

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

## ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

(ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ)

Εμμ. Δρης, Ομότιμος Καθηγητής  
ΕΜΠολυτεχνείου  
Αθήνα 2013



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι γραμμές μεταφοράς είναι είδος κυματοδηγών με δύο ή περισσότερους αγωγούς. Μπορεί να υπάρχουν διάφορα υλικά στο χώρο των αγωγών. Στη γενική αυτή περίπτωση η διάδοση είναι πολύπλοκη και μπορεί να υπάρχουν πολλές ταχύτητες διάδοσης και υπάρχει σύζευξη, δηλαδή τα σήματα αλληλοεπηρεάζονται. Θα ασχοληθούμε με γραμμές μεταφοράς όπου η διάδοση γίνεται σε δυο αγωγούς και υπάρχει μόνο ένα υλικό, διηλεκτρικό χωρίς μαγνητικές ιδιότητες. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα διάδοσης είναι μια, αυτή της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο συγκεκριμένο υλικό. Στις ιδανικές (χωρίς απώλειες) γραμμές μεταφοράς είναι δυνατόν να διαδίδονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα τύπου TE, TM και TEM. Τα κύματα TE και TM έχουν κατώφλια αποκοπής συχνοτήτων κάτω από τα οποία δεν διαδίδονται. Χονδρικά, το μέγιστο μήκος κύματος (που καθορίζει και την αντίστοιχη ελάχιστη συχνότητα) κατωφλιού είναι περίπου ίσο με τις διαστάσεις της διατομής του κυματοδηγού-γραμμής μεταφοράς.

Για ομοαξονικό καλώδιο με εξωτερικό αγωγό ακτίνας περίπου 1 cm και εσωτερικό αγωγό ακτίνας περίπου 50  $\mu\text{m}$  η συχνότητα αποκοπής είναι μερικά GHz. Αν οι διαστάσεις είναι μικρότερες, πράγμα που συμβαίνει στα συνήθη καλώδια που χρησιμοποιούνται στα εργαστήρια, οι συχνότητες είναι ακόμη μεγαλύτερες μέχρι πολλά GHz. Τέτοιες συχνότητες δεν μπορούν να ανιχνευτούν με τα συνήθη «γρήγορα» ηλεκτρονικά. Έτσι στις γραμμές μεταφοράς παρουσιάζει ενδιαφέρον η διάδοση κυμάτων TEM τα οποία δεν έχουν κατώφλι αποκοπής συχνοτήτων αλλά διαδίδονται και οι χαμηλές συχνότητες.

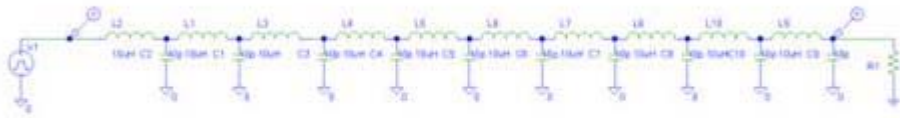
Ο τρόπος διάδοσης TEM μπορεί να περιγραφεί με κατανεμημένα διακριτά στοιχεία, πηνία και πυκνωτές, για την ιδανική περίπτωση χωρίς απώλειες και με προσθήκη και αντιστατών για πραγματικές περιπτώσεις με απώλειες. Τελικώς από τα κατανεμημένα διακριτά στοιχεία με οριακή διαδικασία καταλήγουμε σε συνεχείς κατανομές στοιχείων κυκλωμάτων και στις ίδιες σχέσεις που βγαίνουν από την πεδιακή θεωρία (Κλασική Ηλεκτροδυναμική). Θα βγάλουμε τις εξισώσεις των γραμμών μεταφοράς ξεκινώντας από διακριτά κατανεμημένα στοιχεία κυκλωμάτων και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα φαινόμενα των γραμμών μεταφοράς κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Laplace και της μεθόδου με φάσορες. Η περίπτωση ξεφεύγει από αυτήν των συνήθων κυκλωμάτων διότι εδώ το μήκος κύματος είναι συγκρίσιμο με τις διαστάσεις του κυκλώματος που είναι η γραμμή μεταφοράς. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για τις γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ισχύος έχουμε συχνότητα  $f = 50 \text{ Hz}$ , ταχύτητα  $c = 3 \times 10^8 \text{ cm/s}$ , οπότε το μήκος κύματος ( $\lambda = c/f$ ) ισούται με 6000 km !!

Για τη μελέτη φαινομένων των γραμμών μεταφοράς και για τη λύση προβλημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα προσομοίωσης SPICE.

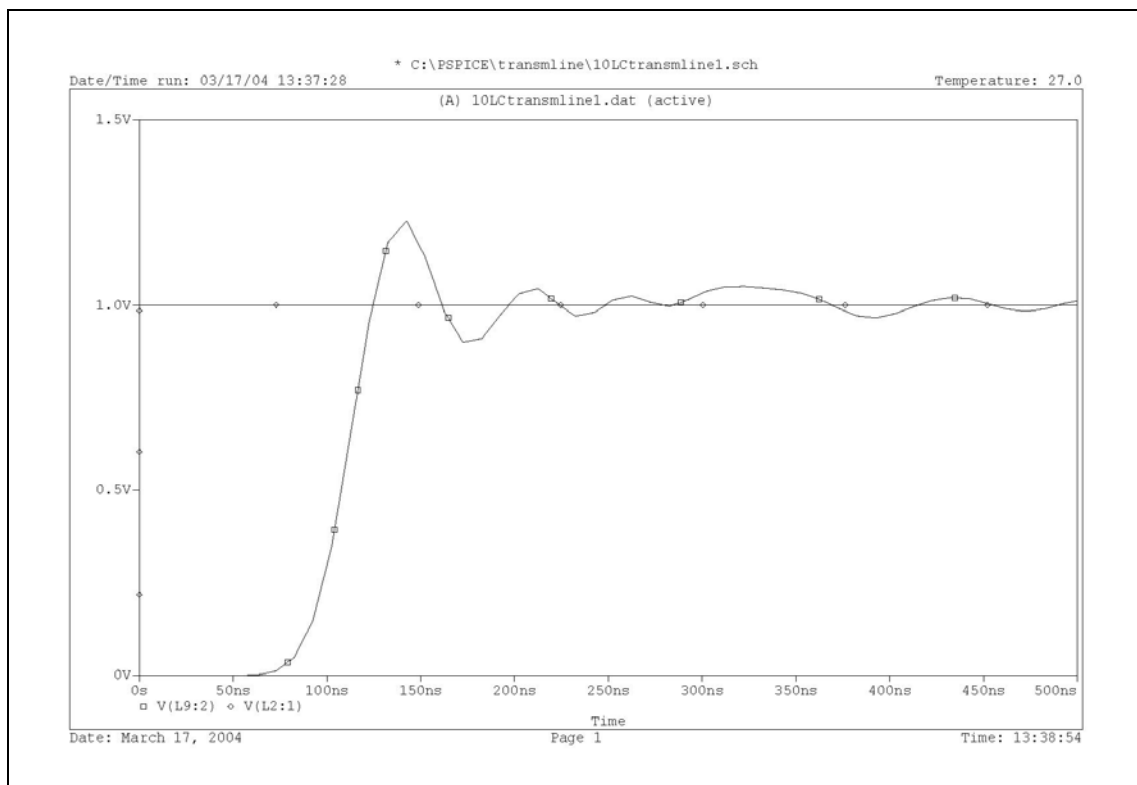
Αθήνα 11/04/2013

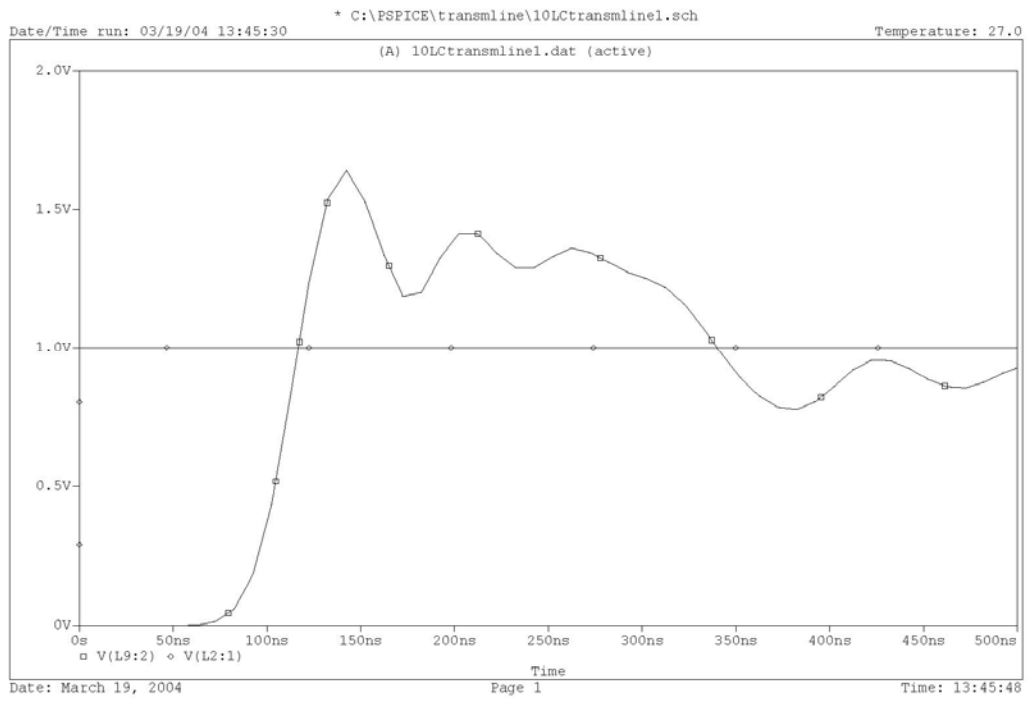


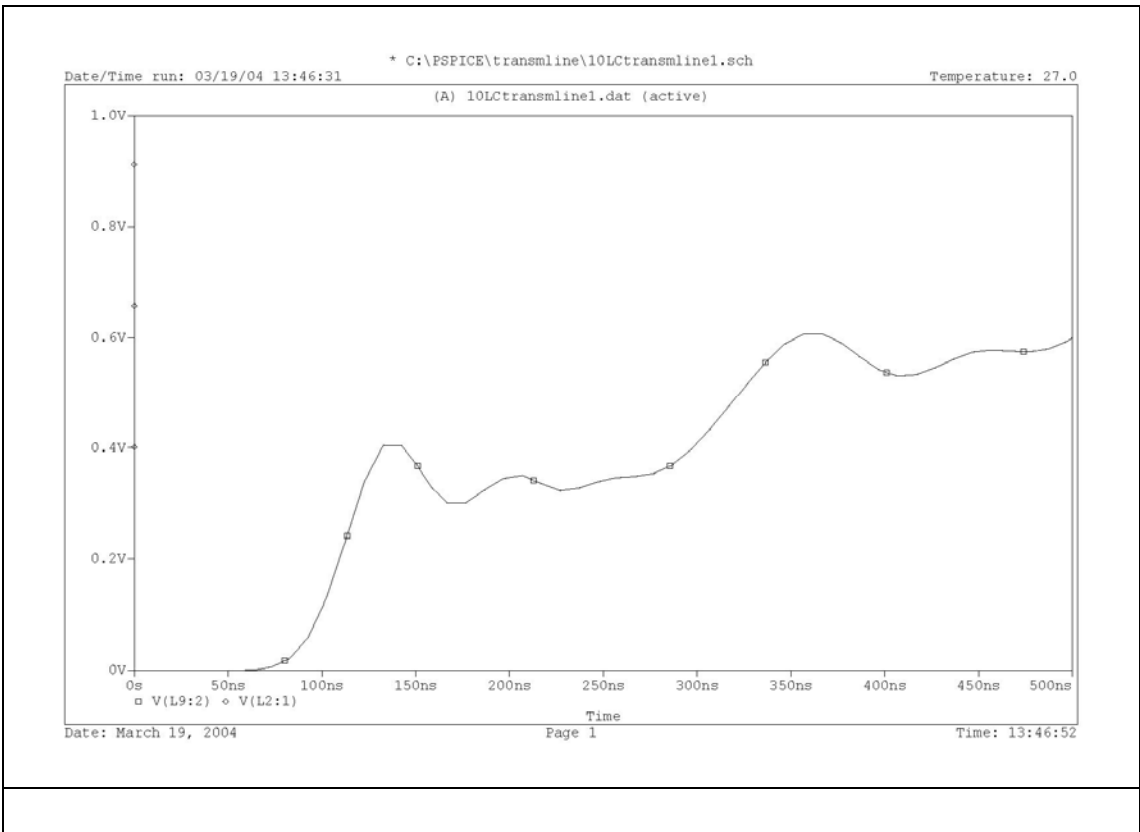
# 1. ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ



Σχήμα 1.1

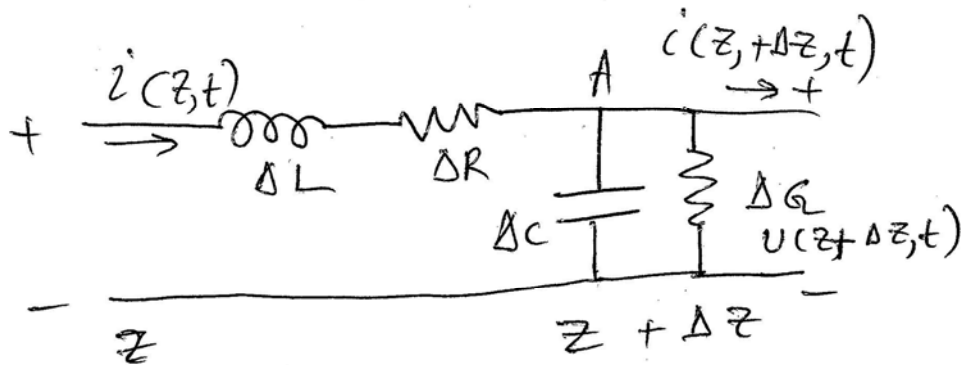






Σχήμα 1.2

Η θέση πάνω στη γραμμή μεταφοράς όταν μετριέται από την αρχή προς το τέλος της γραμμής θα παριστάνεται με το  $z$ .  
 Θεωρούμε μικρό τμήμα γραμμής μεταφοράς στη θέση  $z$ , κατά μήκος της, με μικρό μήκος  $\Delta z$ .



Σχήμα 1.1

Για αυτό το μικρό κομμάτι της γραμμής μήκους  $\Delta z$ , τα στοιχεία κυκλώματος, αυτεπαγωγή, ωμική αντίσταση των αγωγών, χωρητικότητα μεταξύ των αγωγών και αγωγιμότητα του υλικού μεταξύ των αγωγών, είναι αντιστοίχως,  $\Delta L$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta C$  και  $\Delta G$ . Με εφαρμογή του νόμου των βρόχων του Kirchhoff, τη χρονική στιγμή  $t$ , έχουμε,

$$-v(z,t) + \Delta L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + v(z + \Delta z, t) + i(z,t)\Delta R = 0$$

άρα 
$$v(z,t) - \Delta L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - (v(z,t) + \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \Delta z) - i(z,t)\Delta R = 0$$

Επομένως διαιρώντας δια  $\Delta z$  και θεωρώντας ότι  $\Delta z \rightarrow 0$  παίρνουμε

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + \frac{dL}{dz} \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + i(z,t) \frac{dR}{dz} = 0$$

Θέτουμε  $\frac{dL}{dz} = L_l$  και  $\frac{dR}{dz} = R_l$  (αυτεπαγωγή και ωμική αντίσταση ανά μονάδα

μήκους αντιστοίχως). Πολλοί χρησιμοποιούν τα σύμβολα  $L$  και  $R$  χωρίς δείκτες πράγμα που μπορεί να προκαλέσει σύγχυση.

