάγομεν $\frac{v-v_0}{\varphi} = t$ καὶ ἀντικαθιστῶντες t εἰς τὴν σχέσιν 2 ἔχομεν

$$s - s_0 = \frac{v+v_0}{2} \cdot \frac{v-v_0}{\varphi}$$

ἢ

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \varphi (s - s_0)$$

Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων.

17. — Πτῶσις. — Ἐκ τῆς πείρας γνωρίζομεν ὅτι τὰ ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος πίπτοντα ἐν τῷ κενῷ σώματα διαγράφουσι κατακορύφους εὐθείας ἐν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένῃ κινήσει καὶ μὲ ἐπιτάχυνσιν $\varphi = 9.8088$, ἣν συνήθως παριστῶσι διὰ τοῦ g. Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν ἐνταῦθα τὰς ἰδιότητας, ἃς εὕρομεν προηγουμένως ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως ἔχομεν

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad v = g t$$

ὅθεν

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

καὶ

$$v = \sqrt{2gh}$$

οὕτω

ἡ κτηθεῖσα ταχύτης v σώματος πίπτοντος ἐλευθέρως καὶ ἄνευ

ἀρχικῆς ταχύτητος ἐκ τοῦ ὕψους h ἰσοῦται τῇ $\sqrt{2gh}$.

Τὸ διανυθὲν ὕψος h κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα t εἶναι

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

τὸ διανυθὲν ὕψος h_1 κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t+1$ εἶναι

$$h_1 = \frac{1}{2} g (t+1)^2$$

ὅθεν

$$h_1 - h = \frac{1}{2} g (2t+1)$$

τὰ κατὰ τὰς διαδοχικὰς μονάδας τοῦ χρόνου διανυόμενα διαστήματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὅπως οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 1, 3, 5, ...

Ἀνάβασις. — Ἐὰν τὸ σῶμα ἀναβαίνῃ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 ἔχομεν

$$v = v_0 - g t$$

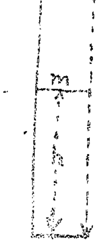
$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

τὸ μέγιστον ὕψος H πρὸς ὃ φθάνει τὸ σῶμα ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ ταχύτητος v_0 ἀντιστοιχεῖ τῷ σημείῳ ἐν ᾧ $v = 0$ ὥστε

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

H ἰσοῦται τῷ ὕψει ἀφ' οὗ πίπτον τὸ σῶμα θ' ἀπέκτα τὴν ταχύτητα v_0

Ἔστω v_1 ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, ἐφ' ὅσον διαβαίνει διὰ τοῦ σημείου m κατὰ τὴν ἀνάβασιν αὐτοῦ καὶ v_2 ἡ ταχύτης αὐτοῦ ὅταν τοῦτο διαβαίνῃ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου κατὰ τὴν κατάβασιν του ἐκ τῶν προαποδειχθέντων ἔχομεν



$$v_1^2 = 2g(H-h)$$

$$v_2^2 - v_0^2 = 2gh \text{ ἢ } v_2^2 = v_0^2 + 2gh = 2gH + 2gh = 2g(H-h)$$

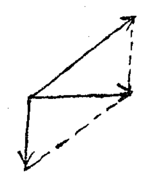
ὥστε

$$v_1 = v_2$$

σης. ἡ ταχύτης ἣν κέκτηται τὸ κινητὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου m κατὰ τὴν ἀνάβασιν αὐτοῦ ἰσοῦται τῇ ταχύτητι, ἣν κέκτηται τοῦτο, ὅταν κατὰ τὴν κατάβασιν διέρχηται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου m.

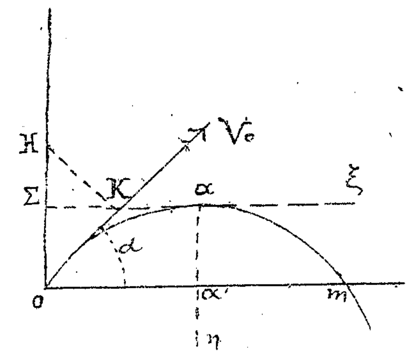
Κίνησις τῶν βλημάτων ἐν τῷ κενῷ

18.— Βλῆμά τι βάλλεται ἀπὸ τοῦ σημείου O μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα OV_0. Ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος καὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων τῆς κινήσεως αὐτοῦ.



Ἡ τροχιὰ ἐμπεριέχεται ἐν τῷ ἀπὸ τῆς εὐθείας OV_0 φερομένῳ καθέτῳ ἐπιπέδῳ, διότι μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς βολῆς, ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα τῆς ταχύτητος εἶναι OV_0 καὶ $g\,dt$ (κατακόρυφος ταχύτης προερχομένη ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῆς βαρύτητος) καὶ εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν.

Ἐὰν προσδιορίσωμεν τὴν τροχιὰν διὰ τῶν ὀρθογωνίων αὐτῆς συντεταγμένων ἔχομεν



$$\varphi_x=\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad \varphi_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

ὁλοκληροῦντες τὰς συντεταγμένας τῆς ταχύτητος

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\text{σταθ.} \qquad v_y=\frac{dy}{dt}=-gt+\text{σταθ.}$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι τῆς ταχύτητος κατὰ τὴν στιγμὴν

τῆς βολῆς τοῦ βλήματος εἰσὶ V_0 συν α καὶ V ημ α ἔχομεν

$$V_x=V_0\,\text{συν}\,\alpha \qquad V_y=-gt+V_0\,\text{ημ}\,\alpha$$

ὁλοκληροῦντες ἐκ νέου καὶ παρατηροῦντες ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κινητοῦ ἰσοῦνται τῷ μηδενὶ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$x=tV_0\,\text{συν}\,\alpha \qquad y=-\frac{1}{2}gt^2+tV_0\,\text{ημ}\,\alpha$$

αἵτινες προσδιορίζουσι τὴν κίνησιν τοῦ βλήματος.

Διὰ τῆς ἀπαλειφῆς τοῦ χρόνου t ἐν ταῖς ἐξισώσεσι ταύταις εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς

$$y=x\frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha}-\frac{gx^2}{2V_0^2\,\text{συν}^2\alpha}=x\,\text{εφ}\alpha-\frac{x^2}{4h\,\text{συν}^2\alpha}$$

ὅπου $h=\frac{V_0^2}{2g}$ ἐμφαίνει τὸ ἀντιστοιχοῦν τῇ ταχύτητι V_0 ὕψος.

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

$$y\cdot 4h\,\text{συν}^2\alpha=4hx\,\text{ημ}\,\alpha\,\text{συν}\,\alpha-x^2$$

ἢ

$$(x-h\,\text{ημ}\,2\alpha)^2=4h\,\text{συν}^2\alpha\,(h\,\text{ημ}^2\alpha-y)$$

ἢ θέτοντες

$$\xi=x-h\,\text{ημ}\,2\alpha$$
$$\eta=-y+h\,\text{ημ}^2\alpha$$

ἔχομεν εἰς ἁπλουστέραν μορφὴν τὴν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς τῆς κινήσεως

$$\xi^2=4h\,\text{συν}^2\alpha.\eta$$

καὶ βλέπομεν ὅτι αὕτη παριστᾷ παραβολὴν ἧς ἄξων εἶναι ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα $x=h$ ημ 2α.
ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου εὐθείας $y=h$ ημ$^2\alpha$
ἡ τιμὴ τοῦ παραμέτρου αὐτῆς εἶναι $4h$ συν$^2\alpha$ καὶ
εἶναι ἡ ὁριζόντιος $y=h$

Τὸ μῆκος $Om=2h$ ημ 2α ὀνομάζεται βεληνεκές, ὅπερ

Κυριακὴ Παπαπαπαδάκη

μεταβάλλεται μετά τῆς κλίσεως α τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ ταχύτητος· ἡ μεγαλυτέρα τιμή αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ τῇ κλίσει $\alpha=45°$ καί εἶναι $2h$.

Τό μέγιστον ὕψος, πρός ὅ φθάνει τό βλῆμα εἶναι $o\alpha = h$ ημ$^2\alpha$ καί καλεῖται ὕψος τῆς βολῆς· τό ὕψος τοῦτο μεταβάλλεται μετά τῆς κλίσεως τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος, ἡ μεγαλυτέρα τιμή αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν κλίσιν $\alpha=90$ καί εἶναι h.

Γεωμετρική κατασκευή τῶν μηκῶν om καί oα.

Ἐπί τοῦ ἄξονος oy λάβωμεν $OH=h$ καί φέρωμεν τήν HK κάθετον ἐπί τῆς OV_0 καί KL κάθετον ἐπί τῆς oy ἔχομεν

$$OK = h \text{ συν } \alpha$$

καί $$OL = OK \text{ συν } \alpha$$

ὥστε $$OL = h \text{ συν}^2 \alpha$$

ἐπίσης $$HK = h \text{ ημ } \alpha$$

καί $$LK = HK \text{ ημ } \alpha$$

ὥστε $$LK = h \text{ ημ συν } \alpha = \frac{h \text{ ημ} 2\alpha}{2}$$

$$LK = \frac{om}{4}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν ταῖς ἐξισώσεσι

$$x = t v_0 \text{ συν } \alpha \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2 + t v_0 \text{ ημ } \alpha$$

x καί y ἀλληλοδιαδόχως διά $2h$ ημ. 2α καί $0, 0$ καί h ημ$^2\alpha$ βλέπομεν ὅτι διά τήν μετάβασιν τοῦ βλήματος ἀπό τοῦ σημείου O εἰς τό σημεῖον m ἀπαιτούμενος χρόνος $\frac{2v_0 \text{ ημ}\alpha}{g}$ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀπαιτουμένου $\frac{v_0 \text{ ημ}\alpha}{g}$ διά τήν μετάβασιν αὐτοῦ ἀπό τοῦ σημείου O εἰς τό σημεῖον α.

Ἡ ταχύτης V τοῦ βλήματος ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ προσδιορίζεται διά τῆς σχέσεως.

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 \text{ συν}^2\alpha + (v_0 \text{ ημ}\alpha - gt)^2 = v_0^2 + g^2t^2 - 2gt v_0 \text{ ημ}\alpha$$

καί ἐπειδή

$$t \text{ ημ}\alpha = y - \frac{1}{2} g t^2$$

ἔχομεν

$$v^2 = v_0^2 + g^2 t^2 - 2g\left(y - \frac{1}{2} g t^2\right) = v_0^2 - 2gy$$

ὥστε

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

οὕτω ἡ ταχύτης ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὕψος μόνον y, εἰς ὅ εὑρίσκεται τό βλῆμα ὅπερ κατά συνέπειαν διαγράφει μετά τῆς αὐτῆς ταχύτητος τά αὐτά ὁριζόντια ἐπίπεδα.

Ἴδωμεν νῦν ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νά δώσωμεν εἰς τό τηλεβόλον ἵνα βάλωμεν ἐπί ὡρισμένου σημείου $\mu(x_1, y_1)$ τοῦ διαστήματος. Δέον πρός τοῦτο τό διά τοῦ ἄξονος τοῦ τηλεβόλου κατακόρυφον ἐπίπεδον νά διέρχηται διά τοῦ σημείου μ καί αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ (x_1, y_1) νά ἐπαληθεύωσι τήν ἐξίσωσιν

$$y_1 = x_1 \text{ εφ}\alpha - \frac{x^2}{4h \text{ συν}^2\alpha} = x_1 \text{ εφ}\alpha - \frac{x^2}{4h}(1 + \text{εφ}^2\alpha$$

ἥτις προσδιορίζει τήν κλίσιν τοῦ τηλεβόλου

$$\text{εφ}\alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4h y_1 - x_1^2}}{\text{εφ}\alpha}$$

οὕτω ἐπί τοῦ σημείου μ δυνάμεθα νά βάλωμεν ὑπό δύο διαφόρους γωνίας, ἀλλ' ἵνα ἡ τιμή αὕτη τῆς ἐφαπτομένης τῆς κλίσεως ᾖ πραγματική δέον νά ἐπαληθεύῃ ἡ συνθήκη

$$4h + 4h y_1 - x_1^2 \geqslant 0$$

Ἐάν ἤδη προσδιορίσωμεν ἐν τῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ τῆς βολῆς τήν διά τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = 0$$

παριστανομένην καμπύλην, ἥτις εἶναι παραβολή ἔχουσα ἄξονα τήν κατακόρυφον oy ἑστίαν τοῦ σημείου O καί κορυφήν τό σημεῖον $C(y=h)$ βλέπομεν ὅτι δι' ὅλα τά σημεῖα τῆς παραβολῆς ταύτης ἡ ἐφαπτομένη τῆς κλίσεως ἔχει μίαν μόνην τιμήν καί κατά συνέπειαν ὑπό μίαν μόνον γωνίαν δυνάμεθα νά βάλωμεν ἀπ' αὐτοῦ.

Ἐάν τό σημεῖον μ εὑρίσκεται ἐντός τῆς παραβολῆς ταύτης.

$$x_1^2+4hy_1-4h^2>0$$

ἡ ἐφαπτομένη τῆς κλίσεως ἔχει δύο τιμάς καί δυνάμεθα νά βάλωμεν ἐπί τοῦ σημείου ὑπό δύο διαφόρους γωνίας.

Ἀλλ' ἐάν τό σημεῖον μ εὑρίσκεται ἐκτός τῆς περί ἧς ὁ λόγος παραβολῆς

$$x_1^2+4hy_1-4h^2<0$$

καί ὑπό οὐδεμίαν γωνίαν δυνάμεθα νά βάλωμεν ἐπί τοῦ προτεθέντος σημείου.

Ἡ παραβολή

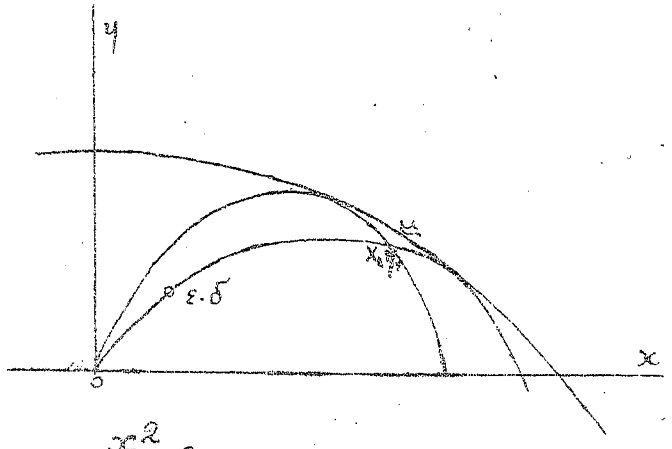
$$x^2 4hy-4h^2=0$$

καλεῖται παραβολή τῆς ἀσφαλείας ὡς πρός τό σημεῖον O καί εὐκόλως δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ περιβάλλουσα ὅλας τάς ὑπό τοῦ βλήματος διαγραφομένας τροχιάς, ὅταν μεταβάλωμεν τήν κλίσιν τῆς βολῆς.

Οἱαδήποτε τῶν τροχιῶν τούτων δύναται τῷ ὄντι νά παρασταθῇ διά τῆς ἐξισώσεως.

$$y=x\beta-\frac{x^2}{4h}(1+\beta^2) \qquad (\beta=\varepsilon\varphi\alpha)$$

καί τήν περιβάλλουσαν αὐτήν εὑρίσκομεν ἀπαλείφοντες β μεταξύ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καί τῆς παραγώγου αὐτῆς ὡς πρός τό β.



$$x-\frac{x^2}{2h}\beta=0$$

μετά τήν ἀπαλειφήν ἔχομεν

$$x^2+4hy-4h^2=0$$

Ἐάν ἤδη νοήσωμεν τό ἐκ περιστροφῆς περί τόν ἄξονα oy γεννώμενον παραβολοειδές, βλέπομεν ὅτι τοῦτο προσδιορίζει ἐν τῷ διαστήματι δύο χώρους, ὧν ὁ ἐξωτερικός οὐδένα διατρέχει κίνδυνον ἐκ τῶν ἀπό τοῦ σημείου O βαλλομένων καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν βλημάτων· ὀνομάζομεν καί τοῦτο παραβολοειδές ἀσφαλείας ὡς πρός τό σημεῖον O.

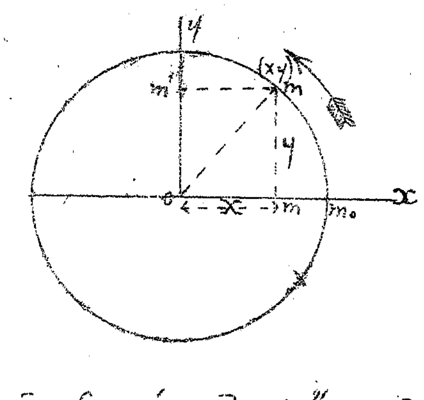
Ἁρμονική κίνησις

19. — Θεωρήσωμεν κινητόν σημεῖον m κινούμενον ἰσοταχῶς ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου O ὡς καί τήν κίνησιν τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπί τῆς διαμέτρου omo τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν ἁρμονικήν κίνησιν.

Ἡ ταχύτης τοῦ σημείου m' εἶναι

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(r\,\eta\mu\theta)}{dt}=-r\,\eta\mu\,\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

τήν σταθεράν περιστροφικήν ταχύτητα $\frac{d\theta}{dt}$ τῆς ἀκτῖνος om παριστῶμεν δι' ω καί ἔχομεν



$$\frac{dx}{dt}=r\,\eta\mu.\theta.\,\omega=-y\omega$$

ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοῦ σημείου m' εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega\frac{dy}{dt}=-\omega\frac{d(r\,\eta\mu\theta)}{dt}=-\omega^2x$$

ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν τήν κίνησιν τῆς προβολῆς m'' τοῦ αὐτοῦ σημείου m ἐπί τῆς διαμέτρου oy ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω

ἡ ταχύτης τοῦ $m''=\frac{dy}{dt}=\frac{d(r\,\eta\mu\,\theta)}{dt}=r\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}=\omega x$

καί

ἐπιτάχυνσις τοῦ $m''=\frac{d^2y}{dt^2}=\omega\frac{dx}{dt}=-\omega^2y$

ἡ ταχύτης τοῦ σημείου m εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου.

Κυνηγική Πρωτοπαπαδάκη

$$v=\sqrt{\omega^2y^2+\omega^2x^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2}=\omega r$$

καί ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ

$$\gamma=\sqrt{\omega^4x^2+\omega^4y^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2}=\omega^2 r$$

ἐάν ἡ διάρκεια μιᾶς περιστροφῆς εἶναι T ἔχομεν

$$2\pi R=VT$$

καί ἐπειδή

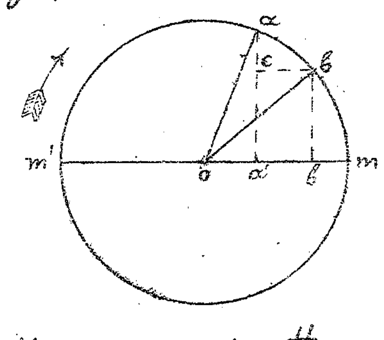
$$V=\omega R$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{\varphi_{x_0}}}=2\pi\frac{V}{\varphi_{x_0}}$$

ἐάν παραστήσωμεν διά φ_{x_0} τήν παρά τό σημεῖον m ἤ m' ἐπιτάχυνσιν $\omega^2 R$.

Ἀποτελέσματα, ἅτινα ἐκ τῶν προηγουμένων μας ἦσαν ἤδη γνωστά καί ἅτινα ἠδυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν διά εὐθείας ὡς ἑξῆς.

Ἔστω αβ τό κατά τό χρονικόν διάστημα dt διαγραφόμενον ὑπό τοῦ κινητοῦ τόξον· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων αβc καί οαα' ἔχομεν



$$\frac{\beta c}{\alpha\alpha'}=\frac{\alpha\beta}{o\alpha}\ \text{ἤ}\ \frac{\beta c}{y}=\frac{R\omega dt}{R}\ \text{ἤ}\ \beta c=d\beta'=\frac{\omega dt}{y}$$

1ον

$$\frac{d\beta}{dt}=v_x=\omega y$$

2ον ἐπιτάχυνσις $=\frac{dv_x}{dt}=\omega\frac{dy}{dt}=\omega\frac{dc}{dt}$ ἀλλ' ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἄλλων τριγώνων

$$\frac{\alpha c}{o\alpha'}=\frac{\alpha\beta}{o\alpha}\ \text{ἤ}\ \frac{\alpha c}{x}=\frac{\omega R dt}{R}\quad \alpha c=x\omega dt$$

ἐπιτάχυνσις $=\omega\frac{\alpha c}{dt}=\omega\frac{x\omega dt}{dt}=\omega^2 x$

ὅπου δέν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψει τό σημεῖον τοῦ $\alpha c=dy$ ὅπερ εἶναι ἀρνητικόν.

Κεφάλαιον II

Κίνησις στερεοῦ σώματος

Στερεά σώματα.- 20.— Στερεόν σῶμα ὀνομάζομεν ἐν τῇ μηχανικῇ τό σύνολον συστήματος ὑλικῶν σημείων, ὧν αἱ σχετικαί ἀποστάσεις μένουσιν ἀπολύτως ἀμετάβλητοι· τοιαῦτα σώματα εἶναι συλλήψεις τοῦ νοός ἁπλῶς, ἄνευ ἀληθοῦς ὑπάρξεως· ἐν τούτοις τά φυσικά σώματα, τά ὁποῖα καλοῦμεν στερεά, ἄν καί αἱ σχετικαί ἀποστάσεις τῶν ὑλικῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα ἀπαρτίζονται, δέν μένουσιν ὅλως δι' ὅλου ἀμετάβλητοι, πλησιάζουσι πολύ τά ἰδεώδη στερεά σώματα, οἷα ὡρίσαμεν αὐτά ἀνωτέρω, καί δυνάμεθα οὕτω ἄνευ ἐπαισθητῆς πλάνης νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τῶν ἐν τῇ φύσει στερεῶν τά ἀποτελέσματα εἰς ἅ θά φθάσωμεν σπουδάζοντες τήν κίνησιν τῶν πρώτων.

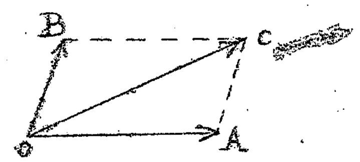
Ἡ ἰδέα ὅμως τῆς κινήσεως ἑνός σώματος δέν εἶναι τόσῳ ἁπλῆ ὅσῳ ἡ τῆς κινήσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου, κατά τήν ὁποίαν, ὁ προσδιορισμός τῆς τροχιᾶς καί ἡ ταχύτης, μεθ' ἧς διατρέχει αὐτήν τό κινητόν, παρέχουσα σαφεστάτην ἰδέαν τῆς ἐν λόγῳ κινήσεως. Ἐν τῇ κινήσει τοῦ στερεοῦ πρέπει ν' ἀκολουθῶμεν συγχρόνως τάς διαφόρους κινήσεις τῶν ἀποτελούντων αὐτό σημείων, καί οὕτω δυσκόλως δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν σαφῆ ἰδέαν τῆς κινήσεως τοῦ σώματος.

21.— Ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις ἁπλαῖ τινες κινήσεις τῶν στερεῶν τῆς ὁποίας δυνάμεθα ν' ἀκολουθήσωμεν ἐπίσης εὐκόλως ὡς καί τήν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Μεταβατική κίνησις

Ὅταν π.χ. ἡ κίνησις εἶναι τοιαύτη ὥστε τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ σώματος φέρονται ὑπὸ τῆς αὐτῆς ταχύτητος ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν μεταβατικὴν κίνησιν, αἱ εὐθεῖαι καὶ τὰ ἐπίπεδα τοῦ στερεοῦ μένουσιν παράλληλα ἑαυτοῖς κατὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ σώματος καὶ τὰ ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων διαγραφόμενα στοιχειώδη τόξα ds ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι dt εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα πρὸς ἄλληλα οὕτως ὥστε αἱ τροχιαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ μίαν μόνον ἐξ αὐτῶν ἀρκεῖ διὰ τὸν πλήρη προσδιορισμὸν τῆς κινήσεως τοῦ στερεοῦ.

Ἐὰν δὲ τὸ σῶμα φέρηται συγχρόνως ὑπὸ δύο μεταβατικῶν κινήσεων OA καὶ OB, ἡ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσα κίνησις εἶναι καὶ αὐτὴ μεταβατικὴ καὶ ἴση τῇ διαγωνίῳ OC τοῦ παραλληλογράμμου BOAC.



Τὴν μεταβατικὴν κίνησιν παριστῶμεν ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ διὰ τμήματος εὐθείας παραλλήλου τῇ ταχύτητι τῶν σημείων κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην καὶ ἴσης ἢ ἀναλόγου τῷ μεγέθει αὐτῆς.

Περιστροφική κίνησις. — 22. — Ἄλλη κίνησις τοῦ στερεοῦ ἁπλῆ ὡς καὶ ἡ προηγουμένη, τῆς ὁποίας ἔχομεν τελείως ἰδέαν σαφεστάτην, εἶναι ἡ περὶ σταθερὸν ἄξονα περιστροφὴ τοῦ σώματος, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ διάφορα αὐτοῦ σημεῖα, διαγράφουσι κύκλους, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τῷ ἄξονι καὶ τὰ κέντρα ἐπ' αὐτοῦ.

Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουσι τὰ διὰ τοῦ σταθεροῦ ἄξονος διερχόμενα διάφορα ἐπίπεδα μὲ τὰς ἀρχικὰς αὐτῶν θέσεις εἶναι αἱ αὐταί.

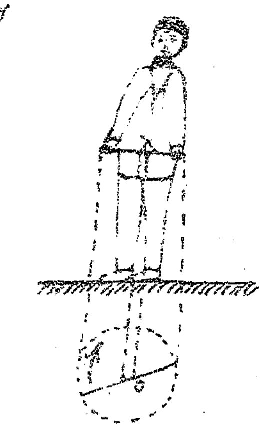
Ὁ λόγος $\frac{d\theta}{dt}$ τῆς κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt διαγραφομένης γωνίας $d\theta$ πρὸς αὐτὸ τὸ χρονικὸν διάστημα καταμετρᾷ τὴν περὶ τὸν ἄξονα περιστροφήν.

Περιστροφική ταχύτης. — 23. — Ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται μὲ τὴν ταχύτητα ω τῶν σημείων τῶν εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν ἴσην τῇ μονάδι ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ καλεῖται περιστροφικὴ ταχύτης, ἡ δὲ ταχύτης V οἱουδήποτε σημείου ἀπέχοντος κατὰ r τοῦ ἄξονος ἰσοῦται μὲ

$$V = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

ἡ ταχύτης οἱουδήποτε σημείου εἶναι πάντοτε κάθετος τῷ ἄξονι τῆς περιστροφῆς.

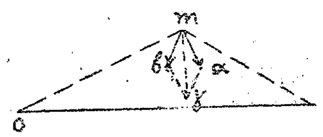
Ἡ περιστροφικὴ ταχύτης $\frac{d\theta}{dt}$ χαρακτηρίζει τὴν περιστροφικὴν κίνησιν καὶ ἵνα ἀφήσωμεν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ κάμωμεν χρῆσιν τῆς ταχύτητος ταύτης, τὸν γενικὸν αὐτῶν χαρακτῆρα, θὰ θεωρήσωμεν αὐτὴν ὡς θετικήν, ἐὰν ἡ περιστροφὴ ἐκτελῆται κατὰ ὡρισμένην τινὰ διεύθυνσιν, καὶ ὡς ἀρνητικὴν ἐὰν ἡ περιστροφὴ ἐκτελῆται κατὰ τὴν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης διευθύνσεως.



Τὴν περιστροφικὴν κίνησιν, ἢ συντομώτερον τὴν περιστροφὴν στερεοῦ σώματος περὶ σταθερὸν ἄξονα παριστῶμεν γραφικῶς διὰ τμήματος εὐθείας γραμμῆς OX τῆς αὐτῆς διευθύνσεως μὲ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον ἢ ἀνάλογον τῇ περιστροφικῇ ταχύτητι $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. Ἐὰν δὲ νοήσωμεν παρατηρητὴν κατακείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας OX μὲ τοὺς πόδας παρὰ τὸ σημεῖον O, ἡ ποσότης $\frac{d\theta}{dt}=\omega$ θά εἶναι θετική, ἐάν ἡ περιστροφή ἐκτελῆται ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ὅπως περιστρέφονται συνήθως οἱ δεῖκται τῶν ὡρολογίων, καί ἀρνητική, ἐάν ἡ περιστροφή γίνηται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν.

§ 2. — Σύνθεσις καί ἀποσύνθεσις συγχρόνων περιστροφικῶν κινήσεων

24.— Σῶμά τι (m) τείνει νά κινηθῇ ταὐτοχρόνως περί δύο παραλλήλους ἄξονας O καί O' μέ ἀμοιβαίας γωνιακάς ταχύτητας ω καί ω'. Ζητεῖται ἡ ἐκ τῶν δύο τούτων περιστροφικῶν κινήσεων προκύπτουσα τελική κίνησις τοῦ σώματος (m).

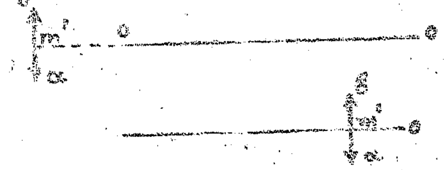


Ἐξ αἰτίας τῆς ἀρχῆς τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν συγχρόνων κινήσεων, δυνάμεθα κατά τό χρονικόν διάστημα dt νά θεωρήσωμεν τάς περί τούς ἄξονας περιστροφικάς κινήσεις τήν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης, οὕτως ὥστε τό σημεῖον m τοῦ σώματος (m) θά διαγράψῃ διαδοχικῶς τά στοιχειώδη τόξα $m\alpha = om.\omega dt = vdt$ καί $m\beta = o'm.\omega' dt = v'dt$ περί τούς ἄξονας O καί O' καί καθέτως τοῖς ἀκτῖσι om καί o'm. Ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου (m) κατά τήν περί τόν ἄξονα O περιστροφήν αὐτοῦ εἶναι ἡ mα.

Ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοῦ σημείου m κατά τήν περί τόν ἄξονα O' περιστροφήν αὐτοῦ παρίσταται διά τῆς εὐθείας mβ, καί ἐνόσῳ τό σημεῖον m κεῖται ἐκτός τοῦ ὑπό τῶν ἀξόνων

O καί O' περιοριζομένου ἐπιπέδου, αἱ εὐθεῖαι mβ καί mα δίδουσι συνισταμένην τήν mγ διαφοράν τοῦ μήκους.

