Πολλοι λιθογραφικοι
πινακες
Ολο το βιβλιο τυπω-
θηκε ως λιθογραφικο

ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟΝ ΣΧΟΛΕΙΟΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Παραδοθέντα κατὰ τὸ Σχολικὸν ἔτος 1887 – 1888

ΥΠΟ

Π. ΠΡΩΤΟΠΑΠΑΔΑΚΗ

Καθηγητοῦ παρὰ τῷ αὐτῷ Σχολείῳ

ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ

Ἐκ τοῦ λιθογραφείου τοῦ Στρατιωτικοῦ Σχολείου

1888

Ἀντοχή τῆς Ὕλης

§ I. Γενικαί ἀρχαί καί ὁρισμοί

1) Τό πρόβλημα τοῦ ὁποίου τήν λύσιν προτιθέμεθα ἐν τῷ περί τῆς ἀντοχῆς τῆς ὕλης πραγματευομένῳ κεφαλαίῳ εἶναι διπλοῦν, καί δύναται νά ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς.

Δοθέντος σώματός τινος στερεοῦ καί τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τοῦτο,

1ον) προσδιορῖσαι τάς ἀλλοιώσεις ἅς ὑφίσταται ἡ μορφή τοῦ σώματος ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν δυνάμεων τούτων καί

2ον.) προσδιορῖσαι τάς διαστάσεις τοῦ σώματος, οὕτως ὥστε ὑπό τόν ἐλάχιστον ὄγκον (δηλ. δι' ὅσον οἷον τε ὀλιγωτέρας ὕλης) ν' ἀνθίσταται τοῦτο ὅσῳ τό δυνατόν πλειότερον τάς ἀλλοιώσεις, ἅς τείνει νά ἐπαναφέρῃ ἐν τῇ μορφῇ αὐτοῦ τό ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργοῦν σύστημα τῶν δυνάμεων.

καί βλέπομεν ἀμέσως τήν ριζικήν διαφοράν τοῦ κεφαλαίου τούτου τῆς μηχανικῆς, μεθ' ὅσων μέχρι τοῦδε ἐδιδάχθημεν ἐν τῇ θεωρητικῇ μηχανικῇ, ἔνθα ὑποθέτομεν τά στερεά σώματα, ὡς ὅλως διόλου ἀμετάβλητα ὑπό τήν ἐπήρειαν οἱουδήποτε συστήματος δυνάμεων. ἐν ᾧ ἐνταῦθα ἀμέσως ἐξ ἀρχῆς ὑποθέτομεν ὅτι διά τῆς ἐπί τοῦ στερεοῦ στερεοῦ σώματος ἐπενεργείας ἔξω τε[illegible] τήματος δυνάμεων ἀλλοιοῦται ἡ μορφή αὐτοῦ.

2.) Ἵνα προσδιορίσωμεν ὅμως τάς ἀλλοιώσεις ταύτας ἅς ὑφίσταται ἡ μορφή σώματός τινος ὑπό τήν ἐπήρειαν ὡρισμένου συστήματος δυνάμεων, δέον νά γνωρίζωμεν τήν φύσιν καί τάς ἰδιότητας τῆς ὕλης, καί δυστυχῶς ἐπί τοῦ ἀντικειμένου τούτου ἐλάχιστα μόνον γνωρίζομεν, περί τῶν ὁποίων πραγματεύεται ἡ μαθηματική θεωρία τῆς ἐλαστικότητος μετά τῆς δεούσης ἀκριβείας.

Ἐνταῦθα ἀναγκαζόμεθα λοιπόν νά προστρέξωμεν εἰς ἀρχάς τινας, τάς ὁποίας μᾶς διδάσκει ἡ πεῖρα καί ἐπί τῶν ὁποίων βασίζεται τό πραγματευόμενον τήν ἀντοχήν τῆς ὕλης κεφάλαιον τῆς ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς.

Ἐν πρώτοις γνωρίζομεν ἐκ καθημερινῆς πείρας, ὅτι τά σώματα ἀνθίστανται μετά μείζονος ἤ ἐλάσσονος ἐντάσεως εἰς οἱανδήποτε ἀλλοίωσιν πειραθῶμεν νά ἐπιφέρωμεν ἐν τῇ μορφῇ αὐτῶν. ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις σώματα τά τινα, τῶν ὁποίων τό σχῆμα δυνάμεθα νά μεταβάλλωμεν διά μικρᾶς σχετικῶς δυνάμεως. Ἀλλ' ἵνα διατηρήσωμεν τήν ἐν τῇ μορφῇ τοῦ σώματος ἐπελθοῦσαν μεταβολήν ταύτην ἐπί τινα χρόνον, δέον νά κρατήσωμεν τό σῶμα ὑπό τήν ἐπήρειαν τῆς δυνάμεως, τῇ ἐνεργείᾳ τῆς ὁποίας ὀφείλεται αὕτη. Ἅμα δ' ἐπαύσῃ ἐπενεργοῦσα ἐπί τοῦ σώματος ἡ ἐξωτερική αὕτη δύναμις, ἐπανέρχεται τοῦτο ἀκριβῶς εἰς τήν πρώτην μορφήν του. τά σώματα ταῦτα ὀνομάζομεν κοινῶς ἐλαστικά σώματα.

Τό φαινόμενον τοῦτο εἶν. πολύ γενικώτερον καί διά συσκευῶν ἐπί τούτῳ κατεσκευασμένων, ἅτινα ἐπιτρέπουσι τήν καταμέτρησιν καί τῶν ἐλαχίστων ἀλλοιώσεων, ἅς ὑφίσταται σῶμά τι ὑπό τήν ἐπήρειαν συστήματός τινος δυνάμεων, βλέπομεν ὅτι καί αὐτά τά στερεά σώματα ἀλλοιοῦνται τήν μορφήν διά τῆς

ἐπ' αὐτῶν ἐπενεργείας συστήματος δυνάμεων, ἀρκούσης ἐντάσεως, βλέπομεν πρός τούτοις, ὅτι ἅμα παύσῃ ἐπενεργοῦν τό ἐξωτερικόν τοῦτο σύστημα τῶν δυνάμεων, ἐπανέρχεται τό σῶμα εἰς τήν πρώτην αὐτοῦ μορφήν, ἐάν ἡ ἔντασις τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων, δέν ὑπερέβη ὡρισμένον τι ὅριον. Ἐν τῇ ἐναντίᾳ περιπτώσει, τό σῶμα διατηρεῖ μικράν τινα ἀλλοίωσιν σχετικῶς πρός τήν πρώτην αὐτοῦ μορφήν, καί ἀφοῦ παύσῃ ἐπενεργοῦν ἐπ' αὐτοῦ τό ἐξωτερικόν σύστημα τῶν δυνάμεων.

Τήν ἰδιότητα ταύτην τῆς ὕλης, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἡ μορφή τῶν σωμάτων ἀλλοιοῦται ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐξωτερικοῦ τινος συστήματος δυνάμεων, τείνουσι δέ ταῦτα νά ἐπανέλθωσι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον εἰς τήν πρώτην αὐτῶν μορφήν, ἀφ' οὗ παύσῃ ἐπενεργοῦν ἐπ' αὐτῶν τό σύστημα τοῦτο τῶν δυνάμεων, καλοῦμεν <u>ἐλαστικότητα</u>, καί τά ὑλικά σώματα, ἅτινα κέκτηνται τήν ἰδιότητα ταύτην καλοῦμεν <u>ἐλαστικά σώματα</u>.

3.) Τό φαινόμενον τοῦτο δυνάμεθα νά ἐξηγήσωμεν <u>ὑποθέτοντες</u> τήν ὕλην συγκειμένην ἐκ μορίων ἀπείρως μικρῶν, ἅτινα κέκτηνται τήν ἰδιότητα νά ἐπενεργῶσιν ἐπ' ἀλλήλων κατά τήν ἑνοῦσαν αὐτά εὐθεῖαν γραμμήν, καί μέ ἔντασιν ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς σχετικῆς αὐτῶν ἀποστάσεως, τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν πολύ μεγαλειτέραν τῶν διαστάσεων αὐτῶν τῶν μορίων. ὡς ἐκ τῆς ἐπ' ἀλλήλων ἐπενεργείας τῶν ὑλικῶν μορίων, καταλαμβάνουσι ταῦτα ὡρισμένας θέσεις, ἀντιστοιχούσας τῇ ἰσορροπίᾳ τῶν μεταξύ τῶν μορίων ἐξασκουμένων δυνάμεων, καί ἀποτελοῦσι τά στερεά σώματα, οἷα παρουσιάζονται ταῦτα εἰς ἡμᾶς.

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἐπενέργεια, ἥν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων δύο ὑλικά μόρια m καί m' εἶναι συνεχής m m' συνάρτησις $\varphi(V)$ τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως τῶν μορίων τούτων τ, καί ὅτι τά μόρια ταῦτα ἕλκονται ἐν ὅσῳ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι μείζων* ὡρισμένου μήκους τ_0, καί ἀπωθοῦνται, ἅμα ἡ ἀπόστασις γίνῃ μικροτέρα τοῦ ὁρίου τούτου, καί μέ ἔντασιν αὐξάνουσαν ἐπ' ἄπειρον ἐν ὅσῳ ἡ ἀπόστασις τ ἐλαττοῦται ἐπί μᾶλλον καί μᾶλλον, εὐκόλως ἐξῃ, οὗ μεν τό φαινόμενον τῆς ἐλαστικότητος.

Ἐάν ζητήσωμεν λ.χ. νά προσεγγίσωμεν τά μόρια m καί m' ἐλαττοῦμεν τήν σχετικήν αὐτῶν ἀπόστασιν τ, ἡ ὠθητική δύναμις, ἥν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων αὐξάνει καί ἐκ ταύτης προέρχεται ἡ ἀντίστασις, τήν ὁποίαν ἡμεῖς ἀπαντῶμεν πιέζοντες τό σῶμα. Εὐθύς ἅμα παύσῃ ἡ πίεσις, αὕτη ἡ προτέρα ἰσορροπία ἐπανέρχεται καί τά μόρια m καί m' καταλαμβάνουσι τάς ἀρχικάς θέσεις των. Ἐάν δέ ἐξασκήσωμεν ἐφελκυσμόν τινα ἐπί τοῦ σώματος ἀπομακρύνομεν ἀπ' ἀλλήλων τά μόρια m καί m' ἡ ἑλκτική αὐτῶν δύναμις ἐπαυξάνει, καί ἅμα παύσῃ ὁ ἐξωτερικός ἐφελκυσμός τά μόρια ἐπανέρχονται ἐκ νέου εἰς τήν προτέραν θέσιν των.

Ἐννοεῖται βεβαίως ὡς παρετηρήσαμεν ἀνωτέρω τοῦτο, ὅτι ἡ ἔντασις τῆς πιέσεως, ἐφελκυσμοῦ κλπ. ἥν ἐξασκοῦμεν ἐπί τοῦ σώματος δέον νά μή ὑπερβῇ ὅριόν τι.

4.) Ἐάν συμβῇ τοῦτο, ἐάν δηλ. ἡ ἔντασις τῶν δυνάμεων ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τό σῶμα ὑπερβῇ ὅριόν τι, τότε καί ἀφ' οὗ παύσωσιν ἐπενεργοῦσαι αὗται, τό σῶμα δέν ἐπανακτᾷ τήν προτέραν αὐτοῦ μορφήν, ἡ ἀλλοίωσις ἥν ὑπέστη

---

* Βεβαίως ἐννοεῖται ὅτι ἅμα ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τ δύο μορίων m καί m' ὑπερβῇ ὅριόν τι τ' οὐδεμία πλέον ἐξασκεῖται ἐνέργεια μεταξύ τῶν μορίων τούτων.

τοῦτο καταστρέφεται ἐν μέρει ἅμα παύσωσιν ἐπενεργοῦσαι αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις, ἀλλά διατηρεῖται καί σχετική τις ἀλλοίωσις, τήν ὁποίαν καλοῦμεν μόνιμον ἀλλοίωσιν.

Μόνιμος καί ἐλαστική ἀλλοίωσις.

Ἐκείνην τήν ἀλλοίωσιν ἥτις δέν ὑφίσταται πλέον ἀφοῦ παύσωσιν ἐπενεργοῦσαι ἐπί τοῦ σώματος αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις, καλοῦμεν ἐλαστικήν ἀλλοίωσιν.

Οὕτω λ.χ. πρισματικόν τεμάχιον σιδήρου ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐπιμήκους ἐφελκυσμοῦ ἐξασκουμένου βαθμηδόν κατά τόν ἄξονα αὐτῆς διά τῆς προσαρμόσεως βάρους τινός P, τό ὁποῖον ἀνασύρομεν ἀπό τοῦ ἄκρου τοῦ πρισματικοῦ τεμαχίου ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀρχικῆς ταχύτητος, ὑφίσταται ἐπιμήκυνσίν τινα l. ἐάν ἤδη ἀφαιρέσωμεν τό ἐφέλκυον βάρος, ἡ ἐπιμήκυνσις l ἐλαττοῦται κατά l_ε (ἐλαστική ἐπιμήκυνσις) ὥστε τό πρίσμα δέν ἀνακτᾷ τό ἀρχικόν αὐτοῦ μῆκος L ἀλλά διατηρεῖ καί μόνιμόν τινα ἐπιμήκυνσιν l_μ συνδεομένην πρός τήν l καί l_ε διά τῆς σχέσεως,

$$l = l_\varepsilon + l_\mu$$

Ἐάν ἤδη ἐφαρμόσωμεν καί πάλιν τό αὐτό βάρος P ἐπί τοῦ ἄκρου τοῦ σιδηροῦ πρίσματος, καί ἄν τό βάρος τοῦτο δέν ὑπερβαίνῃ ὅριόν τι, ὑφίσταται τοῦτο ἐκ νέου ἐπιμήκυνσιν ἴσην ἁπλῶς τῇ l_ε καί ἄν ἀφαιρέσωμεν τό βάρος ἐξαφανίζεται καί ἡ ἐπιμήκυνσις αὕτη καί τό πρίσμα ἀνακτᾷ τό ἀρχικόν αὐτοῦ μῆκος $L + l_\mu$. ὥστε διά τῆς ἀρχικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ βάρους P καί τῆς μονίμου ἐπιμηκύνσεως l_μ, ἥν ἐπέφερεν εἰς τό σιδηροῦν πρίσμα, κατέστη τοῦτο ἐλαστικώτερον οὕτως εἰπεῖν.

Ἐάν ἤδη προχωρῶμεν αὐξάνοντες τό βάρος P ἐφαρμόζοντες αὐτό ἐπί τοῦ σιδηροῦ πρίσματος καί ἀφαιροῦντες ἐκ νέου, τό αὐτό φαινόμενον παρατηρεῖται. Τό μῆκος τοῦ πρίσματος ὑπό τήν ἐπήρειαν τοῦ βαθμηδόν αὐξάνοντος βάρους, ὑφίσταται ἐπιμήκυνσίν τινα, ἥτις αὐξάνει καὶ αὐτὴ βαθμηδόν, ἀφαιροῦντες δὲ τὸ βάρος ἡ ἐπιμήκυνσις ἐξαφανίζεται ἐξ ὁλοκλήρου καὶ τὸ πρίσμα ἐπανακτᾷ τὸ ἀρχικόν του μῆκος $\mathcal{L}+l_\mu$, μέχρις οὗ τὸ ἐπὶ τοῦ πρίσματος ἐφαρμοζόμενον βάρος P μένει ἔλασσον ὡρισμένου τινὸς βάρους P'. ἅμα ὅμως τὸ βάρος P φθάσῃ εἰς τι ὅριον τοῦτο, ἡ ἐπιμήκυνσις, ἣν ὑφίσταται τὸ μῆκος τοῦ πρίσματος, δὲν ἐξαφανίζεται ἐξ ὁλοκλήρου ἅμα παύσῃ ἐπενεργοῦν τὸ βάρος P, ἀλλὰ διατηρεῖται καὶ μόνιμός τις ἐπιμήκυνσις. καὶ ἐὰν ἐξακολουθῇ αὐξάνον τὸ βάρος ἐπέρχεται τέλος ἡ θραῦσις τοῦ πρίσματος.

Ὅριον Ἐλαστικότητος. 5.) Ἡ ἔντασις τοῦ βάρους P' μετρεῖ τὸ <u>ὅριον τῆς ἐλαστικότητος</u> τοῦ σιδηροῦ πρίσματος. Τὸ ὅριον τοῦτο μεταβάλλεται μετὰ τῆς ὕλης τοῦ σώματος καὶ χαρακτηρίζει οὕτως εἰπεῖν αὐτήν. δυνάμεθα δὲ νὰ προσδιορίσωμεν τοῦτο πειραματικῶς, καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ εὐστάθεια καὶ στερεότης τῶν οἰκοδομῶν καὶ τῶν μηχανῶν, δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑποβάλλωμεν τὰ τεμάχια καὶ ὄργανα ἐξ ὧν αὗται ἀπαρτίζονται εἰς κόπωσιν τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος τῆς ὕλης ἐξ ἧς εἶναι ταῦτα κατεσκευασμένα. διότι τότε ἐπέρχεται ἡ βαθμιαία καὶ συνεχὴς ἀλλοίωσις τῶν ὀργάνων τούτων καὶ ἂν ὄχι ἄμεσος ἀλλὰ βεβαία καὶ ἡ τελικὴ καταστροφὴ τοῦ ὅλου συστήματος τῆς οἰκοδομῆς ἢ τῆς μηχανῆς.

Ἐν ἑκάστῳ σώματι ὅπερ ἐξετάζομεν ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς ἀντοχῆς, ἣν δύναται τοῦτο νὰ ἀντιτάξῃ εἰς ἐξωτερικὰ φορτία ἐπιδρῶντα ἐπ' αὐτοῦ διακρίνομεν λοιπόν,

Τὸ ἀντιστοιχοῦν τῷ ὁρίῳ τῆς ἐλαστικότητος φορτίον P ὅπερ ὀνομάζομεν καὶ <u>φορτίον ἐλαστικότητος</u> καὶ τό.

ἀντιστοιχοῦν τῇ θραύσει φορτίον P_1 ὅπερ ὀνομάζομεν <u>φορτίον</u>

<u>τῆς θραύσεως</u>.

Εἴδομεν δὲ ὅτι ἐν τῇ πράξει δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν τὰ συστατικὰ τεμάχια τῶν οἰκοδομῶν καὶ τ' ἀπαρτίζοντα τὰς μηχανὰς ὄργανα εἰς φόρτια ἀνώτερα τοῦ φορτίου τῆς ἐλαστικότητος. ἄλλως τε λόγῳ (prudance)
καὶ ὡς ἐκ τῶν τυχαίων ἐξωτερικῶν ἐπιδράσεων, εἰς δύναται νὰ ὑποστῇ τὸ σῶμα ἐν ἐξαιρετικαῖς περιστάσεσι καὶ ἄλλων αἰτίων, ἅτινα ἐπηρεάζουσι τὴν ἐλαστικότητα τοῦ σώματος, καὶ τὰ ὁποῖα ἐξετάζομεν ἀμέσως κατωτέρω ὑποβάλλομεν συνήθως τὴν ὕλην εἰς κόπωσιν ἧς ὁ ἀνώτατος ὅρος εἶναι πολλῷ ἐλάσσων τοῦ φορτίου τῆς ἐλαστικότητος αὐτῆς. τὸ ἀντιστοιχοῦν τῷ ἀνωτάτῳ τούτῳ ὅρῳ τῆς κοπώσεως, εἰς ἣν ὑποβάλλομεν τὸ σῶμα, φορτίον καλοῦμεν <u>φορτίον ἀσφαλείας</u> τοῦ σώματος.

6.) Ὡς εἴπομεν τοῦτο ἀνωτέρω ἡ διατήρησις τῶν οἰκοδομῶν καὶ τῶν ἀποτελούντων τὰς μηχανὰς ὀργάνων δὲν ἐπιτρέπει νὰ ὑποβάλλωμεν τὰ διάφορα τεμάχια ἐξ ὧν αὗται σύγκεινται, εἰς φορτία ὑπερβαίνοντα τὰ ὅρια τῆς ἐλαστικότητος αὐτῶν. Καὶ μὲν ἡ θραῦσις τῶν τεμαχίων τούτων καὶ ἡ καταστροφὴ τῶν οἰκοδομῶν δὲν ἐπέρχεται εὐθὺς ἅμα τὸ φορτίον, τὸ ὁποῖον ταῦτα φέρουσιν, ὑπερβῇ τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος αὐτῶν, ἀλλ' εὑρίσκεται τοῦτο ὑπὸ ὅρους ὅλως ἐπισφαλεῖς, καὶ θᾶττον ἢ βράδιον θὰ ἐπέλθῃ ἡ προσδοκωμένη καταστροφή. ἀλλὰ τὸ ἀντιστοιχοῦν τῷ ὁρίῳ τῆς ἐλαστικότητος φορτίον ὄχι μόνον δὲν ἀκριβῶς γνωστὸν διὰ τὰς διαφόρους ὕλας, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν ἐν ταῖς οἰκοδομαῖς, ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ὁρίου τούτου τῆς ἐλαστικότητος εἰνάγεται μᾶλλον εἰς τὰς μεθόδους ἐκείνας τῶν φυσικῶν ἐργαστηρίων ἔνθα τά πειράματα ἐκτελοῦνται μέ μυρίας προφυλάξεις καί ὑπό συνθήκας ὅλως διαφόρους ἐκείνων εἰς ἅς ὑπόκεινται τά διάφορα σώματα ἐν ταῖς οἰκοδομαῖς. Δέν δυνάμεθα λοιπόν νά προσδιορίσωμεν τόν πρακτικόν συντελεστήν τῆς ἐλαστικότητος τεμαχίου τινός οἰκοδομῆς, τό ὅριον δηλ. τό ὁποῖον δέν πρέπει νά ὑπερβῇ τό φορτίον εἰς ὅ ὑπόκειται τό τεμάχιον τοῦτο, ὅπως ἡ οἰκοδομή ὑφίσταται ὑπό τούς τελειοτέρους ὅρους ἀσφαλείας, ὅριον τό ὁποῖον ὠνομάσαμεν καί φορτίον τῆς ἀσφαλείας τοῦ περί οὗ ὁ λόγος τεμαχίου, παραβάλλοντες αὐτό πρός τό φορτίον τῆς ἐλαστικότητος, ὅπως θά ἦτο τοῦτο λογικόν, ἀφοῦ προσδιορίζει τοῦτο τόν ἀνώτατον ὅρον φορτίου, εἰς ὅ δυνάμεθα ἐν ἀσφαλείᾳ νά ὑποβάλωμεν τό σῶμα.

Διά τοῦτο ἀνάγουσι τά χαρακτηρίζοντα τάς διαφόρους ὕλας φορτία ἀσφαλείας, εἰς τά ἀντιστοιχοῦντα τῇ θραύσει τούτων φορτία, τά ὁποῖα εὐκόλως προσδιορίζομεν καί λαμβάνουσι τό φορτίον ἀσφαλείας ἴσον μέ $\frac{1}{6}$ τοῦ φορτίου τῆς θραύσεως διά τά μέταλλα καί μέ $\frac{1}{10}$ τοῦ φορτίου τῆς ἀσφαλείας διά τά ξύλα καί ἄλλας ὕλας, αἵτινες ὀλιγώτερον ὑπεβλήθησαν εἰς τήν πειραματικήν μέθοδον.

Αἴτια ἐπηρεάζοντα τήν ἐλαστικότητα τῶν σωμάτων.

7.) Ἐκτός τοῦ τρόπου τῆς ἀρχικῆς κατασκευῆς καί ἐσωτερικῆς συστάσεως τοῦ σώματος καί ὁ τρόπος δι' οὗ αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις ἐπενεργοῦσιν ἐπί τῶν σωμάτων καί ἡ διάρκεια τῆς ἐπενεργείας ταύτης ἐπαισθητῶς τήν ἐλαστικότητα τοῦ σώματος. Οὕτω λ.χ. ὡς θά ἴδωμεν τοῦτο κατωτέρω, ἡ ἑφελκυστική ἐπενέργεια βάρους τινός ἀνηρτημένου εἰς τό ἕτερον τῶν ἄκρων σιδηρᾶς ῥάβδου ἄνευ οὐδεμιᾶς ταχύ-

τητος εἶναι πολλῷ ἐλάσσων ἐκείνης ἥν ἐπιφέρει τό αὐτό βάρος ἐάν κέκτηται ταχύτητά τινα,

Αἱ κρούσεις καί αἱ δονήσεις μεταβάλλουσι τήν ἐσωτερικήν σύστασιν τοῦ σώματος καί τροποποιοῦσι τήν ἐλαστικότητα αὐτοῦ διά τοῦτο ἐν τῇ σπουδῇ οἰκοδομῆς τινος, ἧς τά διάφορα συστατικά μέρη εἰσι προωρισμένα εἰς αἰώνιον διάρκειαν δέον, νά λάβωμεν ὅλας τάς δευτερευούσας καί τυχαίας ταύτας περιπτώσεις ὑπ' ὄψιν, καί ὑπολογίσωμεν τό ἀνώτατον ὅριον κοπώσεως, εἰς ὅ θά ὑποβάλωμεν ταῦτα οὐχί ἴσον τῷ ὁρίῳ τῆς ἐλαστικότητος, ὅ κέκτηνται ταῦτα ἐν ὡρισμένῃ τινί ἐποχῇ, ἀλλά ἑτέρῳ πολλῷ ἐλάσσονι τούτου, ὑποθέτοντες, ὅτι τό σῶμα δύναται νά εὑρεθῇ ὑπό τήν ἐπήρειαν φορτίων πολύ μεγαλειτέρων ἐκείνων, τά ὁποῖα φέρει νῦν, καί ὅτι ἡ ἐλαστικότης αὐτοῦ δύναται νά τροποποιηθῇ ἐπαισθητῶς προϊόντος τοῦ χρόνου.

Αἱ πειραματικαί σπουδαί τοῦ Wöhler, ἀπέδειξαν μάλιστα, ὅτι τά σώματα συντρίβονται ὄχι μόνον ὅταν εὑρίσκωνται ταῦτα ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐλαστικῆς δυνάμεως ἴσης ἤ μείζονος τοῦ φορτίου τῆς θραύσεως, ἀλλά καί ὅταν ταῦτα εὑρίσκωνται ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐλαστικῶν δυνάμεων ἐλάσσονος ἐντάσεως, ὧν ἡ ἐπενέργεια ἐπαναλαμβάνεται ἀρκούντως καί κατά τήν αὐτήν πάντοτε φοράν.

Ἀλλά καί διά δυνάμεως ἐλάσσονος ἔτι ἐντάσεως δυνάμεθα νά ἐπιφέρωμεν τήν θραῦσιν τοῦ σώματος, ἐάν ἡ ἐπενέργεια αὐτῆς ἐπαναληφθῇ ἀρκούντως καί ἀλληλοδιαδόχως κατ' ἀντίθετον φοράν.

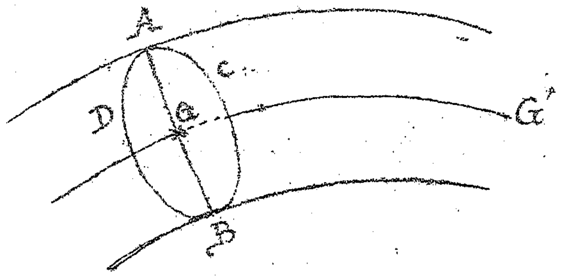
Γεωμετρική μορφή τῶν σωμάτων, ἅτινα ἐξετάζομεν ἐνταῦθα.

8.) Ἡ γεωμετρική μορφή τῶν ἀποτελούντων οἰκοδομήν τινα ἤ μηχανήν διαφόρων τεμαχίων, ἅτινα μόνα θά ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα, δύναται ἐν

<u>Ἀντοχή ὕλης</u>

γένει νά θεωρηθῇ ὡς ὁμοία τῇ μορφῇ γεωμετρικοῦ τινος στερεοῦ ὁριζομένου ὡς ἑξῆς.

Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον καμπύλην τήν GG' καί ἐπίπεδον ἔμβαδόν τό ACB συμμετρικόν ὡς πρός τήν εὐθεῖαν AB.



καί με διαστάσεις σχετικῶς μικράς, παραβαλλόμεναι πρός τό μῆκος τῆς καμπύλης GG' ὑποθέσωμεν αὐτό κινούμενον οὕτως ὥστε τό κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ ἐμβαδοῦ νά διαγράφῃ τήν καμπύλην GG', τό ἐπίπεδον αὐτοῦ νά εἶναι κάθετον τῇ αὐτῇ καμπύλῃ καί ὁ ἄξων τῆς συμμετρίας AB νά μένῃ σταθερῶς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης GG' τήν ὁποίαν καλοῦμεν <u>κεντρικήν ἶνα τοῦ σώματος</u>. τάς τροχιάς δέ τῶν διαφόρων σημείων τοῦ ἐμβαδοῦ ὀνομάζομεν <u>ἶνας</u> τοῦ σώματος.

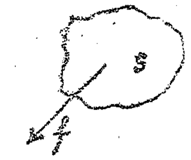
Αἱ ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις ὑποτίθενται ἐπίσης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης GG'.

9.) Πρίν προβῶμεν ὅμως εἰς τήν σπουδήν τοῦ θέματος, ὅπερ θά μᾶς ἀπασχολήσῃ, νομίζω ἀναγκαῖον νά ὑπενθυμίσω ἐνταῦθα τάς συνθήκας τῆς ἰσορροπίας συστήματος δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί στερεοῦ σώματος (οἷα ὑποθέτομεν αὐτά ἐν τῇ θεωρητικῇ μηχανικῇ) καί ἐξετάσω κατά πόσον δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τ' ἀποτελέσματα εἰς ἃ ἐφθάσαμεν ἐν τῇ σχετικῇ τῶν στερεῶν σωμάτων εἰς, τά ἐλαστικά σώματα, ἅτινα θ' ἀποτελέσωσιν ἐνταῦθα τό κύριον ἀντικείμενον τῆς σπουδῆς μας.

Ἐν τῇ σπουδῇ τῆς θεωρητικῆς στατικῆς δύναμίν τινα f ἐφηρμοσμένην ἐπί στερεοῦ σώματος S δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὡς ἐφηρμοσμένην ἐν οἱῳδήποτε σημείῳ τῆς εὐθείας μεθ' ἧς συμπίπτει ἡ φορά αὐτῆς. δυνάμεθα δέ νά μεταφέρωμεν τήν δύναμιν ταύτην τήν f παραλλήλως ἑαυτῇ ὁπουδήποτε τοῦ στερεοῦ σώματος S, ἐφαρμόζοντες ἐπ' αὐτοῦ καί ζεῦγος δυνάμεων ὅπερ εὐκόλως προσδιορίζομεν· δυνάμεθα οὕτω ν' ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε σύστημα δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπί στερεοῦ σώματος, διά μιᾶς καί μόνης δυνάμεως ἐφηρμοσμένης ἐν οἱῳδήποτε σημείῳ αὐτοῦ καί ζεύγους δυνάμεων. ἐάν δέ τό σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἡ συνισταμένη αὕτη τῶν δυνάμεων ἰσοῦται τῷ μηδενί, καί ἡ ῥοπή τοῦ ζεύγους ἰσοῦται ἐπίσης τῷ μηδενί· καί τ' ἀνάπαλιν ἐάν ἡ συνισταμένη αὕτη δύναμις καί ἡ ῥοπή τοῦ ζεύγους ἰσοῦται τῷ μηδενί τό σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

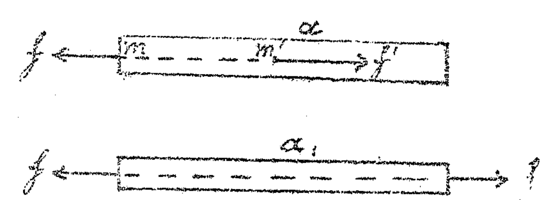
Τά ἀποτελέσματα ταῦτα, δέν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν εἰς τά ἐπί τῶν ἐλαστικῶν σωμάτων ἐφηρμοσμένα συστήματα δυνάμεων,

10.) Ἐν πρώτοις δύναμίν τινα f ἐφηρμοσμένην ἐπί στερεοῦ σώματος δέν δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν ὅπου δήποτε τῆς



μετά τῆς φορᾶς τῆς δυνάμεως συμπιπτούσης εὐθείας, ὅπως βλέπομεν τοῦτο ἐν τῷ ἔναντι σχήματι

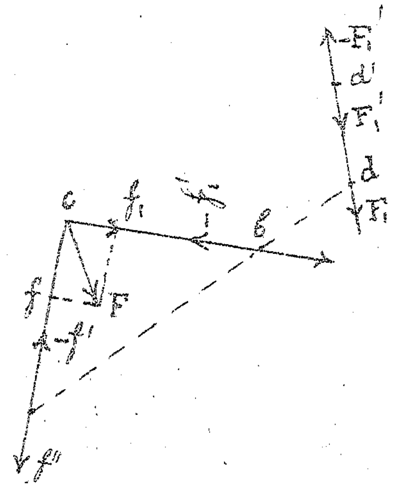
α καί α, ἐν τῷ ῥάβδῳ α λ.χ. μόνον τό τμῆμα mm' τῆς ῥάβδου εἶναι τεταμένον, ἐν ᾧ ἐν τῷ δευτέρῳ σχήματι ὁλόκληρος ἡ ῥάβδος εἶναι τεταμένη· αἱ συνθῆκαι δέ τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐπί τῶν στερεῶν σωμάτων ἐφηρμοσμένων δυνάμεων, τάς ὁποίας ἀνεμνήσαμεν ἀνωτέρω, δέν εἶναι ἁρμοῦσαι ἐνταῦθα, ἀλλ' εὐκόλως δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι αὗται ἀναγκαῖαι, δι' ὅλα τά σώματα στερεά καί μή, καί κατά συνέπειαν καί διά τάς



λαστικά σώματα.

Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι οἱονδήποτε σῶμα ὑπό τήν ἐπήρειαν συστήματος δυνάμεων $F, F_1, \dots$ καί ἔστωσαν α καί β δύο σημεῖα τοῦ σώματος·

Λέγω, ὅτι <u>δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τό σύστημα τῶν δυνάμεων F' διά δύο μόνον δυνάμεων R καί R_1 διερχομένων διά τῶν σημείων α καί β καί δι' ὡρισμένου ἀριθμοῦ ζευγῶν δυνάμεων, ἐπενεργουσῶν ἀνά δύο κατά τήν ἑνοῦσαν τά σημεῖα τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν σημεῖα καί ἀντιθέτου φορᾶς.</u>



Ἔστω τῷ ὄντι F' μία τῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος $\langle F' \rangle$ καί c τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς, ὅπερ ὑποθέτομεν ἐκτός τῆς εὐθείας αβ. τήν δύναμιν F' δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν εἰς δύο ἄλλας f καί f_1 συμπιπτούσας μετά τῶν εὐθειῶν $c\alpha$ καί $c\beta$, καί παρά τοῖς σημείοις α καί β δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν δύο δυνάμεις $\langle f' - f \rangle$ καί $\langle f_1' - f_1 \rangle$ ἴσας καί ἀμοιβαίως ταῖς f καί f_1 καί ἀντιθέτους.

Ἐάν τό σημεῖον c εὑρίσκεται ἐπί τῆς εὐθείας αβ συμπίπτον μέ τό d λ. χ. καί ἡ εὐθεῖα dF', συναντᾷ τό σῶμα παρά τι σημεῖον d', δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ σημείου τούτου δύο δυνάμεις $-F_1'$ καί F_1' ἴσας τῇ F_1, καί ἀποσυνθέτομεν τήν παρά τό σημεῖον α' ἐφηρμοσμένην δύναμιν F_1', ὡς ἐπράξαμεν τοῦτο διά τήν παρά τό σημεῖον c ἐφηρμοσμένην δύναμιν F'.

Ἐάν ἡ δύναμις F_1 δέν συναντᾷ τό σῶμα παρά τι σημεῖον d', ἀποσυνθέτομεν αὐτήν εἰς δύο ἄλλας, συντμήσας τό σῶμα καί ἐπί

ἑκάστης τούτων ἐκτελοῦμεν τήν πρᾶξιν ἥν ἐξετελέσαμεν ἐπί τῆς δυνάμεως F_1.

Ἐάν ἤδη συνθέσωμεν πρός ἀλλήλας τάς δυνάμεις f' εὑρίσκομεν συνισταμένην τινά R διερχομένην διά τοῦ σημείου α. διά τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων f_1' εὑρίσκομεν συνισταμένην R' διερχομένην διά τοῦ σημείου β καί ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Λέγω ἤδη, <u>ὅτι ἐάν σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ αἱ δυνάμεις R καί R' ἔχουσι τήν αὐτήν ἔντασιν καί ἀντίθετον φοράν συμπίπτουσαι μετά τῆς εὐθείας αβ.</u>

Τῷ ὄντι ἐάν τό σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, διατηρεῖται αὕτη καί ἄν ὑποθέσωμεν τ' ἀποτελοῦντα τό σῶμα μόρια ἀμεταστρέπτως συνδεδεμένα πρός ἄλληλα, ἐάν <u>στερεοποιήσωμεν</u> τό σῶμα. ἀλλά τότε τά ζεύγη τῶν δυνάμεων $[f_1 - f']$ ἐξαφανίζονται καί αἱ δύο μόνον δυνάμεις R καί R' ἀντικαθιστῶσι τό ἀρχικόν σύστημα $[F]$. καί κατά τάς συνθήκας τῆς ἰσορροπίας τῶν στερεῶν σωμάτων, τάς ὁποίας μᾶς διδάσκει ἡ στατική, αἱ δυνάμεις R καί R' ἔχουσι τήν αὐτήν ἔντασιν, ἀντίθετον φοράν καί τά παριστῶντα ταύτας εὐθύγραμμα τμήματα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Καί βλέπομεν οὕτω, ὅτι

<u>Ἐάν σῶμά τι, οἱασδήποτε φύσεως εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπήρειαν συστήματος δυνάμεων $[F]$, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τό σύστημα τοῦτο δι' ἑτέρου, ἔνθα αἱ δυνάμεις εἰσίν ἀνά δύο ἴσαι, ἀντιθέτου φορᾶς καί κεῖνται ἐπ' εὐθείας.</u>

Συνθῆκαι ἰσορροπίας τῶν ἐλαστικῶν στερεῶν σωμάτων.

11.) Ἡ συνθήκη αὕτη, ἀναγκαία διά τήν ἰσορροπίαν τῶν σωμάτων, οἱασδήποτε φύσεως καί ἄν εἶναι ταῦτα, εἶναι καί ἁρμόζουσα διά τήν ἰσορροπίαν τῶν στερεῶν καί ἀμεταστρέπτου σχήματος σωμάτων, οἷα ὑποθέτομεν ταῦτα ἐν τῇ θεωρητικῇ μηχανικῇ. Προτίθεμαι ἤδη ν' ἀποδείξω, ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀρκοῦσα καί διά τά ἐλαστικά στερεά σώματα, ἅτινα μεταχειριζόμεθα ἐν ταῖς οἰκοδομαῖς καί τῇ κατασκευῇ τῶν μηχανῶν, ἐάν ἡ ἔντασις τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐφηρμοσμένων δυνάμεων, δέν εἶναι ἀρκούντως μεγάλη, ὥστε νά ἐπιφέρῃ τήν θραῦσιν τοῦ σώματος καί ἡ ἐπί τοῦ ἐλαστικοῦ σώματος ἐφαρμογή αὐτῶν γίνεται βαθμηδόν καί οὐχί ἀποτόμως.

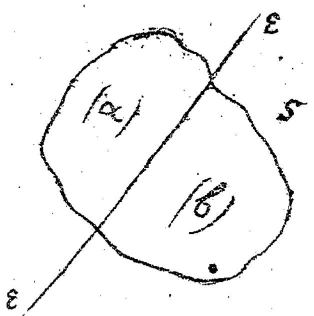
Ἐκ πείρας γνωρίζομεν τῷ ὄντι, ὅτι ἐάν ἐφαρμόσωμεν δύο δυνάμεις ἴσας, ἀντιθέτου φορᾶς καί ἐπ' εὐθείας παρά τοῖς σημείοις α καί β ἐλαστικοῦ τινος σώματος, ἀλλοιοῦται ἡ μορφή τοῦ σώματος. τό μῆκος τῆς εὐθείας αβ μεταβάλλεται καί ἀλλάσσει αὕτη θέσιν ἐν τῷ διαστήματι· ἀλλ' ἐάν κατά τήν μετατόπισιν αὐτῆς αἱ δυνάμεις συμπίπτωσι διαρκῶς μετά τῆς εὐθείας ταύτης, καί ἡ ἐφαρμογή αὐτῶν δέν εἶναι ἀπότομος, ἀλλ' αὐξάνει βαθμηδόν ἡ ἔντασις αὐτῶν ἀπό τοῦ μηδενός μέχρι τῆς τελικῆς αὐτῆς τιμῆς, εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς ἐντάσεως τῶν δυνάμεων τούτων καί ἰδίᾳ εἰς τήν τελικήν αὐτῶν ἔντασιν ἀντιστοιχεῖ μορφή ἰσορροπίας τοῦ σώματος. Τοῦτο δέ συμβαίνει καί ἄν ἀντί ἑνός μόνον ζεύγους ἴσων καί ἀντιθέτων δυνάμεων ἔχομεν πολλά τοιαῦτα.

Ὥστε αἱ συνθῆκαι τῆς ἰσορροπίας τῶν στερεῶν σωμάτων τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς εἶναι ἐφαρμόσιμος καί ἐπί τῶν ἐλαστικῶν στερεῶν σωμάτων θεωρουμένων τούτων οὐχί ἐν τῇ ἀρχικῇ μορφῇ ἥν ἐκέκτηντο πρό τῆς ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμογῆς τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἀλλ' ἐν τῇ ἠλ-

λοιωμένῃ μορφῇ, ἥν κέκτηνται ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, καί τήν ὁποίαν δέον νά προσδιορίσωμεν πρῶτον, ἵνα ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῆς τάς συνθήκας τῆς ἰσορροπίας τῶν στερεῶν σωμάτων.

Ὁ προσδιορισμός τῶν ἀλλοιώσεων τούτων, ἃς ἐπιφέρει ἐν τῇ ἀρχικῇ μορφῇ τοῦ σώματος, σύστημα ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπ' αὐτοῦ, ἀποτελεῖ ἓν τῶν δυσκολωτέρων προβλημάτων, τῆς μαθηματικῆς φυσικῆς. Ἐν μικροτέρῳ βαθμῷ ἀκριβείας προσδιορίζει ταύτην καί τό περί τῆς ἀντοχῆς τῆς ὕλης πραγματευόμενον κεφάλαιον. Ἐν ὅσῳ ὅμως αἱ ἀλλοιώσεις αὗται, ἃς ὑφίσταται τό ἐλαστικόν σῶμα εἶναι ἀρκούντως μικραί, ὅπως συμβαίνῃ τοῦτο διά τά ἐν ταῖς οἰκοδομαῖς χρησιμοποιούμενα φυσικά στερεά σώματα, παραλείπομεν ταύτας καί ἐφαρμόζομεν τάς συνθήκας τῆς ἰσορροπίας ἐπί τῆς ἀρχικῆς μορφῆς τοῦ σώματος.

Ἐλαστικαί δυνάμεις. 12.) Θεωρήσωμεν σῶμά τι (S) ὑπό τήν ἐπήρειαν συστήματός τινος δυνάμεων, ὃ ἐπί τό ἁπλούστερον ὑποθέτομεν ἐν ἰσορροπίᾳ καί ἐπιφάνειάν τινα χωρίζουσαν τοῦτο εἰς δύο μέρη (α) καί (β).



Ἐάν ἀποκόψωμεν τό σῶμα κατά τήν ἐπιφάνειαν ΕΕ ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων (α) λ.χ. χάνει τήν ἰσορροπίαν του καί μόνον διά τῆς ἐφαρμογῆς ἐπιπροσθέτου τινος δυνάμεως ἐπανακτᾷ ταύτην· τήν πρόσθετον δέ ταύτην δύναμιν ἐξήσκει ἐπ' αὐτοῦ τό μέρος (β) τοῦ σώματος πρό τῆς ἀποκοπῆς αὐτοῦ. τό μέρος (α) ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ μέρους (β) δύναμιν ἴσην καί ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Τάς ἐσωτερικάς ταύτας δυνάμεις, ἅς ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων τά διάφορα μέρη ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σώματος, καλοῦμεν ἐλαστικάς δυνάμεις.

Μετά τήν ἀποκοπήν τοῦ σώματος κατά τήν ἐπιφάνειαν εε ἐάν προσαρμόσωμεν ἐκ νέου τ' ἀποτελοῦντα τοῦτο μέρη (α) καί (β), δέν συγκρατοῦνται πλέον, ὥστε ἡ ἐλαστική δύναμις τήν ὁποίαν ἐξασκοῦσιν ἐπ' ἀλλήλων τά δύο ταῦτα μέρη τοῦ σώματος κατεστράφη, ἐξ οὗ εἰκάζομεν ὅτι ἐλαστική αὕτη ἐπενέργεια εἰς ἀνεπαισθήτους μόνον ἀποστάσεις ἑκατέρωθεν τῆς ἐπιφανείας ε.ε. ἐπεκτείνεται, καί δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν τά σημεῖα τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἐλαστικῶν τούτων δυνάμεων ἐν αὐτῇ τῇ ἐπιφανείᾳ ε.ε.

Τήν ὑπό τοῦ μέρους (β) ἐξασκουμένην ἐπί τοῦ μέρους (α) ἐλαστικήν δύναμιν ὀνομάζομεν.

πίεσιν ἐάν ἡ φορά αὐτῆς εἰσδύει εἰς τά ἔνδον τοῦ (α) καί

τάσιν ἐάν αὕτη φέρεται πρός τό (β).

Ἐάν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εε θεωρήσωμεν στοιχειῶδες ἐμβαδόν ω περί τό σημεῖον m καί μεταφέρωμεν τάς ἐπί τῶν m διαφόρων σημείων τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου ἐφηρμοσμένας ἐλαστικάς δυνάμεις, ἅς ἐξασκεῖ τό μέρος (β) ἐπί τοῦ μέρους (α), παραλλήλως ἑαυταῖς παρά τό σημεῖον m, δίδουσιν αὗται συνισταμένην τινα f τόν λόγον $\frac{f}{\omega}$ τῆς συνισταμένης ταύτης f πρός τό στοιχειῶδες ἐμβαδόν ω καλοῦμεν μέσην ἐλαστικήν δύναμιν, ἥν ἐξασκεῖ τό μέρος (β) ἐπί τοῦ μέρους (α) κατά τήν ἐπιφάνειαν ω; ἤ ἐλαστικήν δύναμιν, ἥν ἐξασκεῖ τό μέρος (β) ἐπί τοῦ μέρους (α) κατά μονάδα.

Ἐάν ἤδη ω τείνει πρός τό μηδέν περί τό σημεῖον m, ὁ λό-

γος $\frac{f}{\omega}$ τείνει πρός ὅριόν τι, ὅπερ καλοῦμεν ἐλαστικήν δύναμιν ἐξασκουμένην ὑπό τοῦ (β) ἐπί τοῦ (α) παρά τό σημεῖον m κατά μονάδα ἐπιφανείας, ἤ καί φορτίον (charge) παρά τό σημεῖον m.

Ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ἰσορροπίας τοῦ μέρους (α) δυνάμεθα λοιπόν νά παραλείψωμεν ἐντελῶς τό μέρος (β) καί ὑποθέσωμεν αὐτό ὡς ὅλως ἀνύπαρκτον, ἐάν ἐκτός τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐφαρμόσωμεν εἰς τά διάφορα σημεῖα τῆς ἕδρας αὐτοῦ εε δυνάμεις ἴσας ταῖς ἐλαστικαῖς δυνάμεσιν ἅς ἐξασκεῖ τό μέρος (β).

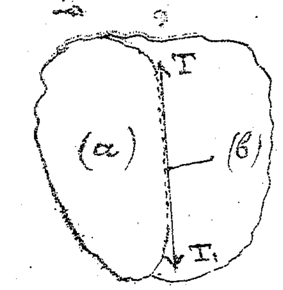
13) Ὁ νόμος δέ καθ' ὅν ἐκτελεῖται ἡ διανομή τῶν ἐλαστικῶν τούτων δυνάμεων ἐπί τῆς ἕδρας εε ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τό σῶμα καί ἐκ τῆς μορφῆς καί τῆς φύσεως αὐτοῦ τοῦ σώματος, καί δέν δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ταύτας ἀπ' εὐθείας διά τῶν μεθόδων τῆς Στατικῆς.

Ἀλλ' ἐδιδάχθημεν ἐκεῖ, ὅτι ἐάν σῶμά τι, οἱονδήποτε εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπήρειαν συστήματος ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἡ ἰσορροπία ὑφίσταταται καί ἄν στερεοποιήσωμεν τό σῶμα, καί τότε τάς ἐπ' αὐτοῦ ἐφηρμοσμένας δυνάμεις δυνάμεθα νά συνθέσωμεν ὡς καί ἐν τοῖς στερεοῖς σώμασι· ἀλλ' ἡ σύνθεσις αὕτη δέν σκοπεῖ ἐνταῦθα τήν ἀντικατάστασιν τοῦ ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργοῦντος συστήματος δυνάμεων, δι' ἑτέρου συστήματος, εἰς φθάνομεν συνθέτοντες τάς δυνάμεις τοῦ πρώτου κατά τούς κανόνας οὕς μᾶς ἐδίδαξεν ἡ στατική τῶν στερεῶν σωμάτων, διότι τά δύο ταῦτα συστήματα δυνάμεων δέν εἶναι ἰσοδύναμα, καί οὐδαμῶς δύνανται ν' ἀντικαταστήσωσιν ἄλληλα, ἀλλά σκοπεῖ τήν ἐξεύρεσιν τῶν μεταξύ τῶν ἐξωτερικῶν τούτων δυνάμεων (ἐν αἷς περιλαμβάνονται καί αἱ ὑπό τοῦ μέρους (β) ἐπί τοῦ μέρους (α) ἐξασκούμεναι ἐλαστικαί δυνάμεις) ἐνυπαρχουσῶν σχέσεων.