Έτσι καταλήγουμε στη (διαφορική) εξίσωση,

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + L_l \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + i(z,t)R_l = 0 \quad (1.1)$$

Ο νόμος των κόμβων του Kirchhoff για το σημείο A δίνει,

$$-i(z,t) + i(z + \Delta z, t) + v(z + \Delta z, t)\Delta C + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{όπου } Q(z + \Delta z, t) \text{ είναι το φορτίο στη χωρητικότητα } \Delta C, \text{ άρα } Q(z + \Delta z, t) = \Delta C \cdot v(z + \Delta z, t). \text{ Έτσι καταλήγουμε στη σχέση,}$$

$$\frac{\partial Q(z + \Delta z, t)}{\partial t} = \Delta C \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t}$$

Επομένως

$$i(z,t) - (i(z,t) + \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} \Delta z) - v(z + \Delta z, t)\Delta C - \Delta C \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} = 0$$

Διαιρούμε δια  $\Delta z$  και θεωρώντας ότι  $\Delta z \rightarrow 0$  καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση,

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + C_l \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + G_l v(z,t) = 0 \quad (1.2)$$

Όπου  $C_l = \frac{dC}{dz}$  και  $G_l = \frac{dG}{dz}$  είναι αντιστοίχως η χωρητικότητα και η

αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους.

Απαλείφουμε το  $v(z,t)$  μεταξύ των δυο (διαφορικών) εξισώσεων και καταλήγουμε στην εξίσωση,



$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - L_l C_l \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} - (C_l R_l + G_l L_l) \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - i(z,t) G_l R_l = 0 \quad (1.3)$$

Απαλείφουμε το  $i(z,t)$  και βρίσκουμε,

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - L_l C_l \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} - (C_l R_l + G_l L_l) \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - v(z,t) G_l R_l = 0 \quad (1.4)$$

έτσι καταλήγουμε σε δυο ίδιες κυματικές εξισώσεις με απόσβεση, για το ρεύμα και την τάση. Ας σημειωθεί ότι τα  $C_l$ ,  $R_l$ ,  $G_l$  και  $L_l$  μπορεί, γενικώς, να εξαρτώνται από τη συχνότητα.

Αν δεν υπάρχουν απώλειες έχουμε  $R_l=0$ ,  $G_l=0$  οπότε καταλήγουμε στις κυματικές εξισώσεις χωρίς απόσβεση,

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - L_l C_l \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - L_l C_l \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = 0$$

Προφανώς η διάδοση γίνεται με ταχύτητα  $c$  (φασική ταχύτητα) ίση με

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} \text{ ανεξάρτητη της συχνότητας.}$$

Αν ανατρέξουμε στη μιγαδική αναπαράσταση αρμονικών μεγεθών έχουμε,

$v(z,t) = \text{Re} \left[ A e^{j(\pm kz + \omega t)} \right]$  και αντίστοιχη σχέση για το ρεύμα.  $A e^{j(\pm kz + \omega t)}$  είναι η μιγαδική αναπαράσταση του αρμονικού μεγέθους  $v(z,t)$ . Αφού το  $v(z,t)$  είναι λύση της κυματικής εξίσωσης προφανώς θα είναι λύση και η μιγαδική του αναπαράσταση. Αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε ότι

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{C_l L_l}} \quad (1.6)$$

Είναι προφανές ότι το  $+k$  σημαίνει διάδοση προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  και το  $-k$  προς την αρνητική κατεύθυνση. Αφού η ταχύτητα δεν εξαρτάται από τη συχνότητα οι διάφορες κυματομορφές διαδίδονται χωρίς παραμόρφωση. Με τον τρόπο της λύσης D' Alembert δείχνεται ότι γενικώς η λύση των διαφορικών εξισώσεων (1.5) είναι της μορφής

$$h(z,t) = f(z - ct) + g(z + ct) \quad (1.7)$$

Όπου

$$c = \frac{1}{\sqrt{C_l L_l}}$$

Αυτό επιβεβαιώνει τη μη ύπαρξη παραμόρφωσης κατά τη διάδοση.

Η γενική λύση για κυματομορφές τάσης και ρεύματος που κινούνται κατά τη θετική (+) και την αρνητική φορά (-) είναι

$$\begin{aligned} v(z,t) &= v_+(z-ct) + v_-(z+ct) \\ i(z,t) &= i_+(z-ct) + i_-(z+ct) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ τάσης και ρεύματος χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.8) και τη σχέση (1.2) με  $G_l = 0$  και αφού ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο καταλήγουμε στη σχέση

$$\sqrt{\frac{L_l}{C_l}} i(z,t) = v_+(z-ct) - v_-(z+ct) + f(z) \quad (1.9)$$

Αντικαθιστούμε ξανά στη σχέση (1.2), με  $G_l = 0$ , και βρίσκουμε ότι  $\frac{df(z)}{dz} = 0$  άρα  $f(z) = \text{σταθερά}$ . Αυτό αντιστοιχεί στην τετριμμένη περίπτωση σταθερής τάσης που δεν μας ενδιαφέρει οπότε θεωρούμε ότι  $f(z) = 0$ .

Η παράσταση  $\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$  ορίζει αυτό που λέμε χαρακτηριστική αντίσταση,  $R_0$ , της γραμμής.

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \quad (1.10)$$

Γενικότερα, θα δούμε ότι ορίζεται η λεγόμενη χαρακτηριστική εμπέδηση της γραμμής,  $Z_0$ , η οποία για την περίπτωση που εξετάζουμε χωρίς απώλειες (ιδανική γραμμή) είναι ωμική αντίσταση η  $R_0$ .

Ισχύουν

$$\begin{aligned} i(z,t) &= i_+(z-ct) + i_-(z+ct) \\ i_+(z-ct) &= \frac{v_+(z-ct)}{R_0}, \quad i_-(z+ct) = -\frac{v_-(z+ct)}{R_0} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Αν πηγή (ή/και σε σειρά με την πηγή) έχει εσωτερικό (υπάρχει) παθητικό στοιχείο κυκλώματος (εμπέδηση) και στο τέρμα της γραμμής υπάρχει άλλο στοιχείο κυκλώματος τότε έχουμε τις συνοριακές συνθήκες (1.12) για  $z = 0$  και (1.13) για  $z = l$  (για την αρχή και το τέλος της γραμμής),

$$\begin{aligned} v_s(t) &= v_+(0-ct) + v_-(0+ct) \\ i_s(t) &= \frac{v_+(0-ct)}{R_0} - \frac{v_-(0+ct)}{R_0} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} v_l(t) &= v_+(l-ct) + v_-(l+ct) \\ i_l(t) &= i_+(l-ct) - i_-(l+ct) = \frac{v_+(l-ct)}{R_0} + \frac{v_-(l+ct)}{R_0} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Για ομοαξονικό καλώδιο κυλινδρικής κυκλικής διατομής έχουμε τις σχέσεις (σύστημα SI),

$$L_l = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad C_l = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (1.14)$$

Όπου  $\mu_r$  η σχετική διαπερατότητα του διηλεκτρικού του καλωδίου και  $\varepsilon_r$  η σχετική επιτρεπτότητα (διηλεκτρική σταθερά) του διηλεκτρικού,  $b$  είναι η ακτίνα του εξωτερικού αγωγού και  $a$  η ακτίνα του εσωτερικού. Έχουμε επομένως,

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad (1.15)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$c_0$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Επειδή για τα συνήθη διηλεκτρικά ισχύει  $\mu_r \approx 1$  έχουμε,  $c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_r}$ . Για διηλεκτρικό πολυαιθυλένιο  $\varepsilon_r \approx 2,3$  οπότε

$$c = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2,3}} \text{ m/s} = 2,0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Αποδεικνύεται γενικότερα ότι για κυλινδρικό ομοαξονικό καλώδιο, ανεξάρτητα από το σχήμα της διατομής των αγωγών του, η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται μόνο από το υλικό, δηλαδή από τα  $\mu_r$ ,  $\varepsilon_r$ .

Πρέπει να τονίσουμε τα εξής, η σχέση για το  $L_l$  (από τις Σχέσεις (1.7)), δεν περιλαμβάνει τον όρο της εσωτερικής αυτεπαγωγής αλλά μόνον αυτόν της εξωτερικής αυτεπαγωγής. Γενικώς ισχύει  $L_l = L_{lex} + L_{lin}$  όπου ο πρώτος όρος είναι για την εξωτερική αυτεπαγωγή και οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο που είναι έξω από τους αγωγούς ενώ ο δεύτερος είναι για την εσωτερική και οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό των αγωγών. Ο πρώτος όρος είναι ανεξάρτητος της συχνότητας ενώ ο δεύτερος εξαρτάται από τη συχνότητα ένεκα του επιδερμικού φαινομένου. Όταν η συχνότητα γίνει πάρα πολύ μεγάλη τότε το επιδερμικό βάθος γίνεται ασήμαντο και το μαγνητικό πεδίο παντού στο εσωτερικό είναι πρακτικώς μηδέν. Τότε ισχύει ότι  $L_l \approx L_{lex}$  με καλή προσέγγιση.

Πρέπει να τονίσουμε ότι μπορεί κάποιος να κάνει αριθμητική λύση των (διαφορικών) εξισώσεων των γραμμών μεταφοράς για κάθε περίπτωση και να βρει τις διάφορες κυματομορφές σε μορφή καταλόγων ζευγών αριθμητικών τιμών. Είναι προφανές ότι σε πολύπλοκες περιπτώσεις που δεν μπορεί κάποιος να βρει κάποια μορφή αναλυτικής λύσης η αριθμητική μέθοδος είναι και η μοναδική. Τα διάφορα πακέτα όπως το SPICE ακολουθούν πάντα αυτή τη μέθοδο και μπορούν να λύσουν και τα πολύπλοκα προβλήματα. Σε αυτό το βοήθημα ακολουθούμε τη μέθοδο της αναλυτικής λύσης η οποία δε μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση αλλά έχει το πλεονέκτημα να οδηγεί σε μαθηματικές εκφράσεις όπου φαίνεται η εξάρτηση του αποτελέσματος από τις διάφορες παραμέτρους του προβλήματος. Αυτό μπορεί κάπως να αντιμετωπιστεί με τις αριθμητικές μεθόδους κάνοντας γραφικές παραστάσεις για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

## 2. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΣΤΙΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις διαφορικές εξισώσεις, σχέσεις (1.1) και (1.2) των γραμμών μεταφοράς ως προς το χρόνο και καταλήγουμε στις διαφορικές εξισώσεις,

$$\begin{aligned} -L_l i_0(z) + (R_l + sL_l)I(z, s) &= -\frac{dV(z, s)}{dz} \\ -C_l v_0(z) + (G_l + sC_l)V(z, s) &= -\frac{dI(z, s)}{dz} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$i_0(z) = i(z, 0), \quad v_0(z) = v(z, 0)$$

Εύκολα με απαλειφή βρίσκουμε,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I(z, s)}{dz^2} - \gamma^2 I(z, s) &= C_l \frac{dv_0(z)}{dz} - L_l (sC_l + G_l) i_0(z) \\ \frac{d^2 V(z, s)}{dz^2} - \gamma^2 V(z, s) &= L_l \frac{di_0(z)}{dz} - C_l (sL_l + R_l) v_0(z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\gamma^2 = (sL_l + R_l)(sC_l + G_l)$$

Το  $\gamma$  είναι ο (μυγαδικός) συντελεστής διάδοσης.

Για γραμμή χωρίς απώλειες έχουμε

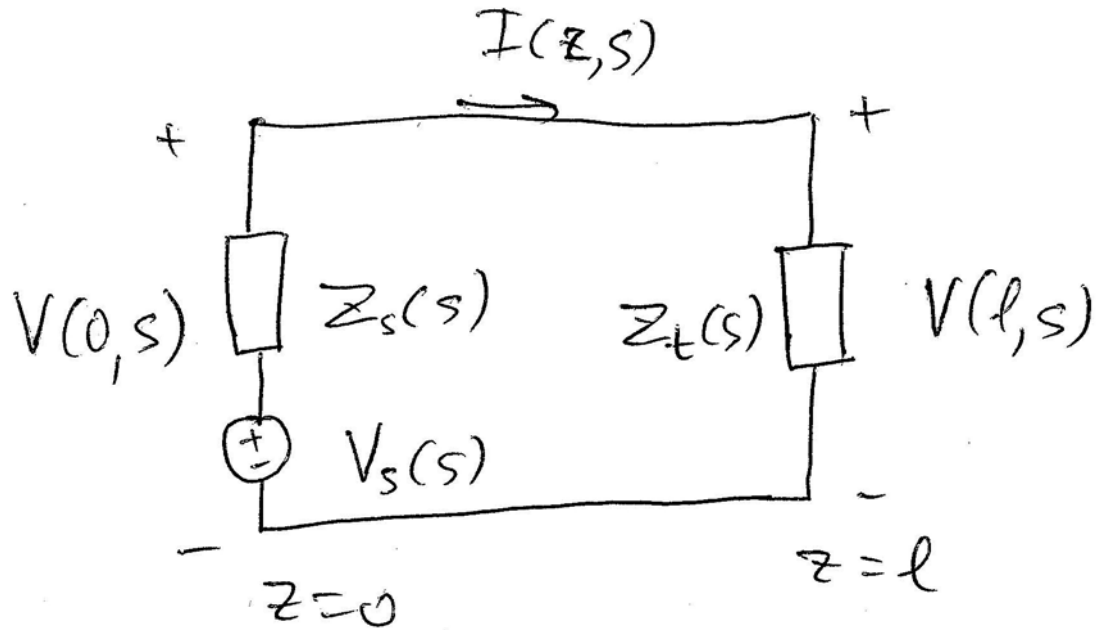
$$\gamma = s\sqrt{L_l C_l} = s/c \quad (2.3)$$

Για τηλεφωνικό καλώδιο ισχύουν  $L_l = 0$ ,  $G_l = 0$  οπότε  $\gamma = \sqrt{sR_l C_l}$ .

Ας θεωρήσουμε γραμμή μήκους  $l$  που τροφοδοτείται (στην είσοδό της δηλαδή στην αρχή της) από πηγή τάσης  $v_s(t)$ . Η μετασχηματισμένη τάση είναι  $V(s)$  και η (εσωτερική) εμπέδηση της πηγής είναι  $Z_s(s)$ . Στο άλλο άκρο της γραμμής (στο τέρμα) υπάρχει τερματική εμπέδηση  $Z_l(s)$ . Θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι  $i(z, 0) = i_0(z) = 0$ ,  $v(z, 0) = v_0(z) = 0$ .

Έχουμε για την αρχή και το τέλος της γραμμής τις συνοριακές συνθήκες,

$$\begin{aligned} V_0(s) &= V_s(s) - Z_s(s)I(0, s) \\ V(l, s) &= Z_l(s)I(l, s) \end{aligned} \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.1

Ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις,

$$\frac{d^2 I(z, s)}{dz^2} - \gamma^2 I(z, s) = 0$$

$$\frac{d^2 V(z, s)}{dz^2} - \gamma^2 V(z, s) = 0 \quad (2.5)$$

$$\gamma^2 = (sL_l + R_l)(sC_l + G_l)$$

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών είναι

$$I(z, s) = I_+(s)e^{-\gamma z} + I_-(s)e^{+\gamma z} \quad (2.6)$$

$$V(z, s) = V_+(s)e^{-\gamma z} + V_-(s)e^{+\gamma z}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι οι πρώτοι όροι παριστάνουν οδεύοντα κύματα προς τη θετική φορά του άξονα  $x$  ενώ οι δεύτεροι όροι οδεύοντα κύματα προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Από τις σχέσεις (2.1) για αρχικές συνθήκες μηδέν βρίσκομε,

$$I(z, s) = -\frac{1}{sL_l + R_l} \frac{dV(z, s)}{dz} \quad (2.7)$$

$$V(z, s) = -\frac{1}{sC_l + G_l} \frac{dI(z, s)}{dz}$$

Εύκολα από τις σχέσεις (2.7) βρίσκουμε,

$$\frac{d^2V(z, s)}{dz^2} = \frac{sL_l + R_l}{sC_l + G_l} \frac{d^2I(z, s)}{dz^2} \quad (2.8)$$

Με τη χρήση των σχέσεων (2.6) και της πρώτης από τις σχέσεις 2.7 καταλήγουμε στη σχέση,

$$\left[ \frac{\gamma V_+(s)}{sL_l + R_l} - I_+(s) \right] e^{-\gamma z} = \left[ I_-(s) + \frac{\gamma V_-(s)}{sL_l + R_l} \right] e^{+\gamma z} \quad (2.9)$$

η σχέση (2.9) ισχύει για κάθε  $z$  επομένως η κάθε αγκύλη πρέπει να είναι ίση με μηδέν.