Ἀλλ' ἐάν τό σημεῖον m εὑρίσκηται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OO' συμπίπτον μέ τό m', αἱ εὐθεῖαι m'α καί m'β συμπίπτουσι, καί ἡ τελική ταχύτης τοῦ σημείου m' ἰσοῦται μέ τό ἀριθμητικόν ἄθροισμα ἤ τήν διαφοράν τῶν συνιστωσῶν ταχυτήτων, ἐάν αἱ περιστροφαί εἶναι τῆς αὐτῆς ἤ ἀντιθέτου φορᾶς· καί ἐάν λάβωμεν τό ἐπί τῆς εὐθείας OO' σημεῖον m' οὕτως ὥστε



(1) $$om'.\omega = o'm'.\omega'$$

αἱ δύο ταχύτητες v καί v' εἶναι ἴσαι καί τό σημεῖον m' μένει ἀκίνητον ἐάν εἶναι αὗται καί ἀντιθέτου φορᾶς.

Ἡ σχέσις (1) προσδιορίζει ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν δύο σημεῖα m' τό ἕν μεταξύ τῶν σημείων O καί O' καί τό ἕτερον ἐκτός αὐτῶν, καί ἐπομένως καταφαίνεται, ὅτι ἐάν αἱ περί τούς ἄξονας O καί O' περιστροφαί ἔχωσι τήν αὐτήν φοράν τό μόνον ἀκίνητον σημεῖον εἶναι τό m'· ἐάν αἱ περιστροφαί εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς τό μόνον ἀκίνητον σημεῖον εἶναι τό μ'.

καί βλέπομεν οὕτω ὅτι

αἱ δύο περιστροφικαί κινήσεις, μεθ' ὧν φέρεται τό σῶμα περί τούς ἄξονας O καί O' δύνανται νά ἀντικατασταθῶσιν ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ ὑπό μιᾶς καί μόνης περιστροφικῆς κινήσεως περί τόν ἄξονα m', οὗτινος ἡ θέσις ἐν σχέσει πρός τούς πρώτους προσδιορίζεται διά τῆς σχέσεως

$$\frac{m'O}{m'O'} = \frac{\omega'}{\omega} \quad \text{ἤ} \quad m'O = \frac{\omega'}{\omega+\omega'}.OO'$$

εἴδομεν ἤδη τό μέγεθος τῆς περί τόν ἄξονα m προκυπτούσης περιστροφικῆς ταχύτητος Ω, ὅταν ἐξηγήσαμεν τας δύο περιστροφικάς κινήσεις περί τούς ἄξονας o καί o' διαδοχικῶς τήν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης, ἡ ταχύτης τοῦ σημείου o π.χ. ἦτο oo'.ω'. Ἤδη διότι ἀντικαθιστῶμεν τάς δύο περιστροφάς ὑπό μιᾶς καί μόνης ἰσοδυνάμου περί τόν ἄξονα m, ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοῦ σημείου o εἶναι ἡ αὐτή ἐν ταῖς ἰσοδυνάμοις ταύταις κινήσεσιν ἔχομεν

$$\omega' . oo' = \Omega . mo \quad \text{ἤ} \quad \Omega = \frac{oo'}{mo}\omega' = \frac{\omega+\omega'}{\omega'}\omega'$$

$$\Omega = \omega + \omega'$$

ὥστε ἡ περί τόν ἄξονα m προκύπτουσα περιστροφή ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν δύο συνιστωσῶν. Τό ἀλγεβρικόν σημεῖον τοῦ Ω ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχετικοῦ μεγέθους καί τῶν σημείων τῶν ταχυτήτων ω καί ω'. Ἐάν ω καί ω' εἶναι ὁμόσημον δηλ. αἱ συνιστῶσαι περιστροφαί ἔχουσι τήν αὐτήν φοράν καί ἡ συνισταμένη αὐτῶν Ω εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ἐάν ω καί ω' εἶναι ἑτερόσημον, δηλ. αἱ μερικαί περιστροφαί εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς, ἡ φορά τῆς συνισταμένης Ω εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν φοράν τῆς μεγαλειτέρας ἐκ τῶν δύο συνιστωσῶν.

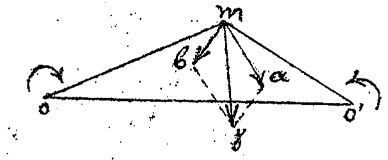
25.— Ἐάν $\omega' = -\omega$ ἔχομεν $\Omega = 0$ καί $mo = \infty$ δηλ. ἡ προκύπτουσα κίνησις ἰσοδυναμεῖ μέ περιστροφήν περί ἄξονα κείμενον ἀπείρως μακράν καί μέ περιστροφικήν ταχύτητα ἴσην τῷ μηδενί, ὅθεν οἱ ἀνωτέρω τύποι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, οὐδεμίαν ἔχουσι σημασίαν.

Ἐν τούτοις εὐκόλως δυνάμεθα νά ἴδωμεν, ὅτι ἡ ἐκ τῶν δύο περιστροφῶν περί τούς ἄξονας o καί o' προκύπτουσα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ κίνησις, ἰσοδυναμεῖ μέ μεταβατικήν κίνησιν

τοῦ στερεοῦ, κάθετον ἐπί τῆς εὐθείας oo'. Τῷ ὄντι ἐάν παραστήσωμεν διά τῶν εὐθειῶν mβ καί mα τάς ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως περί τούς ἄξονας o καί o' ταχύτητας mo.ω καί mo'.ω οἱουδήποτε σημείου m τοῦ στερεοῦ σώματος (m), ἔχομεν

$$\frac{m\beta}{m\alpha} = \frac{\omega\, mo'}{\omega . mo} = \frac{mo'}{mo}$$

καί ἐπειδή ἡ γωνία $\widehat{m\alpha\gamma}$ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ $o\widehat{m}o'$, τά τρίγωνα mαγ καί omo' εἶναι ὅμοια καί κατά συνέπειαν ἡ συνισταμένη mγ τῶν δύο ταχυτήτων mα καί mβ τοῦ σημείου m εἶναι κάθετος ἐπί τῆς εὐθείας oo'. ὅθεν



τά σημεῖα τοῦ στερεοῦ φέρονται καθέτως πρός τό ὑπό τῶν δύο ἀξόνων o καί o' προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον μέ ταχύτητα ἴσην τῇ oo'.ω καί δυνάμεθα οὕτω νά θεωρήσωμεν τήν μεταβατικήν κίνησιν ὡς ἰσοδύναμον μέ περιστροφικήν κίνησιν περί ἄξονα ἀπείρως ἀπομεμακρυσμένον καί μέ γωνιαίαν ταχύτητα ἴσην τῇ ταχύτητι τῆς μεταβατικῆς κινήσεως οἱουδήποτε σημείου τοῦ στερεοῦ.

Σημειωτέον ὅτι ἡ ἐκ τῶν δύο ἴσων περιστροφῶν, τάς ὁποίας ὁ Poinsot ὠνόμασε περιστροφικόν ζεῦγος, προκύπτουσα κίνησις ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς διευθύνσεως τοῦ ἐπιπέδου oo' καί τοῦ μεγέθους oo'.ω τῆς κοινῆς ταχύτητος, μένει δέ ἡ αὐτή ἐάν οἱ ἄξονες τῆς περιστροφῆς μεταφέρωνται εἰς οἱανδήποτε θέσει ἐν τοῖς παραλλήλοις τῷ oo' ἐπιπέδοις, διατηροῦντες ἄμφω τήν σχετικήν αὐτῶν ἀπόστασιν oo'.

Σύνθεσις οἱωνδή. ποτε ἀριθμοῦ περι. στροφῶν περί παραλ. λήλους ἄξονας.

26. — Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν οἱονδήποτε ἀριθ. μόν περιστροφῶν $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_4$ περί παραλλήλους ἄξονας $o_0, o_1, o_2 \ldots\ldots o_4$ εὐκό. λως δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἄξονα o καί περιστροφικήν περί αὐτόν κίνησιν $\omega = \Sigma\omega_i$ ἀντικαθιστῶσαν τό σύνολον τῶν μερικῶν περιστροφικῶν κινήσεων $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots\ldots \omega_4$ περί τούς παραλλήλους ἄξονας $o_0, o_1 \ldots\ldots o_4$.

Ἀποσύνθεσις τῆς περί τόν ἄξονα m περιστροφικῆς κινήσεως Ω εἰς δύο ἄλλας ω καί ω' περί τούς ἄξονας o καί o' κειμένους ἐν τῷ αὐτῷ μέ τόν ἄξονα m ἐπιπέδῳ καί παραλλήλους αὐτῷ.

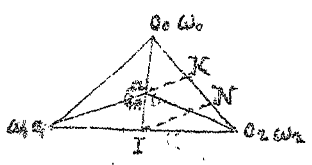
27. — Ἐκ τῶν ἀμέσως προαποδειχθέντων ἐξάγομεν, ὅτι αἱ τιμαί τῶν περί τούς ἄξονας o καί o' συνιστωσῶν περιστροφῶν προσδιορίζονται ἀκριβῶς διά τῶν σχέσεων.

$$\omega = \frac{\Omega}{oo'} \cdot o'm \quad \text{καί} \quad \omega' = \frac{\Omega}{oo'} \cdot om$$

καί βλέπομεν ὅτι ἡ ἀποσύνθεσις αὕτη τῆς ἀρχικῆς περί τόν ἄξονα m περιστροφῆς, εἰς δύο ἄλλας περί ὡρισμένους ἄξονας o καί o' περιστροφῆς κατά ἕνα μόνον τρόπον δύναται νά γίνῃ.

Σύνθεσις τῆς περί τόν ἄξονα m περιστροφικῆς κινήσεως Ω εἰς τρεῖς περί τούς ἄξονας o_0, o_1, o_2 ἰσοδυνάμους περιστροφάς $\omega_0, \omega_1, \omega_2$

28. — Χωρίς νά παραβλέψωμεν τήν γενικότητα τῆς ἀποδείξεως δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν τό σημεῖον m ἐντός τοῦ τριγώνου $o_0 o_1 o_2$ καί ἀποσυνθέσωμεν ὡς ἀνωτέρω τήν περί τόν ἄξονα m



περιστροφικήν κίνησιν εἰς δύο ἄλλας $\omega_0 = \Omega \frac{mI}{Io_0} = \Omega \frac{\text{ἡμβ}\ mo_1o_2}{\text{ἡμβ.}\ o_0o_1o_2}$

περί τόν ἄξονα o_0 καί $\omega' = \Omega \frac{mo_0}{Io_0}$ [illegible] περί τόν ἄξονα I περιστροφικήν κίνησιν δυνάμεθα ἤδη ν' ἀποσυνθέσωμεν εἰς δύο ἄλλας $\omega_1 = \Omega \frac{mo_0}{Io_0} \cdot \frac{Io_2}{o_1o_2}$ καί $\omega_2 = \Omega \frac{mo_0}{Io_0} \cdot \frac{Io_1}{o_1o_2}$ περί τούς ἄξονας o_1 καί o_2. Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἕπεται ὅτι

$$\frac{Io_2}{o_1o_2} = \frac{IN}{o_1K}$$

καί

$$\frac{mo_0}{Io_0} = \frac{mK}{IN}$$

ἐξ οὗ

$$\frac{mo_0}{Io_0} \cdot \frac{Io_2}{IN} = \frac{mK}{o_1K} = \frac{\text{ἡμβ}}{\text{ἡμβ}} \frac{mo_0o_2}{o_0o_1o_2}$$

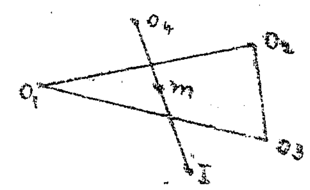
ὅθεν

$$\omega_1 = \Omega \frac{\text{ἡμβ.}\ mo_0o_2}{\text{ἡμβ.}\ o_0o_1o_2}$$

καί διά τοῦ αὐτοῦ τρόπου θά εὑρίσκωμεν

$$\omega_2 = \Omega \frac{\text{ἡμβ}\ mo_0o_1}{\text{ἡμβ}\ o_0o_1o_2}$$

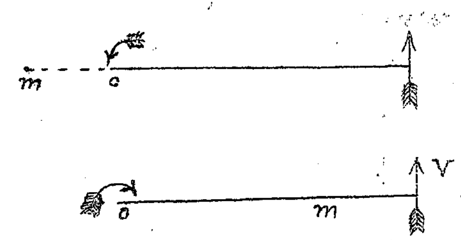
ἐκ τῆς ἀκολουθίας τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως καταφαίνεται ὅτι __ἡ περί τρεῖς ὡρισμένους ἄξονας ἀποσύνθεσις μιᾶς περιστροφικῆς κινήσεως κατά ἕνα μόνον τρόπον δύναται νά ἐκτελεσθῇ__. Τοῦτο δέν συμβαίνει ἐάν θελήσωμεν ν' ἀποσυνθέσωμεν τήν περί τόν ἄξονα m περιστροφικήν κίνησιν εἰς τέσσαρας ἄλλας περί ὡρισμένους ἄξονας $o_1\ o_2\ o_3\ o_4$.



Τῷ ὄντι ἐάν ἐπί τῆς ὡρισμένης εὐθείας $o_4 I$ λάβωμεν οἱονδήποτε σημεῖον τό I καί ἀποσυνθέσωμεν τήν περί τόν ἄξονα m περιστροφικήν κίνησιν εἰς δύο ἄλλας περί τούς ἄξονας o_4 καί I. τήν τελευταίαν ταύτην περί τόν ἄξονα I περιστροφικήν κίνησιν δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν εἰς τρεῖς ἄλλας περί τούς ἄξονας $o_1\ o_2\ o_3$ καί τό πρόβλημα ἐλύθη οὕτω. Ἀλλά τό σημεῖον I εἶναι ἀπροσδιόριστον ἐπί τῆς εὐθείας mo_4 καί κατά συνέπειαν καί ἡ περί τόν ἄξονα I περιστροφή εἶναι ἀπροσδιόριστος καί δύναται νά λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν· ἡ ζητουμένη λοιπόν ἀποσύνθεσις δύναται νά γίνῃ κατά μυρίους τρόπους.

Σύνθεσις περιστροφικῆς κινήσεως περί τόν ἄξονα o καί μεταβατικῆς κινήσεως μέ ταχύτητα V καθέτου τῷ ἄξονι o. —

29. — Ἐάν ἐκ τοῦ σημείου o φέρωμεν κάθετον ἐπί τῆς παραστατικῆς εὐθείας τῆς ταχύτητος V καί λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον m, τό σημεῖον τοῦτο φέρεται ὑπό κινήσεως καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ mo καί μέ ταχύτητα ἴσην τῷ ἀθροίσματι $\omega . mo + V$, τῶν ἐκ τῆς περιστροφικῆς καί μεταβατικῆς κινήσεως προκυπτουσῶν μερικῶν ταχυτήτων $\omega . mo$ καί V· ὥστε ἐάν τό σημεῖον m ληφθῇ οὕτως ὥστε τό ἄθροισμα $\omega . om + V$ νά μηδενίζεται, θά μένῃ τοῦτο ἀκίνητον καί τό στερεόν σῶμα περιστρέφεται περί τόν ἄξονα m, τοῦ ὁποίου ἡ θέσις προσδιορίζεται διά τῆς σχέσεως



$$om = \frac{V}{\omega}$$

ἡ προκύπτουσα γωνιαία ταχύτης Ω περί τόν ἄξονα m εὑρίσκεται διά τῆς κινήσεως τοῦ σημείου o, οὗτινος ἡ ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα o περιστροφικῆς καί τῆς μεταβατικῆς κινήσεως V προκύπτουσα ταχύτης εἶναι V, ἡ δέ ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα m περιστροφικῆς κινήσεως προκύπτουσα ταχύτης τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι $\Omega . om$, ὅθεν

$$\Omega . om = V \quad \text{ἤ} \quad \Omega = \frac{V}{om} = \omega$$

ὅθεν ἡ ἐκ περιστροφῆς ω περί τόν ἄξονα o καί μεταβατικῆς κινήσεως V καθέτου τῷ ἄξονι τούτῳ προκύπτου-

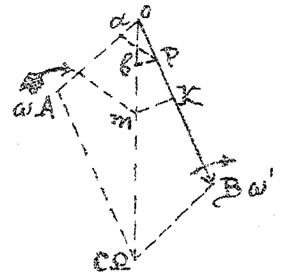
σα κίνησις στερεοῦ τινός ἰσοδυναμεῖ μέ μίαν μόνην περιστροφικήν κίνησιν ω περί τόν ἄξονα m τό ὁποῖον προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως $om = \frac{V}{\omega}$

καί ἀντιστρόφως πᾶσα περί τόν ἄξονα m περιστροφική κίνησις δύναται ν' ἀντικατασταθῇ δι' ἑτέρας περιστροφικῆς κινήσεως περί ἕτερον ἄξονα o παράλληλον τῷ πρώτῳ καί κείμενον εἰς οἱανδήποτε ἀπόστασιν om αὐτοῦ συνοδευομένης ὑπό μεταβατικῆς κινήσεως μέ ταχύτητα $V = om . \omega$ καί κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ om· ἡ ἀποσύνθεσις αὕτη ὀνομάζεται μεταφορά περιστροφικῆς κινήσεως παραλλήλως ἑαυτῇ ἀπό ἑνός εἰς ἕτερον σημεῖον.

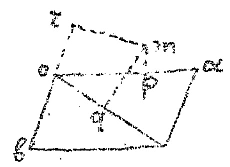
Ὅπερ ἠδυνάμεθα καί ἀπ' εὐθείας ν' ἀποδείξωμεν ὑποβάλλοντες τό στερεόν εἰς ἴσας καί ἀντιθέτους περιστροφικάς κινήσεις ω καί −ω περί τόν ἄξονα o, διότι ἡ μία τῶν περιστροφικῶν τούτων κινήσεων ἀποτελεῖ μετά τῆς περί τόν ἄξονα m περιστροφῆς, ζεῦγος περιστροφικόν, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μέ μεταβατικήν κίνησιν.

Σύνθεσις περιστροφικῶν κινήσεων περί ἄξονας συμπίπτοντας περί τό σημεῖον o.

30 — Στερεόν σῶμα φέρεται ταὐτοχρόνως ὑπό δύο περιστροφικῶν κινήσεων ω καί ω', ὧν αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι εἶναι OA καί OB* ζητεῖται ἡ ἐκ τῶν δύο τούτων συγχρόνων περιστροφικῶν κινήσεων προκύπτουσα πραγματική κίνησις τοῦ στερεοῦ. Οἷον-



* Ἐάν αἱ φοραί τῶν περιστροφικῶν κινήσεων ἦσαν ἀντίθετοι, αἱ παραστατικαί αὐτῶν εὐθεῖαι θά ἦσαν OB καί ἡ προεκβολή τῆς OA ἢ τἀνάπαλιν.



δήποτε σημεῖον m τοῦ ἐπιπέδου, φέρεται ὑπό δύο κινήσεων, ὧν αἱ ταχύτητες εἶναι ω.mI καί ω'.mK κάθετοι τῷ ἐπιπέδῳ AOB καί ἀντιθέτου φορᾶς ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ σχήματος,

Τά ὑπό τῆς σχέσεως

$$\omega . mI = \omega' . mK$$

προσδιοριζόμενα σημεῖα μένουσι κατά συνέπειαν ἀκίνητα γνωρίζομεν δέ ὅτι <u>τά σημεῖα ταῦτα εὑρίσκονται ἐπί τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου AOBC</u>**.

ὥστε ἡ προκύπτουσα πραγματική κίνησις τοῦ στερεοῦ εἶναι περιστροφική κίνησις περί τόν ἄξονα oc. Τήν περιστροφικήν ταχύτητα Ω τῆς συνισταμένης περιστροφικῆς κινήσεως περί τόν ἄξονα oc εὑρίσκομεν ἐάν ζητήσωμεν τήν ταχύτητα σημείου τινος P εὑρισκομένου ἐπί τοῦ ἑνός τῶν ἀξόνων OA ἢ OB κατά τάς μερικάς περιστροφάς περί τούς ἄξονας OA καί OB ἢ κατά τήν προκύπτουσαν πραγματικήν περιστροφήν τοῦ σώματος περί τόν ἄξονα oc ἔχομεν οὕτω

$$\Omega_1 . Pb = \omega . Pa$$

ἀλλά,

$$oc . Pb = oA . Pa = \omega . Pa .$$

ὅθεν

$$\frac{\Omega_1}{oc} = I, \quad \Omega_1 = oc$$

<u>ἡ παραστατική λοιπόν εὐθεῖα τῆς προκυπτούσης πραγματικῆς περιστροφικῆς κινήσεως εἶναι ἡ διαγώνιος oc τοῦ παραλληλογράμμου AOBC.</u>

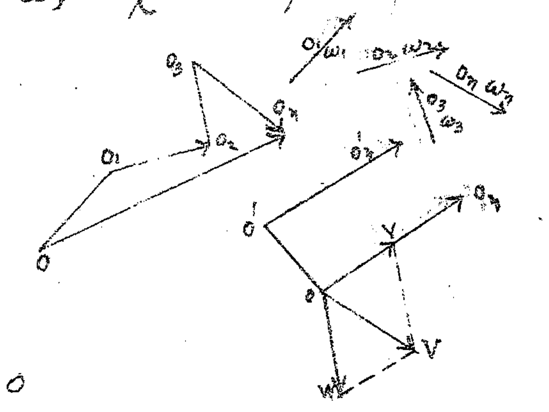
** Τῷ ὄντι ἐν οἱῳδήποτε παραλληλογράμμῳ oaob ἔχομεν

$$mp . oc + mr . ob = mq . oc$$

Σύνθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμοῦ περιστροφικῶν κινήσεων

31. — Θεωρήσωμεν τώρα σῶμα φερόμενον ὑπό οἱουδήποτε ἀριθμοῦ περιστροφικῶν κινήσεων ἐχουσῶν οἱαδήποτε μεγέθη καί διευθύνσεις ἐν τῷ διαστήματι.

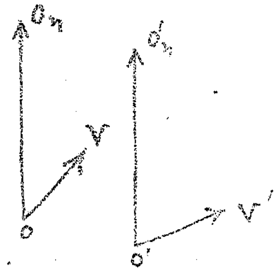
Τάς περιστροφικάς κινήσεις δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν παραλλήλως ἑαυταῖς εἰς τό ἀπροσδιόριστον σημεῖον o, ὅπερ λαμβάνομεν ὁπουδήποτε ἐν τῷ διαστήματι, ἀντικαθιστῶντες ἑκάστην τούτων, τήν ω, π.χ. δι' ἑτέρας ἴσης αὐτῇ περί ἄξονα παράλληλον τῷ Oi καί διερχόμενον διά τοῦ σημείου o, καί διά μιᾶς μεταβατικῆς κινήσεως ἴσης τῇ $\omega_i . oo_i$ καί καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ oo_i. τάς περί τό σημεῖον o περιστροφικάς κινήσεις $oo_1, oo_2 \ldots oo_4$ δυνάμεθα ἤδη ν' ἀντικαταστήσω διά μιᾶς καί μόνης περιστροφικῆς κινήσεως, ἧς ἡ παραστατική εὐθεῖα εἶναι ἡ oon.



Τάς μεταβατικάς κινήσεις $oV, oV_2 \ldots oV_n$, αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν περιστροφῶν παρά τό σημεῖον o δυνάμεθα ἐπίσης ν' ἀντικαταστήσωμεν διά μιᾶς καί μόνης ov οὕτως ὥστε τό σύνολον τῶν περιστροφικῶν κινήσεων, ὑφ' ὧν ἐφέρετο τό σῶμα, ἀντικατεστάθη διά μιᾶς μόνης περιστροφικῆς κινήσεως ov. Ἐάν ἤδη μεταβάλωμεν τήν θέσιν τοῦ σημείου o, τά μήκη καί αἱ φοραί τῶν συνιστωσῶν $oo_1, oo_2, oo_3 \ldots oo_n$ δέν μεταβάλλονται καί κατά συνέπειαν ὁ προκύπτων ἄξων περιστροφῆς oon τηρεῖ πάντοτε τό αὐτό μέγεθος καί τήν αὐτήν διεύθυνσιν, ὥστε, <u>τό μέγεθος τῆς προκυπτούσης περιστροφικῆς κινήσεως καί ἡ</u>

[illegible] διά τῆς μετακινήσεως [illegible] [illegible] περιστρο- [illegible] ταχύτητες $ov_1, ov_2 \ldots ov_n$ [illegible] ἄξονα τῶν [illegible] κατά τι μέγεθος [illegible] αὐτῶν [illegible]

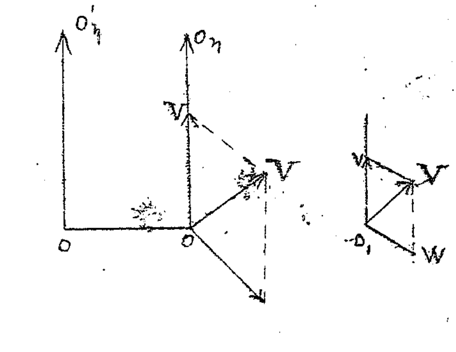
[illegible] [o'_n, V'] παρά τό σημεῖον [illegible] [oo_n, V] ὥστε [oo_n, V] εἶναι τό αὐτό [illegible] [o'_n, V'] καί μίαν μεταβατικήν κίνησιν $= \frac{oo'}{oo_n}$, ἥτις προστιθεμένη τῇ V' δίδει τήν V, διά ἔχει λοιπόν συνιστῶσαν παράλληλον τῷ ἄξονι oo_n, ἡ μεταβατική αὕτη κίνησις $\frac{oo'}{oo_n}$, ἥτις προστιθεμένη τῇ V δίδει τήν V δέν ἔχει λοιπόν συνιστῶσαν παράλληλον τῷ ἄξονι oo_n, ὥστε προβ. τῆς ov = προ τῆς ov'. Δυνάμεθα ἤδη νά προσδιορίσωμεν σημεῖόν τι O, οὕτως ὥστε διά τῆς μεταφορᾶς τῶν περιστροφικῶν κινήσεων παρά τό σημεῖον τοῦτο, ἡ προκύπτουσα μεταβατική κίνησις νά εἶναι ἡ ov παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς περιστροφῆς. ἀρκεῖ πρός τοῦτο ν' ἀποσυνθέσωμεν τήν ταχύτητα ov εἰς ov καί on παραλλήλως καί καθέτως τῇ oo_n, καί συνθέσωμεν τήν περιστροφικήν κίνησιν oo_n μέ τήν μεταβατικήν ow, αἵτινες ἰσοδυναμοῦσι μέ μίαν μόνον περιστροφικήν κίνησιν ἴσην τῇ oo_n περί τόν ἄξονα $o o_n$ παράλ-



ληλον τῇ oo_n καί κείμενον εἰς ἀπόστασιν $= \frac{W}{oo_n}$.

32. — Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι σῶμά τι φέρεται ὑπό οἱουδήποτε ἀριθμοῦ περιστροφῶν καί μεταβατικῶν κινήσεων, ἐχουσῶν οἱαδήποτε μεγέθη καί φοράς ἐν τῷ διαστήματι.

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, τάς περιστροφικάς κινήσεις δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διά μιᾶς μόνης περιστροφικῆς κινήσεως συνοδευομένης ὑπό ἑτέρας μεταβατικῆς, προκυπτούσης ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν περιστροφῶν περί τό σημεῖον O. Τάς μεταβατικάς κινήσεις δυνάμεθα ἐπίσης ν' ἀντικαταστήσωμεν διά τῆς συνισταμένης αὐτῶν. Ἐάν δέ συνθέσωμεν ἤδη τήν συνισταμένην ταύτην, μέ τήν συνισταμένην τῶν ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν περιστροφῶν παρά τό σημεῖον O προκυπτουσῶν μεταβατικῶν κινήσεων ἀντικαθιστῶμεν τό σύνολον τῶν περιστροφικῶν καί μεταβατικῶν κινήσεων, ἐφ' ὧν ἐφέρετο τό σῶμα, διά μιᾶς μόνης περιστροφικῆς καί μιᾶς μεταβατικῆς κινήσεως καί λέγομεν ὅτι, ἡ κίνησις στερεοῦ σώματος, φερομένου, ὑπό οἱουδήποτε ἀριθμοῦ περιστροφικῶν καί μεταβατικῶν κινήσεων, δύναται νά ἀντικατασταθῇ δι' ἑτέρας ἰσοδυνάμου κινήσεως, ἀποτελουμένης ἐκ περιστροφῆς περί τινα ἄξονα καί ἐκ μεταβατικῆς κινήσεως, τῆς ὁποίας τό μέγεθος καί τήν φοράν προσδιορίζει ἡ θέσις τοῦ ἄξονος.



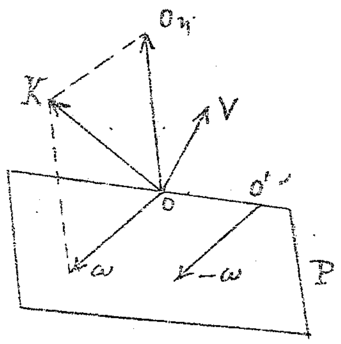
Ὁ ἄξων οὗτος τῆς περιστροφῆς δύναται νά διέλθῃ δι' οἱουδήποτε σημείου τοῦ διαστήματος ἀλλ' ἡ φορά καί τὸ μέγεθος τῆς περιστροφικῆς κινήσεως μένουσιν ἀμετάβλητα.

Ἡ μεταβατικὴ κίνησις μεταβάλλεται κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φοράν· ἀλλ' ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος μένει ἀμετάβλητος.

Δυνάμεθα δὲ νὰ προσδιορίσωμεν ἐν τῷ διαστήματι σημεῖον τοιοῦτον ὥστε ἐὰν ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς διέρχηται διὰ τοῦ σημείου τούτου, ἡ μεταβατικὴ κίνησις εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι.

Ἀποσύνθεσις τῆς γενικῆς κινήσεως στερεοῦ σώματος εἰς δύο περιστροφάς.

32.— Θεωρήσωμεν ἐκ νέου τὰς παραστατικὰς εὐθείας Oo_n καὶ OV τῆς τυχικῆς περιστροφικῆς καὶ μεταβατικῆς κινήσεως. Ὡς ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν μεταβατικὴν κίνησιν OV διὰ ζεύγους περιστροφικῶν κινήσεων $(\omega, -\omega)$ περὶ ἄξονας O, O' κειμένους ἐν τῷ καθέτῳ τῇ OV ἐπιπέδῳ καὶ εἰς ἀπόστασιν $OO' = \frac{V}{\omega}$ ἀλλήλων ὧν ὁ εἷς διέρχεται διὰ τοῦ σημείου O. Τὴν περιστροφικὴν ταύτην κίνησιν περὶ τὸν διὰ τοῦ σημείου O διερχόμενον ἄξονα, δυνάμεθα νὰ συνθέσωμεν μὲ τὴν περὶ τὸν ἄξονα Oo_n εἰς μίαν μόνην, ἧς ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα εἶναι OK. οὕτως ὥστε.