Οὕτω λ.χ. κατά τά προλεχθέντα τό μέρος (α) τοῦ σώματος (S) εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων ἅς ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τό μέρος (β) τοῦ αὐτοῦ σώματος. ἡ ἰσορροπία αὕτη ὑφίσταται καί ἄν στερεοποιήσωμεν τό ἐλαστικόν σῶμα (S) καί ἀφήσωμεν αὐτό ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν αὐτῶν δυνάμεων αἱ συνθῆκαι τῆς ἰσορροπίας τοῦ στερεοποιηθέντος μέρους (α) μᾶς εἶναι ἤδη γνωσταί ἐκ τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς καί βλέπομεν ὅτι ἐάν χωρίσωμεν ἐλαστικόν τι σῶμα εὑρισκόμενον ἐν ἰσορροπίᾳ εἰς δύο μέρη (α) καί (β). Ἡ συνισταμένη τῶν ἐπί τοῦ μέρους (α) ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων (τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν συνθέτοντες τάς δυνάμεις ταύτας ὅπως καί ἐν τοῖς στερεοῖς σώμασι). καί τό ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων προκύπτον ζεῦγος. ἰσοῦται ἀμοιβαίως τῇ συνισταμένῃ τῶν ὑπό τοῦ μέρους (β) ἐπί τοῦ μέρους (α) ἐξασκουμένων ἐλαστικῶν δυνάμεων (ἥν εὑρίσκομεν διά τῆς αὐτῆς μεθόδου), καί τῷ ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν ἐλαστικῶν τούτων δυνάμεων προκύπτοντι ζεύγει.

Νομίζω ἀναγκαῖον νά παρατηρήσω ἐκ νέου, ὅτι ἡ συνισταμένη αὕτη τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων, εἶναι ὅλως ὑποθετική καί οὐδόλως δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ ταύτας· αὕτη εἶναι ἁπλῶς ἡ γεωμετρική συνισταμένη τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων.

Ἐκ τῆς συνθέσεως ταύτης αἱ ἐπί τῆς ἕδρας εε τοῦ μέρους (α) ἐφηρμοσμέναι ἐλαστικαί δυνάμεις δίδουσι συνισταμένην τινά R ἐφηρμοσμένην ἐπί σημείου m (κέντρον πιέσεως ἤ κέντρον τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων), τήν ὁποίαν δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν εἰς δύο N καί T τήν μέν κάθετον τῇ ἕδρᾳ εε τήν δέ ἐν αὐτῇ ὑποτιθεμένην ἐπιπέδῳ. τό μέρος (α) ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ (β) ἐλαστικάς δυνάμεις, αἵτινες συντιθέμεναι καί αὗται κατά τόν αὐτόν τρόπον δίδουσι συνισταμένην R_1 ἐφηρμοσμένην ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου m, ἴσην τῇ R καί ἀντιθέτου φορᾶς: δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν καί ταύτην εἰς N_1 καί T_1 καθέτως καί παραλλήλως τῇ ἐπιπέδῳ ἐπιφανείᾳ εε', αἵτινες εἰσίν ἴσαι ἀμοιβαίως ταῖς N καί T καί ἀντιθέτου φορᾶς.



Ἡ δύναμις T ἐξασκεῖ τήν ἐπενέργειαν αὐτῆς ἐπί τοῦ μέρους (α), ἡ δύναμις T_1 ἐπί τοῦ μέρους (β). αἱ δυνάμεις αὗται τείνουσι λοιπόν νά ἐπιφέρωσι σχετικήν τινα ὀλίσθησιν τῶν μερῶν (α) καί (β) τοῦ σώματος καί ἀποχωρήσωσι ταῦτα ἀλλήλων, οἱονεί διά ψαλιδισμοῦ. ἕνεκεν τούτου τήν κοινήν ἔντασιν τῶν δυνάμεων τούτων ὀνομάζομεν διατμητικήν ἔντασιν (effort tranchant) ἤ ἔντασιν ψαλιδισμοῦ.

Τάς καθέτους δυνάμεις N καί N_1 ὀνομάζομεν πιέσεις ἤ τάσεις.

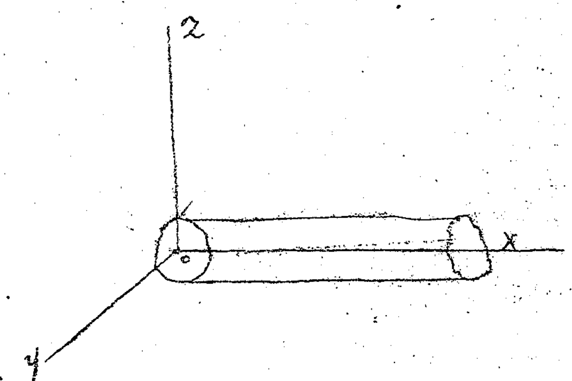
14.) Ἐάν δέ τό σῶμα προσδιορίζεται διά τριῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων καί ὀνομάσωμεν X, Y, Z τάς προβολάς μιᾶς τῶν ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργουσῶν δυνάμεων (ἐξωτερικῶν καί ἐσωτερικῶν ἐπί τῶν τριῶν ἀξόνων αἱ συνθῆκαι αἱ συνθῆκαι τῆς ἰσορροπίας εὐφράζονται διά τῶν ἕξ ἐξισώσεων,

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0$$

$$(1) \left\{ \Sigma[Zy - Yz] = 0 \quad \Sigma[Xz - Zx] = 0 \quad \Sigma[Yx - Xy] = 0 \right.$$

καί εἴπομεν, ὅτι τά σώματα, τά ὁποῖα θά ἐξετάσωμεν ἐν τῷ περί ἀντοχῆς τῆς ὕλης πραγματευομένῳ κεφαλαίῳ, εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπο τήν ἐπήρειαν τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, καί τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων τάς ὁποίας αἱ πρῶται παράγουσιν ἐν τῷ σώματι.

Θεωρήσωμεν λοιπόν πρισματικόν σῶμα οὗτινος ὁ ἄξων συμπίπτει μέ τόν ἄξονα ox καί ἔστωσαν, F_x, F_y, F_z τά ἀθροίσματα τῶν προβολῶν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπί τῶν τριῶν ἀξόνων.



Η συνιστῶσα F_x ἐπενεργεῖ ἐπί τοῦ σώματος προξενοῦσα ἑφελκυσμόν ἤ θλῖψιν ἀναλόγως τῆς φορᾶς αὐτῆς.

Αἱ δύο ἄλλαι συνιστῶσαι, συντίθενται εἰς μίαν T, τῆς ὁποίας ἡ τάσις εἶναι νά τάμη τό σῶμα (cisailler, trancher) καθέτως τῷ ἄξονι ox.

Ἴδωμεν νῦν τ' ἀποτελέσματα τοῦ ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων F προκύπτοντος ζεύγους. Δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν τοῦτο εἰς τρία ἄλλα ζεύγη κείμενα ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, xoz, xoy καί zoy τά δύο πρῶτα συντίθενται εἰς ἕν μόνον ζεῦγος M, οὗτινος τό ἐπίπεδον διέρχεται διά τοῦ ἄξονος ox. τό ζεῦγος τοῦτο τείνει νά κάμψη τό σῶμα.

τό ἐν τῷ ἐπιπέδῳ zoy ζεῦγος τείνει νά στρέψη τό σῶμα: ὥστε αἱ διάφοροι καταπονήσεις ἅς ὑφίσταται τό σῶμα εἰσί.

Ἑφελκυσμός ἤ θλῖψις.

Διάτμησις ἤ ψαλιδισμός (cisaillement, glissement longitudinal)

Κάμψις

Στρέψις

καί τά κεφάλαια τοῦ μέρους τῆς μηχανικῆς τοῦ πραγματευομένου περί τῆς ἀντοχῆς τῆς ὕλης φέρουσι τούς αὐτούς τίτλους.

Δυνάμεθα δέ νά πραγματευθῶμεν τό πρόβλημα κατά δύο τρόπους.

1) θεωροῦντες πρισματικόν τι σῶμα ὑπό τήν ἐπήρειαν οἱωνδήποτε ἐξωτερικῶν δυνάμεων, προσδιορίζομεν τάς ἐξισώσεις (1) αἵτινες μᾶς δίδουσι τήν γενικήν λύσιν τοῦ προβλήματος προσδιορίζουσαι τάς διαφόρους καταπονήσεις ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τό σῶμα.

2) Δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν τό σῶμα ὑπό τήν ἐπήρειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἵτινες μίαν μόνον τῶν ἄνω μνημονευθεισῶν καταπονήσεων δύνανται νά ἐξασκήσωσι, καί ἐξετάσωμεν οὕτω ἀλληλοδιαδόχως τάς τέσσαρας ταύτας καταπονήσεις (ἑφελκυσμός καί θλῖψις, διάτμησις, κάμψις, στρέψις) εἰς ἅς ὑπόκειται τό σῶμα ἀνεξαρτήτως τό ἕν τοῦ ἄλλου.—

Ὑλικά		φορτίον θραύσεως: ἐφελκυσμός	φορτίον θραύσεως: θλίψις	φορτίον θραύσεως: διάτμησις	φορτίον ἐλαστικότητος: ἐφελκυσμός	φορτίον ἐλαστικότητος: θλίψις	φορτίον ἐλαστικότητος: διάτμησις	φορτίον ἀσφαλείας: ἐφελκυσμός	φορτίον ἀσφαλείας: θλίψις	φορτίον ἀσφαλείας: διάτμησις	Συντελ. τῆς ἐλαστικ. E	Βάρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἰς χιλιογρ.	
Σίδηρος εἰς ῥάβδους	εἰς τάς ὑποκειμένας εἰς δονήσεις οἰκοδομάς	40	35	35	12-15	16.87	14-06	6 / 7-9	6-9	5.48	20000	7688	
Σίδηρος εἰς σύρμα		60			15-18			10-13			18000	7800	
Χάλυψ	εἰς τάς ὑποκειμένας εἰς δονήσεις οἰκοδομάς.	100			30-55		44-99	12	12-16	27	20000	7945	
	εἰς τάς μή ὑποκειμένας εἰς δονήσεις οἰκοδομάς							16					
								1,5					Ἐπιμήκυνσις ἀπ' εὐθείας
Χυτοσίδηρος	εἰς τάς ὑποκειμένας εἰς δονήσεις οἰκοδομάς							3					Ἐπιμήκυνσις ἐκ κάμψεως
		42-13	36-90	29	6-10	14.76	5,55	2-3	5-12	1.90	10-12000	7208	Ἐπιμήκυνσις ἀπ' εὐθείας
	εἰς τάς μή ὑποκειμένας εἰς δονήσεις οἰκοδομάς	3						3					Ἐπιμήκυνσις ἐκ κάμψεως
Ξύλα. τό 1/10 τοῦ φορτίου τῆς θραύσεως													
Δρῦς		6-8	7	1,6	2,349			0,6-08	4-45		977		
Ἐλάτη		8-9	4.21	0.45	2,153			04	4		1113		
Λιθοδομαί τό 1/10 τοῦ φορτίου τῆς θραύσεως													

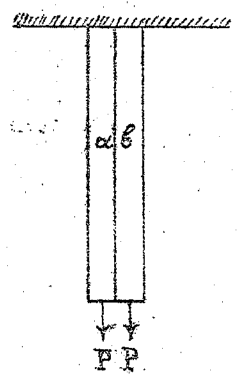
Κεφάλαιον I.

Ἐφελκυσμὸς καὶ θλίψις

15) Θεωρήσωμεν πρίσμα α πεπακτωμένον διά τοῦ ἑνός ἄκρου καί φέρον βάρος τι P εἰς τό ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ, ἐφηρμοσμένον κατά τήν κεντρικήν ἴνα τοῦ πρίσματος ὥστε νά δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐν τῇ τομῇ, κατά τά προλεχθέντα τό ἀρχικόν αὐτοῦ μῆκος l μετεβλήθη, ὡς ἐκ τῆς ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργείας τοῦ βάρους P εἰς $l+\lambda$. ἔστω Ω ἡ ὀρθία ἐγκαρσία τομή τοῦ πρίσματος. αἱ χαρακτηρίζουσαι τό πρίσμα ποσότητες

$$l \quad \lambda \quad \Omega \quad \text{καί} \quad P$$

συνδέονται βεβαίως διά σχέσεώς τινος, τήν ὁποίαν προτιθέμεθα νά προσδιορίσωμεν.



παρά τῷ πρώτῳ πρίσματι α θεωρήσωμεν καί δεύτερον ὅλως ὅμοιον β παρακείμενον αὐτῷ καί ὑπό τήν ἐφελκυστικήν δύναμιν ἴσου βάρους P. τό βάρος τοῦτο θά ἐπενεργήσῃ ἐπί τοῦ δευτέρου πρίσματος, ἀνεξαρτήτως τῆς ἐπενεργείας τοῦ πρώτου βάρους P ἐπί τοῦ πρώτου πρίσματος, καί θά παράξῃ τά αὐτά ἀποτελέσματα, ἐπιμήκυνσιν δηλ. ἴσην τῇ λ. Ἐάν ὑποθέσωμεν ἤδη, (καί τήν ὑπόθεσιν ταύτην κατά προσέγγισιν μόνον δυνάμεθα νά παραδεχθῶμεν *) ὅτι τὰ δύο παρακείμενα πρίσματα δὲν χωρίζονται πλέον ὄντα ὅλως ἀνεξάρτητα τὸ ἓν τοῦ ἄλλου ἀλλὰ συνδέονται φυσικῶς καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν πρίσμα οὗτινος ἡ ὀρθία ἐγκαρσία τομὴ εἶναι 2Ω βλέπομεν, ὅτι τοῦτο χαρακτηρίζεται διὰ τῶν ποσοτήτων

$$l,\ \lambda,\ 2\Omega \text{ καὶ } 2P.$$

ὥστε ἂν δύο δυνάμεις P καὶ P' ἐξασκοῦσαι ἐφελκυσμόν τινα ἐπὶ δύο πρισμάτων τῆς αὐτῆς ὕλης, καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους ἀλλὰ διαφόρου ἐγκαρσίας τομῆς, παράγουσι τὴν αὐτὴν ἐπιμήκυνσιν λ, αἱ ἐφελκύουσαι δυνάμεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἐγκάρσιαι τομαὶ τῶν πρισμάτων

$$\frac{P}{\Omega} = \frac{P'}{\Omega'} = K$$

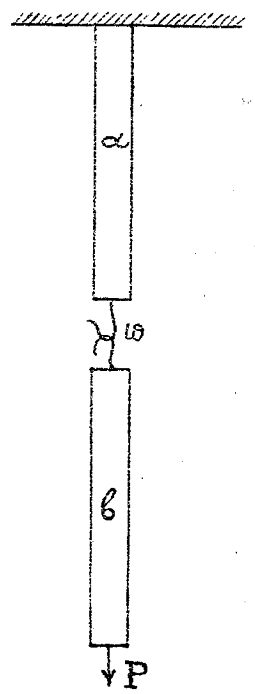
$$P = K\Omega$$

Ἡ ἐπενέργεια τῆς ἐφελκυούσης δυνάμεως P γίνεται βεβαίως ἐπαισθητὴ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἑτέρου ἄκρου τοῦ πρίσματος κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὥστε ἐὰν ἀποσπάσωμεν τὸ βάρος P ἀπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ πρίσματος, συγκρατήσωμεν ὅμως αὐτὸ δι' ἑτέρας τινὸς δυνάμεως, οὕτως ὥστε ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτοῦ λ νὰ διατηρηθῇ καὶ ἀναρτήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἕτερον ὅμοιον πρίσμα εἰς τὴν κάτω ἄκραν τοῦ ὁποίου κρεμῶμεν ἐκ νέου τὸ βάρος P. τὸ δεύτερον τοῦτο πρίσμα εἶναι ὡς εἰ πεπακτωμένον παρὰ τὸ σημεῖον ω εἰς τὸ ἄκρον τοῦ πρώτου καὶ ὑφίσταται ὅπως ἐκεῖνο ἐπιμήκυνσιν λ.

Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν τὰ δύο πρίσματα, οὐχὶ πλέον ἁπλῶς ἀνηρτημένα, ἀλλὰ στερεῶς (φυσικῶς) συνδεδεμένα εἰς τ' ἄκρα αὐτῶν καὶ ἀποτελοῦντα ἓν μόνον πρίσμα μήκους $2l$, χαρακτηρίζεται τοῦτο διὰ τῶν ποσοτήτων

* Ὑποθέτομεν δηλ. ὅτι αἱ ἶνες τοῦ πρίσματος ἐπιμηκύνονται ἢ ἐπιβραχύνονται ἀνεξαρτήτως αἱ μὲν τῶν δέ.–

$$2l,\ 2\lambda,\quad \Omega \text{ καὶ } P.$$



Ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς ἐφελκυστικῆς ἐπενεργείας δυνάμεώς τινος ἐπὶ πρίσματός τινος προκύπτουσα ἐπιμήκυνσις λ εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους l τοῦ πρίσματος, ὥστε ἡ δύναμις P ἐξαρτᾶται ἁπλῶς ἐκ τοῦ λόγου $\frac{\lambda}{l} = i$ ἔνθα i παριστᾷ τὴν ἐπιμήκυνσιν τῆς μονάδος τοῦ μήκους.

Ἡ ἐφελκύουσα δύναμις P δύναται λοιπὸν νὰ παρασταθῇ διὰ $\quad P = \Omega f(i)$

ἔνθα $f(i)$ εἶναι ἄγνωστος συνάρτησις τοῦ i, τὴν ὁποίαν προτιθέμεθα νὰ προσδιορίσωμεν.

Κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor

$$f(i) = f(0) + i f'(0) + i^2 f''(\theta i)$$

ἀλλὰ διὰ $P = 0$ πρέπει νὰ ἔχωμεν $i = 0$ καὶ $f(i) = 0$ ὥστε $f(0) = 0$ ἐὰν ἤδη παραλείψωμεν καὶ τὸν ὅρον ὅστις ἔχει i^2 ὡς παράγοντα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν κατὰ προσέγγισιν ἁρμοῦσαν διὰ τὰς ἐφαρμογάς,

$$P = f'(0)\,\Omega\, i = E\,\Omega\, i \quad \text{χιλιόγραμμα}$$

Ἔνθα E εἶναι σταθερὰ ποσότης καὶ μεταβάλλεται μετὰ τῆς φύσεως τῆς ἀπαρτιζούσης τὸ σῶμα ὕλης.

Ἵνα φθάσωμεν ὅμως εἰς τὸν τύπον τοῦτον ὑπεθέσαμεν ὅτι αἱ ἀποτελοῦσαι τὸ πρισματικὸν σῶμα ἶνες $\left\{\begin{array}{l}\text{ἐπιμηκύνονται}\\ \text{ἐπιβραχύνονται}\end{array}\right.$ ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, ἐν ᾧ ἡ θεωρία μᾶς διδάσκει τοὐναντίον, ὅτι ἐκ τῆς ἐπιμηκύνσεως λ, ἣν ὑφίσταται πρισματικόν τι σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν ἐφελκυούσης δυνάμεως P ἐπέρχεται ἐγκαρσία συστολὴ ἴση τῇ $\frac{\lambda}{4}$, καὶ τοῦτο ἐπαληθεύει καὶ ἡ πειραματικὴ μέθοδος. αλλ' ἐν τῇ πράξει καί ἐκτός τῶν ὁρίων ἐν οἷς ἐφαρμόζομεν τόν τύπον (1) δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τό δευτερεῦον τό φαινόμενον τῆς ἐγκαρσίας συστολῆς ἄνευ τοῦ ἐλαχίστου κινδύνου.

τήν σχέσιν

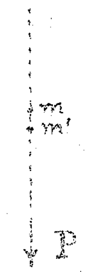
(1) $$P = E\Omega i$$

ἐκφράζομεν λέγοντες

Ἡ ὑπό τῆς ἐφελκυστικῆς ἐπενεργείας δυνάμεώς τινος P προκύπτουσα ἐπιμήκυνσις i ἐν τῇ μονάδι τοῦ μήκους τοῦ πρίσματος εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐγκαρσίας ὀρθῆς τομῆς τοῦ πρίσματος, ἐν ὅσῳ τό βάρος P δέν ὑπερβαίνει τό φορτίον τῆς ἐλαστικότητος τοῦ πρίσματος, ἡ κατά μονάδα ἐπιφανείας ἔντασις $\frac{P}{\Omega}$ μετρεῖται διά τοῦ γινομένου Ei.—

Τήν φυσικήν ἔννοιαν τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα να νοήσωμεν ὡς ἑξῆς:

Θεωρήσωμεν δύο μόρια m καί m' κείμενα ἐπί τῆς αὐτῆς ἰνός τοῦ πρίσματος παραλλήλου τῷ ἄξονι αὐτοῦ καί ἔστω p ἡ ἐπί τῆς ἰνός ταύτης ἐπενεργοῦσα ἐξωτερική ἐφελκύουσα δύναμις· αὕτη ἀπομακρύνει ἀπ' ἀλλήλων τά μόρια m καί m' καί ἀναπτύσσει μεταξύ τούτων ἐφελκύουσαν δύναμιν (ἐλαστικήν δύναμιν) ἴσην τῇ p ἥτις κρατεῖ τήν τελευταίαν ταύτην ἐν ἰσορροπίᾳ. καί ἐκ τούτου ἐννοεῖται, ὅτι ἡ ἐλαστική αὕτη δύναμις εἶναι ὅλως ἀνεξάρτητος τοῦ μήκους τοῦ πρίσματος, ἐξαρτᾶται δ' ἁπλῶς ἐκ τῆς ἐντάσεως τῆς $p = \frac{P}{\Omega}$ καί τῆς μεταβολῆς $\Delta r = \frac{\lambda}{r}$, ἥτις ἐπῆλθεν εἰς τήν ἀρχικήν ἀπόστασιν r_0 τῶν μορίων m καί m_0. Ὁ τύπος (1) ἐν τοῖς ὁρίοις, ἐν οἷς εἶναι οὗτος ἐφαρμόσιμος μᾶς διδάσκει, ὅτι ἡ μεταξύ τῶν μορίων m καί m' ἀναπτυσσομένη ἐλαστική δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιμηκύνσεως Δr, ἥν ὑφίσταται ἡ ἀρχική



ἀπόστασις r_0 τῶν μορίων τούτων.

Τό ἀποτέλεσμα δέ τοῦτο ἐπαληθεύει καί ἡ πειραματική μέθοδος ἐν ὡρισμένοις ὁρίοις ὡς ἐμφαίνεται τοῦτο ἐκ τοῦ κάτωθι πίνακος (ληφθέντος ἐν τοῖς μαθήμασι τοῦ καθηγητοῦ Belanger) ἐν ᾧ συνοψίζονται δεδόμενα πειραμάτων, ἅτινα ἐξετέλεσεν ὁ Hodginson ἐπί σιδηρᾶς ῥάβδου καλλίστης ποιότητος καί τῆς ὁποίας αἱ διαστάσεις εἶχον ὁλικόν μῆκος $= 15^{\mu}$.

[δι]άμετρος ἐγκαρσί[ας] τομῆς $= 0^{\mu},01313$.

1	2	3	4	5	6	7
φορτίον χιλιογράμμων κατά τετραγωνικόν χιλιοστόμετρον	ἀριθμοί ἀνάλογοι πρός τά φορτία	Ἐπιμηκύνσεις εἰς χιλιοστόμετρα κατά μέτρον			σχέσις τοῦ φορτίου πρός τήν ἐπιμήκυνσιν	
		ὁλική	Μόνιμος	ἐλαστική	ὁλική	ἐλαστική
Kr						
5,624	3	0.2837	0.00.25	0.2812	19.82	20.00
11.248	6	0.5708	0.0051	0.5657	19.71	19.88
13,123	7	0.6656	0.0068	0.6588	19.71	19.92
14.997	8	0.7603	0.0101	0.7502	19.32	19.99
16.872	9	0.8733	0.0330	0.8403	19.32	20.08
29.995	16	17,8883	16.5145	1.3738	1.68	21.83
35.614	19	34.9354	32.8201	2,1153	1.02	16.96.

ἐκ τῶν δεδομένων τούτων ἐξάγομεν

ὅτι μέχρι τοῦ φορτίου 13 χιλιογράμμων κατά τετραγωνικόν χιλιοστόμετρον ἡ ὁλική ἐπιμήκυνσις τῆς μονάδος τοῦ μήκους εἶναι ἀνάλογος τοῦ φορτίου ὡς ἐμφαίνει τοῦτο ὁ τύπος

$$P = E\Omega i$$

Ἡ δέ ἐλαστική ἐπιμήκυνσις τῆς μονάδος τοῦ μήκους εἶναι ἀνάλογος τοῦ φορτίου P ἐν ὅσῳ τοῦτο δέν ὑπερβαίνει τά 30 χιλιόγρ.

κατά τετραγωνικόν χιλιοστόμετρον καί εάν δώσωμεν εις τόν E τήν τιμήν 2.10^{10}.

Η θραύσις αντιστοιχεί τῷ φορτίῳ 35 περίπου χιλιογρ.

17.) Εν τῷ άνω εξετασθέντι παραδείγματι τῆς επιμηκύνσεως ἣν επιφέρει εις σιδηράν ράβδον, βάρος P ανηρτημένον εις τό έτερον τῶν άκρων αυτῆς, υποθέσωμεν ότι τό βάρος ουδεμίαν κέκτηται ταχύτητα κατά τήν στιγμήν τῆς επενεργείας αυτοῦ επί τοῦ σώματος καί ότι ἡ εφελκυστική επενέργεια αυτοῦ δέν επέρχεται αποτόμως, αλλά μικρόν κατά μικρόν αυξάνουσα βαθμηδόν από τοῦ μηδενός μέχρι τῆς τελικῆς αυτοῦ εντάσεως, αλλά τοῦτο δέν συμβαίνει παρά μετά τινα χρόνον από τῆς αναρτήσεως τοῦ σώματος, αφ' οὗ τοῦτο εκτελέσει δονήσεις τινάς εκ τῶν άνω πρός τά κάτω καί τ' ανάπαλιν, εν ταῖς δονήσεσι δέ ταύταις κέκτηται τοῦτο ταχύτητά τινα $\frac{d\lambda}{dt}$ καί δύναται νά θεωρηθῇ εν ισορροπίᾳ υπό τήν επήρειαν τριῶν δυνάμεων τῆς βαρύτητος P τῆς ελαστικῆς αντιστάσεως $E\Omega\frac{\lambda}{l}$ τήν οποίαν αναπτύσσει εν τῇ εγκαρσίᾳ τομῇ τοῦ πρίσματος, καί τρίτης δυνάμεως ίσης καί αντιθέτου τῇ οφειλομένῃ τῇ επιταχύνσει $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ αδρανείᾳ, τῆς οποίας ἡ τιμή εἶναι $-\frac{P}{g}\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ καί τήν ισορροπίαν ταύτην εκφράζομεν διά τῆς σχέσεως

$$P-\frac{P}{g}\frac{d^2\lambda}{dt^2}-E\Omega\frac{\lambda}{l}=0$$

ἢ θέτοντες $\frac{E\Omega g}{Pl}=\alpha$ έχομεν

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2}=g-\alpha\lambda$$

δευτεροβάθμιος διαφορική εξίσωσις τήν οποίαν ολοκληροῦμεν θέτοντες

$$\lambda=Me^{it\sqrt{\alpha}}+Ne^{-it\sqrt{\alpha}}+\frac{g}{\alpha}$$

εάν διαφορήσωμεν τήν εξίσωσιν ταύτην έχομεν

$$\frac{d\lambda}{dt}=i\sqrt{\alpha}\,Me^{it\sqrt{\alpha}}-i\sqrt{\alpha}\,Ne^{-it\sqrt{\alpha}}$$

αλλά λ καί $\frac{d\lambda}{dt}$ μηδενίζονται διά τήν τιμήν $t=0$ καί εξάγο-

μεν

$$M=N=-\frac{g}{2\alpha}$$

ώστε

$$\lambda=-\frac{1}{2}\frac{g}{\alpha}\left[e^{it\sqrt{\alpha}}+e^{-it\sqrt{\alpha}}\right]=\frac{g}{\alpha}\left[1-\text{συν}\sqrt{\alpha}\,t\right]$$

$$=\frac{Pl}{E\Omega}\left[1-\text{συν}\sqrt{\frac{E\Omega g}{Pl}}\,t\right]$$

ἡ μεγίστη δέ τιμή ἣν δύναται νά λάβῃ ἡ επιμήκυνσις λ εἶναι

$$2\frac{Pl}{E\Omega}$$

διπλασία δηλ. τῆς τιμῆς λ_0 ἣν λαμβάνει αὕτη, όταν τό βάρος P αναρτᾶται εις τό άκρον τῆς ράβδου άνευ αρχικῆς ταχύτητος

$$\lambda=\lambda_0\left[1-\text{συν}\sqrt{\frac{g}{\lambda_0}}\,t\right]$$

18.) Η εργασία τήν οποίαν δύναμίς τις F πρέπει νά καταναλώσῃ όπως επιφέρῃ επιμήκυνσιν $d\lambda$ εις τήν ράβδον μετρεῖται διά τοῦ γινομένου $F.d\lambda$ αλλ' ανά πᾶσαν στιγμήν $F=E\Omega\frac{\lambda}{l}$ καί ἡ εργασία $F.d\lambda$ εκφράζεται διά $\frac{E\Omega}{l}\lambda d\lambda$ ἡ ολική λοιπόν εργασία $\mathcal{T}$, ἣν καταναλίσκει ἡ δύναμις F διά νά επιφέρῃ εις τήν ράβδον επιμήκυνσιν λ εκφράζεται διά

$$\mathcal{T}=\int_0^\lambda\frac{E\Omega}{l}\lambda d\lambda=\frac{E\Omega}{l}\int_0^\lambda\lambda d\lambda=\frac{E\Omega}{l}\frac{\lambda^2}{2}$$

Η εργασία δ' αὕτη εἶναι προφανῶς ίση εκείνης ἣν αναπτύσσουσι τά μόρια ως εκ τῆς ελαστικότητος τοῦ σώματος τήν ανωτέρω σχέσιν δυνάμεθα νά γράψωμεν ως εξῆς

$$\mathcal{T}=\frac{E\Omega}{l}\frac{\lambda^2}{2}=\frac{E\Omega l}{l^2}\frac{\lambda^2}{2}=\frac{E\Omega l}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2=\frac{EV}{2}i^2$$

ένθα V εμφαίνει τόν όγκον τοῦ πρίσματος. Η ελαστική εργασία τῶν μορίων τοῦ πρίσματος εἶναι λοιπόν ανάλογος τοῦ όγκου αυτοῦ.

Αντοχή ύλης

Ἐφαρμογαί

Ὑπολογισμός ἑνός γόμφου (boulon) 19.) 1.ον Ὅταν παραστήσωμεν διά D τήν διάμετρον τοῦ κοχλιώδους μέρους ἡ διάμετρος d τοῦ λείου μέρους λαμβάνεται ἴση τῇ $0.80D$ ἔστω F ἡ δύναμις ὑπό τήν ἑφελκυστικήν ἐπήρειαν τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τό σῶμα. ἡ τομή ω προσδιορίζεται διά τῆς σχέσεως

$$F = R\omega$$

ἔνθα R ἐμφαίνει τό φορτίον ἀσφαλείας 6^{κ} τοῦ σιδήρου καί ἐπειδή $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$ ἔχομεν

$$F = 6^{\kappa} \frac{\pi d^2}{4} = 6^{\kappa} \times \frac{\pi (0.80D)^2}{4} = 6^{\kappa} \times 0.64 \frac{\pi D^2}{4}$$

ὅθεν

$$D = 0.57\sqrt{F}$$

ἡ δύναμις F ἐκφράζεται εἰς χιλιόγραμμα καί διάμετρος D εἰς χιλιοστόμετρα

συνήθως δέ λαμβάνομεν $D = 0.60\sqrt{F}$ ἤ καί $0.70\sqrt{F}$

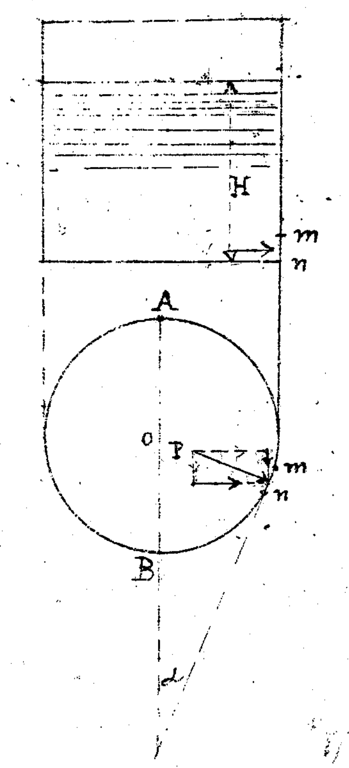
Ἡ διάμετρος τῆς κεφαλῆς καί τοῦ περικοχλίου εἶναι $2D$ τό ὕψος αὐτῶν εἶναι D.

Ὑδροθήκη ἐκ σιδηροπετάλου μέ ἐγκαρσίαν τομήν κυκλικήν 20.) 2ον) Βάσις ἐπίπεδος.

Ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι ἡ ῥῆξις ἐπέρχεται κατά τήν γενέτειραν A τῆς προσαρμογῆς τοῦ σιδηροπετάλου.

Ἐάν παραστήσωμεν διά p τήν πίεσιν, ἥν ἐξασκεῖ ἐπί τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας ἡ στήλη H τοῦ ὕδατος, ἡ ἐπί τοῦ στοιχείου mn ἐξασκουμένη πίεσις εἶναι $p.mn$, καί δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν αὐτήν εἰς δύο ἄλλας, τήν μίαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ OA καί τήν ἄλλην κάθετον αὐτῇ. ἡ ἔντασις

τῆς τελευταίας ταύτης εἶναι $p.mn.\text{συν}\,\alpha$ καί τείνει νά ἐπιφέρῃ τήν ῥῆξιν κατά τό μῆκος τῆς γενετείρας A. ἀλλά $mn\,\text{συν}.\alpha$ ἰσοῦται τῇ προβολῇ τῆς στοιχειώδους ἐπιφανείας mn ἐπί τοῦ διαμέσου AB. ὥστε



$pmn\,\text{συν}.\alpha = p.\text{προβ.}$ τοῦ mn ἐπί ἐπιπέδου AB. καί ἡ ἐπί τοῦ ἡμίσεως τῆς περιφερείας ἐξασκουμένη πίεσις ἀπό τῆς βάσεως μέχρις ἑνός χιλιοστομέτρου ὕψους ἰσοῦται μέ $p.AB = pd$ ἔνθα p ἐμφαίνει τήν κατά μονάδα ἐπιφανείας πίεσιν εἰς χιλιόγραμμα καί d τήν διάμετρον τῆς ὑδροθήκης εἰς μέτρα. ἀλλά $p = H$ μετρα. ὥστε ἡ ἄνω πίεσις λαμβάνει τήν μορφήν Hd.

ἀφ' ἑτέρου ἐάν παραστήσωμεν διά $R = 6$ χιλιογρ. τό φορτίον ἀσφαλείας τοῦ σιδηροπετάλου ἐξ οὗ εἶναι κατεσκευασμένη ἡ ὑδραποθήκη καί διά e τό πάχος αὐτοῦ δύναται τοῦτο ν' ἀνθέξῃ εἰς ἑφελκύουσαν δύναμιν ἴσην τῇ Re, ἐπειδή ὅμως ἡ διά τήν προσαρμογήν ἀναγκαῖαι ὀπαί ἐξασθενοῦσι τό μέταλλον καθ' ὅλον τό μῆκος τῆς γενετείρας A, ὑποβάλλομεν αὐτό εἰς φορτίον ἴσον ἁπλῶς τοῖς

$3/5\,Re = \frac{3}{5}.6e = \frac{18}{5}e$ καί προσδιορίζομεν τό πάχος e διά τῆς σχέσεως,

$$\frac{18}{5}ed = \frac{Hd^2}{2}$$

ἥτις ἐκφράζει, ὅτι αἱ ῥοπαί τῆς πιέσεως ἥν ὑφίσταται ἡ ἐπιφάνεια ADB καί τῆς ἐλαστικῆς ἀντιστάσεως ἥν ἀντιτάσσει τό σιδηροπέταλον καθ' ὅλον τό μῆκος τῆς γενετείρας Α εἶναι ἴσαι, ἐκ τῆς σχέσεως δέ ταύτης ἐξάγομεν

$$e = \frac{5}{36} H d$$

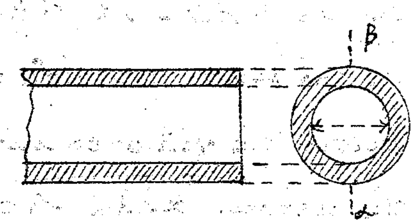
ἔνθα e ἐκφράζεται εἰς χιλιοστόμετρα. εἰς τό πάχος τοῦτο $\frac{5}{36} Hd$ προσθέτουσι συνήθως 2 ἕνεκεν τῆς φθορᾶς ἣν ἐπιφέρει τό ὕδωρ εἰς τό μέταλλον διά τῆς ὀξυδώσεως αὐτοῦ.

ὥστε τό πάχος τῆς ὑδροθήκης εἶναι

$$e = \frac{5}{36} Hd + 2 \text{ χιλιοστόμετρα}$$

21.) Σωλῆνες διοχετεύσεως τῶν ὑδάτων.

Ἡ ἐσωτερική πίεσις τοῦ ὕδατος τείνει νά παράξῃ ῥῆξιν εἰς ἣν ἀνθίσταται ὁ σωλήν διά τῶν ἐπιφανειῶν α καί β ἡ ἀντίστασις τήν ὁποίαν ἀντιτάσσουν αἱ ἐπιφάνειαι αὗται κατά μονάδα ἐπιφανείας εἶναι



$$2Re$$

ἡ ἐξασκουμένη ἐπί τῶν παρειῶν τοῦ σωλῆνος πίεσις ἥτις τείνει νά χωρίσῃ τοῦτον εἰς δύο μέρη εἶναι

$$pd$$

καί προσδιορίζομεν τό πάχος e διά τῆς σχέσεως

$$2Re = pd$$

$$e = \frac{pd}{2R}$$

ἔνθα p παριστᾷ τήν κατά μονάδα ἐπιφανείας πίεσιν εἰς χιλιόγραμ.

d 〃 τήν ἐσωτερικήν διάμετρον τοῦ σωλῆνος εἰς μέτρα

e 〃 τό πάχος τοῦ σωλῆνος εἰς χιλιοστόμετρα

R 〃 τό φορτίον τῆς ἀσφαλείας τοῦ χυτοσιδήρου.

συνήθως αὐξάνουν τό μῆκος τοῦτο κατά 0.008 ὥστε

$$e = \frac{pd}{2R} + 0.008$$

Θλῖψις

22.) Ἡ θεωρητική σπουδή τῆς θλίψεως εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν τοῦ ἐφελκυσμοῦ καί οἱ τύποι μένουσιν οἱ αὐτοί ἐν ὅσῳ τό μῆκος τῶν τεμαχίων ἐφ' ὧν ἐξασκεῖται ἡ θλῖψις εἶναι ἀρκούντως μικρά ὥστε νά μή ὑφίστανται ταῦτα κάμψιν τινά ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῆς θλιβούσης δυνάμεως. οὕτω λ.χ. πρισματική ῥάβδος ἐκ σιδήρου ἤ χυτοσιδήρου τῆς ὁποίας τό μῆκος εἶναι ἴσον ἤ ἔλασσον μέ πεντάκις τό μῆκος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τῆς ἐγκαρσίας τομῆς αὐτῆς οὐδεμίαν ὑφίσταται κάμψιν ἐκ τῆς ἐπινεργείας τῶν θλιβουσῶν δυνάμεων.

Ἄν οἱ τύποι μένουσιν οἱ αὐτοί, οἷοι καί ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐφελκυσμοῦ, τά χαρακτηρίζοντα ὅμως τά διάφορα σώματα φορτία ἐλαστικότητος καί φορτία θραύσεως, δέν εἶναι τά αὐτά ὡς ἐμφαίνει τοῦτο ὁ πίναξ [Σελίς].

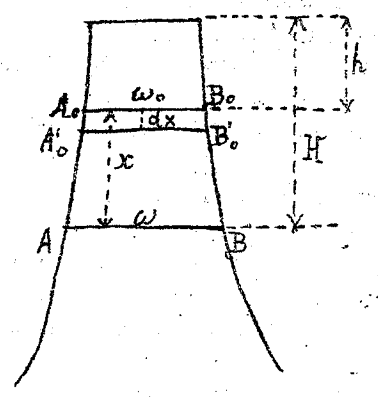
23) <u>Οἰκοδομαί ἴσης ἀντοχῆς εἰς τόν ἐφελκυσμόν ἤ τήν θλῖψιν.</u> Τό πρόβλημα, ὅπερ προτιθέμεθα νά πραγματευθῶμεν ἐνταῦθα σκοπεῖ τόν προσδιορισμόν τῆς καμπύλης, ἥτις ὁρίζει τήν κατά μῆκος τομήν τεμαχίου τινός οἰκοδομῆς ἤ ὀργάνου μηχανῆς, οὕτως ὥστε αἱ διάφοροι ἐγκάρσιοι τομαί τοῦ τεμαχίου τούτου νά φέρωσι τό αὐτό φορτίον κατά μονάδα ἐπιφανείας.

Θά πραγματευθῶμεν ἐνταῦθα δύο περιπτώσεις, ὧν ἡ μέν ἀναφέρεται εἰς τόν ἐφελκυσμόν ἡ δέ εἰς τήν θλῖψιν, καί ἐν αἷς θά κατανοήσωμεν ἀκριβῶς τήν σημασίαν τῶν ἴσης ἀντοχῆς οἰκοδομῶν.

1ον) Οἰκοδομή ἀντέχουσα ἐξ ἴσου εἰς τήν θλῖψιν. Ἔστω ϖ τό εἰδικόν βάρος τῶν ἀπαρτιζόντων τήν οἰκοδομήν ὑλῶν καί P τό φορτίον εἰς ὃ ὑποβάλλομεν τὴν ὕλην ταύτην κατὰ μονάδα ἐπιφανείας [τετραγωνικὸν μέτρον] ἡ τομὴ $A_0B_0=\omega_0$ φέρει φορτίον ἴσον τῷ

$$\varpi.\omega_0 h$$

ἡ ἀμέσως παραπλησία τομὴ $A_0'B_0'$ κειμένη εἰς ἀπόστασιν dx ἀπὸ τῆς A_0B_0 φέρει φορτίον



$$\varpi\omega_0 h+\varpi\omega dx$$

καὶ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς A_0B_0 κειμένη τομὴ $AB=\omega$ φέρει φορτίον ἴσον τῷ

$$\varpi\omega_0 h+\varpi\int_0^x\omega dx$$

ἀφ' ἑτέρου τὸ ἀνώτατον φορτίον εἰς ὃ ὑποβάλλομεν τὴν τομὴν ω εἶναι ἴσον τῷ ωP. ὥστε

$$\varpi\omega_0 h+\varpi\int_0^x\omega dx=P\omega$$

διαφοροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν

$$\varpi\omega dx=Pd\omega$$

ἢ

$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{\varpi}{P}dx$$

καὶ ἐπειδὴ $P=\varpi h$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{dx}{h}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες

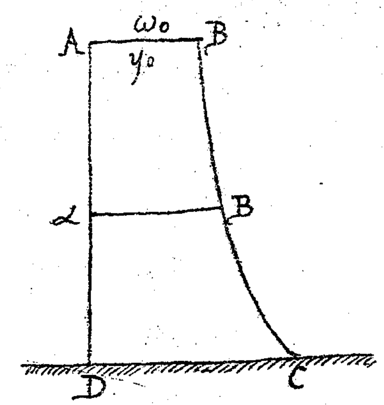
$$\mathcal{L}og.\frac{\omega}{\omega}=\frac{x}{h} \quad ἢ \quad \frac{\omega}{\omega_0}=e^{\frac{x}{h}}$$

$$\omega=\omega_0\, e^{\frac{x}{h}}$$

καὶ εὕρομεν οὕτω τὴν συνδέουσαν τὰς τομὰς σχέσιν, οὕτως ὥστε ἑκάστη τούτων ὑφίσταται τὴν αὐτὴν κόπωσιν, φέρει τὸ αὐτὸ φορτίον.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τοῖχον

ABCD οὗτινος τὰ διάφορα ὁριζόντια στρώματα νὰ φέρωσι τὸ αὐτὸ φορτίον κατὰ μονάδα ἐπιφανείας, οἱαδήποτε ἐγκαρσία τομὴ $\alpha\beta=\omega$ συνδέεται πρὸς τὴν ἀνωτάτην τομὴν $AB=\omega_0$ τοῦ τοίχου διὰ τῆς σχέσεως



$$\omega=\omega_0\, e^{\frac{x}{h}}$$

ἔνθα x ἐμφαίνει τὴν ἀπόστασιν τῶν τομῶν ω_0 καὶ ω καὶ h τὸ ὕψος πρίσματος ἔχοντος βάσιν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, [τὸ τετραγωνικὸν μέτρον] καὶ βάρος ἴσον τῷ ἀνωτάτῳ φορτίῳ εἰς ὃ δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν ἀσφαλῶς τὴν ὕλην ἐξ ἧς σύγκειται ὁ τοῖχος.

Ἐὰν ἤδη μᾶς δοθῇ ἡ κατὰ μῆκος τομὴ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τοίχου, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν κατὰ μῆκος τομὴν τῆς ἑτέρας, οὕτως ὥστε ὁ τοῖχος νὰ εἶναι ἴσης ἀντοχῆς· διότι αἱ τεταγμέναι y_0 καὶ y εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐπιφανειῶν ω_0 καὶ ω τῶν ἐγκαρσίων τομῶν καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ ἔχομεν,

$$y=y_0 e$$

τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης $B\beta C$, ἣν μεταχειρίζονται ἐν τῇ κατασκευῇ τῶν δεξαμενῶν.

Πύργοι ἴσης ἀντιστάσεως. Διὰ πύργον ἴσης ἀντοχῆς ἔχομεν

$$\omega=\Pi Z^2$$

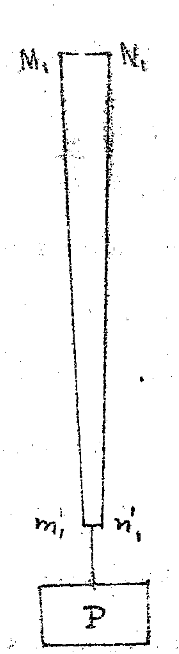
$$\omega_0=\Pi Z_0^2$$

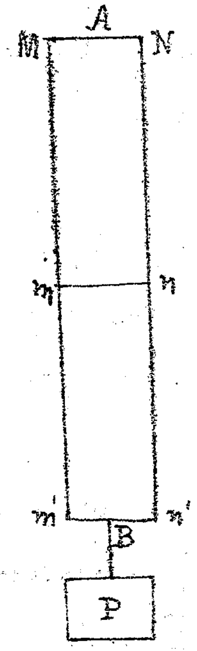
ὥστε

$$Z=Z_0\, e^{\frac{x}{2h}}$$

Καμπύλη τὴν ὁποίαν μετεχειρίσθησαν ἐν τῇ κατασκευῇ τοῦ φάρου τοῦ Cordouan.

Κάλως ἴσης ἀντοχῆς. 24.) Θεωρήσωμεν κάλων κυλινδρικὸν τὸν AB χρησιμεύοντα διά τήν ανάβασιν σώματός τινος από του βάθους φρέατος. η τομή Ω του κάλω τούτου πρέπει νά υπολογισθή ούτως ώστε εις τό κατώτατον αυτού μέρος εν τη τομή $m'n'$ ν' αντέχη ο κάλως εις τήν διά τάσεως θραύσιν, τήν οποίαν τείνει νά παραγάγη τό επ' αυτού ανηρτημένον βάρος P. ετέρα τομή όμως ντα mn κειμένη υπεράνω της $m'n'$ υφίσταται τήν εφελκυστικήν έντασιν, όχι μόνον του βάρους P αλλά καί του κάτωθεν αυτής μέρους $mnm'n'$ του κάλω, καί αι διαστάσεις αυτής

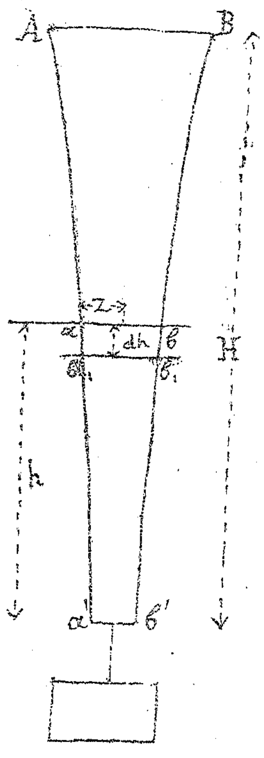




δέον νά υπολογισθώσιν όπως ανθέξη αύτη εις αμφότερα τά φορτία P καί $mnm'n'$. η ανωτάτη δέ τομή φέρει τό βάρος P καί τό βάρος του όλου κάλω $MNm'n'$ ώστε εάν δώσωμεν εις τόν κάλων κυλινδρικήν μορφήν, η κατωτάτη τομή $m'n'$ έχει τάς αυτάς διαστάσεις με τήν ανωτάτην, εν ω αύτη φέρει μόνον τό βάρος P. ούτω από του ανωτάτου μέχρι του κατωτάτου μέρους αι τομαί του κάλω είναι μεγαλείτεραι παρ' όσον χρειάζεται διά νά ανθέξουν αύται εις τήν εφελκυστικήν δύναμιν του βάρους P καί του βάρους του υπ' αυτάς τμήματος του κάλω, καί επέρχεται ούτω σπατάλη περί τήν χρησιμεύουσαν διά τήν κατασκευήν αυτού ύλην, σπατάλη διπλή, διότι όχι μόνον η τομή mn έχει διαστάσεις πολύ μεγαλειτέρας του δέοντος, αλλ' ως εκ του ανωφελούς βάρους της επαυξάνει αύτη τάς διαστάσεις των υπέρ αυτήν τομών, αίτινες υφίστανται τήν εφελκυστικήν έντασιν αυτής. Εάν τουναντίον υπολογίσωμεν τάς διαδοχικάς τομάς του κάλω επαυξάνοντες αυτάς εκ των κάτω πρός τ' άνω, ούτως ώστε εκάστη τούτων νά έχη διαστάσεις αρκούσας μόνον διά τό υπ' αυτήν ευρισκόμενον βάρος του κάλω καί του P, εάν δηλ. αι τομαί υπολογίζονται ούτως, ώστε εκάστη τούτων νά υφίσταται τήν αυτήν εφελκυστικήν έντασιν κατά μονάδα επιφανείας, μεταχειριζόμεθα ίσα ίσα τήν διά τήν αντοχήν του κάλω αναγκαίαν ύλην καί φέρομεν ούτω πάσαν εφικτήν οικονομίαν περί τήν κατασκευήν αυτού. όχι μόνον η ανωτάτη τομή M_1N_1 είναι μικροτέρα της MN, αλλά καί αι ακόλουθοι τομαί βαίνουσιν ελαττούμεναι μέχρι του κατωτάτου σημείου του κάλω.