Με χρήση και της τελευταίας από τις σχέσεις (2.2) καταλήγουμε στις σχέσεις,

$$\frac{V_+(s)}{I_+(s)} = -\frac{V_-(s)}{I_-(s)} = Z_0(s) = \sqrt{\frac{sL_l + R_l}{sC_l + G_l}}, \quad (2.10)$$

$$I_+(s) = \frac{V_+(s)}{Z_0(s)}, \quad I_-(s) = -\frac{V_-(s)}{Z_0(s)}$$

$Z_0(s)$  είναι η χαρακτηριστική εμπέδηση της γραμμής.

Για μια συχνότητα (μόνιμο φαινόμενο) έχουμε,

$$\frac{\mathbf{v}_+}{\mathbf{i}_+} = Z_0(s) = \sqrt{\frac{j\omega L_l + R_l}{j\omega C_l + G_l}}, \quad (2.11)$$

$$-\frac{\mathbf{v}_-}{\mathbf{i}_-} = Z_0(j\omega)$$

Ο «διανυσματικός» συμβολισμός σημαίνει μεγέθη φάσορες.

Με χρήση των συνοριακών συνθηκών, σχέσεις (2.4), και των σχέσεων (2.6) βρίσκουμε,

$$V_+(s)\exp(-\gamma l) + V_-(s)\exp(\gamma l) = Z_l(s)[I_+(s)\exp(-\gamma l) + I_-(s)\exp(\gamma l)] \quad (2.12)$$

$$V_s(s) = Z_s(s)[I_+(s) + I_-(s)] + [V_+(s) + V_-(s)]$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (2.12) τα  $I_+(s)$ ,  $I_-(s)$  με χρήση των σχέσεων (2.10)

οπότε βρίσκουμε (εδώ δεν σημειώνουμε την εξάρτηση από το  $s$ ),

$$V_+ = \frac{Z_0 V_s}{(Z_0 + Z_s)(1 - A_s A_t e^{-2\gamma l})}, \quad A_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad (2.13)$$

$$V_- = A_t \exp(-2\gamma l) V_+, \quad A_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$$

Τα μεγέθη  $A(s)$  είναι οι συντελεστές ανάκλασης τάσης. Για την περίπτωση σταθερών πραγματικών συντελεστών ανάκλασης χρησιμοποιούμε τα σύμβολα  $\rho_t = A_t$ ,  $\rho_s = A_s$ .

Για την περίπτωση μιας συχνότητας (συνήθως κατά την περιγραφή του μόνιμου φαινομένου) χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\Gamma(\omega) = \Gamma = A(j\omega)$ .

Οι παραπάνω σχέσεις περιγράφουν την πιο γενική περίπτωση όπου η διέγερση της γραμμής γίνεται από πηγή με τάση  $V_s(s)$  και εμπέδηση  $Z_s(s)$ , συνδεδεμένη στην αρχή της γραμμής,  $z = 0$  και μπορούν να περιγράψουν και τις διαδοχικές ανακλάσεις και στα δυο άκρα της γραμμής η οποία τερματίζεται σε εμπέδηση  $Z_t(s)$ .

Είναι προφανές από τις σχέσεις (2.13) ότι αν έχουμε κύμα που οδεύει προς το τέρμα ισχύει,

$$V_1(x, s) = V_+(s) e^{-\gamma z} \quad (2.14)$$

Όταν αυτή η κυματομορφή φτάσει στο τέρμα, στο  $Z_t$ , ανακλάται και δημιουργείται κύμα οδεύον προς την αρχή που περιγράφεται από τη σχέση,

$$V_2(z, s) = V_-(s) e^{+\gamma z} \quad (2.15)$$

με χρήση των (2.13), (2.14) και (2.15) βρίσκουμε,

$$A_t(s) = V_2(l, s) / V_1(l, s) \quad (2.16)$$

Γι' αυτό το λόγο το μέγεθος  $A_t(s)$  λέγεται συντελεστής ανάκλασης τάσης στο τέρμα της γραμμής. Ανάλογα δείχνεται ότι, αν έχουμε κύμα οδεύον προς την αρχή (προς την πηγή), δηλαδή είναι της μορφής,

$$V_1(z, s) = V_-(s) e^{-\gamma z} \quad (2.17)$$

θα προκύψει ανακλώμενο κύμα που οδεύει προς το τέρμα και έχει τη μορφή

$$V_2(z, s) = V_+(s) e^{-\gamma z} \quad (2.18)$$

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει,

$$A_s(s) = V_2(0, s) / V_1(0, s) \quad (2.19)$$

Εύκολα καταλήγουμε και σε ανάλογες σχέσεις για τα ρεύματα,

$$A_t(s) = -I_2(l, s) / I_1(l, s) \quad (2.20)$$

$$A_s(s) = -I_2(0, s) / I_1(0, s) \quad (2.21)$$

Το μέγεθος  $A_s(s)$  λέγεται συντελεστής ανάκλασης τάσης στην αρχή (στην πηγή) της γραμμής. Οι σχέσεις (2.14) μέχρι (2.21) έχουν αμεσότερη πρακτική αξία όταν δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ οδοντών κυμάτων προς τις δυο κατευθύνσεις της γραμμής. Από τις σχέσεις (2.13) για τους συντελεστές ανάκλασης και τις σχέσεις (2.16), (2.19) προκύπτει ότι δεν υπάρχουν ανακλώμενα κύματα στα αντίστοιχα άκρα, αν  $Z_0 = Z_t$  οπότε  $A_t(s) = 0$  (στο τέρμα της γραμμής) και όταν  $Z_0 = Z_s$  οπότε  $A_s(s) = 0$  (στην αρχή της γραμμής). Όταν  $Z_0 = Z_t$ , προφανώς οι σχέσεις (2.13) οδηγούν σε κατάσταση όπου υπάρχει οδεύον κύμα μόνο προς το φόρτο, προς το τέρμα της γραμμής, χωρίς ανακλώμενο. Όταν  $Z_0 = Z_s$  τότε ακόμη και αν υπάρχει στο τέρμα ανάκλαση δεν υπάρχει ανάκλαση στην αρχή, στην είσοδο, της γραμμής. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι η γραμμή είναι προσαρμοσμένη στο τέρμα της ή στην αρχή της. Εύκολα βρίσκουμε από τις σχέσεις (2.10) και (2.13) ότι ισχύουν γενικώς,

$$\begin{aligned} I_-(s) &= -A_t(s)\exp(-2\gamma l)I_+(s) \\ I_+(s) &= \frac{V_s(s)}{[Z_0(s) + Z_s(s)][1 - A_s(s)A_t(s)\exp(-2\gamma l)]} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Αν ισχύουν

$$\begin{aligned} I_1(z, s) &= I_+(s)\exp(-sz) \\ I_2(z, s) &= I_-(s)\exp(+sz) \end{aligned} \quad (2.23)$$

τότε

$$\begin{aligned} A_t(s) &= -\frac{I_2(l, s)}{I_1(l, s)} \\ A_s(s) &= \frac{I_1(0, s)}{I_2(0, s)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Προφανώς με χρήση και των γενικών σχέσεων (2.6) βρίσκουμε ότι για κάθε θέση  $z$  στη γραμμή ισχύουν

$$\begin{aligned} V(z, s) &= \frac{Z_0(s)}{Z_0(s) + Z_s(s)} \frac{e^{-\gamma z} + A_t(s)e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - A_s(s)A_t(s)e^{-2\gamma l}} V_s(s) \\ I(z, s) &= \frac{1}{Z_0(s) + Z_s(s)} \frac{e^{-\gamma z} - A_t(s)e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - A_s(s)A_t(s)e^{-2\gamma l}} V_s(s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στις ισοδύναμες σχέσεις (έχομε παραλείψει τη γραφή της εξάρτησης από το  $s$  όπου είναι προφανής),



$$\begin{aligned}
V(z,s) &= \frac{(1+A_t)\cosh[\gamma(l-z)]+(1-A_t)\sinh[\gamma(l-z)]}{(1-A_sA_t)\cosh(\gamma l)+(1+A_sA_t)\sinh(\gamma l)} \frac{Z_0}{Z_0+Z_s} V_s(s) \\
I(z,s) &= \frac{(1-A_t)\cosh[\gamma(l-z)]+(1+A_t)\sinh[\gamma(l-z)]}{(1-A_sA_t)\cosh(\gamma l)+(1+A_sA_t)\sinh(\gamma l)} \frac{1}{Z_0+Z_s} V_s(s)
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Προφανώς η εμπέδηση  $Z(z,s)$  στη θέση  $z$  δίνεται από τη σχέση,

$$Z(z,s) = \frac{V(z,s)}{I(z,s)} = \frac{(1+A_t)\cosh[\gamma(l-z)]+(1-A_t)\sinh[\gamma(l-z)]}{(1-A_t)\cosh[\gamma(l-z)]+(1+A_t)\sinh[\gamma(l-z)]} Z_0 \quad (2.27)$$

Αν το τέρμα της γραμμής είναι βραχυκυκλωμένο, τότε  $Z_t(s) = 0$ , οπότε  $A_t(s) = -1$   
Και επομένως

$$Z(z,s) = Z_0 \tanh[\gamma(l-z)] \quad (2.28)$$

Η εμπέδηση στην είσοδο της γραμμής είναι,

$$Z_i(s) = Z(0,s) = Z_0 \tanh(\gamma l) \quad (2.29)$$

Αυτό σημαίνει ότι γραμμή βραχυκυκλωμένη στο τέρμα της παρουσιάζει στην είσοδο της εμπέδηση η οποία εξαρτάται από το μήκος της, τη χαρακτηριστική της εμπέδηση και τη σταθερά διάδοσης. Η εμπέδηση δεν εξαρτάται από την εμπέδηση της πηγής διέγερσης.

Η γενική περίπτωση διάδοσης, που περιλαμβάνει και τα μεταβατικά φαινόμενα που γενικώς υπάρχουν όταν πρωτοεφαρμοστεί η τάση στο ένα άκρο της γραμμής (αρχή της γραμμής), μπορεί να γίνει με χρήση των γενικών σχέσεων (2.25) ή βήμα- βήμα όπου λαμβάνονται υπόψη οι διαδοχικές ανακλάσεις στα άκρα της γραμμής. Θα ακολουθήσουμε στην αρχή τη μέθοδο που αξιοποιεί τις γενικές σχέσεις (2.25).

Έστω  $w = A_s(s)A_t(s)e^{-2\gamma l}$

επομένως, τυπικά έχουμε,

$$\frac{1}{1-A_s(s)A_t(s)e^{-2\gamma l}} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} [A_s(s)A_t(s)]^n e^{-2n\gamma l} \quad (2.30)$$

Επομένως από τις σχέσεις (2.26) καταλήγουμε στις,

$$\begin{aligned}
V(z,s) &= V_s(s) \frac{Z_0(s)}{Z_0(s)+Z_s(s)} \sum_{m=0}^{\infty} [A_s(s)A_t(s)]^m \left( e^{-\gamma(2ml+z)} + A_t(s)e^{-\gamma[2(m+1)l-z]} \right) \\
I(z,s) &= V_s(s) \frac{1}{Z_0(s)+Z_s(s)} \sum_{m=0}^{\infty} [A_s(s)A_t(s)]^m \left( e^{-\gamma(2ml+z)} - A_t(s)e^{-\gamma[2(m+1)l-z]} \right)
\end{aligned} \quad (2.31)$$

Ας αναφερθούμε στην απλοποιημένη περίπτωση για την οποία ισχύει (βλέπε Κεφ.10),

$$\gamma = \alpha + s/c \quad (2.32)$$

όπου τα  $\alpha$ ,  $c$  είναι πραγματικά και σταθερά.  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο διηλεκτρικό υλικό της γραμμής μεταφοράς και  $\alpha$  είναι ο συντελεστής απόσβεσης. Θέτομε,

$$A_1'(m, s) = V_s(s) \frac{1}{Z_s(s) + Z_0(s)} [A_s(s) A_1(s)]^m$$

$$A_2'(m, s) = A_1'(m, s) A_1(s), \quad A_1(m, s) = Z_0(s) A_1'(m, s) \quad (2.33)$$

$$A_2(m, s) = Z_0(s) A_2'(m, s) = A_1(m, s) A_1(s)$$

Άρα καταλήγομε στις

$$V(z, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( A_1(m, s) e^{-\alpha(2ml+z)} e^{-s(2ml+z)/c} + A_2(m, s) e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} e^{-s[2(m+1)l-z]/c} \right)$$

$$I(z, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( A_1'(m, s) e^{-\alpha(2ml+z)} e^{-s(2ml+z)/c} - A_2'(m, s) e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} e^{-s[2(m+1)l-z]/c} \right) \quad (2.34)$$

Έστω ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός των

$A_1(m, s)$ ,  $A_2(m, s)$ ,  $A_1'(m, s)$ ,  $A_2'(m, s)$  οδηγεί στις αντίστοιχες εκφράσεις,

$a_1(m, t)$ ,  $a_2(m, t)$ ,  $a_1'(m, t)$ ,  $a_2'(m, t)$ .

Αντιστρέφοντας όλους τους όρους των σειρών των σχέσεων (2.34) καταλήγομε στις,

$$v(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-\alpha(2ml+z)} a_1(m, t - \frac{2ml+z}{c}) \theta(t - \frac{2ml+z}{c}) + \right.$$

$$\left. e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} a_2(m, t - \frac{2(m+1)l-z}{c}) \theta(t - \frac{2(m+1)l-z}{c}) \right] \quad (2.35)$$

$$i(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ e^{-\alpha(2ml+z)} a_1'(m, t - \frac{2ml+z}{c}) \theta(t - \frac{2ml+z}{c}) - \right.$$

$$\left. e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} a_2'(m, t - \frac{2(m+1)l-z}{c}) \theta(t - \frac{2(m+1)l-z}{c}) \right]$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για κάθε  $t \geq 0$  και  $0 \leq z \leq l$ .