Τὴν ἐξ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ συγχρόνων μεταβατικῶν καὶ περιστροφικῶν κινήσεων, μεθ' ὧν φέρεται σῶμά τι προκύπτουσαν τελικὴν κίνησιν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ δύο περιστροφικῶν κινήσεων περὶ

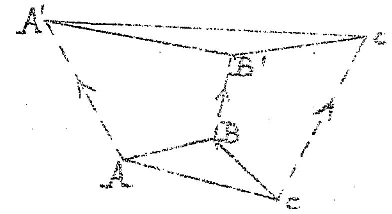
ἄξονας, οἵτινες ἐν γένει δὲν συναντῶνται καὶ τῶν ὁποίων τὸν ἕνα δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως.

Σημείωσις.— Ἀναλογία τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων καὶ τῆς συνθέσεως τῶν περιστροφῶν.

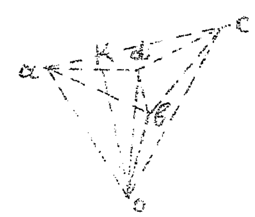
Ἡ γενικωτέρα κίνησις στερεοῦ σώματος, δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν ὡς συνισταμένη μιᾶς μεταβατικῆς καὶ ἑτέρας περιστροφικῆς κινήσεως.

33.— Εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς.

Ἐκ πρώτου γνωρίζομεν ὅτι ἡ θέσις τοῦ σώματος εἰς οἱανδήποτε στιγμὴν προσδιορίζεται, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τριῶν οἱωνδήποτε τῶν σημείων αὐτοῦ,* καὶ ἀρκεῖ ἐνταῦθα νὰ εὕρωμεν τὴν γενικὴν κίνησιν τοῦ στερεοῦ, γνωρίζοντες τὰς μερικὰς κινήσεις τῶν τριῶν σημείων A, B, C.



Ἔστωσαν A, B, C αἱ θέσεις τῶν σημείων τούτων ἐν ὡρισμένῃ τινὶ στιγμῇ καὶ A', B', C' μετὰ πάροδον τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. Αἱ στοιχειώδεις κινήσεις τῶν σημείων τούτων εἶναι AA', BB', CC'.



Ἐκ τοῦ σταθεροῦ σημείου O ἤχθησαν αἱ εὐθεῖαι Oa, Oβ, Oc

* Τῷ ὄντι τέταρτον σημεῖον δ οἱονδήποτε τοῦ σώματος δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν διὰ τριῶν σφαιρῶν, ὧν αἱ ἀκτῖνες r_1, r_2, r_3 ἰσοῦνται ταῖς ἀποστάσεσιν αὐτοῦ ἀπὸ τῶν δοθέντων τριῶν σημείων α, β, γ. αἱ σφαῖραι αὗται δύο μόνον ἔχουσι σημεῖα κοινὰ κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου α.β.γ καὶ τὸ ἓν τούτων συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον δ.

ἴσαι καί παράλληλοι ταῖς AA', BB', CC' τήν στοιχειώδη κίνησιν AA' = oa τοῦ σημείου A δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διά δύο ἄλλων $\bar{od}$ καί $d\bar{a}$ (d εἶναι τό σημεῖον ἐν ᾧ μία οἱαδήποτε εὐθεῖα od συναντᾷ τό ἐπίπεδον abc). Αἱ κινήσεις oβ καί oc τῶν σημείων B καί C δύνανται ἐπίσης ν' ἀντικατασταθῶσιν ὑπό τῶν κινήσεων $\bar{od}$ καί $\bar{βd}$ καί $\bar{oc} + \bar{dc}$.

Δυνάμεθα λοιπόν νά μεταφέρωμεν τό τρίγωνον ABC ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ θέσεως ABC εἰς τήν τελικήν A'B'C' διά μιᾶς μεταβατικῆς κινήσεως ἴσης καί παραλλήλου τῇ od. καί ἑτέρας τινός κινήσεως προερχομένης ἐκ τῆς συνισταμένης τῶν στοιχειωδῶν κινήσεων da, db, dc καί ἡ δευτέρα αὕτη κίνησις εἶναι προφανῶς παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ abc, ἀλλά κατωτέρω θ' ἀποδείξωμεν ὅτι, οἱαδήποτε κίνησις στερεοῦ σώματος γενομένη παραλλήλως ἐπιπέδῳ τινί abc δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ἐν μιᾷ στιγμῇ ὑπό περιστροφικῆς κινήσεως περί ἄξονα κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ abc.

ὥστε ἡ γενικωτέρα στιγμιαία κίνησις στερεοῦ τινος σώματος δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπό μιᾶς μεταβατικῆς κινήσεως (od) καί ἑτέρας περιστροφικῆς περί ἄξονα κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ abc. καί βλέπομεν ὅτι μετά τῆς εὐθείας od μεταβάλλεται προφανῶς καί τό σύστημα τῆς μεταβατικῆς καί περιστροφικῆς ταύτης κινήσεως.

Μεταξύ ὅλων αὐτῶν τῶν συστημάτων τῆς περιστροφικῆς καί μεταβατικῆς κινήσεως δι' ὧν δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τήν γενικωτέραν κίνησιν στερεοῦ

τινος σώματος, ὑπάρχει ἕν σπουδαιότερον τῶν λοιπῶν, ἐν ᾧ φέρομεν τήν εὐθεῖαν od, οὐχί πλέον οἱανδήποτε, ἀλλά κάθετον oK τῷ ἐπιπέδῳ abc ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ἡ μεταβατική κίνησις εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς περιστροφῆς, ὅστις ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καλεῖται στιγμιαῖος ἄξων τῆς περιστροφῆς καί τῆς ὀλισθήσεως, καί τόν ὁποῖον χάριν συντομίας θά ὀνομάσωμεν ἁπλῶς στιγμιαῖον ἄξονα.

Ἐν συνόψει βλέπομεν ὅτι
τήν μεταβατικήν κίνησιν δυνάμεθα νά λάβωμεν οἱανδήποτε κατά τήν φοράν· τό μέγεθος αὐτῆς ὁρίζεται τότε καί εἶναι πάντοτε μεῖζον τῆς OK ἐάν δέν εἶναι ἴσον αὐτῇ, ἡ προβολή αὐτῆς ἐπί τοῦ στιγμιαίου ἄξονος, ἰσοῦται πάντοτε τῇ OK, ὅθεν

Ἐάν ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ φέρωμεν ἐξ ἑνός σημείου O εὐθείας καί παραλλήλους ταῖς ταχύτησιν τῶν διαφόρων σημείων κινουμένου στερεοῦ τά ἄκρα τῶν διαφόρων τούτων εὐθειῶν εὑρίσκονται ἐν ἑνί καί τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καθέτῳ τῷ στιγμιαίῳ ἄξονι.

Θεωρήσωμεν εὐθεῖαν τινα Δ ἐν τῇ ἀρχικῇ θέσει τοῦ σημείου καί τήν εὐθεῖαν Δ', μεθ' ἧς συμπίπτει αὕτη ἐν τῇ δευτέρᾳ θέσει τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ. Τίνι τρόπῳ ἡ εὐθεῖα Δ μεταβαίνει ἐκ τῆς πρώτης αὐτῆς θέσεως εἰς τήν δευτέραν; διά μιᾶς μεταβατικῆς κινήσεως, ἥτις φέρει τήν εὐθεῖαν ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς θέσεως Δ εἰς ἑτέραν $Δ_1$, παράλληλον τῇ Δ. Ἐκ τῆς θέσεως δέ ταύτης $Δ_1$ ἑτέρα περιστροφική κίνησις φέρει τήν εὐθεῖαν εἰς τήν τελικήν αὐτῆς θέσιν Δ' καί ἡ γωνία $a = (\widehat{Δ_1, Δ'})$ εἶναι ἡ γωνία τῆς περιστροφῆς καί μένει

Κυνηγική Πρωτοπαπαδάκη

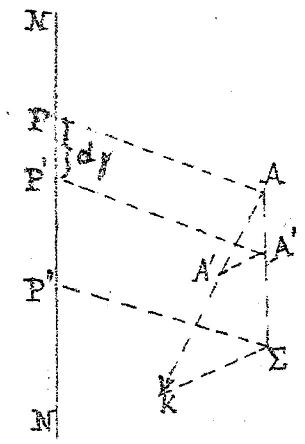
ἀμετάβλητος. Ὅθεν

οἱονδήποτε σύστημα περιστροφικῆς καί μεταβατικῆς κινήσεως ἐπιλέξωμεν, διά τήν μετάβασιν τοῦ στερεοῦ ἀπό τῆς πρώτης εἰς τήν δευτέραν αὐτοῦ θέσιν, ἡ γωνία τῆς περιστροφῆς μένει ἀμετάβλητος ἀφοῦ αἱ εὐθεῖαι Δ καί Δ' κατέχουν πάντοτε τάς αὐτάς θέσεις ἐν τῷ διαστήματι καί σχηματίζουσιν ὡρισμένην γωνίαν α.

Εἰς τά διάφορα συστήματα περιστροφικῆς καί μεταβατικῆς κινήσεως ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς μετατοπίζεται μένων κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ αβc καί κατά συνέπειαν παράλληλος ἑαυτῷ.

Ταχύτης τῶν διαφόρων σημείων τοῦ στερεοῦ.

34.— Ἔστωσαν ἐν ὡρισμένῃ τινί στιγμῇ NN ὁ στιγμιαῖος ἄξων καί A ἡ θέσις, ἥν κατέχει κατά τήν αὐτήν στιγμήν σημεῖόν τι τοῦ στερεοῦ. A' ἡ θέσις τοῦ αὐτοῦ σημείου μετά πάροδον τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. ἡ ταχύτης τοῦ σημείου τούτου A ἐκφράζεται διά $\frac{AA'}{dt}=AK$.



Ἔστω $\frac{dv}{dt}$ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τῷ ἄξονι NN στιγμιαία μεταβατική ταχύτης $A\Sigma$. τήν πραγματικήν ταχύτητα AK τοῦ σημείου A, δυνάμεθα, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν νά θεωρήσωμεν ὡς συνισταμένην ἐκ τῆς στιγμιαίας μεταβατικῆς ταχύτητος $\frac{dv}{dt}$ καί ἐξ ἑτέρας $\Sigma K=\frac{A''A'}{dt}$ προκυπτούσης ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα NN στιγμιαίας περιστροφικῆς κινήσεως da ὥστε

$$v^2=\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2$$

ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι $\frac{d\gamma}{dt}$ καί $\frac{da}{dt}$ εἶναι σταθερά μεγέθη δι' ὅλα τά σημεῖα τοῦ σώματος μόνη μεταβάλλεται ἡ ποσότης r μεταβαλλομένου ἀφ' ἑνός εἰς ἕτερον σημεῖον τοῦ στερεοῦ, ἡ ἐλαχίστη δέ τιμή τῆς ταχύτητος ἀντιστοιχεῖ εἰς τά σημεῖα τοῦ στερεοῦ διά τά ὁποῖα $r=0$ δηλ. τά ἐπί τοῦ ἄξονος NN ὅθεν.

ἐν τῇ στιγμιαίᾳ κινήσει στερεοῦ σώματος τά μετά τῆς ἐλαχίστης ταχύτητος φερόμενα σώματα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν κεντρικόν ἄξονα τῆς κινήσεως.

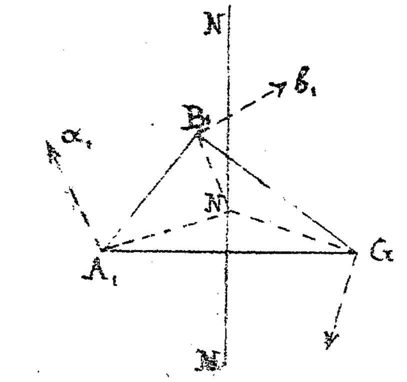
Προσδιορισμός τῶν ταχυτήτων

Ὁ κεντρικός ἄξων τῆς κινήσεως συμπίπτει μετά τοῦ στιγμιαίου ἄξονος τῆς περιστροφῆς.

35. — Ζητήσωμεν ἤδη τόν προσδιορισμόν τῶν ταχυτήτων $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{da}{dt}$ καί τοῦ στιγμιαίου ἄξονος, γνωρίζοντες τάς ταχύτητας τῶν τριῶν σημείων A, B, C.

Ἐπροσδιορίσαμεν ἤδη ἀνωτέρω τήν ταχύτητα $\frac{d\gamma}{dt}$ καί εὕρομεν αὐτήν ἴσην τῇ OK.

Ἐάν ἤδη προβάλωμεν τό τρίγωνον A, B, C. ἐπί τοῦ ἐπιπέδου α, β, c, ὅπερ προσδιορίζουσιν αἱ ταχύτητες τῶν σημείων A, B, C ἔχομεν τό ἔναντι σχῆμα ὅπου A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1 παριστῶσι τάς προβολάς τῶν ταχυτήτων τῶν σημείων A, B, C. Τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς εὑρίσκεται



κατ' ἀνάγκην ἐπί τῶν τριῶν εὐθειῶν NA_1, NB_1, NC_1, καθέτων ταῖς εὐθείαις A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1 (ἐξ οὗ καταφαίνεται ὅτι αἱ ταχύτητες τῶν τριῶν σημείων A, B, C δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων). Ὁ στιγμιαῖος ἄξων NN διέρχεται διά τοῦ προσδιὁρισθέντος σημείου N καί εἶναι κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ A_1, B_1, C_1. ἐπειδή δέ τά σημεῖα $A_1 B_1 C_1$ περιστρέφονται περί τό σημεῖον N μέ περιστροφικήν ταχύτητα $\frac{da}{dt}$ ἔχομεν τάς σχέσεις,

$$A_1\alpha_1 = NA_1\frac{da}{dt} \qquad B_1\beta_1 = NB_1\frac{da}{dt} \qquad C_1c_1 = NC_1\frac{da}{dt}$$

ἐξ ὧν προσδιορίζομεν τήν ταχύτητα $\frac{da}{dt}$, ἐντός τούτου αἱ σχέσεις

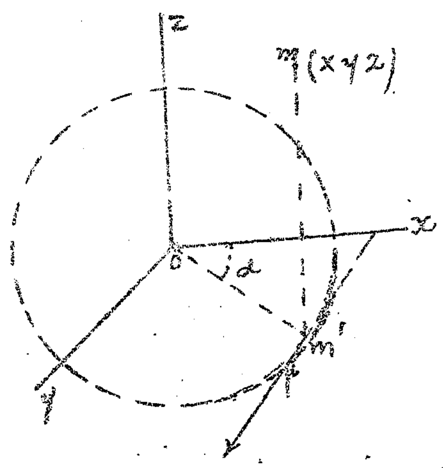
$$\frac{A_1\alpha_1}{NA_1} = \frac{B_1\beta_1}{NB_1} = \frac{C_1c_1}{NC_1}$$

δέον νά ἐπαληθεύωσιν.

Ἀναλυτική ἔκφρασις τῆς ταχύτητος σημείου m ἀνήκοντος εἰς στερεόν κινούμενον σῶμα [m]

36. — Ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν τήν γενικήν κίνησιν τοῦ στερεοῦ δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ἀνά πᾶσαν στιγμήν ὡς προκύπτουσαν ἐκ μεταβατικῆς καί περιστροφικῆς κινήσεως. Τάς κινήσεις ταύτας δυνάμεθα νά ἀποσυνθέσωμεν παραλλήλως καί περί τρεῖς εὐθυγράμμους καί καθέτους ἀλλήλοις ἄξονας ox, oy oz.

Ἔστωσαν u, v, w αἱ συνιστῶσαι τῆς μεταβατικῆς κινήσεως καί p q καί r αἱ συνιστῶσαι τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ὡς πρός τούς ἄξονας ox, oy, oz καί ἴδωμεν ποία εἶναι ἡ ἐκ τῶν συγχρόνων τούτων κινήσεων προκύπτουσα μετατόπισις τοῦ σημείου m παραλλήλως τοῖς ἄξοσι ox, oy, oz κατά τό βραχύτατον χρονικόν διάστημα dt.



Αἱ ἐκ τῆς μεταβατικῆς κινήσεως προκύπτουσα μετατοπίσεις εἰσί παραλλήλως τῷ ἄξονι ox, udt, τῷ ἄξονι oy, vdt, καί τῷ ἄξονι oz, wdt.

Ἡ παράλληλος τῷ ἄξονι oz μετατόπισις, ἥν ὑφίσταται τό σημεῖον m ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα oz περιστροφῆς r εἶναι

προφανῶς ἴση τῷ μηδενί.

Ἡ περιστροφή αὕτη μετατοπίζει τό σημεῖον m ἐπί κύκλου ἐν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ yoz. Τό κατά τό χρονικόν διάστημα dt διαγραφόμενον ὑπό τοῦ σημείου m τόξον mm' ἐπί τοῦ κύκλου τούτου ἰσοῦται τῷ om.rdt προβάλλοντες τό διανυθέν τοῦτο τόξον ἐπί τῶν ἀξόνων ox, oy ἔχομεν

προβ ἐπί τοῦ ox τοῦ τόξου om.rdt = om.rdt ημα = y.rdt

προβ ἐπί τοῦ oy τοῦ τόξου om.rdt = om.rdt συνα = x.rdt

καί αἱ προβολαί αὗται (λαμβανόμεναι μέ τά σχετικά αὐτῶν σημεῖα + διά τήν ἐπί τοῦ oy μετατόπισιν καί − διά τήν ἐπί τοῦ ox) παριστῶσι τήν μετατόπισιν τοῦ σημείου m παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox καί oy. Ὥστε ἡ μετατόπισις, ἥν ὑφίσταται τό σημεῖον m παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox, oy, oz εἶναι·

παραλλήλως τῷ ἄξονι	ὡς ἐκ τῆς μεταβατικῆς κινήσεως.	ὡς ἐκ τῶν περιστροφικῶν κινήσεων r	q	p
ox	+udt	−y.rdt	z.qdt	μηδέν
oy	+vdt	+x.rdt	μηδέν	−p.rdt
oz	+wdt	μηδέν	−x.qdt	−y.pdt

καί αἱ ὁλικαί μετατοπίσεις

$$dx = udt + z.qdt - y.rdt$$
$$dy = vdt + x.rdt - z.pdt$$
$$dz = wdt + y.pdt - x.qdt$$

ὥστε αἱ συνιστῶσαι V_x, V_y, V_z τῆς ταχύτητος v τοῦ σημείου m παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν εὑρίσκονται διά

$$V_x = \frac{dx}{dt} = u + qz - ry$$
$$V_y = \frac{dy}{dt} = v + rx - pz$$
$$V_z = \frac{dz}{dt} = w + py - qx$$

ἐάν τό σημεῖον o μένῃ ἀκίνητον u = v = w = o καί τότε,

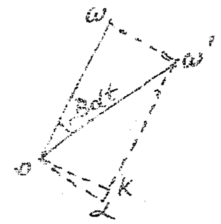
$$V_x = qz - ry \qquad V_y = rx - pz \qquad V_z = py - qx$$

Περιστροφικαὶ ἐπιταχύνσεις ἐν τῇ κινήσει στερεοῦ σώματος περὶ σταθερὸν σημεῖον ο.

Ὁρισμὸς τῆς περιστροφικῆς ἐπιταχύνσεως

37.— Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ περὶ σταθερὸν σημεῖον ο κίνησις στερεοῦ σώματος δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν ὡς περιστροφὴ περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου ο.

Ἔστωσαν οω καὶ οω′ δύο διαδοχικαὶ θέσεις, μεθ᾽ ὧν συμπίπτει ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς κατὰ τοὺς χρόνους t καὶ dt. Ἔστωσαν πρὸς τούτοις ω καὶ ω′ αἱ περὶ τοὺς ἄξονας τούτους περιστροφικαὶ ταχύτητες τοῦ κινητοῦ.



Τὴν περιστροφικὴν κίνησιν οω′ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνισταμένην ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως οω καὶ ἑτέρας $oa = adt$, τὴν ὁποίαν θὰ ὀνομάσωμεν στοιχειώδη ὁλικὴν περιστροφικὴν ἐπιτάχυνσιν· τὴν ποσότητα α καλοῦμεν ὁλικὴν περιστροφικὴν ἐπιτάχυνσιν κατὰ τὸν χρόνον t.

Τὴν περιστροφικὴν ταύτην κίνησιν οα δυνάμεθα ν᾽ ἀποσυνθέσωμεν εἰς δύο ἄλλας περὶ τοὺς ἄξονας οω καὶ οΚ κάθετον τῷ οω καὶ ἔχομεν

$$Ka = d\omega$$

καὶ

$$oK = K\omega' \,\varepsilon\varphi\, \widehat{\beta \cdot dt} = \omega\beta dt$$

ἔνθα β παριστᾷ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα τῆς εὐθείας οω. Οὕτω αἱ συνιστῶσαι τῆς ὁλικῆς περιστροφικῆς ἐπιταχύνσεως παραλλήλως καθέτως τῷ στιγμιαίῳ ἄξονι ἐν οἱαδήποτε

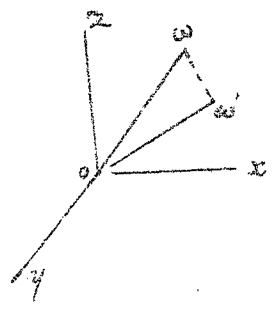
στιγμῇ εἰσὶ

$$\frac{d\omega}{dt} \text{ καὶ } \omega\beta$$

ἐν ᾗ περιπτώσει $\beta = 0$, ἡ τιμὴ τῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι ἁπλῶς $\frac{d\omega}{dt}$

Προβολὴ τῆς ὁλικῆς περιστροφικῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ ἄξονος.

38.— Ἔστωσαν p, q, r αἱ προβολαὶ τῆς στιγμιαίας περιστροφῆς τοῦ σώματος οω ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων καὶ ὀρθογωνίων ἀξόνων ox, oy, oz ἔχομεν



προβολὴ τῆς ωω′ ἐπὶ $ox = dp$

" " " " $oy = dq$

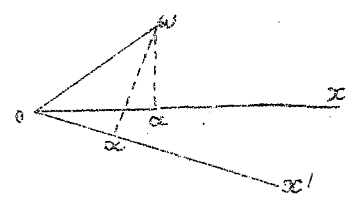
" " " " $oz = dz$

κατὰ συνέπειαν

Αἱ προβολαὶ τῆς περιστροφικῆς ὁλικῆς ἐπιταχύνσεως $\frac{\omega\omega'}{dt}$ ἐπὶ τῶν τριῶν ἀξόνων ἐκφράζονται διὰ

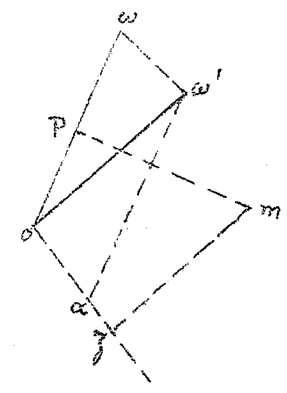
$$\frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἐν ᾗ περιπτώσει οἱ ἄξονες φέρονται ἐν τῷ διαστήματι μετὰ τοῦ στερεοῦ σώματος. Ἔστω τῷ ὄντι οx′ ἡ θέσις ἣν κατέχει ὁ ἄξων ox μετὰ παρέλευσιν τοῦ βραχυτάτου χρονικοῦ διαστήματος dt. ἡ προβολὴ $ox = p$ τῆς στιγμιαίας περιστροφῆς τοῦ σώματος ἐπὶ τῆς εὐθείας ox ἀντικατεστάθη ἤδη διὰ τῆς $oa' = p'$ ἀλλὰ προφανῶς $ox = oa'$ ὥστε καὶ $dp = dp'$.

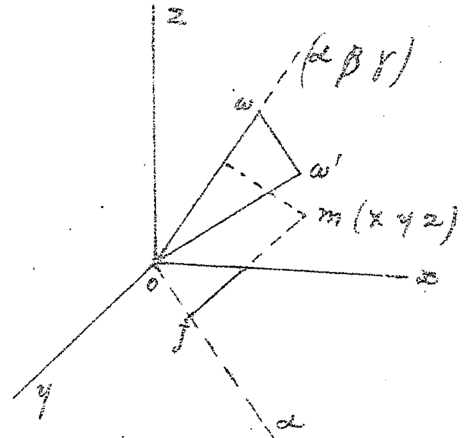


Ἐπιτάχυνσις σημείου τινὸς m τοῦ στερεοῦ σώματος

39.— Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἐκ τῆς στιγμιαίας περιστροφῆς οω τοῦ σώματος προκύπτουσαν ἐπιτάχυνσιν σημείου τινὸς m ἀνήκοντος τῷ σώματι. Ἔστω οω ἡ περιστροφὴ τοῦ σώματος κατὰ τὸν χρόνον t. μετὰ παρέλευσιν τοῦ βραχυτάτου χρονικοῦ διαστή-



ματος dt, ἡ περιστροφική κίνησις εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ow καί ἑτέρας περιστροφικῆς κινήσεως oa· ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σημείου συνίσταται λοιπόν ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως $\omega^2.mP$ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα ow περιστροφῆς καί τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα oa περιστροφῆς adt· ἀλλ' ἡ περιστροφή αὕτη εἶναι ἴση τῷ μηδενί κατά τόν χρόνον t, καί κατά συνέπειαν ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς περιστροφικῆς ταύτης ἐπιταχύνσεως τοῦ σημείου m ἔσεται ἀπλῶς ἡ ἐκ τῆς αὐτῆς περιστροφῆς adt προκύπτουσα ταχύτης $\frac{adt.mf}{dt}=a.mf$ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Προβολή ἐπί ἄξονος τῆς ἐπιταχύνσεως σημείου ἀνήκοντος στερεοῦ σώματι περιστρεφομένῳ περί τό σημεῖον O.

40. — Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι ὁλική ἐπιτάχυνσις τοῦ σημείου m συνίσταται.

1ον) ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως $\omega^2.mP$ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα ow περιστροφῆς.

2ον) Ἐκ τῆς ταχύτητος $a.mf$ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα oa περιστροφῆς.

ὥστε προβ. τῆς ἐπιταχύνσεως τοῦ $m =$ προβ$(\omega^2.Pm)+$ προβ$(a.mf)$

1ον) προβάλλοντες ἐπί τοῦ ἄξονος ox ἔχομεν

$$\text{προβ.}(\omega^2.Pm)=\omega^2\,\text{προβ}\,(Pm)$$

$$\text{προβ}\; mP=-\text{προβ.}\,om+\text{προβ.}\,oP=oP\,\text{συν}\,\alpha-x$$

ἐάν δέ παραστήσωμεν διά α, β, γ τάς γωνίας τοῦ ἄξονος ow μετά τῶν ox, oy, oz ἔχομεν

$$OP=x\,\text{συν}\,\alpha+y\,\text{συν}\,\beta+z\,\text{συν}\,\gamma$$

$$oP\,\text{συν}\,\alpha=x\,\text{συν}^2\alpha+y\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta+z\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\gamma$$

ὥστε $\text{προβ.}\,Pm=x\,\text{συν}^2\alpha-x+y\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta+z\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\gamma$

ἀλλά $\omega\,\text{συν}\,\alpha=p \quad \omega\,\text{συν}\,\beta=q \quad \omega\,\text{συν}\,\gamma=r$

ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\text{προ}\,Pm=\frac{1}{\omega^2}\left[p^2x-\omega x^2+pqy+prz\right]$$

ἤ $$\omega^2\,\text{προβ.}\,Pm=-x(q^2+r^2)+pqy+prz$$

2ον Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι αἱ προβολαί τοῦ a ἐπί τῶν τριῶν ἀξόνων ox, oy, oz εἶναι ἀμοιβαίως

$$\frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt}$$

ἀλλ' εἴδομεν ἐπίσης (36) ὅτι αἱ ἐκ τῶν περιστροφικῶν τούτων κινήσεων προκύπτουσα ταχύτης παραλλήλως τῷ ἄξονι ox εἶναι $\frac{dq}{dt}=-\frac{dr}{dt}y$

ὥστε

προβ φ_x τῆς ἐπιταχύνσεως φ τοῦ m ἐπί τοῦ ἄξονος $ox=\omega^2$ προβ. $Pm+$ πρ. $a(mf)$

$$\varphi_x=-x(q^2+r^2)+pqy+prz+\frac{dq}{dt}z-\frac{dr}{dt}y$$

διά τοῦ αὐτοῦ τρόπου $$\varphi_y=-y(r^2+p^2)+qrz+qpx+\frac{dr}{dt}x-\frac{dp}{dt}z$$

$$\varphi_z=-z(p^2+q^2)+rpx+vqy+\frac{dp}{dt}y-\frac{dq}{dt}x$$

Ἐπιτάχυνσις σημείου m φερομένου ὑπό περιστροφικῆς καί μεταβατικῆς κινήσεως

41. — Ἔστω V καί Φ ἡ ταχύτης καί ἡ ἐπιτάχυνσις σημείου τινός a ἀνήκοντος τῷ αὐτῷ στερεῷ σώματι οὗ καί τό m. Ἐάν ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ σώματος ταχύτητα καί ἐπιτάχυνσιν ἴσας τῇ V καί Φ καί ἀντιθέτου φορᾶς, ἡ γενική κίνησις τοῦ σώματος περιορίζεται εἰς περιστροφήν περί στιγμιαῖον ἄξονα διερχόμενον διά τοῦ σημείου a καί κατά τά προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$\varphi_x=-x(q^2+r^2)+pqy+prz+\frac{dq}{dt}z-\frac{dr}{dt}y+\Phi_x$$
$$\varphi_y=-y(r^2+p)+qrz+qpx+\frac{dr}{dt}x-\frac{dp}{dt}z+\Phi_y$$
$$\varphi_z=-z(p^2+q)+rpx+vqy+\frac{dp}{dt}y-\frac{dq}{dt}x+\Phi_z$$

Κινητική Πρωτοπαπαδάκη :

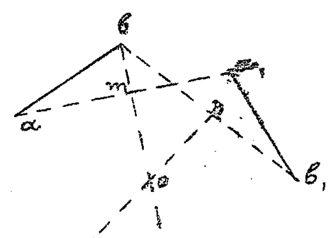
Παράρτημα κινηματικής γεωμετρίας

Εις τ' αποτελέσματα ταύτα ηδυνάμεθα να φθάσωμεν και διά της ακολούθου μεθόδου την οποίαν εκθέτομεν ενταύθα ένεκα της σπουδαιότητος αυτής και των εφαρμογών, ας παρέχει ημίν εν τη σπουδή της καθαράς γεωμετρίας.