Έχομεν ούτω τόν κάλων $M_1N_1m_1'n_1'$ τόν οποίον ονομάζομεν κάλων ίσης αντοχής.

Ίδωμεν ήδη τίνι τρόπω δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν κατά μήκος τομήν του κάλω ίσης αντοχής.



Θεωρήσωμεν πρός τούτο τομήν οιανδήποτε τήν $\alpha\beta$ ης τό εμβαδόν παριστώμεν δι' Ω καί τήν οποίαν υποθέτομεν κυκλικήν ($\Omega = \Pi Z^2$) έστω h η από της κατωτάτης τομής $\alpha'\beta'$ απόστασις αυτής καί ίδωμεν, ποία είναι η εφελκυστική έντασις εις ήν δέον ν' αντέχη αύτη. πρέπει πρός τούτο νά υπολογίσωμεν τό βάρος του υπ' αυτήν μέρους $\alpha\beta\alpha'\beta'$ του κάλω. Έστω $\alpha_1\beta_1$ ετέρα τομή κειμένη εις απόστασιν απειροστήν dh από της $\alpha\beta$. εάν παραστήσωμεν διά δ τό βάρος ενός κυβικού μέτρου του κάλω, τό βάρος του απειροστού τμήματος $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ είναι

$$\delta\,\Omega\,dh$$

καί τό ὁλικόν βάρος τοῦ τμήματος αβ α'β' εἶναι

$$\delta\int_0^h \omega_h\, dh.$$

ὥστε ἡ εἰς τήν τομήν αβ ἐφελκυστική ἔντασις εἶναι

$$P+\delta\int_0^h \omega_h\, dh$$

Ἐάν ἤδη ὀνομάσωμεν R τό κατά μονάδα ἐπιφανείας φορτίον ἀσφαλείας τῆς ὕλης ἐξ ἧς εἶναι κατεσκευασμένος ὁ κάλως, ἡ δέ αὐτή ἡ ἐφελκυστική ἔντασις, εἰς ἥν δυνάμεθα νά ὑποβάλωμεν ἀσφαλῶς τήν τομήν αβ εἶναι $\omega_h R$, ὥστε

$$\omega_h R = P+\delta\int_0^h \omega_h\, dh$$

ἐκ τῆς σχέσεως δέ ταύτης προσδιορίζομεν τό ω_h ὡς συνάρτησιν τοῦ h. Διαφοροῦντες τήν σχέσιν ταύτην εὑρίσκομεν

$$R\, d\omega_h = \delta\,\omega_h\, dh$$

ἤ

$$\frac{d\omega_h}{\omega_h}=\frac{\delta}{R}\,dh$$

καί ὁλοκληροῦντες τήν σχέσιν ταύτην ἔχομεν

$$\text{Λογ.}\,\omega_h \quad \text{Λογ.}\,\omega_0 \quad \text{Λογ}\left(\frac{\omega_h}{\omega_0}\right)=\frac{\delta}{R}h$$

Ἔνθα ω_0 ἐμφαίνει τήν τομήν α'β' ἄγνωστον καί ταύτην μετατρέποντες τήν ἄνω σχέσιν δυνάμεθα νά γράψωμεν

$$\omega_h=\omega_0\, e^{\frac{\delta}{R}h}$$

Τήν τομήν ω_0 προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$\omega_0 R = P \quad \text{ἤ} \quad \omega_0=\frac{P}{R}$$

καί παρατηροῦντες ὅτι $\omega_h = \Pi r^2$ δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν ἄνω σχέσιν

$$\Pi r^2=\frac{P}{R}\, e^{\frac{\delta}{R}h}$$

ἤ

$$r=\sqrt{\frac{P}{\Pi R}}\; e^{\frac{\delta}{2R}h}$$

ἐξίσωσις ἥτις μᾶς δίδει r ὡς συνάρτησιν τοῦ h καί παριστᾷ κατά συνέπειαν τήν ὁρίζουσαν τήν κατά μῆκος τομήν τοῦ κάλω καμπύλην Ααα'. Τάς ἀκτῖνας ρ καί ρ_0 τῆς ἀνωτάτης καί κατωτάτης τομῆς ΑΒ καί α'β' εὑρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν ἄνω σχέσιν h διά 0 καί H, τοῦ τελευταίου τούτου ἐμφαίνοντος τό βάθος

τοῦ φρέατος. Ἔχομεν οὕτω

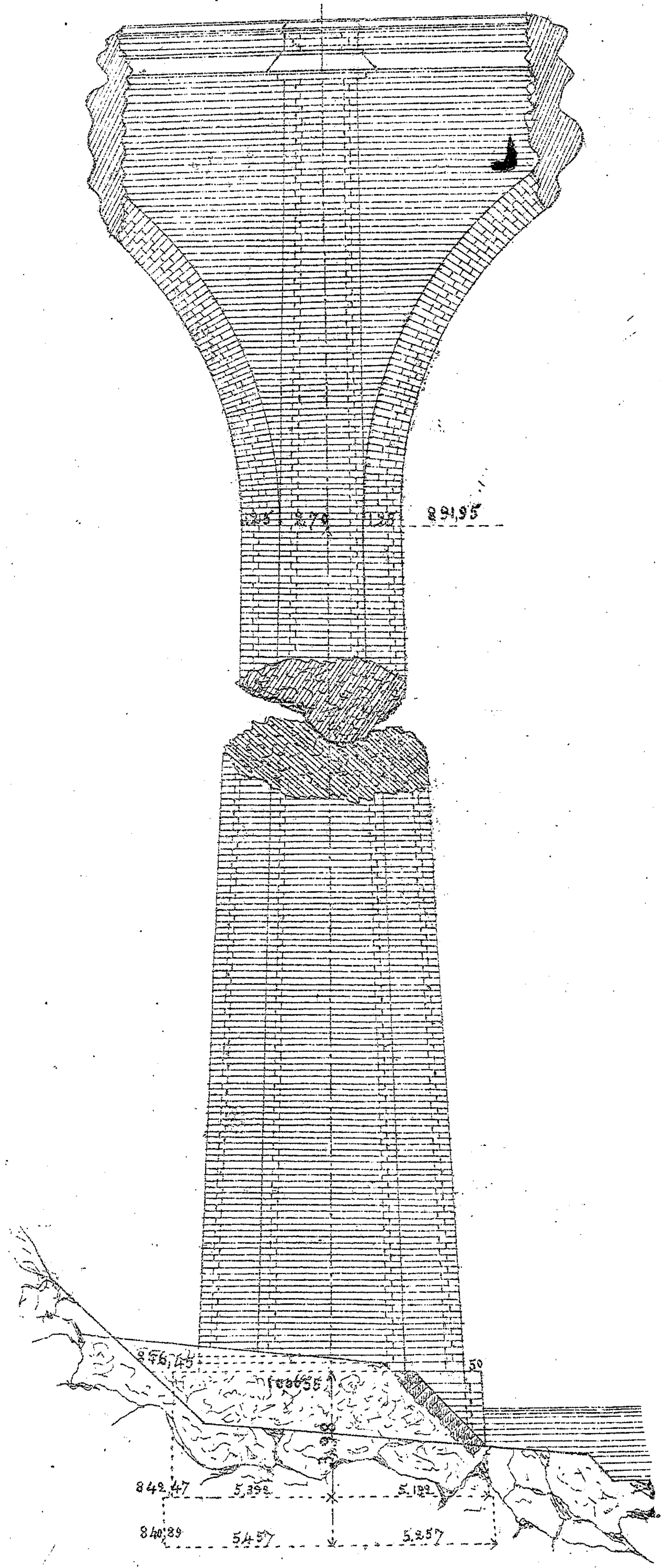
$$\rho=\sqrt{\frac{P}{\Pi R}}\; e^{\frac{\delta}{2R}H} \quad \text{καί} \quad \rho_0=\sqrt{\frac{P}{\Pi R}}$$

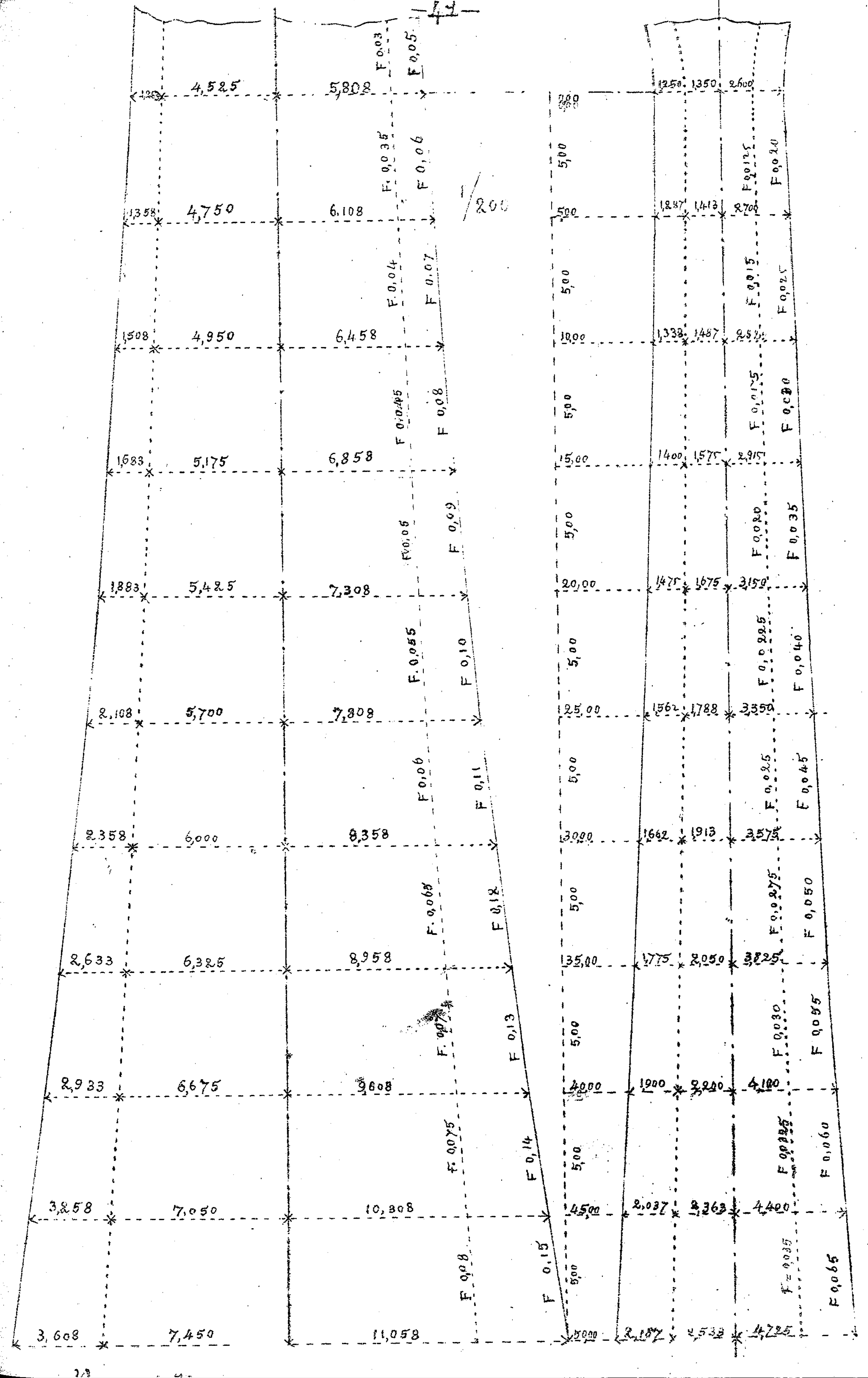
τό βάρος p τοῦ τμήματος αβ α'β' τοῦ κάλω μᾶς δίδεται διά τῆς σχέσεως

$$p=\delta\int_0^h \Pi r^2\, dh=\delta\Pi\rho_0^2\int_0^h e^{\frac{\delta}{R}h}\, dh=P\frac{\delta}{R}\int_0^h e^{\frac{\delta}{R}h}\, dh=P\left[e^{\frac{\delta}{R}h}-1\right]$$

Ἰδίως τό βάρος Ω τοῦ ὅλου κάλω ἰσοῦται μέ

$$\Omega=P\left[e^{\frac{\delta}{R}H}-1\right].$$

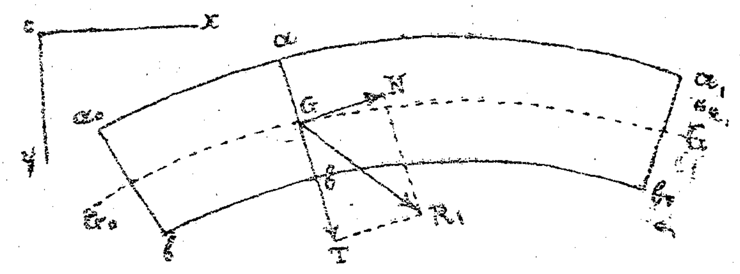

891,95
842,47
840,89
5,398
5,199
5,457
5,257


1/200
4,525
5,808
4,750
6,108
4,950
6,458
5,175
6,858
5,425
7,308
5,700
7,808
6,000
8,358
6,325
8,958
6,675
10,308
7,050
7,450
11,058
1,358
1,508
1,683
1,883
2,108
2,358
2,633
2,933
3,258
3,608
F 0,03
F 0,05
F 0,035
F 0,06
F 0,04
F 0,07
F 0,08
F 0,09
F 0,055
F 0,10
F 0,06
F 0,11
F 0,12
F 0,13
F 0,075
F 0,14
F 0,08
F 0,15
5,00
10,00
15,00
20,00
25,00
30,00
35,00
40,00
45,00
50,00
F 0,020
F 0,025
F 0,035
F 0,040
F 0,045
F 0,050
F 0,055
F 0,060
F 0,065
F 0,030

Κεφάλαιον II

Κάμψις

25) Θεωρήσωμεν πρισματικόν τι σῶμα ἐλαστικόν $\alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1$ οἷον ὡρίσαμεν τοῦτο ἀνωτέρω, εὑρισκόμενον ὑπό τήν ἐπήρειαν συστήματος ἐξωτερικῶν δυνάμεων F, κειμένων ἁπασῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας τοῦ σώματος. αἱ δυνάμεις αὗται, μεταβάλλουσαι τήν μορφήν τοῦ σώματος ὡς ἐκ τῆς ἐλαστικότητος αὐτοῦ



ἀναπτύσσουσιν ἐν αὐτῷ ἐλαστικάς δυνάμεις, καί ὑπό τήν ἐπήρειαν τούτων καί τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἰσορροπεῖ τό σῶμα ἐν τῇ νέᾳ μορφῇ αὐτοῦ. Θεωρήσωμεν τομήν τινα τήν $\alpha\beta$. χωρίζουσαν τό πρίσμα εἰς δύο μέρη $\alpha_0\beta_0\alpha\beta$ καί $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$. ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων $\alpha\beta\alpha_0\beta_0$ λ.χ. εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ [ ] ὑπό τήν ἐπήρειαν τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων F καί τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων ἅς ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τό ἕτερον τμῆμα τοῦ πρίσματος $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ καί τῶν ὁποίων τά σημεῖα τῆς ἐφαρμογῆς εὑρίσκονται ἐν τῇ τομῇ $\alpha\beta$. ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν ἐλαστικῶν τούτων δυνάμεων παρά τό σημεῖον G προκύπτει συνισταμένη τις R καί ζεῦγος δυνάμεων M. ἐκ τῆς παρά τό αὐτό σημεῖον μεταφορᾶς τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων F προκύπτει ἐπίσης συνισταμένη τις f καί ζεῦγος δυνάμεων μ καί εἴδομεν [ ] ὅτι ἡ συνισταμένη R κεῖται ἐπ' εὐθείας μετά τῆς συνισταμένης f καί εἶναι ἴση καί ἀντίθετος αὐτῇ. τοῦτο συμβαίνει καί διά τάς ῥοπάς τῶν ζευγῶν μ καί M. ἀλλά τό τμῆμα $\alpha\beta\ \alpha_0\beta_0$ ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ τμήματος $\alpha_1\beta_1\ \alpha\beta$ ἐλαστικάς δυνάμεις, ἴσας καί ἀντιθέτους ἐκείνων ἅς ἐξασκεῖ τό τμῆμα $\alpha_1\beta_1\ \alpha\beta$ ἐπί τοῦ τμήματος $\alpha\beta\ \alpha_0\beta_0$. ἐάν συνθέσωμεν καί τάς ἐλαστικάς ταύτας δυνάμεις παρά τό σημεῖον G εὑρίσκομεν συνισταμένην τινά R_1 ἴσην καί ἀντίθετον τῇ R καί ζεῦγος δυνάμεων M_1 ἴσον καί ἀντίθετον τῷ M. ὥστε ἡ παρά τό σημεῖον G συνισταμένη τῶν ἐπί τοῦ τμήματος $\alpha\beta\ \alpha_0\beta_0$ ἐξασκουμένων ἐξωτερικῶν δυνάμεων F καί τό ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν δυνάμεων τούτων παρά τό σημεῖον G προκῦπτον ζεῦγος μ συμπίπτουσι κατά τήν ἔντασιν καί τήν φοράν μέ τήν παρά τό αὐτό σημεῖον G προκύπτουσαν συνισταμένην R_0 τῶν ἐπί τῶν διαφόρων σημείων τῆς τομῆς $\alpha\beta$ ἐφηρμοσμένων ἐλαστικῶν δυνάμεων, ἅς ἐξασκεῖ τό αὐτό τμῆμα $\alpha\beta\ \alpha_0\beta_0$ ἐπί τοῦ ἑτέρου $\alpha_1\beta_1\ \alpha\beta$ καί μέ τό ζεῦγος M_1 ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν ἐλαστικῶν τούτων δυνάμεων παρά τό σημεῖον G.

26.) Ἡ συνισταμένη R_1 κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας, καί δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν αὐτήν εἰς δύο ἄλλας, N κατά τήν ἐφαπτομένην τῆς κεντρικῆς ἰνός τοῦ πρίσματος, καί T κάθετον τῇ ἰνί ταύτῃ. τήν συνιστῶσαν T καλοῦμεν διατμητικήν ἔντασιν (effort tranchant) σχετικήν τῇ τομῇ $\alpha\beta$.

τήν συνιστῶσαν N καλοῦμεν θλῖψιν τῆς κεντρικῆς ἰνός παρά τό σημεῖον G.

τήν ῥοπήν M καλοῦμεν ῥοπήν κάμψεως σχετικήν τῇ το-

μῇ $\alpha\beta$. τ' ἀλγεβρικά σημεῖα τῶν δυνάμεων τούτων προσδιορίζονται ὅπως καί αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων G τῆς κεντρικῆς ἰνός ὡς πρός τούς ἄξονας ox καί oy, οἵους ἐθέσαμεν αὐτούς ἐν τῷ ἄνω σχήματι.

Ὅταν δέ λέγωμεν ἐλαστικάς δυνάμεις ἐφηρμοσμένας εἰς τά διάφορα σημεῖα τῆς τομῆς $\alpha\beta$ ἐννοοῦμεν ἐκείνας, ἅς ἐξασκεῖ τό πρός τά ἀριστερά τμῆμα $\alpha\beta\ \alpha_0\beta_0$ ἐπί τοῦ πρός τά δεξιά $\alpha_1\beta_1\ \alpha\beta$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω [ ] δέ ἐξάγομεν ὅτι

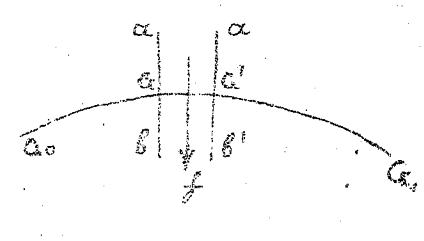
Ἡ ἐν τῇ τομῇ $\alpha\beta$ διατμητική ἔντασις ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν προβολῶν τῶν ἐπί τῆς τομῆς $\alpha\beta$ ἐξασκουμένων ἐλαστικῶν δυνάμεων, ἐπί τῆς τομῆς ταύτης, ἤ ἡ τῷ ἀθροίσματι τῶν προβολῶν ἐπί τῆς αὐτῆς τομῆς ἐκείνων ἐκ τῶν ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἵτινες κεῖνται πρός τ' ἀριστερά τῆς τομῆς ταύτης.

Ἡ κάθετος θλῖψις, ἥν ὡρίσαμεν ὡς τήν συνισταμένην N τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν προβολῶν τῶν αὐτῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπί τῆς καθέτου τῇ τομῇ $\alpha\beta$.

Ἡ ῥοπή τῆς κάμψεως ἐν τῇ τομῇ $\alpha\beta$ ἰσοῦται τῇ ῥοπῇ τῶν αὐτῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὡς πρός τό σημεῖον G ἔνθα ἡ τομή $\alpha\beta$ τέμνει τήν κεντρικήν ἶνα G_0G_1.

καί ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ἀμέσως, ὅτι

1ον) Ἐάν θεωρήσωμεν δύο παραπλησίας τομάς $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ μεταξύ τῶν ὁποίων ἐπενεργεῖ δύναμις F $\left\{\begin{array}{l}\text{κάθετος}\\ \text{ἐφαπτομένη}\end{array}\right\}$ τῇ κεντρικῇ ἰνί G_0G_1 αἱ



$\left\{\begin{array}{l}\text{κάμπτουσαι ῥοπαί καί ἡ θλῖψις τῆς κεντρικῆς ἰνός}\\ \text{κάμπτουσαι ῥοπαί καί ἡ διατμητική ἔντασις}\end{array}\right\}$

ἐν ταῖς δυσί ταύταις τομαῖς ἐλάχιστον μόνον διαφέρουσιν, ἐν ᾧ

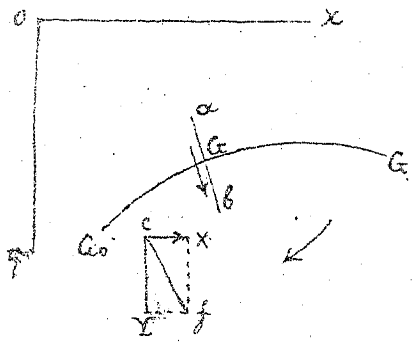
$\left\{\begin{array}{l}\text{ἡ διατμητική ἔντασις ἐν τῇ τομῇ αβ}\\ \text{ἡ θλῖψις τῆς κεντρικῆς ἰνός}\end{array}\right\}$

εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἐν τῇ τομῇ αβ $\left\{\begin{array}{l}\text{διατμητικῆς ἐντάσεως}\\ \text{θλίψεως τῆς κεντρικῆς ἰνός}\end{array}\right\}$

κατά τήν ἔντασιν τῆς δυνάμεως F.

$2^{ον}$) Ἐάν ἡ κεντρική ἴς εἶναι εὐθύγραμμος καί τό ἐλαστικόν σῶμα ὁριζόντιος δοκός ὑποκειμένη εἰς κατακόρυφα μόνον φορτία, καί στηριζομένη ἐπί στηριγμάτων, ἅτινα ἀντιδρῶσιν ἐπί τῆς δοκοῦ κατακορύφως καί ταῦτα, ἡ κεντρική ἴς οὐδεμίαν ὑφίσταται θλῖψιν. αἱ κάμπτουσαι ῥοπαί ἐν δυσί παραπλησίαις τομαῖς μεταξύ τῶν ὁποίων ἐπενεργεῖ ἐξωτερική τις δύναμις, ἤ ὑπάρχει στήριγμα, κατά ἀπειροστά μόνον διαφέρουσι, ἐν ᾧ αἱ διατμητικαί ἐντάσεις διαφέρουσι καθ' ὅλην τήν ἔντασιν τῆς δυνάμεως, ἤ τήν ἀντίδρασιν, τήν ὁποίαν ἀντιτάσσει τό στήριγμα.

27.) Ἡ διατμητική ἔντασις ἐν τῇ τομῇ αβ ἰσοῦται τῇ παραγώγῳ τῆς ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ καμπτούσης ῥοπῆς, λαμβανομένη ὡς πρός τό τόξον $s = G_0G$ τῆς κεντρικῆς ἰνός, καί μέ ἀρνητικόν σημεῖον.



Ἔστω τῷ ὄντι c τό σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως F, πρός τ' ἀριστερά τῆς τομῆς αβ καί X, Y αἱ συνιστῶσαι αὐτῆς παραλλήλως τοῖς ἄξοσιν ox καί oy.

Ἔστωσάν πρός τούτοις x, y αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου G καί αβ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου c.

Ἡ ῥοπή* τῆς δυνάμεως F ὡς πρός τό σημεῖον G εἶναι

$$-X(\beta-y) - Y(x-\alpha) = X(y-\beta) - Y(x-\alpha)$$

καί ἡ κάμπτουσα ῥοπή M ἐν τῇ τομῇ αβ εἶναι.

$$M = \Sigma\left[X(y-\beta) - Y(x-\alpha)\right]$$

καί διαφοροῦντες ὡς πρός τόξον $s = G_0G$ ἔχομεν

$$-\frac{dM}{ds} = \Sigma\left[-X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds}\right]$$

ἀλλά $\frac{dx}{ds}$ καί $\frac{dy}{ds}$ εἶναι τά συνημίτονα τῶν μετά τῶν ἀξόνων ox καί oy γωνιῶν τῆς παρά τό σημεῖον G ἐφαπτομένης τῆς κεντρικῆς ἰνός.

τά συνημίτονα τῶν γωνιῶν τῆς παρά τό αὐτό σημεῖον G καθέτου μετά τῶν αὐτῶν ἀξόνων εἶναι $-\frac{dy}{ds}$ καί $\frac{dx}{ds}$ [τό πρῶτον ἔχει τό σημεῖον − διότι y ἐλαττοῦται καί dy εἶναι ἀρνητικόν]. ὥστε

$$-X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds}$$

ἰσοῦται τῇ προβολῇ τῆς δυνάμεως F ἐπί τῆς καθέτου αβ. καί τό ἄθροισμα τῶν προβολῶν τούτων ἐκαλέσαμεν[ ] διατμητικήν ἔντασιν ἐν τῇ τομῇ αβ. ὥστε

$$T = -\frac{dM}{ds} \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

καί ἐκ τούτου εἰκάζομεν

$1^{ον}$) παρά τοῖς σημείοις τοῦ σώματος, ἔνθα ἡ κάμπτουσα ῥοπή λαμβάνει τήν μεγίστην ἤ τήν ἐλαχίστην τιμήν αὐτῆς, ἡ διατμητική ἔντασις ἰσοῦται τῷ μηδενί καί τἀνάπαλιν.

$2^{ον}$). Ὅταν ἡ κάμπτουσα ῥοή εἶναι σταθερά ὁπουδήποτε τοῦ σώματος καί ἄν θεωρηθῇ αὐτή, ἡ διατμητική ἔντασις ἰσοῦται τῷ μηδενί καί τἀνάπαλιν ἐν ᾗ περιπτώσει τό σῶμα εἶναι ὁριζόντιος δοκός $ds = dx$ καί ἡ ἄνω σχέσις

---

* Αἱ φοραί τῆς καθέτου καί τῶν ῥοπῶν ἐμφαίνονται διά βελῶν.

μετατρέπεται είς

$$T = -\frac{dM}{dx}$$

28.) Μέχρι τοῦδε δέν ἐλάβομεν ποσῶς ὑπ᾽ ὄψει τάς ἀλλοιώσεις, ἅς ἐπιφέρει ἐν τῇ μορφῇ τοῦ σώματος ἡ ἐπενέργεια τῶν ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐφηρμοσμένων ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί ἐφθάσαμεν εἰς τ᾽ ἀνωτέρω ἀποτελέσματα βασιζόμενοι ἁπλῶς ἐπί τῶν ἀφορώντων τήν σύνθεσιν τῶν ἐπί τῶν στερεῶν σωμάτων ἐπενεργουσῶν δυνάμεων θεμελιωδῶν θεωρημάτων τῆς στατικῆς.

Ἴδωμεν ἤδη τάς σχέσεις, αἵτινες συνδέουσι τάς ἐν τῷ σώματι ἀναπτυσσομένας ἐλαστικάς δυνάμεις πρός τάς ἀλλοιώσεις τῆς μορφῆς τοῦ σώματος, εἰς ἅς ὀφείλονται αἱ δυνάμεις αὗται.

Πρός τοῦτο ὑποθέτομεν

1ον) ὅτι αἱ κάθετοι τῇ κεντρικῇ ἰνί καί ἐπίπεδοι τομαί τοῦ σώματος μένουσιν ἐπίπεδοι καί κάθετοι τῇ αὐτῇ ἰνί καί μετά τήν ἐλαστικήν ἀλλοίωσιν ἥν ὑπέστη ἡ μορφή τοῦ σώματος.

2ον) Ὅτι αἱ ἀλλοιώσεις ἅς ὑπέστησαν αἱ ἐγκάρσιοι τομαί τοῦ σώματος δύνανται νά παραληφθῶσι παραβαλόμεναι πρός τάς ἀλλοιώσεις ἅς ὑπέστη τό σῶμα ἐν ταῖς κατά μῆκος διαστάσεσιν αὐτοῦ, καί

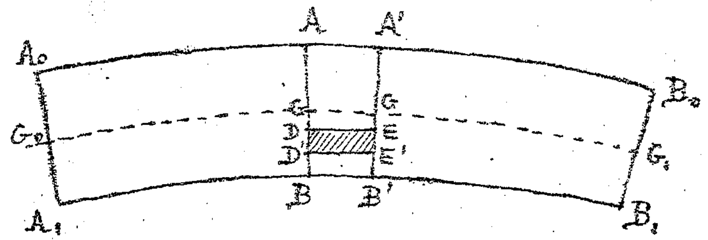
3ον) Ὅτι αἱ ἀποτελοῦσαι τό σῶμα διάφοροι ἶνες ἐπιμηκύνονται ἢ ἐπιβραχύνονται ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων κατά τόν ὑπό τῆς σχέσεως

$$\frac{f}{\omega} = E\,\frac{\lambda}{l}$$

ἐκφραζόμενον νόμον.

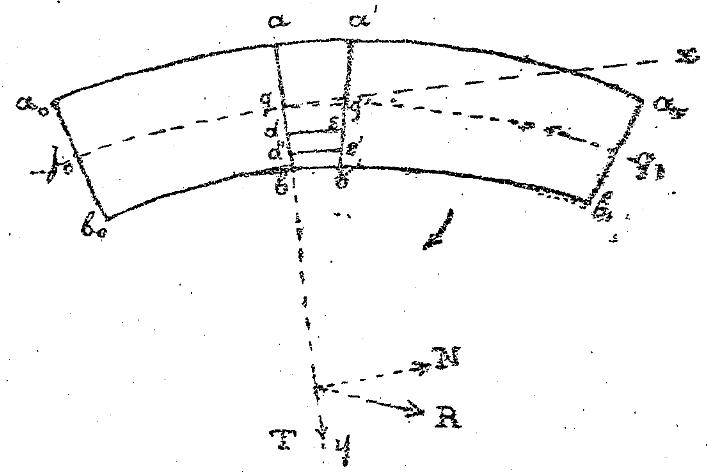
29.) Θεωρήσωμεν λοιπόν σῶμά τι, οἷον ὡρίσαμεν ἀνωτέρω, οὗτινος ἡ μορφή εἶναι $A_oB_oA_1B_1$ ἐν τῇ φυσικῇ του καταστάσει, ὅταν δηλ. οὐδεμία ἐξωτερική δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπ᾽ αὐτοῦ.

Εὐθύς ἅμα ὑποβληθῇ τοῦτο εἰς τήν ἐπενέργειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων F, ἡ μορφή του ἀλλοιοῦται καί μεταβάλλεται εἰς τήν $\alpha_o\beta_o\alpha_1\beta_1$ ἐκ τῆς μεταβολῆς δέ ταύτης, ἥν ὑπέστη ἡ μορφή τοῦ σώματος ἀνεπτύχθησαν ἐν αὐτῷ ἐσωτερικαί ἐλαστικαί δυνάμεις, τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν [ ] τό γεωμετρικόν ἄθροισμα, ὁσάκις αἱ ἀρχαί τῆς στατικῆς ἐπιτρέπουσι τόν προσδιορισμόν τοῦτον.



Ἀλλ᾽ ἐάν ἡ στατική μόνη δέν ἀρκεῖ διά τόν προσδιορισμόν τῶν ἐλαστικῶν τούτων δυνάμεων δέον νά προστρέξωμεν εἰς τήν ἐνυπάρχουσαν σχέσιν μεταξύ τῶν ἀναπτυχθεισῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων, καί τῶν ἀλλοιώσεων τῆς μορφῆς τοῦ σώματος εἰς ἅς ὀφείλονται αὗται.

Ἡ κεντρική ἴς μένει προφανῶς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας. Ἔστωσαν AB. $A'B'$ δύο παράλληλοι διαδοχικαί ὀρθαί τομαί τοῦ σώματος αἵτινες μετά τήν παραμόρφωσιν τοῦ σώματος κατέχουσι τάς θέσεις $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ ὧν τά ἐπίπεδα (πρώτη ὑπόθεσις) εἶναι κάθετα τῇ κεντρικῇ ἰνί j_oj_1, καί ἐν τῷ τμήματι $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ θεωρήσωμεν ἕτερον μικρότερον τμῆμα $de\,d'e'$ ὁριζόμενον ὑπό δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, ὧν αἱ διευθύνουσαι γραμμαί de, $d'e'$ εἶναι



παράλληλοι τῇ κεντρικῇ ἰνί, καί αἱ γενέτειραι κάθετοι τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας, καί ὑπό τῶν δύο ἐπιπέδων τμημάτων dd' καί ἐφ' ὧν τό ἐμβαδόν παριστῶμεν διά ω διαπερώντων τό σῶμα καθ' ὅλον τό πλάτος αὐτοῦ.

Ποία εἶναι ἡ κατά μονάδα ἐπιφανείας θλῖψις ν τῶν ἰνῶν ἐν τῇ τομῇ αβ;

Ἔστω λ ἡ ἐπιβράχυνσις (λ. μετά τοῦ ἀλγεβρικοῦ αὐτοῦ σημείου [ ] παριστᾷ τήν ἐπιβράχυνσιν ἢ ἐπιμήκυνσιν τῶν ἰνῶν], ἣν ὑπέστη ἐκ τινος οἱασδήποτε τοῦ στοιχειώδους ἐμβαδοῦ ω. ἐκ τῶν προηγουμένων (ὑπόθεσις τρίτη) γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἐπιβράχυνσις αὕτη συνδέεται πρός τήν θλῖψιν ν διά τῆς σχέσεως

$$\nu = E\frac{\lambda}{ds}$$

ἔνθα ds παριστᾷ τό στοιχειῶδες τόξον de ὅπερ ὑποθέτομεν ἴσον τῷ gg' (διότι αἱ ἐγκάρσιοι τομαί τοῦ σώματος ὑποτίθενται πολύ μακραί, παραβαλλόμεναι πρός τήν ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος αὐτοῦ).

ἡ ἐπί τοῦ ἐμβαδοῦ ω ἐξασκουμένη θλῖψις εἶναι λοιπόν

$$\nu\omega = E\omega\frac{\lambda}{ds}$$

1ον) Ἡ γεωμετρική συνισταμένη N τῶν ἐπί τῆς ὅλης τομῆς αβ ἐξασκουμένων ἐλαστικῶν θλίψεων οὖσα [ ] τῷ ἀθροίσματι τῶν προβολῶν τῶν στοιχειωδῶν θλίψεων νω ἐπί τῆς παρά τό σημεῖον g ἐφαπτομένης gx τῇ κεντρικῇ ἰνί $g_1 g_1$ ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι Σνω.

Ἡ κάμπτουσα ῥοπή ὡς πρός τό σημεῖον g ἰσοῦται [26] τῷ ἀθροίσματι τῶν ῥοπῶν τῶν ἐν τῇ τομῇ αβ ἐφηρμοσμένων ἐλαστικῶν δυνάμεων· ἀλλ' ἑκάστην τῶν δυνάμεων τούτων δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν εἰς δύο ἄλλας, τήν μέν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τομῆς αβ, τήν δέ παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ gx· ἡ γεωμετρική συνισταμένη τῶν πρώτων διέρχεται διά τοῦ σημείου g καί ἡ ῥοπή αὐτῆς ὡς πρός τό σημεῖον τοῦτο ἰσοῦται τῷ μηδενί· ἡ γεωμετρική συνισταμένη τῶν δευτέρων εἶναι Σνω, καί 2ον) ἡ ῥοπή αὐτῆς ὡς πρός τό σημεῖον g εἶναι Σνωκ ἔνθα κ παριστᾷ τό μῆκος dg, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ DG (δευτέρα ὑπόθεσις) ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις

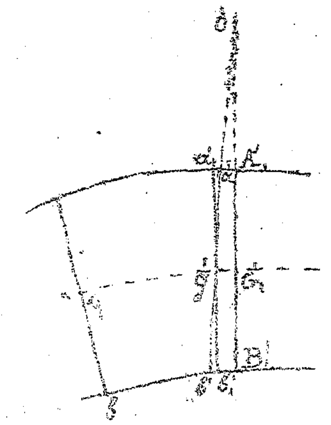
$$N = \Sigma\nu\omega = \Sigma E\omega\frac{\lambda}{ds} = \frac{1}{ds}\Sigma E\omega\lambda$$

καί

$$M = -\Sigma\nu\omega\kappa = -\Sigma E\omega\frac{\lambda}{ds}\kappa = -\frac{1}{ds}\Sigma E\omega\lambda\kappa$$

[τό σημεῖον − τῆς ῥοπῆς προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι λαμβάνομεν τήν ἐλαστικήν δύναμιν νω ὡς θλῖψιν, ἡ θετική φορά τῶν ῥοπῶν οὖσα ἡ διά τοῦ βέλους ἐμφαινομένη].

Ἀλλά δέν γνωρίζομεν ἀκόμη τήν τιμήν τῆς ἐπιβραχύνσεως λ ἣν ὑπέστησαν αἱ ἶνες τοῦ σώματος. Ταύτην δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ὡς ἑξῆς.



Ἔστω $A_1'B_1'$ ἡ θέσις ἣν θά κατεῖχεν ἡ τομή $α'β'$ ἐάν τό τμῆμα τοῦ σώματος $ABA'B'$ οὐδεμίαν ὑφίστατο ἀλλοίωσιν ἐν τῇ μορφῇ αὐτοῦ. ὡς ἐκ τῆς παραμορφώσεως τοῦ σώματος ἡ τομή $A'B_1'$ μετετοπίσθη καί κατέχει νῦν τήν θέσιν $α'β'$ καί δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τήν μετατόπισιν ταύτην εἰς δύο ἄλλας τήν μέν μεταβατικήν καί ἴσην τῇ $g'G_1'$ δι' ἧς μεταφέρομεν τήν τομήν $A_1'B_1'$ παραλλήλως ἑαυτῇ εἰς τήν θέσιν $α_1'β_1'$. Τήν δέ περιστροφικήν περί τό σημεῖον g' δι' ἧς μεταφέρομεν τήν τομήν $α_1'β_1'$ ἐν τῇ τελικῇ αὐτῆς θέσει $α'β'$.

Ἐάν παραστήσωμεν διά φ τήν γωνίαν $α_1'g'α'$ καί διά $λ_0$ τό μῆκος $G_1'g'$, ὅπερ παριστᾷ τήν ἐπιβράχυνσιν τῆς κεντρικῆς ἰνός gg' ἔχομεν προφανῶς

$$\lambda=\lambda_0+\varphi u$$

καί αἱ ἄνω σχέσεις μετατρέπονται εἰς

$$N ds=\Sigma E\omega\lambda=\Sigma E\omega(\lambda_0+\varphi u)=\lambda_0\Sigma E\omega+\varphi\Sigma E\omega u$$

καί

$$M ds=-\Sigma E\omega\lambda u=-\Sigma E\omega u(\lambda_0+\varphi u)=-\lambda_0\Sigma E\omega u-\varphi\Sigma E\omega u^2$$

ὁ συντελεστής τῆς ἐλαστικότητος E εἶναι σταθερός ἤ μεταβάλλεται ἀπό σημείου εἰς σημεῖον τῆς τομῆς αβ. ἀλλ' ἐάν ὑποθέσωμεν, ὅτι τό στοιχειῶδες ἐμβαδόν ω ἔχει ποσότητα ἴσην τῇ E, τό ἐμβαδόν Ω τῆς ὅλης τομῆς αβ ἔχει μᾶζαν ἴσην τῇ $\Sigma E\omega$, ὅθεν

ἀναπολοῦντες τάς ἰδιότητας τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, βλέπομεν, ὅτι $\Sigma E\omega$ $\Sigma E\omega u=0$ καί $\Sigma E\omega u^2$ παριστᾷ τήν ῥοπήν ἀδρανείας τῆς μάζης ὡς πρός ἄξονα διερχόμενον διά τοῦ σημείου g καθέτως τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας.

καί αἱ ἄνω σχέσεις μετασχηματίζονται εἰς τάς ἀκολούθους

$$N ds=\lambda_0\Sigma E\omega \qquad M ds=-\varphi\Sigma E\omega u^2$$

Ἐάν ὁ συντελεστής τῆς ἐλαστικότητος E εἶναι σταθερός ἐν ἑκάστῃ τομῇ ἔχομεν,

$$\Sigma E\omega=E\Sigma\omega=E\Omega \text{ καί } \Sigma E\omega u^2=E\Sigma\omega u^2=EI$$

ἔνθα I ἐμφαίνει τήν ῥοπήν ἀδρανείας τοῦ ἐμβαδοῦ Ω ὡς πρός τόν αὐτόν ἄξονα. αἱ ἄνω σχέσεις λαμβάνουσι τότε τήν μορφήν.

$$N ds=E\lambda_0\Omega \qquad M ds=-E\varphi I$$

$$\lambda_0=\frac{N ds}{E\Omega} \qquad \varphi=-\frac{M ds}{EI}$$

καί ἡ συστολή τῆς ἰνός de, ἥτις κεῖται εἰς ἀπόστασιν u τῆς

κεντρικῆς ἰνός εἶναι

$$\lambda=\lambda_0+\varphi u=\frac{N ds}{E\Omega}-\frac{M ds}{EI}u$$

καί ἡ ἐπί τῆς αὐτῆς ἰνός ἐξασκουμένη θλῖψις ν ἔχει ἔντασιν ἴσην μέ

$$\nu=E\frac{\lambda}{ds}=E\left[\frac{\lambda_0}{ds}+\varphi\frac{u}{ds}\right]=\frac{N}{\Omega}-\frac{M}{I}u$$

Οὐδετέρα ἴς. 30.) Αἱ ἶνες A_1B_1' καί $\alpha\beta'$ συναντῶνται παρά τό σημεῖον O καί δυνάμεθα προφανῶς νά μεταφέρωμεν τήν ἶνα $A_1'B_1'$ ἐπί τῆς $\alpha\beta'$ διά περιστροφῆς φ περί τό σημεῖον O ὥστε αἱ ἐπιβραχύνσεις τῶν ἰνῶν εἶναι ἀνάλογοι ταῖς ἀπό τοῦ σημείου O ἀποστάσεσιν αὐτοῦ d.

Ἐάν τό σημεῖον O εὑρίσκεται ἐντός τοῦ σώματος, καί ὁ γεωμετρικός τόπος αὐτοῦ συμπίπτει μέ ἶνά τινα τοῦ σώματος, οὔτε ἐπιβραχύνεται αὐτή, οὔτε ἐπιμηκύνεται. παρ' ἅπασι τοῖς σημείοις αὐτῆς ἡ ἐλαστική δύναμις ἰσοῦται τῷ μηδενί, καί τήν ἶνα ταύτην ὀνομάζομεν οὐδετέραν ἶνα.

Τήν ἀπόστασιν ταύτην d ὑπολογίζομεν θετικῶς κατά τήν φοράν τῶν θετικῶν y καί διά τήν κεντρικήν ἰδίᾳ ἶνα ἔχομεν

$$g'G_1'=\varphi\cdot og'=-\omega d \quad \text{ὅθεν } \lambda_0=-\varphi d$$

ἤ

$$d=-\frac{\lambda_0}{\varphi}=\frac{NI}{M\Omega}$$

Κέντρον θλίψεως ἤ κέντρον πιέσεως 31.) Κέντρον θλίψεως ἤ κέντρον πιέσεως ἐν τῇ τομῇ αβ, ὀνομάζομεν τό ἐν τῇ τομῇ ταύτῃ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης R τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων. ἔστω δ ἡ ἀπό τοῦ σημείου g ἀπόστασις αὐτοῦ αἱ ἐν τῇ τομῇ αβ καί καθέτως αὐτῇ συνιστῶσαι τῆς ἐλαστικῆς συνισταμένης εἶναι T καί N. ἡ ῥοπή τῆς δυνάμεως N

εἶναι

$$-N\delta$$

ἡ ῥοπή τῆς R ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι M

ὅθεν

$$-N\delta = M \quad \text{καί} \quad \delta = -\frac{M}{N}$$

Τὸ κέντρον τῆς θλίψεως συνδέεται λοιπὸν πρὸς τὴν οὐδετέραν ἴνα διὰ τῆς σχέσεως

$$d.\delta = -\frac{I}{\Omega} = -r^2$$

ἔνθα r παριστᾷ (rayon de gyration) τῆς τομῆς Ω ὡς πρὸς τὸν διὰ τοῦ σημείου g καθέτως τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας φερόμενον ἄξονα.

Διασκόπησις τῆς σχέσεως. 32.) Τὴν σχέσιν $\nu = \frac{N}{\Omega} - \frac{M}{I}u$

$\nu = E\frac{\lambda}{ds} = \frac{N}{\Omega} - \frac{M}{I}u$ ἥτις μᾶς δίδει τὴν τιμὴν τῆς θλίψεως τῆς εἰς ἀπόστασιν u ἀπὸ τῆς κεντρικῆς ἰνὸς εὑρισκομένης ἰνὸς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

$$\nu = -\frac{M}{I}\left[u - \frac{NI}{M\Omega}\right]$$

καὶ ἐὰν παραστήσωμεν διὰ u_o τὴν ἀπὸ τῆς οὐδετέρας ἰνὸς ἀπόστασιν τῆς κεντρικῆς ἰνὸς ἔχομεν [30].

$$u_o = \frac{NI}{M\Omega}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες μετατρέπομεν τὴν ἄνω σχέσιν εἰς

$$\nu = -\frac{M}{I}(u - u_o) = -\frac{M}{I}u'$$

ἔνθα u' ἐμφαίνει τὴν ἀπὸ τῆς οὐδετέρας ἰνὸς ἀπόστασιν τοῦ σημείου τῆς τομῆς ἔνθα ἡ θλῖψις εἶναι ν. καὶ βλέπομεν, ὅπερ ἤδη εἴπομεν ἀνωτέρω, ὅτι

1ον) <u>Ἡ πίεσις παρά τινι σημείῳ τῆς τομῆς εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπὸ τῆς οὐδετέρας ἰνὸς ἀποστάσεως αὐτοῦ.</u>

καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σῶμα εἶναι εὐθύγραμμος ὁριζοντίως [...]

τίως δοκὸς ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν κατακορύφων μόνον δυνάμεων N=o καὶ ἡ θλῖψις ν λαμβάνει τὴν τιμὴν

$$\nu = -\frac{M}{I}u \quad \text{καί} \quad M_o = 0$$

2ον) <u>Ἡ κεντρικὴ δηλ. ἴς οὐδεμίαν ὑφίσταται θλῖψιν καὶ συμπίπτει μὲ τὴν οὐδετέραν ἴνα.</u>

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ σῶμα ὑπόκειται εἰς <u>ἁπλῆν κάμψιν.</u>

Ἐὰν τοὐναντίον M=o ἐν πάσαις ταῖς τομαῖς

$$\nu = \frac{N}{\Omega}$$

<u>Αἱ ἐλαστικαὶ δυνάμεις εἶναι αἱ αὐταὶ</u> δι' ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τὸ σῶμα ὑπόκειται εἰς ἁπλῆν θλῖψιν ἢ extension.

3ον) Ἐὰν M><o. καὶ N><o δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ παραλείψωμεν τὸν ὅρον $\frac{N}{S}$ πρὸ τοῦ πολὺ μεγαλειτέρου ὅρου $\frac{Mu}{I}$. ἐὰν τῷ ὄντι N καὶ M εἶναι ἰσόβαθμα μεγέθη, καὶ λάβωμεν ὅρον παραβολῆς τὰς ἐγκαρσίας διαστάσεις τοῦ σώματος S εἶναι δευτεροβάθμιος, καὶ I τοῦ τετάρτου βαθμοῦ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν κατὰ προσέγγισιν

$$\nu - \frac{M}{I}u$$

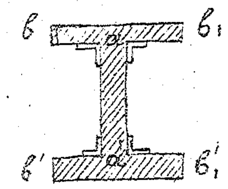
ἀλλ' ἐὰν N καὶ M δὲν εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, ἡ προσέγγισις αὕτη δὲν μᾶς ἐπιτρέπεται.