Πρέπει να τονίσουμε ξανά ότι βρίσκομε τις ίδιες σχέσεις θεωρώντας τις διαδοχικές ανακλάσεις στα άκρα της γραμμής. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα ανεξάρτητα του αν οι προκύπτουσες σειρές συγκλίνουν ή όχι. Οι σειρές δεν συγκλίνουν όταν συγχρόνως  $\alpha = 0$ ,  $A_s(s) = 0$ ,  $A_1(s) = \infty$  (ή  $A_1(s) = \infty$ ). Όταν δεν συγκλίνουν γίνονται ανακλάσεις συνέχεια χωρίς τέλος. Αν δεν σας αρέσει η διαδικασία του αναπτύγματος σε σειρά σε αυτή την περίπτωση που δεν υπάρχει σύγκλιση, μπορείτε να τη θεωρήσετε ως ευρηστική μέθοδο για να καταλήξετε στο σωστό αποτέλεσμα που δίνει και η μέθοδος των διαδοχικών ανακλάσεων. Όταν οι σειρές συγκλίνουν τότε οδηγούμαστε σε μόνιμο φαινόμενο στο οποίο δεν έχουμε διαδοχικές ανακλάσεις. Αυτό οφείλεται στην απόσβεση με το χρόνο των μεταβατικών φαινομένων. Ενδιαφέροντα είναι τα μόνιμα φαινόμενα στην περίπτωση αρμονικής με το χρόνο διέγερσης της γραμμής μεταφοράς.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ωμικές αντιστάσεις,  $Z_0(s) = R_0$ ,  $Z_s(s) = R_s$ ,  $Z_t(s) = R_t$  και η πηγή δίνει βηματική τάση,  $v(t) = V_a \theta(t)$ . Οι συντελεστές ανάκλασης τάσης είναι πραγματικοί και ισχύουν,

$$\rho_s = \frac{R_s - R_0}{R_s + R_0}, \quad \rho_t = \frac{R_t - R_0}{R_t + R_0} \quad (2.36)$$

Προφανώς η βηματική συνάρτηση  $\theta$  σε κάποια δύναμη που είναι θετικός ακέραιος οδηγεί στην ίδια συνάρτηση  $\theta$ .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση βρίσκουμε τις σχέσεις

$$v(z, t) = V_a \frac{R_0}{R_s + R_0} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m (\theta[t - (2ml + z)/c] + \rho_t \theta\{t - [2(m+1)l - z]/c\})$$

$$i(z, t) = V_a \frac{1}{R_s + R_0} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m (\theta[t - (2ml + z)/c] - \rho_t \theta\{t - [2(m+1)l - z]/c\}) \quad (2.37)$$

Είναι ευνόητο ότι μόνο η συνάρτηση- $\theta$  του μεγαλύτερου μη μηδενικού όρου χρειάζεται να δηλώνεται. Ο όρος αυτός είναι γενικώς διαφορετικός για διαφορετικούς χρόνους. Οι προηγούμενοι όροι έχουν στη θέση της συνάρτησης- $\theta$  τη μονάδα.

Είναι ευνόητο ότι εφόσον  $|\rho_t| < 1$ ,  $|\rho_s| < 1$  οι όροι με μεγάλα  $m$  τείνουν στο μηδέν οπότε για  $t \rightarrow +\infty$  έχουμε

$$v(z, t) = V_a \frac{R_0}{R_s + R_0} (1 + \rho_t) \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m$$

$$i(z, t) = V_a \frac{1}{R_s + R_0} (1 - \rho_t) \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m \quad (2.38)$$

Από αυτές βρίσκουμε

$$v(z, t) = V_a \frac{R_0}{R_s + R_0} (1 + \rho_t) \frac{1}{1 - \rho_s \rho_t}$$

$$i(z, t) = V_a \frac{1}{R_s + R_0} (1 - \rho_t) \frac{1}{1 - \rho_s \rho_t} \quad (2.39)$$

Τελικώς

$$v(z, t) = V_a \frac{R_t}{R_s + R_t}$$

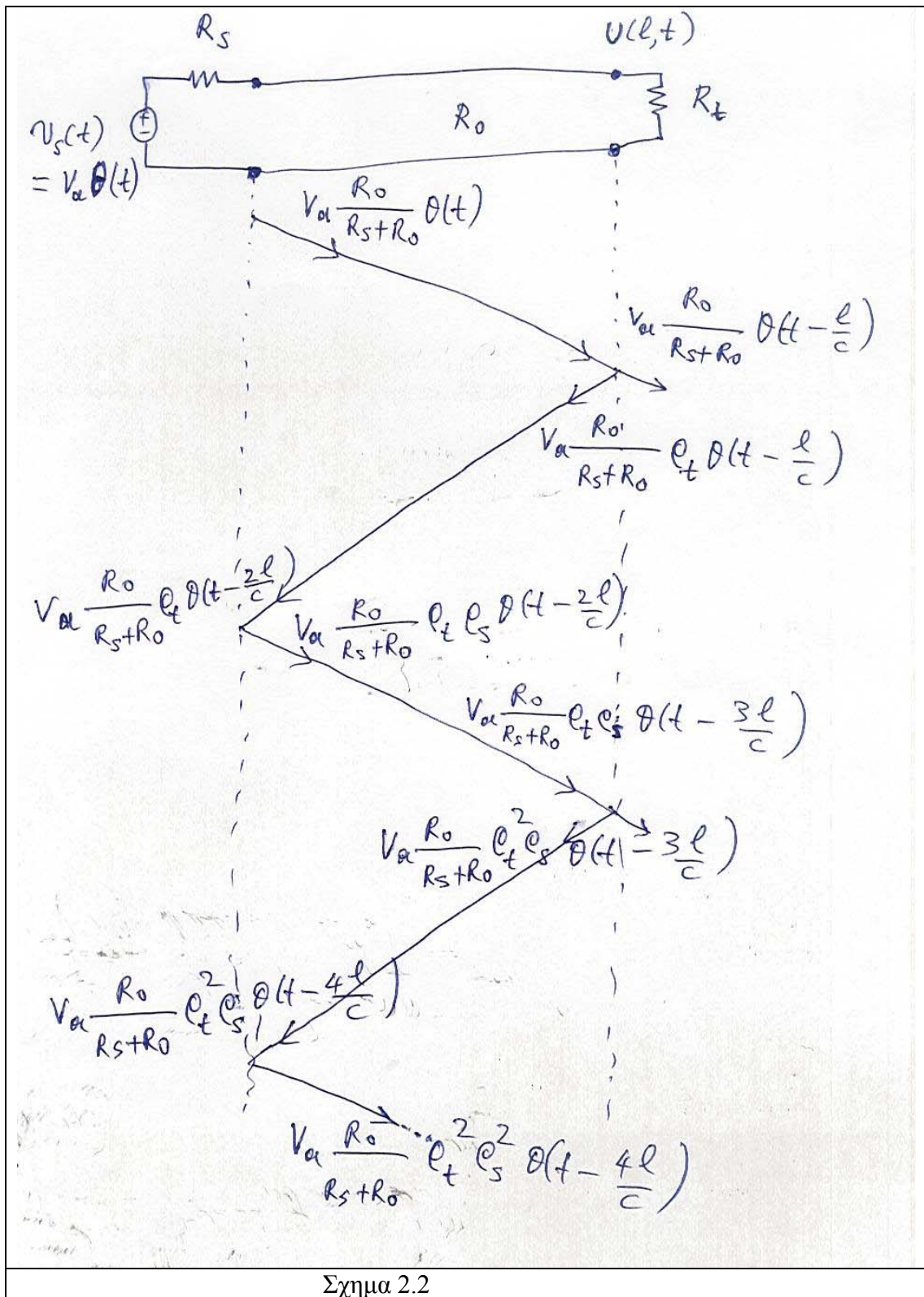
$$i(z, t) = V_a \frac{1}{R_s + R_t} \quad (2.40)$$

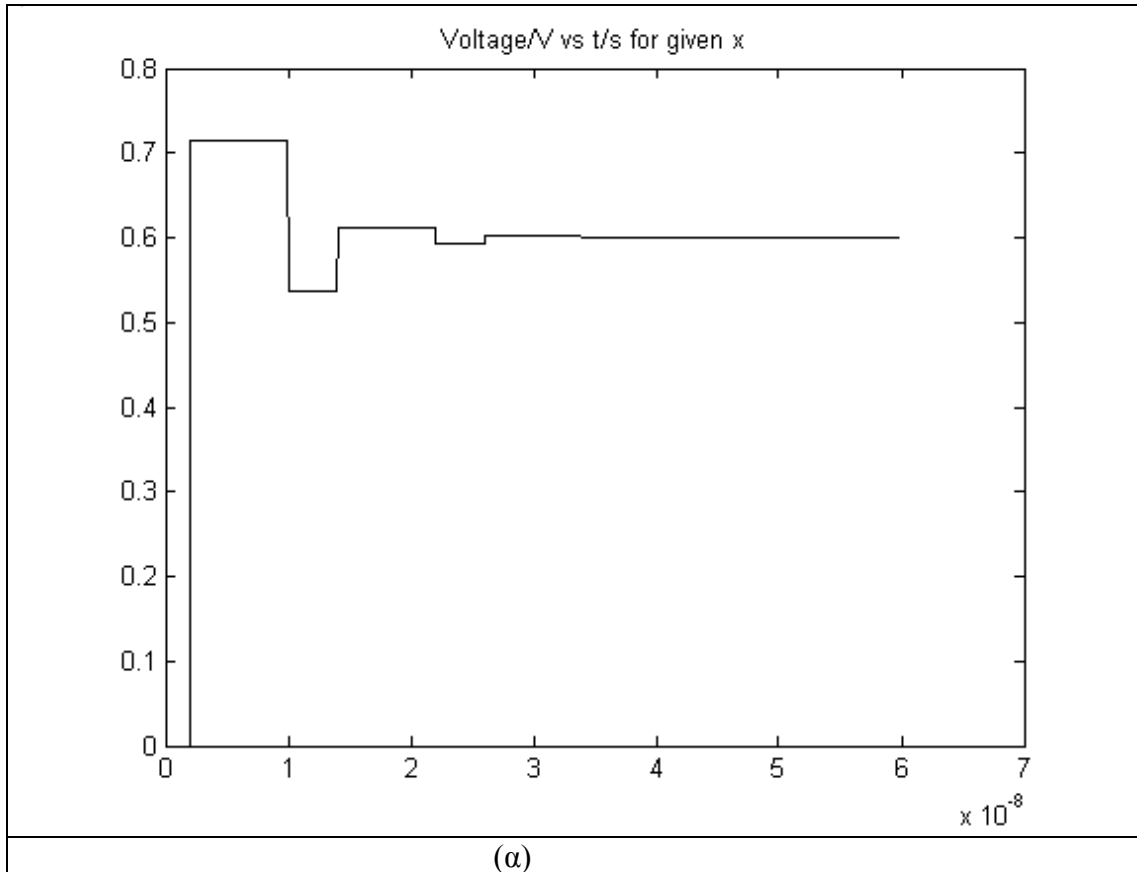
Αυτά είναι και τα αναμενόμενα αποτελέσματα για διέγερση με τάση dc (χωρίς ανακλάσεις).

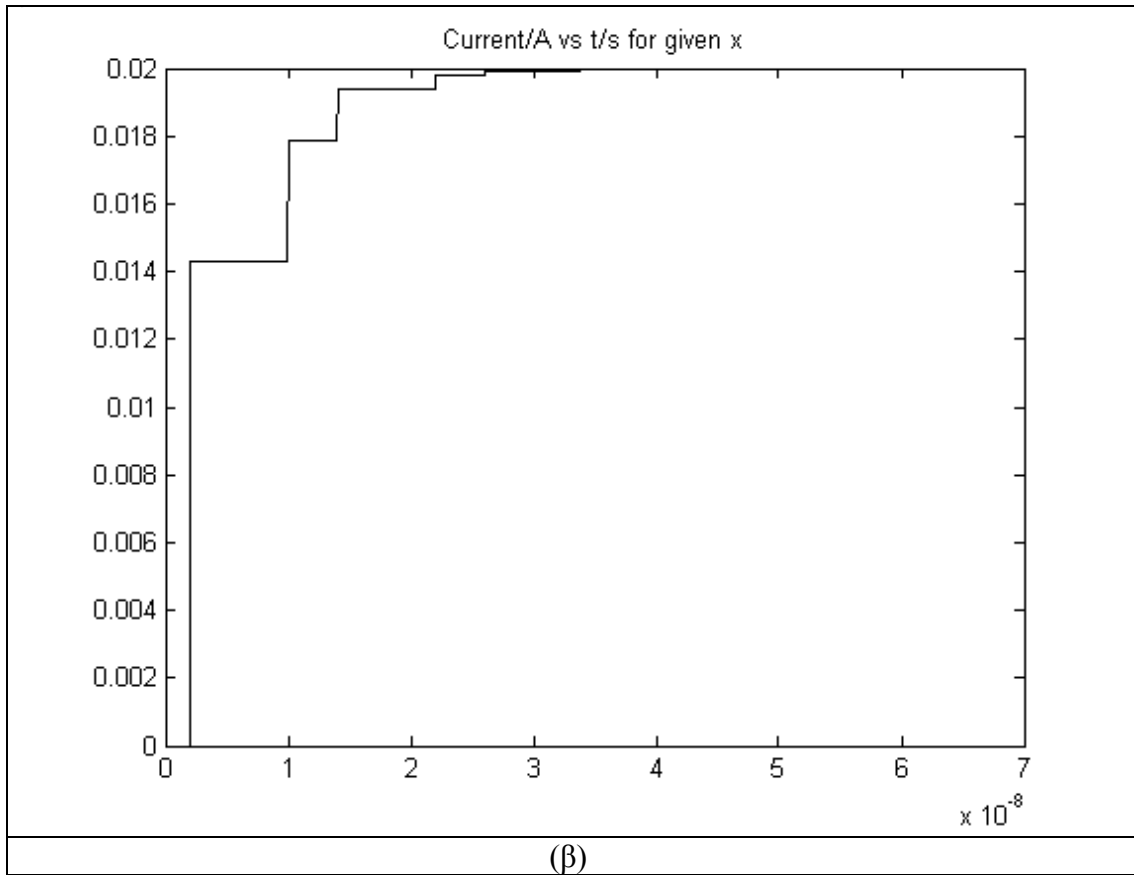
Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται η λεγόμενη μέθοδος δένδρου, για την προηγούμενη περίπτωση, Σχέσεις 2.37, όπου γίνεται χρήση των διαδοχικών ανακλάσεων. Το Σχήμα 2.3 δείχνει τις γραφικές παραστάσεις της τάσης και του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου, για βηματική τάση με τα παρακάτω δεδομένα.

$$V_a = 1 \text{ V}, R_s = 20 \text{ } \Omega, R_0 = 50 \text{ } \Omega, R_t = 30 \text{ } \Omega, C = 2 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$l = 1,2 \text{ m}, z = 0,4 \text{ m}, \alpha = 0,3$$







Σχήμα 2.3

Αν θέσομε  $A_s(s) = 0$  ( $Z_s(s) = Z_0(s)$ ), τότε καταλήγουμε από τις γενικές σχέσεις (2.33), (2.34) και (2.35) στις σχέσεις για μια ανάκλαση στο τέρμα της γραμμής. Το αποτέλεσμα είναι,

$$v(z,t) = \frac{1}{2} v_s(t - \frac{z}{c}) e^{-\alpha z} \theta(t - \frac{z}{c}) + e^{-\alpha(2l-z)} a_2(0, t - \frac{2l-z}{c}) \theta(t - \frac{2l-z}{c}) \quad (2.41)$$

$$i(z,t) = e^{-\alpha z} a_1'(0, t - \frac{z}{c}) \theta(t - \frac{z}{c}) - e^{-\alpha(2l-z)} a_2'(0, t - \frac{2l-z}{c}) \theta(t - \frac{2l-z}{c})$$

Ανάλογα πράγματα μπορεί να βρεθούν για μια ανάκλαση στην αρχή της γραμμής. Στις περιπτώσεις που η χαρακτηριστική εμπέδηση είναι ωμική,  $Z_0(s) = R_0$ , οι σχέσεις (2.41) γίνονται

$$v(z,t) = \frac{1}{2} v_s(t - \frac{z}{c}) e^{-\alpha z} \theta(t - \frac{z}{c}) + e^{-\alpha(2l-z)} a_2(0, t - \frac{2l-z}{c}) \theta(t - \frac{2l-z}{c}) \quad (2.42)$$

$$i(z,t) = \frac{1}{2R_0} v_s(t - \frac{z}{c}) e^{-\alpha z} \theta(t - \frac{z}{c}) - e^{-\alpha(2l-z)} a_2'(0, t - \frac{2l-z}{c}) \theta(t - \frac{2l-z}{c})$$

Είναι ευνόητο ότι  $v(0,t) = v_s(t)/2$ .

Στην περίπτωση που η τερματική εμπέδηση είναι επίσης ωμική έχουμε αντί των (2.42) τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 v(z,t) &= \frac{1}{2} v_s(t - \frac{z}{c}) e^{-\alpha z} \theta(t - \frac{z}{c}) + \frac{1}{2} \rho_l v(t - \frac{2l-z}{c}) e^{-\alpha(2l-z)} \theta(t - \frac{2l-z}{c}) \\
 i(z,t) &= \frac{1}{2R_0} v_s(t - \frac{z}{c}) e^{-\alpha z} \theta(t - \frac{z}{c}) - \frac{1}{2R_0} \rho_l v(t - \frac{2l-z}{c}) e^{-\alpha(2l-z)} \theta(t - \frac{2l-z}{c})
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Προφανώς μπορεί κάποιος να αντικαταστήσει το  $v_s(t)/2$  με το  $v(0,t)$ , δηλαδή την τάση στην αρχή της γραμμής,  $z = 0$ .