Κίνησις στερεού παραλλήλως επιπέδω τινί.

42.— Υποθέσωμεν πρώτον ότι το στερεόν κινείται παραλλήλως επιπέδω τινί. Η θέσις του σώματος εν τω διαστήματι προσδιορίζεται εν οιαδήποτε στιγμή, διά της προβολής αυτού εν τω επιπέδω προς ό η κίνησις είναι παράλληλος, και δυνάμεθα να θεωρήσωμεν την κίνησιν της προβολής ταύτης εν τω επιπέδω ή απλώς την κίνησιν τμήματος ευθείας $\alpha\beta$, ούτινος η θέσις* προσδιορίζει και την θέσιν όλου του σώματος.

Θεωρηθήτω η ευθεία αύτη εις δύο οιασδήποτε διαφόρους θέσεις $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, μεθ' ων συνέπεσε κατά την κίνησίν της και αχθήτωσαν αι ευθείαι om, on κάθετοι εις τα μέσα των $\alpha\alpha_1$ και $\beta\beta_1$, λέγω ότι η ευθεία $\alpha\beta$ δύναται να τοποθετηθή επί της ευθείας $\alpha_1\beta_1$ διά περιστροφικής κινήσεως περί τον άξονα o κάθετον τω επιπέδω $\alpha\beta\,\alpha_1\beta_1$, χωρίς να εξέλθη του επιπέδου εν ω νυν ευρίσκεται. Τω όντι $o\alpha = o\alpha_1$,



* Τω όντι οιονδήποτε σημείον του σχήματος προσδιορίζεται διά των από των σημείων α και β αποστάσεων αυτού όταν ορίσωμεν εν τινι των υπό της ευθείας χωριζομένων εν τω επιπέδω δύο μερών ευρίσκεται το θεωρούμενον σημείον.

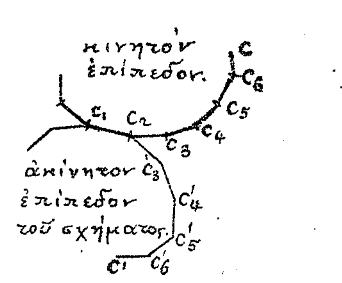
$o\beta = o\beta_1$ και $\alpha o \beta = \alpha_1 o \beta_1$ ώστε, αν διά περιστροφικής κινήσεως φέρωμεν την ακτίνα $o\alpha$ επί της ακτίνος $o\alpha_1$, και η ακτίς $\beta\beta_1$ θα συμπέση μετά της ακτίνος $o\beta_1$, και κατά συνέπειαν το ευθύγραμμον τμήμα $\alpha\beta$ μετά του ίσου αυτώ $\alpha_1\beta_1$.

Όθεν
εάν εν τη κινήσει { επιπέδου σχήματος εν τω επιπέδω αυτού / στερεού σώματος παραλλήλως επιπέδω τινί } θεωρήσωμεν δύο οιασδήποτε θέσεις α και α_1 μεθ' ων τούτο συμπίπτει κατά τους χρόνους t και t_1 δυνάμεθα να εύρωμεν { σημείον εν τω επιπέδω / άξονα κάθετον τω επιπέδω } τοιούτον ώστε η μετάβασις { του επιπέδου σχήματος / του στερεού σώματος } από της θέσεως α εις την θέσιν α_1 να επιτελεσθή διά περιστροφικής κινήσεως περί το { σημείον τούτο / τον άξονα τούτον }.

Το αυτό δυνάμεθα να είπωμεν και εάν αι δύο θέσεις α και α_1 ας κατέχει το επίπεδον σχήμα ή το στερεόν σώμα μετά παρέλευσιν του χρονικού διαστήματος $t_1 - t$, αντί να είναι οιαιδήποτε, είναι δύο διαδοχικαί θέσεις του κινητού, ας κατέχει κατά την αρχήν και το τέλος του χρονικού διαστήματος dt. Εν τη περιπτώσει ταύτη το σημείον O καλείται στιγμιαίον κέντρον της περιστροφής και η συνεχής κίνησις του σώματος δύναται να θεωρηθή ως συνισταμένη εκ σειράς περιστροφικών κινήσεων περί τ' αντιστοιχούντα εκάστη στιγμή στιγμιαία κέντρα της περιστροφής.

Εάν χωρίσωμεν διά του νοός το κινούμενον επίπεδον του σχήματος από του ακινήτου και σταθερού επιπέδου του πίνακος βλέπομεν ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 …

τοῦ στιγμιαίου κέντρου τῆς περιστροφῆς θεωρουμένου ἐν τῷ κινητῷ ἐπιπέδῳ, εἶναι ὡρισμένη τις καμπύλη C κινουμένη μετά τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Ἐάν ὅμως τό στιγμιαῖον κέντρον C, θεωρηθῇ ὡς ἀνῆκον τῷ ἀκινήτῳ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος, ὁ γεωμετρικός τόπος αὐτοῦ προσδιορίζει καμπύλην C' ἀκίνητον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ. Αἱ δύο αὗται καμπύλαι C καί C' ἐφάπτονται ἀλλήλων ἀνά πᾶσαν στιγμήν παρά τῷ ἀντιστοιχοῦντι πρός τήν στιγμήν ταύτην στιγμιαίῳ κέντρῳ τῆς περιστροφῆς, οὕτω ὥστε ἡ συνεχής κίνησις $\left\{\begin{matrix}\text{τοῦ σχήματος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ}\\ \text{τοῦ σώματος παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ}\end{matrix}\right\}$ δύναται νά ἐπιτευχθῇ διά τῆς κυλινδήσεως $\left\{\begin{matrix}\text{τῆς καμπύλης}\\ \text{τοῦ κυλίνδρου}\end{matrix}\right\}$ ἐπί τῆς ἀκινήτου $\left\{\begin{matrix}\text{καμπύλης}\\ \text{κυλίνδρου}\end{matrix}\right\}$ C'.

Κίνησις σφαιρικοῦ σχήματος ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

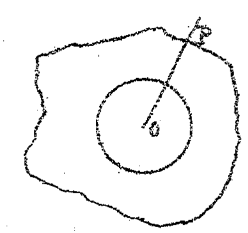
43. — Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν σφαιρικόν σχῆμα κινούμενον ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἰς ἥν ἀνήκει, δυνάμεθα νά ἐπαναλάβωμεν τ' ἀνωτέρω αὐτολεξεί ἀντικαθιστῶντες τήν φράσιν εὐθεῖα γραμμή διά τῆς φράσεως τόξον μεγάλου κύκλου καί φθάσωμεν οὕτω εἰς τό συμπέρασμα ὅτι,

σφαιρικόν σχῆμα κινούμενον ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἰς ἥν ἀνήκει δύναται νά μεταβῇ ἐκ τῆς θέσεως α εἰς τήν ἀμέσως ἀκόλουθον θέσιν αὐτοῦ α, διά περιστροφῆς περί στιγμιαῖον τινά πόλον Ο κείμενον ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ἡ συνεχής κίνησις τοῦ σχήματος δύναται ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις νά ἐπιτευχθῇ διά τῆς κυλινδήσεως σφαιρικῆς τινος καμπύλης κινουμένης μετά τοῦ σχήματος ἐπί ἑτέρας καμπύλης ἀκινήτου ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Κίνησις στερεοῦ σώματος περί σταθερόν σημεῖον

44. — Ἡ κίνησις αὕτη σφαιρικοῦ σχήματος ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἰς ἥν ἀνήκει, προσδιορίζει ἀμέσως τήν κίνησιν σώματος περιστρεφομένου περί τι σταθερόν σημεῖον Ο. Ἐάν τῷ ὄντι νοήσωμεν σφαῖραν τινα ἐντός τοῦ σώματος καί ἐπ' αὐτῆς σφαιρικόν σχῆμα συμμετέχον τῆς κινήσεως τοῦ στερεοῦ ὡς ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν, ἡ στιγμιαία κίνησις τοῦ σφαιρικοῦ τούτου σχήματος δύναται νά ἐπιτευχθῇ διά περιστροφικῆς περί τό σημεῖον P κινήσεως, οὕτως ὥστε κατά τήν στιγμήν ταύτην ἡ εὐθεῖα OP μένει ἀκίνητος καί τό



σῶμα περιστρέφεται στιγμιαίως περί τήν εὐθεῖαν ταύτην, ἥν καλοῦμεν διά τοῦτο στιγμιαῖον ἄξονα τῆς περιστροφῆς· ὅθεν ἡ στιγμιαία κίνησις σώματος στερεοῦ κινουμένου περί σταθερόν σημεῖον Ο δύναται νά ἐπιτευχθῇ διά στιγμιαίας περιστροφικῆς κινήσεως περί ἄξονα διερχόμενον διά τοῦ σημείου Ο.

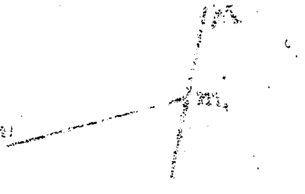
Ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ ἄξονος τούτου θεωρουμένου ὡς ἀνήκοντος συγχρόνως τῷ κινουμένῳ σώματι καί τῷ ἀκινήτῳ διαστήματι ἀποτελεῖται ἐκ δύο κωνικῶν ἐπιφανειῶν C καί C_1 ἐφαπτομένων ἀνά πᾶσαν στιγμήν ἀλλήλων καθ' ὅλον τό μῆκος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῇ στιγμῇ ταύτῃ στιγμιαίου ἄξονος.

Κινητική Πρωτοπαπαδάκη

Ἡ συνεχὴς κίνησις τοῦ σώματος δύναται κατά συνέπειαν νά ἐξηγηθῇ διά τῆς κυλινδήσεως τῆς μετά τοῦ σώματος κινουμένης κινητικῆς ἐπιφανείας ἐπί τῆς ἀκινήτου C_1.

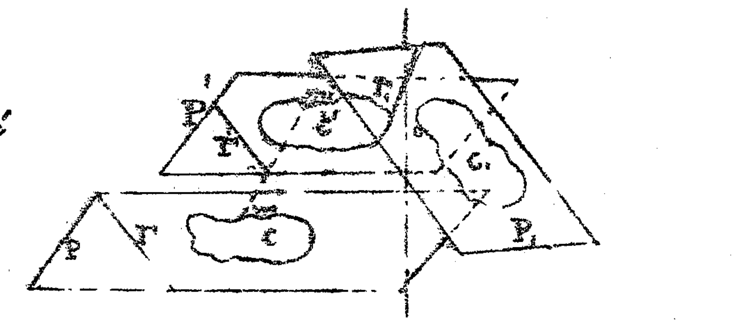
Γενική κίνησις στερεοῦ σώματος

45. — Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν δύο οἱασδήποτε θέσεις a καί a_1 σώματος ἐλευθέρου ὑπό οἱασδήποτε κινήσεως δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν τό κινητόν σῶμα ἀπό τῆς θέσεως a εἰς τήν θέσιν a_1, ὡς ἑξῆς.



Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις σημεῖόν τι τοῦ σώματος συμπίπτον μετά σημείου m καί m_1, ὅταν τό σῶμα κατέχῃ τάς θέσεις a καί a_1 καί μεταφέρομεν ἀρχικῶς τό σῶμα διά μεταβατικῆς κινήσεως ἴσης καί παραλλήλου τῇ $m m_1$, οὕτως ὥστε τό σημεῖον m νά συμπέσῃ μετά τοῦ σημείου m_1, καί τό σῶμα νά καθέξῃ θέσιν τινά. Δυνάμεθα ἤδη διά περιστροφικῆς κινήσεως περί ἄξονα $m_1 M$ διερχόμενον διά τοῦ σημείου m_1 νά φέρωμεν τό σῶμα ἀπό τῆς θέσεως a', ἥν κατέχει νῦν, εἰς τήν πραγματικήν αὐτοῦ θέσιν a_1, ὥστε ἡ μετάβασις τοῦ σώματος ἀπό τῆς θέσεως a εἰς τήν θέσιν a_1 δύναται νά ἐκτελεσθῇ διά μιᾶς μεταβατικῆς καί μιᾶς περιστροφικῆς κινήσεως.

Κατά τήν μετάβασιν τοῦ σώματος ἀπό τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ θέσεως a εἰς τήν τελικήν a_1, ἡ μετά τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς συμπίπτουσα εὐθεῖα συμμετέχει τῆς μεταβατικῆς μόνον κινήσεως τοῦ στερεοῦ καί κατά συνέπειαν μένει παράλληλος ἑαυτῇ. Ἕκαστον ἐπίπεδον (P) κάθετον τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ μένει παράλληλον πρός τήν ἀρχικήν αὐτοῦ θέσιν κατά τήν μετάθεσιν τοῦ στερεοῦ καί δυνάμεθα οὕτω νά ἐκτελέσωμεν τήν μεταβατικήν καί περιστροφικήν κίνησιν, ἐάν γνωρίζωμεν οἱανδήποτε κίνησιν τοῦ στερεοῦ σώματος ὡς ἑξῆς: δι' οἱονδήποτε σημεῖον m τοῦ σώματος ἐν τῇ ἀρχικῇ αὐτοῦ θέσει a νοοῦμεν τῇ σειρᾷ (P) ἀνῆκον καί δι' αὐτοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον P, ὅπερ διατέμνει ἐν τῷ σώματι τό σχῆμα C, καί διά μεταβατικῆς κινήσεως, ἥν προσδιορίζει τό ἴσον εὐθεῖαν $m m_1$ διαγράφον σημεῖον φέρομεν αὐτό ἐπί τοῦ τῇ αὐτῇ σειρᾷ (P) ἀνήκοντος ἐπιπέδου P'. Ἐν τῇ θέσει ταύτῃ τό σχῆμα C κατέχει τήν θέσιν C' καί δυνάμεθα ἤδη νά μεταφέρωμεν αὐτό καί μετ' αὐτοῦ ὁλόκληρον τό σῶμα εἰς τήν πραγματικήν θέσιν αὐτοῦ C_1, διά περιστροφικῆς περί τόν ἄξονα O κινήσεως.



Ἡ διεύθυνσις τῶν ἐπιπέδων (P) εἶναι ἡ αὐτή δι' ὅλα τά σημεῖα τοῦ στερεοῦ κατά συνέπειαν καί ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς O τηρεῖ τήν αὐτήν διεύθυνσιν ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου m, ὅπερ λαμβάνομεν ὡς ἀφετηρίαν διά τήν ἐκτέλεσιν τῆς κινήσεως. Τό μέγεθος τῆς περιστροφῆς μένει ἐπίσης ἀμετάβλητον, διότι ἡ γωνία τῆς εὐθείας Γ ἐν τῇ ἀρχικῇ θέσει a μετά τῆς εὐθείας $Γ_1$ ἐν τῇ θέσει a_1 μένει ἀμετάβλητος, ἀλλά κατά τήν μεταβατικήν κίνησιν τοῦ ἐπιπέδου P ἡ Γ μένει παράλληλος ἑαυτῇ καί κατέχει τήν θέσιν Γ' ὥστε ἡ γωνία $(\widehat{Γ'Γ_1})$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν περί τόν ἄξονα O περιστροφικήν κίνησιν, ἥτις μένει ἀμετάβλητος, ἀφοῦ καί ἡ γωνία

(Γ,Γ') δὲν μεταβάλλεται
πρὸς τούτοις ἡ ἐνεστῶσα θέσις P, τοῦ ἐπιπέδου P εἶναι ἐντελῶς οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον m τοῦ σώματος, ὅπερ ἀπεχωρίσαμεν, ὥστε ἂν ἀντὶ τοῦ σημείου m, ἀναχωρήσωμεν ἐξ ἄλλου σημείου a <u>ἡ μεταβατικὴ κίνησις m m₁ μεταβάλλεται κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν διεύθυνσιν, ἀλλ' ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς μένει ἀμετάβλητος.</u>

Ἐξ ὅλων τῶν μεταβατικῶν κινήσεων $m m_1$, δι' ὧν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον P ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P' ἡ συντομωτέρα εἶναι ἡ πρὸ κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ P, καὶ κατόπιν διὰ περιστροφῆς περὶ ἄξονα παράλληλον τῷ οο' νὰ φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον P' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P_1.

Ὅθεν ἡ μετάβασις στερεοῦ σώματος ἐκ τῆς θέσεως a εἰς τὴν θέσιν a_1 δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ ὡρισμένον ἄξονα καὶ μεταβατικῆς κινήσεως παραλλήλου τῷ ἄξονι τούτῳ.

Αὕτη ἡ κίνησις ἣν ὀνομάζομεν ἑλικοειδῆ κίνησιν εἶναι ὁμοία μὲ τὴν κίνησιν κοχλίου τινὸς ἐν τῷ περικοχλίῳ αὐτοῦ. Κατὰ συνέπειαν γνωρίζοντες τὸ μέγεθος τῆς μεταβατικῆς καὶ περιστροφικῆς κινήσεως οἱουδήποτε στερεοῦ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν κοχλίαν τινὰ τοποθετήσωμεν αὐτὴν ἐν τῷ διαστήματι καὶ συνδέσωμεν τὸ στερεὸν ἀμεταβλήτως πρὸς αὐτὴν οὕτως ὥστε διὰ τῆς κινήσεως τοῦ κοχλίου τούτου ἐν σταθερῷ περικοχλίῳ νὰ μεταφέρωμεν τὸ σῶμα ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ θέσεως a εἰς τὴν ἐνεστῶσαν a_1.

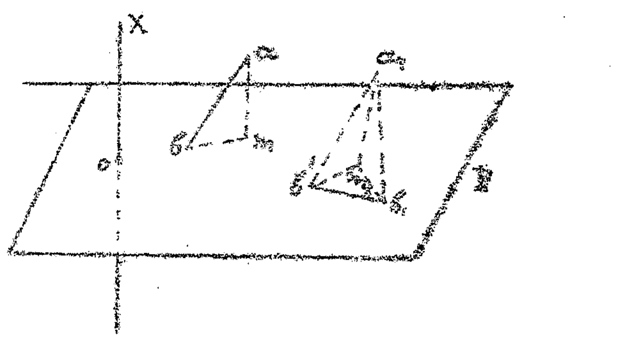
Τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν στοιχειώδη κίνησιν τοῦ

στερεοῦ κατὰ τὸν χρόνον dt, ἡ μετάβασις δηλ. τοῦ σώματος ἀπὸ τῆς θέσεως a, ἣν κατέχει τοῦτο ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt εἰς τὴν θέσιν a_1, ἣν κατέχει ἐν τέλει τοῦ αὐτοῦ χρονικοῦ διαστήματος δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ δι' ἑλικοειδοῦς κινήσεως· ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς ἐνταῦθα καλεῖται στιγμιαῖος ἄξων τῆς περιστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ στιγμιαίου ἄξονος θεωρουμένου ὡς ἀνήκοντος τῷ κινουμένῳ στερεῷ σώματι ἢ τῷ ἀκινήτῳ διαστήματι, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ῥαβδωτῶν ἐπιφανειῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς τὴν στιγμὴν ταύτην στιγμιαίου ἄξονος περιστροφῆς.

Ὥστε ἡ συνεχὴς κίνησις σώματος κινουμένου ὁπωσδήποτε ἐν τῷ διαστήματι δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τῆς κυλινδήσεως ῥαβδωτῆς τινος ἐπιφανείας κινουμένης μετὰ τοῦ σώματος, ἐπὶ ἑτέρας τοιαύτης ῥαβδωτῆς ἐπιφανείας ἀκινήτου ἐν τῷ διαστήματι.

Ἀποσύνθεσις οἱασδήποτε κινήσεως στερεοῦ σώματος εἰς δύο περιστροφικὰς <u>κινήσεις</u>.

46.—— Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀπεδείξαμεν, ὅτι οἱαδήποτε κίνησις στερεοῦ σώματος δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς ἑλικοειδοῦς κινήσεως· προτίθεμαι ἤδη ἐνταῦθα νὰ ἀποδείξω ὅτι ἡ αὐτὴ κίνησις δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ καὶ διὰ δύο περιστροφικῶν κινήσεων



περὶ ἄξονας, οἵτινες ἐν γένει δὲν συναντῶνται.

Θεωρήσωμεν πρὸς τοῦτο τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα αβ, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ στερεὸν κατέχει τὴν θέσιν α καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ $α_1β_1$ μεθ' οὗ συμπίπτει καθ' ἣν στιγμὴν τὸ στερεὸν κατέχει τὴν θέσιν $α_1$.

Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα αβ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ $α_1β_1$ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν ἄξονα ox.

Τῷ ὄντι ἀπὸ τοῦ σημείου $α_1$ ἀχθήτω ἡ εὐθεῖα $α_1β'$ καὶ ἐπὶ τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν σημείων $ββ'β_1$ προσδιοριζομένου ἐπιπέδου καταβιβασθήτωσαν κάθετοι αἱ εὐθεῖαι απ καὶ $α_1π_1$.

Τὸ τρίγωνον $αβπ = α_1β'π_1$, ἀλλὰ καὶ τοῦτο ἰσοῦται τῷ τριγώνῳ $α_1β_1π_1$ ὥστε τὸ τρίγωνον $αβπ = α_1β_1π_1$.

Τὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμενα τμήματα δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι πρὸς ἄλληλα διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν ἄξονα ox κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ P. Καὶ ἐπομένως καὶ τὰ ἐπίπεδα αβπ, $α_1β_1π_1$ εἶναι κάθετα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ P διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $π_1β_1$ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ πβ, καὶ τὸ τμῆμα $α_1β_1$ θὰ συμπέσῃ μετὰ τὸ ἴσον αὐτῷ αβ.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα $α_1β_1$ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ αβ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν ἄξονα ox.

Ἐὰν ἤδη στρέψωμεν τὸ σῶμα περὶ τὴν εὐθεῖαν αβ φέρομεν αὐτὸ εἰς τὴν τελικὴν αὐτοῦ θέσιν $α_1$. Ὅθεν ἡ κίνησις τοῦ στερεοῦ ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς περιστροφῆς αὐτοῦ περὶ δύο ἄξονας, ὧν τὸν ἕνα αβ δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως.

Ἀνακεφαλαίωσις. — 47. — Συνοψίζοντες τὰς ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ ἀποδειχθείσας ἀληθείας λέγομεν ὅτι

1/ Ἡ στιγμιαία κίνησις $\begin{Bmatrix}\text{ἐπιπέδου σχήματος}\\ \text{στερεοῦ σώματος}\end{Bmatrix}$ κινουμένου παραλλήλως ἐπιπέδῳ τινὶ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ ὡρισμένον $\begin{Bmatrix}\text{στιγμιαῖον κέντρον περιστροφῆς}\\ \text{στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς}\end{Bmatrix}$ κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἡ συνεχὴς κίνησις τοῦ στερεοῦ ἢ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς κυλινδήσεως $\begin{Bmatrix}\text{ἐπιπέδου καμπύλης}\\ \text{κυλινδρικῆς ἐπιφανείας}\end{Bmatrix}$ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ στιγμιαίου κέντρου ἐπὶ ἑτέρας κειμένης ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἢ ἐπὶ ἑτέρας καθέτου ἀμφοτέρων τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἰς τὴν ἀνήκουσιν κινούμενα σφαιρικὰ σχήματα.

2./ Ἡ στιγμιαία κίνησις σώματος στερεοῦ κινουμένου περὶ σταθερὸν σημεῖον o δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ ὡρισμένον ἄξονα (στιγμιαῖος ἄξων τῆς περιστροφῆς) διερχόμενον διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου o.

Ἡ συνεχὴς κίνησις τοῦ σώματος δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς κυλινδήσεως κωνικῆς ἐπιφανείας (γεωμετρικὸς τόπος τοῦ στιγμιαίου ἄξονος τῆς περιστροφῆς θεωρουμένου ὡς ἀνήκοντος τῷ κινουμένῳ στερεῷ) κινουμένης μετὰ τοῦ σώματος ἐπὶ ἑτέρας κωνικῆς ἐπιφανείας (γεωμετρικὸς τόπος τοῦ στιγμιαίου ἄξονος θεωρουμένου ὡς ἀνήκοντος τῷ ἀκινήτῳ διαστήματι) ἀκινήτου ἐν τῷ διαστήματι.

Αἱ κορυφαὶ ἀμφοτέρων τῶν κωνικῶν τούτων ἐπιφανικῶν συμπίπτουσι μετά τοῦ σταθεροῦ σημείου ο.

3ον/ Ἡ στιγμιαία κίνησις σώματος φερομένου ὑπό οἱασδήποτε κινήσεων δύναται νά ἐπιτευχθῇ ἐν οἱᾳδήποτε στιγμῇ καί κατά μυρίους τρόπους μέ μίαν περιστροφικήν καί ἑτέραν μεταβατικήν κίνησιν.

Ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς δύναται νά διέλθῃ δι' οἱουδήποτε σημείου τοῦ διαστήματος, ἀλλ' ἡ διεύθυνσις αὐτοῦ καί τό μέγεθος τῆς περί αὐτόν περιστροφῆς μένουσιν ἀμετάβλητα.

Ἡ μεταβατική κίνησις μεταβάλλεται κατά τό μέγεθος καί τήν φοράν, ὅταν ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς μεταβαίνῃ ἀπό ἑνός εἰς ἕτερον σημεῖον τοῦ διαστήματος, ἀλλ' ἡ προβολή αὐτῆς ἐπί τοῦ ἄξονος τούτου εἶναι ἀμετάβλητος.

Ἐξ ὅλων μεταξύ τῶν μυρίων τούτων παραλλήλων ἀξόνων, περί οὗ δύναται νά περιστραφῇ τό στερεόν, ὑπάρχει εἷς τοιοῦτος, ὥστε ἡ συνοδεύουσα τήν περιστροφήν μεταβατική κίνησις εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς περιστροφῆς.

Τόν ἄξονα τοῦτον ὀνομάζομεν, στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς καί ὀλισθήσεως.

Κίνησις ἐπιπέδου σχήματος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ

Πρός ἐφαρμογήν τῶν ἀποτελεσμάτων, εἰς ἃ ἐφθάσαμεν ἀνωτέρω, θά ἐξετάσω ἐνταῦθα γεωμετρικώτερον τήν κίνησιν ἐπιπέδου σχήματος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, καί τινας τῶν γεωμετρικῶν ἐφαρμογῶν τάς ὁποίας παρουσιάζει αὕτη.

Ἡ γενική λύσις τοῦ προβλήματος ἐμπεριέχεται εἰς τάς ἑξῆς δύο διαφόρους προτάσεις.

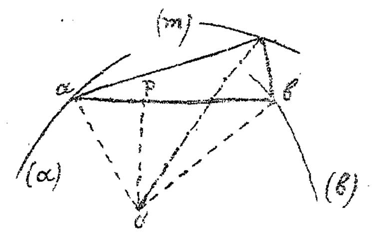
1ον.— Δοθείσης τῆς κινήσεως, μεθ' ἧς φέρεται τό σχῆμα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ εὑρεῖν τάς καμπύλας (42.) C καί C', διά τῆς σχετικῆς κυλινδήσεως τῶν ὁποίων δύναται νά ἐπιτευχθῇ ἡ συνεχής κίνησις τοῦ σχήματος καί,

2ον.— Δοθεισῶν τῶν καμπυλῶν C καί C' εὑρεῖν τά στοιχεῖα τῆς κινήσεως τοῦ σώματος (τροχιάν, ταχύτητα, ἐπιτάχυνσιν).

Λύσις τοῦ πρώτου προβλήματος.— Τά σημεῖα κινουμένου γεωμετρικοῦ ἐπιπέδου σχήματος περιστρέφονται ἐν τῇ κινήσει αὐτῶν περί τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς διαγράφοντα ἀνά πᾶσαν στιγμήν στοιχειώδη τόξα κύκλου, κατά συνέπειαν
αἱ κάθετοι ἐπί τῶν τροχιῶν τῶν διαγραφομένων ὑπό τῶν σημείων ἐπιπέδου σχήματος κινουμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ συντρέχουσιν ἀνά πᾶσαν στιγμήν εἰς τό ἀντιστοιχοῦν τῇ στιγμῇ ταύτῃ στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς.

— Ἡ θεμελιώδης αὕτη γεωμετρική ἰδιότης τοῦ στιγμιαίου κέντρου τῆς περιστροφῆς, μᾶς ἐπιτρέπει νά χαράξωμεν τήν ἐφαπτομένην καί τήν κάθετον τῶν γραμμῶν τῶν διαγραφομένων ὑπό τῶν σημείων κινουμένου σχήματος, ἐάν γνωρίζωμεν τάς τροχιάς δύο μόνον ἐκ τῶν σημείων τοῦ κινουμένου σχήματος. Ἔστω λ.χ. τό τρίγωνον α β π, οὗτινος αἱ κορυφαί α καί β διαγράφουσιν ὡρισμένας καμπύλας (α) καί (β), ἡ τρίτη κορυφή π διαγράφει καμπύλην τινα (π).

τήν παρά τό σημεῖον (m) κάθετον τῇ καμπύλῃ ταύτῃ χαράσσομεν ὡς ἑξῆς· ἄγομεν τάς παρά τά σημεῖα α καί β καθέτους αο καί βο ταῖς καμπύλαις (α) καί (β)· αἱ εὐθεῖαι αὗται συντρέχουσιν εἰς τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς ο, δι' οὗ διέρχεται καί ἡ παρά τό σημεῖον m κάθετος om τῆς καμπύλης m.



Ἐάν κινουμένη γραμμή κινῆται ἐπί ἑτέρας σταθερᾶς αἱ κάθετοι ἐπί τῶν τροχιῶν τῶν διαγραφομένων ὑπό τῶν σημείων τῆς κινουμένης γραμμῆς διέρχονται διά τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς τῶν δύο τούτων γραμμῶν.

[Παραδείγματα. Κυκλοειδεῖς καί ἐπικυκλοειδεῖς καμπύλαι].