33.) Ποῖον εἶναι τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα τῆς τομῆς τοῦ σώματος τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλειτέραν ἀντοχὴν αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς Ω μᾶς εἶναι δεδομένον, ὡς καὶ αἱ τιμαὶ τῆς θλίψεως N καὶ τῆς καμπτούσης ῥοπῆς M. Δὲν δυνάμεθα ν' αὐξήσωμεν τὴν ὕλην ἐξ ἧς σύγκειται τὸ σῶμα, δυνάμεθα, ὅμως νὰ τροποποιήσωμεν τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα τῆς περιφερείας τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς, οὕτως ὥστε νὰ αὐξήσω-

μεν τήν ροπήν άδρανείας I, απομακρύνοντες όσω τό δυνατόν τήν ύλην από τού κέντρου της βαρύτητος G. διά της επαυξήσεως δέ τού I επέρχεται ή ελάττωσις τού $\frac{Mu}{I}$ καί κατά συνέπειαν καί ή της καθέτου θλίψεως ν.
αυτός είναι ο λόγος της μορφής εις διπλούν I ήν έχουσιν αί τομαί τών δοκών τάς οποίας μεταχειριζόμεθα εν ταίς οικοδομαίς.

Σημ. Εν τή περιπτώσει ταύτη, όταν δηλ. ή εγκαρσία τομή της δοκού έχει τήν έναντι μορφήν εις I. εν τω υπολογισμώ της ροπής της αδρανείας αυτής δέν λαμβάνομεν υπ' όψει τό τμήμα $\alpha\alpha'$. προκειμένου όμως περί της διατμητικής εντάσεως λαμβάνομεν υπ' όψει μόνον τό τμήμα $\alpha\alpha'$ καί παραλείπομεν τά $\beta\beta_1$, $\beta'\beta'_1$.



Στερεόν ίσης αντοχής. 34) Εάν ή κάμπτουσα ροπή είναι ίση τω μηδενί εν απάσαις ταίς τομαίς ή κάθετος θλίψις ν οιουδήποτε σημείου της αυτής τομής είναι σταθερά καί ίση τη $\frac{N}{\Omega}$. δυνάμεθα δέ νά διαθέσωμεν τό εμβαδόν Ω ούτως ώστε ή θλίψις $\nu = \frac{N}{\Omega}$ νά είναι ή αυτή καί ίση τη Γ δι' όλας τάς τομάς. προσδιορίζομεν ούτω στερεόν τι σώμα

$$\frac{N}{\Omega} = \Gamma$$

τοιούτον, ώστε εις όλα τά σημεία αυτού αναπτύσσεται ή αυτή ελαστική δύναμις· ή άλλως όλα τά σημεία αυτού κοπιάζουσιν εξ ίσου, τό στερεόν τούτο σώμα ονομάζομεν στερεόν ίσης αντοχής.

Αλλ' εάν ή κάμπτουσα ροπή M είναι διάφορος τού μηδενός ή κάθετος θλίψις ν δέν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλεται από σημείου εις σημείον της αυτής τομής αναλόγως της από της ουδετέρας ινός αποστάσεως αυτής u' ως εμφαίνει τούτο ή σχέσις

$$\nu = \frac{M}{I} u'$$

ώστε ή ύλη εξ ής σύγκειται τό σώμα πρέπει ν' αντέχη ουχί πλέον εις τήν κόπωσιν ήτις προέρχεται εκ της ελαστικής ταύτης θλίψεως ή τάσεως αλλ' εις τήν μεγαλειτέραν τιμήν αυτής. δέον λοιπόν νά θεωρήσωμεν διά τόν υπολογισμόν τών διαστάσεων τού σώματος τήν μεγαλειτέραν τιμήν της ν αντιστοιχούσαν εις τήν μεγαλειτέραν τιμήν τού u'. νά λάβωμεν δηλ. τήν από της ουδετέρας ινός απόστασιν τών σημείων A καί B καί αντικαταστήσωμεν τό u' διά της μεγαλειτέρας τών δύο τούτων αποστάσεων· έστω U' ή τιμή ταύτης καί Γ ή μεγαλειτέρα ελαστική θλίψις εις ήν προτιθέμεθα νά υποβάλωμεν τήν ύλην εξ ής σύγκειται τό σώμα. ή διατήρησις καί ευστάθεια της οικοδομής εις ήν ανήκει τό σώμα μας επιβάλλει τήν συνθήκην,

$$-\frac{M}{I}\,\mathcal{U}' \leq \Gamma$$

δυνάμεθα ἤ μεταβαίνοντες ἀπό τομῆς εἰς τομήν νά παραδεχθῶμεν ἴζωμεν τάς περιβαλλούσας ταύτας περιφερείας, μεταβάλλοντες τήν ῥοπήν ἀδρανείας αὐτῆς I, οὕτως ὥστε, ἡ σχετική τῇ τομῇ ταύτῃ μεγίστη ἐλαστική θλῖψις $-\frac{M}{I}\mathcal{U}'$ νά εἶναι οἵα καί ἐν τῇ προηγουμένῃ τομῇ, καί προσδιορίζομεν οὕτω στερεόν τι σῶμα, ὅπερ καλοῦμεν ἐπίσης σῶμα ἴσης ἀντοχῆς, ἄν καί τοῦτο δέν εἶναι καθ' ὅλα ἴσης ἀντοχῆς ὅπως τό προηγούμενον. Ἐκεῖ τῷ ὄντι ὅλα τά σημεῖα τοῦ σώματος ὑφίστανται τήν αὐτήν ἐλαστικήν θλῖψιν, ἐν ᾧ ἐνταῦθα, μόνον τά σημεῖα μιᾶς γραμμῆς ὑφίστανται τήν αὐτήν θλῖψιν. τά λοιπά σημεῖα τοῦ σώματος ὑφίστανται θλῖψιν ἐλάσσονα ἐκείνης εἰς ἥν δύνανται ν' ἀνθέξωσι καί τό σῶμα δέν εἶναι κυριολεκτικῶς ἴσης ἀντοχῆς.

Σχέσις συνδέουσα τήν ἠλλοιωμένην πρός τήν ἀρχικήν μορφήν τοῦ σώματος.

35.) Ἔστω $A_0B_0A_1B_1$ τό σῶμα ἐν τῇ ἀρχικῇ αὐτοῦ μορφῇ καί AB, $A'B'$ δύο παραπλήσιοι διαδοχικαί καί ὀρθαί τομαί. $\alpha_0\,\beta_0\,\alpha_1\,\beta_1$ εἶναι τό σῶμα ἐν τῇ ἠλλοιωμένῃ αὐτοῦ μορφῇ καί $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ αἱ τομαί AB καί $A'B'$.

Ἐάν τό τμῆμα $ABA'B'$ τοῦ σώματος δέν μετέβαλλε μορφήν ἡ τομή $A'B'$ θά συνέπιπτεν ἐν τῷ σώματι $\alpha_0\,\beta_0\,\alpha_1\beta_1$ μέ τήν τομήν $A_1'B_1'$.

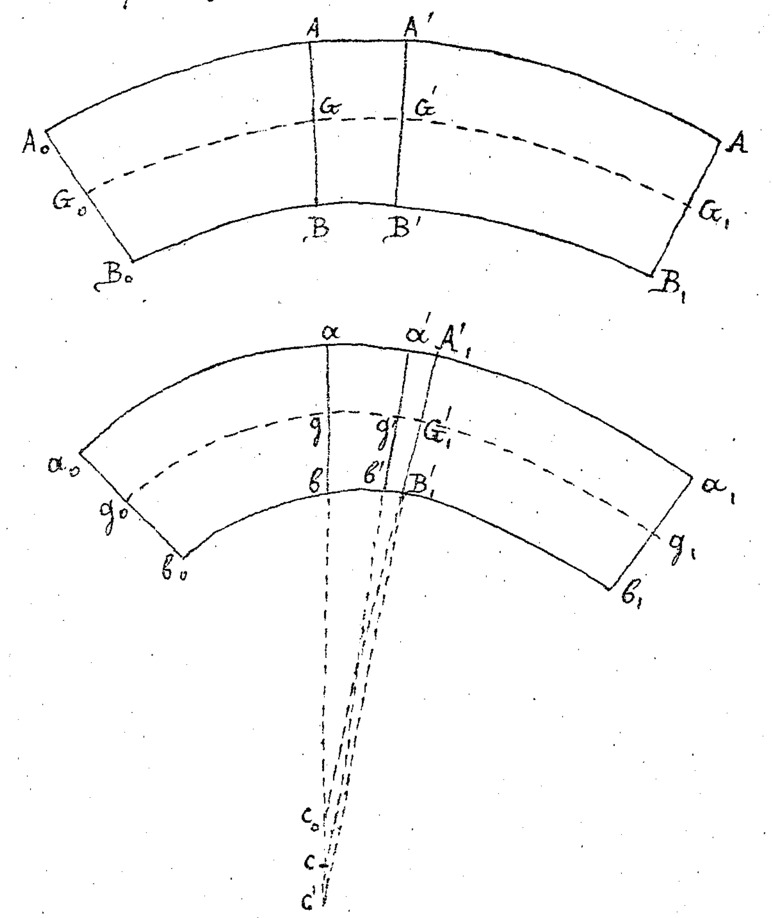
Ὥστε τά ἐν τῷ σχήματι σημεῖα c_0 καί c εἶναι τά κέντρα τῆς καμπυλότητος τῆς ἀρχικῆς G_0G_1 καί τῆς ἠλλοιωμένης g_0g_1 μορφῆς τῆς κεντρικῆς ἰνός, παρά τοῖς σημείοις G καί g.

Ἐάν ἀπό τοῦ σημείου G' φέρωμεν τήν $G_1'c'$ παράλληλον τῇ $\alpha'\beta'$ ἔχομεν

$$c_0\widehat{B_1'}c' = \varphi$$

$$g\widehat{c_0}G_1' = g\widehat{c'}G_1' - \varphi$$

$$-\widehat{\varphi} = \widehat{c_0} - \widehat{c'}$$



$gc_0 = \rho_0$ (ἀκτίς καμπυλότητος τῆς G_0G_1 παρά τό σημεῖον) $gG_1' = GG' = ds = \rho_0 \widehat{c_0} = gc'\widehat{c'}$

ὥστε

$$-\varphi = \frac{ds}{\rho_0} - \frac{ds}{gc'}$$

ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $gG_1'c'$ καί $gg'c$ ἐξάγομεν

$$\frac{gc'}{gc} = \frac{gG_1'}{gg'} = \frac{ds}{ds - \lambda_0}$$

καί ἐπειδή $gc = \rho$

$$\frac{1}{gc'} = \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{\lambda_0}{ds}\right]$$

καί

$$-\frac{\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{gc'} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\lambda_0}{ds}\right)$$

ἀλλά

$$[29] \qquad \frac{\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \qquad \frac{\lambda_0}{ds} = \frac{N}{E\Omega}$$ καί ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$-\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{N}{E\Omega}\right] - \frac{1}{\rho_0}$$

Ἐάν ἡ κεντρική ἴς οὐδεμίαν ὑφίσταται θλῖψιν $N=0$ καί ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{M}{EI}$$

κατά προσέγγισιν δέ δυνάμεθα νά παραδεχθῶμεν τήν σχέσιν ταύτην καί ἐν ᾗ περιπτώσει $N \gtrless 0$ διότι E εἶναι πολύ μέγα παραβαλλόμενον πρός τήν N, καί $\frac{N}{E\Omega}$ δύναται νά παραληφθῇ παραβαλλόμενον πρός τήν μονάδα.

Οὐδεμίαν ἐκάμαμεν ὑπόθεσιν ἐπί τοῦ μεγέθους τῶν ἀλλοιώσεών τοῦ σώματος.

Ἁπλῆ κάμψις

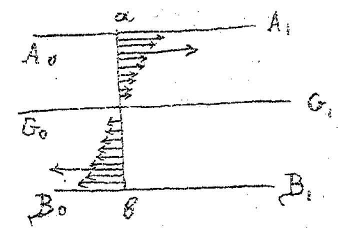
36.) Ἐάν ἡ ἀρχική κεντρική ἴς εἶναι κυκλική ρ_0 = σταθερῷ.

Ἐάν ἡ ἀρχική κεντρική ἴς εἶναι εὐθύγραμμος $\frac{1}{\rho_0}=0$. ἐάν δέ καί τά ὑπό τοῦ σώματος φορτία ἐπενεργοῦσι καθέτως τῇ κεντρικῇ ἰνί $N=0$ ἡ κάμψις ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καλεῖται ἁπλῆ κάμψις καί ἡ ἄνω σχέσις ἁπλοποιεῖται ὡς ἑξῆς.

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M}{EI}$$

ἀλλά

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



Ἐάν δέ ὑποθέσωμεν ἀρκούντως μικράς τάς ἀλλοιώσεις ἅς ὑφίσταται τό σῶμα, οὕτως ὥστε νά παραλείψωμεν τό τετράγωνον τοῦ $\frac{dy}{dx}$ (συντελεστής τῆς κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης ἐπί τῆς κεντρικῆς ἰνός παρά τό σημεῖον g) ἔχομεν ἁπλῶς

$$\rho=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

καί ἡ ἄνω σχέσις μετατρέπεται εἰς

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$$

ἥτις ὁλοκληρουμένη δίς μᾶς δίδει τήν ἐξίσωσιν τῆς κεντρικῆς ἰνός.

Ἡ κατά μονάδα μήκους ἐπιμήκυνσις τῶν ἰνῶν εἰς ἀπόστασιν u ἀπό τῆς κεντρικῆς ἰνός εἶναι [29] ἐνταῦθα.

$$\frac{\lambda}{ds}=\frac{\varphi u}{ds}$$

καί ἐπειδή [35]

$$\frac{\varphi}{ds}=\frac{1}{\rho}$$

ἡ ἐπιμήκυνσις

$$\frac{\lambda}{ds}=\frac{u}{\rho}$$

Διατμητική ἔντασις. 37.) Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ κατά μῆκος θλῖψις N παράγει μεταξύ δύο διαδοχικῶν τομῶν αβ καί α'β' αἵτινες ἀπέχουσιν ἀλλήλων κατά ds, σχετικήν κίνησιν

$$\lambda_1=-\frac{1}{E}\frac{N}{\Omega}ds$$

κατά τήν φοράν τοῦ τόξου ds.

Διά τούς αὐτούς λόγους καί ἡ διατμητική ἔντασις T παράγει σχετικήν κίνησιν Ξ ὀλίσθησιν τῆς μιᾶς τῶν τομῶν ὡς πρός τήν ἄλλην καθέτως τῇ κεντρικῇ ἰνί τῆς ὁποίας τό μέγεθος εἶναι

$$\frac{1}{\alpha E}\cdot\frac{T}{\Omega}ds$$

ἔνθα αΕ ἐμφαίνει τόν ἐγκάρσιον συντελεστήν τῆς ἐλαστικότητος τοῦ σώματος. Ἐάν τοῦτο εἶναι ἐντελῶς ὁμογενές (ἔχει δηλ. τήν αὐτήν σύστασιν καθ' ὅλας τάς διευθύνσεις περί οἷον δήποτε σημεῖον αὐτοῦ) $\alpha=1$ διά τά σώματα ἅτινα μεταχειριζόμεθα ἐν ταῖς οἰκοδομαῖς α δέν διαφέρει πολύ τοῦ $\frac{1}{3}$.

38.) Ἄς θεωρήσωμεν νῦν πρίσμα ὑποκείμενον εἰς κατακορύφους μόνον δυνάμεις.

Ἴδωμεν τίνι τρόπῳ δύναται νά ἐπέλθῃ ἡ θραῦσις τοῦ πρίσματος. Τήν ἐπιφάνειαν καθ' ἥν χωρίζεται τό πρίσμα εἰς δύο μέρη, δυνάμεθα νά φαντασθῶμεν παράλληλον τῷ ἄξονι αὐτοῦ καί τότε ἡ θραῦσις ἐπέρχεται ἐξ διασχίσεως τῶν ἰνῶν. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ χωρισμοῦ εἶναι κάθετος τῷ ἄξονι ἡ θραῦσις ἐπέρχεται ἐξ ἀποστάσεως τῶν ἰνῶν καί καλοῦμεν αὐτήν θραῦσιν ἐξ ἀποστάσεως· ἐάν ἐπέρχεται αὕτη ἐκ τῆς ἐπιμηκύνσεως τῶν ἰνῶν διατμητικήν θραῦσιν ἤ θραῦσιν ἐκ ψαλιδισμοῦ, ἐάν προέρχεται αὕτη ἐκ τῶν ἐγκαρσίων διατμητικῶν δυνάμεων καί θραῦσιν ἐκ καταθλίψεως· ἐάν προέρχεται αὕτη ἐκ τῆς ἐπηρείας καταθλιπτικῶν δυνάμεων.

1ον) Θραῦσις ἐξ ἀποσπάσεως ἤ ἐκ καταθλίψεως. Αἱ παράγουσαι τήν ἐξ ἀποσπάσεως θραῦσιν δυνάμεις εἶναι ἐκεῖναι εἰς ἅς ὀφείλεται ἡ ἐπιμήκυνσις τῶν ἰνῶν τοῦ πρίσματος. μετρεῖται δέ ἡ κατά μονάδα ἐπιφανείας ἔντασις αὐτῶν διά τοῦ γινομένου

$$\nu = -\frac{M}{I}u \quad (\text{διότι } N=0)$$

οὗτινος ἡ τιμή δέν πρέπει νά ὑπερβῇ τό φορτίον τῆς ἀσφαλείας εἰς ὅ ὑποβάλλεται τό σῶμα. ἡ μᾶλλον κεκμηκυῖα ἴς ἀντιστοιχεῖ τῇ μεγίστῃ τιμῇ U τοῦ u ὥστε αἱ μᾶλλον κεκμηκυῖαι ἶνες εἶναι ἡ ἀνωτάτη καί κατωτάτη, ἡ κόπωσις δέ τούτων μετρεῖται διά τῆς συναρτήσεως $\frac{M}{I}U$

Καί ταῦτα ἐν ὅσῳ θεωροῦμεν τήν αὐτήν τομήν. ἴδωμεν νῦν ποία εἶναι ἡ μᾶλλον κεκμηκυῖα τομή.

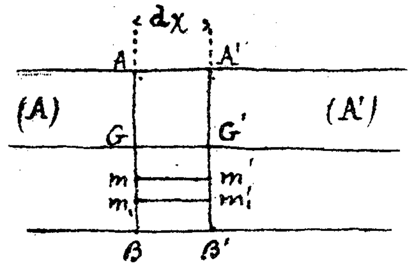
Ἡ ἐκ καταθλίψεως θραῦσις εἶναι ἀνάλογος τῇ θραύσει ἐξ ἀποσπάσεως ἀλλά τό φορτίον τῆς ἀσφαλείας διαφέρει.

2ον) Θραῦσις ἐξ διασχίσεως ἤ κατά μῆκος ὀλίσθησις τῶν ἰνῶν. 39.) Ὡς αἰτίαν τῆς θραύσεως ἐκ διασχίσεως δυνάμεθα νά ἐκλάβωμεν τήν ἑξῆς· ἐν τῇ φυσικῇ καταστάσει τοῦ σώματος, καθ' ἥν οὐδεμία ἐξωτερική δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ, αἱ ἶνες αὐτοῦ εὑρίσκονται ὅλαι ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας καί συγκρατοῦνται πρός ἀλλήλας διά τῆς φυσικῆς αὐτῶν adhereme.

Ἐάν ὅμως ἐπενεργήσωσιν ἐξωτερικαί δυνάμεις ἐπί τοῦ σώματος, αἱ ἶνες αὐτοῦ δέν εὑρίσκονται πλέον ὑπό τάς αὐ-

τάς συνθήκας, ἐνδέχεται λ.χ. τινές τούτων νά εἶναι πλέον τεταμέναι τῶν ἑτέρων καί ἐκ τῆς διαφορᾶς ταύτης νά ἐπέλθῃ ἐξασθένησίς τις τῆς συγκρατούσης τάς ἶνας adhereme καί ἡ διάσχισις αὐτῶν.

Οὕτω λ.χ. ἐάν θεωρήσωμεν δύο παραλλήλους τομάς AB καί A'B' ἀπεχούσας ἀλλήλων κατά dx, καί τό μεταξύ τῶν καθέτων τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας ἐπιπέδων mm' καί m_1m_1' καί τῆς προσθίας καί ὀπισθίας ἕδρας τοῦ πρίσματος ἐμπεριεχόμενον στοιχειῶδες πρίσμα ἡ ἐν τῇ τομῇ AB ἤ A'B' ἕδρα τοῦ στοιχειώδους τούτου πρίσματος ἔχει ἐμβαδόν



$$\nu d\zeta$$

ἔνθα ν ἐμφαίνει τήν ἐγκαρσίαν διάστασιν τοῦ πρίσματος παρά τό σημεῖον m καί $d\zeta = mm_1$. τό μῆκος Gm παριστῶμεν διά ζ. αἱ ἐκ τῆς ἐπενεργείας τοῦ μέρους (A) τοῦ πρίσματος ἐπί τοῦ στοιχειώδους ἐμβαδοῦ $\nu d\zeta$ ἀναπτυσσόμεναι ἐλαστικαί δυνάμεις ἔχουσιν ἔντασιν ἴσην [ ] τῇ

$$E\frac{\zeta \nu d\zeta}{\rho}$$

καί ἐπειδή $\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I}$ ἡ προηγουμένη ἔκφρασις μετατρέπεται εἰς

$$\frac{M\nu\zeta d\zeta}{I}$$

αἱ ἐκ τῆς ἐπενεργείας τοῦ μέρους (A') τοῦ πρίσματος ἐπί τοῦ στοιχειώδους ἐμβαδοῦ $m'm_1' = \nu d\zeta$ ἀναπτυσσόμεναι ἐλαστικαί δυνάμεις ἔχουσιν ἔντασιν ἴσην τῇ

$$-\frac{M}{I}\nu\zeta d\zeta - \frac{d}{dx}\left[\frac{M}{I}\nu\zeta d\zeta\right]dx$$

Ἡ τελική συνισταμένη ὑπό τήν ἐπενέργειαν τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τό στοιχειῶδες πρίσμα $mm_1m'm_1'$ εἶναι λοιπόν

$$\frac{M}{I}v\zeta d\zeta - \frac{M}{I}v\zeta d\zeta - \frac{d}{dx}\left[\frac{M}{I}v\zeta d\zeta\right]dx = -\frac{d}{dx}\left[\frac{M}{I}v\zeta d\zeta\right]dx$$

(1) $$= -\frac{\zeta v}{I}\frac{dM}{dx}d\zeta . dx$$

ἥτις παριστᾷ καί τήν πρός ἀποκόλλησιν τάσιν τοῦ ταμαχίου $mm'm_1m_1'$. Ἐάν ἤδη παραστήσωμεν διά E τήν ἀντοχήν τῶν ἰνῶν πρός τήν κατά μῆκος ὀλίσθησιν εἰς e ἀπόστασιν $Gm = \zeta$ ἀπό τῆς κεντρικῆς ἰνός, ἡ ἀντοχή τήν ὁποίαν ἀντιτάσσει εἰς τήν κατά μῆκος ὀλίσθησιν τό ἐμβαδόν $mm'.v = v.dx$ ἔχει ἔντασιν ἴσην τῇ

$$-E.vdx$$

ἡ ἔντασις τῆς αὐτῆς ἀντοχῆς ἐν τῇ ἕδρᾳ. $m_1m_1'.v = v.dx$ εἶναι

$$\varepsilon.vdx + \frac{d}{d\zeta}(\varepsilon.vdx)d\zeta$$

καί ἡ συνισταμένη αὐτῶν

$$-\varepsilon.vdx + \varepsilon.vdx + \frac{d}{d\zeta}(\varepsilon.vdx)d = \frac{d}{d\zeta}(\varepsilon.vdx)d\zeta = \frac{d(\varepsilon v)}{d\zeta}dx\,d\zeta$$

αὐτή δέ ἡ ἀντοχή ἰσορροπεῖ τήν ἄνω ὑπολογισθεῖσαν ἐλαστικήν δύναμιν (1).

καί ἔχομεν

$$\frac{d(\varepsilon v)}{d\zeta} - \frac{\zeta v}{I}\frac{dM}{d} = 0$$

ἤ

$$\frac{d(\varepsilon v)}{\cancel{d\zeta}} = \frac{\zeta v}{I}\frac{dM}{dx} = -\frac{\zeta v}{I}T$$

ἔνθα T ἐμφαίνει τήν διατμητικήν ἔντασιν ἐν τῇ τομῇ AB ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως ἐξάγομεν

$$d(\varepsilon v) = -\frac{T}{I}v\zeta d\zeta$$

καί ὁλοκληροῦντες

$$\varepsilon v = -\frac{T}{I}\int v\zeta d\zeta + C$$

παρά τοῖς σημείοις A καί B $\varepsilon = 0$ ὥστε ἐάν $GA = GB = u$,

ἔχομεν $$\varepsilon v = \frac{T}{I}\int_{\zeta}^{u} v\zeta d\zeta$$

καί ὑποθέτοντες v σταθερόν ἔχομεν

$$\varepsilon v = \frac{Tv}{I}\int_{\zeta}^{u}\zeta d\zeta = \frac{Tv}{2I}\left[u^2 - \zeta^2\right] \text{ καί } \varepsilon = \frac{T}{2I}\left[u^2 - \zeta^2\right]$$

ἐάν ἡ τομή εἶναι κυκλική ἔχομεν $v = 2\sqrt{u^2 - \zeta^2}$

καί $$\varepsilon = \frac{2}{3}\frac{T}{I}(u^2 - \zeta^2)^{3/2}$$

Θραῦσις ἐκ διατμήσεως ἢ ψαλιδισμοῦ

40.) Ἡ παράγουσα τήν θραῦσιν ἐκ διατμήσεως ἤ ψαλιδισμοῦ δύναμις εἶναι ἡ T ἥτις ἐνταῦθα εἶναι ἴση τῇ F.

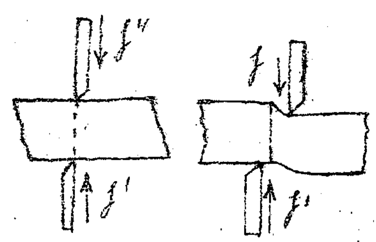
Ἔστω ἀφ' ἑτέρου τ ὁ συντελεστής ὅστις μετρεῖ τήν κατά μονάδα ἐπιφανείας ἀντοχήν τῆς ὕλης εἰς τήν διατμητικήν ταύτην δύναμιν, ἡ ἀντοχή τοῦ στοιχειώδους πρίσματος $d\omega$ εἶναι $\tau d\omega$, καί ἡ τοῦ ὅλου πρίσματος $\int \tau d\omega = \Omega t$ ἔνθα t παριστᾷ τήν μέσην τιμήν τοῦ συντελεστοῦ τ.

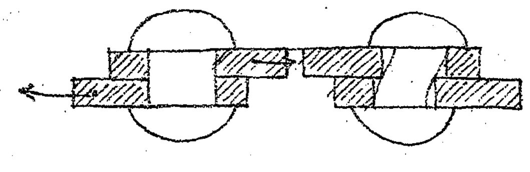
Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τῆς ἰσορροπίας [ ] εἶναι λοιπόν

$$\Sigma F = \Omega t \text{ καί } t = \frac{\Sigma F}{\Omega}$$

καί βλέπομεν, ὅτι t δέν μεταβάλλεται ἀπό μιᾶς εἰς ἑτέραν ἐγκαρσίαν τομήν, ἐάν δέν συναντήσωμεν ἐν τῷ μεταξύ δύναμίν τινα F ἥτις ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ΣF καί ἐπιφέρει τήν ἀπότομον μεταβολήν αὐτοῦ. [ ].

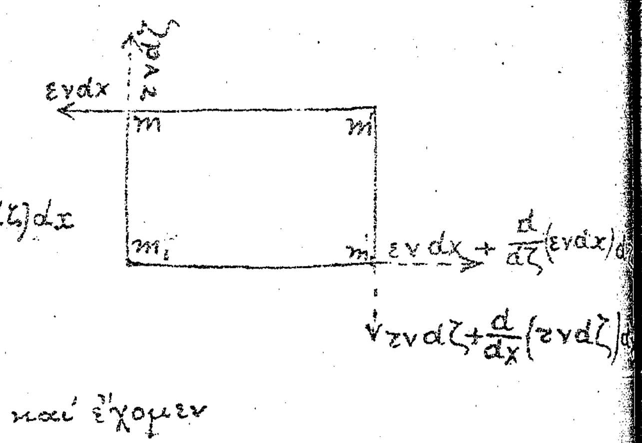
Τοὐναντίον εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ῥοπή τῆς κάμψεως μεταβάλλεται ἐν μέρει συνεχῶς ἀπό τομῆς εἰς τομήν καί οὐχί ἀποτόμως.





41.) Ἔστω τ ἡ ἀντοχή ἥν ἀντιτάσσει ἡ ὕλη πρός τήν ἐγκαρσίαν ὀλίσθησιν παρά τό σημεῖον m. αἱ ἀναπτυχθεῖσαι ἐν ταῖς τομαῖς mm_1 καί mm' ἐλαστικαί ἐντάσεις εἶναι,

$$\tau \nu d\zeta \quad \text{καί} \quad \varepsilon \nu dx$$



αἱ ἐν ταῖς τομαῖς m, m'_1 καί $m' m'_1$ ἀναπτυχθεῖσαι ἐλαστικαί ἐντάσεις εἰσί
$-\varepsilon\nu dx - \frac{d}{d\zeta}(\varepsilon\nu dx)d\zeta$ καί $-\tau\nu d\zeta - \frac{d}{dx}(\tau\nu d\zeta)dx$
αἱ δυνάμεις αὗται ἰσορροποῦσι καί τό ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν αὐτῶν ὡς πρός τό m'_1 μηδενίζεται καί ἔχομεν

$$\varepsilon\nu dx . d\zeta - \tau\nu d\zeta . dx = 0$$

ὅθεν

$$\varepsilon = \tau$$

Ἀνακεφαλαίωσις τῶν σχετικῶν τῇ κάμψει τύπων.

42.)

$$T = -\frac{dM}{ds}$$

$$\nu = E\frac{\lambda}{ds} = \frac{N}{\Omega} - \frac{M}{I}u$$

$$N = \Sigma \nu\omega = \frac{\lambda_0}{ds}\Sigma E\omega = \frac{\lambda_0}{ds}E\Omega$$

$$M = \Sigma \nu\omega . u = -\frac{\varphi}{ds}\Sigma E\omega u^2 = -\frac{\varphi}{ds}EI$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varphi . u = \left[\frac{N}{E\Omega} - \frac{Mu}{EI}\right]ds$$

$$\delta = -\frac{M}{N}$$

$$d = \frac{NI}{M\Omega}$$

στερεά ἴσης ἀντιστάσεως $\frac{M}{I}u' = T'$

$$u' = u + \frac{NI}{M\Omega}$$

ἁπλῆ κάμψις $\quad T = -\frac{dM}{dx}$

$$N = 0$$

$$\lambda_0 = 0$$

$$\lambda = \frac{u}{\rho}ds$$

$$-M = +EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ἐφαρμογαί

ἐπί τῶν εὐθυγράμμων πρισματικῶν δοκῶν

43.) Τά διάφορα τεμάχια, τά ὁποῖα μεταχειριζόμεθα ἐν ταῖς οἰκοδομαῖς, δέν εἶναι ἐλεύθερα ἀλλά στηρίζονται τά μέν ἐπί τῶν δέ καί ἐκ τῶν στηριγμάτων τούτων προκύπτουσιν ἀντιδράσεις, τάς ὁποίας δέον νά προσδιορίσωμεν καί συμπεριλάβωμεν ἐν ταῖς ἐπί τοῦ σώματος ἐπενεργούσαις ἐξωτερικαῖς δυνάμεσιν.

Ἁπλᾶ στηρίγματα. Σῶμά τι ἐρείδεται ἐπί ἁπλοῦ στηρίγματος, στηρίζεται ἁπλῶς δι' ἑνός σημείου α τῆς κεντρικῆς ἰνός αὐτοῦ, ὅταν τό σημεῖον τοῦτο ἀναγκάζεται νά μένῃ διαρκῶς ἐπί τινος προσδιωρισμένης σταθερᾶς γραμμῆς. Κατά συνέπειαν ἐάν ἐφαρμόσωμεν ἐπί τοῦ σώματος δύναμιν ἴσην καί ἀνθέτετον τῆς πιέσεως ἥν ἐξασκεῖ τοῦτο ἐπί τῆς σταθερᾶς γραμμῆς, καί ἥτις εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς, δύναμιν δηλ. ἴσην τῆς ἀντιδράσεως, ἥν ἐξασκεῖ ἡ καμπύλη ἐπί τοῦ σώματος παρά τό σημεῖον α, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν αὐτό ὡς ἐλεύθερον ὑπό τήν ἐπήρειαν ὡρισμένου ἀριθμοῦ δυνάμεων.

Στηρίγματα σύμπαγῆ. Ἐάν τό σημεῖον α τῆς κεντρικῆς ἰνός ἀναγκάζεται νά μένῃ διαρκῶς ἐπί ὡρισμένης σταθερᾶς γραμμῆς, καί ἡ διά τοῦ σημείου α διερχομένη κάθετος τομή, τήν ὁποίαν ὑπεθέσαμεν [ ] ὡς ἀμετατρέπτως στερεάν, δέν δύναται νά ὑποστῇ περιστροφικήν τινα κίνησιν, λέγωμεν, ὅτι τό σῶμα εἶναι ἐμπεπηγμένον (encastré) παρά τό σημεῖον α.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τοῦ ἐμπηγμοῦ (encastrement) δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τό σῶμα ὡς ἐλεύθερον, ἐάν ἐφαρμόσωμεν παρά τό σημεῖον α δύναμιν κάθετον τῇ σταθερᾷ καμπύλῃ, ἴσην καί αντίθετον τῆς ἀντιδράσεως, ἥν ἐξασκεῖ αὕτη ἐπί τοῦ σώματος, καί ἐν τῇ διά τοῦ α καθέτῳ τομῇ, ζεῦγος δυνάμεων δυνάμενον νά ἐμποδίσῃ τήν περιστροφικήν κίνησιν τῆς τομῆς, ὅπως ἐμποδίζει ταύτην καί τό συμπαγές στήριγμα.

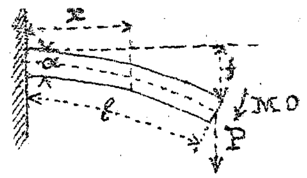
Καί ἐκ τούτων εἰκάζομεν ἀμέσως, ὅτι ἐάν σῶμά τι στηρίζεται ἁπλῶς διά τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων αὐτοῦ ἐπί σταθερᾶς καμπύλης, ἡ κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ ταύτῃ εἶναι μηδέν.

Τῷ ὄντι ἡ κάμπτουσα αὕτη ῥοπή εἶναι ἴση [ ] μέ τήν ῥοπήν τῆς ἀντιδράσεως ἥν ἐξασκεῖ ἡ καμπύλη ἐπί τοῦ σημείου α τοῦ σώματος ὡς πρός τό σημεῖον τοῦτο καί ἐπειδή ἡ ἀντίδρασις αὕτη διέρχεται διά τοῦ σημείου α ἡ ῥοπή αὐτῆς ὡς πρός τό σημεῖον τοῦτο εἶναι ἴση τῷ μηδενί.

Ἀλλ' ἐάν τό σῶμα εἶναι ἐμπεπηγμένον, ἡ κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ ἐμπεπηγμένῃ τομῇ δέν μηδενίζεται, ἀλλ' εἶναι ἴση μέ τήν ῥοπήν τοῦ ζεύγους τό ὁποῖον ἐφαρμόζομεν ἐπί τοῦ σώματος διά νά καταστήσωμεν αὐτό ἐλεύθερον.

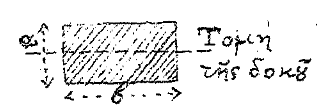
Παραδείγματα

44) Ἑτεροπαγής δοκός φέρουσα κατακόρυφον φορτίον P εἰς τό ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτῆς.



1.) προσδιορισμός τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας I

$$I = 2\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \beta\, du \cdot u^2 = \frac{\beta\alpha^3}{12} = \frac{\Omega\alpha^2}{12}$$

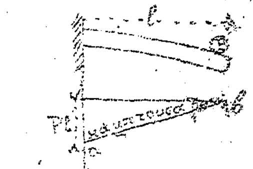


2.) Κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ x

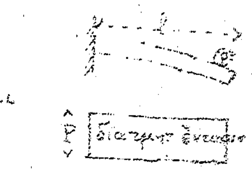
$$M = P(l-x) = EI\frac{d^2y}{dx^2} = E\frac{\Omega\alpha^2}{12}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ἡ ἐξίσωσις $M = P(l-x)$ ἐν M θεωρεῖται ὡς τεταγμένη παριστᾷ

τήν εὐθεῖαν γραμμήν αβ καί τό ἔναντι σχῆμα δεικνύει τίνι τρόπῳ μεταβάλλεται ἡ κάμπτουσα ῥοπή ἀπό τομῆς εἰς τομήν.



Ἡ μεγίστη τιμή τοῦ M ἀντιστοιχεῖ τῇ τιμῇ $x = 0$ καί Pl. ἡ τρέχουσα τόν μεγαλείτερον κίνδυνον τομή εἶναι λοιπόν ἡ ἐμπεπηγμένη τομή.

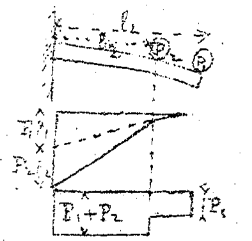


3.) Διατμητική ἔντασις. Ἡ διατμητική ἔντασις εἶναι

$$T = -\frac{dM}{dx} = P$$

σταθερά δηλ. ἀπό τοῦ ἑνός μέχρι τοῦ ἑτέρου ἄκρου τῆς ῥάβδου καί ἐάν παραστήσωμεν αὐτήν γραφικῶς ἔχομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἐάν δέ ἔχωμεν δύο μεμονωμένα φορτία ἀντί ἑνός θά εἴχομεν τό ἔναντι διάγραμμα διά τήν μεταβολήν τῆς καμπτούσης ῥοπῆς καί τῆς διατμητικῆς ἐντάσεως.



4.) Ἐλαστική καμπύλη. Ὁλοκληροῦντες τήν σχέσιν $EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x)$ καί παρατηροῦντες ὅτι διά $x=0$ ἔχομεν $y=0$ καί $\frac{dy}{dx} = 0$ εὑρίσκομεν τήν ἐξίσωσιν

$$EIy = \frac{Px^2}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right)$$

καί βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι y δηλ. ἡ κάμψις, ἥν ὑφίσταται τό πρίσμα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας I τῆς τομῆς αὐτοῦ, ἤ τοῦ α^2 τοῦ τετραγώνου δηλ. τῆς διαστάσεως α τοῦ πρίσματος, ἥτις ἐργάζεται ὀρθία.

5.) Στερεόν ἴσης ἀντιστάσεως. Τήν μεγίστην ἀντοχήν R τοῦ πρίσματος εἰς τήν κάμψιν εὑρίσκομεν [ ] διά τῆς σχέσεως $R = \frac{u}{I}P(l-x)$ ἔνθα $u = \frac{\alpha}{2}$.

ἀντικαθιστῶντες u καί I ἔχομεν

$$R = \frac{6}{\Omega\alpha}P(l-x)$$

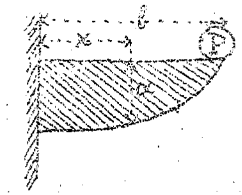
ὥστε R εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς τοῦ πρίσματος, ἥτις ἐργάζεται ὀρθία.

Ἡ τιμή τοῦ R δύναται νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς

$$R = \frac{6}{\alpha^2 \beta} P(l-x)$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν β σταθερόν προσδιορίζομεν τήν ὁρίζουσαν τήν κατά μῆκος τομήν καμπύλην τοῦ στηρίου ἴσης ἀντιστάσεως διά τῆς σχέσεως

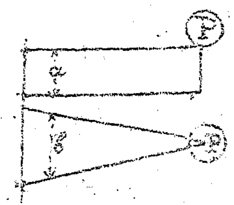
$$\alpha^2 = \frac{6}{R\beta} P(l-x)$$



ἥτις παριστᾷ δευτεροβάθμιον παραβολήν, καί εἰς ἥν ἀντιστοιχεῖ τό ἔναντι στερεόν,

Ἐάν ὑποθέσωμεν τό ὑποθέσωμεν τό ὕψος α σταθερόν καί τό πλάτος β μεταβλητόν ἔχομεν

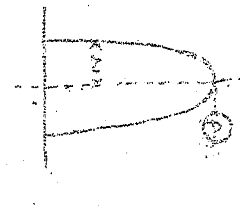
$$\beta = \frac{6P}{R\alpha^2}(l-x)$$



ἥτις παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν καί εἰς ἥν ἀντιστοιχεῖ τό ἔναντι στερεόν ἴσης ἀντιστάσεως.

Ἐάν ἡ τομή τοῦ πρίσματος ἦτο κυκλική ἀντί νά εἶναι ὀρθογωνία, θά εἴχομεν διά τοῦ αὐτοῦ τρόπου τό στηρίον

$$d^3 = \frac{32P}{\pi}(l-x)$$



Ἡ μεγίστη τιμή τοῦ y (la flèche) ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν τοῦ $x = l$ καί εἶναι

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \text{ὅθεν} \quad P = \frac{3EI}{l^3} f$$

ἡ καταναλωθεῖσα ἐργασία διά νά ἐπιφέρωμεν τήν κάμψιν f εἶναι

$$\mathfrak{T} = \int_0^f P\,df = \int_0^f \frac{3EI}{l^3} f\,df = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3} f^2$$

Ὑποθέτοντες, ὅτι ἀνυψοῦμεν τό βάρος P εἰς τό ἄκρον τοῦ πρίσματος ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἀλλ' ἀποτόμως, ὑφίσταται δονήσεις τινάς πρίν ἐπανέλθει εἰς τήν ἠρεμίαν, κατά τήν στιγ-

μήν t κέκτηται τοῦτο ταχύτητα V.

Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα τῶν ζωσῶν δυνάμεων κατά τήν στιγμήν ταύτην ἔχομεν,

$$\frac{PV^2}{2g} = Pf - \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3} f^2$$

διαφοροῦντες, καί παρατηροῦντες ὅτι $V = \frac{df}{dt}$ ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{P}{g}\frac{d^2 f}{dt^2} = P - 3\frac{EI}{l^3} f$$

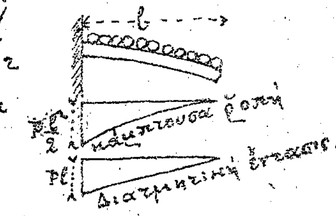
ἀνάλογον ἐκείνης, ἥν εὕρομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 17 καί ἥτις μᾶς δίδει τά αὐτά συμπεράσματα. ἔχομεν ἐνταῦθα

$$\mu\epsilon\gamma.\ f = 3\frac{EI}{l^3} f^2$$

Δοκός ἐντεπαγής φέρουσα φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἡ δοκός φέρει φορτίον p χιλιογράμμων κατά μέτρον, ὁμοιομόρφως διανεμημένον. τότε

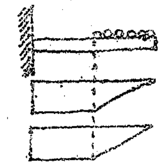
$$M = \frac{p}{2}(l-x)^2 = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$



ἡ διατμητική ἔντασις ἐν τῇ τομῇ x εἶναι

$$T = -\frac{dM}{dx} = p(l-x)$$

καί ἔχομεν ἐν τῷ ἔναντι σχήματι τάς καμπύλας, αἵτινες ἐμφαίνουσι τήν μεταβολήν ἥν ὑφίσταται ἡ κάμπτουσα ῥοπή καί ἡ διατμητική ἔντασις ἀπό τομῆς εἰς τομήν.



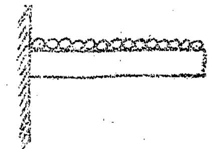
Ἐάν δέ τό συνεχές φορτίον φέρεται ὑπό τμήματος ἁπλῶς τῆς δοκοῦ ἔχομεν τό ἔναντι διάγραμμα διά τήν κάμπτουσαν ῥοπήν καί τήν διατμητικήν ἔντασιν.

Ἐλαστική γραμμή. Ὁλοκληροῦντες ὡς ἀνωτέρω τήν ἐξίσωσιν

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2}(l-x)$$

ἔχομεν

$$EIy = \frac{p}{24}(l-x)^4 + \frac{px}{6} - \frac{pl^4}{24}$$



Ἡ τιμή τοῦ βέλους εἶναι

$$f=\frac{pl}{8EI}$$

<u>Στερεόν ἴσης ἀντιστάσεως.</u> Ὑποθέτοντες τήν τομήν τετράγωνον μέ βάσιν β καί ὕψος α ἔχομεν [ ] διά τήν μεγαλειτέραν ἀντοχήν τοῦ πρίσματος;

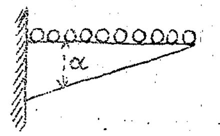
$$R=\frac{n}{I}\,\frac{p(l-x)}{2}\quad \text{ἔνθα}\quad n=\frac{\alpha}{2}\quad \text{καί}\quad I=\frac{\beta\alpha^3}{12}$$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$R=\frac{3p(l-x)^2}{\alpha^2\beta}$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν τό πλάτος β σταθερόν καί τό ὕψος α μεταβλητόν ἡ ἄνω σχέσις

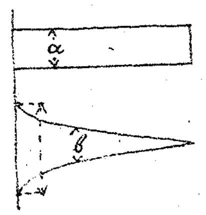
$$\alpha^2=\frac{3p}{\beta R}(l-x)^2$$



παριστᾶ δύο εὐθείας καί τό ἀντιστοιχοῦν αὐτῇ στερεόν ἴσης ἀντιστάσεως ἔχει τήν ἔναντι μορφήν.

Ἐάν τοὐναντίον ὑποθέσωμεν τό ὕψος α σταθερόν καί τό πλάτος β μεταβλητόν ἡ σχέσις

$$\beta=\frac{3p}{\alpha^2R}(l-x)^2$$



παριστᾶ παραβολήν τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εὑρίσκεται εἰς τήν ἐλευθέραν ἄκραν τῆς δοκοῦ καί τό ἀντιστοιχοῦν αὐτῇ στερεόν ἴσης ἀντιστάσεως ἔχει τήν ἔναντι μορφήν.

Ἐάν μετά τοῦ ὁμοιομόρφου φορτίου ἡ δοκός φέρει καί μεμονωμένον φορτίον εἰς τό ἐλεύθερον ἄκρον αὐτῆς ἔχομεν

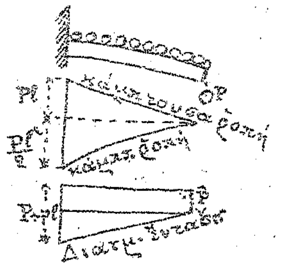
$$M=P(l-x)+\frac{p}{2}(l-x)^2=EI\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

ὁλοκληροῦντες εὑρίσκομεν

$$EIy=\frac{Px^2}{2}\left(l-\frac{2}{3}\right)+\frac{p}{24}(l-x)^4+\frac{px}{6}-\frac{pl^4}{24}$$

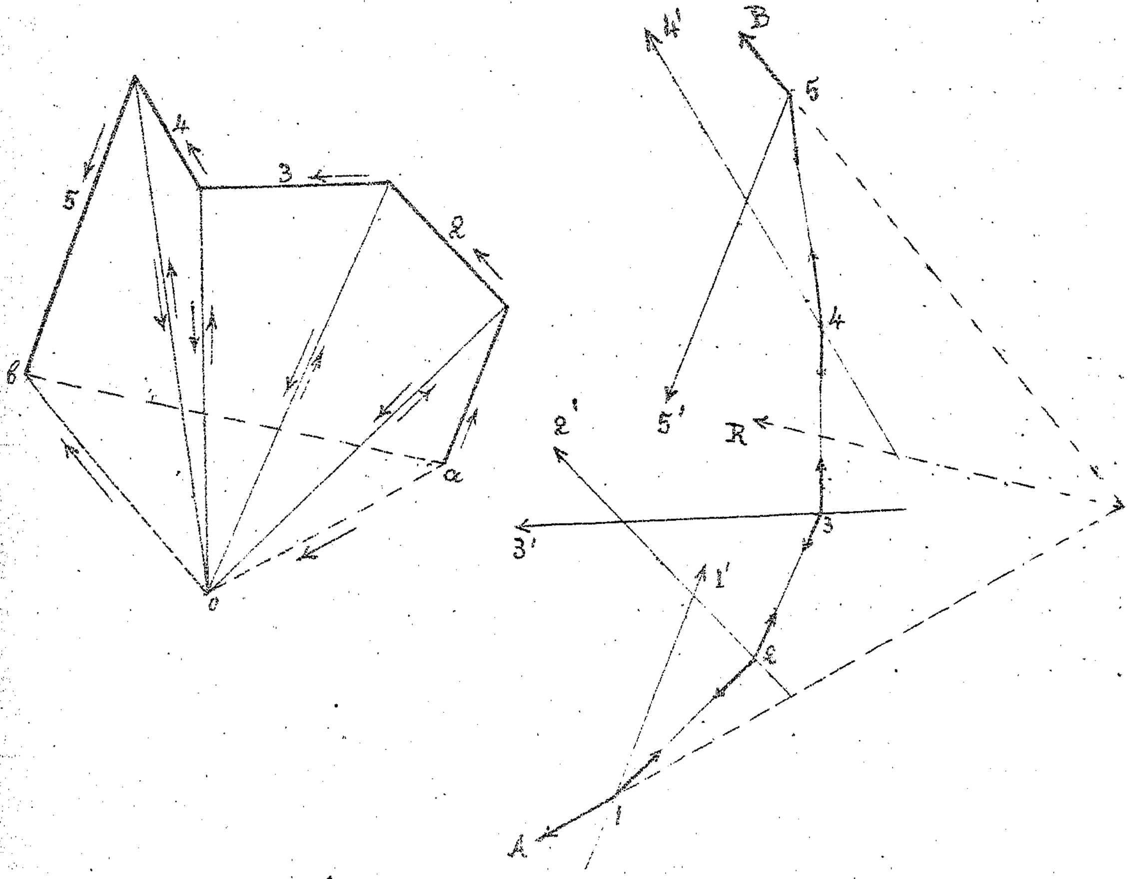
$$f=\frac{l^3}{EI}\left[\frac{P}{3}+\frac{pl}{8}\right]$$

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ παριστῶσαι τήν μεταβολήν τῆς καμπτούσης ῥοπῆς καί διατμητικῆς ἐντάσεως καμπύλαι ἐμφαίνονται εἰς τό ἔναντι σχῆμα.