### 3. ΒΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΑΛΜΟΣ ΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΑΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Για γραμμή απείρου μήκους όπως και σε κάθε περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε με κατάλληλη προσαρμογή τα τελικά αποτελέσματα που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 2 αλλά προτιμούμε στις επιμέρους εφαρμογές, όπως εδώ, να ξεκινούμε από τις πιο βασικές σχέσεις.

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει έχουμε ότι  $V_-(s) = 0$ , διαφορετικά ο παλμός θα γίνονταν απείρως μεγάλος στο άπειρο, άρα

$$\begin{aligned}
 l &= +\infty \\
 V(z,s) &= \frac{Z_0(s)V_s(s)}{Z_0(s) + Z_s(s)} e^{-\gamma z} \tag{3.1} \\
 I(z,s) &= \frac{V_s(s)}{Z_0(s) + Z_s(s)} e^{-\gamma z}
 \end{aligned}$$

Για γραμμή χωρίς απώλειες ισχύουν

$$\gamma = s/c \quad (c = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}})$$

$$V(z,s) = \frac{Z_0(s)V_s(s)}{Z_0(s) + Z_s(s)} e^{-sz/c}$$

$$I(z,s) = \frac{V_s(s)}{Z_0(s) + Z_s(s)} e^{-sz/c}$$

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$$
(3.2)

Δηλαδή η χαρακτηριστική είναι ωμική, επομένως πραγματική. Αφού η τάση της πηγής είναι βηματική συνάρτηση του χρόνου,  $v_s(t) = V_i \theta(t)$  και  $Z_s(s) = R_s$  (ωμική άρα πραγματική), θα έχουμε,

$$V_s(s) = \frac{V_i}{s}$$

$$\begin{aligned} \text{άρα} \quad v(z,t) &= \frac{R_0 V_i}{R_0 + R_s} \theta\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ i(z,t) &= \frac{V_i}{R_0 + R_s} \theta\left(t - \frac{z}{c}\right) \end{aligned}$$
(3.3)

Έχουμε δηλαδή διάδοση ορθογώνιου κύματος χωρίς παραμόρφωση προς το τέρμα της γραμμής. Συμπεραίνουμε επομένως ότι η γραμμή συμπεριφέρεται όπως γραμμή τερματισμένη στη χαρακτηριστική της. Ισχύει και το αντίστροφο.

#### 4. ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΟ ΚΑΛΩΔΙΟ

Ξαναθυμίζουμε ότι από τη σχέση (2.10)

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{sL_l + R_l}{sC_l + G_l}}$$

όταν δεν υπάρχουν απώλειες,  $R_l = 0$ ,  $G_l = 0$ , καταλήγουμε σε χαρακτηριστική αντίσταση που είναι ωμική,  $Z_0(s) = R_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$ .

Από τις σχέσεις (1.7) για ομοαξονικό καλώδιο κυκλικής διατομής βρίσκουμε,

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.1)$$



Η σχέση (4.2) που ακολουθεί, είναι ένας χρήσιμος εμπειρικός τύπος ισοδύναμος με τη σχέση (4.1).

$$R_0 = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{το } R_0 \text{ είναι σε ohm)} \quad (4.2)$$

Υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν απώλειες αλλά στην πράξη υπάρχουν πάντα και εδώ απλώς υποθέτομε ότι είναι αρκούντως μικρές. Για να είναι ελάχιστες οι απώλειες σε περιοχές συχνοτήτων που κυριαρχεί το επιδερμικό φαινόμενο (βλέπε παρακάτω) αποδεικνύεται ότι πρέπει να ισχύει,

$$\frac{b}{a} \approx 3,6. \text{ Για διηλεκτρικό πολυαιθυλένιο } \epsilon_r \approx 2,3, \mu_r \approx 1 \text{ και αφού}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$$

βρίσκομε  $R_0 = 51 \Omega \approx 50 \Omega$ . Αυτή είναι η χαρακτηριστική αντίσταση των περισσότερων από τα καλώδια που χρησιμοποιούνται στα εργαστήρια.

## 5. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ ΠΑΛΜΟΣ ΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΑΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Έστω ότι η διέγερση στην είσοδο της γραμμής είναι,

$$\begin{aligned} v_s(t) &= V_i \quad 0 \leq t \leq T \\ v_s(t) &= 0 \quad t > T, \quad t < 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Το μήκος της γραμμής είναι  $l$  και ο παλμός έχει χωρικό εύρος μικρότερο από το  $l$  ( $cT < l$ ). Η αντίσταση της πηγής  $R_s = 0$ , η τερματική αντίσταση είναι  $R_l$  και η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής είναι  $R_0$  ενώ η ταχύτητα διάδοσης είναι  $c$ .

$$\text{Προφανώς } \gamma = s\sqrt{L_1 C_1} = \frac{s}{c}.$$

Θα μελετήσουμε τη διάδοση παλμού που ξεκινά από την πηγή διέγερσης κατευθύνεται προς το τέρμα και υφίσταται μίαν ανάκλαση στο τέρμα της γραμμής.

$$\text{Έχομε } V(z, s) = V_1(z, s) = V_+(s)e^{-\gamma z} = V_+(s)e^{-\frac{sz}{c}}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τάσης της πηγής δίνει

$$V_s(s) = \frac{V_i}{s}(1 - e^{-sT}) \quad (5.2)$$

$$\text{Προφανώς στην αρχή της γραμμής, } z = 0, \quad V_1(0, s) = V_s(s) = V_+(s) = \frac{V_i}{s}(1 - e^{-sT}),$$

επομένως

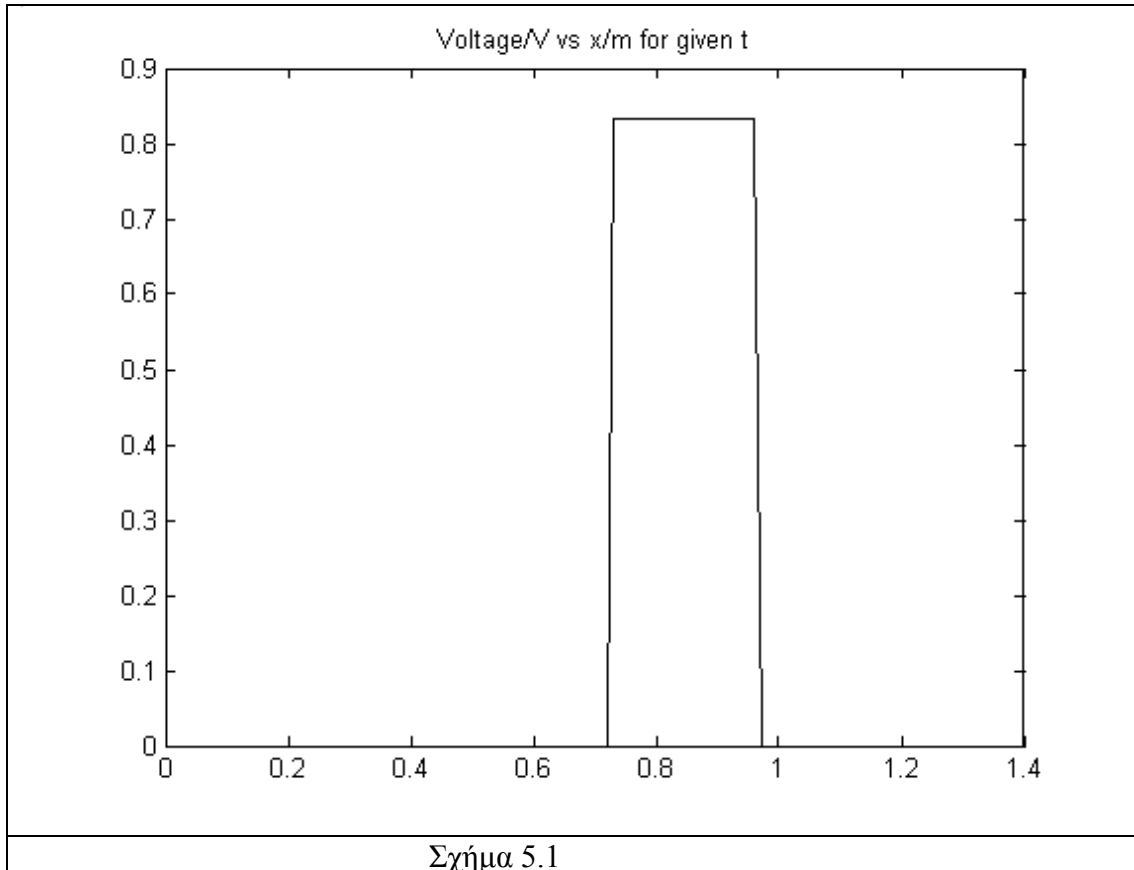
$$V_1(z, s) = \frac{V_i}{s}(1 - e^{-sT})e^{-\frac{sz}{c}} = V_i \frac{e^{-\frac{sz}{c}}}{s} - V_i \frac{e^{-s(T + \frac{z}{c})}}{s} \quad (5.3)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace οδηγεί στη σχέση για τον παλμό που οδεύει προς το τέρμα της γραμμής με την προϋπόθεση ότι ο παλμός δεν έχει φτάσει στο τέρμα αλλά χωρεί ολόκληρος μέσα στη γραμμή,

$$v_1(z, t) = V_i \theta\left(t - \frac{z}{c}\right) - V_i \theta\left(t - \left(T + \frac{z}{c}\right)\right) \quad (5.4)$$

Η κατάσταση φαίνεται στο Σχήμα 5.1 για

$$R_0 = 50 \, \Omega, R_s = 10 \, \Omega, R_l = 20 \, \Omega, l = 1,2 \, \text{m}, t = 0,8l/c, cT = 0,2l, c = 2 \times 10^8 \, \text{m/s}$$



Για να περιγραφεί και η ανάκλαση στο τέρμα της γραμμής πρέπει να εισαγάγομε κύμα που οδεύει από το τέρμα προς την αρχή της γραμμής και τη συνοριακή συνθήκη στο τέρμα της, έτσι καταλήγομε στη σχέση,

$$V(z, s) = V_1(z, s) + V_2(z, s) = V_+(s)e^{-\frac{sz}{c}} + V_-(s)e^{\frac{sz}{c}} \quad (5.5)$$

Η συνοριακή συνθήκη στη θέση  $z = l$  (από τις σχέσεις (2.4), (2.10)) δίνει

$$V_-(s) = A_l \exp\left(-2l \frac{s}{c}\right) V_+(s) \quad (5.6)$$

$$A_l = \frac{R_l - R_0}{R_l + R_0}, \quad V_+(s) = \frac{V_i}{s} (1 - e^{-sT})$$

άρα,

$$V(z, s) = \frac{V_i}{s} (1 - e^{-sT}) \left( e^{-\frac{sz}{c}} + A_t e^{-\frac{(2l-z)s}{c}} \right) \quad (5.7)$$

$$V(z, s) = V_i \frac{e^{-\frac{sz}{c}}}{s} - V_i \frac{e^{-(T+\frac{z}{c})s}}{s} + V_i A_t \frac{e^{-\frac{(2l-z)s}{c}}}{s} - V_i A_t \frac{e^{-\frac{(2l-z+T)s}{c}}}{s}$$

Αντιστρέφοντας βρίσκουμε

$$v(z, t) = V_i \theta\left(t - \frac{z}{c}\right) - V_i \theta\left[t - \left(\frac{z}{c} + T\right)\right] + V_i A_t \theta\left(t + \frac{z-2l}{c}\right) - V_i A_t \theta\left[t + \left(\frac{z-2l}{c} - T\right)\right] \quad (5.8)$$

Ο κάθε όρος παριστάνει βηματική συνάρτηση (συνάρτηση heaviside), είναι ευνόητο ότι ο συνδυασμός των δυο πρώτων όρων και ο συνδυασμός των δυο τελευταίων οδηγεί σε ορθογώνιους παλμούς που οδεύουν προς τη θετική κατεύθυνση (προς το τέρμα) και προς την αρνητική κατεύθυνση (προς την αρχή) της γραμμής αντιστοίχως. Στο Σχήμα 5.2 φαίνεται ένα στιγμιότυπο της κατάστασης που περιγράφει η

τελευταία σχέση τη χρονική στιγμή  $t_1$ , όπου  $\frac{l}{c} > t_1 > T$ . Οι δυο πρώτοι όροι δίνουν

μη μηδενικό αποτέλεσμα ενώ ο καθένας από τους δυο τελευταίους δίνει μηδέν. Ο παλμός είναι παλμός που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Στο ίδιο σχήμα 5.2

φαίνεται και στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή  $t_2$ , όπου  $\frac{2l}{c} > t_2 > \frac{l}{c} + T$ . Οι δυο πρώτοι

όροι αλληλοαναιρούνται και δίνουν μηδενικό αποτέλεσμα ενώ οι δυο τελευταίοι δίνουν παλμό που κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Παρόλο που για χρονικές

στιγμές  $t_3$  έτσι που  $t_3 > \frac{2l}{c}$ , βρίσκουμε ότι οι όροι που περιγράφουν κίνηση προς τη

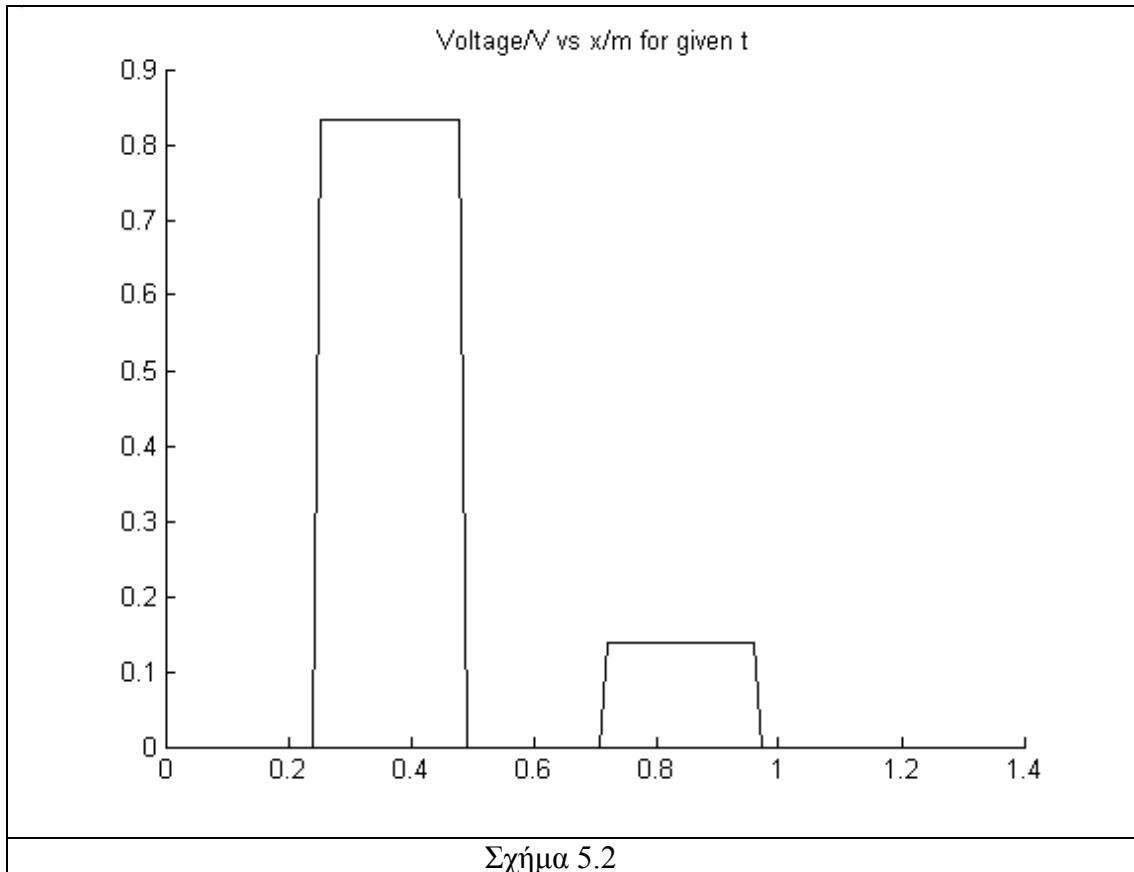
θετική κατεύθυνση αναιρούνται από τους όρους για κίνηση προς την αρνητική κατεύθυνση, άρα  $v(z, t) = 0$ , αυτό είναι παραπλανητικό διότι η ανάλυσή μας δεν ισχύει για τόσο μεγάλους χρόνους διότι δεν λάβαμε υπόψη τη συνοριακή συνθήκη στην αρχή της γραμμής. Οι σχέσεις ισχύουν και για χρόνους  $T > t_0 > 0$  που ξεκινά ο

παλμός και δεν έχει πλήρως αναπτυχθεί καθώς και για χρόνους  $\frac{2l}{c} + T > t' > \frac{2l}{c}$  που

υπάρχει επικάλυψη μεταξύ του προσπίπτοντος στο τέρμα και ανακλώμενου παλμών.