Ἐκ τοῦ σημείου ο καταβιβάσωμεν κάθετον τήν op ἐπί γραμμῆς τινος οβ τοῦ κινουμένου σχήματος α.β m. Τό σημεῖον p κατά τήν στιγμιαίαν κίνησιν τοῦ σχήματος, στρέφεται καί τοῦτο περί τό σημεῖον ο καθώς καί τά λοιπά. Ἡ εὐθεῖα op εἶναι κάθετος τῇ τροχιᾷ τοῦ σημείου p παρά τό σημεῖον τοῦτο, καί ἡ ἐφαπτομένη τῆς αὐτῆς τροχιᾶς παρά τό αὐτό σημεῖον εἶναι αὐτή ἡ εὐθεῖα α β. ὥστε ἐπί τῆς εὐθείας αβ ἐν μόνον σημεῖον p δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἐν ᾧ αὕτη ἐφάπτεται τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ. Τό σημεῖον p ἀνήκει λοιπόν τῇ περιβαλλούσῃ τῆς κινουμένης εὐθείας α β. ὥστε

<u>τό χαρακτηριστικόν σημεῖον τῆς κινουμένης γραμμῆς, ἐν ᾧ αὕτη ἐφάπτεται τῆς περιβαλλούσης αὐτήν ἐν ὡρισμένῃ τινί στιγμῇ εὑρίσκεται ἐπί τῆς κινουμένης ταύτης γραμμῆς καί τῶν ἀπό τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῇ στιγμῇ ταύτῃ στιγμιαίου κέντρου τῆς</u>

<u>περιστροφῆς ἐπ' αὐτῆς καθέτων.</u>

49. — Ἵνα καταστήσωμεν τά ἀνωτέρω ὅσῳ τό δυνατόν σαφέστερα, θά πραγματευθῶμεν ἐνταῦθα μετά τῆς δεούσης γεωμετρίας τό ἀκόλουθον παράδειγμα.

1ον. — Θεωρήσωμεν ἐπίπεδόν τι P συμπίπτον μεθ' ἑτέρου σταθεροῦ ἐπιπέδου Π καί κινούμενον ἐπ' αὐτοῦ οὕτως, ὥστε τά κινούμενα σημεῖα α καί β τοῦ κινουμένου ἐπιπέδου P διαγράφωσιν τάς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π σταθεράς εὐθείας οα καί οβ τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς εἶναι προφανῶς τό σημεῖον c, εἰς ὅ συντρέχουσιν αἱ παρά τά σημεῖα α καί β κάθετοι αc καί βc τῆς εὐθείας οα καί οβ.

Ἡ γωνία αcβ οὖσα παραπληρωματική τῆς γωνίας αοβ εἶναι σταθερά τό μέγεθος κατά συνέπειαν τό σημεῖον c εὑρίσκεται ἐπί περιφερείας κύκλου διερχομένης διά τῶν σημείων οαβc· ὥστε κατά τήν κίνησιν τοῦ ἐπιπέδου P τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς c διαγράφει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλον τόν οαβc. Ἡ διάμετρος οc τοῦ κύκλου τούτου εἶναι σταθερά· ὥστε

κατά τήν κίνησιν τοῦ ἐπιπέδου P τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς c διαγράφει ἐν τῷ ἀκινήτῳ ἐπιπέδῳ Π περιφέρειαν κύκλου ἔχοντος κέντρον τό σημεῖον ο καί ἀκτῖνα τήν οc· ἡ τελευταία αὕτη περιφέρεια καί ἡ προηγουμένη οαβc ἀποτελοῦσιν ἐν τῇ κινήσει, τήν ὁποίαν ἐξετάζομεν ἐνταῦθα τάς καμπύλας C' καί C τῆς παραγρ. (42.) ὥστε ἡ ἄνω ὁρισθεῖσα κίνησις τοῦ ἐπιπέδου P δύναται νά ἐπιτευχθῇ διά τῆς κυλινδήσεως τῆς περιφερείας οαβc = c ἐπί τῆς περιφερείας C'; οἱονδήποτε ἕτερον σημεῖον c τῆς περιφερείας c διαγράφει κατά τήν κίνησιν τοῦ ἐπιπέδου P τροχιάν, ἧς ἡ κάθετος παρά τό σημεῖον e διέρχεται διά τοῦ σημείου c· ἡ τροχιά [e] εἶναι λοιπόν ἡ διάμετρος oe καὶ εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν περιφέρεια κύκλου c κυλίεται ἐσωτερικῶς ἐπὶ ἑτέρας περιφερείας κύκλου c', τῆς ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται τῇ διαμέτρῳ τῆς πρώτης, τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας c διαγράφουσιν ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ τὰς διαμέτρους τῆς περιφερείας c'.

Ἴδωμεν ἤδη τὴν φύσιν τῶν καμπύλων, ἃς διαγράφουσι τὰ σημεῖα m τοῦ ἐπιπέδου P ἐν τῇ κινήσει αὐτοῦ.

Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ἄκρα τῆς διὰ τοῦ σημείου m διερχομένης διαμέτρου ge τοῦ κύκλου c διαγράφουσι τὰς ὀρθογωνίους διαμέτρους og καὶ oe τοῦ κύκλου c'. Κατὰ συνέπειαν* τὸ σημεῖον m διαγράφει ἔλλειψιν, τῆς οἱ ἄξονες συμπίπτουσι μετὰ τῶν διαμέτρων oe καὶ og καὶ ἔχουσι μήκη mg καὶ me.

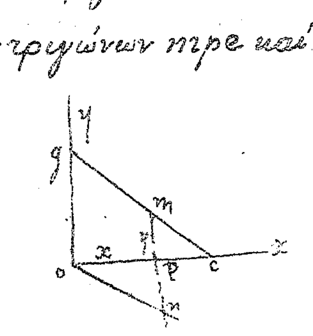
Ἡ παρὰ τὸ σημεῖον m κάθετος τῇ ἐλλείψει εἶναι ἡ εὐθεῖα cm καὶ ἡ κάθετος αὐτῇ od εἶναι παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ· od καὶ om εἶναι λοιπὸν δύο συζυγεῖς διάμετροι τῆς ὑπὸ τοῦ σημείου m διαγραφομένης ἐλλείψεως.

Τὰ σημεῖα c καὶ d διαγράφουσιν ἐν τῇ κινήσει τοῦ σχήματος τὰς διαμέτρους oc καὶ od· τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου od εἶναι λοιπὸν em.

---

*Σημ. Τῷ ὄντι φέροντες τὴν on παράλληλον τῇ pg καὶ τὴν mn κάθετον τῇ oe ἔχομεν ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων mpe καὶ op

$$\frac{x}{a}=\frac{pe}{b}=\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b} \qquad \frac{y}{b}=\frac{mp}{a}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

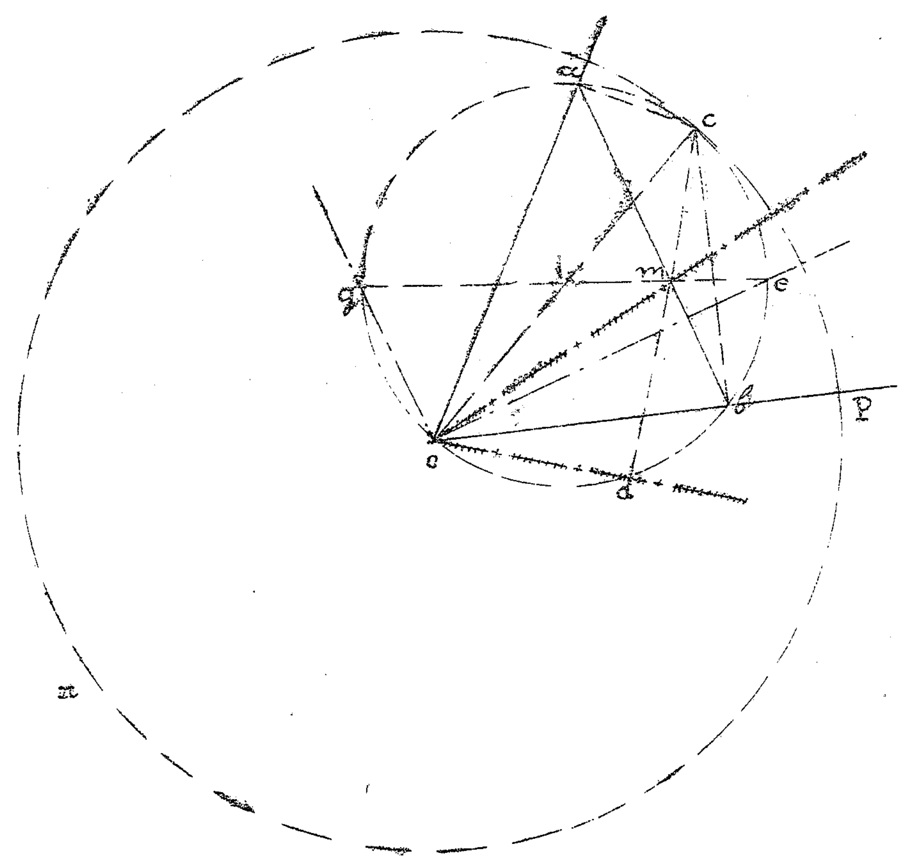


ὑψοῦντες εἰς τετράγωνον

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \qquad \frac{y^2}{b}=1-\frac{x^2}{a}$$

καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν

τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ἥτις παριστᾷ ἔλλειψιν, τῆς οἱ ἄξονες ἔχουσι μήκη $a=mg$ καὶ $b=me$ καὶ συμπίπτουσι μὲ τὰς εὐθείας oe καὶ og.



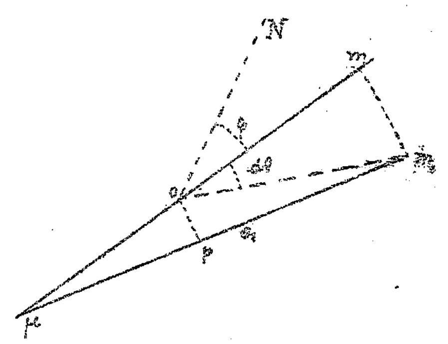
σημεῖά τινα τοῦ ἐπιπέδου P διαγράφουσι περιφερείας κύκλων (καὶ ὁποίας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ὅρια ἐλλείψεων) τὰ ἔχοντα τὴν ἰδιότητα ταύτην σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς εὐθείας Oi.

2ον — μέρος τοῦ προβλήματος. — Ἐν τῷ δευτέρῳ τούτῳ μέρει τοῦ προβλήματος, ζητοῦνται τὰ στοιχεῖα τῆς κινήσεως τοῦ ἐπιπέδου P (δηλ. ἡ τροχιά, ἡ ταχύτης, καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις οἱουδήποτε σημείου αὐτοῦ) γνωστῶν ὄντων τῶν καμπυλῶν C καὶ C′ (42) διὰ τῆς κυλινδήσεως τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ συνεχὴς κίνησις τοῦ σχήματος.

Ἔστωσαν C καὶ C′ αἱ διὰ τῆς κυλινδήσεώς των προσδιορίζουσαι τὴν συνεχῆ κίνησιν τοῦ ἐπιπέδου P καμπύλαι

Προσδιορισμὸς τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου.

καὶ ὁ τὸ ἀντιστοιχοῦν ὡρισμένῃ τινὶ στιγμῇ κέντρον τῆς περιστροφῆς.



Ἡ καμπύλη C καὶ μετ' αὐτῆς τὸ ἐπίπεδον P στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον o, οὕτως ὥστε τὸ στοιχειῶδες τόξον oo_1 τῆς καμπύλης C νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ στοιχειώδους τόξου oo'_1 τῆς καμπύλης C′. Σημεῖον οἱονδήποτε τοῦ ἐπιπέδου P περιστρέφεται καὶ τοῦτο περὶ τὸ σημεῖον o διαγράφον κυκλικὸν τόξον mm_1 τοιοῦτον ὥστε ἡ βαίνουσα ἐπ' αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι. Τὸ στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς συμπίπτει τὴν μετὰ τοῦ σημείου o_1 καὶ ἡ παρὰ τὸ σημεῖον m κάθετος τῇ τροχιᾷ τοῦ σημείου m εἶναι ἡ m_1o_1.

Τὸ σημεῖον μ, τὸ δ' συναντήσεως τῶν ... σημείου m καὶ m, κάθετοι ἐπὶ τροχιᾷ τοῦ m εἶναι τὸ κέντρον τῆς

Κινητική Πρωτοπαπαδάκη

καμπυλότητος τῆς γραμμῆς ἐπαφῆς, ὁπότε τῶν ἀπό τοῦ σημεί-
ου [illegible] ἀποστάσεων $l = op$ [illegible] τῆς. Ἔστω δὲ
[illegible] τῆς καμπύλης C'
καί $\varphi = $ [illegible]. Ἔστω [illegible] $om = l$ καί $oq = ds$ [illegible]
γωνίαι [illegible] διαδοχικῶν ἐφαπτομένων
τῆς καμπύλης [illegible] $\frac{ds}{R}$ [illegible] $\frac{ds}{R'}$ [illegible]
R καί R' ἐμφαίνουσι [illegible] ἀκτῖνας τῆς
καμπυλότητος τῶν καμπυλῶν [illegible]

$$d\theta = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'}$$

ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου τό τρίγωνον m, op μᾶς δίδει

$$d\theta = \widehat{om_1\mu} + \widehat{o\mu m_1} = \widehat{m_1} + \widehat{\mu}$$

ἀλλ' ἐάν op εἶναι κάθετος ἐπί τῆς $m\mu$ ἔχομεν

$$op = ds\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi = l'\,\varepsilon\varphi\,\widehat{m} = l\,\varepsilon\varphi\,\widehat{m_1}$$

ἤ

$$ds\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi = l'\widehat{m} \qquad ds\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi = l\widehat{m_1}$$

ὅθεν

$$\widehat{\mu} = \frac{ds\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{l'} \qquad \widehat{m_1} = \frac{ds\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{l}$$

καί

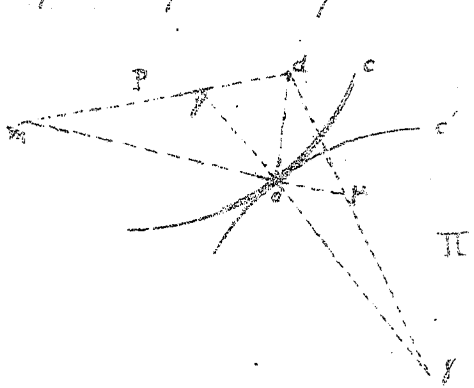
$$d\theta = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = ds\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right)$$

καί τέλος

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right]$$

σχέσις, ἥτις προσδιορίζει τό ζητούμενον μῆκος $o\mu = l'$.

51.— Γεωμετρική κατασκευή τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος δοθεῖσα ὑπό τοῦ Euler καί ἀποδιδομένη τῷ Savary.

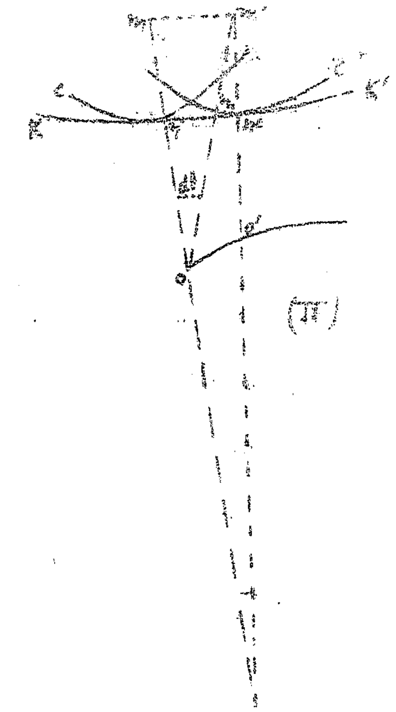


Ἔστω C' ἡ βάσις καί C ἡ ἐπ' αὐτῆς κυλιομένη καμπύλη.
c. γ καί γ' τά ἀντίστοιχα κέντρα καμπυλότητος τῶν εὐθειῶν

[illegible] καί m τό μετά τῆς καμπύλης C [illegible]
ον τοῦ ἐπιπέδου. ἄγομεν καί εὐθεῖαν omq [illegible]
τῇ om ἐκ τοῦ σημείου α [illegible]
αὐτῆς καί τῆς εὐθείας m [illegible]
καί τό κέντρον τῆς καμπυλότητος [illegible]

52.— Προσδιορισμός τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος τῆς περιβαλλούσης κινουμένης καμπύλης C.

Τά διαδοχικά χαρακτηριστικά σημεῖα τῆς καμπύλης C εἶναι, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀπεδείξαμεν [illegible]-
θα on καί $o'n'$ εἶναι αἱ ἀπό
τῶν στιγμιαίων κέντρων τῆς
περιστροφῆς o καί o' καταβεβαλόμεναι κάθετοι τῆς ἀντιστοιχούσης θέσει τῆς καμπύλης
C τό σημεῖον m, ἐφ' ᾧ συναντῶσιν αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι
λοιπόν τό κέντρον τῆς καμπυλότητος τῆς περιβαλλούσης
τῆς καμπύλης C. Κατά τήν
περί τό σημεῖον o στιγμιαίαν
περιστροφήν $d\theta$ ἡ εὐθεῖα om
κατέλαβε τήν θέσιν $o\pi$, καί
τό σημεῖον π' εἶναι προφανῶς
τό ἀντιστοιχοῦν τῷ σημείῳ n'



(Π)

κέντρον τῆς καμπυλότητος τῆς καμπύλης C, διότι πρό τῆς
στιγμιαίας περιστροφῆς $d\theta$ συνέπιπτε μέ τό ἀντιστοιχοῦν
τό σημείῳ n κέντρον τῆς καμπυλότητος m τῆς αὐτῆς καμ-
πύλης C. καί ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι μ. τ.

ται τό κέντρον τῆς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου π, ὅπερ προσδιορίζομεν κατά τ' ἀνωτέρω.

Ὥστε <u>τό κέντρον τῆς καμπυλότητος τῆς περιβαλλούσης κινουμένης τινός καμπύλης C, συμπίπτει μέ τό κέντρον τῆς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς, ἥν διαγράφει τό κέντρον τῆς καμπυλότητος τῆς καμπύλης C.</u>

Ἔστω ΚΚ' ἡ περιβάλλουσα τῆς καμπύλης C. κατά τήν κίνησιν τοῦ ἐπιπέδου P τό σημεῖον π διαγράφει ἐπί τῆς καμπύλης C τό τόξον π, π', καί ἐπί τῆς περιβαλλούσης Κ τό αὐτό σημεῖον διαγράφει τό τόξον π, π'· ὥστε ἐάν θεωρήσωμεν τήν περιβάλλουσαν καμπύλην Κ ὡς ἀκίνητον ἐν τῷ σταθερῷ ἐπιπέδῳ Π ἡ κινουμένη καμπύλη C κυλίεται καί ὀλισθαίνει συνάμα ἐπ' αὐτῆς. Τό μέγεθος τῆς ὀλισθήσεως ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν τόξων ππ' – ηπ' καί ἐάν παραλείψωμεν τάς ὡς πρός τό ππ' δευτεροβαθμίους ἐλαχίστας ποσότητας ἔχομεν

$$\text{ὀλίσθησις} = o\pi \cdot d\theta$$

καί βλέπομεν, ὅτι αὕτη δέν μηδενίζεται παρά διά τά σημεῖα οἷα τό Ο.

Προσδιορισμός τῆς ταχύτητος καί ἐπιταχύνσεως σημείου τινος τοῦ ἐπιπέδου P

53.— Ὁ προσδιορισμός τῆς ταχύτητος καί ἐπιταχύνσεως καθίσταται εὐκολώτατος διά τῆς χρήσεως τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν π καί η δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ κινουμένου ἐπιπέδου παριστάμενα διά τῶν μιγάδων ἀριθμῶν u καί v. Τό ἑνοῦν τά σημεῖα ταῦτα εὐθύγραμμον τμῆμα πη παρίσταται διά τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ

$$u - v = l e^{\alpha i}$$

Ἐν τῇ κινήσει τοῦ ἐπιπέδου P τό μῆκος l μένει ἀμετάβλητον καί $\frac{d\alpha}{dt}$ παριστᾷ τήν περιστροφικήν ταχύτητα ω τοῦ συστήματος, διαφοροῦντες εὑρίσκομεν

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} = l e^{\alpha i} \omega i = (u-v)\omega i$$

ἀλλά $\frac{du}{dt}$ καί $\frac{dv}{dt}$ παριστῶσι τάς ταχύτητας τῶν σημείων π καί η, καί βλέπομεν, ὅτι τό διά τοῦ σταθεροῦ μιγάδος $\frac{du}{dt} - u\omega i$ παριστάμενον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μένει ἀκίνητον (στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς) διαφοροῦντες ἐκ νέου τήν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2v}{dt^2} = l e^{\alpha i}\left[-\omega^2 + i\frac{d\omega}{dt}\right] = l e^{\alpha i}\,\theta(\omega) = (u-v)\,\theta(\omega)$$

ὥστε

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u\theta(\omega) = \frac{d^2v}{dt^2} - v\theta(\omega) = -w\theta(\omega)$$

ὁ μιγάς ἀριθμός $w\theta(\omega)$ προσδιορίζει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σημεῖον κ ο ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω σχέσις δίδει

$$\frac{d^2u}{dt^2} = (u-w)\,\theta(\omega)$$

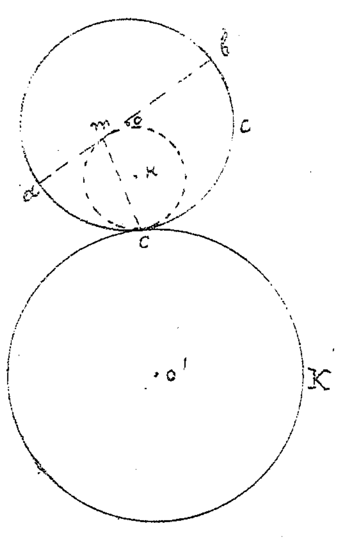
ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις $\frac{d^2u}{dt^2}$ παρίσταται διά τοῦ τμήματος πο πολλαπλασιαζομένου ἐπί τόν σταθερόν μιγάδα $\theta(\omega)$, ὅστις εἶναι ὁ αὐτός δι' ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Περιβάλλουσαι

51.— 1ον — Περιβάλλουσα τῆς διαμέτρου αβ κύκλου τινός c κυλιομένου ἐπί ἑτέρου κύκλου Κ.

Τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς εἶναι ἐνταῦθα τό c· τό σημεῖον π ἐν ᾧ ἡ εὐθεῖα αβ ἐφάπτεται τῆς περιβαλλούσης αὐτῆς κεῖται ἐπί τῆς ἀπό τοῦ σημείου c ἐπί τῆς αβ καθέτου.

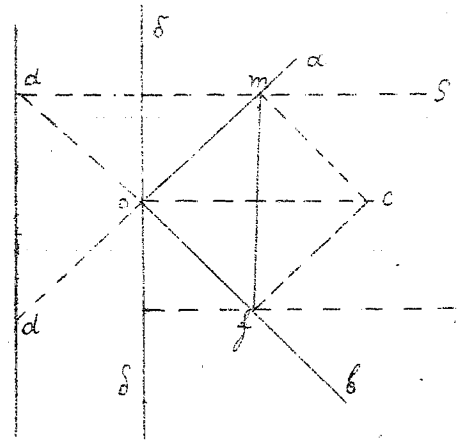
Ἡ διά τῶν τριῶν σημείων cmc διερχομένη κινητή περιφέρεια ἐφάπτεται τοῦ κύκλου O παρά τό σημεῖον c καί τό σημεῖον m τῆς εὐθείας ab εὑρίσκεται πάντοτε ἐπί τῆς περιφερείας κ καί συμπίπτει διαρκῶς μέ τό αὐτό σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης. Ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ σημείου m συμπίπτει λοιπόν μέ τήν καμπύλην τήν διαγραφομένην ὑπό τοῦ σημείου m τῆς περιφερείας omc, ὅταν αὕτη κυλίεται ἐπί τῆς περιφερείας K.



ὅθεν

Ἡ περιβάλλουσα τῆς διαμέτρου κύκλου τινός C κυλιομένου ἐπί ἑτέρου K εἶναι ἡ διαγραφομένη ἐπικυκλοειδής (epicycloide) ὑπό σημείου τινός περιφερείας, ἧς ἡ διάμετρος ἰσοῦται μέ τήν ἀκτῖνα τῆς C.

2ον — Περιβάλλουσα τῆς πλευρᾶς oa ὀρθῆς γωνίας boa ἧς ἡ κορυφή διατρέχει σταθεράν εὐθεῖαν τήν d καί ἡ ἑτέρα πλευρά bo διέρχεται διά τοῦ σταθεροῦ σημείου f.



Τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς εἶναι τό c. m τό σημεῖον, ἐν ᾧ ἡ πλευρά oa ἐφάπτεται τῆς περιβαλλούσης αὐτῆς. Ἐάν ἐκ τοῦ σημείου m φέρωμεν κάθετον ἐπί τῆς εὐθείας od καί προεκβάλλωμεν αὐτήν μέχρι τοῦ σημείου d, ὅπου συναντᾷ αὕτη τήν πλευράν ob, ἔχομεν,

$$\ldots = mc = of$$

τό σημεῖον d, συμμετρικόν τῆς ἑστίας f ὡς πρός τήν ἐφαπτομένην, διαγράφει λοιπόν εὐθεῖαν d'd παράλληλον τῇ od.

ἀλλά καί $$md = oc = mf$$

ὥστε m ἀπέχει ἐξ ἴσου τῆς εὐθείας d'd καί τοῦ σταθεροῦ σημείου f: διαγράφει λοιπόν δευτεροβάθμιον παραβολήν μέ ἑστίαν τήν f καί διευθύνουσαν (directrice) τήν dd.

Καί βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι αἱ ἀπό τῆς ἑστίας f κάθετοι ἐπί τῶν ἐφαπτομένων om συναντῶσαν αὐτάς ἐπί τῆς παρά τῇ κορυφῇ ἐφαπτομένης o.

Ἡ ἐφαπτομένη mo σχηματίζει μετά τοῦ ἄξονος fK καί τῆς ἀκτῖνος fm ἴσης γωνίας.

Ἡ ἐφαπτομένη ao εἶναι διχοτομοῦσα τῆς γωνίας dmf.

Ἡ ἀπό τοῦ σημείου f κάθετος τῇ fm συναντᾷ τήν παρά τό σημεῖον m ἐφαπτομένην ἐπί τῆς διευθυνούσης dd.

Ἡ γωνία

$$\widehat{ams} = \widehat{dmo} = \widehat{omf}$$

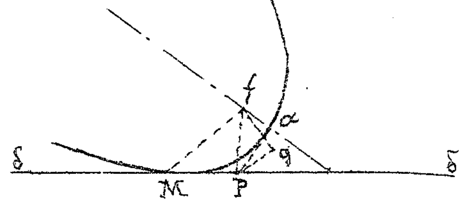
(ἀνάκλασις)

Ὁ γεωμετρικός τόπος τῆς προβολῆς τῆς ἑστίας ἐπί τῶν ἐφαπτομένων εἶναι ἡ παρά τῇ κορυφῇ K ἐφαπτομένη o.d.

3ον —

Ἀλυσοειδής καμπύλη διαγραφομένη ὑπό τῆς ἑστίας δευτεροβαθμίου παραβολῆς κυλιομένης ἐπί εὐθείας γραμμῆς δδ.

Τό στιγμιαῖον κέντρον τῆς περιστροφῆς ἐνταῦθα εἶναι m· mf εἶναι ἡ κάθετος τοῦ ἀπό τοῦ σημείου f διαγραφομένης καμπύλης· fg εἶναι ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς· καί ἐάν ἀποδείξωμεν, ὅτι pg εἶναι σταθερόν ἡ ὑπό τῆς ἑστίας f διαγραφομένη καμπύλη συμπίπτει μέ τήν ἀλυσοειδῆ καμπύρην. Ἐκ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου παραδείγματος γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη παρά τῇ κορυφῇ α τῆς παραβολῆς διέρχεται διά τοῦ σημείου p καί ὅλαι αἱ διά τοῦ σήματος ∠ σεσημειωμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι· ὥστε τά ὀρθογώνια τρίγωνα fpq καί fpa εἶναι ἴσα.



ὅθεν

$$pq = fa = \text{σταθερόν}$$

Κίνησις τῶν γεωμετρικῶν συστημάτων ἐν τῷ διαστήματι.

55.— Μετά τήν κίνησιν τῶν ἐπιπέδων γεωμετρικῶν σχημάτων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν, θεωρήσωμεν ἤδη τήν κίνησιν γεωμετρικοῦ τινός συστήματος ἐν τῷ διαστήματι.

Εἴδομεν ἀνωτέρω (46) ὅτι ἡ κίνησις αὕτη δύναται νά ἐπιτευχθῇ ἀνά πᾶσαν στιγμήν διά δύο περιστροφικῶν κινήσεων περί εὐθείας D καί Δ, τῶν ὁποίων τήν μίαν Δ δυνάμεθα νά ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως· ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις αὐτῆς προσδιορίζει ἐντελῶς τήν ἑτέραν D, ἥν διά τοῦτο καλοῦμεν συζυγῆ τῆς εὐθείας Δ.

Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς δὲ κατασκευῆς δι' ἧς εὑρήκαμεν τήν εὐθεῖαν Δ, βλέπομεν, ὅτι, ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ κατά τήν κίνησιν τοῦ στερεοῦ συστήματος.

1ον— Τά κάθετα ἐπίπεδα τῶν ὑπό τῶν σημείων τῆς εὐθείας $\left\{\begin{matrix}\Delta\\ D\end{matrix}\right.$ διαγραφομένων τροχιῶν διέρχονται διά τῆς συ-

ζυγοῦς αὐτῇ εὐθείας $\left\{\begin{matrix}\Delta\\ D\end{matrix}\right.$.

Θεωρήσωμεν τό σύνολον τῶν δι' ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σημείου f τοῦ κινουμένου στερεοῦ συστήματος διερχομένων εὐθειῶν $D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots$

Τό κάθετον τῇ τροχιᾷ τοῦ σημείου f ἐπίπεδον διέρχεται ἀνά πᾶσαν στιγμήν δι' ὅλων τῶν εὐθειῶν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$ τῶν συζυγῶν ταῖς εὐθείαις $D_1, D_2, D_3 \ldots$ ὅθεν

2ον— Αἱ συζυγεῖς εὐθεῖαι Δ τῶν δι' ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σημείου f διερχομένων εὐθειῶν D προσδιορίζουσιν ἀνά πᾶσαν στιγμήν ἐπίπεδον Π διερχόμενον διά τοῦ σημείου f.

Τό ἐπίπεδον Π δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἀνῆκον τῷ κινουμένῳ στερεῷ συστήματι καί τότε

3ον— Αἱ συζυγεῖς D_1, D_2, τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Π ἐμπεριεχομένων εὐθειῶν $\Delta_1, \Delta_2 \ldots\ldots$ διέρχονται ἀνά πᾶσαν στιγμήν δι' ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σημείου f κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π.