Ἀρχαί τῆς γραφικῆς στατικῆς

Ὁρισμοί καί θεμελιώδη θεωρήματα



45.) Ἔστωσαν 11', 22', 33', 44', 55' αἱ εὐθεῖαι τῆς δράσεως ὡρισμένου ἀριθμοῦ δυνάμεων κειμένων ἁπασῶν ἐν ἑνί καί τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

ἀπό τινος σημείου α τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου φέρομεν τά εὐθύγραμμα τμήματα 1, 2, 3, 4, 5 παραλλήλως ταῖς εὐθείαις 11', 22', 33', 44', 55', κατά τήν αὐτήν φοράν καί ἀμοιβαίως ἴσα ἤ ἀνάλογα ταῖς ἐντάσεσι τῶν δυνάμεων τούτων.

Τό προκύπτον πολύγωνον α, 1, 2, 3, 4, 5, β καλοῦμεν <u>πολύγωνον τῶν δυνάμεων</u>. ἀπό τινος σημείου Ο τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου φέρομεν τάς ἀκτῖνας Ο[α, 1·2, 2·3, 3·4, 4·5, β] καί ἀπό ἑτέρου οἱουδήποτε σημείου Α τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου φέρομεν τάς εὐθείας Α.1, 1·2, 2·3, 3·4, 4·5, 5·Β παραλλήλως ταῖς ἀκτῖσιν Ο[α, 1·2, 2·3, 3·4, 4·5, β] Τό προκύπτον πολύγωνον Α, 1, 2, 3, 4, 5, Β καλοῦμεν σχοινοειδές (funiculaire) πολύγωνον τῶν δυνάμεων. τό σημεῖον Ο καλοῦμεν <u>πόλον</u> τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου καί τάς ἀκτῖνας Ο[α, 1·2, 2·3, 3·4, 4·5 β] καλοῦμεν <u>πολικάς ἀκτῖνας</u> τοῦ αὐτοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου.

Τό σημεῖον Ο καθώς καί τό σημεῖον Α ἐλήφθησαν οἱαδήποτε κατά συνέπειαν.

Εἰς ὡρισμένον σύστημα δυνάμεων ἀντιστοιχοῦσιν ἄπειρα σχοινοειδῆ πολύγωνα.

Ἐάν αἱ δυνάμεις εἶναι ὅλαι παράλληλοι τοῦ πολυγώνου τῶν δυνάμεων εἶναι μία εὐθεῖα γραμμή. Ἡ ἀπό τῆς εὐθείας ταύτης ἀπόστασις τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὡρισμένῳ σχοινοειδεῖ πολυγώνῳ πόλου, καλεῖται <u>πολική ἀπόστασις</u> τοῦ σχοινοειδοῦς τούτου πολυγώνου.

Ἐάν ὁ πόλος Ο ληφθῇ ἐπί μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῶν δυνάμεων ἡ κατασκευή τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου δέν δύναται νά κατασκευασθῇ ὡς ἀνωτέρω, καί διά τοῦτο λαμβάνομεν τό σημεῖον Α οὐχί πλέον οἱονδήποτε, ἀλλ' ἐπί τῆς εὐθείας 11'.

<u>Σημ. Ι</u> Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου συστήματος τινος δυνάμεων βλέπομεν, ὅτι καί μέρος μόνον τοῦ πολυ-

γώνου τούτου τό 2, 3, 4, 5 δύναται νά θεωρηθῇ ὡς σχοινοειδές πολύγωνον τῶν δυνάμεων 33', 44'.

<u>Σημ. ΙΙ</u> Ἡ ὀνομασία σχοινοειδές πολύγωνον δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς;

Ἐάν θεωρήσωμεν σχοινίον Α, 1, 2, 3, 4, 5, Β; τάς δυνάμεις 11', 22', 33', 44', 55', ἐφηρμοσμένας ὁπωσδήποτε ἐπί τοῦ σχοινίου καί τάς δυνάμεις 1Α καί 5Β ἐφηρμοσμένας καί συμπιπτούσας μετ' αὐτῶν, τό σχοινίον ἀποκτᾷ μορφήν ἰσορροπίας συμπίπτουσαν μέ τό σχοινοειδές πολύγωνον Α, 1, 2, 3, 4, 5, Β.

Ἰδιότητες τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου.

46) 1.) Σύστημά τι δυνάμεων κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καί ἐφηρμοσμένων ἐπί στερεοῦ σώματος δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διά δύο μόνον δυνάμεων, τῶν ὁποίων ἡ ἔντασις καί ἡ φορά συμπίπτουσι μέ τάς ἐσχάτας πολικάς ἀκτῖνας αΟ καί Οβ καί αἱ εὐθεῖαι τῆς δράσεως αὐτῶν συμπίπτουσι μέ τάς ἐσχάτας πλευράς τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου.

Ἡ δύναμις 1 δύναται τῷ ὄντι νά θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη τῶν δυνάμεων αΟ καί Ο(1·2). ἡ δύναμις 2 δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη τῶν δυνάμεων (1·2)Ο καί Ο(2·3) καί οὕτω καθεξῆς. ἡ δύναμις 5 δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη τῶν δυνάμεων (4·5)Ο καί Οβ ὥστε τό προταθέν σύστημα τῶν δυνάμεων

$$\bar{1}+\bar{2}+\bar{3}+\bar{4}+\bar{5}$$

δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διά τοῦ

$$\alpha O + O(1\cdot 2)+(1\cdot 2)O+O(2\cdot 3)+(3,2)O+O(3,4)+(3\cdot 4)O+O(4\cdot 5)+(4\cdot 5)O+O\beta$$

καί ἐπειδή ἐν γένει

$$O(2\cdot 3)+(3\cdot 2)O=0$$

τό ἀνωτέρω ἄθροισμα ἁπλοποιεῖται καί μένει

$$\alpha O+O\beta$$

ο. ε. δ.

Ἐκ τούτου καθίστανται καταφανεῖς αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου.

2.) Ἐάν σύστημά τι δυνάμεων κειμένων ἁπασῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καί ἐφηρμοσμένων ἐπί στερεοῦ σώματος εἶναι τοιοῦτον ὥστε τό πολύγωνον τῶν δυνάμεων νά εἶναι κλειστόν.
καί ἕν σχοινοειδές πολύγωνον οἱονδήποτε νά εἶναι ἐπίσης κλειστόν τότε ὅλα τά σχοινοειδῆ πολύγωνα εἶναι κλειστά καί αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦσι, καί τἀνάπαλιν,

3.) Ἐάν αἱ ἐν τῷ αὐτῷ δυνάμεις δέν ἰσορροποῦσι, δυνάμεθα νά τάς ἀντικαταστήσωμεν διά μιᾶς συνισταμένης ὅταν ὑπάρχῃ τοιαύτη ἥτις διέρχεται διά τοῦ σημείου ἔνθα συμπίπτουσιν αἱ ἔσχαται πλευραί τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου: ἡ ἔντασις αὐτῆς εἶναι $\alpha\beta$.

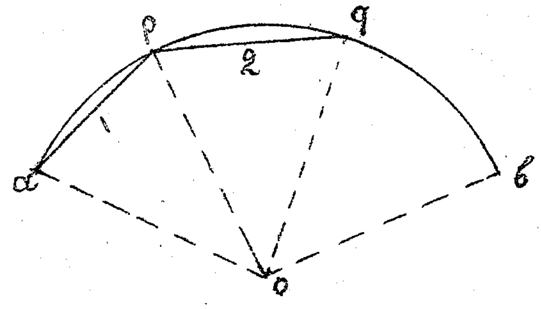
4.) Διά τοῦ σημείου παρ' ᾧ συμπίπτουσι δύο οἱαιδήποτε τοῦ σχοινοειδοῦς πολυγώνου διέρχεται ἡ μεταξύ συνισταμένη τῶν μεταξύ τῶν πλευρῶν τούτων ἐμπεριεχομένων δυνάμεων.

5.) Ἐάν τό πολύγωνον τῶν δυνάμεων εἶναι κλειστόν, ἀλλά τό σχοινοειδές πολύγωνον δέν κλείεται, αἱ δυνάμεις ἀντικαθίστανται δι' ἑνός ζεύγους.

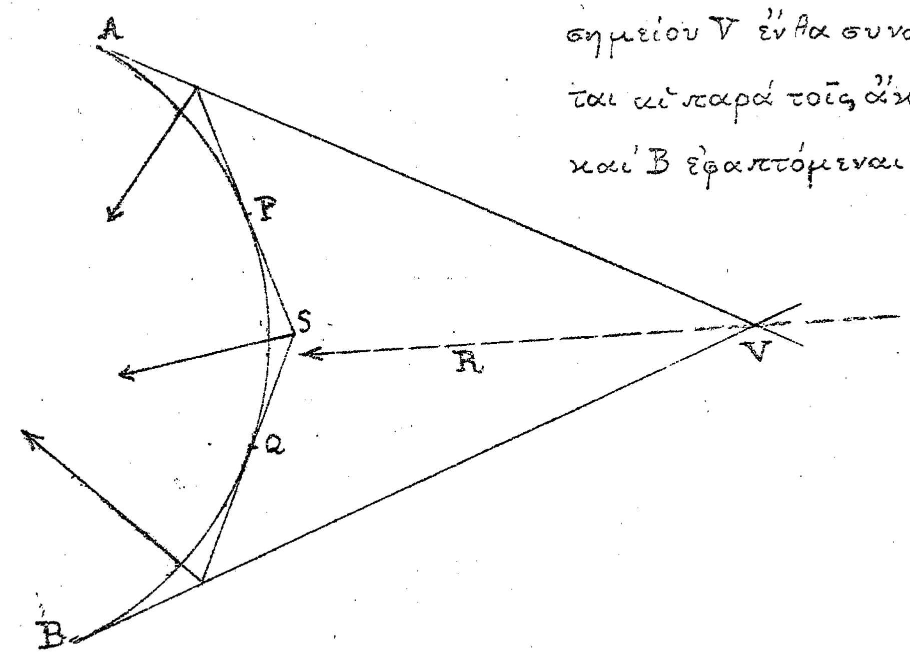
Σχοινοειδεῖς καμπύλαι. 47) Ὑποθέσωμεν νῦν ἀντί νά ἔχωμεν πεπερασμένων ἀριθμῶν δυνάμεων, ἔχομεν ἄπειρον ἀριθμῶν συνεχῶν δυνάμεων κειμένων εἰς ἀπειρωστάς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις.

Τό πολύγωνον τῶν δυνάμεων τούτων ἀντικαθίσταται ἐνταῦθα ὑπό καμπύλης συνεχοῦς $\alpha\beta$, [ἐκτός ἐάν αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι καί τότε ἡ καμπύλη τῶν δυνάμεων μένει εὐθύγραμμος] τῆς ὁποίας τά στοιχειώδη τόξα $\alpha\delta$ παριστῶσι τάς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων, ἡ φορά τούτων συμπίπτει μετά τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης τῶν δυνάμεων.

Δυνάμεθα δέ καί ἐνταῦθα νά κατασκευάσωμεν τήν ἀντιστοιχοῦσαν πόλῳ τινί O σχοινοειδῆ καμπύλην AB ὅπως ἐπράξαμεν τοῦτο ἀνωτέρω αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς σχοινοειδοῦς ταύτης καμπύλης εἶναι παράλληλοι ταῖς πολικαῖς ἀκτῖσι τῆς καμπύλης τῶν δυνάμεων.



Ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων διέρχεται διά τοῦ σημείου V ἔνθα συναντῶνται αἱ παρά τοῖς ἄκροις A καί B ἐφαπτόμεναι.



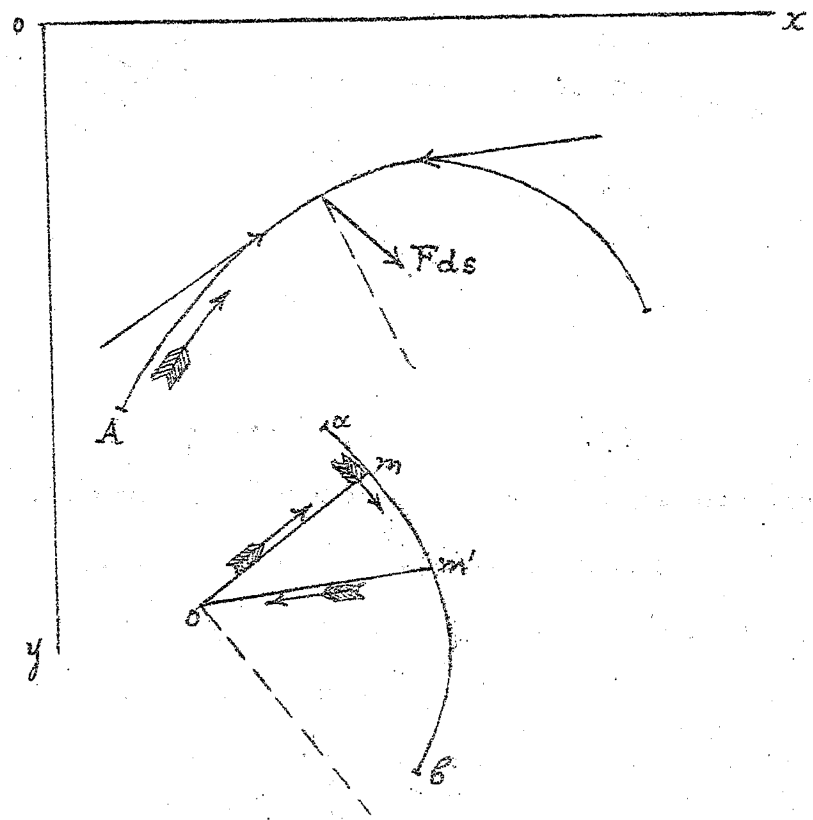
Ἔστωσαν p καί q δύο σημεῖα τῆς καμπύλης τῶν δυνάμεων. τά ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης εἶναι τά σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τῶν παραλλήλων ταῖς πολικαῖς ἀκτῖσιν Op καί Oq ἐφαπτομένων αὐτῆς (τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης). διά τοῦ σημείου S παρ' ᾧ συμπίπτουσιν αἱ ἐφαπτόμεναι PS καί QS διέρχεται ἡ συνισταμένη τῶν ἀντιστοιχούντων τῷ τόξῳ pq δυνάμεων, ὅθεν πᾶν πολύγωνον περιγεγραμμένον τῇ σχοινοειδεῖ καμπύλῃ, εἶναι σχοινοειδές πολύγωνον πεπερασμένου ἀριθμοῦ δυνάμεων, τουτέστι τῶν μερικῶν συν-

Αντοχή ύλης.

Π. Πρωτοπαπαδάκη

ισταμένων τῶν δυνάμεων, αἵτινες δρῶσι μεταξύ τῶν διαδοχικῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης καί τοῦ πολυγώνου.

Διαφορική ἐξίσωσις τῶν funiculaires καμπύλων. 48) Ἔστω αβ ἡ καμπύλη συστήματός τινος δυνάμεων καί AB ἡ σχετική τῷ πόλῳ O σχοινοειδής καμπύλη, καί ἔστωσαν $M(x, y)$, καί $M'(x+dx, y+dy)$ δύο παραπλήσια διαδοχικά σημεῖα τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης. Τά ἐπί τῆς καμπύλης τῶν δυνάμεων ἀντιστοιχοῦντα τούτοις σημεῖα $m(\xi, \eta)$ καί $m'(\xi+d\xi, \eta+dy)$ εὑρίσκομεν, φέροντες τάς πολικάς ἀκτῖνας om καί om' παραλλήλους ταῖς παρά τοῖς σημείοις M καί M' ἐφαπτομέναις τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης.



Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ N τήν πολικήν ἀκτῖνα om καί δι' α τήν μετά τοῦ ἄξονος γωνίαν αὐτῆς καί προβάλωμεν

ἐπί τῶν ἀξόνων ox καί oy τήν κλειστήν πολυγωνικήν omm' ἔχομεν,

$$(1)\quad \begin{aligned} N\,\text{συν.}\,\alpha + d\xi - (N+dN)\,\text{συν.}\,\alpha &= d\xi - dN\,\text{συν}\,\alpha = 0 \\ N\,\text{ἡμ.}\,\alpha + dy - (N+dN)\,\text{ἡμ}\,\alpha &= d\eta - dN\,\text{ἡμ}\,\alpha = 0 \end{aligned}$$

ἀλλά mm' παριστᾷ τήν μεταξύ τῶν σημείων M καί M' τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης ἐπενεργοῦσαν δύναμιν Fds καί ἐάν παραστήσωμεν διά Xds καί Yds τάς προβολάς τῆς δυνάμεως ταύτης ἐπί τῶν ἀξόνων ox καί oy ἔχομεν

$$Xds = d\xi \qquad Yds = dy$$

ἀφ' ἑτέρου $\text{συν}\,\alpha = \frac{dx}{ds}$ διότι α εἶναι ἡ μετά τοῦ ἄξονος ox γωνία τῆς παρά τό σημεῖον M ἐφαπτομένης τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης καί αἱ ἄνω σχέσεις (1) μετατρέπονται εἰς

$$Xds - dN\frac{dx}{ds} = 0 \qquad Yds - dN\frac{dy}{ds} = 0$$

ἤ

$$X = \frac{dN\frac{dx}{ds}}{ds} \qquad Y = \frac{dN\frac{dy}{ds}}{ds} \qquad (2)$$

αἱ σχέσεις αὗται παριστῶσι τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν τῶν σχοινοειδῶν καμπύλων, διότι ἐάν ὁλοκληρώσωμεν αὐτάς καί ἀπαλείψωμεν τήν βοηθητικήν ἄγνωστον N εὑρίσκομεν τήν συνδέουσαν τάς συντεταγμένας x, y τοῦ σημείου M σχέσιν.

Παράλληλοι δυνάμεις. 49) Ἐάν αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι, κάθετοι λ.χ. τῷ ἄξονι ox τότε $X=0$ $Y=F$. καί ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων (2) μετατρέπεται εἰς

$$\frac{1}{ds}\left[N\frac{dx}{ds}\right] = 0$$

καί ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$N\frac{dx}{ds} = q_0 = \text{σταθ.} \qquad (3)$$

οὕτω

Ἐάν αἱ δυνάμεις, αἵτινες δρῶσιν ἐπί σχοινοειδοῦς τινός καμπύλης εἶναι κατακόρυφοι, ἡ ὁριζόντιος προβολή $N\frac{dx}{ds}$ τῆς πιέσεως ἤ τάσεως τῆς καμπύλης ταύτης εἶναι σταθερά εἰς ὅλα τά σημεῖα αὐτῆς, καί ἀριθμητικῶς ἴση μέ τήν πολικήν ἀπόστασιν αὐτῆς ὑπολογιζομένην ἐν τῇ αὐτῇ κλίμακι ἐν ᾗ καί αἱ δυνάμεις.

ἡ σχέσις (3) μᾶς δίδει $\frac{N}{ds}=\frac{q_0}{dx}$ ἤ $d\frac{N}{ds}=q_0\, d\frac{1}{dx}$
καί ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων (2) ἔχομεν

$$Y ds = q_0\, d\frac{dy}{dx}$$

θέτοντες δέ $Y ds = P dx$ ἐάν δηλαδή παραστήσωμεν διά P τήν κατά μονάδα μήκους δύναμιν, ἥτις ἐπενεργεῖ ἐπί τῆς ὁριζοντίου προβολῆς τῆς σχοινοειδοῦς καμπύλης, ἔχομεν

$$P dx = q_0\, d\frac{dy}{dx}$$

ἤ

$$P = q_0 \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (3')$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν $P=\frac{M}{EI}$ καί $q_0=0$
ἡ ἐξίσωσις (3') μετατρέπεται εἰς

$$\frac{d^2y}{\quad} = + \frac{M}{EI} \qquad (3'')$$

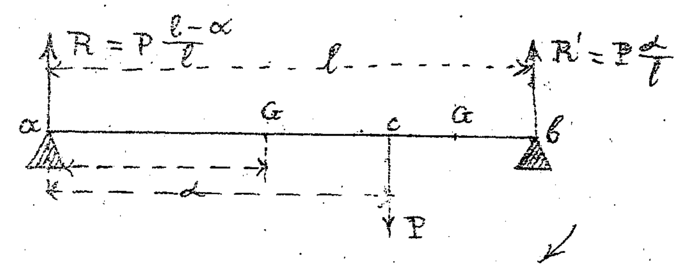
ἐξ οὗ ἡ πρότασις

Ἐάν εἰς τά διάφορα στοιχεῖα dx τῆς κεντρικῆς ἑνός δοκοῦ τινος ἐφαρμόσωμεν δυνάμεις $\frac{Mdx}{EI}$ διευθυνομένας πρός τά κατω ἤ πρός τά ἄνω [ἐάν $\frac{M}{EI}$ εἶναι θετικόν ἤ ἀρνητικόν] ἡ μετά τήν κάμψιν ἀλλοιωθεῖσα κεντρική ἴα συμπίπτει μέ μίαν τῶν σχετικῶν τοῖς φορτίοις τούτοις $\frac{Mdx}{EI}$ σχοινοειδῶν καμπύλων, ἧς ἡ πολική ἀπόστασις εἶναι ἀριθμητικῶς ἴση μέ τήν μονάδα τοῦ μήκους.

I. Δοκοί ὑποβασταζόμεναι ὑπό ἁπλῶν στηριγμάτων

Α! Δοκός στηριζομένη ἁπλῶς ἐπί δύο στηριγμάτων

1ον) Ἑνιαῖον φορτίον. 50.) Ἡ Δοκός εὑρίσκεται ὑπό τήν ἐπενέργειαν μιας μόνον ἐξωτερικῆς δυνάμεως P ἀλλ' ἐκ τῆς ἐπιδράσεως τῶν στηριγμάτων γεννῶνται δύο ἕτεραι δυνάμεις R καί R' καί ἡ δοκός εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπενέργειαν τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων.



τήν ἔντασιν τῶν ἀντιδράσεων R καί R' τῶν στηριγμάτων α καί β δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν, λαμβάνοντες τάς ῥοπάς τῶν τριῶν δυνάμεων ὡς πρός τά στηρίγματα α καί β. Τό ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τούτων μηδενίζεται, διότι αἱ δυνάμεις R, P, R' ἰσορροποῦσι. ἔχομεν λοιπόν ὑπολογίζοντες τάς ἀποστάσεις θετικῶς πρός τά δεξιά τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγματος καί ἀπό τοῦ σημείου τούτου [τοῦ βέλους ἐμφαίνοντος τήν θετικήν φοράν τῶν ῥοπῶν],

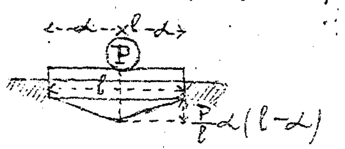
ἄθροισμα ῥοπῶν ὡς πρός τό $\alpha = P\alpha - R'l = 0$ ὅθεν $R' = \frac{P\alpha}{l}$

ἄθροισμα ῥοπῶν ὡς πρός τό $\beta = -P(l-\alpha) + Rl = 0$ ὅθεν $R = P\frac{l-\alpha}{l}$

Κάμπτουσα ῥοπή. Θεωρήσωμεν ἤδη τήν παρά τό σημεῖον G τομήν τῆς δοκοῦ εἰς ἀπόστασιν x ἀπό τοῦ α. ἐάν αὕτη εἶναι πρός τ' ἀριστερά τοῦ C δηλαδή $x<\alpha$ ἡ κάμπτουσα ῥοπή M ἐν τῇ τομῇ ταύτῃ εἶναι

$$M = Rx = P\frac{l-\alpha}{l}x \quad \text{ἔνθα } x<\alpha$$

Ἐάν αὕτη εἶναι πρός τά δεξιά τοῦ σημείου C δηλαδή $x>\alpha$ ἡ τιμή τῆς καμπτούσης ῥοπῆς εἶναι



$$M = Rx - P(x-\alpha) = P\frac{l-\alpha}{l}x - P(x-\alpha) = \frac{P}{l}[(l-\alpha)x - l(x-\alpha)] = \frac{P}{l}\alpha(l-x)$$

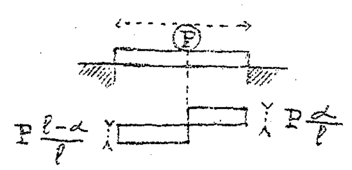
ἔνθα $x>\alpha$

ἡ ἐν τῇ τομῇ C κάμπτουσα ῥοπή εἶναι $\frac{P}{l}\alpha(l-\alpha)$. αὕτη εἶναι καί ἡ μεγαλειτέρα τιμή αὐτῆς.

Διατμητική ἔντασις. Ἡ διατμητική ἔντασις T ἰσοῦται [ ] μέ $-\frac{dM}{dx}$ ὅθεν

$$\text{διά } x<\alpha \quad T = -P\frac{l-\alpha}{l}$$

$$x>\alpha \quad T = +P\frac{\alpha}{l}$$



καί εἶναι ἡ αὐτή ἐν πάσαις ταῖς τομαῖς.

Ἐλαστική καμπύλη. Ἡ μορφή τῆς κεντρικῆς ἰνός προσδιορίζεται διά τῆς σχέσεως

$$\frac{EI}{\rho} = -M$$

$$\frac{EI}{\rho} = P\frac{\alpha-l}{l}x \quad \text{ἐάν } x<\alpha$$

$$\frac{EI}{\rho} = P\frac{\alpha}{l}(x-l) \quad \text{ἐάν } x>\alpha$$

καί αἱ διαστάσεις τῆς τομῆς διά τῆς σχέσεως

$$\frac{EI}{\rho} = -\text{μεγιστ.}\, M_c = P\frac{\alpha}{l}(\alpha-l)$$

ἀριστερόθεν τοῦ C $\quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = P\frac{l-\alpha}{l}x$

δεξιόθεν τοῦ C $\quad EI\frac{d^2y}{dx} = P\frac{\alpha}{l}(l-\alpha)$

Ἐάν παραστήσωμεν διά θ τήν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης παρά τό σημεῖον C μετά τῆς εὐθείας αβ ἔχομεν

$$\text{αρ.} \quad EI\left[\frac{dy}{dx} - \varepsilon\varphi\theta\right] = \frac{P}{2l}(l-\alpha)(x^2-\alpha^2)$$

$$\text{δεξ.} \quad EI\left(\frac{dy}{dx} - \varepsilon\varphi\theta\right] = \frac{P}{l}\alpha\left[l(x-\alpha) - \frac{1}{2}(x^2-\alpha^2)\right.$$

τάς σταθεράς προσδιορίζομεν διά τῶν $x=\alpha$ $\frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi\theta$.

ὁλοκληροῦντες ἐκ νέου ἔχομεν

$$\text{αρ.} \quad EI(y - x\,\varepsilon\varphi\theta) = \frac{Px}{6l}(l-\alpha)(x^2-3\alpha^2) \quad \{\text{διά } x=0 \quad y=0$$

$$\text{δεξ.} \quad EI(y-(x-l)\varepsilon\varphi\theta] = \frac{P\alpha}{6l}(l-x)[x^2-2l(x+l)+6l\alpha-3\alpha^2]$$

$$\{\text{διά } x=l \quad y=0$$

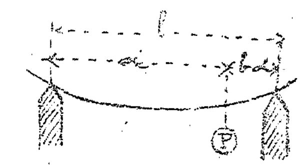
ἐάν δέ παραστήσωμεν διά η τήν τεταγμένην τοῦ σημείου C μετά τήν ἀλλοίωσιν τῆς μορφῆς τῆς δοκοῦ, αἱ τιμαί $x=\alpha$ $y=\eta$ δέον νά ἐπαληθεύωσι καί τάς δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις. ἀντικαθιστῶντες καί ἀφαιροῦντες κατά μέλη εὑρίσκομεν

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{P\alpha}{3EIl}(l-\alpha)(2\alpha-l)$$

καί ἀντικαθιστῶντες τήν τιμήν ταύτην εὑρίσκομεν

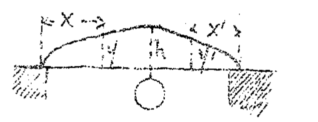
$$\text{αρ.} \quad y = \frac{P}{6EIl}x(l-\alpha)(\alpha^2-2\alpha l+x^2)$$

$$\text{δεξ.} \quad y = \frac{P}{6EIl}\alpha(l-x)(x^2-2xl+\alpha^2)$$



Στερεόν ἴσης ἀντοχῆς. Αἱ προσδιορίζουσαι τό στερεόν ἴσης ἀντοχῆς καμπύλαι εἶναι.

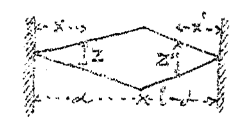
$$y^2 = \frac{6P(l-\alpha)}{R\beta l}x \quad \text{καί} \quad y'^2 = \frac{6P\alpha}{\beta Rl}x'$$



Ἐάν δέ ὑποθέσωμεν, ὅτι τό ὕψος τῆς δοκοῦ μένει ἀμετάβλητον καί μεταβάλλεται τό πλάτος αὐτῆς β τό στερεόν ἴσης ἀντοχῆς προσδιορίζεται διά τῶν ἐξισώσεων

$$Z = \frac{6P(l-\alpha)}{Rlh^2}x$$

$$Z' = \frac{6P\alpha}{Rlh^2}x'$$

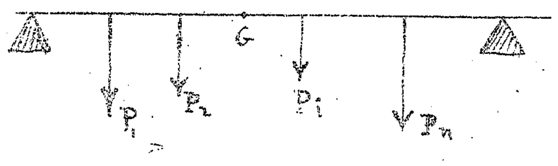


2ον) μεμονωμένα φορτία οἱουδήποτε ἀριθμοῦ.

51.) Ἡ κάμπτουσα ῥοπή ἑκάστης τῶν δεξιόθεν τοῦ σημείου G ἐπενεργουσῶν δυνάμεων P εἶναι κατά τά προηγούμενα.

$$P\frac{l-\alpha}{l}x$$

καί ἡ ἐξ ὅλων τῶν δεξιόθεν δυνάμεων προκύπτουσα ῥοπή εἶναι



$$\sum_{\alpha} P\frac{l-\alpha}{l}x$$

Ἡ κάμπτουσα ῥοπή ἑκάστης τῶν ἀριστερόθεν τοῦ σημείου G ἐπενεργουσῶν δυνάμεων εἶναι

$$P\frac{\alpha}{l}(l-x)$$

καί τό ἄθροισμα αὐτῶν

$$\sum_{\delta} P\frac{\alpha}{l}(l-x)$$

ὥστε ἡ σχετική τῇ τομῇ G κάμπτουσα ῥοπή M εἶναι.

$$M=\sum_{\delta}P(l-\alpha)\frac{x}{l}+\sum_{\alpha}P\alpha\frac{l-x}{l}$$

ἤ

$$M=\frac{x}{l}\sum_{\delta}P(l-\alpha)+\frac{l-x}{l}\sum_{\alpha}P\alpha$$

καί θέτοντες

$$\sum_{\alpha}+\sum_{\delta}=\Sigma.$$

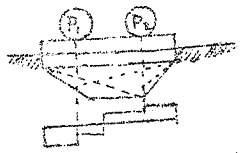
ἔχομεν

$$M=\frac{x}{l}\sum_{\delta}P(l-\alpha)+\frac{l-x}{l}\Sigma P\alpha=\frac{x}{l}\left[\sum_{\delta}Pl-\sum_{\delta}P\alpha-\sum_{\alpha}P\alpha\right]+\sum_{\alpha}P\alpha$$

$$M=\sum_{\alpha}P\alpha+x\left[\sum_{\delta}P-\frac{1}{l}\Sigma P\alpha\right]$$

Ἡ διατμητική ἔντασις T εἶναι

$$T=-\frac{dM}{dx}=\frac{1}{l}\Sigma P\alpha-\sum_{\delta}P$$



Ἐν τῇ περιπτώσει δύο μόνον φορτίων τό ἔναντι διάγραμμα παριστᾷ τήν μεταβολήν, ἥν ὑφίσταται ἡ κάμπτουσα ῥοπή καί

ἡ διατμητική ἔντασις ἀπό τομῆς εἰς τομήν.

3ον) Φορτίον συνεχές οἱονδήποτε.

52.) Ἐάν ἡ δοκός εὑρίσκεται ὑπό τήν ἐπενέργειαν φορτίου συνεχοῦς p κατά μονάδα μήκους, εὑρίσκομεν τήν κάμπτουσαν τομήν ἀντικαθιστῶντες εἰς τούς τύπους τῆς προηγουμένης περιπτώσεων ($2^{ον}$) P διά τοῦ $p\,d\alpha$ καί $\sum_{\alpha}$, $\sum_{\delta}$, Σ διά τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἀθροισμάτων $\int_0^x$, $\int_x^l$, $\int_0^l$ καί ἔχομεν

$$M=\frac{l-x}{l}\int_0^x p\alpha\,d\alpha+\frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha$$

$$M=\int_0^x p\alpha\,d\alpha+x\left[\int_x^l p\,d\alpha-\frac{1}{l}\int_0^l p\alpha\,d\alpha\right]$$

$$T=\frac{1}{l}\int_0^l p\alpha\,d\alpha-\int_x^l p\,d\alpha$$

4ον) φορτίον συνεχές οἱονδήποτε p καί μεμονωμένα φορτία P_1 P_2 .... P_n

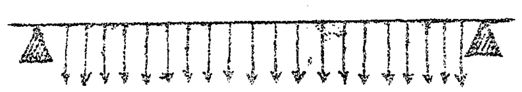
53.) Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι συνδυασμός τῶν δύο προηγουμένων ($2^{ον}$ καί $3^{ον}$) καί ἔχομεν ἀμέσως

$$M=\frac{l-x}{l}\left[\sum_{\alpha}P\alpha+\int_0^x p\alpha\,d\alpha\right]+\frac{x}{l}\left[\sum_{\delta}P(l-\alpha)+\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha\right]$$

$$T=\frac{1}{l}\left[\Sigma P\alpha+\int_0^l p\alpha\,d\alpha\right]-\left[\sum_{\delta}P+\int_x^l p\,d\alpha\right]$$

5ον) φορτίον συνεχές ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐπί τοῦ ὅλου μήκους τῆς δοκοῦ

54.) Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν προηγουμένην, ἀλλά τό κατά μονάδα μήκους φορτίον p εἶναι σταθερόν καί δέν μεταβάλλεται ἀπό μιᾶς εἰς ἑτέραν τομήν.

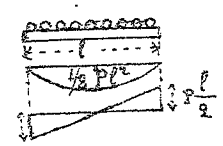


Τάς σχέσεις τῆς προηγουμένης περιπτώσεως δυνάμεθα τότε νά γράψωμεν ὡς ἑξῆς.

$$M=\frac{l-x}{l}p\int_0^x \alpha\,d\alpha+\frac{px}{l}\int_x^l(l-\alpha)\,d\alpha=\frac{l-x}{l}p\left[\frac{\alpha^2}{2}\right]_0^x+\frac{px}{l}\left[\alpha l-\frac{\alpha^2}{2}\right]_x^l=\frac{p}{2}x(l-x)$$

$$T=-\frac{dM}{dx}=p\left[x-\frac{l}{2}\right]$$

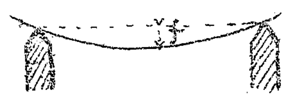
Ἐάν δέ λογίζωμεν τήν τεταγμένην x ἀπό τῆς μέσου τῆς δοκοῦ ἔχομεν $x=\xi+\frac{l}{2}$



$$M=\frac{p}{2}\left[\frac{l^2}{4}-\xi^2\right] \text{ καί } T=p\xi$$

ἐξίσωσις τῆς ἐλαστικῆς καμπύλης

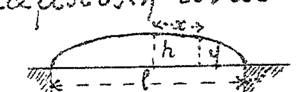
$$y=\frac{p}{EI}\,\frac{l^3}{24}\left[\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right]$$



$$f=\frac{P}{EI}\cdot\frac{5l^3}{384}$$

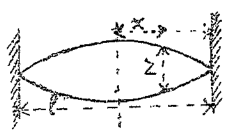
Στερεόν ἴσης ἀντοχῆς. Ἡ προσδιορίζουσα τοῦτο καμπύλη εἶναι

$$y^2=\frac{3}{4}\,\frac{p}{R\beta}\left(l^2-4x^2\right)$$



Ἐάν δέ ὑποθέσωμεν, ὅτι τό ὕψος τῆς δοκοῦ μένει ἀμετάβλητον καί μεταβάλλεται τό πλάτος αὐτῆς β τό στερεόν ἴσης ἀντοχῆς προσδιορίζεται διά τῆς ἐξισώσεως

$$z=\frac{3}{4}\,\frac{(l-4x^2)p}{Rh^2}$$



6ον) Φορτίον συνεχές ὁμοιόμορφως διανεμημένον καί μεμονωμένα φορτία $P_1 P_2 \ldots P_\eta$

p εἶναι σταθερόν καί οἱ τύποι τῆς προηγουμένης τετάρτης περιπτώσεως μετασχηματίζονται εἰς

$$M=\frac{l-x}{l}\sum_{\alpha}P\alpha+\frac{x}{l}\sum_{\sigma}P(l-\alpha)+\frac{p}{2}x(l-x)$$

$$T=\frac{1}{l}\sum P\alpha-\sum_{\sigma}P+p\left(x-\frac{l}{2}\right)$$

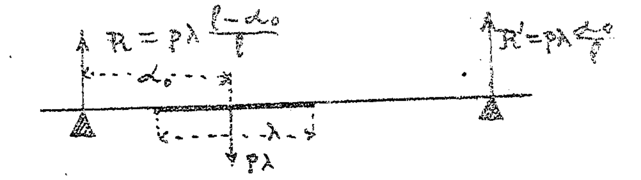
7ον) φορτίον συνεχές ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐπί μερικοῦ μόνον μήκους λ τῆς δοκοῦ.

55.) Τό ὁλικόν φορτίον τῆς δοκοῦ εἶναι pl καί τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς εἰς τό μέσον τοῦ μήκους λ αὐτοῦ εἰς ἀπόστασιν α_0 ἀπό τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγματος, οὗτινος ἡ ἀντίδρασις εἶναι (1ον ἀνωτέρω)

$$R=p\lambda\frac{l-\alpha_0}{l}$$

ἡ ἀντίδρασις τοῦ δεξιοῦ στηρίγματος εἶναι ὡσαύτως

$$R'=p\lambda\frac{\alpha_0}{l}$$



ὥστε ἀπό τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγατος μέχρι τῆς ἐνάρξεως τοῦ συνεχοῦς φορτίου δηλαδή ἀπό $x=0$ μέχρι $x=\alpha_0-\frac{\lambda}{2}$ ἔχομεν

$$M=Rx=p\lambda\frac{l-\alpha_0}{l}x$$

Ἐπί τοῦ μήκους λ δηλαδή ἀπό $x=\alpha_0+\frac{\lambda}{2}$ ἔχομεν

$$M=Rx-\frac{1}{2}p\left(x-\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\right)^2=p\lambda\frac{l-\alpha_0}{l}x-\frac{1}{2}p\left(x-\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

Μεταξύ τῆς δεξιᾶς ἄκρας τοῦ συνεχοῦς φορτίου καί τοῦ δεξιοῦ στηρίγματος δηλαδή ἀπό $x=\alpha_0+\frac{\lambda}{2}$ μέχρι $x=l$ ἔχομεν

$$M=R'(l-x)=p\lambda\frac{\alpha_0}{l}(l-x)$$

Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι διατμητικαί ἐντάσεις εἰσί

$$T=p\lambda\frac{l-\alpha_0}{l} \qquad T=-p\lambda\frac{l-\alpha_0}{l}+p\left(x-\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\right) \qquad T=p\lambda\frac{\alpha_0}{l}$$

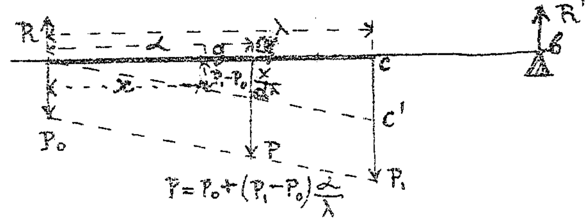
56.) Θεωρήσωμεν δοκόν τινά $\alpha\beta$ ὑποκειμένην ὑπό τήν ἐπενέργειαν φορτίου μεταβαλλομένου ὡς ἑξῆς.

Παρά τῷ ἀριστερῷ στηρίγματι α τό φορτίον ἰσοῦται μέ p_0 παρά τό εἰς ἀπόστασιν λ τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγματος κειμένου σημείου C τό φορτίον ἰσοῦται μέ p_1. ἀπό τοῦ σημείου C μέχρι τοῦ δεξιοῦ στηρίγματος, τό φορτίον ἰσοῦται τῷ μηδενί. καί μεταξύ τῶν σημείων α καί C καθ' ὅλον τό μῆκος λ μεταβάλλεται τοῦτο οὕτως ὥστε ἡ ἄκρα τῆς παραστατικῆς αὐτοῦ εὐθείας νά πίπτη ἐπί τῆς εὐθείας $p_0 p_1$. —

Ἡ ἔντασις τοῦ φορτίου παρά τῷ σημείῳ G εἶναι

$$p=p_0+(p_1-p_0)\frac{\alpha}{\lambda}$$

καί δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς προκύπτον ἐκ δύο φορτίων τό μέν $dp = p_o$ διανεμημένον ὁμοιομόρφως ἀπό τοῦ σημείου a μέχρι τοῦ σημείου c τό δέ Gd μεταβαλλόμενον οὕτως, ὥστε τό ἄκρον d τῆς παραστατικῆς αὐτοῦ εὐθείας νά πίπτη ἐπί τῆς εὐθείας adc' παραλλήλου τῇ $p_o p_1$ — τό πρῶτον τῶν φορτίων τούτων ἐπιφέρει



κατά τά προηγούμενα κάμπτουσαν ροπήν ἧς αἱ τιμαί εἶναι

[ ] ἔνθα θέτομεν $\alpha_o = \frac{\lambda}{2}$

διά $x<\lambda$ $\quad \mu = p_o\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2l}\right)x - p_o\frac{x^2}{2}$

$x>\lambda$ $\quad \mu' = p_o\frac{\lambda^2}{2l}(l-x)$

Τό δεύτερον τῶν φορτίων τούτων ἔχει ὡς συνισταμένην τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $acc' = (p_1-p_o)\frac{\lambda}{2}$ ἐφηρμοσμένην παρά τῷ σημείῳ $x = \frac{2\lambda}{3}$. αἱ εἰς αὐτήν ὀφειλόμεναι ἀντιδράσεις τοῦ ἀριστεροῦ καί δεξιοῦ στηρίγματος, εἶναι ἀμοιβαίως

$$R = (p_1-p_o)\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\lambda}{3l}\right) \qquad R' = (p_1-p_o)\frac{\lambda^2}{3l}$$

ὥστε ἡ ἐκ ταύτης προκύπτουσα κάμπτουσα ροπή παρά τι σημεῖον g κείμενον εἰς ἀπόστασιν $x<\lambda$ ἀπό τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγματος εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῆς δυνάμεως R καί τῆς συνισταμένης τῶν ἀριστερόθεν τοῦ σημείου x φορτίων. ἡ τιμή τῆς συνισταμένης ταύτης εἶναι $(p_1-p_o)\frac{x^2}{2\lambda}$, καί ἡ ἀπό τοῦ σημείου g ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς εἶναι $\frac{x}{3}$ ὥστε ἡ ροπή αὐτῆς ὡς πρός τό σημεῖον g εἶναι

$$x \leqslant \lambda = -(p_1-p_o)\frac{x^2}{2\lambda}\cdot\frac{x}{3} = -(p_1-p_o)\frac{x^3}{6\lambda}$$

Ὅθεν ἡ ὀφειλομένη τῷ δευτέρῳ φορτίῳ κάμπτουσα ροπή παρά

τό σημεῖον g εἶναι

$x<\lambda$ $\quad \mu_1 = Rx-(p_1-p_o)\frac{x^3}{6\lambda} = (p_1-p_o)\left[\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{2\lambda}{3l}\right)x-\frac{x^3}{6\lambda}\right]$

Παρά τοῖς σημείοις ἔνθα $x>\lambda$ ἔχομεν

$$\mu_1' = R'(l-x) = (p_1-p_o)\frac{\lambda}{3l}(\lambda - x)$$

Ἡ ἐκ τῶν δύο φορτίων ὁμοῦ προκύπτουσα κάμπτουσα ροπή M εἶναι

$$M = \mu+\mu_1 = p_o\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2l}\right)x - p_o\frac{x^2}{2} + (p_1-p_o)\left[\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{2\lambda}{3l}\right)x-\frac{x^3}{6\lambda}\right] \text{ διά } x<\lambda$$

καί

$$M = \mu'+\mu_1' = \left[p_o\frac{\lambda^2}{2l}+(p_1-p_o)\frac{\lambda^2}{3l}\right](l-x)$$

Ἐάν δέ τό φορτίον ἐκτείνεται ἀπό τοῦ ἑνός εἰς τό ἕτερον ἄκρον τῆς δοκοῦ ἔχομεν $\lambda = l$ καί δι' οἱονδήποτε αὐτῆς x ἔχομεν

$$M = \frac{x(l-x)}{2}\left[p_o+\frac{p_1-p_o}{3}\left(1+\frac{x}{l}\right)\right]$$

καί

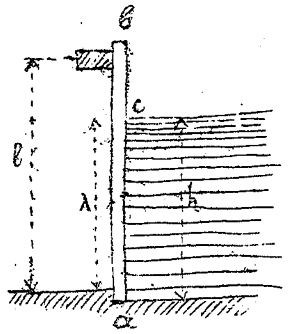
$$\mathcal{T} = p_o\left(x-\frac{l}{2}\right)+\frac{p_1-p_o}{3}\left(\frac{x^2}{l}-\frac{l}{3}\right)$$

9ον) Ἐφαρμογή ἐπί τῆς βελόνης ἑνός φραγμοῦ. Ἔστω h τό ὕψος τοῦ ὕδατος, ἡ παρά τό σημεῖον a πίεσις p_o εἶναι

$p_o = 1000 h\varepsilon$ (ἔνθα ε ἐμφαίνει τό πλάτος τῆς βελόνης)

ἡ παρά τό σημεῖον c πίεσις p_1 ἰσοῦται τῷ μηδενί, καί οἱ τύποι μᾶς δίδουσι

$$M = p_o\frac{x(l-x)}{3}\left(1-\frac{x}{2l}\right)$$



$$\mathcal{T} = p_o\left(-\frac{x^2}{2l}+x-\frac{l}{3}\right)$$

ἡ μεγίστη τιμή τοῦ M ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μηδενίζουσαν τήν τιμήν τοῦ x. δηλαδή,

<u>Ἀντοχή ὕλης</u>. Π. Πρωτοπαπαδάκη

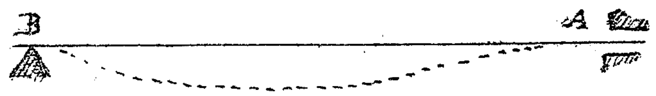
$$x^2 - 2\ell x + \frac{2}{3}\ell^2 = 0$$

$$x = \ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.43\ell.$$

Β^ον) Ἐμπεπηγμέναι Δοκοί

Ι. Δοκός ἐμπεπηγμένη δι' ἑνός μόνον τῶν ἄκρων αὐτῆς.

θεμελιώδης πρότασις. 57.) Ἐάν δοκός τις, ἧς ἡ ῥοπή ἀδρανείας I εἶναι σταθερά ἤ μεταβλητή, ὁ συντελεστής τῆς ἐλαστικότητος E εἶναι ἐπίσης σταθερός ἤ μεταβάλλεται ἀπό μιᾶς ἑτέραν τομήν, στηρίζεται ἐπί δύο ἰσοϋψῶν στηριγμάτων ἔνθα τό ἕν τῶν ἄκρων αὐτῆς A εἶναι ἐμπεπηγμένον, τό δέ ἕτερον B στηρίζεται ἁπλῶς, καί ἐάν ἐφαρμόσωμεν ἐπί τῶν στοιχειωδῶν τόξων dx τῆς κεντρικῆς αὐτῆς ἰνός κατακορύφους δυνάμεις ἴσας μέ $\frac{Mdx}{EI}$ ἔνθα M ἐμφαίνει τήν κάμπτουσαν ῥοπήν ἐν τῇ τομῇ x. ἡ συνισταμένη ὅλων αὐτῶν τῶν δυνάμεων διέρχεται διά τοῦ ἁπλῶς στηριζομένου ἄκρου τῆς δοκοῦ.



Τῷ ὄντι ἡ διακινουμένη καμπύλη παριστῶσα τήν κεντρικήν ἴνα τῆς δοκοῦ μετά τήν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμε-

ων $\frac{Mdx}{EI}$ ἐπελθοῦσαν κάμψιν, συμπίπτει [ ] μετά μιᾶς τῶν σχετικῶν ταῖς δυνάμεσι ταύταις σχοινοειδῶν καμπυλῶν, ἀλλ' ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων διέρχεται διά τοῦ σημείου παρ' ᾧ συντρέχουσιν αἱ εἰς τά ἄκρα τῆς *funiculaire* καμπύλη A καί B ἐφαπτόμεναι αὐτῆς. ἡ ἑτέρα τῶν ἐφαπτομένων τούτων εἶναι ἡ ἀρχική μορφή AB τῆς κεντρικῆς ἰνός καί συναντᾷ τήν παρά τῷ σημείῳ B ἐφαπτομένην παρά τῷ αὐτῷ σημείῳ B. ὅθεν

Ἡ συνισταμένη τῶν κατακορύφων δυνάμεων $\frac{Mdx}{EI}$ διέρχεται διά τοῦ ἁπλῶς στηριζομένου ἄκρου B.