Αν θέλουμε περιγραφή του φαινομένου κάθε χρονική στιγμή πρέπει να

χρησιμοποιήσουμε τις γενικές σχέσεις (2.25) ή (2.26) για την περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες.



Όπως έχουμε ξανά αναφέρει, μπορεί κάποιος να κάνει τη μελέτη εξετάζοντας τις διαδοχικές ανακλάσεις στα δυο άκρα της γραμμής, έτσι καταλήγει σε άθροισμα σειράς όρων ή να εφαρμόσει τις γενικές σχέσεις και γίνει κατάλληλο ανάπτυγμα σε σειρά όπου αναδεικνύονται οι διάφοροι όροι όπως και πριν.

Αν η γραμμή είναι τερματισμένη στη χαρακτηριστική της (προσαρμογή) τότε δεν υπάρχει ανακλώμενος παλμός. Ανάλογο ισχύει όταν υπάρχει προσαρμογή στην αρχή της γραμμής ( $Z_s = Z_l$ ), τότε δεν υπάρχει ανακλώμενος παλμός στην αρχή.

#### 6. ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗΣ ΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΤΕΡΜΑ ΙΔΑΝΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ $Z_0(s)$ ΚΑΙ $Z_l(s)$ .

Έχουμε  $Z_l(s) = R_l$ ,  $Z_0(s) = R_0$  και αφού δεν υπάρχει απόσβεση άρα  $\gamma = \frac{s}{c}$ .

Μελετούμε μια μόνο ανάκλαση στο τέρμα της γραμμής. Ανάλογα ισχύουν και για μια μόνο ανάκλαση στην αρχή της γραμμής οπότε το ρόλο της  $R_l$  τον παίζει η  $R_s$ .

Προφανώς έχουμε τον πραγματικό συντελεστή ανάκλασης

$$\rho_t = A_t = \frac{R_t - R_0}{R_t + R_0} \quad (6.1)$$

για την ανάκλαση στην αρχή θα έχουμε προφανώς

$$\rho_s = A_s = \frac{R_s - R_0}{R_s + R_0} \quad (6.2)$$

Ισχύουν για την προσπίπτουσα, 1, και ανακλώμενη, 2, κυματομορφές,

$$\begin{aligned} V_1(z, s) &= V_+(s) e^{-\frac{zs}{c}}, \quad V_-(s) = \rho_s e^{-\frac{2l-z}{c}} V_+(s) \\ V_2(z, s) &= V_-(s) e^{\frac{zs}{c}}, \quad V_2(z, s) = \rho_t e^{-\left(\frac{2l-z}{c}\right)s} V_+(s) \end{aligned} \quad (6.3)$$

προφανώς ο μετασχηματισμός Laplace της προσπίπτουσας τάσης  $v(t)$ , στη θέση  $z = 0$ , είναι  $V_+(s)$ , άρα η αντιστροφή οδηγεί στη σχέση

$$v_1(z, t) = v\left(t - \frac{z}{c}\right) \theta\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad l > z > 0. \quad (6.4)$$

Η ανακλώμενη κυματομορφή είναι

$$V_2(z, s) = \rho_t e^{-\frac{2(l-z)s}{c}} e^{-\frac{zs}{c}} V_+(s), \quad \text{άρα } V_2(z, s) = \rho_t e^{-\frac{2(l-z)s}{c}} V_1(z, s)$$

επομένως

$$v_2(z, t) = \rho_t v_1\left(z, t - \frac{2(l-z)}{c}\right) \theta\left(t - \frac{2(l-z)}{c}\right) = \rho_t v\left(t - \frac{2(l-z)}{c} - \frac{z}{c}\right) \theta\left(t - \frac{2(l-z)}{c} - \frac{z}{c}\right) \quad (6.5)$$

$$\text{δηλαδή} \quad v_2(z, t) = \rho_t v\left(t - \frac{2l-z}{c}\right) \theta\left(t - \frac{2l-z}{c}\right) \quad (6.6)$$

Από τη Σχέση (46) στο σημείο  $z = l$  προκύπτουν οι σχέσεις

$$\rho_t = \frac{R_t - R_0}{R_t + R_0} = \frac{v_2(l, t)}{v_1(l, t)} = -\frac{i_2(l, t)}{i_1(l, t)} \quad (6.7)$$

Από τις σχέσεις (6.5) ή (6.7) και (6.8) έχουμε ότι,

αν  $R_t = R_0$  τότε  $\rho_t = 0$  οπότε  $v_2(z, t) = 0$  δηλαδή δεν υπάρχει ανάκλαση.

Αν  $R_t = \infty$  τότε  $\rho_t = 1$  οπότε το ανακλώμενο σήμα τάσης είναι ίσο με το προσπίπτον σήμα και προστίθενται ενισχυτικά όταν επικαλύπτονται κατά την ανάκλαση.

Αν  $R_t > R_0$  τότε  $1 > \rho_t > 0$  οπότε το ανακλώμενο και το προσπίπτον έχουν το ίδιο πρόσημο και προστίθενται επίσης ενισχυτικά κατά την επικάλυψή τους στην ανάκλαση ενώ γενικώς έχουν διαφορετικά μεγέθη.

Αν  $R_t = 0$  τότε  $\rho_t = -1$  και το ανακλώμενο είναι ίσο κατά μέτρο με το προσπίπτον αλλά έχει αντίθετο πρόσημο και αλληλοαναιρούνται τελείως στη θέση  $z = l$  κατά την ανάκλαση.

Αν  $R_t < R_0$  έχουμε  $\rho_t < 0$  και τα σήματα τάσης προστίθενται αναιρετικά κατά την επικάλυψή τους στην ανάκλαση.

Εύκολα μπορούμε να δούμε τι γίνεται για τις αντίστοιχες κυματομορφές ρεύματος.

7. ΔΙΑΔΟΣΗ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΑΣΗΣ ΣΕ ΙΔΑΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΕΝΗΣ ΣΕ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΟΠΙΣΘΟΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.41) με  $\alpha = 0$ . Έχουμε  $v_s(t) = V_a \theta(t)$ ,

$$Z_t(s) = \frac{1}{sC}, \quad Z_s(s) = R_0, \quad \text{άρα}$$

$$A_s(s) = \rho_s = 0, \quad A_t(s) = \frac{1 - sCR_0}{1 + sCR_0}, \quad V_s(s) = \frac{V_a}{s} \quad (7.1)$$

Επίσης έχουμε

$$A'_1(0, s) = \frac{V_a}{2R_0} \frac{1}{s}, \quad A'_2(0, s) = -\frac{V_a}{2R_0} \frac{s - \frac{1}{R_0C}}{s(s + \frac{1}{R_0C})} \quad (7.2)$$

$$A_1(0, s) = \frac{V_a}{2} \frac{1}{s}, \quad A_2(0, s) = -\frac{V_a}{2} \frac{s - \frac{1}{R_0C}}{s(s + \frac{1}{R_0C})}$$

Επομένως

$$a_2(0, t) = \frac{V_a}{2} (1 - 2e^{-t/(R_0C)}), \quad a'_1(0, t) = \frac{V_a}{2R_0} \quad (7.3)$$

$$a'_2(0, t) = \frac{V_a}{2R_0} (1 - 2e^{-t/(R_0C)})$$

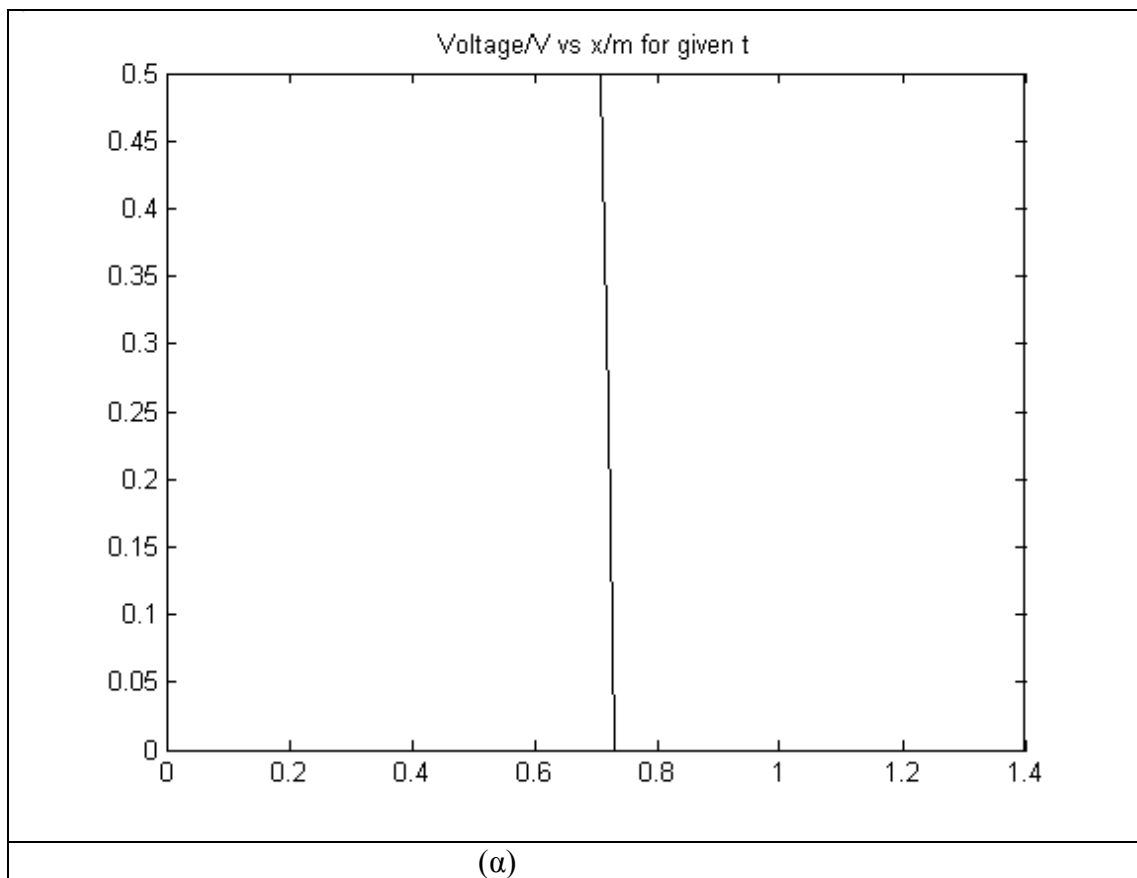
Τελικώς,

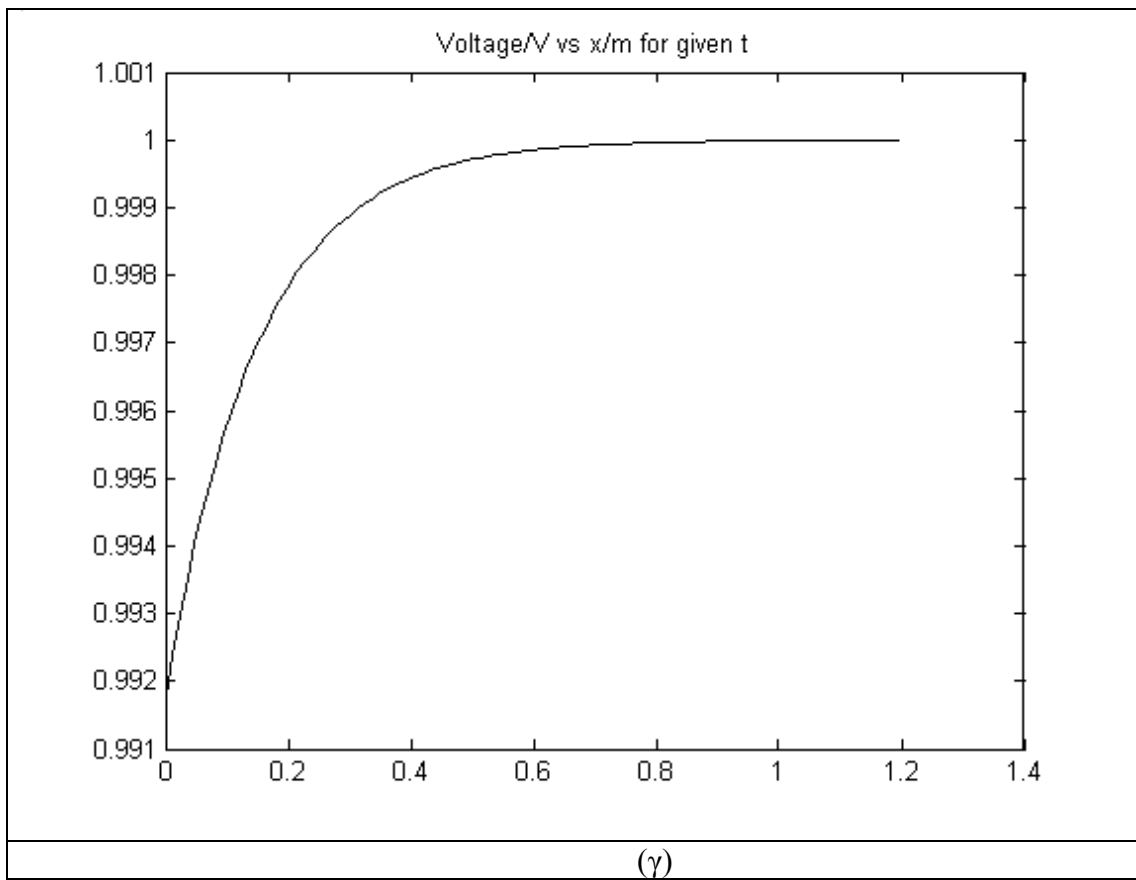
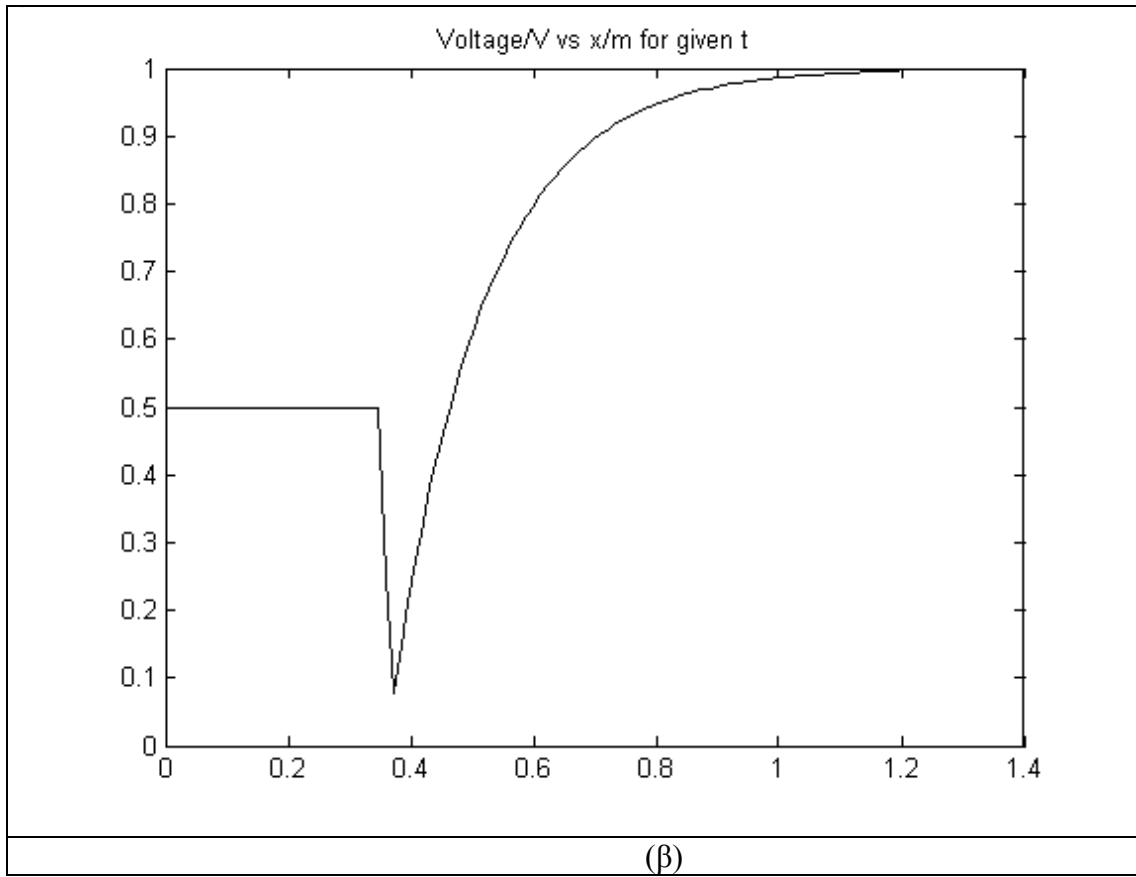
$$v(z, t) = \frac{V_a}{2} \left[ \theta\left(t - \frac{z}{c}\right) + (1 - 2e^{-[t - (2l - z)/c]/(R_0C)}) \theta\left(t - \frac{2l - z}{c}\right) \right] \quad (7.4)$$