Τό σημεῖον τοῦτο καλοῦμεν <u>ἑστίαν</u> τοῦ ἐπιπέδου Π καί βλέπομεν, ὅτι

4ον— Τά κάθετα ἐπίπεδα τῶν τροχιῶν τῶν διαγραφομένων ὑπό πάντων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Π ἐν τῇ κινήσει του, διέρχονται ἀνά πᾶσαν στιγμήν διά τῆς ἑστίας αὐτοῦ f.

5ον— Ἡ ἑστία f κινεῖται καθέτως (1ον) τῷ ἐπιπέδῳ Π.

Μία τῶν εὐθειῶν Δ ἡ συζυγής τῇ παρά τῇ ἑστίᾳ f καθέτῳ D τῷ ἐπιπέδῳ Π κινεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ διότι στρέφεται περί τόν ἄξονα D. ὅθεν

6ον— Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου Π τά κιν[illegible] εἶναι [illegible]

<u>[illegible] Πρωτοπαπαδάκη</u>

πῷ τῷ ἐπιπέδῳ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Τὸ ἐπίπεδον στρέφεται κατὰ συνέπειαν περὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἥτις εἶναι ἡ σχετικὴ τῇ κινήσει, μεθ' ἧς φέρεται τὸ σύστημα, χαρακτηριστικὴ τοῦ ἐπιπέδου. ὅθεν

7ον — Ἡ χαρακτηριστικὴ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι ἡ συζυγὴς τῆς διὰ τῆς ἑστίας αὐτοῦ f φερομένης αὐτῷ καθέτου.

Ἡ ἑστία τοῦ διὰ τῆς εὐθείας Δ διερχομένου ἐπιπέδου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς συζυγοῦς αὐτῇ εὐθείας D· ὅθεν

8ον — Αἱ ἑστίαι τῶν διὰ τῆς εὐθείας Δ διερχομένων ἐπιπέδων εὑρίσκονται ἐν ὡρισμένῳ ἐπιπέδῳ Π, οὗτινος ἑστία εἶναι τὸ σημεῖον f. Μία τῶν εὐθειῶν Δ τοῦ ἐπιπέδου Π κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον, τὴν συζυγῆ ταύτην εὐθεῖαν D καλοῦσι παράσιτον τοῦ ἐπιπέδου Π.

Τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ἔχουσι τὴν αὐτὴν παράσιτον εὐθεῖαν.

Θεωρήσωμεν νῦν τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων τοῦ στερεοῦ συστήματος· ἕκαστον τούτων ἔχει μίαν εὐθεῖαν εἰς τὸ ἄπειρον· κατὰ συνέπειαν αἱ ἐν τῷ ἀπείρῳ εὐθεῖαι ὅλων τῶν ἐπιπέδων τοῦ διαστήματος κεῖνται ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου P. Αἱ συζυγεῖς τῆς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου P διέρχονται διὰ τῆς ἑστίας αὐτοῦ· δηλ. δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου κειμένου εἰς τὸ ἄπειρον, εἶναι λοιπὸν παράλληλοι αὗται· ἀλλ' αὗται εἶναι αἱ παράσιτοι ὅλων τῶν ἐπιπέδων τοῦ διαστήματος. ὅθεν

10ον — Αἱ παράσιτοι εὐθεῖαι ὅλων τῶν ἐπιπέδων τοῦ κινουμένου στερεοῦ συστήματος εἶναι παράλληλοι ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν.

Ἡ φορὰ τῶν παρασίτων εὐθειῶν χαρακτηρίζει λοιπὸν τὸ κινούμενον στερεὸν σύστημα. Θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν τῶν καθέτων τῇ παρασίτῳ διευθύνσει ἐπιπέδων· αἱ ἑστίαι αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς τῶν παρασίτων εὐθειῶν, ἡ συζυγὴς ταύτῃ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἡ περὶ αὐτὴν περιστροφὴ εἶναι ἁπλῶς μεταβατικὴ κίνησις· ὥστε

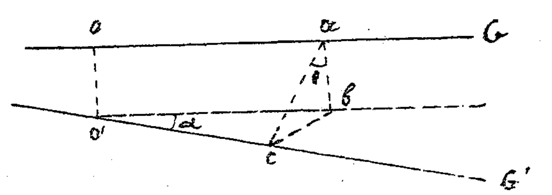
11ον — Ἡ παράσιτος φορὰ τοῦ συστήματος συμπίπτει μὲ τὴν φορὰν τοῦ στιγμιαίου ἄξονος τῆς περιστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως.

Ἐφαρμογαί τινες ἐπὶ τῶν ῥαβδωτῶν ἐπιφανειῶν (ἀποσπασθὲν ἐκ τοῦ μαθήματος τῆς γεωμετρίας τῆς πολυτεχνικῆς σχολῆς)

---

56. — Ῥαβδωτὰς ὀνομάζομεν τὰς ὑπὸ κινουμένης εὐθείας γραμμῆς G (γενέτειρα) διαγραφομένας ἐπιφανείας.

Ἔστωσαν G καὶ G' αἱ δύο παραπλήσιαι διαδοχικαὶ γενέτειραι καὶ οο' ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος· ἐὰν ἡ εὐθεῖα G' τείνῃ νὰ συμπέσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας G, τὸ σημεῖον ο τείνει πρὸς ὡρισμένον τι σημεῖον τῆς εὐθείας G, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν κεντρικὸν σημεῖον τῆς γενετείρας ταύτης. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κεντρικῶν σημείων ἁπασῶν τῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας g ἀποτελεῖ καμπύλην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν



τῆς ἐπιφανείας.

Τό ζεῦγος τῶν εὐθειῶν οο' καί og προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον καλοῦμεν <u>κεντρικόν ἐπίπεδον</u> διά τήν γενέτειραν g.

Ἐάν ἐξ ἑνός οἱουδήποτε σημείου τῆς γενετείρας g φέρωμεν ἐπίπεδον abc κάθετον τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ καί χαράξωμεν τήν εὐθεῖαν ac τήν ἑνοῦσαν τό σημεῖον a μετά τοῦ c, ἡ εὐθεῖα ac ἐφάπτεται τῆς ἐπί τῆς ἐπιφανείας (g) καμπύλης ac. Τό ἐπίπεδον gac ἐφάπτεται λοιπόν τῆς ἐπιφανείας (g) παρά τό σημεῖον a.

Τήν γωνίαν θ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετά τοῦ κεντρικοῦ ἐπιπέδου goo' προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{x\ \varepsilon\varphi\ a}{oo'} = \frac{xa}{p} \quad (\text{ἔνθα } x = oa,\ p = oo')$$

$$\varepsilon\varphi.\ \theta = \frac{x}{\left(\frac{p}{a}\right)} = \frac{x}{K}$$

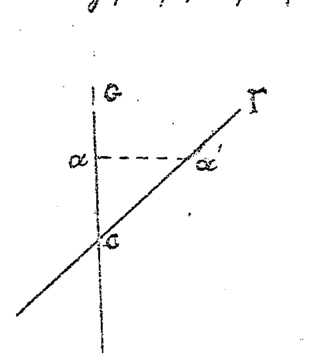
ἐξ ἧς βλέπομεν ὅτι τό κεντρικόν ἐπίπεδον goo' ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας παρά τό κεντρικόν σημεῖον o καί εἶναι κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας παρά τό σημεῖον τῆς g, ὅπερ κεῖται εἰς τό ἄπειρον. K καλεῖται <u>παράμετρον τῆς διανομῆς</u> τῶν διά τῆς γενετείρας g διερχομένων καί ἐφαπτομένων τῆς ἐπιφανείας (g) ἐπιπέδων. p καί a εἶναι ἀπειροσταί ποσότητες.

Ἐάν K εἶναι πεπερασμένη ποσότης ἡ ἐπιφάνεια καλεῖται στρεβλή.

Ἐάν K = 0 ἤ = ∞ δι' ὅλας τάς γενετείρας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι

Τήν ἐπιφάνειαν (G) δυνάμεθα νά διαγράψωμεν μετακινοῦντες τήν γενέτειραν G ἐπί τῆς ἐπιφανείας οὕτως

ὥστε ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς τό a νά διαγράφῃ ὡρισμένην καμπύλην (a) ἐπί τῆς ἐπιφανείας (G).



Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ ἡ εὐθεῖα G στρέφεται ἀνά πᾶσαν στιγμήν περί τήν συζυγῆ αὐτῇ Γ· αἱ κάθετοι ἐπί τάς τροχιάς τῶν σημείων τῆς G διέρχονται διά τῆς Γ.

Ἐάν προβάλωμεν τάς εὐθείας G καί Γ ἐπί τοῦ παραλλήλου αὐταῖς ἐπιπέδου βλέπομεν ὅτι τό παρά τό σημεῖον a ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας (G) ἐπίπεδον διέρχεται διά τῆς εὐθείας G καί εἶναι κάθετον τῇ εὐθείᾳ a a'. ὅθεν

Τό ἐφαπτόμενον τῇ ἐπιφανείᾳ ἐπίπεδον παρά τό ἀπείρως μακράν σημεῖον τῆς G εἶναι κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ἀξονος.

Τό παρά τό σημεῖον c ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι λοιπόν παράλληλον τῆς εὐθείας G καί Γ καί ἡ γωνία αὐτοῦ μετά τοῦ ἐφαπτομένου τῆς ἐπιφανείας ἐπιπέδου παρά τό ἀπείρως μακράν σημεῖον τῆς G ἰσοῦται 90°. ὅθεν τό παρά τό σημεῖον c ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι τό κεντρικόν ἐπίπεδον διά τήν γενέτειραν G. οὕτω

Ἡ κοινή κάθετος τῆς εὐθείας G καί Γ προσδιορίζει τό κεντρικόν σημεῖον ἐπί τῆς γενετείρας G.

Τό διά τήν αὐτήν γενέτειραν κεντρικόν ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῇ Γ.

Τό παράμετρον τῆς διανομῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων ἰσοῦται τῷ $\frac{p}{\varepsilon\varphi(G,\Gamma)}$, ἔνθα p ἐμφαίνει τήν βραχυτάτην ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν G καί Γ.

Ἄς καθ' ὅλον τό μῆκος τῆς γενετείρας G ... ἐπί

<u>Κικίτσικ. Πρωτοπαπαδάκη</u>

φανείᾳ (G) εἶναι κάθετοι ἐπί τῆς εὐθείας G (καί κατά συνέπειαν παράλληλοι τῷ καθέτῳ τῇ G ἐπιπέδῳ) καί συναντῶσι τήν Γ. Ὅθεν

αἱ κάθετοι ῥαβδωτῆς ἐπιφανείας καθ' ὅλον τό μῆκος μιᾶς καί τῆς αὐτῆς γενετείρας διαγράφουσιν ὑπερβολικόν παραβολοειδές, ὅπερ καλοῦμεν παραβολοειδές τῶν καθέτων.

Τά διευθύνοντα τοῦ παραβολοειδοῦς τούτου ἐπίπεδα εἶναι τό μέν κάθετον τῇ G, τό δέ παράλληλον τῷ κεντρικῷ ἐπιπέδῳ.

Ἐάν ἀντί τῆς καμπύλης (α) μεταχειρισθῶμεν ἑτέραν τινά (β), ἡ εὐθεῖα Γ ἀντικαθίσταται ὑπό ἑτέρας Γ, ἀλλά τό παραβολοειδές τῶν καθέτων δέν μεταβάλλεται, ὥστε καί ἡ Γ' εὑρίσκεται ἐπ' αὐτοῦ.

Οὕτω αἱ συζυγεῖς Γ τῆς γενετείρας G ἀποτελοῦσι τό δεύτερον σύστημα τῶν γενετειρῶν τοῦ παραβολοειδοῦς τῶν καθέτων.

Τό κεντρικόν σημεῖον τῆς G εἶναι ἡ κορυφή τοῦ παραβολοειδοῦς τῶν καθέτων (διότι ὁ ἄξων αὐτοῦ εἶναι παράλληλος τῇ τομῇ τῶν διευθυνόντων ἐπιπέδων).

Ἡ γενέτειρα G τοῦ παραβολοειδοῦς ἔχει τό αὐτό κεντρικόν σημεῖον καί τό αὐτό κεντρικόν ἐπίπεδον μέ τήν γενέτειραν G τῆς ῥαβδωτῆς ἐπιφανείας.

Τό σχετικόν τῇ γενετείρᾳ ταύτῃ παράμετρον τῆς διανομῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων εἶναι τό αὐτό διά τάς δύο ἐπιφανείας.

57.— Παρατηροῦντες ὅτι τρεῖς μόνον κάθετοι τῇ ῥαβδωτῇ ἐπιφανείᾳ ἀπό τριῶν σημείων τῆς γενετείρας G προσδιορίζουσιν τό σχετικόν αὐτῇ παραβολοειδές τῶν καθέτων, βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι

1ον.— ἐάν δύο ῥαβδωταί ἐπιφάνειαι ἔχωσι μίαν γενέτειραν κοινήν καί τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τρία σημεῖα τῆς γενετείρας ταύτης κοινά, ἔχουσι καί τά παρά τά λοιπά σημεῖα τῆς γενετείρας ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα κοινά.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι SC παρά τῇ γενετείρᾳ ταύτῃ.

Δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἀπειρίαν ὑπερβολοειδῶν παρά τῇ γενετείρᾳ ῥαβδωτῆς ἐπιφανείας.

Ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά προσδιορίσωμεν τρία ὁπωσδήποτε ἐφαπτόμενα τῆς ἐπιφανείας ἐπίπεδα, παρά τά σημεῖα a, b, c τῆς αὐτῆς γενετείρας, καί ἐξ αὐτῶν νά χαράξωμεν ὁπωσδήποτε εὐθείας ἐπί τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων καί λάβωμεν αὐτάς ὡς γενετείρας ἑνός ὑπερβολοειδοῦς.

Δι' ὡρισμένης τινός εὐθείας ἕν μόνον ὑπερβολοειδές διέρχεται.

Ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν τά κοινά τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ καί τοῖς τρισίν ἐφαπτομένοις ἐπιπέδοις σημεῖα.

Δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἀπειρίαν παραβολοειδῶν παρά τῇ γενετείρᾳ ῥαβδωτῆς ἐπιφανείας.

Ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά φέρωμεν ἀπό τῶν σημείων a, b, c εὐθείας παραλλήλους ἐπιπέδῳ τινί καί κειμένας ἐν τοῖς παρά τοῖς σημείοις a, b, c ἐφαπτομένοις ἐπιπέδοις.

Ἐάν στρέψωμεν περί τήν εὐθεῖαν G ἕν τῶν παραβολοειδῶν τούτων, φέρομεν αὐτό ἐπί τοῦ παραβολοειδοῦς τῶν καθέτων.

Κεφάλαιον III

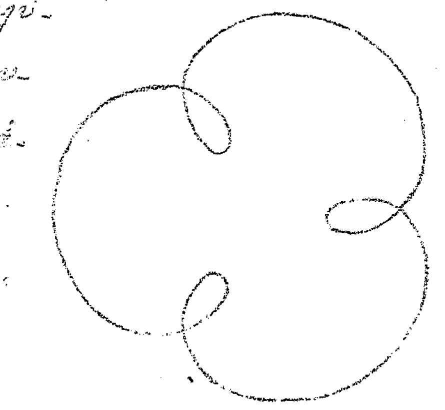
Κίνησις σημείου τινός ἐν σχέσει πρός κινούμενον σῶμα.

58.— Μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν τήν κίνησιν σημείου τινος ἐν σχέσει πρός ἕτερα σημεῖα τοῦ διαστήματος καί προσδιωρίσαμεν ἐν ἑκάστῃ στιγμῇ τήν ὑπό τοῦ κινητοῦ κατεχομένην ἐν τῷ διαστήματι θέσιν διά τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ πρός τρεῖς ὀρθογωνίους ἄξονας, τούς ὁποίους ὑπεθέσαμεν ἐπίσης σταθερούς καί ἀκινήτους ἐν τῷ διαστήματι.

Τοιαῦτα ὅμως ἀκίνητα σημεῖα, τοιούτους σταθερούς καί ἀκινήτους ἄξονας, φανταζόμεθα μόνον ἀλλά καί δέν δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν, διότι τό πᾶν κινεῖται περί ἡμᾶς. Τά ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς σώματα, τά ὁποῖα συνήθως θεωροῦμεν ὡς ἀκίνητα παρασύρονται ἐν τῷ διαστήματι ὑπό τῆς γῆς φερομένης ὑπό διπλῆς κινήσεως περί τόν ἄξονα αὐτῆς καί περί τόν ἥλιον. Κατά πᾶσαν δέ πιθανότητα καί ὁ ἥλιος κινεῖται ἐν τῷ διαστήματι παρασύρων καί τήν γῆν μετά τῶν λοιπῶν πλανητικῶν σωμάτων, τῶν ὁποίων τήν κίνησιν διέπει οὗτος.

Αἱ κινήσεις λοιπόν τάς ὁποίας παρατηροῦμεν ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς καί ἐν τοῖς οὐρανίοις διαστήμασιν εἶ-

ναι ὅλως σχετικαί καί διάφοροι τῶν πραγματικῶν, τῶν ἀπολύτων κινήσεων τῶν σωμάτων τούτων. Οὕτω π.χ. ἡ οὐράνιος μηχανική μᾶς διδάσκει, ὅτι αἱ τροχιαί τῶν πλανητῶν περί τόν ἥλιον εἶναι ἐλλείψεις, ὧν οὗτος κατέχει τήν ἑτέραν τῶν ἑστιῶν καί τοιαύτη δ' ἀπεκαλύπτετο εἰς ἡμᾶς ἐάν ἠδυνάμεθα νά ἀκολουθήσωμεν τά διαγράφοντα ταύτην ἄστρα ἐξ ἀκινήτου τινός σημείου τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ παρατηροῦντες αὐτήν ἐπί τῆς γῆς, μεθ' ἧς φερόμεθα ἐν τῷ διαστήματι παρουσιάζεται



ἡμῖν ὑπό τήν ἑξῆς μορφήν, ἥτις πᾶν ἄλλο εἶναι ἤ ἔλλειψις.

Προτιθέμεθα λοιπόν ἐνταῦθα νά ἐξετάσωμεν μετά τῆς δεούσης λεπτομερείας τήν σχετικήν κίνησιν τῶν σωμάτων καί προσδιορίσωμεν τά στοιχεῖα αὐτῆς, οὕτως ὥστε δι' αὐτῶν νά δυνηθῶμεν νά προσδιορίσωμεν τά στοιχεῖα τῆς ἀπολύτου κινήσεως τοῦ σώματος καί τ' ἀνάπαλιν, διά τῆς ἀπολύτου κινήσεως νά προσδιορίσωμεν τήν κίνησιν τοῦ σώματος, σχετικῶς πρός ἕτερον ἐπίσης κινούμενον.

Τῶν σχετικῶν κινήσεων ἐκάμαμεν ἤδη χρῆσιν ἐν τῇ χαράξει γεωμετρικῶν τινων καμπύλων, οἷαι ἡ ἕλιξ, ἡ ἑλικοειδής τοῦ Ἀρχιμήδους κλπ. τάς ὁποίας ὁρίζομεν ὡς ἑξῆς.

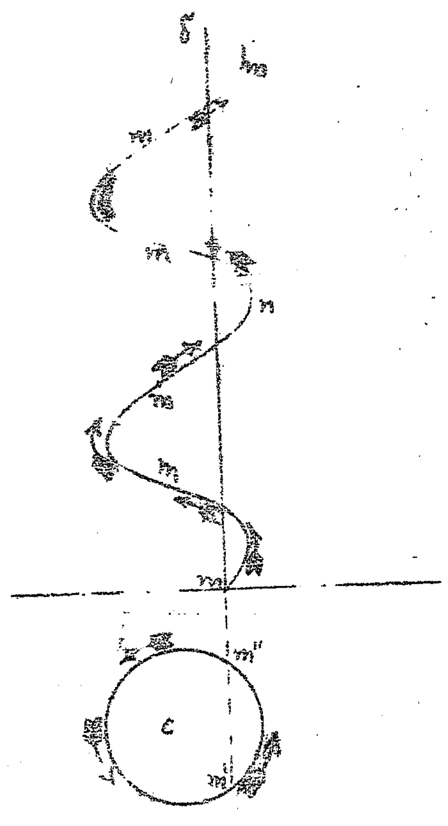
Ἕλιξ.— Κατακόρυφος εὐθεῖα γραμμή τις κινεῖται ὁμοιομόρφως ὁδηγουμένη ὑπό περιφερείας κύκλου ἐν ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ. Ἐπί τῆς εὐθείας δέ ταύτης κινεῖται ὁμοιομόρφως σημεῖόν τι m, οὗτινος ἡ τροχιά εἶναι ἡ ἕλιξ.— Ἐν τῇ κινήσει τοῦ σημείου m διακρίνομεν

Παρασύρουσα κίνησις — 1ον — Τήν περιστροφικήν κίνησιν

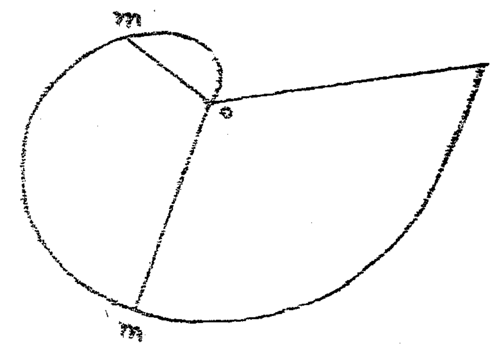
Κυριακή Πρωτοπαπαδάκη

τῆς κατακορύφου εὐθείας, ἥτις παρασύρει μεθ' ἑαυτῆς τό σημεῖον m, τό ὁποῖον ἐάν δέν ἐκινεῖτο ἐπ' αὐτῆς κατ' εὐθείας θά διέγραφεν ἁπλῶς κύκλον περί τόν ἄξονα τῆς περιστροφῆς. Τήν κίνησιν ταύτην ὀνομάζομεν <u>παρασύρουσαν κίνησιν</u> τοῦ σημείου m, δίδοντες τό αὐτό ἐπώνυμον καί εἰς τά προσδιορίζοντα αὐτήν στοιχεῖα, τήν ταχύτητα δηλ. καί τήν ἐπιτάχυνσιν (παρασύρουσα ταχύτης, παρασύρουσα ἐπιτάχυνσις . . . .)

Σχετική κί-<u>νησις</u> 2ον — Τήν ὁμοιόμορφον κίνησιν τοῦ σημείου m ἐπί τῆς περιστρεφομένης εὐθείας md ὡς ἐπί τῆς ὁποίας τό κινητόν m διαγράφει αὐτήν τήν εὐθεῖαν md οὕτως ὥστε διά παρατηρητήν δεσμευμένον ἐπί τῆς εὐθείας md καί φερόμενον μετ' αὐτῆς ἐν τῷ διαστήματι ἡ τροχιά τοῦ κινητοῦ m εἶναι ἁπλῶς ἡ εὐθεῖα md καί διαγράφεται αὕτη μεθ' ὁμοιόμορφον κίνησιν. Τήν δευτέραν ταύτην κίνησιν τοῦ σημείου m ὀνομάζομεν <u>σχετικήν κίνησιν</u> αὐτοῦ ὡς πρός τήν εὐθεῖαν md (τό συμπαρασῦρον τό κινούμενον σημεῖον m σύστημα) καί τά προσδιορίζοντα αὐτήν στοιχεῖα τήν ταχύτητα δηλ. καί τήν ἐπιτάχυνσιν ὀνομάζομεν σχετικήν ταχύτητα, σχετικήν ἐπιτάχυνσιν ὡς πρός τό συμπαρασῦρον σύστημα md.



Ἀπόλυτος <u>κίνησις</u> 3ον — Τήν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν κινήσεων τούτων, <u>τῆς παρασυρούσης</u> δηλ. καί τῆς σχετικῆς κινήσεως τοῦ σημείου m, προκύπτουσαν τελικήν κίνησιν αὐτοῦ ὡς ἐπί τῆς ὁποίας διαγράφει τοῦτο τήν καμπύλην, ἥν ὀνομάζομεν ἕλικα· τήν τελικήν ταύτην κίνησιν ὀνομάζομεν <u>ἀπόλυτον κίνησιν</u> τοῦ σημείου m, καί τήν ἀναφερομένην τῇ ἀπολύτῳ ταύτῃ κινήσει ταχύτητα καί ἐπιτάχυνσιν καλοῦμεν ἀπόλυτον ταχύτητα, ἀπόλυτον ἐπιτάχυνσιν τοῦ σημείου m.



Ἕτερον παράδειγμα σχετικῶν κινήσεων παρέχει ἡμῖν ἡ ἑλικοειδής [spirale] τοῦ Ἀρχιμήδους διαγραφομένη ὑπό σημείου τινός m κινουμένου ὁμοιομόρφως ἐπί εὐθείας om περιστρεφομένης καί ταύτης ὁμοιομόρφως περί τό σημεῖον o.

Οὕτω γνωρίζοντες τήν σχετικήν τροχιάν (md om) τοῦ κινουμένου σημείου. Εὐκόλως δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἐν οἱαδήποτε περιπτώσει τήν ἀπόλυτον κίνησιν αὐτοῦ, ὡς ἐπράξαμεν τοῦτο ἀνωτέρω.

Τήν σχετικήν τροχιάν δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ὡς ἑξῆς.

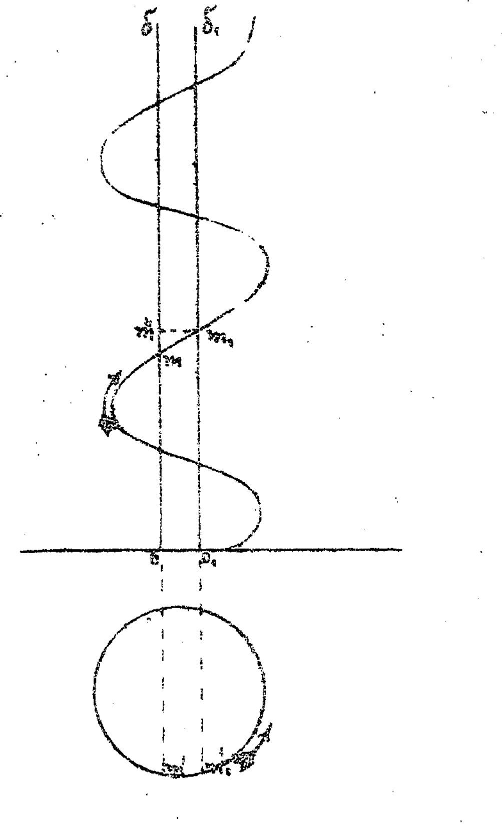
Θεωροῦμεν ἐν τῷ στερεῷ σώματι δύο συστήματα εὐθυγράμμων ἀξόνων $o(x, y, z)$ καί $o(\xi, \eta, \zeta)$ σημειοῦντα καθ' ἥν στιγμήν ἀρχίζομεν παρατηροῦντες τήν κίνησιν τοῦ σημείου m. Τό ἕν τῶν συστημάτων τούτων $o(\xi, \eta, \zeta)$ π.χ. μένει <u>ἀπολύτως</u> ἀκίνητον ἐν τῷ διαστήματι, ἐνῷ τό ἕτερον $o(x, y, z)$ κινεῖται σταθερῶς μετά τοῦ σώματος συνδεδεμένον μετ' αὐτοῦ. Ἀντὶ πᾶσαν στιγμὴν προσδιορίζομεν ἐν τῷ κινουμένῳ στερεῷ τὰς συντεταγμένας x, y, z τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς ἄξονας $o(x, y, z)$ καὶ κατασκευάζομεν ἐν τῷ συστήματι $o(\xi, \eta, \zeta)$ τὸ σημεῖον $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ τῶν σημείων τούτων (ξ, η, ζ) εἶναι ἡ σχετικὴ τροχιὰ τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τὸ στερεὸν σύστημα $o(x, y, z)$.

Δυνάμεθα ἤδη νὰ φαντασθῶμεν τὴν τροχιὰν ταύτην σταθερῶς συνδεδεμένην πρὸς τὸ κινούμενον στερεὸν σύστημα $o(\xi, \eta, \zeta)$ καὶ κινουμένην μετ' αὐτοῦ, τὸ δὲ σημεῖον m κινούμενον ἐπὶ τῆς τροχιᾶς ταύτης μὲ τὴν σχετικὴν κίνησιν αὐτοῦ. Τότε τὸ σημεῖον m φέρεται συγχρόνως ὑπὸ τῆς κινήσεως τῆς σχετικῆς αὐτοῦ τροχιᾶς (δηλ. τῆς παρασυρούσης αὐτὸ κινήσεως) καὶ ὑπὸ τῆς σχετικῆς αὐτοῦ κινήσεως ἐπὶ τῆς τροχιᾶς ταύτης. Καὶ ἡ ἐκ τῶν δύο τούτων συγχρόνων κινήσεων προκύπτουσα κίνησις, εἶναι ἡ ἀπόλυτος κίνησις τοῦ σημείου m, τοῦτο δηλ. διαγράφει ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ τὴν ἀπόλυτον αὐτοῦ τροχιάν.

59.——— Ἴδωμεν νῦν τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σχετικὴν θέσιν ἣν λαμβάνει ἐν τῷ ἀπειροστῷ χρονικῷ διαστήματι dt σημεῖόν τι m ὡς πρὸς σύστημα S (τὰς εὐθείας οδ ἢ om τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων) κινούμενον καὶ συμπαρασῦρον ἐν τῇ κινήσει τοῦ τὸ σημεῖον m, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο μετὰ τὸ πέρας τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt νὰ ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον m ὡς ἀμεταβλήτως συνδεδεμένον μετὰ τοῦ στερεοῦ συστήματος S καὶ ἐστερημένον πάσης σχετικῆς κινήσεως ὡς πρὸς τὸ σύστημα S, καὶ τότε νὰ μεταθέσωμεν εἰς τὸ

σύστημα S καὶ τὸ μετ' αὐτοῦ συνδεδεμένον σημεῖον m μετατόπισιν ἴσην καὶ ἀντίθετον ἐκείνης, ἣν ὑπέστη τὸ σύστημα S ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt. Τότε τὸ σύστημα S ἐπανέρχεται εἰς ἣν κατεῖχε θέσιν ἀρχομένου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt, τὸ σημεῖον ὅμως m δὲν ἐπανέρχεται εἰς ἣν κατεῖχε καὶ τοῦτο θέσιν ἀρχομένου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἀλλ' εἰς ἑτέραν m''. Καὶ ἡ μετατόπισις mm'' εἶναι ἴσα ἴσα ἡ σχετικὴ μετατόπισις τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τὸ σύστημα S ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν ἄνω θεωρηθεῖσαν κίνησιν, ἐν ᾗ διαγράφεται ἡ ἕλιξ, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι dt τὸ σημεῖον m τῆς εὐθείας οδ διέτρεξε τὸ τόξον $m'm_1$ καὶ κατέχει αὕτη νῦν τὴν θέσιν $o_1\delta_1$.