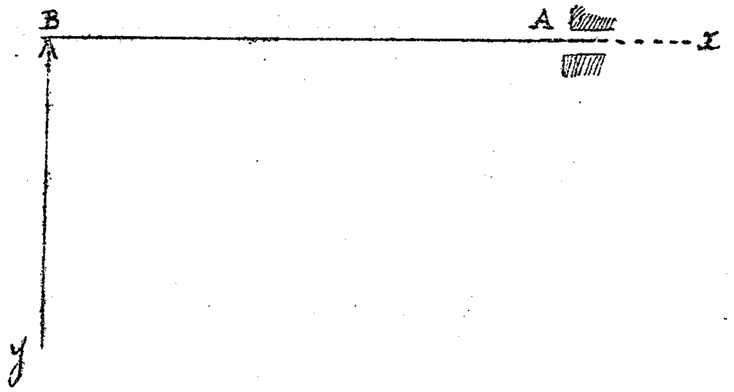
Προσδιορισμός τῆς καμπτούσης ῥοπῆς. 58.) Βασιζόμενοι ἐπί τῆς θεμελιώδους ταύτης προτάσεως προσδιορίζομεν ἀμέσως τήν ἐν τομῇ τινι x κάμπτουσαν ῥοπήν ὡς ἑξῆς.

Ἔστω μ ἡ ἐν τῇ τομῇ x κάμπτουσα ῥοπή, ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ δοκός στηρίζεται ἁπλῶς ἐπί δύο στηριγμάτων A καί B [ ] ὑπό την ἐπήρειαν τῶν αὐτῶν δυνάμεων.

Ἡ ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ κάμπτουσα ῥοπή M ἐν ᾗ περιπτώσει τό ἕτερον τῶν ἄκρων ἀντί νά στηρίζηται ἁπλῶς εἶναι καί ἐμπεπηγμένον εἶναι τῆς μορφῆς,

$M = \mu + \alpha x + \beta$

ἔνθα α καί β παριστῶσι σταθεράς ποσότητας, τῶν ὁποίων ὁ προσδιορισμός προσδιορίζει καί τήν ἐν τῇ τομῇ x κάμπτουσαν ῥοπήν ἐν τῇ περιπτώσει



τοῦ ἐμπηγμοῦ.

παρατηρῶ ἐν πρώτοις, ὅτι ἐν τῇ παρά τῷ ἁπλῷ στηρίγματι B τομῇ ἡ κάμπτουσα ῥοπή μηδενίζεται [ ] ὥστε ἐν τῇ τομῇ ταύτῃ $M=0$ $\mu=0$ $x=0$, ὅθεν ἕπεται $\beta=0$ καί ἔχομεν ἁπλῶς,

$$M=\mu+\alpha x$$

Ἐάν ἤδη ἐφαρμόσω ἐπί τῆς δοκοῦ κατακορύφους συνεχεῖς δυνάμεις $\frac{Mdx}{EI}$ ἡ συνισταμένη αὐτῶν διέρχεται [ ] διά τοῦ σημείου B καί ἡ ῥοπή αὐτῆς ὡς πρός τό σημεῖον τοῦτο B μηδενίζεται. ἐπειδή δέ αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι $\int_0^l \frac{Mdx}{EI}$ καί ἡ ῥοπή αὐτῆς ὡς πρός τό σημεῖον B εἶναι

$$\int_0^l \frac{Mdx}{EI}x$$

ὅθεν

$$\int_0^l \frac{M}{E}x\,dx=0=\int_0^l \frac{\mu+\alpha x}{EI}x\,dx=\int_0^l \frac{\mu}{EI}x\,dx+\alpha\int_0^l \frac{x^2dx}{EI}$$

καί ἡ ἐξίσωσις αὐτή προσδιορίζει τήν σταθεράν α

$$\alpha=-\frac{\int_0^l \frac{\mu}{EI}x\,dx}{\int_0^l \frac{x^2dx}{EI}}$$

καί

$$M=\mu-x\frac{\int_0^l \frac{\mu}{EI}x\,dx}{\int_0^l \frac{x^2dx}{EI}}$$

ἐάν ἡ τομή τῆς δοκοῦ καί ἡ ἐλαστικότης αὐτῆς εἶναι σταθεραί ἔχομεν

$$M=\mu-\frac{3x}{l^3}\int_0^l \mu x\,dx$$

59.) Ἐπειδή δέ προσδιωρίσαμεν ἤδη μ [ ] διά τάς

κυριωτέρας περιπτώσεις, αἵτινες ἀπαντῶσιν ἐν τῇ πράξει δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν εὐκόλως καί M.

1ον) φορτία μεμονωμένα. Ἔστωσαν τά μεμονωμένα κατακόρυφα φορτία

$$P_1\ P_2 \dots P_\eta$$

ἐπενεργοῦντα εἰς ἀποστάσεις

$$\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_\eta$$

ἀπό τοῦ ἁπλῶς στηριζομένου ἄκρου B ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν [ ]

$$\mu=\frac{l-x}{l}\sum_0^x P\alpha+\frac{x}{l}\sum_x^l P(l-\alpha)$$

2ον) Φορτία συνεχῆ. Ἐάν τά φορτία P εἶναι συνεχῆ καί παραστήσωμεν διά $p\,d\alpha$ τό ὑπό τοῦ στοιχειώδους μήκους $d\alpha$ φερόμενον φορτίον ἔχομεν

$$\mu=\frac{l-x}{l}\int_0^x p\alpha.\,d\alpha+\frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha$$

ἔνθα p εἶναι συνάρτησις τοῦ α. καί ἐάν ἡ δοκός εὑρίσκεται ὑπό τήν σύγχρονον ἐπενέργειαν συνεχῶν καί μεμονωμένων φορτίων ἔχομεν

3ον) φορτία μεμονωμένα καί συνεχῆ.

$$\mu=\frac{l-x}{l}\int_0^x p\alpha.\,d\alpha+\frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha+\frac{l-x}{l}\sum_0^x P\alpha+\frac{x}{l}\sum_x^l P(l-\alpha)$$

Φορτίον ὁμοιομόρφως διηρημένον ἐπί τῆς δοκοῦ

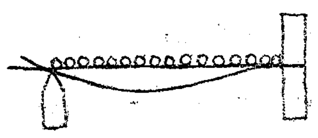
60.) Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν [ ]

$$\mu=\frac{px}{2}(l-x)\qquad\int_0^l \mu x\,dx=\frac{pl^4}{24}$$

ὅθεν

$$M=\frac{px(l-x)}{2}-\frac{plx}{8}=\frac{px}{8}(3l-4x)$$

μεγίστη τιμή τοῦ $M=-\frac{pl}{8}$ ἐν τῇ ἐμπεπηγμένῃ ~~τομῇ~~ ἐν ᾧ εὑρομεν [ ]



μεγίστη τιμή τοῦ $\mu = \frac{pl^2}{8}$ ἐν τῇ τομῇ $x = \frac{l}{2}$

M μηδενίζεται ἐν τῇ τομῇ $x = \frac{3}{4} l$

ἐξίσωσις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς $y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{48}\left[\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right]$ καί $f = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{192}$

Ἕν καί μόνον μεμονωμένον φορτίον. 61.) Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν

$$\mu = P\frac{l-\alpha}{l}x \quad \text{ἐάν } x < \alpha$$

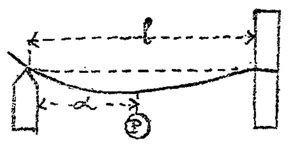
καί

$$\mu = \frac{P\alpha}{l}(l-x) \quad \text{ἐάν } x > \alpha$$

ὥστε

$$\int_0^l \mu x\,dx = \int_0^\alpha P\frac{l-\alpha}{l}x^2\,dx + \int_\alpha^l \frac{P\alpha}{l}(l-x)x\,dx = \frac{P\alpha}{6}(l^2-\alpha^2)$$

ὅθεν



$$M = \frac{P(l-\alpha)}{l}x - \frac{P\alpha(l^2-\alpha^2)}{2l^3}x = \frac{P(l-\alpha)^2(2l+\alpha)}{2l^3}x \quad \text{ἐάν } x < \alpha$$

καί

$$M = \frac{P\alpha}{l}(l-x) - \frac{P\alpha(l^2-\alpha^2)}{2l^3}x = \frac{P\alpha}{2l^3}\left[2l^3 + (\alpha^2 - 3l^2)x\right] \quad \text{ἄν } x > \alpha$$

Τήν κάμπτουσαν ῥοπήν ἐν τῇ ἐμπεπηγμένῃ τομῇ εὑρίσκομεν θέτοντες $x = l$ ὅθεν

$$M_l = \frac{P\alpha}{2l^2}(\alpha^2 - l^2)$$

Τήν ἐν τῇ τομῇ τοῦ φορτίου κάμπτουσαν ῥοπήν εὑρίσκομεν θέτοντες $x = \alpha$ ὅθεν

$$M_\alpha = \frac{P\alpha}{2l^3}(l-\alpha)^2(2l+\alpha).$$

Φορτία οἱαδήποτε. 62.) Ἐάν τά φορτία εἶναι μεμονωμένα τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα

$$\int_0^l \mu x\,dx$$

ἀντικαθίσταται διά τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος

$$\sum_0^l \frac{P\alpha}{6}(l^2-\alpha^2)$$

ὅθεν

$$M = \frac{x}{l}\sum_x^l P(l-\alpha) + \frac{l-x}{l}\sum_0^x P\alpha - \frac{x}{2l^3}\sum_0^l P\alpha(l^2-\alpha^2)$$

ἤ

$$M = \sum_0^x P\alpha - \frac{x}{2l^3}\left[\sum_0^x P\alpha(3l^2-\alpha^2) - \sum_x^l P(l-\alpha)^2(2l+\alpha)\right]$$

Διατμητική ἔντασις. 63.) Τήν σχετικήν τῇ τομῇ x διατμητικήν ἔντασιν προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$\tau = -\frac{dM}{dx}$$

καί ἔχομεν

1ον) ἐν τῇ περιπτώσει μεμονωμένων φορτίων οἱωνδήποτε

$$\tau = \frac{1}{2l^3}\left[\sum_0^x P\alpha(3l^2-\alpha^2) - \sum_x^l P(l-\alpha)^2(2l+\alpha)\right]$$

2ον) Ἐν τῇ περιπτώσει συνεχοῦς καί ὁμοιομόρφου φορτίου p

$$\tau = p\left(x - \frac{3}{8}l\right)$$

3ον) ἐν τῇ περιπτώσει ἑνός καί μόνου μεμονωμένου φορτίου P.

$$\tau = -\frac{P}{2l^3}(l-\alpha)^2(2l+\alpha) \quad \text{ἐάν } x < \alpha$$

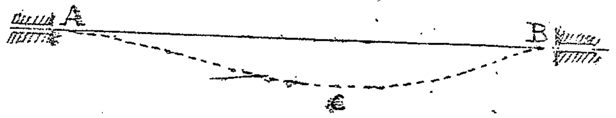
καί

$$\tau = \frac{P\alpha(3l^2-\alpha^2)}{2l^3} \quad \text{ἐάν } x > \alpha$$

II. Δοκός ἐμπεπηγμένη εἰς ἀμφότερα τ' ἄκρα αὐτῆς.

Θεμελιώδης πρότασις. 64) Ἐάν ἐπί δοκοῦ AB ἐμπεπηγμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς A καί B (ὑποτιθεμένων ἰσοϋψῶν) ἐφαρμόσωμεν κατακόρυφα φορτία $\frac{Mdx}{EI}$ ἔνθα M ἐμφαίνει τήν κάμπτουσαν ῥοπήν ἐν τῇ τομῇ x τά φορτία ταῦτα εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Τῷ ὄντι μετά τήν ἐπενέργειαν τῶν φορτίων τούτων ἡ κεντρική ἴς ἀλλοιοῦται καί λαμβάνει τήν μορφήν ACB. γνωρίζομεν δέ, ὅτι ἐν τῇ ἠλλοιωμένῃ ταύτῃ μορφῇ της ἡ κεντρική ἴς συμπίπτει μέ μίαν τῶν *funiculaires* καμπύλων τῶν φορτίων $\frac{Mdx}{EI}$ καί δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ταῦτα διά δύο δυνάμεων, αἵτινες ἐφάπτονται τῆς καμπύλης ACB παρά τ' ἄκρα αὐτῆς AB. Ἐπειδή δέ αἱ δύο αὗται δυνάμεις προέρχονται ἐκ κατακορύφων δυνάμεων εἶναι ἴσαι καί ἀντιθέτου φορᾶς.



ὥστε αἱ δυνάμεις $\frac{Mdx}{EI}$ ἰσορροποῦσιν, καί ἐπειδή εἶναι παράλληλοι τό ὁλοκληρωτικόν ἄθροισμα αὐτῶν μηδενίζεται, ὡς καί ἡ ῥοπή αὐτῶν ὡς πρός τό σημεῖον A λ.χ. ὥστε

$$\int \frac{Mdx}{EI} = 0 \qquad \int \frac{Mdx}{EI}x = 0$$

ἐάν ὁ συντελεστής τῆς ἐλαστικότητος δέν μεταβάλλεται ἀπό

τομῆς εἰς τομήν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τάς ἀνωτέρω σχέσεις διά τῶν ἀκολούθων,

$$\int \frac{Mdx}{I} = 0 \qquad \int \frac{Mxdx}{I} = 0$$

Προσδιορισμός τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν. 65.) Τήν κάμπτουσαν ῥοπήν ἐν τῇ τομῇ x προσδιορίζομεν ὡς ἀνωτέρω διά τῆς σχέσεως.

$$(2) \qquad M = \mu + \alpha x + \beta$$

ἔνθα α καί β εἶναι σταθεραί ποσότητες, τάς ὁποίας προσδιορίζομεν διά τῶν σχέσεων [ ]

$$\int \frac{M}{I}dx = 0 \qquad \int \frac{Mx}{I}dx = 0$$

καί ἀντικαθιστῶντες M διά τῆς τιμῆς αὐτοῦ

$$\int \frac{\mu+\alpha x+\beta}{I}dx = 0 = \int \frac{\mu}{I}dx + \alpha\int\frac{x}{I}dx + \beta\int\frac{dx}{I}$$

$$(3) \qquad \int \frac{\mu+\alpha x+\beta}{I}x\,dx = 0 = \int \frac{\mu x}{I}dx + \alpha\int\frac{x^2}{I}dx + \beta\int\frac{x}{I}dx$$

Ἐάν οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων x ἀναχωροῦσι ἀπό τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων τῆς δοκοῦ, τ' ὁλοκληρωτικά ἀθροίσματα θά ληφθῶσι μεταξύ τῶν ὁρίων $x = 0$, καί $x = l$.

Ἐάν οἱ αὐτοί ἄξονες ἀναχωροῦσιν ἀπό τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ, τά ὁλοκληρωτικά ἀθροίσματα θά ληφθῶσι μεταξύ τῶν ὁρίων $x = -\frac{l}{2}$ καί $x = \frac{l}{2}$.

66.) Ἐάν ἡ τομή τῆς δοκοῦ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τό μέσον αὐτῆς καί λάβωμεν ἐκεῖ τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων τῶν ἀξόνων ἔχομεν

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{xdx}{I} = 0 \qquad \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{I} = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{I}, \quad \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{xdx}{I} = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{x^2dx}{I}$$

κατά συνέπειαν

$$(3^{bis})\qquad \alpha = -\frac{\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu x dx}{I}}{2\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{x^2 dx}{I}} \qquad \beta = -\frac{\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu dx}{I}}{2\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{dx}{I}}$$

εάν δέ υποθέσωμεν καί τό φορτίον συμμετρικόν, έχομεν

$$(3^{ter})\quad \begin{cases} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu x dx}{I} = 0 \quad \text{καί} \quad \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu dx}{I} = 2\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu dx}{I} \\ \text{όθεν} \\ \alpha = 0 \qquad \beta = -\frac{\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu}{I} dx}{\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{dx}{I}} \end{cases}$$

Εάν ή τομή είναι ομοιόμορφως οι τύποι (3^{bis}) εφαρμόζονται καί μετατρέπονται είς

$$(3'^{bis})\qquad \alpha = -\frac{12}{\ell^3}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \mu x dx \qquad \beta = -\frac{1}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \mu dx$$

καί έν τή περιπτώσει ταύτη

$$(4)\qquad M = \mu - \frac{12x}{\ell^3}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \mu x dx - \frac{1}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \mu dx$$

Εάν ή αφετηρία τών αξόνων τών συντεταγμένων ληφθή παρά τό πρός τ' αριστερά άκρον τής δοκού, αί εξισώσεις (3) εφαρμοζόμεναι είς δοκού ομοιομόρφου τομής δίδουσιν

$$\int_0^{\ell} \mu dx + \alpha\frac{\ell^2}{2} + \beta\ell = 0 \qquad \int_0^{\ell} \mu x dx + \alpha\frac{\ell^3}{3} + \beta\frac{\ell^2}{2} = 0$$

όθεν

$$\alpha = \frac{12}{\ell^3}\int_0^{\ell} \mu\left[\frac{\ell}{2} - x\right]dx \quad \beta = -\frac{12}{\ell^2}\int_0^{\ell} \mu\left[\frac{\ell}{3} - \frac{x}{2}\right]dx$$

καί

$$(5)\qquad M = \mu + \frac{12x}{\ell^3}\int_0^{\ell} \mu\left[\frac{\ell}{2} - x\right]dx - \frac{12}{\ell^2}\int_0^{\ell} \mu\left(\frac{\ell}{3} - \frac{x}{2}\right)dx$$

1ον) Συνεχές φορτίον ομοιομόρφως διανεμημένον.

67) Τά μήκη x μετρούμεν από τού μέσου τής δοκού καί έχομεν

$$\mu = \frac{p}{2}\left[\frac{\ell^2}{4} - x^2\right]$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \mu x dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \mu dx = 2\int_0^{\frac{\ell}{2}} \mu dx = p\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\ell^2}{4} - x^2\right)dx = \frac{p\ell^3}{12}$$

καί ό τύπος (4) μάς δίδει

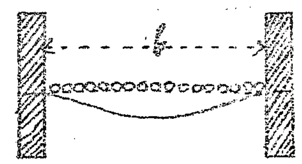
$$M = \frac{p}{2}\left[\frac{\ell^2}{4} - x^2\right] - \frac{p\ell^2}{12} = \frac{p}{2}\left[\frac{\ell^2}{12} - x^2\right]$$

Μεγίστη θετική τιμή τού $M = \frac{p\ell^2}{24}$ είς τό μέσον τής δοκού ίσούται δέ μέ τό $\frac{1}{3}$ μόνον τής τομής, ήν λαμβάνει τούτο, όταν ή δοκός υποβαστάζεται απλώς χωρίς νά είναι εμπεπηγμένη.
Η μεγίστη αρνητική τιμή τού $M = \frac{p\ell^2}{12}$ έν ταίς τομαίς τών στηριγμάτων σημεία d'inflexion,

$$x = \pm\frac{\ell}{2\sqrt{3}}$$

εξίσωσις τής ελαστικής καμπύλης

$$y = \frac{P}{EI}\frac{\ell^3}{24}\left[\frac{x^2}{\ell^2} - 2\frac{x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4}\right]$$



καί

$$f = \frac{P}{EI}\frac{\ell^3}{384}$$

2ον) Μεμονωμένον φορτίον P.

68.) Τά x λογίζονται από τής πρός τ' αριστεράν άκρας τής δοκού καί έχομεν,

$$\mu = P\frac{\ell - \alpha}{\ell}x \qquad \text{εάν} \quad x < \alpha$$

$$\mu = \frac{P\alpha(l-x)}{l} \qquad \text{ἐάν } x > \alpha$$

ὁ τύπος (5) δίδει

$$\int_0^l \mu\left[\frac{l}{2}-x\right]dx = \int_0^\alpha \mu\left[\frac{l}{2}-x\right]dx + \int_\alpha^l \mu\left(\frac{l}{2}-x\right)dx$$

ἤ

(8)

$$\int_0^l \mu\left(\frac{l}{2}-x\right)dx = \frac{P}{l}\left[(l-\alpha)\int_0^\alpha x\left(\frac{l}{2}-x\right)dx + \alpha\int_\alpha^l (l-x)\left(\frac{l}{2}-x\right)dx\right]$$

$$= \frac{P\alpha}{12}\left(2\alpha^2 - 3l\alpha + l^2\right) = \frac{P\alpha}{12}(l-\alpha)(l-2\alpha)$$

ἐπίσης

$$\int_0^l \mu\left[\frac{l}{3}-\frac{x}{2}\right]dx = \frac{P}{l}\left[(l-\alpha)\int_0^\alpha x\left[\frac{l}{3}-\frac{x}{2}\right]dx + \alpha\int_\alpha^l (l-x)\left(\frac{l}{3}-\frac{x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{P\alpha}{12}\left[\alpha^2 - 2\alpha l + l\right] = \frac{P\alpha}{12}(l-\alpha)^2$$

ὅθεν

$$M = \frac{P(l-\alpha)}{l^3}\left[l^2 + \alpha(l-2\alpha)\right]x - \frac{P\alpha}{l^2}(l-\alpha)^2 = \frac{P(l-\alpha)^2}{l^3}\left[(l+2\alpha)x - l\alpha\right] \quad \text{ἐάν } x < \alpha$$

ἤ

$$M = \frac{P\alpha}{l^3}\left[l^2 - (l-\alpha)(l-2\alpha)\right](l-x) - \frac{P\alpha^3(l-\alpha)}{l^2} = \frac{P\alpha^2}{l^3}\left[(3l-2\alpha)(l-x) - l(l-\alpha)\right] \quad \text{ἐάν } x > \alpha$$

Ἐν τῇ τομῇ τοῦ φορτίου P $x=\alpha$ καί ἔχομεν

$$M_\alpha = \frac{2P\alpha^2(l-\alpha)^2}{l^3}$$

ἔνθα $\alpha = \frac{l}{2}$ ἔχομεν

$$M = \frac{P}{8}(l-4x)$$

τό σημεῖον τῆς τῆς inflexion εἶναι εἰς τό $\frac{1}{4}$ τοῦ ὅλου μήκους.

Μεμονωμένα φορτία οἱαδήποτε. 69.) Τά x λογίζονται ἀπό τῆς ἀριστερᾶς ἄκρας, καί ἔχομεν

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^x P\alpha + \frac{x}{l}\sum_x^l P(l-\alpha)$$

οἱ τύποι (8) δίδουσιν

$$\int^l \mu\left(\frac{l}{2}-x\right)dx = \frac{1}{12}\sum_0^l P\alpha(l-\alpha)(l-2\alpha)$$

$$\int_0^l \mu\left(\frac{l}{3}-\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{12}\sum_0^l P\alpha(l-\alpha)^2$$

καί ὁ τύπος (5) δίδει

$$M = \frac{l-x}{l}\sum_0^x P\alpha + \frac{x}{l}\sum_x^l P(l-\alpha) + \frac{x}{l^3}\sum_0^l P\alpha(l-\alpha)(l-2\alpha) - \frac{1}{l^2}\sum_0^l P\alpha(l-\alpha)^2$$

Συνεχῆ φορτία οἱαδήποτε. 70.) Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν

$$P = p\,d\alpha \qquad \text{ὥστε}$$

$$M = \frac{l-x}{l}\int_0^x p\alpha\,d\alpha + \frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha + \frac{x}{l^3}\int_0^l p\alpha(l-\alpha)(l-2\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{l^2}\int_0^l p\alpha(l-\alpha)\,d\alpha.$$

Διατμητική ἔντασις. 71.) Τήν διατμητικήν ἔντασιν προσδιορίζομεν διά τοῦ τύπου $\tau = \frac{dM}{dx}$

καί ἔχομεν

1ον) Ἐν τῇ περιπτώσει οἱωνδήποτε μεμονωμένων φορτίων

$$\tau = -\sum_x^l P + \frac{1}{l}\left[\sum_0^l P\alpha - \frac{1}{l^3}\sum_0^l P\alpha(l-\alpha)(l-2\alpha)\right]$$

2ον) Ἕν καί μόνον μεμονωμένον φορτίον

$$\tau = -\frac{P(l-\alpha)^2(l+2\alpha)}{} \quad \text{--- ἐάν } x < \alpha$$

καί

$$\tau = \frac{P\alpha[l^2-(l-\alpha)(l-2\alpha)]}{l^3} = \frac{P\alpha^2(3l-2\alpha)}{l^3} \quad \text{ἐάν } x > \alpha$$

3ον) συνεχές φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον

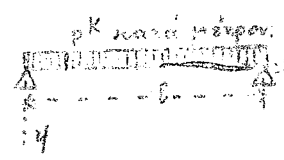
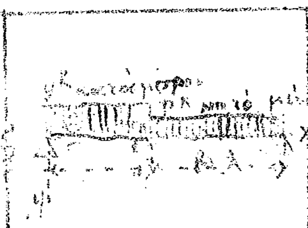
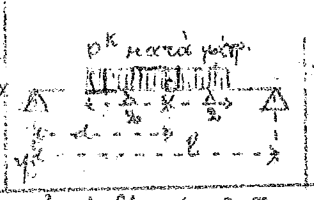
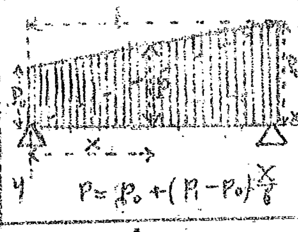
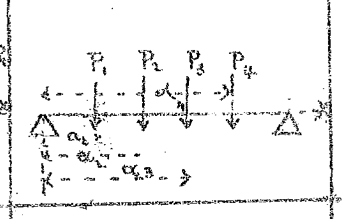
$$\tau = px$$

(ὑπολογιζομένων τῶν x ἐν τῇ τρίτῃ ταύτῃ περιπτώσει ἀπό τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ)

Αἱ τιμαί τοῦ τ εἰς τ' ἄκρα τῆς δοκοῦ. δίδουσι τάς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων.

Ἀντοχή ὕλης

Ἀνακεφαλαίωσις τῶν σχετικῶν ταῖς δοκοῖς μέ δύο μόνον στηρίγματα καί ὁμοιόμορφον τομήν τύπων

Φύσις τοῦ φορτίου	 p^K κατά μέτρον	 p^K κατά μέτρον, q^K κατά μέτρον	 p^K κατά μέτρ.	 $p = p_o + (p_1 - p_o)\frac{x}{\ell}$	 P_1 P_2 P_3 P_4
		Δοκός στηριζομένη ἐπί δύο ἁπλῶν στηριγμάτων			
ἀντιδράσεις τοῦ στηρίγματος (2) { ἀριστεροῦ / δεξιοῦ	$R_o = \frac{1}{2} p\ell$ $R_1 = \frac{1}{2} p\ell$	$R_o = \frac{1}{2} p\ell + (q-p)\lambda\frac{\ell - \frac{\lambda}{2}}{\ell}$ $R_1 = \frac{1}{2} p\ell + (q-p)\frac{\lambda^2}{2\ell}$	$R_o = p\lambda\frac{\ell - \alpha}{\ell}$ $R_1 = p\lambda\frac{\alpha}{\ell}$	$R_o = \frac{\ell}{6}(2p_o + p_1)$ $R_1 = \frac{\ell}{6}(p_o + 2p_1)$	$R_o = \frac{1}{\ell}\sum_o^{\ell} P(\ell - \alpha)$ $R_1 = \frac{1}{\ell}\sum_o^{\ell} P\alpha$
Κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ x (2)	$M = \frac{1}{2} p x(\ell - x)$	$M = R_o x - \frac{q x^2}{2}$ ἐάν $x < \lambda$ $M = R_1(\ell - x) - p\frac{(\ell - x)^2}{2}$ ἐάν $x > \lambda$	$M = R_o x$ ἐάν $x < \alpha - \frac{\lambda}{2}$ $M = R_o x - \frac{p}{2}(x + \frac{\lambda}{2} - \alpha)^2$ ἐάν $\alpha - \frac{\lambda}{2} < x < \alpha + \frac{\lambda}{2}$ $M = R_1 x$ ἐάν $x > \alpha + \frac{\lambda}{2}$	$M = R_o x - \frac{x^2}{6}(2p_o + p)$ $M = \frac{x(\ell - x)}{6\ell}[p_1(\ell + x) + p_o(2\ell - x)]$	$M = R_o x - \sum_o^{x} P(x - \alpha)$
Διατμητική ἔντασις (3)	$T = p(x - \frac{\ell}{2})$	$T = qx - R_o$ ἐάν $x < \lambda$ $T = -p(\ell - x) + R_1$ ἐάν $x > \lambda$	$T = -R_o$ ἐάν $x < \alpha - \frac{\lambda}{2}$ $T = -R_o + p(x + \frac{\lambda}{2} - \alpha)$ ἐάν $\alpha - \frac{\lambda}{2} < x < \alpha + \frac{\lambda}{2}$ $T = -R_1$ ἐάν $x > \alpha + \frac{\lambda}{2}$	$T = p_1\left(\frac{-\ell^2 - 3x^2}{6\ell}\right) + p_o\left(\frac{2\ell^2 - 6\ell x + 3x^2}{6\ell}\right)$	$T = -R_o + \sum_o^{x} P$
Μεγίστη κάμπτουσα ῥοπή [ἔνθα $T = 0$]	$M_{μεγ.} = \frac{p\ell^2}{8}$	$M_{μεγ} = \frac{R_o^2}{2q}$ ἐάν $\frac{R_o}{q} < \lambda$ ἤ $\frac{\lambda}{\ell} > 1 + \sqrt{\frac{p}{q}}$ $M_{μεγ.} = \frac{R_1^2}{2p}$ ἐάν $\frac{\lambda}{\ell} < 1 + \sqrt{\frac{p}{q}}$	$M_{μεγ.} = R_o\left(\frac{R_o}{2p} + \alpha - \frac{\lambda}{2}\right)$	———	$M_{μεγ} = R_o x_o - \sum_o^{x_o} P(x_o - \alpha)$ (ἔνθα x_o εἶναι ἡ τιμή τοῦ x διά τήν ὁποίαν T ἀλλάσσει τό σημεῖον αὐτοῦ) (4)
		Δοκός ἐμπεπηγμένη εἰς ἀμφότερα τά στηρίγματα			
Κάμπτουσα ῥοπή ἐπί τοῦ στηρίγματος { ἀριστεροῦ / δεξιοῦ	$M_o = -\frac{p\ell^2}{12}$ $M_1 = -\frac{p\ell^2}{12}$				$M_o = -\frac{1}{\ell^2}\sum_o^{\ell} P\alpha(\ell - \alpha)^2$ $M_1 = -\frac{1}{\ell^2}\sum_o^{\ell} P\alpha(\ell - \alpha)$
ἀντιδράσεις τοῦ στηρίγματος { ἀριστεροῦ / δεξιοῦ	$R_o = \frac{1}{2} p\ell$ $R_1 = \frac{1}{2} p\ell$				$R_o = \frac{1}{\ell}\sum_o^{\ell} P(\ell - \alpha)$ $R_1 = \frac{1}{\ell}\sum_o^{\ell} P$
Κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ x	$M = \frac{-p\ell^2}{12} + \frac{px(\ell - x)}{2}$				$M = M_o + R_o x - \sum_o^{x} P(x - \alpha)$
Διατμητική ἔντασις	$T = p(x - \frac{\ell}{2})$				$T = -R_o + \sum_o^{x} P$
Μεγίστη θετική τιμή τῆς καμπτούσης ῥοπῆς [παρά τό σημεῖον ἔνθα $T = 0$. Τήν μεγίστην ἀρνητικήν τιμήν λαμβάνει ἐπί τῶν στηριγμάτων]	$M_{μεγ} = \frac{p\ell^2}{24}$				$M = M_o + R_o x_o - \sum_o^{x_o} P(x_o - \alpha)$ ἔνθα x_o ἐμφαίνει τήν τιμήν τοῦ x διά τήν ὁποίαν T ἀλλάσσει τό σημεῖον του.

Δοκός στηριζομένη εἰς τό ἄκρον ($x = \ell$) ἐμπεπηγμένη εἰς τό ἄκρον ($x = 0$) καί φέρουσα φορτίον p ὁμοιομόρφως διανεμημένον.

Κάμπτουσα ῥοπή παρά τῷ σημείῳ $x = 0$ .... $M_o = -\frac{p\ell^2}{8}$

Ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων $\begin{cases} x = 0 \\ x = \ell \end{cases}$ .... $R_o = \frac{5}{8} p\ell$, $R_1 = \frac{3}{8} p\ell$

κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ x ——— $M = \frac{p}{8}[5\ell x - 4x^2 - \ell^2]$

διατμητική ἔντασις $T = p(x - \frac{5}{8}\ell)$

Μεγίστη θετική ῥοπή $M_{μεγ.} = \frac{9}{128} p\ell^2$

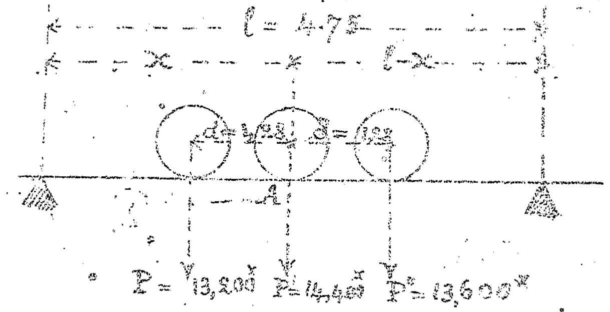
(1) Ὑπολογιζομένη θετικῶς ἐκ τῶν κάτω πρός τ' ἄνω
(2) " " ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά
(3) " " ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω
(4) x_o συμπίπτει κατ' ἀνάγκην μέ ἕν α, δι' ἕν καί μόνον φορτίον ἔχομεν $x_o = \alpha$

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τὰς διαστάσεις τῶν δοκῶν δύο γεφυρῶν ἐκ τῶν συνήθως ἐν χρήσει παρὰ ταῖς σιδηροδρομικαῖς γραμμαῖς.

1ον) Δοκὸς 4,75 μήκους ὑπὸ τὸ σιδηροῦν ἔλασμα. 72.) Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ μεγαλειτέρα ἁτμάμαξα ἡ διερχομένη ἐπὶ τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς φέρεται ὑπὸ τριῶν ἀξόνων, κειμένων εἰς ἀπόστασιν d ἀπ' ἀλλήλων, ὧν ὁ πρῶτος φέρει βάρος 13200 ὁ δεύτερος 14400 καὶ ὁ τρίτος 13600 χιλιόγραμμα.

Δι' ὡρισμένην τινὰ θέσιν τῆς ἁτμαμάξης, κάμπτουσα ῥοπὴ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν αὐτῆς ἐν τῇ τομῇ A. Προτιθέμεθα ἐνταῦθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν



τιμὴν ταύτην καὶ τὴν θέσιν τῆς ἁτμαμάξης ἐπὶ τῆς δοκοῦ εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλειτέρα κόπωσις.

Ἐφαρμόζοντες ἀπ' εὐθείας τὸν τύπον [§ 53]

$$M=\frac{l-x}{l}\left[\sum_0^x P\alpha+\int_0^x p\alpha\,d\alpha\right]+\frac{x}{l}\left[\sum_x^l P(l-\alpha)+\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha\right]$$

ἔχομεν ἐνταῦθα

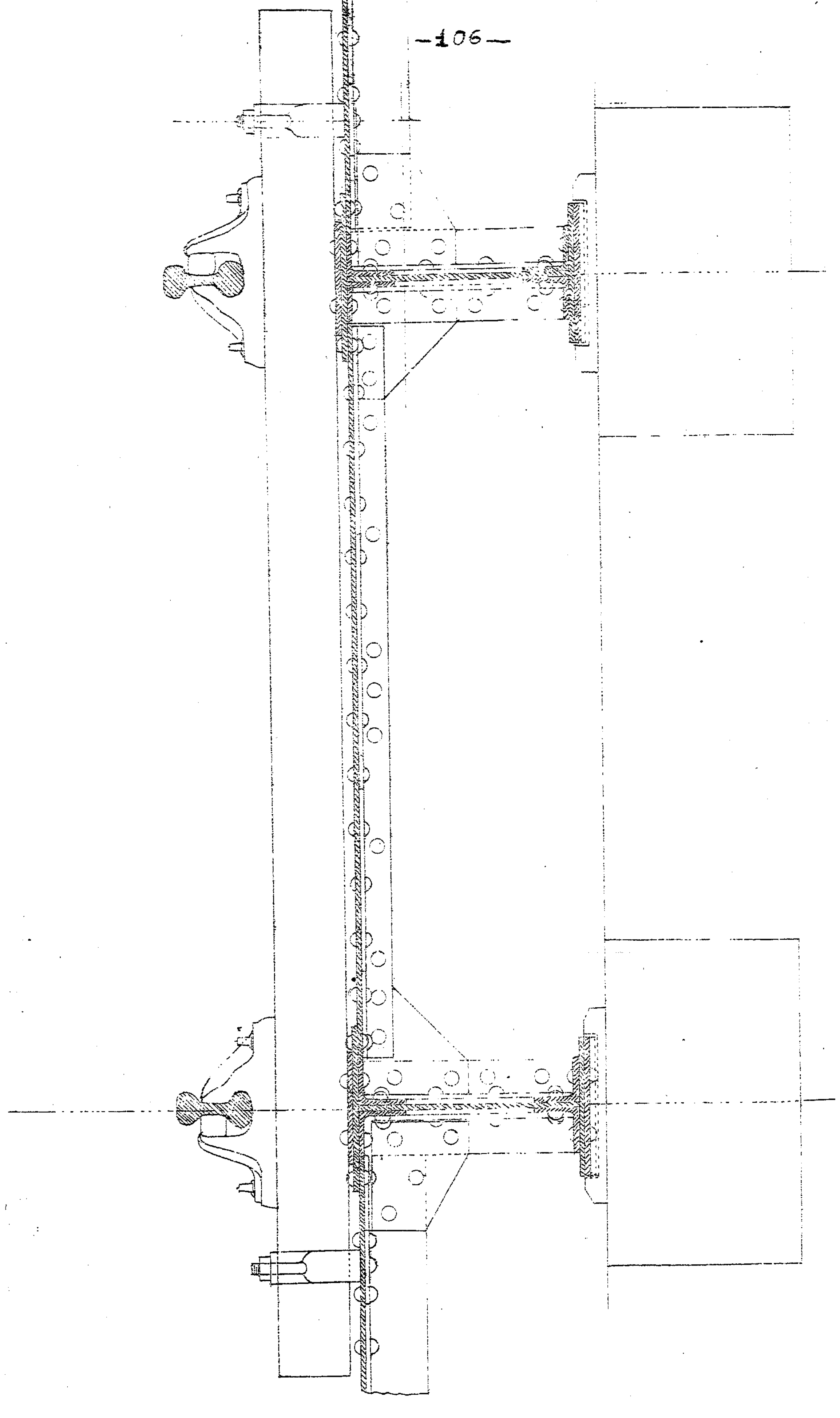
$$M=\frac{P}{l}(l-x)(x-d)+\frac{P''}{l}x(l-x-d)+\frac{P'}{l}x(l-x)+\frac{p}{2}x(l-x)$$

διότι τὴν κάμπτουσαν ῥοπήν, ἣν ὑπολογίζομεν καὶ ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς [illegible].

Θέτοντες. $P=\Sigma_0 P$

καὶ παριστῶντες διὰ q τὴν [illegible]

[illegible]



στηρίγματος ἔχομεν

$$q = Q\frac{l-x}{l} + (P - P'')\frac{d}{l}$$

ἡ ἐκ τοῦ βάρους τῆς μηχανῆς προκύπτουσα κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ A εἶναι [§ 54.] $\mathfrak{M}_1 = \frac{p}{2}\,x(l-x)$

ὥστε ἡ ὁλική κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ A εἶναι

$$M = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1 = \frac{P}{l}(l-x)(x-d) + \frac{P''}{l}x(l-x-d) + \frac{P'}{l}x(l-x) + \frac{p}{2}x(l-x)$$

Τό σημεῖον A τῆς δοκοῦ ἔνθα $\mathfrak{M}$ λαμβάνει τήν μεγαλειτέραν τιμήν αὐτοῦ προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0 = Q\,\frac{l-2x}{l} + (P - P'')\frac{d}{l}$$

ὅθεν

$$x = \frac{l}{2} + \frac{P - P''}{2Q}\,d = \frac{4,75}{2} + \frac{(13200-13600)\,1.28}{2 \times 41200} = 2^{\mu},369$$

καί ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμή τοῦ $\mathfrak{M}$ εἶναι

$$\mathfrak{M} = 41200\,\frac{4,75 \times 2,369 - \overline{2,369}^{2}}{4.75} + (13200-13600)\frac{1,28 \times 2,369}{4,75} - 13200 \times 1,28$$

$$\mathfrak{M} = 31774$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕν μέτρον τῆς δοκοῦ ζυγίζει 900 χλ. ἔχομεν

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{p}{2}(lx - x^2) = \frac{900}{2}\left[4,75 \times 2,369 - \overline{2,369}^{2}\right] = 2538$$

Ἡ μεγίστη τιμή τῆς καμπτούσης ῥοπῆς ἐν τῇ τομῇ A εἶναι λοιπόν

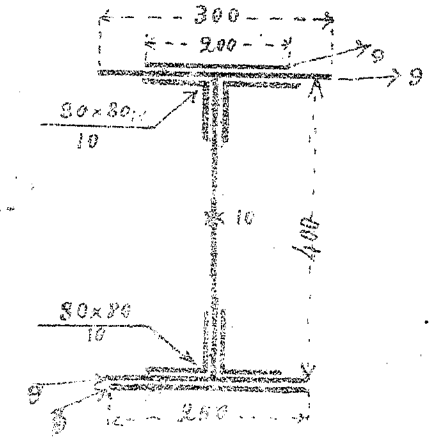
$$M = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1 = 31774 + 2538 = 34312$$

διά τοῦ M δυνάμεθα ἤδη νά προσδιορίσωμεν τήν τομήν τῆς δοκοῦ.

Τό ἔναντι διάγραμμα παριστᾷ τομήν δοκοῦ εἰς σχῆμα I, ἥν συνήθως μεταχειρίζονται ἐν τῇ περιπτώσει, ἥν πραγματευόμεθα ἐν τῇ τομῇ ταύτῃ ἔχομεν,

$$\frac{I}{u} = 0,0029134$$

διά τάς δύο δοκούς τῆς γραμμῆς ὅμου ἔχομεν



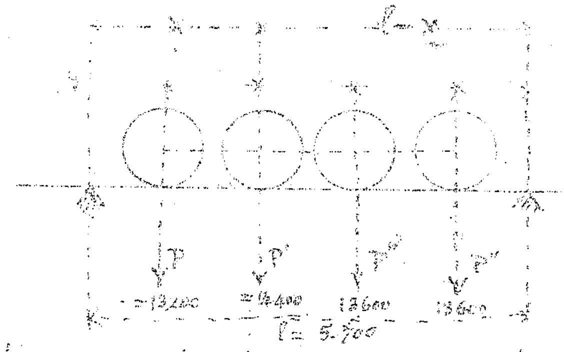
$$\frac{I}{n} = 0,0058289$$

Ἡ κόπωσις τοῦ σιδήρου κατά τετραγωνικόν χιλιοστόμετρον εἶναι

$$R = \frac{34312}{0,0058268} = 5,9 \text{ χιλ.}$$

γέφυρα 5^μ μήκους ἔνθα τό ἔλασμα ὑποβαστάζεται μεταξύ δύο δοκῶν.

73.) Ἐνιαία ἁτμάμαξα φέρεται ὑπό τεσσάρων ἀξόνων μετά τάς ἀποστάσεις, ὡς ἐμφαίνει τό ἔναντι διάγραμμα, καί ὑποθέτοντες ὅτι ἡ δοκός ζυγίζει 1000 χιλιογρ. κατά μέτρον, ὁ ὑπολογισμός τῆς καμπτούσης ῥοπῆς γίνεται κατά τόν αὐτόν τρόπον.



Διά τῆς ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου [§ 53.] εὑρίσκομεν τήν κάμπτουσαν ῥοπήν ἐν τῇ τομῇ ξ.

$$M = \frac{l-\xi}{l}\left[\sum_{\alpha}^{\xi} P\alpha + \int_0^{\xi} p\alpha\, d\alpha\right] + \frac{\xi}{l}\left[\sum_{\xi}^{l} P(l-\alpha) + \int_{\xi}^{l} p(l-\alpha)\, d\alpha\right]$$

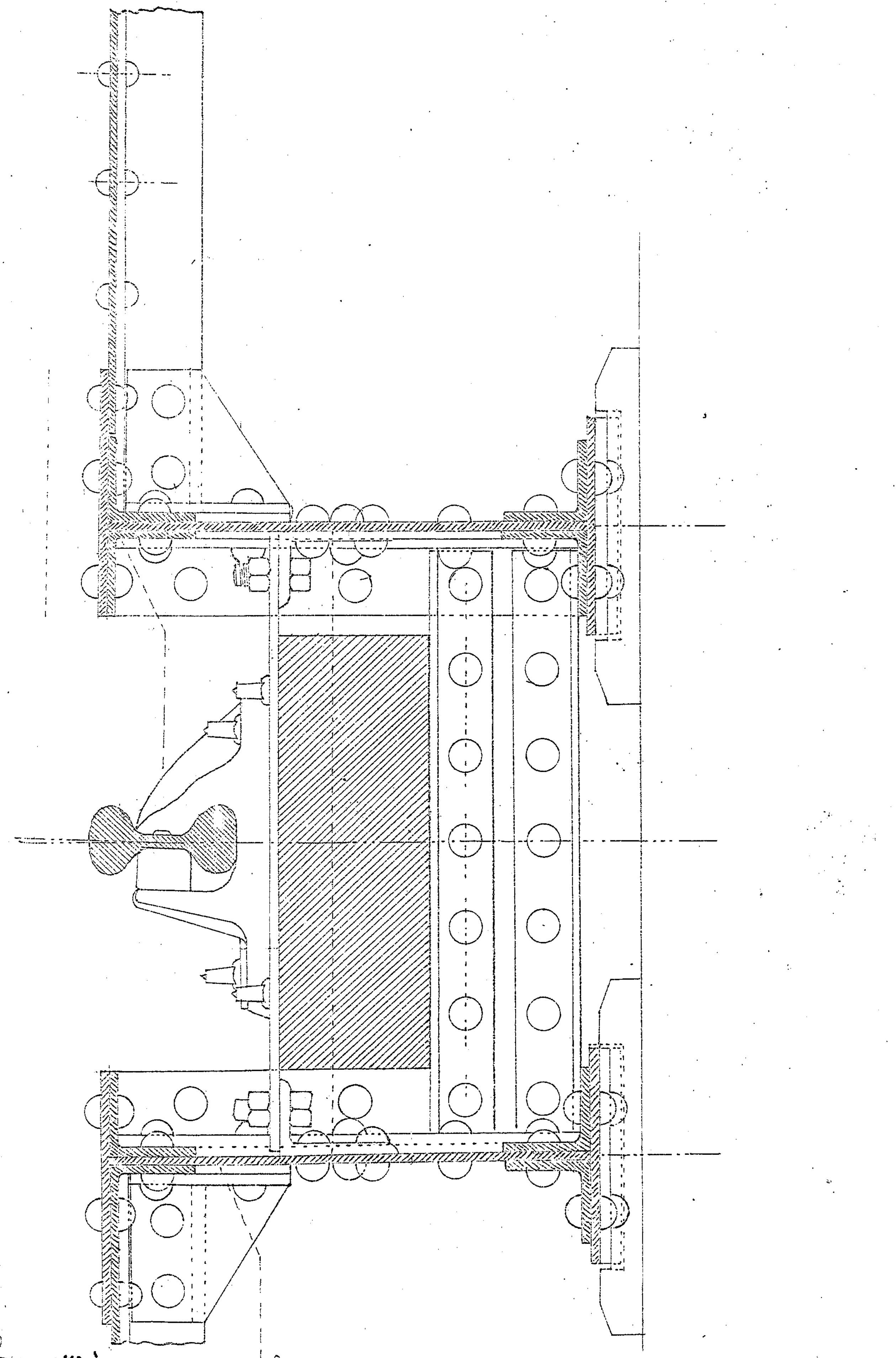
Τήν μεγίστην τιμήν αὐτῆς δι' ὡρισμένην θέσιν τῆς ἁτμαμάξης λαμβάνει αὐτή ἐν τῷ σημείῳ Α.

Τήν αὐτήν κάμπτουσαν ῥοπήν εὑρίσκομεν καί ἀπ' εὐθείας ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι θέτοντες

$$Q = P + P' + P''$$

ἡ ἐκ δέ τῆς δοκοῦ ἀντίδρασις q τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγματος ἡ ἐκ τοῦ βάρους τῆς μηχανῆς προκύπτουσα εἶναι

$$q = Q = \frac{(P+2P')(l-2x) - P''l'}{l}$$



ἡ ἐκ τοῦ αὐτοῦ βάρους τῆς μηχανῆς προκύπτουσα κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ A εἶναι

$$\mathfrak{M} = qx - Pd = Qx + \frac{d(P-2P'')}{l} - \frac{Qx^2}{l} - \frac{P''d'}{l} - Pd$$

Τήν μεγίστην δέ τιμήν τοῦ $\mathfrak{M}$ κατά τήν διάβασιν τῆς ἁμαμάξης εὑρίσκομεν διά τῆς σχέσεως.