$$i(z, t) = \frac{V_a}{2R_0} \left[ \theta\left(t - \frac{z}{c}\right) - (1 - 2e^{-[t - (2l - z)/c]/(R_0C)}) \theta\left(t - \frac{2l - z}{c}\right) \right]$$

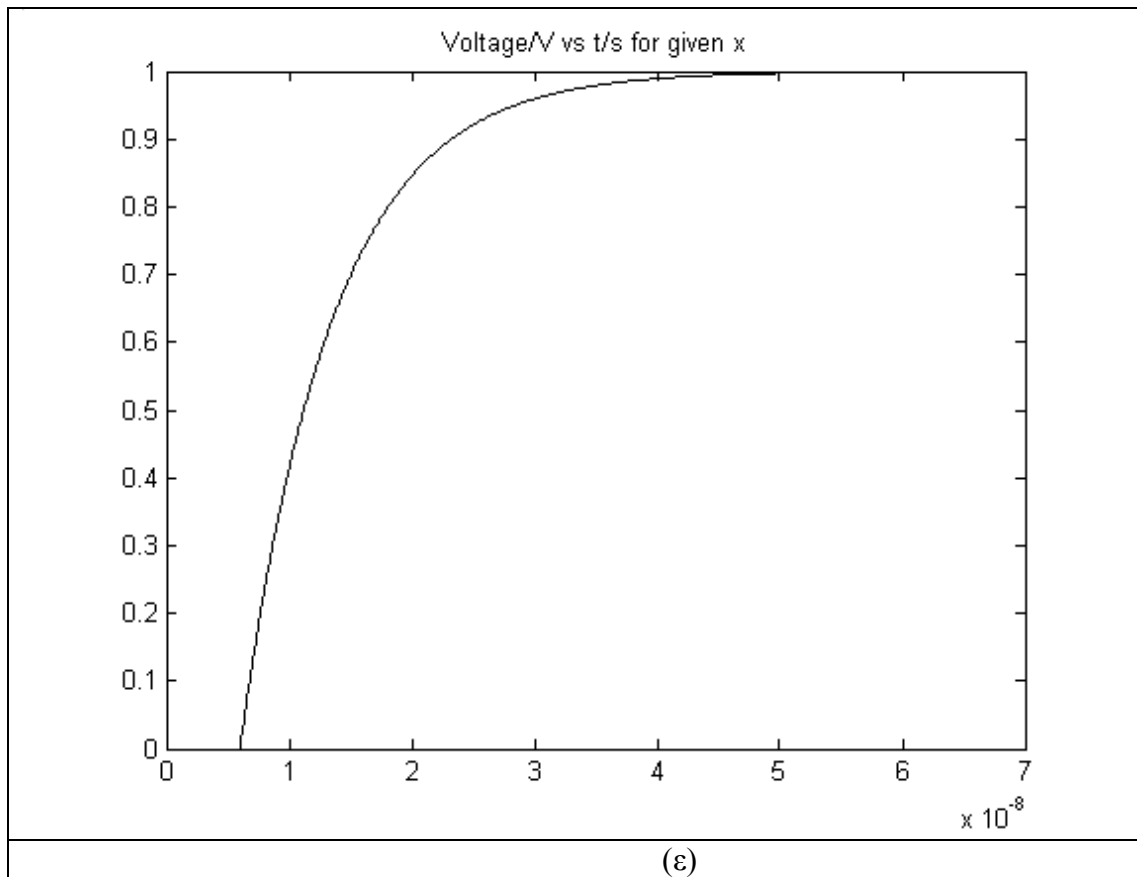
Στα Σχήματα 7.1α,β,γ φαίνονται διάφορα στιγμιότυπα της τάσης συναρτήσει της θέσης και στο Σχήμα 7.1 δ η τάση συναρτήσει του χρόνου στην αρχή της γραμμής. Στο Σχήμα 7.1 ε φαίνεται η τάση στο τέρμα της γραμμής. Το Σχήμα 7.2 δείχνει τα αντίστοιχα για το ρεύμα.

Η ανάλυση μπορεί να γίνει χωρίς τη χρήση των σχέσεων του μετασχηματισμού Laplace που ισχύουν στο πεδίο των μιγαδικών συχνοτήτων αλλά καταφεύγοντας στις θεμελιώδεις σχέσεις (1.8) έως (1.13) που ισχύουν στο πεδίο του χρόνου.

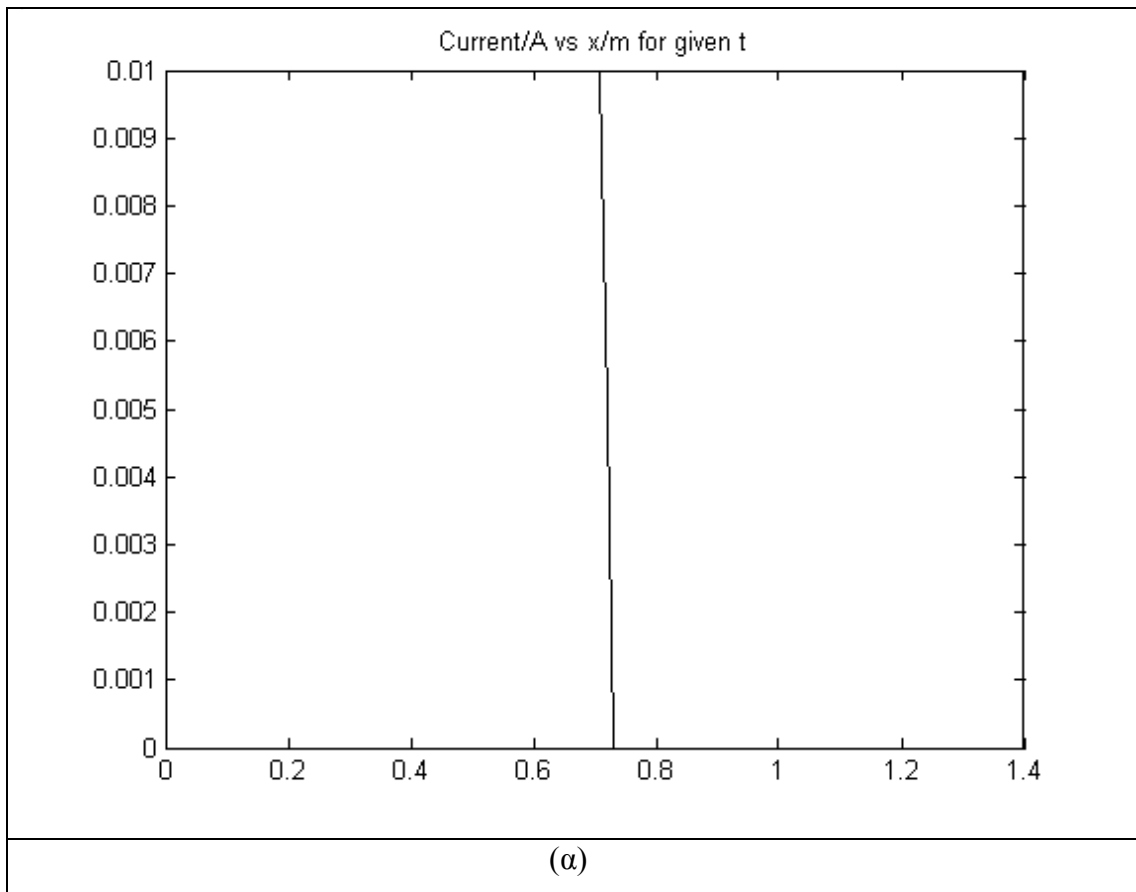


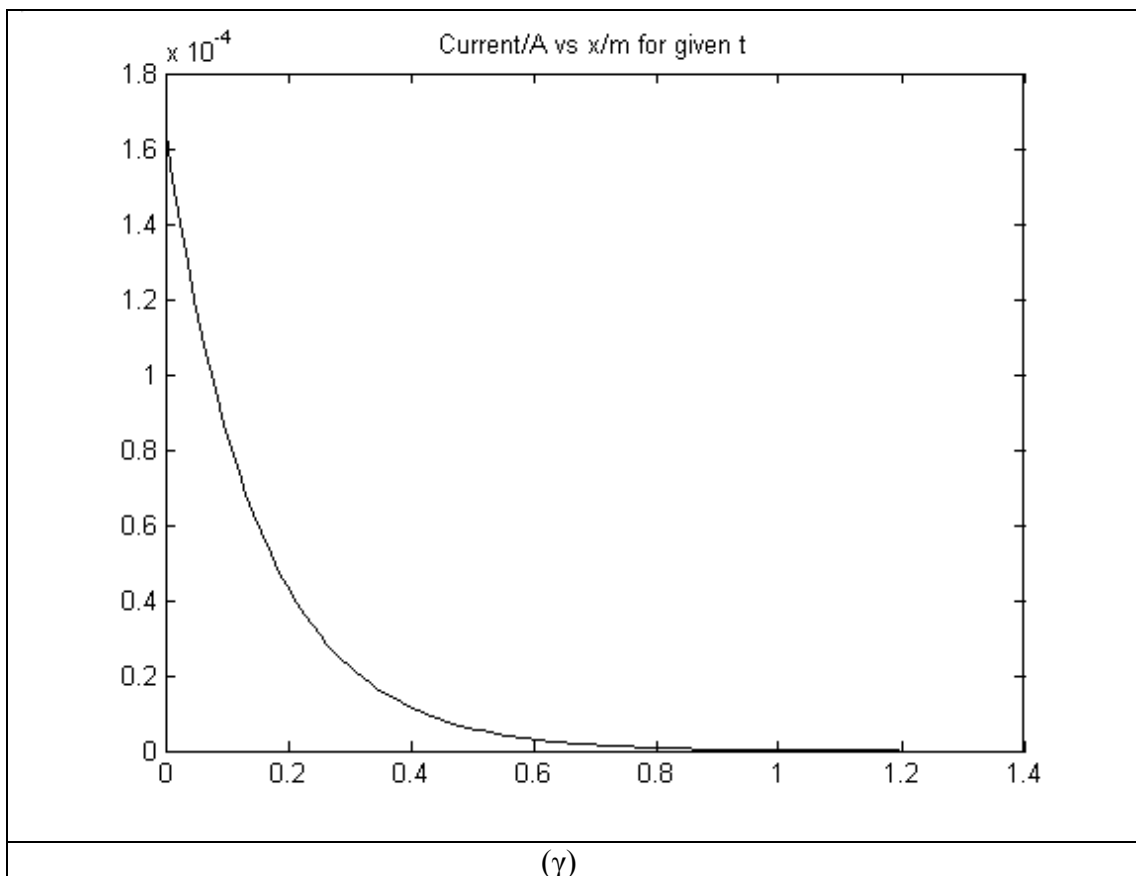
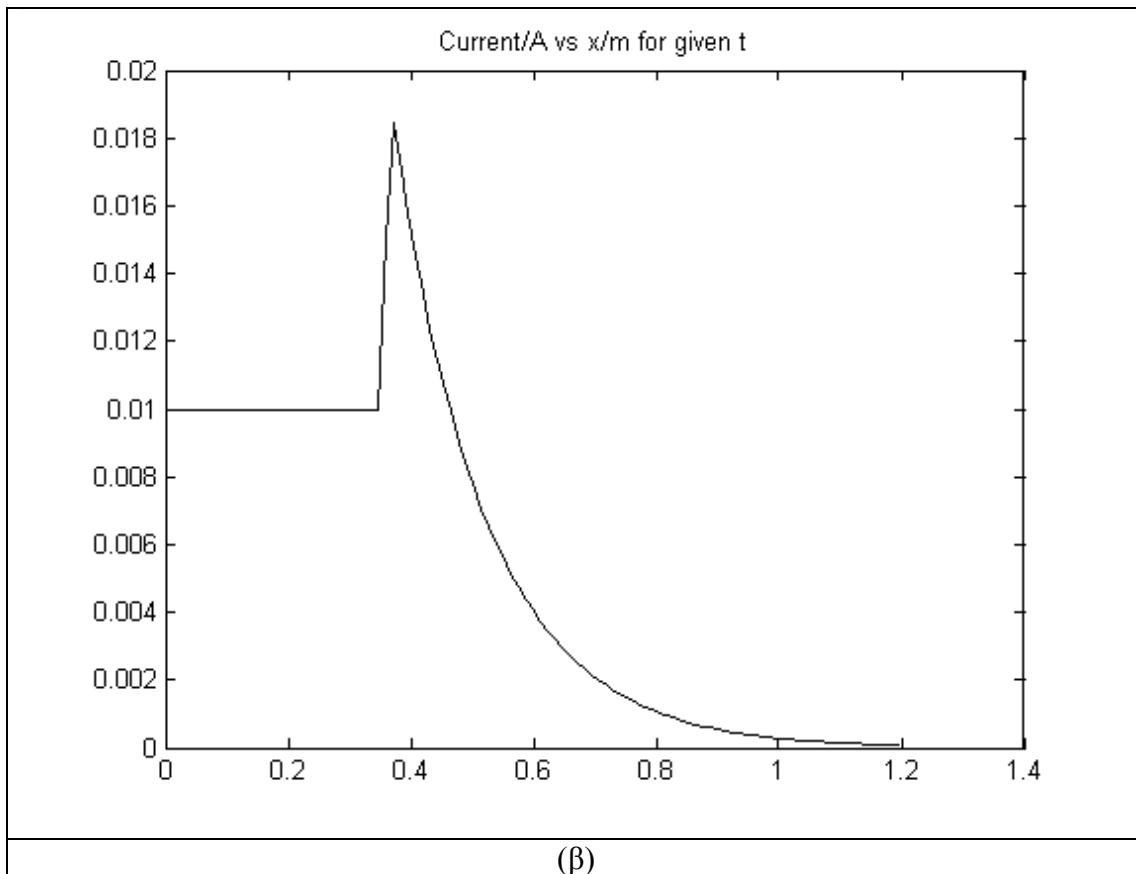