Τὸ σημεῖον m ἐκινήθη καὶ διέγραψεν ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι dt τὸ τόξον mm_1 τῆς ἀπολύτου αὐτοῦ τροχιᾶς.

Ἐὰν ἤδη μεταθέσωμεν εἰς τὴν εὐθεῖαν $o_1\delta_1$ μετατόπισιν m_1m' ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς mm' ἐπανέρχεται αὕτη εἰς τὴν προτέραν αὐτῆς θέσιν, τὸ σημεῖον m δὲν ἐπανέρχεται ὅμως εἰς τὴν προτέραν αὐτοῦ θέσιν m, ἀλλ' ἑτέραν m', καὶ τὸ τόξον mm' ἐμφαίνει τὴν σχετικὴν μετατόπισιν τοῦ κινητοῦ m ἐπὶ τῆς εὐθείας οδ.

[illegible] Πρωτοπαπαδάκη

Σχετική ταχύτης καί ἐπιτάχυνσις.

60. — Ἵνα δέ εὕρωμεν τήν σχετικήν ταχύτητα καί ἐπιτάχυνσιν τοῦ σημείου m ὡς πρός τό κινούμενον σύστημα S, ὅπερ συμπαρασύρει μεθ' ἑαυτοῦ τό σημεῖον m, ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ, ἀρκεῖ νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ σημείου τούτου m ταχύτητα καί ἐπιτάχυνσιν ἴσας καί ἀντιθέτους τῇ συμπαρασυρούσῃ ταχύτητι καί ἐπιταχύνσει τοῦ αὐτοῦ σημείου (τῇ ταχύτητι δηλ. καί τῇ ἐπιταχύνσει, ἥν ὑφίσταται τό σημεῖον m ( ) ( ) θεωρούμενον ὡς ἀμεταθέτως συνδεδεμένον καί κινούμενον μετά τοῦ συστήματος S) καί ζητήσωμεν τήν προκύπτουσαν τελικήν ταχύτητα καί ἐπιτάχυνσιν τοῦ σημείου m, ὅπως ἐπράξαμεν τοῦτο ἐν τῷ πρώτῳ κεφαλαίῳ. Ἡ προκύπτουσα ταχύτης καί ἐπιτάχυνσις ἐν τῇ ἀπολύτῳ ταύτῃ κινήσει τοῦ σημείου m εἶναι ἡ σχετική ταχύτης καί ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ ὡς πρός τό σύστημα S.

Τό πρόβλημα τίθεται οὕτω ὡς ἑξῆς.

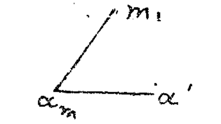
Στερεόν τι σῶμα (S) κινεῖται ἐν τῷ διαστήματι συμπαρασῦρον μεθ' ἑαυτοῦ σημεῖον m, ὅπερ συμμετέχει* τῆς κινήσεως τοῦ συστήματος ὡς εἰ ἦτο ἀμεταθέτως

* Σημ. Νομίζω ἀναγκαῖον νά παρατηρήσω ὅτι τό σύστημα S καί τό σημεῖον m δύνανται νά ἔχουν ἀπολύτους κινήσεις ὅλως ἀνεξαρτήτους καί τότε ὀνομάζομεν παρασύρουσαν κίνησιν τοῦ σημείου m ἐν οἱαδήποτε στιγμῇ τήν κίνησιν, μεθ' ἧς φέρεται τό σημεῖον a τοῦ συστήματος S, ὅπερ κατά τήν στιγμήν ἐκείνην συμπίπτει μετά τοῦ σημείου m.

συνδεδεμένον πρός τό σύστημα S. Ἐκ τῆς συμμετοχῆς δέ ταύτης προκύπτει ἐν ὡρισμένῃ τινί στιγμῇ (παρασύρουσα) ταχύτης V_e καί παρασύρουσα ἐπιτάχυνσις φ_π διά τό σημεῖον m. (Ἡ ταχύτης V_e καί ἐπιτάχυνσις φ_e εἶναι αἱ αὐταί μέ τήν ταχύτητα καί ἐπιτάχυνσιν μεθ' ἧς φέρεται κατά τήν θεωρουμένην στιγμήν τό σημεῖον a τοῦ συστήματος S, ὅπερ συμπίπτει κατά τήν αὐτήν στιγμήν μετά τοῦ σημείου m), ἀλλ' ἐκτός τῆς παρασυρούσης ταύτης κινήσεως τό σημεῖον m φέρεται καί ὑπό ἑτέρας κινήσεως (σχετικῶς ὡς πρός τό σύστημα S) ἐξ ἧς προκύπτει σχετική ταχύτης V_r καί σχετική ἐπιτάχυνσις φ_r. Ὥστε ἡ τελική (ἀπόλυτος) κίνησις τοῦ σημείου m, ἥν προσδιορίζουσιν ἡ τελική (ἀπόλυτος) ταχύτης V καί ἐπιτάχυνσις φ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο πρώτων κινήσεων (σχετικῆς καί παρασυρούσης.)

Ζητεῖται ἡ τάς ταχύτητας V, V_π καί V_σ καί τάς ἐπιταχύνσεις φ, φ_π καί φ_σ συνδέουσα σχέσις.

Ἔστω a τό σημεῖον τοῦ κινουμένου συστήματος S_0 ὅπερ συμπίπτει μετά τοῦ σημείου m, ἀρχομένου τοῦ βραχυτάτου χρονικοῦ διαστήματος dt, οὗτινος τήν κίνησιν ὁρίζουσαν ἡ ταχύτης V_π καί ἡ ἐπιτάχυνσις φ_π μετά τό πέρας τοῦ αὐτοῦ χρονικοῦ διαστήματος τό σημεῖον a συμπίπτει μέ τό a' καί τό σημεῖον m μέ τό m_1. Τό τόξον aa' διεγράφη



ἐν τῷ χρόνῳ dt μέ ταχύτητα V_π καί ἐπιτάχυνσιν φ_π.

Τό τόξον mm_1 διεγράφη ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι μέ ταχύτητα V καί ἐπιτάχυνσιν φ καί τό σύστημα S_0 κατέχει νῦν τήν θέσιν S.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν σχετικὴν κίνησιν τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τὸ σύστημα S_0 δέον νὰ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον m, ὡς ἀμετακινήτως συνδεδεμένον μὲ τὸ σύστημα S, καὶ μεταδώσωμεν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο S κίνησιν ἴσην καὶ ἀντίθετον ἐκείνης, εἰς ἣν ὀφείλεται ἡ μετάβασις τοῦ σημείου a ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς αὐτοῦ θέσεως a εἰς ἣν κατέχει νῦν a'. Ἐκ τῆς κινήσεως δὲ ταύτης τὸ ὅλον σύστημα S ἐπανέρχεται εἰς ἣν κατεῖχε θέσιν S_0 ἀρχομένου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. Ἀλλ' ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν (   ) ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὸ σύστημα S εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν S_0 διὰ μιᾶς μεταβατικῆς καὶ ἑτέρας περιστροφικῆς κινήσεως.

Ὡς μεταβατικὴν κίνησιν λαμβάνομεν τὴν $(-V_\pi - \varphi_\pi)$ ὡς ἐκ τῆς ὁποίας τὸ σημεῖον a' ἐπανέρχεται εἰς τὴν προτέραν θέσιν αὐτοῦ a καὶ τὸ σύστημα S καταλαμβάνει τὴν θέσιν S'. Τὸ σημεῖον m συμμετέχει τῆς μεταβατικῆς ταύτης κινήσεως καὶ καταλαμβάνει τὴν θέσιν m'', φέρεται δὲ νῦν

μὲ ταχύτητα $V' = \bar{V}_0 - \bar{V}_\pi$

καὶ ἐπιτάχυνσιν $\varphi = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_\pi$

ὡς ἐκ τῶν ὁποίων διαγράφει τὸ τόξον am'', ἔνθα m'' συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον, ὅπερ εὑρίσκομεν προσθέτοντες γεωμετρικῶς τὰς εὐθείας

$$ad = V'dt \text{ καὶ } dm'' = \frac{1}{2}\varphi' \overline{dt}^2.$$

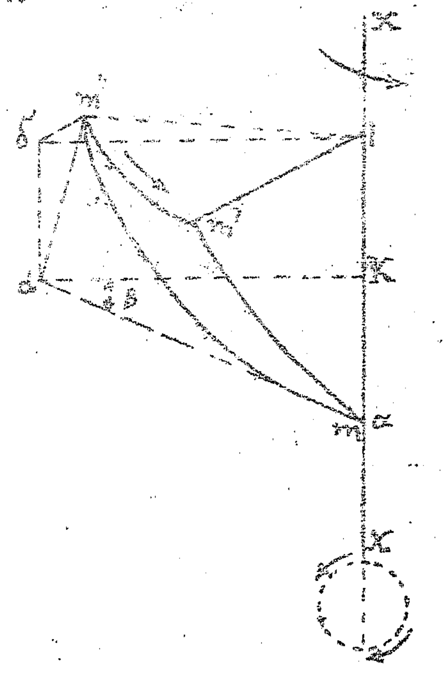
Τὸ σύστημα S' δυνάμεθα νὰ ἐπαναφέρωμεν εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν S_0 διὰ περιστροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν διὰ τοῦ σημείου a διερχόμενον ἄξονα χχ', ἐκ τῆς περιστροφῆς ταύτης τὸ σημεῖον m'' διαγράφει

κυκλικὸν τόξον m''m' καὶ καταλαμβάνει τὴν θέσιν m'.

Ἡ περιστροφικὴ αὕτη κίνησις ωdt κάθετος οὖσα τῷ ἐπιπέδῳ χad, οὐδεμίαν εἰσφέρει μεταβολὴν εἰς τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ad κατὰ συνέπειαν οὐδὲ τὴν ταχύτητα $V' = \frac{ad}{dt}$ μεταβάλλει.

<u>Ἡ σχετικὴ λοιπὸν ταχύτης V_σ τοῦ σημείου m ὡς πρὸς τὸ σύστημα S εἶναι ἴση τῇ V', τουτέστι τῇ γεωμετρικῇ διαφορᾷ τῆς ἀπολύτου V καὶ παρασυρούσης ταχύτητος V_π τοῦ σημείου m.</u>

$$V_\sigma = \bar{V} - V_\pi$$



Ἴδωμεν νῦν τὴν ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ωdt, δι' ἧς μεταβαίνει τὸ σημεῖον ἀπὸ τῆς θέσεως m'' εἰς τὴν θέσιν m' προκύπτουσαν ἐπιτάχυνσιν, καὶ πρὸς τοῦτο ζητήσωμεν τὸ μῆκος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ διαγραφομένου τόξου m''m'.

ἔχομεν

$$m''m' = \omega dt \cdot m'i$$

ἀλλὰ τὸ m'i δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ di, διότι dm'' εἶναι δευτεροβάθμιος ἀπειροστὴ ποσότης, ἄρα καὶ ἡ δm''. ὥστε

$$m''m' = \omega dt \cdot m'i = \omega dt \cdot di = \omega \cdot dt \cdot da\, \text{συν}.\beta = \omega dt \cdot V_\sigma dt\, \text{συν}.\beta$$

$$m''m' = \omega V_\sigma\, \text{συν}\beta\, \overline{dt}^2 = 2\omega V_\sigma\, \text{συν}\beta \frac{\overline{dt}^2}{2}$$

ὥστε ἡ μετατόπισις m''m' ὀφείλεται τῇ ἐπιταχύνσει $2\omega V_\sigma \text{συν}\beta = 2\omega u_\sigma$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ u_σ τὴν προβολὴν τῆς σχετικῆς ταχύτητος ἐπί ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι τῆς περιστροφῆς.

Τήν ἐπιτάχυνσιν ταύτην ὀνομάζουσι σύνθετον κεντρόφυγα ἐπιτάχυνσιν (accélération centrifuge composée).

ὥστε ἡ σχετική ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ m εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπιταχύνσεων φ καί $2\omega dt$.

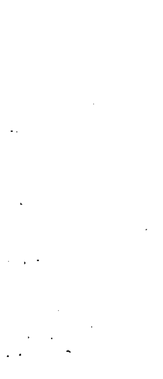
Ἴδωμεν νῦν τήν διεύθυνσιν τῆς συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως $2\omega u_\sigma$. Ἐν τῷ σχήματι βλέπομεν, ὅτι αὕτη διευθύνεται ἐκ τοῦ σημείου m'' πρός τό m' καθέτως τῷ ἐπιπέδῳ $a dm$, κατά τήν αὐτήν δηλ. διεύθυνσιν καθ' ἥν καί ἡ περιστροφή $-\omega$ δι' ἧς μετέβη τό σημεῖον ἀπό τῆς θέσεως m'' εἰς τήν θέσιν m'. ἀλλ' ἡ περιστροφή αὕτη εἶναι ἴση καί ἀντίθετος εκείνης ω, δι' ἧς τό σύστημα S μετέβη ἐκ τῆς ἀρχικῆς θέσεως αὐτοῦ S_o εἰς τήν θέσιν S. Ὥστε δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι εὑρίσκομεν τήν φοράν τῆς συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως ἐάν περιστρέψωμεν τήν προβολήν U_σ τῆς ταχύτητος V_σ κατά $90°$ ἀντιστρόφως τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ω, ἥν κίνηται τό στερεόν σύστημα S_o ἀρχομένου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος. ὥστε

$$\varphi = \bar{\varphi}' - \overline{2\omega u_\gamma} = \varphi_r = \varphi - \varphi_e - \overline{2\omega u_r}$$

Ἡ σχετική ἐπιτάχυνσις τοῦ σημείου m ὡς πρός τό στερεόν σύστημα S εἶναι λοιπόν ἡ συνισταμένη τῆς ἀπολύτου ἐπιταχύνσεως, τῆς παρασυρούσης ἐπιταχύνσεως, λαμβανομένης κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν, καί τρίτης τινός ἐπιταχύνσεως $2\omega u$ (τῆς καθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως) καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ $V_r X$ καί τῆς ὁποίας τήν διεύθυνσιν εὑρίσκομεν ἐάν περιστρέψωμεν τήν U_σ κατά $90°$, κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν ἐκείνης, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας περιστρέφεται στιγμιαίως τό στερεόν σύστημα S_o καί περί τόν αὐτόν στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς.

Τό θεώρημα τοῦτο ἀνήκει εἰς τόν Coriolis.

Σημ. Ὑποθέσωμεν εὐθεῖαν τινα $aa' V_r$ καί ἐπί αὐτῆς φοράς μέ τήν σχετικήν ταχύτητα V_r συμμετέχουσαν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ω τοῦ στερεοῦ συστήματος S_o. ἡ ἄκρα αὐτῆς C διαγράφει τόξον

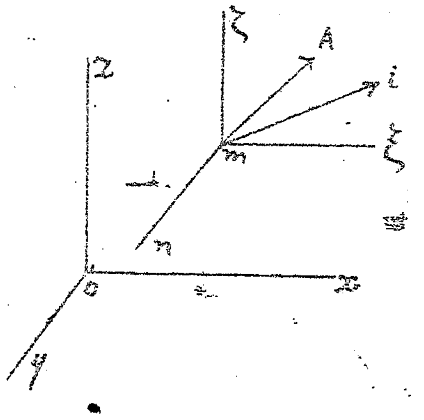


$$cc' = \omega \cdot c\, dt = \omega\, 2V_r \sigma\upsilon\nu\beta\, dt$$

ἡ ταχύτης τοῦ σημείου c εἶναι $\frac{cc'}{dt} = 2\omega V_r \sigma\upsilon\nu\beta = 2\omega u_r$ συμπίπτει λοιπόν κατά τό μέγεθος μέ τήν σύνθετον κεντρόφυγα ἐπιτάχυνσιν, ἀλλ' εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς.

61.—— Ἡ σημείωσις αὕτη καθιστᾷ εὐκολωτέραν τήν εὕρεσιν τῆς προβολῆς τῆς συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως ἐπί εὐθυγράμμου ἄξονος.

Ἔστω πρῶτον $o(x, y, z)$ τρεῖς ἄξονες σταθεροί ἐν τῷ στερεῷ συστήματι S καί $x\ y\ z$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου m ὡς πρός τούς ἄξονας τούτους. ὡς εἴδομεν προηγουμένως( )



αἱ συντεταγμέναι x, y, z λαμβανόμεναι ἀνά πᾶσαν στιγμήν ὡς πρός τούς ἄξονας $o(x, y, z)$ ἀμεταρρέπτως συνδεδεμένους μετά τοῦ συστήματος S καί συμμετέχοντας τῆς κινήσεως αὐτοῦ, προσδιορίζουσι τήν σχετικήν τροχιάν τοῦ σημείου m ὡς πρός τό σύστημα S.

Αἱ συνιστῶσαι τῆς σχετικῆς ταχύτητος ἐν τῇ στιγμῇ t τό κινητόν σημεῖον κατέχει τήν θέσιν m εἶναι λοιπόν

$$\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dz}{dt}$$

εἰς τοῦ σημείου m θεωρήσωμεν τρεῖς ἄξονας $m(\xi,\eta,\zeta)$ παραλλήλους τοῖς $O(x,y,z)$ καί ἔστωσαν mc καί mA αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι τοῦ διανύσματος τῆς σχετικῆς ταχύτητος καί τῆς στιγμιαίας περιστροφικῆς κινήσεως, κατά τήν αὐτήν στιγμήν t.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου c εἶναι

$$\xi = 2\frac{dx}{dt} \qquad \eta = 2\frac{dy}{dt} \qquad \zeta = 2\frac{dz}{dt}$$

αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου A εἶναι

$$p = \omega\,\text{συν}\,\alpha \qquad q = \omega\,\text{συν}\,\beta \qquad r = \omega\,\text{συν}\,\gamma$$

ἔνθα α, β, γ σημαίνουσι τάς γωνίας τῆς εὐθείας mA μετά τῶν ἀξόνων $m(\xi,\eta,\zeta)$.

Ἀλλ' ἡ ἐκ τῆς περί τόν ἄξονα mA περιστροφῆς ω προκύπτουσα ταχύτης τοῦ σημείου $c(\xi,\eta,\zeta)$ προσδιορίζεται (§. 36) διά τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς

$$\frac{d\xi}{dt} = q\zeta - r\eta \qquad \frac{d\eta}{dt} = r\xi - p\zeta \qquad \frac{d\zeta}{dt} = p\eta - q\xi$$

ἤ

$$\frac{d\xi}{dt} = 2q\frac{dz}{dt} - 2r\frac{dy}{dt} = 2\omega\left(\text{συν}\,\beta\frac{dz}{dt} - \text{συν}\,\gamma\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 2r\frac{dx}{dt} - 2p\frac{dz}{dt} = 2\omega\left(\text{συν}\,\gamma\frac{dx}{dt} - \text{συν}\,\alpha\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = 2p\frac{dy}{dt} - 2q\frac{dx}{dt} = 2\omega\left(\text{συν}\,\alpha\frac{dy}{dt} - \text{συν}\,\beta\frac{dx}{dt}\right)$$

Ἀλλά κατά τήν σημείωσιν τοῦ προηγουμένου παραγράφου $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ εἶναι ἀκριβῶς ἴσαι καί ἀντίθετοι τῶν συνιστωσῶν τῆς συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως καί τότε αἱ ἐξισώσεις τῆς σχετικῆς κινήσεως τοῦ ση-

μείου m, αἵτινες ὁρίζονται τῷ Poisson εἶναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x - \varphi_{e_x} + 2\omega\left[\text{συν}\,\beta\frac{dz}{dt} - \text{συν}\,\gamma\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y - \varphi_{e_y} + 2\omega\left[\text{συν}\,\gamma\frac{dx}{dt} - \text{συν}\,\alpha\frac{dz}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z - \varphi_{e_z} + 2\omega\left[\text{συν}\,\alpha\frac{dy}{dt} - \text{συν}\,\beta\frac{dx}{dt}\right]$$

καί προσδιορίζουσι τήν σχετικήν ἐπιτάχυνσιν, ταχύτητα καί τροχιάν τοῦ σημείου m ὡς πρός τό σύστημα S.

Σημ. — Ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως εἶναι $2\omega V_r$ συν β ὥστε

1ον/ Ἐάν ἡ κίνησις τοῦ συστήματος S εἶναι μεταθετική:

ω = 0 καί $\qquad \varphi_r = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_e$

καί ἄν ἡ μεταθετική αὕτη κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος

καί ὁμαλή $\qquad \varphi_e = 0$

ὥστε $\qquad \varphi_r = \varphi$

2ον/ Ἐάν $V_r = 0$ ἤ συν β = 0 (δηλ. V_r παράλληλος τῷ στιγμιαίῳ ἄξονι τῆς περιστροφῆς) ἡ σύνθετος κεντρόφυξ ἐπιτάχυνσις μηδενίζεται εἰσέτι καί ἔχομεν

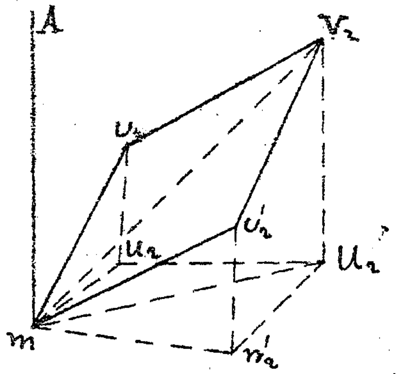
$$\varphi_r = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_e$$

Θεωρήματα τοῦ Resal ἀφορῶντα τήν σύνθετον κεντρόφυγα ἐπιτάχυνσιν

62. — Ἐάν σημεῖον τι m φέρεται ὑπό δύο συγχρόνων σχετικῶν κινήσεων ὡς πρός τό κινούμενον στερεόν σύστημα (S) ἡ σύνθετος κεντρόφυξ ἐπιτάχυνσις τῆς συνισταμένης κινήσεως εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν συνθέτων κεντροφύγων ἐπιταχύνσεων τῶν δύο συγχρόνων σχετικῶν κινήσεων.

Κινηματική Πρωτοπαπαδάκη

Ἔστωσαν τῷ ὄντι v_2 καί v'_2 αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι τῶν σχετικῶν ταχυτήτων τῶν δύο συγχρόνων σχετικῶν κινήσεων. mA ὁ στιγμιαῖος ἄξων τῆς περιστροφῆς τοῦ συστήματος (S) καί ω ἡ τιμή τῆς περί αὐτόν στιγμιαίας περιστροφῆς. V_2 εἶναι



προφανῶς ἡ σχετική ταχύτης τῆς ἐκ τῶν δύο συγχρόνων σχετικῶν κινήσεων προκυπτούσης τελικῆς σχετικῆς κινήσεως. Ἐάν προβάλωμεν τάς εὐθείας mv_2 mv'_2 καί mV_2 ἐπί ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι mA καί εἶναι τῶν εὐθειῶν mu_2 mu'_2 καί mU_2, αἱ τιμαί τῶν ἐκ τριῶν σχετικῶν κινήσεων (v_2, v'_2 καί V_2) προκυπτουσῶν συνθέτων κεντροφύγων ἐπιταχύνσεων εἶσιν ἀμοιβαίως

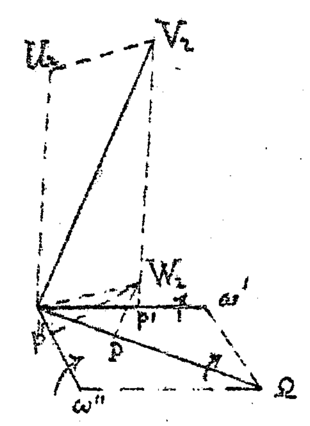
$$2\omega u_2 \qquad 2\omega u'_2 \quad \text{καί} \quad 2\omega U_2$$

καί ἐν τῷ σχήματι βλέπομεν προφανῶς, ὅτι ἡ τελευταία εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο πρώτων.

63.— 2ον/ <u>Ἐάν ἡ στιγμιαία περιστροφή Ω τοῦ συστήματος (S) προκύπτῃ ἐκ δύο συγχρόνων περιστροφῶν ω' καί ω'', ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς Ω προκύπτουσα σύνθετος κεντρόφυξ ἐπιτάχυνσις τοῦ σημείου m, εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν συνθέτων κεντροφύγων ἐπιταχύνσεων τῶν προκυπτουσῶν ἐκ τῶν μερικῶν περιστροφῶν ω' καί ω''</u>

Ἔστωσαν τῷ ὄντι $m\omega'$, $m\omega''$, $m\Omega$ αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι τῶν μερικῶν περιστροφῶν ω' καί ω'' καί τῆς συνισταμένης αὐτῶν τελικῆς περιστροφῆς Ω, καί V_2

ἡ σχετική ταχύτης τοῦ σημείου m ὡς πρός τό περί τόν ἄξονα $m\Omega$ στιγμιαίως περιστρεφόμενον σύστημα (S).



Τήν σχετικήν ταύτην ταχύτητα δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ὡς προκύπτουσαν ἐκ δύο συγχρόνων σχετικῶν κινήσεων καθέτως καί παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ $\omega'\omega'' m\Omega$ ὧν αἱ σχετικαί ταχύτητες εἶσι mu_2 καί mW_2· ἀλλά κατά τό προηγούμενον θεώρημα, ἐάν ἀποδείξωμεν τήν πρότασιν, δι' ἑκάστην τῶν συγχρόνων μερικῶν τούτων κινήσεων (u_2 καί W_2) θά εἶναι αὕτη ἀποδεδειγμένη καί διά τήν συνισταμένην αὐτῶν σχετικήν κίνησιν V_2.

Ἐάν παραστήσωμεν ἀμοιβαίως διά p, p' καί p'' τά μήκη W_2p, W_2p', W_2p'' τῶν ἀπό τοῦ σημείου W_2 φερομένων καθέτων ἐπί τῶν εὐθειῶν $m\Omega$, $m\omega'$, $m\omega''$, αἱ τιμαί τῶν συνθέτων κεντροφύγων ἐπιταχύνσεων, τῶν ἀναφερομένων τῇ σχετικῇ κινήσει W_2 καί ταῖς περιστροφαῖς Ω, ω', ω'' εἶσιν ἀμοιβαίως

$$2\Omega p, \quad 2\omega' p', \quad 2\omega'' p''$$

αὗται εἶναι κάθετοι ( ) τῷ ἐπιπέδῳ $W_2 m\omega\omega'\Omega$, ὅπερ προσδιορίζουσιν αἱ παραστατικαί εὐθεῖαι τῆς σχετικῆς ταχύτητος W_2 καί τῶν στιγμιαίων περιστροφῶν Ω, ω', ω'' καί ἡ φορά αὐτῶν προσδιορίζεται διά τῆς περιστροφῆς τῆς σχετικῆς ταχύτητος mW_2 περί τούς ἄξονας $m\Omega$, $m\omega'$, $m\omega''$ κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν τῶν περιστροφῶν Ω, ω', ω'' καί κατά 90°. [illegible]-

σι δείχνυται μέ τήν εὐθεῖαν $m\kappa_\tau$ καί προστίθενται ἀλγεβρικῶς. ἀλλά

$$\Omega_t p = \omega' p' + \omega'' p'' \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Θέωμεν νῦν τάς ἐκ τῶν περιστροφῶν Ω_t, ω', ω'' προκυπτούσας συνθέτους κεντρόφυγας ἐπιταχύνσεις, ἐν τῇ σχετικῇ κινήσει (κ_τ).
Αἱ τιμαί αὐτῶν εἰσίν

$$2\Omega_t U_\tau \quad 2\omega' U_\tau \quad 2\omega'' U_\tau$$

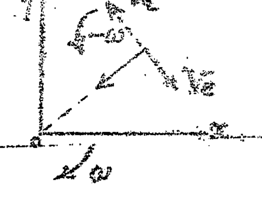
αὗται εἶναι λοιπόν ἀνάλογοι τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων

$$m\Omega_t \qquad m\omega' \qquad m\omega''$$

ἀλλ' ἐκ τούτων τό πρῶτον εἶναι τό γεωμετρικόν ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἐφαρμογαί

64.— 1ον.— Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον τι ΧΟΥ εἰδικοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος περιστρεφόμενον ὁμοιομόρφως καί μέ περιστροφικήν ταχύτητα ω περί ἄξονα υ κάθετον τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κατά τήν ὑπό τοῦ βέλους ἐμφαινομένην διεύθυνσιν. Ζητεῖται ὁ προσδιορισμός τῆς σχετικῆς κινήσεως σημείου τινός m τοῦ πίνακος ὡς πρός τό περιστρεφόμενον ἐπίπεδον· ἡ παρασύρουσα ταχύτης



ἐνταῦθα εἶναι $V_e = \omega \cdot Om = \omega r$, ἡ ἀπόλυτος ταχύτης V εἶναι ἴση τῷ μηδενί ἡ σχετική ταχύτης εἶναι λοιπόν

$$V_r = V - V_e = 0 - V_e = -V_e = -\omega r$$

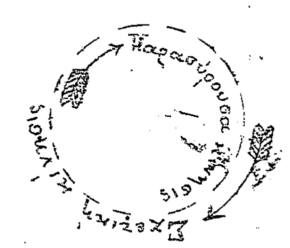
ἡ παρασύρουσα ἐπιτάχυνσις εἶναι (19) $\varphi_e = \omega^2 r$, ἡ ἀπόλυτος ἐπιτάχυνσις εἶναι $\varphi = 0$ καί ἡ τιμή τῆς συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως $2\omega V_r \,\sigma\upsilon\nu\beta$. Ἐνταῦθα $\beta = 0$ καί $V_r = -\omega r$ ὥστε κεντρόφυγ ἐπιτάχυνσις $= -2\omega r^2$
καί ἵνα εὕρωμεν τήν φοράν αὐτῆς δέον νά περιστρέψωμεν τήν σχετικήν ταχύτητα mV_r περί ἄξονα παράλληλον τῷ O καί διερχόμενον διά τοῦ σημείου m, κατά 90° ἀντιθέτως τῆς περιστροφῆς ω, ὅπως ἐμφαίνει τοῦτο τό διακεκομμένον βέλος. ὥστε ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς κεντρόφυγος συνθέτου ἐπιταχύνσεως εἶναι ἡ mc. Ἔχει δηλαδή τήν αὐτήν φοράν μέ τήν παραστατικήν εὐθεῖαν τῆς κεντρόφυγος συνθέτου ἐπιταχύνσεως εἶναι ἡ mc. Ἔχει δηλαδή τήν αὐτήν φοράν μέ τήν παρασύρουσαν ἐπιτάχυνσιν.
ὥστε

$$\varphi_r = \varphi - \varphi_e - 2\omega V_r \,\sigma\upsilon\nu\beta = -\omega^2 r + 2\omega^2 r = \omega^2 r$$

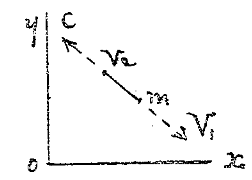
Τό σημεῖον m ἐν τῇ σχετικῇ αὐτοῦ κινήσει διαγράφει λοιπόν κύκλον Om καί ἀντίθετον φοράν.