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0 = Q + \frac{d(P-2P'')}{l} - \frac{2Qx}{l} - \frac{P''d'}{l}$$

ὅθεν

$$x = \frac{Ql + d(P-2P'') - P''d'}{2Q}$$

καί ἀντικαθιστῶντες τάς ἀριθμητικάς τιμάς

$$x = \frac{1}{2 \times 54800}\left[54800 \times 5,7 + 1,28\,(13.200 - 2 \times 13600) - 13600 \times 1,30\right] = 2^{\mu},525$$

καί ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμή τοῦ $\mathfrak{M}$ εἶναι

$$\mathfrak{M} = 54800 \times 2,525 + \frac{1}{5,70}\left[1,28 \times 2,525\,(13200 - 2 \times 13600) - 54800 \times \overline{2,525}^2 - 13600 \times 1,30 \times 2,525\right] - 13200 \times 1,28$$

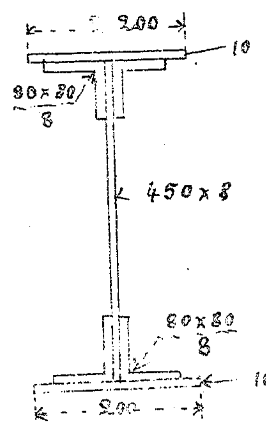
$$\mathfrak{M} = 44409$$

ἡ ἐκ τοῦ βάρους τῆς δοκοῦ προκύπτουσα κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ A εἶναι

$$\mathfrak{M}^o_1 = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} = \frac{1050 \times 5,70 \times 2,525}{2} - \frac{1050 \times \overline{2,525}^2}{2} = 4209$$

ἡ ὅλη κάμπτουσα ῥοπή εἶναι λοιπόν

$$M = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1 = 44409 + 4209 = 48618$$



Τό ἔναντι σχῆμα ἐμφαίνει τήν τομήν τῆς δοκοῦ ἥτις μᾶς δίδει

$$\frac{I}{u} = 0.002016623$$

καί ἐπειδή 4 τοιαῦται δοκοί ὑποβαστάζουσι τήν γραμμήν

$$\frac{I}{u} = 0.008066492$$

ἡ κόπωσις τοῦ σιδήρου κατά τετραγωνικόν χιλιοστόμετρον εἶναι

$$R = \frac{48618}{0,008066492} = 6^{\chi\iota\lambda.}$$

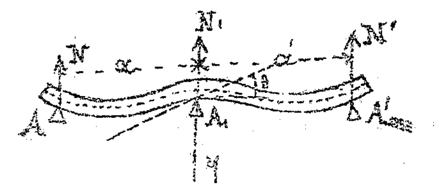
5.) Δοκός στηριζομένη ἁπλῶς ἐπί τριῶν ἤ πλειόνων στηριγμάτων.

74.) Ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀντιδράσεων τῶν στηριγμάτων ὅταν εἶναι ταῦτα πλείονα τῶν δύο, δέν δύναται νά ἐπιτευχθῇ διά τῶν κανόνων τῆς στατικῆς, ὅπως ἐπράξαμεν τοῦτο ἀνωτέρω, καί ἀναγκαζόμεθα νά προστρέξωμεν εἰς τόν ἀπ εὐθείας προσδιορισμόν τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν δι᾽ ἄλλης ὁδοῦ, ὅταν δέ προσδιορίσωμεν ταύτας, ἐπειδή

Αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις ἐν αἷς περιλαμβάνονται καί αἱ ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων συνδέονται πρός τήν κάμπτουσαν ῥοπήν διά γνωστῆς σχέσεως, δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἐμμέσως καί τάς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν διά τοῦ θεωρήματος τῶν Bertot ἤ Clapeyron ὅπερ μᾶς δίδει τήν συνδέουσαν τάς ἐν τρισίν οἱαισδήποτε τομαῖς καμπτούσας ῥοπάς σχέσιν.

Θεώρημα τοῦ Bertot ἤ Clapeyron ἤ θεώρημα τῶν τριῶν ῥοπῶν

75.) Θεωρήσωμεν δοκόν τινα στηριζομένην ἐπί οἱουδήποτε ἀριθμοῦ στηριγμάτων καί τό μεταξύ τριῶν στηριγμάτων A_1, A, A' περιλαμβανόμενον μέρος αὐτῆς. καί ὑποθέσωμεν τά τμήματα $A_1 A$ καί $A_1 A'$ φέροντα φορτία ὁμοιομόρφως διανεμημένα καί ἀμοιβαίως ἴσα μέ p καί p' ἔστωσαν δέ μ, μ_1 καί μ' αἱ κάμπτουσαι ῥοπαί ἐν ταῖς τομαῖς A, A_1 καί A' καί N, N' αἱ ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων A καί A' ἤ μᾶλλον, τό μέρος ἐκεῖνο τῶν ἀντιδράσεων, ὅπερ ὀφείλεται ταῖς μεταξύ τῶν στηριγμάτων A καί A' ἐπενεργούσαις ἐξωτερικαῖς δυνάμεσιν.



Ἡ κάμπτουσα ῥοπή μ παρά τό σημεῖον m εἰς ἀπόστασιν x τοῦ A ἐπί τοῦ $A_1 A'$ εἶναι

$$\mu = +\mu_1 + p\frac{x^2}{2} - N_1 x \qquad (1)$$

ὥστε

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \mu_1 + p\frac{x^2}{2} - N_1 x$$

καί ὁλοκληροῦντες δίς καί παριστῶντες διά θ τήν γωνίαν τῆς παρά τό σημεῖον α_1 ἐφαπτομένης μετά τῆς εὐθείας $A_1 A$ ἔχομεν

$$EI\frac{dy}{dx} = \mu_1 x + p\frac{x^3}{6} - N_1\frac{x^2}{2} + EI\,\varepsilon\varphi\theta$$

$$EIy = \mu_1\frac{x^2}{2} + p\frac{x^4}{24} - N_1\frac{x^3}{6} + xEI\,\varepsilon\varphi\theta$$

καί ἐπειδή παρά τό σημεῖον A' $x = \alpha'$ $y = 0$, ἔχομεν ἀντικαθιστῶντες

$$\mu_1\frac{\alpha'^2}{2} + p'\frac{\alpha'^4}{24} - N_1\frac{\alpha'^3}{6} + \alpha' EI\,\varepsilon\varphi\theta = 0$$

ἤ

$$\mu_1 \alpha' + p'\frac{\alpha'^3}{12} - N_1\frac{\alpha'^2}{3} + 2E\,\varepsilon\varphi\theta = 0$$

κατά τόν αὐτόν τρόπον διά τό τμῆμα $A_1 A$ θά εὑρίσκομεν τήν σχέσιν

$$\mu_1 \alpha + p\frac{\alpha^3}{12} - N_1\frac{\alpha^2}{3} - 2EI\,\varepsilon\varphi\theta = 0$$

καί προσθέτοντες αὐτάς

$$(2) \qquad \mu_1(\alpha + \alpha') + \frac{1}{12}(p\alpha^3 + p'\alpha'^3) - \frac{N_1}{3}(\alpha^2 + \alpha'^2) = 0$$

Ἀντοχή ὕλης

ἀλλά (1) μᾶς δίδει

$$\mu = \mu_1 + p\frac{\alpha^2}{2} - N_1\alpha$$
$$\mu' = \mu_1 + p'\frac{\alpha'^2}{2} - N_1\alpha'$$

πολλαπλασιάζοντες τήν πρώτην τῶν ἰσοτήτων τούτων ἐπί α τήν δευτέραν ἐπί α' καί προσθέτοντες εὑρίσκομεν

(3) $$\mu\alpha + \mu'\alpha' = \mu_1(\alpha + \alpha') + \frac{1}{2}(p\alpha^3 + p'\alpha'^3) - N_1(\alpha^2 + \alpha'^2)$$

παραβάλλοντες δέ τάς σχέσεις (2) καί (3) ἐξάγομεν

(4) $$\mu\alpha + \mu'\alpha' + 2\mu_1(\alpha + \alpha') - \frac{p\alpha^3 + p'\alpha'^3}{4} = 0$$

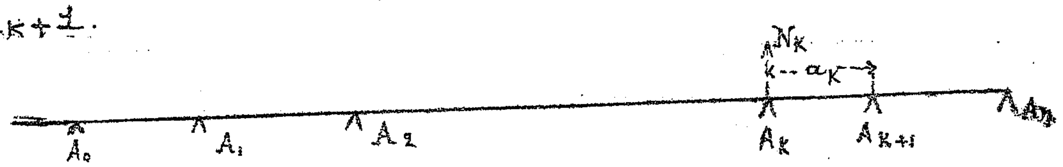
σχέσις ἥτις μᾶς δίδει τήν κάμπτουσαν ῥοπήν στηριζομένης τινός τομῆς ἐν συναρτήσει τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν ἐν ταῖς τομαῖς τῶν δύο παραπλησίων στηριγμάτων.

Ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν ῥοπῶν.

76.) Θεωρήσωμεν δοκόν στηριζομένην ἐπί πλειόνων στηριγμάτων $A_0, A_1, A_2, \cdots A_n$ καί ἔστωσαν

μ_k ἡ κάμπτουσα ῥοπή ἐν τῇ τομῇ τοῦ στηρίγματος A_k α_k τό μῆκος A_kA_{k+1}.

καί p_k τό κατά μονάδα μήκους φορτίον ἐπί τοῦ τμήματος A_kA_{k+1}.



παρατηροῦντες ὅτι μ_0 μ_n καί α_n εἶναι ἴσα τῷ μηδενί καί ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα τῶν τριῶν ῥοπῶν ἔχομεν

$$(1)\begin{cases} 2\mu_1(\alpha_0+\alpha_1) + \mu_2\alpha_1 = H_1 & \lambda_1 \\ \mu_1\alpha_1 + 2\mu_2(\alpha_1+\alpha_2) + \mu_3\alpha_2 = H_2 & \lambda_2 \\ \mu_2\alpha_2 + 2\mu_3(\alpha_2+\alpha_3) + \mu_4\alpha_3 = H_3 & \lambda_3 \\ \text{-------------} & \vdots \\ \text{-------------} & \vdots \\ \mu_{n-3}\alpha_{n-3} + 2\mu_{n-2}(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2}) + \mu_{n-1}\alpha_{n-2} = H_{n-2} & \lambda_{n-2} \\ \mu_{n-2}\alpha_{n-2} + 2\mu_{n-1}(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}) + \mu_n\alpha_{n-1} = H_{n-1} \end{cases}$$

ἔνθα $H_k = \frac{1}{4}(p_{k-1}\alpha^3_{k-1} + p_k\alpha^3_k)$

ἔχομεν οὕτω $n-1$ ἐξισώσεις καί $n-1$ ἀγνώστους $\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}$ τάς ὁποίας προσδιορίζουσιν αὗται

Τήν λύσιν αὐτῶν ἐκτελοῦμεν ὡς ἑξῆς

πολλαπλασιάζομεν τάς πρώτας $n-2$ ἐξισώσεις ἐπί τάς ἀορίστους ποσότητας $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_{n-2}$ καί προσθέτομεν κατά μέλη τάς $n-1$ ἐξισώσεις εὑρίσκομεν οὕτω

(2) $$\mu_1[\alpha_1\lambda_2 + 2(\alpha_0+\alpha_1)\lambda_1] + \mu_2[\alpha_1\lambda_1 + 2(\alpha_1+\alpha_2)\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3] + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \mu_k[\alpha_{k-1}\lambda_{k-1} + 2(\alpha_{k-1}+\alpha_k)\lambda_k + \alpha_k\lambda_{k+1}] + \cdots = \lambda_1H_1 + \lambda_2H_2 + \cdots + \lambda_{n-2}H_{n-2} + H_{n-1}$$

Ἐάν ἤδη προσδιορίσωμεν τάς ἀορίστους ποσότητας λ μηδενίζοντες ὅλους τούς συντελεστάς ἐκτός τόν τοῦ μ_1 διά τῶν συνθηκῶν

$$(3)\begin{cases} \lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_2(\alpha_1+\alpha_2) + \lambda_3\alpha_2 = 0 \\ \lambda_2\alpha_2 + 2\lambda_3(\alpha_2+\alpha_3) + \lambda_4\alpha_3 = 0 \\ \text{-------------} \\ \lambda_{n-3}\alpha_{n-3} + 2\lambda_{n-2}(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2}) + \alpha_{n-2} = 0 \\ \lambda_{n-2}\alpha_{n-2} + 2(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν ἄγνωστον μ_1 διά τῆς ἐξισώσεως (2).

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1H_1 + \lambda_2H_2 + \cdots\cdots + \lambda_{n-2}H_{n-2} + H_{n-1}}{\alpha_1\lambda_2 + 2(\alpha_0+\alpha_1)\lambda_1}$$

ἀφ' οὗ πρῶτον προσδιορίσωμεν τάς ἀορίστους λ διά τῶν ἐξι-
σώσεων (3).

Ἡ τελευταία τούτων μᾶς δίδει

$$-\lambda_{n-2} = 2\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

ἀντικαθιστῶμεν τήν τιμήν ταύτην εἰς τήν προτελευταίαν καί τότε μᾶς δίδει αὕτη λ_{n-3} καί οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τῆς πρώτης.

Κάμπτουσα ῥοπή ἐν οἱῳδήποτε σημείῳ τῆς δοκοῦ

77.) Ἡ σχέσις (1) [§] μᾶς δίδει τήν τιμήν τῆς καμπτούσης ῥοπῆς μ παρά τό σημεῖον m κείμενον μεταξύ τοῦ A_K καί A_{K+1}.

$$\mu = \mu_K + \frac{p_K x^2}{2} - N_K x_K \quad \text{ἔνθα} \quad x_K = A_K m$$

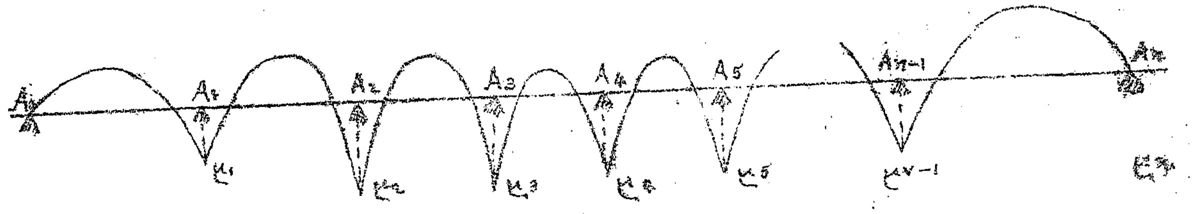
καί διά τήν παρά τό σημεῖον A_{K+1} ῥοπήν, ἔνθα $x = a_K$ ἔχομεν

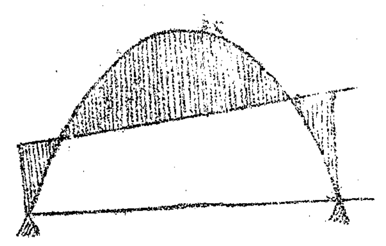
$$\mu_{K+1} = \mu_K + \frac{p_K a_K^2}{2} - N_K a_K$$

καί ἀπαλείφοντες N_K μεταξύ τῶν δύο τούτων σχέσεων ἔχομεν

$$\mu = \frac{\mu_K(a_K - x_K) + \mu_{K+1} x_K}{a_K} + \frac{p_K x_K}{2}(x_K - a_K)$$

ἐάν δέ ὑποθέσωμεν, ὅτι μ καί x_K εἶναι αἱ γεωμετρικαί συντεταγμέναι σημείου τινός, βλέπομεν, ὅτι ἡ ἄνω ἐξίσωσις παριστᾷ δευτεροβάθμιον παραβολήν, τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν παραβολήν τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν.





Διατμητική ἔντασις

78.) Τήν διατμητικήν ἔντασιν εὑρίσκομεν διά τῆς σχέσεως.

$$T = -\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu_K - \mu_{K-1}}{a_K} + p\left[\frac{a_K}{2} - x\right]$$

ὥστε αἱ διατμητικαί ἐντάσεις ἐν ταῖς παραπλησίαις τοῖς στηρίγμασιν A_K καί A_{K-1} καί εἰς ἀπειροστήν αὐτῶν ἀπόστασιν κειμέναις τομαῖς μεταξύ τῶν στηριγμάτων προσδιορίζονται διά τῆς ἄνω σχέσεως, ἔνθα ἀντικαθιστῶμεν x διά τοῦ 0 καί διά τοῦ a_K καί ἔχομεν

$$T_K = \frac{\mu_K - \mu_{K+1}}{a_K} + p\,\frac{a_K}{2}$$

$$T_K' = \frac{\mu_K - \mu_{K+1}}{a_K} - p\,\frac{a_K}{2}$$

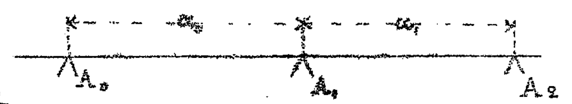
Γραφικῶς αἱ διατμητικαί ἐντάσεις παρίστανται διά μιᾶς εὐθείας.

Τάς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων εὑρίσκομεν ἤδη εὐκόλως. Ἡ ἀντίδρασις N_K τοῦ στηρίγματος A_K εἶναι τῷ ὄντι ἡ συνισταμένη τῶν ἑκατέρωθεν τοῦ στηρίγματος A_K καί εἰς ἀπειροστήν ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν διατμητικῶν ἐντάσεων T_K καί $-T_{K-1}'$ ὥστε

$$N_K = T_K - T_{K-1}' = \frac{a_K(\mu_K - \mu_{K-1}) + a_{K-1}(\mu_K - \mu_{K+1})}{a_K a_{K-1}} + \frac{p}{2}(a_K + a_{K-1})$$

Ἐφαρμογή ἐπί δοκοῦ στηριζομένης ἐπί τριῶν στηριγμάτων

79.) ἔχομεν μ_0, μ_2 καί $a_2 = 0$ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι ἐνταῦθα.



$$2\mu_1(a_0 + a_1) = H_1 = \frac{1}{4}\left[p_0 a_0^3 + p_1 a_1^3\right]$$

ὅθεν

$$\mu_1 = \frac{p_0 a_0^3 + p_1 a_1^3}{8(a_0 + a_1)}$$

Τάς διατμητικάς ἐντάσεις ἑκατέρωθεν τῶν στηριγμάτων προσδιορίζομεν διά τοῦ τύπου [§ 76]

Ἀντοχή ὕλης Πρωτοπαπαδάκη

ἀφ' οὗ πρῶτον προσδιορίσωμεν τάς ἀορίστους λ διά τῶν ἐξι-σώσεων (3).

Ἡ τελευταία τούτων μᾶς δίδει

$$-\lambda_{n-2} = 2\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

ἀντικαθιστῶμεν τήν τιμήν ταύτην εἰς τήν προτελευταίαν καί τότε μᾶς δίδει αὕτη λ_{n-3} καί οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τῆς πρώτης.

Κάμπτουσα ῥοπή ἐν οἱῳδήποτε σημείῳ τῆς δοκοῦ

77.) Ἡ σχέσις (1) [§] μᾶς δίδει τήν τιμήν τῆς καμπτούσης ῥοπῆς μ παρά τό σημεῖον m κείμενον μεταξύ τοῦ A_K καί A_{K+1}.

$$\mu = \mu_K + \frac{p_K x^2}{2} - N_K x_K \quad \text{ἔνθα} \quad x_K = A_K m$$

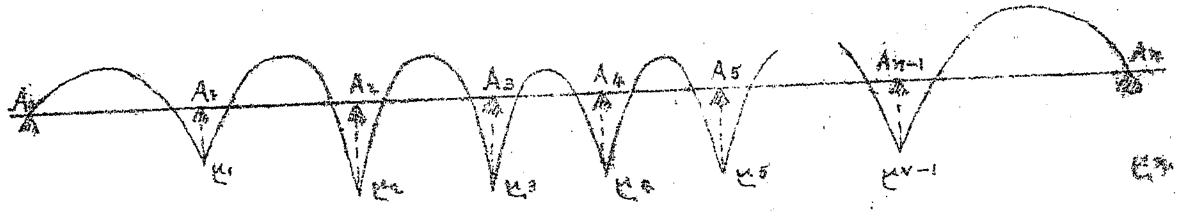
καί διά τήν παρά τό σημεῖον A_{K+1} ῥοπήν, ἔνθα $x = a_K$ ἔχομεν

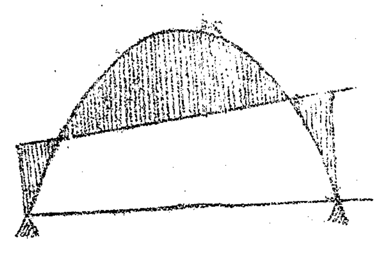
$$\mu_{K+1} = \mu_K + \frac{p_K a_K^2}{2} - N_K a_K$$

καί ἀπαλείφοντες N_K μεταξύ τῶν δύο τούτων σχέσεων ἔχομεν

$$\mu = \frac{\mu_K(a_K - x_K) + \mu_{K+1} x_K}{a_K} + \frac{p_K x_K}{2}(x_K - a_K)$$

ἐάν δέ ὑποθέσωμεν, ὅτι μ καί x_K εἶναι αἱ γεωμετρικαί συντεταγμέναι σημείου τινός, βλέπομεν, ὅτι ἡ ἄνω ἐξίσωσις παριστᾷ δευτεροβάθμιον παραβολήν, τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν παραβολήν τῶν καμπτουσῶν ῥοπῶν.





Διατμητική ἔντασις

78.) Τήν διατμητικήν ἔντασιν εὑρίσκομεν διά τῆς σχέσεως.

$$T = -\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu_K - \mu_{K-1}}{a_K} + p\left[\frac{a_K}{2} - x_1\right]$$

ὥστε αἱ διατμητικαί ἐντάσεις ἐν ταῖς παραπλησίοις τοῖς στηρίγμασιν A_K καί A_{K-1} καί εἰς ἀπειροστήν αὐτῶν ἀπόστασιν κειμέναις τομαῖς μεταξύ τῶν στηριγμάτων προσδιορίζονται διά τῆς ἄνω σχέσεως, ἔνθα ἀντικαθιστῶμεν x διά τοῦ 0 καί διά τοῦ a_K καί ἔχομεν

$$T_K = \frac{\mu_K - \mu_{K+1}}{a_K} + p\frac{a_K}{2}$$

$$T'_K = \frac{\mu_K - \mu_{K+1}}{a_K} - p\frac{a_K}{2}$$

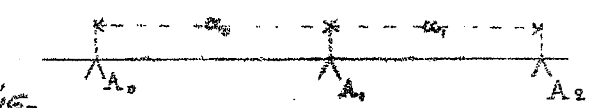
Γραφικῶς αἱ διατμητικαί ἐντάσεις παρίστανται διά μιᾶς εὐθείας.

Τάς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων εὑρίσκομεν ἤδη εὐκόλως. Ἡ ἀντίδρασις N_K τοῦ στηρίγματος A_K εἶναι τῷ ὄντι ἡ συνισταμένη τῶν ἑκατέρωθεν τοῦ στηρίγματος A_K καί εἰς ἀπειροστήν ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν διατμητικῶν ἐντάσεων T_K καί $-T'_{K-1}$ ὥστε

$$N_K = T_K - T'_{K-1} = \frac{a_K(\mu_K - \mu_{K-1}) + a_{K-1}(\mu_K - \mu_{K+1})}{a_K a_{K-1}} + \frac{p}{2}(a_K + a_{K-1})$$

Ἐφαρμογή ἐπί δοκοῦ στηριζομένης ἐπί τριῶν στηριγμάτων

79.) ἔχομεν μ_0, μ_2 καί $a_2 = 0$ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι ἐνταῦθα.



$$2\mu_1(a_0 + a_1) = H_1 = \frac{1}{4}\left[p_0 a_0^3 + p_1 a_1^3\right]$$

ὅθεν

$$\mu_1 = \frac{p_0 a_0^3 + p_1 a_1^3}{8(a_0 + a_1)}$$

Τάς διατμητικάς ἐντάσεις ἑκατέρωθεν τῶν στηριγμάτων προσδιορίζομεν διά τοῦ τύπου [§ 76]

Ἀντοχή ὕλης Πρωτοπαπαδάκη

παρά τῷ στηρίγματι A_0 $\quad T_0 = -\frac{\mu_1}{\alpha_0} + \frac{p_0\alpha_0}{2} =$

παρά τῷ στηρίγματι A_1 $\begin{cases} \text{ἀριστερόθεν} \quad T_0' = -\frac{\mu_1}{\alpha_0} - \frac{p_0\alpha_0}{2} = \\ \text{δεξιόθεν} \quad T_1 = \frac{\mu_1}{\alpha_1} + p_1\frac{\alpha_1}{2} = \end{cases}$

παρά τῷ στηρίγματι A_2 $\quad T_1' = \frac{\mu_1}{\alpha_1} - \frac{p_1\alpha_1}{2} =$

Τάς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων προσδιορίζομεν διά τοῦ τύπου [§ 76] καί εὑρίσκομεν,

$$N_1 = (\alpha_0+\alpha_1)\left[\frac{\mu_1}{\alpha_1\alpha_0} + \frac{p}{2}\right] = (\alpha_0+\alpha_1)\left[\frac{p\alpha_0^3+p\alpha_1^3}{8(\alpha_0+\alpha_1)\alpha_0\alpha_1} + \frac{p}{2}\right] = \frac{p(\alpha_0+\alpha_1)}{8}\left[4+\frac{1}{\alpha_0\alpha_1}(\alpha_0^2-\alpha_0\alpha_1+\alpha_1^2)\right]$$

λαμβάνοντες νῦν τάς ῥοπάς ὡς πρός τό A_0 καί A_2 εὑρίσκομεν

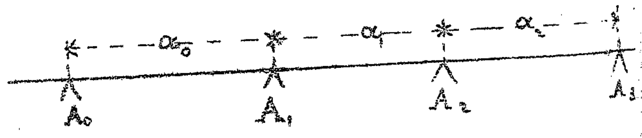
$$N_0 = \frac{p}{8}\left(3\alpha_0+\alpha_1 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0}\right) \qquad N_2 = \frac{p}{8}\left[3\alpha_1+\alpha_0 - \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1}\right]$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν τά στηρίγματα εἰς ἴσην ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν ἔχομεν

$$N_0 = \frac{3}{8}p\alpha \qquad N_1 = \frac{5}{4}p\alpha \qquad N_2 = \frac{3}{8}p\alpha$$

Ἐφαρμογή ἐπί δοκοῦ στηριζομένης ἐπί τεσσάρων στηριγμάτων.

80.) Ἔχομεν μ_0, μ_3 καί $\alpha_3 = 0$ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι ἐνταῦθα



$$(1) \quad \begin{cases} 2\mu_1(\alpha_0+\alpha_1) + \mu_2(\alpha_1) = H_1 \\ \mu_1\alpha_1 + 2\mu_2(\alpha_1+\alpha_2) = H_2 \end{cases}$$

ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἐνταῦθα

$$(2) \quad \mu_1[\alpha_1 + 2\lambda_1(\alpha_0+\alpha_1)] + \mu_2[\lambda_1\alpha_1 + 2(\alpha_1+\alpha_2)] = \lambda_1 H_1 + H_2$$

καί τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) περιορίζεται εἰς τήν ἀκόλουθον

$$(3) \quad \lambda_1\alpha_1 + 2(\alpha_1+\alpha_2) = 0$$

ἥτις μᾶς δίδει $\quad \lambda_1 = -\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1}$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τιμῇ τοῦ $\mu_1 = \frac{\lambda_1 H_1 + H_2}{\alpha_1 + 2\lambda_1(\alpha_0+\alpha_1)}$ εὑρίσκομεν

$$\mu_1 = \frac{H_2\alpha_1 - 2H_1(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1^2 - 4(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

καί αἱ ἐξισώσεις (1) μᾶς δίδουσι

$$\mu_2 = \frac{H_1 - 2\mu_1(\alpha_0+\alpha_1)}{\alpha_1} = \frac{H_1\alpha_1 - 2H_2(\alpha_0+\alpha_1)}{\alpha_1^2 - 4(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

καί ἐπειδή $H_1 = \frac{1}{4}[p_0\alpha_0^3 + p_1\alpha_1^3]$ καί $H_2 = \frac{1}{4}[p_1\alpha_1^3 + p_2\alpha_2^3]$ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

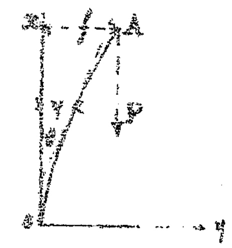
$$\mu_1 = \frac{\alpha_1[p_1\alpha_1^3 + p_2\alpha_2^3] - 2(\alpha_1+\alpha_2)[p_0\alpha_0^3 + p_1\alpha_1^3]}{4\alpha_1^2 - 16(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha_1[p_0\alpha_0^3 + p_1\alpha_1^3] - 2(\alpha_0+\alpha_1)[p_1\alpha_1^3 + p_2\alpha_2^3]}{4\alpha_1^2 - 16(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

τάς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων εὑρίσκομεν διά τοῦ τύπου[ ]

Κάμψις πρισματικῆς δοκοῦ προκυπτούσης ἐκ καταθλιβούσης δυνάμεως.

81) Θεωρήσωμεν κατακόρυφον ἀμφιπαγῆ πρισματικήν δοκόν ὑφισταμένην θλίψιν τινά ἐκ κατακορύφου δυνάμεως ἐφηρμοσμένης εἰς τό ἄκρον τῶν ἄκρων αὐτῆς.



Εἴδομεν ἀνωτέρω [§ 32], ὅτι ἄν τό μῆκος τῆς δοκοῦ δέν εἶναι κατά πολύ μεγαλείτερον τῶν ἐγκαρσίων διαστάσεων αὐτῆς δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τούς σχετικούς τῷ ἐφελκυσμῷ τύπους, ἀλλ' ἐάν τό μῆκος τῆς δοκοῦ εἶναι οἱονδήποτε, ὑπό τήν ἐπήρειαν τοῦ βαρους P υφίσταται αύτη κάμψιν, καί εύρίσκομεν τήν κάμπτουσαν ροπήν έν τή τομή m διά τής γενικής σχέσεως

$$(1) \qquad \frac{EI}{\rho} = P(f-y)$$

καί βλέπομεν αμέσως, ότι ή μάλλον κεκαμμένη τομή είναι ή του σημείου O. Ένταύθα δέν δυνάμεθα πλέον νά γράψωμεν κατά προσέγγισιν

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

διότι θά φθάνομεν είς τό συμπέρασμα, ότι τό βέλος f είναι απροσδιόριστον, καί πρέπει νά ζητήσωμεν τήν απ'ευθείας ολοκλήρωσιν τής ακριβούς σχέσεως (1).

Έκ τής γεωμετρίας γνωρίζομεν ότι $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$ καί αντικαθιστώντες έν τή σχέσει (1) έχομεν

$$(2) \qquad EI\frac{d\theta}{ds} = P(f-y)$$

καί διά διαφορήσεως

$$EI\frac{d^2\theta}{ds^2} = -P\frac{dy}{ds} = -P\,\eta\mu.\theta$$

διότι $\frac{dy}{ds} = \eta\mu.\theta$

πολλαπλασιάζοντες τά δύο μέλη τής σχέσεως ταύτης μέ $d\theta$ καί ολοκληρούντες έχομεν

$$(3) \qquad \frac{EI}{2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = P[\sigma\upsilon\nu\theta + c]$$

παρατηρούντες ότι διά $\theta=0$ καί $y=0$ έχομεν έκ τής σχέσεως (2)

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{Pf}{EI}$$

καί αντικαθιστώντες έν τή σχέσει (3) εύρίσκομεν τήν τιμήν τής C

$$\frac{EI}{2}\left[\frac{Pf}{EI}\right]^2 = P + PC \quad \acute{\eta} \quad 1 + C = \frac{Pf^2}{2EI}$$

η σχέσις (3) λαμβάνει τότε τήν μορφήν

$$\acute{\eta}\ (4) \qquad ds = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + c}}$$

ή σχέσις αύτη, ολοκληρουμένη προσδιορίζει τήν γωνίαν θ καί κατά συνέπειαν τήν κάμπτουσαν ροπήν. τό βέλος f προσδιορίζομεν ολοκληρούντες μεταξύ των ορίων 0 καί θ_1, ένθα θ_1

τήν παρά τώ σημείω A γωνίαν θ.

$$l = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{Pf^2}{2EI} - 1 + \sigma\upsilon\nu\theta}} \qquad (5)$$

καί επειδή $dy = ds\,\eta\mu\,\theta$ καί $dx = ds\,\sigma\upsilon\nu\,\theta$ έχομεν επίσης

$$dy = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\,\frac{\eta\mu\theta\,d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + c}} \qquad dx = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\,\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + c}}$$

Δυνάμεθα δέ ευκόλως νά εύρωμεν τό ολόκληρον τής συναρτήσεως.

$$\frac{\eta\mu\theta.d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + C}}$$

γράφοντες αυτήν ώς εξής

$$\frac{\eta\mu\theta.d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + c}} = -(\sigma\upsilon\nu\theta + c)^{-\frac{1}{2}}d(\sigma\upsilon\nu\theta)$$

καί θέτοντες $\sigma\upsilon\nu\theta = \xi$

$$\int(\sigma\upsilon\nu\theta + c)^{-\frac{1}{2}}d(\sigma\upsilon\nu\theta) = \int(\xi + c)^{-\frac{1}{2}}d\xi = 2(\xi + c)^{\frac{1}{2}} + K = 2[\sigma\upsilon\nu\theta + c]^{\frac{1}{2}}K$$

ώστε

$$(6) \qquad y = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\int\frac{\eta\mu\theta.d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + C}} = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\left[2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + C} + K\right]$$

τήν απροσδιόριστον σταθεράν K προσδιορίζομεν ώς εξής παρατηρούμεν, ότι διά $y=0$ έχομεν $\theta=0$ ή σχέσις [6] μάς δίδει

$$0 = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\left[2\sqrt{1+c} + K\right] \quad \acute{o}\theta\varepsilon\nu \quad K = +2\sqrt{1+c} = f\sqrt{\frac{2P}{EI}}$$

αντικαθιστώντες K έν τή σχέσει (6) έχομεν

$$y = \sqrt{\frac{2EI}{P}}\left[\sqrt{1+c} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta + c}\right]$$

καί εάν παραστήσωμεν διά θ_1 τήν τιμήν του θ παρά τώ σημείω A τήν αντιστοιχούσαν δηλ. είς τήν τιμήν $s = l$ έχομεν,

$$(7) \qquad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 1 - \frac{Pf^2}{2EI}$$

ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ σχέσει (5) εὑρίσκομεν

$$l = \sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_1}}$$

ἐλλειπτική συνάρτησις, τῆς ὁποίας ἡ κατά προσέγγισιν τιμή εἶναι

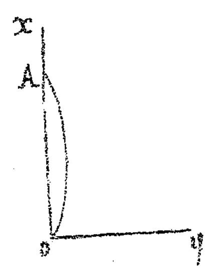
$$l = \pi\sqrt{\frac{EI}{2P}}\left[1 + \frac{\theta_1^2}{16}\right]$$

ἡ σχέσις (7) δίδει τότε κατά προσέγγισιν ἐπίσης

$$f = 4\sqrt{\frac{2EI}{P}\left[\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{2P}{EI}} - 1\right]}$$

$2^{ον}$) Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ δοκός ἐδράζεται ἁπλῶς ἐπί τοῦ ἐδάφους, ἀλλά τό σημεῖον A εὑρίσκεται πάντοτε ἐπί τῆς κατακορύφου oA τότε ἔχομεν

$$\frac{EI}{\rho} = Py \quad \text{ἤ} \quad EI\frac{d\theta}{ds} = -Py$$



διότι θ ἐλαττοῦται ἐν ᾧ y αὐξάνει καί ἔχομεν ὡς καί ἐν τοῖς προηγουμένοις

$$EI\frac{d^2\theta}{ds^2} = -P\eta\mu\theta$$

καί ὁλοκληροῦντες

$$\frac{EI}{2}\left[\frac{d\theta}{ds}\right]^2 = P\left[\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0\right]$$

ἔνθα θ_0 ἐμφαίνει τήν τιμήν τοῦ θ παρά τῷ σημείῳ O.

ὅθεν

$$ds = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}}$$

καί ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$(1) \qquad l = -\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}}$$

ἔνθα θ_1 ἐμφαίνει τήν τιμήν τῆς γωνίας θ παρά τῷ σημείῳ A.

ἐκ τῆς σχέσεως

$$dy = ds\,\eta\mu\theta = \sqrt{\frac{EI}{2P}}\,\frac{\eta\mu\theta\, d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}}$$

ἐξάγομεν ὁλοκληροῦντες

$$y = -2\sqrt{\frac{EI}{2P}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}$$

ἀλλά y μηδενίζεται παρά τοῖς σημείοις O καί A ὅθεν

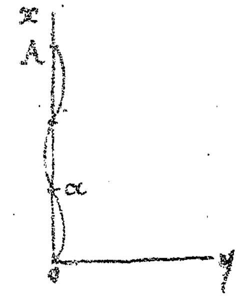
$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 - \sigma\upsilon\nu\theta_0 = 0$$

ὅθεν

$$\theta_1 = \pm\theta_0$$

ὥστε θ ἐλαττοῦται κατά πρῶτον μέχρι τοῦ $-\theta_0$, αὐξάνει κατόπιν μέχρι τοῦ θ_0 καί οὕτω καθ' ἑξῆς. ἡ ἐλαστική καμπύλη ἔχει λοιπόν τήν ἔναντι ἡμιτονοειδῆ μορφήν

ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν διά τόν κλάδον oα



$$l' = -\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\theta_0}^{-\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}} = 2\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}}$$

διότι

$$\int_{\theta_0}^{-\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}} = \int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}} + \int_0^{-\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}} = -2\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}}$$

καί κατά προσέγγισιν ὡς καί ἐν τοῖς προηγουμένοις ἔχομεν

$$l' = 2\pi\sqrt{\frac{EI}{2P}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

καί ἐπειδή $l = nl'$ ἐξάγομεν

$$\theta_0^2 = \frac{8}{n\pi}\sqrt{\frac{2P}{EI}} - 1$$

τήν μεγίστην τιμήν τοῦ y, τό βέλος δηλ. f προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

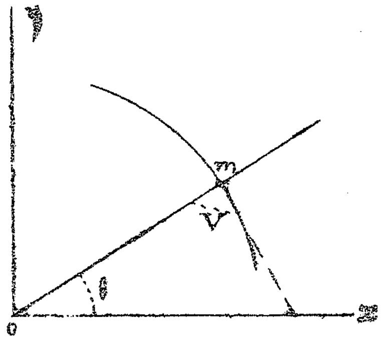
$$f = \pm\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{\eta\mu\theta\, d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0}} = 2\sqrt{\frac{EI}{Q}}\,\eta\mu\,\frac{\theta_0}{2}$$

Κάμψις τῶν κυκλικῶν δοκῶν.

82) Ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω, [§ 35] ὅτι ἡ διά τῆς κάμψεως ἀλλοιωθεῖσα μορφή σώματος οἱουδήποτε σώματος [οἷα ὡρίσαμεν αὐτά ἐν τῇ §   ] συνδέεται πρός τήν ἀρχικήν αὐτοῦ μορφήν διά τῆς σχέσεως,

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=-\frac{M}{EI}$$

ἐάν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀρχική μορφή τῆς δοκοῦ εἶναι κυκλική ἔχομεν



$$\rho_0=\text{σταθερόν}$$

Ἔστω m_0 ἡ ἀρχική θέσις σημείου τινός τῆς κεντρικῆς ἰνός τοῦ σώματος καί θ_0 ἡ γωνία xOm_0.

Ἔστω r ἡ ἀκτίς Om ἐν τῇ ἠλλοιωμένῃ μορφῇ τοῦ σώματος. πρέπει νά ὑπολογίσωμεν τήν παρά τῷ σημείῳ m ἀκτῖνα τῆς καμπυλότητος $\rho=\frac{ds}{d\alpha}$.

ἔστω πρός τοῦτο

$$r=\rho_0(1+u)$$

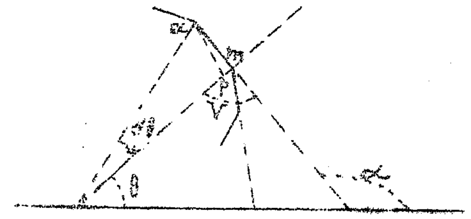
ἔνθα ὑποθέτομεν τό u ἀρκούντως μικρόν, ὥστε νά δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τό τετράγωνον αὐτοῦ καί τῶν παραγώγων αὐτοῦ.

ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}=\rho_0\sqrt{\left[\frac{du}{d\theta}\right]^2+(1+u)^2}\,d\theta$$

καί ἐπειδή παραλείπομεν $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ ἔχομεν ἁπλῶς

$$ds=\rho_0(1+u)\,d\theta$$



ἔχομεν πρός τούτοις

$$\alpha=\nu+\theta$$

ὥστε

$$d\alpha=d(\nu+\theta)$$

ἀλλ' ἐάν ἐκ τοῦ σημείου α φέρωμεν κάθετον τήν αp ἐπί τῆς Om ἔχομεν

$$\alpha p=mp\,\varepsilon\varphi\,\widehat{\alpha mp} \quad \text{ἤ} \quad r\,d\theta=dr\,\varepsilon\varphi\,\nu$$

ὅθεν

$$\varepsilon\varphi\,\nu=\frac{r\,d\theta}{dr}=\frac{\rho_0(1+u)d\theta}{\rho_0\,du}=\frac{(1+u)\,d\theta}{du}$$

ἤ ἀκόμη

$$\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi\,\nu=(1+u)^{-1}\frac{du}{d\theta}=\left(1-u+\frac{u^2}{1.2}-\cdots\right)\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{d\theta}$$

καί ἐπειδή συνεφ ν εἶναι πολύ μικρά δυνάμεθα νά γράψωμεν

$$-\nu+90^\circ=\frac{du}{d\theta} \quad \text{ἤ} \quad \nu+\theta=90^\circ-\frac{du}{d\theta}+\theta$$

ὥστε

$$d\alpha=d(\nu+\theta)=d\theta-\frac{d^2u}{d\theta^2}d\theta$$

καί προσδιορίζομεν οὕτω τήν καμπυλότητα $\frac{1}{\rho}$ διά τῆς σχέσεως

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\theta-\frac{d^2u}{d\theta^2}d\theta}{\rho_0(1+u)\,d\theta}$$

ὅθεν

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}\left[1-\frac{d^2u}{d\theta^2}\right](1+u)^{-1}=\frac{1}{\rho_0}\left[1-\frac{d^2u}{d\theta^2}\right]\left(1-u+\frac{u^2}{1.2}-\cdots\right)$$

τέλος ἔχομεν

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}\left[1-u-\frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

ὅθεν

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=-\frac{1}{\rho_0}\left[u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

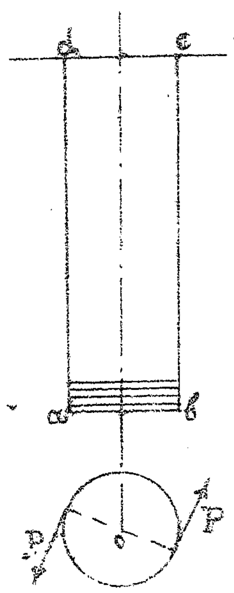
καί προσδιορίζομεν οὕτω τήν κάμπτουσαν ῥοπήν διά τῆς σχέσεως

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{M\rho_0}{EI}$$

ἐξίσωσις, τήν ὁποίαν δυνάμεθα νά ὁλοκληρώσωμεν, ὅταν M εἶναι συνάρτησις τοῦ θ ὅπως συμβαίνει τότε πάντοτε προσδιορίζομεν οὕτω τό u καί εὑρίσκομεν τήν τιμήν τοῦ r.

Στρέψις

83.) Θεωρήσωμεν πρισματικόν τι σῶμα ἑτεροπαγές καί ὑπό τήν ἐπενέργειαν ζεύγους δυνάμεων οὕτινος τό ἐπίπεδον συμπίπτει μέ τό ἐπίπεδον τῆς ἄλλης βάσεως τοῦ πρίσματος.

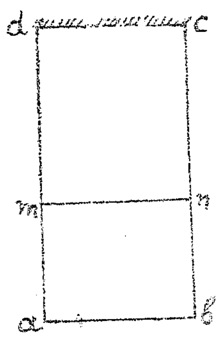


Εἰς τήν ἐπί τοῦ πρίσματος ἐπενέργειαν τοῦ καθέτου τῷ ἄξονι ζεύγους τούτου ὀφείλεται τό φαινόμενον τῆς στρέψεως, τό ὁποῖον δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν ὡς ἑξῆς.

Ὑποθέσωμεν τό σῶμα συγκείμενον ἐξ ὁριζοντίων στρωμάτων καί ἀμεταβλήτων τήν μορφήν στρωμάτων δυναμένων ὅμως νά περιστραφῶσι περί τι σημεῖον τοῦ χωρίζοντος αὐτά ἐπιπέδου, διά σχετικῆς ὀλισθήσεως τῶν μέν ἐπί τῶν δέ. Τό ἐπί τοῦ κατωτάτου στρώματος ἐφηρμοσμένον ζεῦγος στρέφει τοῦτο περί τι σημεῖον O. κατά γωνίαν φ ἐκ τῆς στροφῆς ταύτης καί τῆς δυνάμεως τῆς συνοχῆς (adherence) δι' ἧς τό στρῶμα τοῦτο συγκρατεῖται μετά τοῦ ἀμέσως ἀκολούθου, ἀναπτύσσεται ἐλαστική τις δύναμις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ἐπαφῆς τῶν δύο διαδοχικῶν στρωμάτων, ἥτις τείνει νά ἐπαναφέρῃ

τό στρῶμα εἰς τήν ἀρχικήν αὐτοῦ θέσιν ἀλλά ὡς ἐκ τῆς συνδεούσης τοῦτο πρός τό πρῶτον στρῶμα δυνάμεως τῆς συνοχῆς στρέφεται καί τοῦτο περί ἀκίνητόν τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ κατά γωνίαν φ'. Τό αὐτό δέν συμβαίνει καί διά τά λοιπά στρώματα μέχρι τοῦ cd. Ἡ σχετική γωνιαία ὀλίσθησις τοῦ πρώτου στρώματος ἐπί τοῦ δευτέρου εἶναι $\varphi-\varphi'=d\theta$ αὕτη δέ εἶναι ἡ σχετική γωνιαία ὀλίσθησις καί τῶν λοιπῶν στρωμάτων τῶν μέν ἐπί τῶν δέ, ὥστε ἡ σχετική γωνία τῆς περιστροφῆς τῶν διαφόρων στρωμάτων αὐξάνει ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν ἀπό τοῦ στρώματος τοῦ encastrement καί αἱ ἶνες τοῦ πρίσματος, αἵτινες ἦσαν εὐθύγραμμοι πρό τῆς στρέψεως, μετεβλήθησαν νῦν εἰς ἑλικοειδεῖς γραμμάς.

Τ' ἀκίνητα σημεῖα OO'... ἀποτελοῦσι τήν δευτέραν γραμμήν τοῦ πρίσματος.

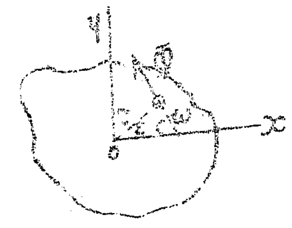


Θεωρήσωμεν οἱανδήποτε τομήν mn. τό τμῆμα $mn\alpha\beta$ τοῦ πρίσματος εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπό τήν ἐπενέργειαν τοῦ ἐπί τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐφηρμοσμένου ζεύγους δυνάμεων καί τῶν ἐν τῇ τομῇ mn ὡς ἐκ τῆς στρέψεως ἀναπτυχθεισῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων. Τάς τελευταίας ταύτας ὑποθέτομεν συνάρτησιν τῆς μετατοπίσεως ἥν ὑπέστησαν τά διάφορα μόρια τοῦ στρώματος mn. Τό εἰς ἀπόστασιν r ἀπό τοῦ δευτέρου σημείου O τῆς αὐτῆς τομῆς κείμενον μόριον διέγραψε κυκλικόν τόξον οὗτινος τό μῆκος εἶναι θr ἐάν παραστήσωμεν διά θ τήν γωνίαν τῆς περιστροφῆς κατά μονάδα μήκους ἢ κατά μονάδα ἐπιφανείας ἀναπτυσσομένη ἐλαστική δύναμις Φ ἐν τῇ τομῇ mn εἶναι λοιπόν

$$\Phi=f(\theta r)=f(0)+\theta r f'(0)+\dots=B\theta r$$

καί ἡ ἐλαστική αὕτη δύναμις, τείνει νά ἐπαναφέρῃ τό τμῆμα $mnαβ$ εἰς τήν ἀρχικήν αὐτοῦ θέσιν.

Ἐκ τῆς ἰσορροπίας προβάλλοντες τάς ἐσωτερικάς ἐλαστικάς καί ἐξωτερικάς δυνάμεις ἐπί τοῦ ἄξονος ox κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τομῆς mn καί διερχομένου διά τοῦ δευτέρου σημείου αὐτῆς o ἔχομεν



$$\Sigma\ \pi\rho o\beta.\ P + \Sigma\ \pi\rho o\beta.\ \Phi = 0$$

ἀλλά Σ προβ. $P = 0$ ὥστε Σ προβ. $\Phi = 0$

$$\Sigma\ \pi\rho o\beta.\ \Phi = \Sigma B\omega\theta r\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon = \Sigma B\omega\theta r \frac{y}{r} = B\theta\Sigma\omega y = 0$$

ὥστε $\Sigma\omega y = 0$ τό σημεῖον o συμπίπτει δηλαδή μέ τό κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς τομῆς mn.

Ἡ στρέψις ἐκτελεῖται λοιπόν περί τόν διά τῶν κέντρων τῆς βαρύτητος τῶν τομῶν διερχόμενον ἄξονα.

Ἐάν ἤδη ὑπολογίσωμεν τάς ῥοπάς τῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν οὐδέτερον τοῦτον ἄξονα ἔχομεν,

$$M = \Sigma B\omega\theta r.r = B\theta\Sigma\omega r^2 = B\theta I$$

ἔνθα M παριστᾷ τήν ῥοπήν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί I τήν ῥοπήν ἀδρανείας τῆς τομῆς mn ὡς πρός τόν οὐδέτερον ἄξονα. [ἐν τῇ κάμψει ἡ ῥοπή ἀδρανείας, ἐλαμβάνετο ἐν σχέσει πρός ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τομῆς ἐνταῦθα ὁ ἄξων εἶναι κάθετος αὐτῇ]

Τό στερεόν ἴσης ἀντοχῆς προσδιορίζεται διά τῆς ἐξισώσεως.

$$Q = \frac{MR}{I}$$

ἔνθα Q ἐμφαίνει τό φορτίον ἀσφαλείας εἰς ὅ ὑποβάλλομεν τήν ὕλην καί R τήν μεγαλειτέραν τιμήν τοῦ r

ἵνα καταστήσωμεν τήν κόπωσιν ἥτις μετρεῖται διά $\frac{MR}{I}$ ἐλαχίστην δέον ν' αὐξήσωμεν ὅσῳ τό δυνατόν I καί τοῦτο ἐπιτυγχάνωμεν ἀπομακρύνοντες τήν ὕλην ἐκ τοῦ οὐδετέρου ἄξονος..

Ἀντοχή τῆς ὕλης

Παράρτημα I.

Περί κέντρων μάζης καί ῥοπῶν ἀδρανείας

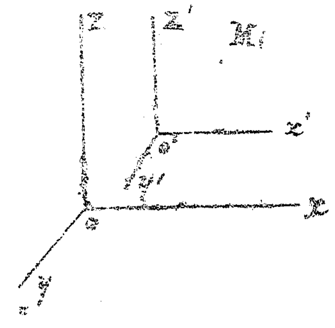
Κέντρον μάζης σώματός τινος ἤ συστήματος σωμάτων.

Θεωρήσωμεν τό ὑλικόν σύστημα [m] συνεχές ἤ μή συγκείμενον ἐκ τῶν μορίων, ὧν αἱ μάζαι εἶναι $m\ m_1\ m_2 \cdots m_i$ ἔστωσαν $x_i\ y_i\ z_i$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μορίου m_i ὡς πρός τούς ἄξονας ox, oy, oz λέγω ὅτι τό σημεῖον G, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ξ, η, ζ, ὡς πρός τούς αὐτούς ἄξονας προσδιορίζονται διά τῶν σχέσεων,

$$\xi = \frac{mx + m_1x_1 + \cdots + m_ix_i + \cdots}{m + m_1 + \cdots + m_i + \cdots} = \frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}$$

$$(1)\qquad \eta = \frac{my + m_1y_1 + \cdots + m_iy_i + \cdots}{m + m_1 + \cdots + m_i + \cdots} = \frac{\Sigma m_iy_i}{\Sigma m_i}$$

$$\zeta = \frac{mz + m_1z_1 \cdots + m_iz_i + \cdots}{m + m_1 + \cdots + m_i + \cdots} = \frac{\Sigma m_iz_i}{\Sigma m_i}$$



εἶναι σταθερόν ἐν τῷ σώματι καί ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως, ἥν κατέχουσιν ἐν τῷ διαστήματι οἱ ἄξονες $o(x, y, z)$.

Τουτέστιν ἐάν ἀπό τοῦ σημείου o μεταφέρωμεν τούς ἄξονας $o(x, y, z)$ παραλλήλους ἑαυτοῖς εἰς τό σημεῖον o' οὗτινος τάς συντεταγμένας ὡς πρός τούς ἀρχικούς ἄξονας παριστῶμεν διά α, β, γ τό σημεῖον G οὗτινος αἱ συντεταγμέναι $\xi, \eta' \zeta'$ προσδιορίζονται διά τῶν σχέσεων

$$\xi' = \frac{\Sigma m_i x'}{\Sigma m_i} \qquad \eta' = \frac{\Sigma m_i y'}{\Sigma m_i} \qquad \zeta = \frac{\Sigma m_i z'}{\Sigma m_i}$$

συμπίπτει μετά τοῦ σημείου G

Τῷ ὄντι αἱ συντεταγμέναι $x_i'\ y_i'\ z_i'$ τοῦ μορίου m_i ὡς πρός τούς νέους ἄξονας $o(x'\ y'\ z')$ εἶναι

$$x_i' = x_i - \alpha \qquad y_i' = y_i - \beta \qquad z_i' = z_i - \gamma$$

ὥστε

$$\Sigma m_i x_i' = \Sigma m_i(x_i - \alpha) = \Sigma m_i x_i - \Sigma m_i \alpha_i = \Sigma m_i x_i - \alpha \Sigma m_i$$

$$\Sigma m_i y_i' = \Sigma m_i y_i - \beta \Sigma m_i$$

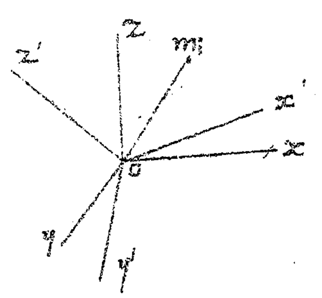
$$\Sigma m_i z_i' = \Sigma m_i z_i - \gamma \Sigma m_i$$

κατά συνέπειαν

$$\xi' = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} - \frac{\alpha \Sigma m_i}{\Sigma m_i} = \xi - \alpha \qquad \eta' = \eta - \beta \quad \text{καί} \quad \zeta' = \zeta - \gamma$$

ἀλλά $\xi - \alpha$, $\eta - \beta$, $\zeta - \gamma$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου G ὡς πρός τούς νέους ἄξονας. Τό σημεῖον G συμπίπτει λοιπόν μετά τοῦ σημείου G.–

Ἐάν ἀντί νά μεταφέρωμεν παραλλήλους πρός αὐτούς ἐ- στρέφομεν ὁπωσδήποτε τούς ἄξονας $o(x, y, z)$ περί τό σημεῖον ο οὕτως ὥστε νά συμπέσωσι μετά τῶν ἀξόνων $o(x'\ y'\ z')$ αἱ συντεταγμέναι $x_i'\ y_i'\ z_i'$ τοῦ μορίου m_i ὡς πρός τούς νέους ἄξονας συνδέονται μετά τῶν συντεταγμένων $x_i\ y_i\ z_i$ τοῦ αὐτοῦ μορίου m_i ὡς πρός τούς ἀρχικούς ἄξονας $o(x, y, z)$ διά τῶν σχέσεων



$$x_i' = \alpha x_i + \alpha_1 y_i + \alpha_2 z_i$$

$$y_i' = \beta x_i + \beta_1 y_i + \beta_2 z_i$$

$$z_i' = c x_i + c_1 y_i + c_2 z_i$$

ἔνθα $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \cdot \beta, \beta_1, \beta_2 \cdot$ καί $c, c_1, c_2 \cdot$ εἶναι σταθεραί ποσότητες καί αἱ συντεταγμέναι ξ', η', ζ' τοῦ σημείου G' ἐν τῷ συστήματι $o(x', y', z')$ εἶναι

$$\xi = \frac{\Sigma m x_i'}{\Sigma m} \qquad \eta' = \frac{\Sigma m y_i'}{\Sigma m} \qquad \zeta' = \frac{\Sigma m z_i'}{\Sigma m}$$

ἔχομεν δέ

$$\Sigma m x_i' = \Sigma m(\alpha x_i + \alpha_1 y_i + \alpha_2 z_i) = \alpha \Sigma m x_i + \alpha_1 \Sigma m y_i + \alpha_2 \Sigma m z_i$$

ὥστε

$$\frac{\Sigma m x_i'}{\Sigma m} = \alpha \frac{\Sigma m x_i}{\Sigma m} + \alpha_1 \frac{\Sigma m y_i}{\Sigma m} + \alpha_2 \frac{\Sigma m z_i}{\Sigma m} = \alpha\xi + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \zeta$$

ἀλλά $\alpha\xi + \alpha_1\eta + \alpha_2\xi$ εἶναι ὡς πρός τούς νέους ἄξονας ἡ τεταγμένη ξ τοῦ σημείου G· ὥστε τό σημεῖον G συμπίπτει μετά τοῦ σημείου G' καί εἶναι σταθερόν ἐν τῷ ὑλικῷ συστήματι $[m]$ ὀνομάζομεν δέ τό σημεῖον τοῦτο ὅπερ προσδιορίζουσιν αἱ σχέσεις (1) <u>κέντρον μάζης</u> τοῦ ὑλικοῦ συστήματος $[m]$. Καί βλέπομεν ὅτι

Γεωμετρικαί ἰδιότητες τοῦ κέντρου τῆς <u>βαρύτητος</u>.

<u>Ἐάν ὀνομάσωμεν r_i τήν ἀπόστασιν τοῦ μορίου m_i ἀπό ἐπιπέδου οἱουδήποτε διερχομένου διά τοῦ κέντρου τῆς μάζης τοῦ ὑλικοῦ συστήματος $[m]$ τό ἄθροισμα.</u>

$$\Sigma m_i r_i = 0$$

Ἔστωσαν τά ὑλικά συστήματα $[m], [m]', [m]'' \ldots$ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τά κέντρα τῶν μαζῶν $\xi, \eta, \zeta \quad \xi', \eta', \zeta' \quad \xi'', \eta'', \zeta''$. λέγω ὅτι τό κέντρον μάζης τοῦ ἐκ τῶν μερικῶν συστημάτων $[m], [m'], [m'']$ προκύπτοντος ὅλου ὑλικοῦ συστήματος $\Sigma[m]$ προσδιορίζεται διά τῶν σχέσεων

$$\Xi = \frac{\xi \Sigma m + \xi' \Sigma m' + \xi'' \Sigma m'' + \ldots}{\Sigma(m)}$$

$$H = \frac{\eta \Sigma m + \eta' \Sigma m' + \eta'' \Sigma m'' + \ldots}{\Sigma(m)}$$

$$Z = \frac{\zeta \Sigma m + \zeta' \Sigma m' + \zeta'' \Sigma m'' + \ldots}{\Sigma(m)}$$

Τῷ ὄντι ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κέντρου τῆς μάζης ποριζόμεθα

(1) $\xi\Sigma m = \Sigma m x \qquad \xi'\Sigma m' = \Sigma m' x' \qquad \xi''\Sigma m'' = \Sigma m'' x'' \dots$

καί

(2) $\Xi\,\Sigma[m] = \Sigma m x + \Sigma m' x' + \Sigma m'' x'' + \dots$

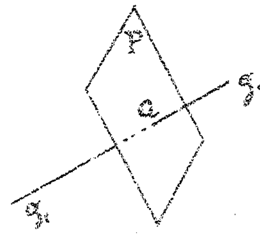
ἀλλ' ἐάν προσθέσωμεν κατά μέλη τάς σχέσεις (1) εὑρίσκομεν

$$\xi\Sigma m + \xi'\Sigma m' + \xi''\Sigma m'' + \dots = \Sigma m x + \Sigma m' x' + \Sigma m'' x'' + \dots$$

καί ἐκ τῆς σχέσεως (2)

(3) $\Xi\,\Sigma[m] = \xi\Sigma m + \xi'\Sigma m' + \xi''\Sigma m'' + \dots$ ο.ε.δ.

ἡ πρότασις αὕτη μάς ἐπιτρέπει νά εὕρωμεν τό κέντρον τῆς μάζης δύο ἤ πλειόνων ὑλικῶν συστημάτων, ὅταν γνωρίζωμεν τό κέντρον τῆς μάζης ἑκάστου τῶν συστημάτων τούτων.



Ὡς παράδειγμα ἔστωσαν g_1 καί g_2 τά κέντρα τῶν μαζῶν δύο ὑλικῶν συστημάτων m_1 καί m_2 καί G τό κέντρον μάζης τοῦ ἐκ τῶν δύο τούτων συστημάτων ἀποτελουμένου ὑλικοῦ συστήματος M. Ἐάν θεωρήσωμεν ἐπίπεδον P διερχόμενον διά τοῦ σημείου G καθέτως τῇ εὐθείᾳ $g_1 g_2$ ἔχομεν κατά τήν προηγουμένην σχέσιν (3)

$$m_1 \cdot Gg_1 - m_2 \cdot Gg_2 = 0$$

ἤ

$$\frac{Gg_1}{Gg_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Ἡ ἐξεύρεσις τοῦ κέντρου τῆς μάζης διευκολύνεται ἐνίοτε καί διά τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

1ον) <u>Ἐάν τό σῶμα κέκτηται διάμετρόν τινα ἤ διάμετρον ἐπίπεδον τό κέντρον μάζης κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας ἤ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τούτου.</u>

2ον) <u>Τό κέντρον τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος σώματός τινος συμπίπτει μέ τό κέντρον μάζης, ~~ἐάν τά κατά διάμετρον ἀν-~~ τίθετα σημεῖα τοῦ σώματος κέκτηνται τήν αὐτήν μάζαν</u>

3ον) <u>Τό κέντρον μάζης εὐθυγράμμου τμήματος κεῖται ἐπ' αὐτοῦ· τό κέντρον μάζης ἐπιπέδου τινός ἐμβαδοῦ κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τούτου.</u>

4ον) <u>Τά κέντρα μάζης δύο ὁμοίων σωμάτων εἶναι δύο ἀνάλογα σημεῖα.</u>

Προσδιορισμός τοῦ κέντρου τῆς μάζης τῶν ὁμογενῶν ὄγκων, ἐπιφανειῶν καί γραμμῶν

Τό κέντρον τῆς μάζης ~~προσδιορίζομεν διά~~ τῆς σχέσεως

$$Mz_1 = \Sigma m z$$

Ἔστω ρ ἡ πυκνότης τοῦ σώματος καί V ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἔχομεν $M = V\rho$ καί ἀντικαθιστῶντες

$$V\rho z_1 = \Sigma \rho\, dx\, dy\, dz \cdot z$$

καί ἐπειδή ρ εἶναι σταθερόν

$$V z_1 = \iiint z\, dx\, dy\, dz$$

ἀλλά

$$V = \iiint dx\, dy\, dz$$

ὥστε

$$x_1 = \frac{\iiint x\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz} \qquad y = \frac{\iiint y\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz} \qquad z_1 = \frac{\iiint z\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

<u>Ἀντοχή ὕλης</u> Πρωτοπαπαδάκη

Ἐν τῇ περιπτώσει ἐμβαδοῦ τινος ἔχομεν

$$x_1 = \frac{\int x\,d\omega}{\Omega_1} \qquad y_1 = \frac{\int y\,d\omega}{\Omega_1} \qquad z_1 = \frac{\int z\,d\omega}{\Omega_1}$$

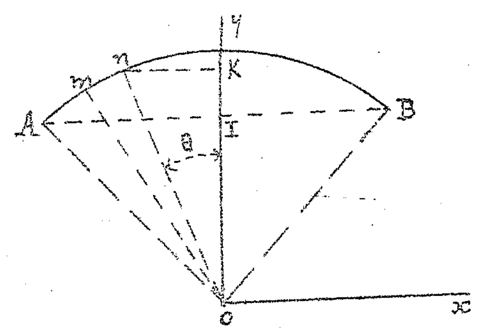
Καί ἐν τῇ περιπτώσει ἁπλῆς γραμμῆς

$$x_1 = \frac{\int x\,ds}{S} \qquad y_1 = \frac{\int y\,ds}{S} \qquad z_1 = \frac{\int z\,ds}{S}$$

<u>Ἐφαρμογή</u>.— Κέντρον μάζης τοῦ κυκλικοῦ τόξου AB. ἔχομεν ἐνταῦθα

$$ds = mn = r\,d\theta$$

$$y\,ds = \theta K\,ds = r\,\sigma\upsilon\nu\,\theta . ds = r^2\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta$$



ὥστε

$$y_1 = \frac{\int r^2\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta}{\int r\,d\theta} = \frac{r\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta}{r\int_{-\theta_1}^{\theta} d\theta}$$

ἔχομεν δέ

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1}\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta = 2\eta\mu\theta_1 \qquad \int_{-\theta_1}^{\theta_1} d\theta = 2\theta_1$$

ὥστε

$$y_1 = \frac{2r^2\eta\mu\theta_1}{2r\theta_1}$$

ἀλλ' ἔχομεν A I = $r\eta\mu\theta_1$

ὥστε

$$y_1 = \frac{rc}{2S}$$

ἔνθα c = χορδή AB.

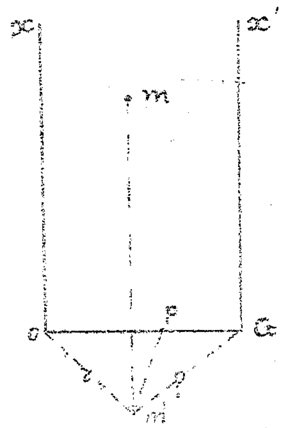
Ῥοπαί ἀδρανείας

Καλοῦμεν ῥοπήν ἀδρανείας σταθεροῦ σώματος ὡς πρός ὡρισμένον ἄξονα OX τό ἄθροισμα

$$\Sigma m r^2$$

ἔνθα m ἐμφαίνει τήν μάζαν ἑνός μορίου τοῦ σώματος καί r τήν ἀπό τοῦ ἄξονος ἀπόστασιν τοῦ μορίου τούτου.

Θεωρήσωμεν καί ἕτερον ἄξονα Gx' κείμενον εἰς ἀπόστασιν α τοῦ πρώτου OX παράλληλον αὐτῷ καί διερχόμενον διά τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τοῦ σώματος, καί ἔστω ρ ἡ ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασις τοῦ σημείου m τοῦ στερεοῦ. προβάλλοντες ἐπί ἐπιπέδου OGm' καθέτου τοῖς ἄξοσιν, ἔχομεν ἐν τῷ τριγώνῳ m'OG



$$r^2 = \rho^2 + \alpha^2 - 2\alpha . pG$$

ἤ πολλαπλασιάζοντες ἐπί τήν μάζαν m τοῦ μορίου m

$$mr^2 = m\rho^2 + m\alpha^2 - 2m\alpha . pG$$

ἐκτελοῦντες δέ τό ἄθροισμα τῶν ἀναλόγων σχέσεων, τάς ὁποίας μᾶς δίδουσι καί τά λοιπά μόρια τοῦ στερεοῦ ἔχομεν

$$\Sigma mr^2 = \Sigma m\rho^2 + \alpha^2\Sigma m - 2\alpha\Sigma m . pG$$

γνωρίζομεν δέ ἐκ θεμελιώδους τινός ἰδιότητος τοῦ κέντρου τῆς μάζης στερεοῦ τινος σώματος, ὅτι $\Sigma m.pG = 0$ ὅθεν

$$\Sigma mr^2 = \Sigma m\rho^2 + \alpha^2 M$$

ὥστε

ἔνθα M παριστᾷ τήν ὅλην μᾶζαν τοῦ στερεοῦ.

1ον — Ἡ ροπή ἀδρανείας στερεοῦ τινος σώματος ὡς πρός τόν

ἄξονα ox, ἰσοῦται μέ τήν ροπήν ἀδρανείας τοῦ αὐτοῦ σώματος

ὡς πρός τόν διά τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος αὐτοῦ διερχό-

μενον ἄξονα ox' παράλληλον τῷ ox, σύν τῷ γινομένῳ ὁ-

λοκλήρου τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπί τό τετράγωνον τῆς

ἀποστάσεως τῶν ἀξόνων ox καί Gx.

2ον — Ἐξ ὅλων τῶν μιᾷ καί τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παραλλή-

λων ἀξόνων, ὁ διά τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος διερχόμενος

ἀντιστοιχεῖ τῇ ἐλαχίστῃ ροπῇ ἀδρανείας. ὁ προσδιορισμός

τῆς ροπῆς Σmp^2 προσδιορίζει τάς ροπάς ἀδρανείας ὡς

πρός τούς λοιπούς παραλλήλους τῷ Gx' ἄξονας.

Ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι τό σημεῖον m τοῦ σώματος προσδιο-

ρίζεται διά τῶν τριῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων αὐτοῦ

καί ζητήσωμεν τήν ροπήν ἀδρανείας ~~τοῦ σώματος~~ $[m]$ ὡς

πρός τόν ἄξονα oA, οὗτινος αἱ

γωνίαι μετά τῶν ἀξόνων $o(x,y,z)$

εἰσίν ἀμοιβαίως α, β, γ.

Ἡ ζητουμένη ροπή ἀδρανείας

εἶναι

$$I = \Sigma m . \overline{mp}^2$$

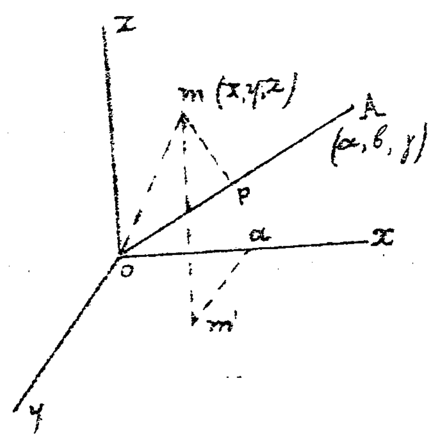
ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ omp

ἔχομεν

$$\overline{mp}^2 = \overline{om}^2 - \overline{op}^2$$

καί γνωρίζομεν, ὅτι

$$\overline{om}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



προβάλλοντες δέ ἐπί τοῦ ἄξονος oA τήν πολυγωνικήν

γραμμήν $oam'mp$ ἔχομεν.

$$x\,\text{συν}\,\alpha + y\,\text{συν}\,\beta + z\,\text{συν}\,\gamma = op$$

καί ὑψοῦντες εἰς τό τετράγωνον

$$\overline{op}^2 = x^2\text{συν}^2\alpha + y\,\text{συν}^2\beta + z^2\text{συν}\,\gamma + 2xy\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta + 2yz\,\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma + 2zx\,\text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\alpha$$

ὅθεν

$$\overline{mp}^2 = \overline{om}^2 - \overline{op}^2 = x^2\text{ημ}^2\alpha + y^2\text{ημ}^2\beta + z^2\text{ημ}^2\gamma - 2xy\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta - 2yz\,\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma - 2zx\,\text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\alpha$$

πολλαπλασιάζοντες ἤδη διά τοῦ m καί ἀθροίζοντες ἔχομεν

$$\Sigma m . \overline{mp}^2 = I = \text{ημ}^2\alpha\,\Sigma m x^2 + \text{ημ}^2\beta\,\Sigma m y^2 + \text{ημ}^2\gamma\,\Sigma m z^2$$

$$-2\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta\,\Sigma mxy - 2\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma\,\Sigma myz - 2\text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\alpha\,\Sigma mzx$$

Ἤ ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ A, B, C τάς ροπάς ἀδρανείας

ὡς πρός τούς ἄξονας ox, oy, oz ἔχομεν

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2) \qquad B = \Sigma m(z^2 + x^2) \qquad C = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

καί συνδυάζοντες τάς τρεῖς ταύτας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν

$$\Sigma m x^2 = \frac{B + C - A}{2} \qquad \Sigma m y^2 = \frac{-B + C + A}{2} \qquad \Sigma m z^2 = \frac{B - C + A}{2}$$

ἐάν πρός τούτοις θέσωμεν

$$\Sigma mxy = D \qquad \Sigma myz = E \qquad \Sigma mzx = F$$

ἔχομεν

$$I = \frac{A + B + C}{2}\text{ημ}^2\alpha + \frac{A - B + C}{2}\text{ημ}^2\beta + \frac{A + B - C}{2}\text{ημ}^2\gamma - 2D\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta - 2E\,\text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\beta$$

$$-2F\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\gamma$$

$$= \frac{A}{2}\left[\text{ημ}^2\beta + \text{ημ}^2\gamma - \text{ημ}^2\alpha\right] + \frac{B}{2}\left[\cdots\right] + \cdots$$

γνωρίζομεν δ' ὅτι

$$\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma = 1 \quad \text{ἤ} \quad \text{ημ}^2\beta + \text{ημ}^2\gamma = 1 + \text{συν}^2\alpha$$

καί ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν $\text{ημ}^2\alpha$ ἔχομεν

$$\text{ημ}^2\beta + \text{ημ}^2\gamma - \text{ημ}^2\alpha = 2\text{συν}^2\alpha$$

ὅθεν

$$I = A\,\text{συν}^2\alpha + B\,\text{συν}^2\beta + C\,\text{συν}^2\gamma - 2D\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta - 2E\,\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma - 2F\,\text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\alpha$$

ἐάν ἐπί τοῦ ἄξονος oA φέρωμεν μῆκος

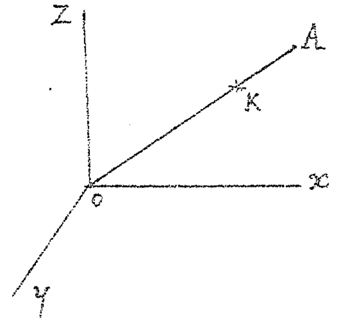
$$oK = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

Ἀντοχή ὕλης Πρωτοπαπαδάκη

αἱ συντεταγμέναι ξ, η, ζ τοῦ σημείου K προσδιορίζονται διά τῶν σχέσεων.

$\xi\sqrt{I}=$ συν α $\quad$ $\eta\sqrt{I}=$ συν β $\quad$ $\gamma\sqrt{I}=$ συν γ

καί ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς τῶν συν α, συν β, συν γ εἰς τήν προηγουμένην σχέσιν ἔχομεν



$$I=I\left[A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2-2D\xi\eta-2E\eta\zeta-2F\zeta\xi\right]$$

ἤ

$$(1)\quad A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2-2D\xi\eta-2E\eta\zeta-2F\zeta\xi=1$$

Ἐάν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἄξων OA μετατοπίζεται περιστρεφόμενος περί τό σημεῖον O τό σημεῖον K διαγράφει τήν ὑπό τῆς ἐξισώσεως (1) παριστανομένην δευτεροβάθμιον ἐπιφάνειαν μέ κέντρον τό O, ἥτις εἶναι προφανῶς ἐλλειψοειδής, διότι ἡ ἀκτίς OK εἶναι πεπερασμένη ποσότης. Οὕτω

Δοθέντος στερεοῦ σώματος δυνάμεθα περί οἱονδήποτε σημεῖον αὐτοῦ O ὡς κέντρον νά προσδιορίσωμεν τό ἐλλειψοειδές (1). ἵνα δέ εὕρωμεν τήν ῥοπήν τῆς ἀδρανείας τοῦ σώματος, ὡς πρός ἄξονα οἱονδήποτε διερχόμενον διά τοῦ σημείου O, λαμβάνομεν τήν μετά τοῦ ἄξονος OA συμπίπτουσαν ἀκτῖνα OK τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, καί ἔχομεν

$$I=\frac{I}{OK^2}$$

τό ἐλλειψοειδές τοῦτο ὠνόμασεν ὁ Poinsot ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας σχετικόν τῷ σημείῳ O. καί δι' αὐτοῦ βλέπομεν ἀμέσως τήν μεταβολήν ἥν ὑφίσταται ἡ ῥοπή τῆς ἀδρανείας τοῦ στερεοῦ, ὅταν ὁ ἄξων OA μετατοπίζεται περιστρεφόμενος περί τό σημεῖον O.

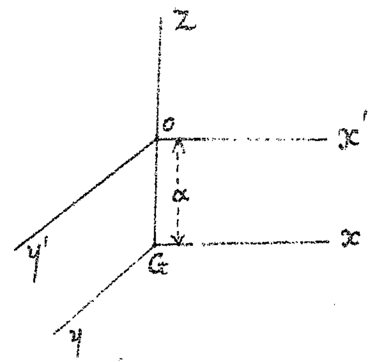
ἡ μεγίστη ῥοπή ἀδρανείας ἀντιστοιχεῖ τῷ ἐλαχίστῳ ἄξονι τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἡ ἐλαχίστη ῥοπή ἀδρανείας ἀντιστοιχεῖ τῷ μεγίστῳ ἄξονι τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. τούς τρεῖς ἄξονας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς τῆς ἀδρανείας, ὀνομάζομεν πρωτεύοντας ἄξονας ἀδρανείας τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τό σημεῖον O. καί εὑρίσκομεν τούτους διά τῶν σχέσεων

$$D=\Sigma mxy=0 \qquad E=\Sigma myz=0 \qquad F=\Sigma mzx=0$$

Ἐάν τό σημεῖον O συμπίπτει μέ τό κέντρον τῆς βαρύτητος G τοῦ στερεοῦ τό ἐλλειψοειδές (1) καλεῖται κεντρικόν ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας.

Οἱ πρωτεύοντες ἄξονες τῆς ἀδρανείας ὡς πρός τό σημεῖον G εἶναι πρωτεύοντες καί ὡς πρός τά λοιπά σημεῖα αὐτῶν.

Ἔστω τῷ ὄντι O ἕτερον σημεῖον τοῦ GZ ἵνα ὁ ἄξων OZ εἶναι καί πρωτεύων ὡς πρός τό σημεῖον τοῦτο O δέον νά ἔχωμεν



$$\Sigma mz'x=0 \qquad \Sigma mz'y=0$$

ἀλλά

$$z'=z-\alpha$$

ὥστε αἱ ἄνω συνθῆκαι μετατρέπονται εἰς

$$\Sigma m(z-\alpha)x=0 \qquad \Sigma m(z-\alpha)y=0$$

ἤ

$$\Sigma mzx-\alpha\Sigma mx=0 \qquad \Sigma mzy-\alpha\Sigma my=0$$

ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος

$$\Sigma mx=0 \qquad \Sigma my=0$$

Ἐπειδή δέ ὁ ἄξων GZ εἶναι πρωτεύων ἄξων ὡς πρός τό σημεῖον G ἔχομεν

$$\Sigma mzx=0 \qquad \Sigma mzx=0$$

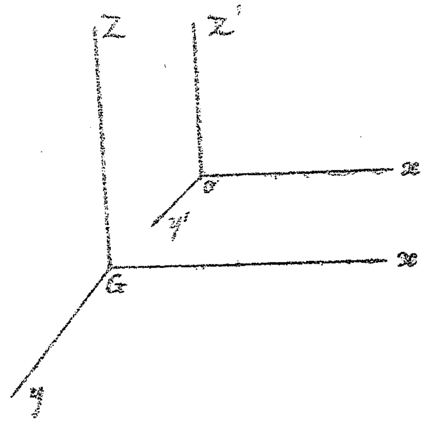
ὥστε καί

$$\Sigma m z' x = 0 \qquad \Sigma m z' y = 0$$

καί ὁ ἄξων GZ εἶναι πρωτεύων καί ὡς πρός τό σημεῖον O.

Σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔνθα τό ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας συμπίπτει μέ σφαῖραν.

Ἔστωσαν $G(x,y,z)$ οἱ σχετικοί τῷ κέντρῳ τῆς βαρύτητος πρωτεύοντες ἄξονες καί ὁ τό σημεῖον ὡς πρός τό ὁποῖον τό ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας εἶναι σφαῖρα.



Ἐάν παραστήσωμεν διά α, β, c τάς συντεταγμένας τοῦ σημείου O ὡς πρός τούς ἄξονας $G(x,y,z)$, $O(x',y',z')$ εἶναι πρωτεύοντες ἄξονες ὡς πρός τό σημεῖον O καί ἔχομεν

$$\Sigma m x' y' = 0 \qquad \Sigma m y' z' = 0 \qquad \Sigma m z' x' = 0$$

καί ἐπειδή

$$x' = x - \alpha \qquad y' = y - \beta \qquad z' = z - c$$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\Sigma m(x-\alpha)(y-\beta) = 0 = \Sigma m x y - \beta\, \Sigma m x - \alpha\, \Sigma m y + \alpha\beta M = 0$$
$$\Sigma m(y-\beta)(z-c) = 0 = \Sigma m y z - c\, \Sigma m y - \beta\, \Sigma m z + \beta c M = 0$$
$$\Sigma m(z-c)(x-\alpha) = 0 = \Sigma m z x - \alpha\, \Sigma m z - c\, \Sigma m x + c\alpha M = 0$$

ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως

$$\Sigma m x y = \Sigma m y z = \Sigma m z x = 0 \qquad \Sigma m x = \Sigma m y = \Sigma m z = 0$$

καί ἐκ τῶν ἄνω σχέσεων ἐξάγομεν

$$\alpha\beta = 0 \qquad \beta c = 0 \qquad c\alpha = 0$$

ὥστε δύο τοὐλάχιστον τῶν ποσοτήτων α, β, c μηδενίζονται.

Τό σημεῖον O λοιπόν ἐάν ὑπάρχῃ εὑρίσκηται ἐπί ἑνός τῶν σχετικῶν τῷ κέντρῳ τῆς βαρύτητος πρωτευόντων ἀξόνων.

ἔχομεν δέ.

$$I_{ox'} = A + M(\beta^2 + c^2)$$
$$I_{oy'} = B + M(c^2 + \alpha^2)$$
$$I_{oz'} = C + M(\alpha^2 + \beta^2)$$

καί ἐπειδή $I_{ox'} = I_{oy'} = I_{oz'}$, ἐάν ὑποθέσωμεν $\beta = 0$ $c = 0$ δέον νά ἔχωμεν

$$A = B + \alpha^2 M = C + \alpha^2 M$$

ὥστε

$$B = C \quad \text{καί} \quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$$ ἐν δέον νά ἔχωμεν $A > B$

καί τό κεντρικόν ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας εἶναι ἐκ περιστροφῆς περί τόν ἄξονα ox. ὥστε

Ἐάν τό κεντρικόν ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας εἶναι ἐκ περιστροφῆς περί τόν ἄξονα τῆς μεγίστης ῥοπῆς ἀδρανείας, δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἐπί τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς δύο σημεῖα, ἀπέχοντα ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος G περί τά ὁποῖα τό ἐλλειψοειδές τῆς ἀδρανείας συμπίπτει μέ σφαῖραν.

Ὑπολογισμός τῶν ῥοπῶν ἀδρανείας τῶν ὁμογενῶν σωμάτων.

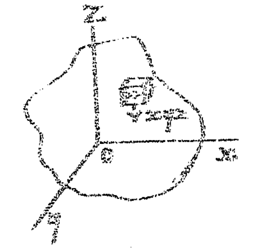
Ῥοπή ἀδρανείας οἱουδήποτε σώματος ὁμογενοῦς, ἔνθα ἀντικαθιστῶμεν τήν μᾶζαν τοῦ σώματος διά τοῦ ὄγκου προσδιορίζεται ὡς ἑξῆς.

Τήν ῥοπήν ἀδρανείας ὡς πρός τόν ἄξονα oz ὡρίσαμεν διά τῆς σχέσεως

$$I_z = \Sigma m z^2$$

ἀλλά ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ K τήν πυκνότητα τοῦ σώματος, ἔχομεν

$$m = K\,dx\,dy\,dz$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$



ὥστε

$$I_z = \Sigma m r^2 = \Sigma K(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

καί ἐάν ὑποθέσωμεν τό σῶμα ὁμογενές καί $K=1$ ἔχομεν

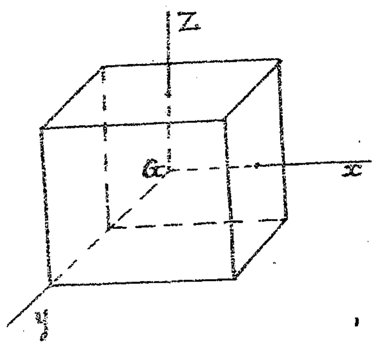
$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

Τήν δέ ἀκτῖνα περιφορᾶς ρ προσδιορίζομεν διά τῆς σχέσεως

$$\rho^2 = \frac{\iiint (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}$$

Ἐφαρμογαί

1ον __ Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον   Ἐάν παραστήσωμεν διά G τό κέντρον τῆς μάζης καί διά 2α, 2β καί $2c$ τάς πλευράς τοῦ παραλληλεπιπέδου ἔχομεν



$$I_x = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-c}^{+c} (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\alpha \int_{-\beta}^{+\beta} dy \int_{-c}^{+c} (y^2+z^2)\,dz$$

$$= 2\alpha \int_{-\beta}^{+\beta} \left[2\frac{c^3}{3} + 2c\,y^2\right] dy = \frac{8}{3}\alpha\beta c(\beta^2+c^2) = \frac{V}{3}(\beta^2+c^2)$$

ἔνθα V παριστᾷ τόν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἡ ἀκτίς περιφορᾶς

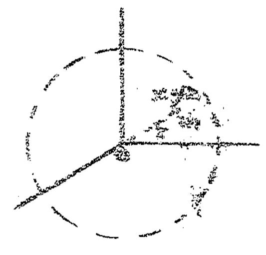
$$\rho^2 = \frac{I}{V} = \frac{\beta^2+c^2}{3}$$

2ον __ Σφαῖρα. Ἔχομεν ἐνταῦθα

$$I = \Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(y^2+z^2) = \Sigma m(z^2+x^2)$$

διότι ἡ ῥοπή ἀδρανείας εἶναι ἡ αὐτή δι' ὅλους τούς διά τοῦ κέντρου διερχομένους ἄξονας. ἀθροίζοντες ἔχομεν

$$3I = 2\Sigma m(x^2+y^2+z^2) = 2\Sigma m r^2$$



ἔνθα r παριστᾷ τήν ἀπό τοῦ κέντρου r ἀπόστασιν τοῦ σημείου m.

Θεωρήσωμεν δύο σφαίρας μέ κέντρον o καί ἀκτῖνα r καί $r+dr$ οἱ ὄγκοι αὐτῶν εἶναι

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{καί} \quad \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3$$

ὁ μεταξύ των ἐμπεριεχόμενος ὄγκος εἶναι

$$\frac{4}{3}\pi\left[(r+dr)^3 - r^3\right] = 4\pi r^2 dr$$

ὥστε

$$3I = 2\Sigma(4\pi r^2 dr)r^2 = 8\pi\int_0^r r^4 dr = \frac{8}{5}\pi r^5$$

καί

$$I = \frac{8}{15}\pi r^5 = \frac{2}{5}V r^2$$

καί ἡ ἀκτίς περιφορᾶς

$$\rho^2 = \frac{I}{V} = \frac{2}{5}r^2$$

3ον __ Ἐλλειψοειδές. —— Ἔστω τό ἐλλειψοειδές

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ἔχομεν ἐν γένει

$$I_x = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-c}^{+c} (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

ἐάν θέσωμεν

$$x = \alpha x' \qquad y = \beta y' \qquad z = c z'$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐλλειψοειδοῦς μετατρέπεται εἰς

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

καὶ παριστᾷ σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα. ἔχομεν δέ

$$I_x = \alpha\beta c \iiint (\beta^2 y'^2 + c^2 z'^2)\, dx'\, dy'\, dz'$$

$$= \alpha\beta c \left[\beta^2 \iiint y'^2 dx' dy' dz' + c^2 \iiint z'^2 dx' dy' dz'\right]$$

ὅπου αἱ ὁλοκληρώσεις ἐπεκτείνονται ἐπὶ σφαίρας μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα, ἀλλὰ ἐκ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος ἔχομεν

$$2\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 3\Sigma m(x'^2 + y'^2) \quad \text{ἤ} \quad \Sigma m(x'^2 + y'^2) = 2\Sigma m x'^2 = 2\Sigma m y'^2 = 2\Sigma m z'^2$$

ὅθεν

$$\Sigma m x'^2 = \frac{I}{2} = \frac{4}{15}\pi r^5$$

καὶ ἔχομεν οὕτω τὰς τιμὰς τῶν ἐν παρενθέσει ὁλοκληρωμάτων

$$\iiint y'^2 dx' dy' dz' = \Sigma m y'^2 = \frac{4}{15}\pi = \iiint z'^2 dx' dy' dz'$$

ὥστε

$$I_x = \alpha\beta c(\beta^2 + c^2)\frac{4}{15}\pi = \frac{4}{15}\pi\alpha\beta c(\beta^2 + c^2)$$

καὶ ἐπειδή

ὄγκος ἐλλειψοειδοῦς $V = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta c$

ἔχομεν

$$I_x = \frac{V}{5}(\beta^2 + c^2) \qquad I_y = \frac{V}{5}(c^2 + \alpha^2) \qquad I_z = \frac{V}{5}(\alpha^2 + \beta^2)$$

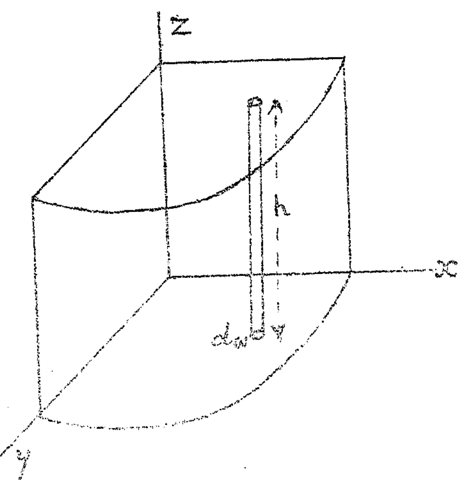
4ον — Εὐθὺς Ἔχομεν ἐνταῦθα
κύλινδρος.— $dv = h\,d\omega = h\,dx\,dy$

καί

$$I_z = \Sigma dv(x^2 + y^2) = h\iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox

$$I_x = \Sigma d\omega\, dz (y^2 + z^2) = \iint (y^2 + z^2)\, d\omega\, dz$$



$$= \int d\omega \int_0^h (y^2 + z^2)\, dz = \int d\omega \left(\frac{h^3}{3} + h y^2\right)$$

$$I_x = h\int y^2 d\omega + \frac{h^3}{3}\Omega$$

ἔνθα Ω παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.
διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου θὰ ἔχομεν

$$I_y = h\int x^2 d\omega + \frac{h}{3}\Omega$$

ὅθεν

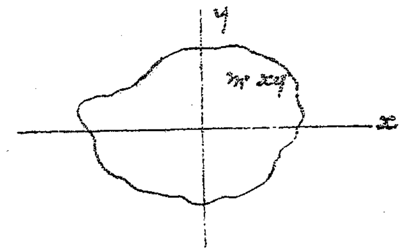
$$I_x + I_y = h\int (x^2 + y^2)\, d\omega + \frac{2}{3}h^3\Omega = I_z + \frac{2h^3}{3}\Omega$$

Ῥοπαὶ ἀδρανείας ἐπιπέδων ἐμβαδῶν.

Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$I_x = \Sigma m y^2 = \iint y^2 dx\, dy$$

$$\rho^2 = \frac{\iint y^2 dx\, dy}{\iint dx\, dy}$$

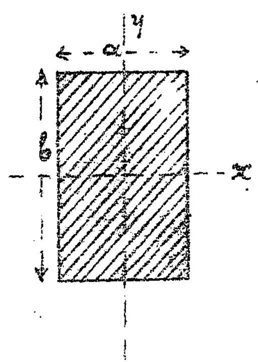


Ἐφαρμογαί

1ον — Ὀρθογώνιον Ἔχομεν ἐνταῦθα
πλῆρες

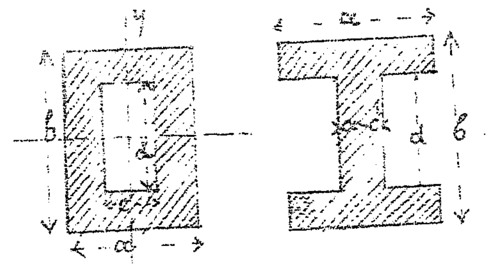
$$I_x = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \alpha\, dy\, y^2 = \alpha \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} y^2 dy = \frac{\alpha\beta^3}{12}$$

$$I_y = \frac{\beta\alpha^3}{12}$$



Ἀντοχὴ ὕλης Πρωτοπαπαδάκη

2ον.— Ὀρθογώνιον (evidé) :—



Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$I_x = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (\alpha - c)\, y^2 dy + 2\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \alpha y^2 dy$$

$$= (\alpha - c)\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y^2 dy + 2\alpha \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{\beta}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12}(\alpha\beta^3 - c d^3)$$

καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου

$$I_y = \frac{1}{12}(\alpha^3\beta - c^3 d)$$

διὰ τὴν μορφὴν I ἔχομεν ἐπίσης

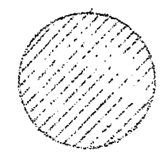
$$I_x = \frac{1}{12}(\alpha\beta^3 - c d^3) \qquad I_y = \frac{1}{12}\left[\alpha^3(\beta - d) + d^3(\alpha - c)\right]$$

3ον/ Κύκλος. — Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$I = \Sigma m y^2 = \Sigma m x^2$$

ὅθεν

$$2I = \Sigma m (x^2 + y^2)\ \Sigma m r^2$$



Θεωρήσωμεν δύο κύκλους μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνας r καὶ r + dr. τὰ ἐμβαδά των εἶναι

$$\Pi r^2 \text{ καὶ } \Pi (r + dr)^2$$

καὶ τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον ἐμβαδὸν $2\Pi r\, dr$

ὥστε

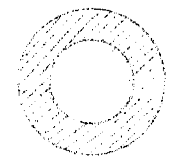
$$2I = \int_0^R 2\Pi r^3 dr = 2\Pi \frac{R^4}{4} = \Pi \frac{R^4}{2}$$

$$I = \frac{\Pi R^4}{4}$$

4ον.— Κυκλικὴ στεφάνη. Διὰ καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔχομεν

$$2I = 2\Pi \int_{R_0}^{R} r^3 dr$$

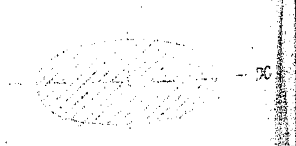
ὅθεν $\quad I = \frac{\Pi}{4}(R^4 - R_0^4)$



5ον.— Ἔλλειψις.— Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶναι $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

καὶ ἔχομεν $\quad I_x = \int y^2 dx\, dy$

Ἐὰν θέσωμεν $x = \alpha x'$ $\quad y = \beta y'$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἔχομεν $\quad x'^2 + y'^2 = 1$ κύκλον μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα



καὶ $\quad I_x = \alpha\beta^3 \int y'^2 dx' dy'$

γνωρίζομεν δ' ἐκ τοῦ παραδείγματος 3ον ὅτι

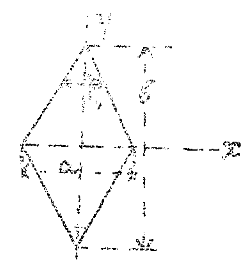
$$\int y'^2 dx' dy' = \frac{\Pi}{4}$$

ὥστε

$$I_x = \frac{\Pi}{4}\alpha\beta^3$$

καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου

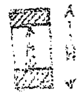
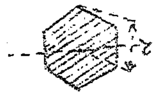
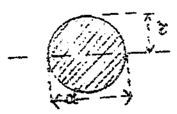
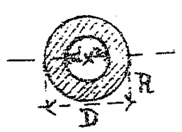
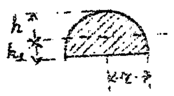
$$I_y = \frac{\Pi}{4}\alpha^3\beta$$

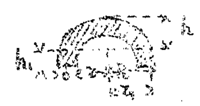
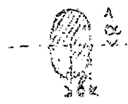
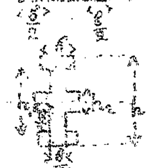
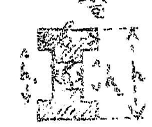
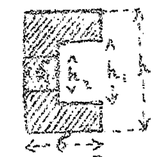
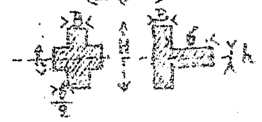
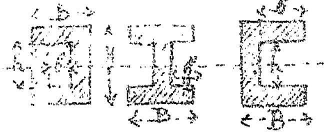


6ον.— ἐνταῦθα ἔχομεν

$$I_x = 2\int_0^{\frac{\beta}{2}} \xi y^2 dy = 2\int_0^{\frac{\beta}{2}} \frac{\alpha}{\beta}(\beta - 2y) y^2 dy$$

$$= \frac{1}{48}\alpha\beta^3$$

Ἀρ.	γεωμετρική μορφή τῆς τομῆς	Ῥοπή ἀδρανείας I	Συντελεστής ἀντιστάσεως τῆς τομῆς $W=\frac{I}{u}$
1		$\frac{\beta h^3}{12}$	$\frac{\beta h^2}{6}$
2		$\frac{\beta}{12}(H^3-h^3)$	$\frac{\beta}{6H}(H^3-h^3)$
3		$I=\frac{1}{36}\beta h$ $u=\frac{2}{3}h$	$\frac{1}{24}\beta h$
4		$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6}$
5		$\frac{h^4}{12}$	$0.118\,h^3$
6			$\frac{5}{8}r^3$
7		$\frac{5}{16}r^4\sqrt{3}=0.5413r^4$	$0.5413\,r^3$
8		$\frac{1+2\sqrt{2}}{6}r^4=0.638r^4$	$0.6906\,r^3$
9	Κανονικόν πολύγωνον n πλευρῶν. s= πλευρά τοῦ πολυγώνου. F= ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου. r= ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.	$\frac{F}{12}\left(3r^2-\frac{s^2}{2}\right)$	$r\frac{F}{4}$
10		$\frac{\pi d^2}{64}=\frac{\pi r^4}{4}=0.0491d^4=0.7854r^4$	$\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi r^3}{4}=0.0982d^3$
11		$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)$	$\frac{\pi}{32}\frac{D^4-d^4}{D}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^4-r^4}{R}$
12		$0.110\,r^4$	$W=0.19r^3$ $W_1=0.26r^3$

Ἀρ.	γεωμετρική μορφή τῆς τομῆς	Ῥοπή ἀδρανείας I	Συντελεστής ἀντοχῆς τῆς τομῆς $W=\frac{I}{u}$
13		$0.110(R^4-r^4)-\frac{0.283R^2r^2(R-r)}{R+r}$ ἢ κατὰ προσέγγισιν $I=0.3[illegible]$	
14		$\frac{\pi\beta\alpha^3}{4}=0.785\beta\alpha^3$	$\frac{\pi\beta\alpha^2}{4}=0.7854\beta\alpha^2$
15		$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16}d^4+\beta(h^3-d^3)+\beta^3(h-d)\right]$	$\frac{1}{6h}\left[0.589d^4+\beta(h^3-d^3)+\beta^3(h-d)\right]$
16		$\frac{A^4-\alpha^4}{12}$	$\frac{1}{6}\;\frac{A^4-\alpha^4}{A}$
17		$\frac{A^4-\alpha^4}{12}$	$\frac{A^4-\alpha^4}{12A}\sqrt{2}=0.1178\;\frac{A^4-\alpha^4}{A}$
18		$I=\frac{6\beta^2+6\beta\beta_1+\beta_1^2}{36(2\beta+\beta_1)}h^3$ $y=\frac{1}{3}\;\frac{3\beta+2\beta_1}{2\beta+\beta_1}h$	$\frac{6\beta^2+6\beta\beta_1+\beta_1^2}{12(3\beta+2\beta_1)}h^2$
19		$\frac{\beta h^3-(\beta-\beta_1)h_1^3+\beta_1h_2^3}{12}$	$\frac{\beta h^3-(\beta-\beta_1)h_1^3+\beta_1h_2^3}{6h}$
20		$\frac{\beta(h^3-h_1^3)+\beta_1(h_1^3-h_2^3)}{12}$	$\frac{\beta(h^3-h_1^3)+\beta_1(h_1^3-h_1^3)}{6h}$
21			
22		$\frac{BH^3+\beta h^3}{12}$	$\frac{BH^3+\beta h^3}{6H}$
23		$\frac{BH^3-\beta h^3}{12}$	$\frac{BH^3-\beta h^3}{6H}$

Τέλος

Ἀντοχή ὕλης