Τήν σύνθετον κεντρόφυγα ἐπιτάχυνσιν ἠδυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν χρησιμοποιοῦντες τήν σημείωσιν (60) ἐκ τοῦ σημείου m φέρωμεν τήν εὐθεῖαν $mc = 2V_r$ καί ζητήσωμεν τήν ἐκ τῆς περιστροφῆς ω περί ἄξονα m παράλληλον τῷ O προκύπτουσαν ταχύτητα τοῦ σημείου c. αὕτη εἶναι $mc \cdot \omega = 2V_r\omega = -2\omega^2 r$ ἀφαιροῦμεν τό σημεῖον αὐτῆς τῆς ταχύτητος, καί ἔχομεν τήν σύνθετον κεντρόφυγα ἐπιτάχυνσιν $+2\omega^2 r$.

Τήν αὐτήν σχετικήν ἐπιτάχυνσιν ἠδυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν καί διά τῆς ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τῆς σχετικῆς κινήσεως (61) τοῦ Poisson.



Ἐνταῦθα ἔχομεν



$$\varphi_x = 0 \quad \varphi_y = 0 \quad \varphi_{e,x} = -\omega^2 x \quad \varphi_{e,y} = -\omega^2 y \qquad \alpha = \beta = 90 \quad \gamma = 0$$

καί αἱ μνημονευθεῖσαι ἐξισώσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x + 2\omega(-\omega x) = -\omega x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y + 2\omega(-\omega y) = -\omega^2 y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\varphi_r = \sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} = \omega^2 r$$

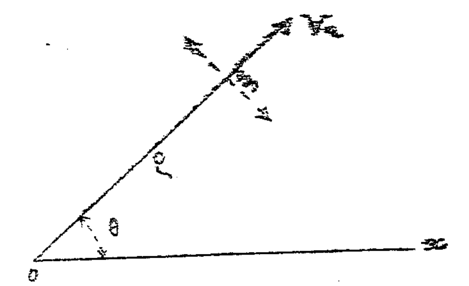
65. — $2^{ον}$. — Κινητόν τι m προσδιοριζόμενον διά τῶν πολικῶν αὐτοῦ συντεταγμένων, δύναται νά θεωρηθῇ ὡς φερόμενον ὑπό τῆς εὐθείας om σχετικῆς αὐτοῦ κινήσεως καί τῆς παρασυρούσης κινήσεως τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἐνταῦθα προτιθέμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν ἀπόλυτον κίνησιν ἐκ τῆς σχετικῆς καί παρασυρούσης κινήσεως.

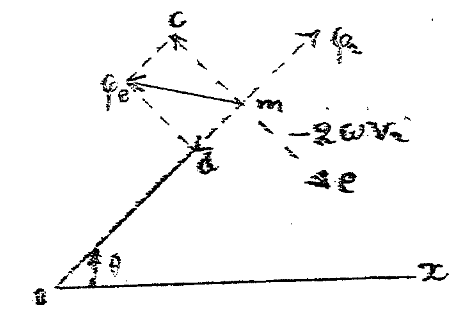
$$V_r = \frac{d\rho}{dt} \qquad V_e = \rho\frac{d\theta}{dt}$$

ὅθεν $\quad V = V_r + V_e \quad \frac{\overline{d\theta}}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

Ἴδωμεν νῦν τόν προσδιορισμόν τῆς ἐπιταχύνσεως.



Ἡ σχετική ἐπιτάχυνσις φ_r εἶναι $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ ἡ παρασύρουσα ἐπιτάχυνσις εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς $mc = \rho\frac{d\theta}{dt}$ (διότι ρ δέν μεταβάλλεται κατά τήν περιστροφήν $\frac{d\theta}{dt}$) παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ καί τῆς κεντρομόλου $md = \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$



ὥστε

$$\varphi_e = \rho\frac{\overline{d^2\theta}}{dt^2} + \rho\left(\frac{\overline{d\theta}}{dt}\right)^2 = \rho^2\left[\left(\frac{d^2\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2\theta}{dt}\right)^4\right]$$

καί ἡ σύνθετος κεντρόφυγος ἐπιτάχυνσις εἶναι

$$-2\omega V_r = 2\omega\frac{d\rho}{dt} = 2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt} = me$$

ὥστε αἱ συνιστῶσαι τῆς ἀπολύτου ἐπιταχύνσεως $\varphi = \varphi_r + \varphi_e + 2\omega V_r$ παραλλήλως τῇ ἀκτῖνι om καί καθέτως αὐτῇ εἶναι ἀμοιβαίως.

$$\frac{d^2\rho}{dt} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \text{ καί } \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\rho}{dt}$$

εἰς τά ἀποτελέσματα ταῦτα φθάνομεν καί ἀπ' εὐθείας ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν συντεταγμένων

$$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \qquad y = \rho\,\eta\mu\,\theta$$

τοῦ σημείου m ὑπολογίζοντες τάς δευτέρας παραγώγους

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\sigma\upsilon\nu.\theta - 2\eta\mu\,\theta\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} - \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \rho\,\eta\mu\,\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\eta\mu\,\theta + 2\sigma\upsilon\nu\,\theta\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} - \rho\,\eta\mu\,\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτῶν εἰς τὰς ἐκφράσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\eta\mu\theta \quad \text{καὶ} \quad -\frac{d^2x}{dt^2}\eta\mu\theta+\frac{d^2y}{dt^2}\sigma\upsilon\nu\theta$$

αἵτινες παριστῶσι τὰς προβολὰς τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος om καὶ τῆς παρὰ τὸ σημεῖον m καθέτου αὐτῇ mc.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς χρήσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Τῷ ὄντι $om = \rho e^{i\theta}$

καὶ γνωρίζομεν ὅτι (3 θεωρ.) $\frac{d^2 om}{dt^2}$ μᾶς δίδει τὴν ἐπιτάχυνσιν.

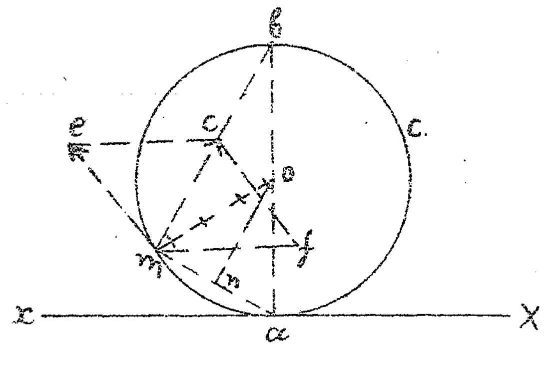
Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\frac{d.om}{dt} = e^{i\theta}\left[\frac{d\rho}{dt}+i\rho\frac{d\theta}{dt}\right].$$

καὶ
$$\frac{d^2om}{dt^2} = e^{i\theta}\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+i\left(\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

66. — 3ον — Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν κυκλοειδῆ καμπύλην, ἣν διαγράφει σημεῖόν τι m τῆς περιφερείας C κυλιομένης ἐπὶ τῆς εὐθείας ox.

Κίνησις τῆς περιφερείας εἶναι ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν σταθερὰ περιστροφὴ ωdt° περὶ τὸν ἄξονα a κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος. Ἀλλὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην ωdt δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν (29) ὑπὸ ἑτέρας περὶ τὸν ἄξονα O παράλληλον τῷ a καὶ ὑπὸ μεταβατικῆς κι-



νήσεως ωdt.oa, παραλλήλως τῇ εὐθείᾳ χχ, ὥστε ἡ ἀπόλυτος κίνησις τοῦ σημείου m δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη τῆς σχετικῆς αὐτοῦ κινήσεως ἐπὶ τῆς περιφερείας C καὶ τῆς παρασυρούσης μεταβατικῆς κινήσεως τῆς περιφερείας ταύτης παραλλήλως τῇ εὐθείᾳ χχ.

Ταχύτης. — Ἡ ἀπόλυτος ταχύτης τοῦ σημείου m εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς σχετικῆς me καὶ παρασυρούσης mf ταχύτητος αὐτοῦ.

Ἀλλὰ $me = \omega dt.om = \omega dt.oa \quad mf = \omega dt.oa$

ὥστε me = mf καὶ ἡ ἀπόλυτος ταχύτης mc διχοτομεῖ τὴν γωνίαν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου β (ἡ εὐθεῖα βm εἶναι καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῇ κυκλοειδεῖ παρὰ τὸ σημεῖον m).

Ἐπιτάχυνσις. — Ἡ παρασύρουσα κίνησις εἶναι ἐνταῦθα μεταβατική, ὥστε καὶ ἡ σύνθετος κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις μηδενίζεται.

Ἡ παρασύρουσα ἐπιτάχυνσις εἶναι καὶ αὐτὴ ἴση τῷ μηδενί· ὥστε ἡ ἀπόλυτος ἐπιτάχυνσις φ ἰσοῦται τῇ σχετικῇ ἐπιταχύνσει φ_r. Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὕτη εἶναι ἴση τῷ $\omega^2 om$ καὶ φέρεται πρὸς τὸ κέντρον O. Ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμὴν $\omega=1$ τότε $\varphi=om$ καὶ ἡ προβολὴ τοῦ mo ἐπὶ τῆς ma δίδει τὴν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν $mn=\frac{ma}{2}$ τοῦ σημείου m· καὶ me = mf = mo, ἄρα mc = ma = V

$$mn = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\overline{ma}^2}{\rho} = \frac{4\overline{mn}^2}{\rho}$$

ὅθεν

$$\rho.mn = 4\overline{mn}^2 \quad \text{καὶ} \quad \rho = 4mn = 2ma$$

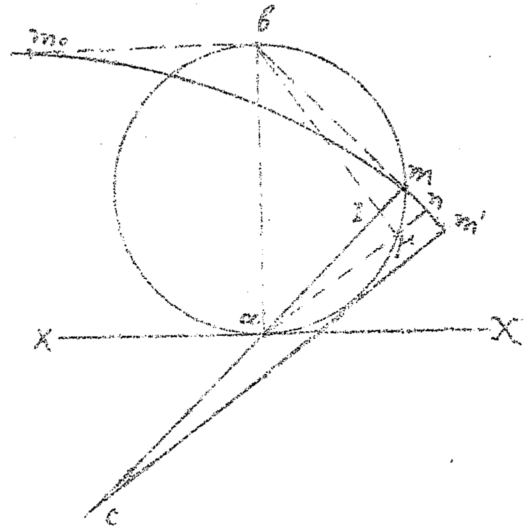
σχέσις, ἥτις προσδιορίζει τὴν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος

Κυριακὴ Πρωτοπαπαδάκη

τῆς κυκλοειδοῦς.

Ἔστω c τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος παρὰ τῷ σημείῳ m καὶ mm' στοιχειῶδες τόξον τῆς κυκλοειδοῦς. ἀπὸ τοῦ σημείου a φέρω τὴν an παράλληλον τῇ cm καὶ ἐπειδὴ $am = \frac{cm}{2}$ ἔχομεν

$$mn = \frac{mm'}{2}$$



ἔχομεν πρὸς τούτοις παραλείποντες τὰς δευτεροβαθμίους ἀπειροστὰς ποσότητας

$$mn = KI$$

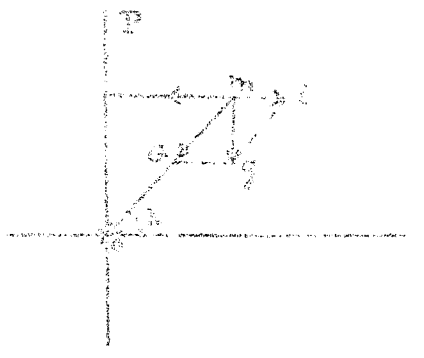
ὥστε καλοῦντες χ τὴν χορδὴν βm καὶ s τὸ τόξον τῆς κυκλοειδοῦς ἔχομεν

$$ds = 2d\chi$$

ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν σχέσιν ταύτην καὶ υπολογίσωμεν τὰ τόξα τῆς κυκλοειδοῦς ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς m_0 εὑρίσκομεν

$$s = 2\chi \quad \text{ἢ} \quad m_0 m = 2\beta m.$$

67. — 4ον/ Σχετικὴ ἠρεμία τῶν σωμάτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς



Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ σῶμα m (fil à plomb) δὲν ἔχει σχετικὴν ταχύτητα ὡς πρὸς τὴν γῆν. ὅθεν $V_r = 0$ καὶ ἡ σύνθετος κεντρο-φυγ ἐπιτάχυνσις ἐξαφανίζεται.

Ἔστω $G = mG$ ἡ ἀπόλυτος ἐπιτάχυνσις καὶ $mi = \omega^2 . mK$ ἡ παρασύρουσα ἐπιτάχυνσις, ἥτις προστίθεται ἐνταῦθα εἰς τὴν περιστροφὴν [illegible] -να αὐτῆς OP ἡ σχετικὴ ἐπιτάχυνσις g, τουτέστιν ἡ φαινομένη κατακόρυφος τοῦ τόπου m εἶναι

$$g = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_e = \overline{mG} + \overline{mi} = \sqrt{\overline{mG}^2 + \overline{mi}^2 - 2mG.mi\,\sigma\upsilon\nu\lambda}$$

ἀλλὰ om = τῇ ἀκτῖνι R τῆς γῆς καὶ ἔχομεν

$$mi = \omega^2 . mK = \omega^2 . R\,\sigma\upsilon\nu\lambda$$

ὥστε

$$g^2 = G^2 + \omega^4 R^2 \sigma\upsilon\nu^2\lambda - 2G.\omega^2 R\,\sigma\upsilon\nu^2\lambda$$

δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ὡς πρὸς τὸ G. Λύοντες αὐτὴν ἔχομεν

$$G = \omega^2 R\,\sigma\upsilon\nu^2\lambda + \sqrt{g^2 - \frac{1}{4}\omega^4 R^2 \eta\mu^2 2\lambda}$$

ἀλλὰ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164^s} = 0,000073$$

δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραλείψωμεν* τὸ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν $\omega^4 R^2 \eta\mu^2 2\lambda$ καὶ γράψωμεν ἁπλῶς

$$G = \omega^2 R\,\sigma\upsilon\nu^2\lambda + g = g + \frac{4\pi^2}{T^2} R\,\sigma\upsilon\nu^2\lambda$$

$$G = g + 0.03667\,\sigma\upsilon\nu^2\lambda$$

εἰς τὸν ἰσημερινὸν $\lambda = 0$ $\sigma\upsilon\nu^2\lambda = 1$ καὶ $G = g + 0.^{m}03667$.

εἰς Παρισίους $\lambda = 48°,50',14$ καὶ $g = 9,^{m}8088$ ὥστε

$$G = 9.^{m}8234$$

τὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$g^2 = G^2 - \sigma\upsilon\nu^2\lambda(2G\omega^2 R - \omega^4 R^2)$$

καὶ βλέπομεν ὅτι

εἰς τὸν πόλον $\sigma\upsilon\nu\lambda = 0$ $g = G$.

εἰς τὸν ἰσημερινὸν $\sigma\upsilon\nu\lambda = 1$ $g = G - \omega^2 R$

$g = 9,781031$ μέτρα

$R = 6376821$ μέτρα

* Ἡ ἐκ τούτου προκύπτουσα ἀπάτη εἶναι μικροτέρα τοῦ 0,00000159.

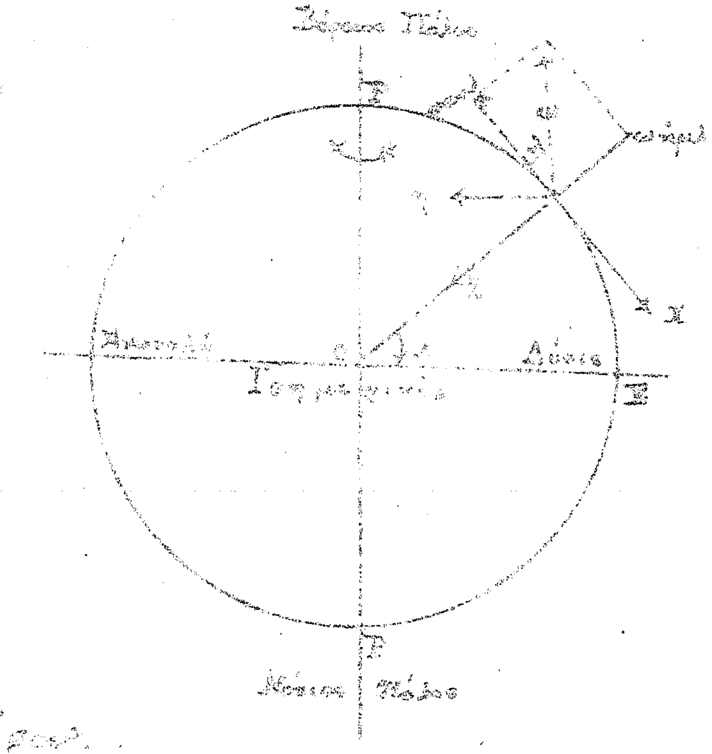
ω=0,00007[illegible]

ὥστε ἐάν ἡ γῆ περιεστρέφετο μέ ταχύτητα 17άκις μεγαλυτέραν g=0 εἰς τόν ἰσημερινόν. Καί ἐάν ηὔξανεν ἔτι ὀλίγον ἡ ταχύτης τά σώματα θά ὑψοῦντο εἰς τόν ἀέρα.

68.— 5ον Σχετική κίνησις σημείου τινός ὡς πρός τήν γῆν.— Κατά τά προηγηθέντα ἡ σχετική ἐπιτάχυνσις τῶν σωμάτων ὡς πρός τήν γῆν, τήν ὁποίαν μόνον ἡμεῖς παρατηροῦμεν εἶναι

$$\varphi_r = \varphi - \varphi_e - 2\omega \overline{v_r}$$

καί ἐκ τοῦ ἀνωτέρω [illegible] παραδείγματος εἴδομεν, ὅτι ἡ φαινομένη [illegible] g τοῦ σημείου [illegible] τῆς φαινομένης [illegible] καί εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς [illegible] [illegible] ἐπιταχύνσεως. Αὕτη [illegible] ταχύτητος φ καί φ_e καί ἐάν λάβωμεν ὡς ἄξονας ΑΖ φερόμενον [illegible] πρός τά [illegible] [illegible].



Ἐγ. [illegible] καί φερόμενον πρός τόν [illegible] ἰσημερινόν καί

Αἱ [illegible] τοῦ σημείου Α κατά τήν

φοράν τῆς κινήσεως τῆς γῆς, ἔχομεν

$$\varphi_x - \varphi_{e.x} = 0 \quad \varphi_y - \varphi_{ey} = 0 \quad \varphi_z - \varphi_{e.z} = g$$

καί ἄν παραστήσωμεν δι' α, β, γ τάς γωνίας τῆς παραστατικῆς εὐθείας τῆς περιστροφῆς ω τῆς γῆς ἔχομεν

$$\alpha = \lambda \qquad \beta = 90^\circ \qquad \gamma = 90^\circ - \lambda$$

ἔνθα λ ἐμφαίνει τό γεωγραφικόν πλάτος τοῦ τόπου Α.

Αἱ ἐξισώσεις (§ 61. (1)) τοῦ Poisson μᾶς δίδουσι τότε τήν σχετικήν κίνησιν σημείου τινός οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ὡς πρός τούς τρεῖς ἄξονας εἶναι x, y, z.

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\, \eta\mu.\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt} = -2\omega\left(\eta\mu\lambda \frac{dx}{dt} - \sigma\upsilon\nu\lambda \frac{dz}{dt}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\, \sigma\upsilon\nu\lambda \frac{dy}{dt} + g$$

Τάς ἐξισώσεις ταύτας δυνάμεθα νά ὁλοκληρώσωμεν ὡς ἑξῆς.

Αἱ (1) καί (3) ὁλοκληροῦνται ἀμέσως καί δίδουν

$$(1') \qquad \frac{dx}{dt} = -2\omega y\, \eta\mu\lambda + V_x$$

$$(2') \qquad \frac{dz}{dt} = 2\omega y\, \sigma\upsilon\nu\lambda + gt + V_z$$

ἔνθα V_x V_y V_z παριστῶσι τάς συνιστώσας τῆς σχετικῆς ἀρχικῆς ταχύτητος.

Ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς ταύτας $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ εἰς τήν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν.

$$(3') \qquad -\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega(-2\omega y - g\,\sigma\upsilon\nu\lambda.t + V_x\,\eta\mu\lambda - V_z\,\sigma\upsilon\nu\lambda)$$

ἀφ' ἐνταῦθα ὡς καί ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0\ldots$$

[illegible] καί [illegible]

Δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τοὺς ὅρους τοὺς περιέχοντας ω^2.

Ἡ ἐξίσωσις (3') λαμβάνει τότε τὴν μορφὴν

$$(3'')\quad -\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(V_z\ \eta\mu\lambda - V_z\ \sigma\upsilon\nu\lambda - g\ \sigma\upsilon\nu\lambda . t\right)$$

καὶ ὁλοκληροῦντες δὶς αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$-\frac{dy}{dt} = 2\omega\left(V_x\ \eta\mu\lambda . t - V_z\ \sigma\upsilon\nu\lambda . t - \frac{1}{2} g\ \sigma\upsilon\nu\lambda\, t^2\right) - V_y$$

$$-y = 2\omega\left(\frac{1}{2} V_x\ \eta\mu\lambda . t^2 - \frac{1}{2} V_z\ \sigma\upsilon\nu\lambda . t^2 - \frac{1}{6} g\ \sigma\upsilon\nu\lambda\, t^3\right) - V_y t$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν y διὰ τῆς τιμῆς του ταύτης εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) καὶ ὁλοκληρώσωμεν αὐτὰς εὑρίσκομεν ἀφοῦ παραλείψωμεν τοὺς περιέχοντας ω^2 ὅρους

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x = V_x t - \omega\ \eta\mu\lambda\ V_y\ t^2 \\ z = V_z t + \omega\ \sigma\upsilon\nu\lambda\ V_y\ t^2 + \frac{1}{2} g t^2 \\ y = V_y t + \omega\left((V_z\ \sigma\upsilon\nu\lambda - V_x\ \eta\mu\lambda) t^2 + \frac{1}{3} g\ \sigma\upsilon\nu\lambda\, t^3\right) \end{cases}$$

1ον. — Ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι σῶμα (x, y, z) οὐδεμίαν κέκτηται ἀρχικὴν σχετικὴν ταχύτητα, ἀλλ' ἀφίεται καταπίπτον ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ὠθήσεως. Τότε

$$V_x = 0, \qquad V_y = 0 \qquad V_z = 0$$

καὶ αἱ ἐξισώσεις (α) δίδουσι

$$x = 0 \qquad y = \frac{1}{3}\omega g\ \sigma\upsilon\nu\lambda\, t^3 = \frac{1}{3}\omega g\ \sigma\upsilon\nu\lambda \left(\frac{2z}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ διότι } z = g\frac{t^2}{2}$$

καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ σῶμα καταπίπτον ὑφίσταται παρέκκλισίν τινα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν θετικῶν y δηλ. πρὸς ἀνατολὰς τῆς ὁποίας τὸ μέγεθος εἶναι

$$\text{παρέκκλισις πρὸς ἀνατολὰς} = \frac{1}{3}\omega g\ \sigma\upsilon\nu\lambda \left(\frac{2z}{g}\right)^{3/2} = \frac{\omega\ \sigma\upsilon\nu\lambda}{3\sqrt{g}}(2z)^{3/2}$$

Πειράματα γενόμενα ἐν τῷ μεταλλείῳ τοῦ Freyberg παρὰ τοῦ Reich ἀπὸ ὕψους z=158,5 καὶ ὑπὸ γεωγραφικὸν πλάτος 51° ἔδωσαν

παρέκκλισιν πρὸς ἀνατολὰς = 0,0276

ἐνῷ ὁ ἀνωτέρω τύπος θὰ ἔδιδε

παρέκκλισιν πρὸς ἀνατολὰς = 0.0283

ἐν τῷ πόλῳ, συν λ=0, καὶ τὰ σώματα πίπτουσι ἄνευ παρεκκλίσεως.

Ἐὰν ἡ γῆ ἦτο ἀκίνητος καὶ δὲν ἐφέρετο ὑπὸ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως αὐτῆς θὰ ἔχομεν

$$z = g\frac{t^2}{2} \qquad \frac{dz}{dt} = gt = V_z \text{ (σχετικὴ ταχύτης)}$$

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τῆς γῆς ω καὶ μεταφέρωμεν αὐτὴν παραλλήλως (29) ἀπὸ τοῦ σημείου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α δυνάμεθα νὰ τὴν ἀποσυνθέσωμεν εἰς δύο ἄλλας.

$$AB = \omega\ \eta\mu\lambda, \text{ καὶ } AC = \omega\ \sigma\upsilon\nu\lambda$$

Ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς ω ημλ προκύπτουσα σύνθετος κεντρόφυγος ἐπιτάχυνσις εἶναι 2ω ημλ ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς σχετικῆς ταχύτητος V_z ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι τῆς περιστροφῆς AB. Ἀλλ' ἡ V_z εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τούτῳ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ προμνημονευθεῖσα προβολὴ ἴση τῷ μηδενί. Ἡ ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα AC περιστροφικῆς κινήσεως ω συνλ προκύπτουσα σύνθετος κεντρόφυγος ἐπιτάχυνσις εἶναι 2ω συνλ ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς σχετικῆς κινήσεως = V_z ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπὶ AC ἐπιπέδου AB, ὅπερ εἶναι παράλληλ—

τῇ V_z ὥστε ἡ τιμή τῆς περί τῆς ὁ λόγος συνθέτου κεντρόφυγος ἐπιταχύνσεως εἶναι

$$2\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\, V_z = 2\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\cdot g t$$

Τήν φοράν δέ ταύτης εὑρίσκομεν περιστρέφοντες τήν ταχύτητα V_z περί τόν ἄξονα AC καί ἀντίθετον φοράν τῆς περιστροφῆς ω, ἐξ ἀνατολῶν δηλ. πρός δυσμάς, δηλαδή εὑρίσκομεν, ὅτι ἐκ τῆς περιστροφῆς ταύτης ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς σχετικῆς ταχύτητος, ἥτις διευθύνεται ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω σημειοῦται μέ τόν ἄξονα Ay, κατά συνέπειαν ἡ ἐπιτάχυνσις παραλλήλως τῷ ἄξονι τούτῳ Ay εἶναι ἴση τῇ συνθέτῳ κεντρόφυγι ἐπιταχύνσει $2\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\, g t$ καί ἔχομεν κατά συνέπειαν

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\cdot g t$$

καί ὁλοκληροῦντες

$$\frac{dy}{dt} = \omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\, g t^2$$

$$y = \frac{1}{3}\,\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\, g t^3$$

καί ἐπειδή

$$z = g\frac{t^2}{2} \text{ ἐξάγομεν}$$

$$y = \frac{\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda\cdot g}{3}\left(\frac{2z}{g}\right)^{3/2} = \frac{\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda}{3\sqrt{g}}(2z)^{3/2}$$

2ον/.— Ὑποθέσωμεν νῦν ὅτι τό κινούμενον σῶμα ἐρρίφθη ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω μέ ἀρχικήν τινα ταχύτητα v_0. Τότε

$$V_x = 0 \qquad V_y = 0 \qquad V_z = v_0$$

καί αἱ ἐξισώσεις (α) μᾶς δίδουσι

$$x = 0$$

$$y = \omega v_0 t^2 \sigma\upsilon\nu\lambda + \frac{1}{3} g\omega t^3 \sigma\upsilon\nu\lambda$$

$$z = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Καθ' ἥν στιγμήν τό κινούμενον σῶμα παύει ἀνερχόμενον ἔχομεν

$$\frac{dz}{dt} = 0 \text{ καί } t = \frac{v_0}{g}$$

Αἱ τιμαί τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ (x, y, z) κατά τήν στιγμήν ταύτην εἶναι λοιπόν

$$x = 0$$

$$y = \frac{2}{3}\,\omega\,\frac{v_0^3}{g^2}\,\sigma\upsilon\nu\lambda$$

$$z = -\frac{v_0^2}{2g}$$

Ἐάν h ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ὕψους εἰς ὅ ἀνῆλθε τό ριφθέν σῶμα ἔχομεν

$$h = -z = \frac{v_0^2}{2g}$$

καί ἀντικαθιστῶντες τῇ τιμῇ τοῦ y εὑρίσκομεν

$$y = \frac{2\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda}{3g^2}(2gh)^{3/2} = \frac{2\omega\,\sigma\upsilon\nu\lambda}{3\sqrt{g}}(2h)^{3/2}$$

οὕτω φθάνον τό ῥιφθέν σῶμα εἰς τό ἀνώτατον σημεῖον τοῦ ἐν τῇ ἀναβάσει του διαγραφέντος ὑπ' αὐτοῦ ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος V_0 ὕψους h, ἔχει παρέκκλισιν πρός δυσμάς (διότι αὕτη λαμβάνει χώραν κατά τήν διεύθυνσιν τῶν ἀρνητικῶν y) διπλασίαν ἐκείνης, ἥν θά εἶχε πρός ἀνατολάς, ἐάν ἔπιπτε κατακορύφως καί ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος.

κῆς ταχύτητος ἀπό τοῦ αὐτοῦ ὕψους h.

Οὕτω σῶμα ῥιπτόμενον κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρό τ' ἄνω, ἐπανέρχεται ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς μέ δυτικήν παρέκκλισιν ἴσην ἐκείνης, ἥν θά ἐλάμβανε πρός ἀνατολάς, ἄν ἔπιπτεν ἀπ' ἠρεμίας καί ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπό τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Τέλος