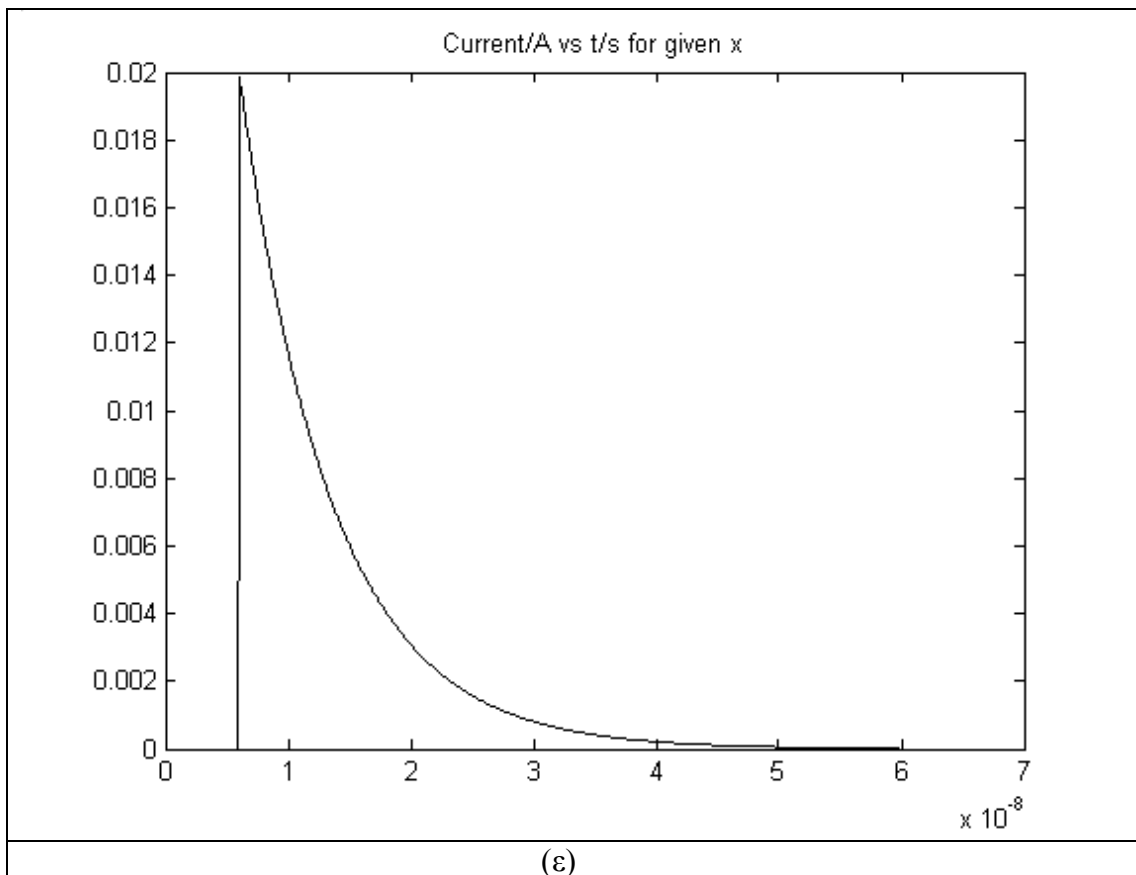
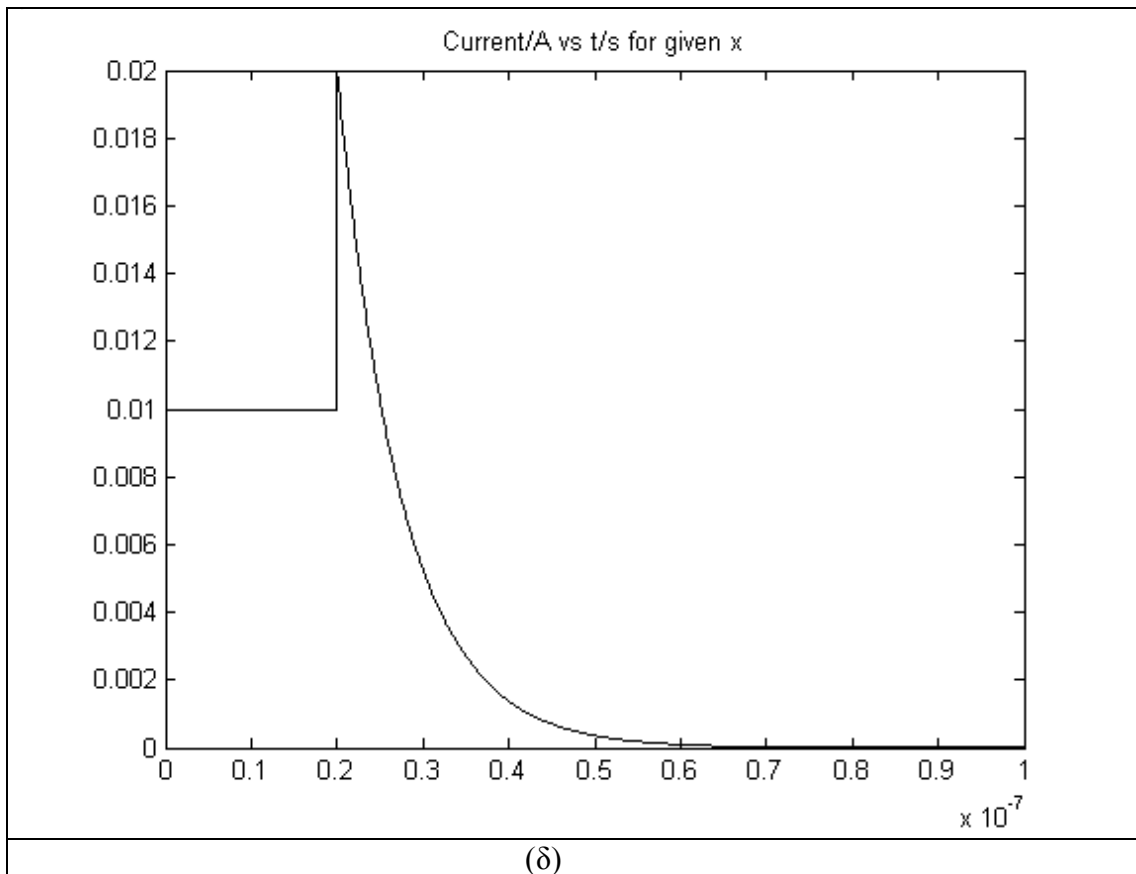




Σχήμα 7.1

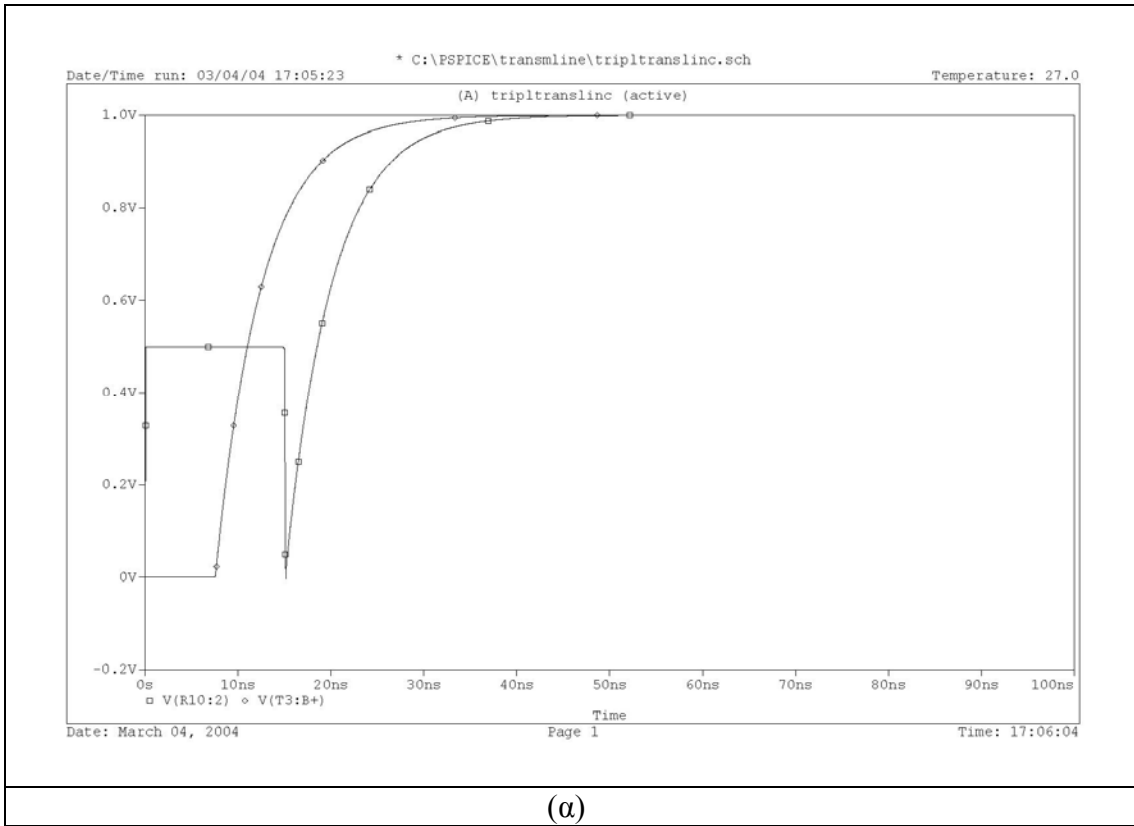




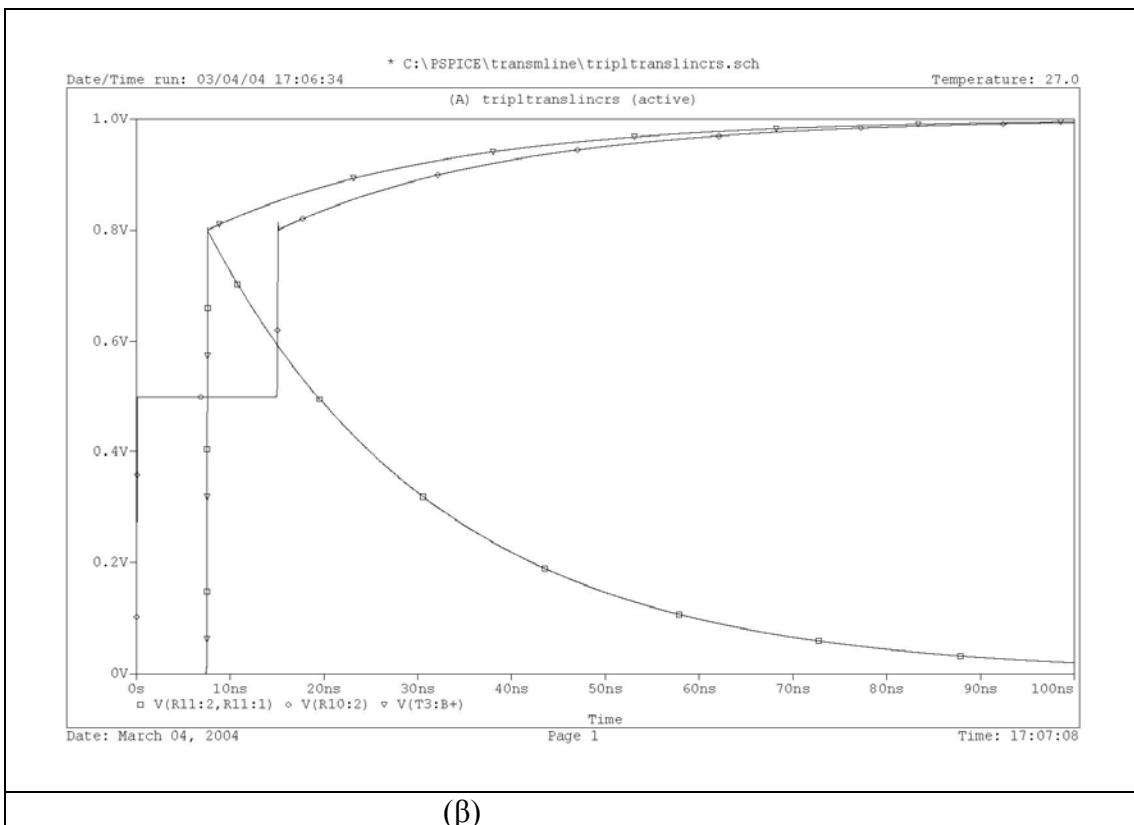


Σχήμα 7.2

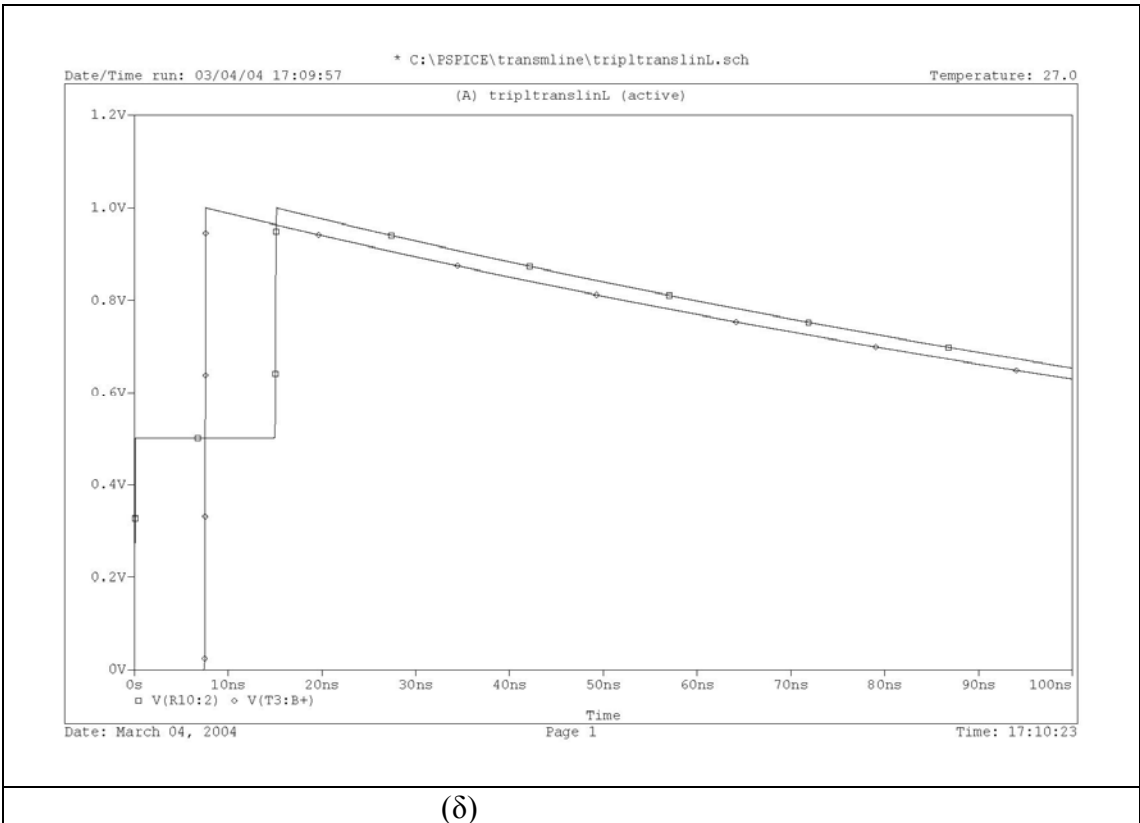
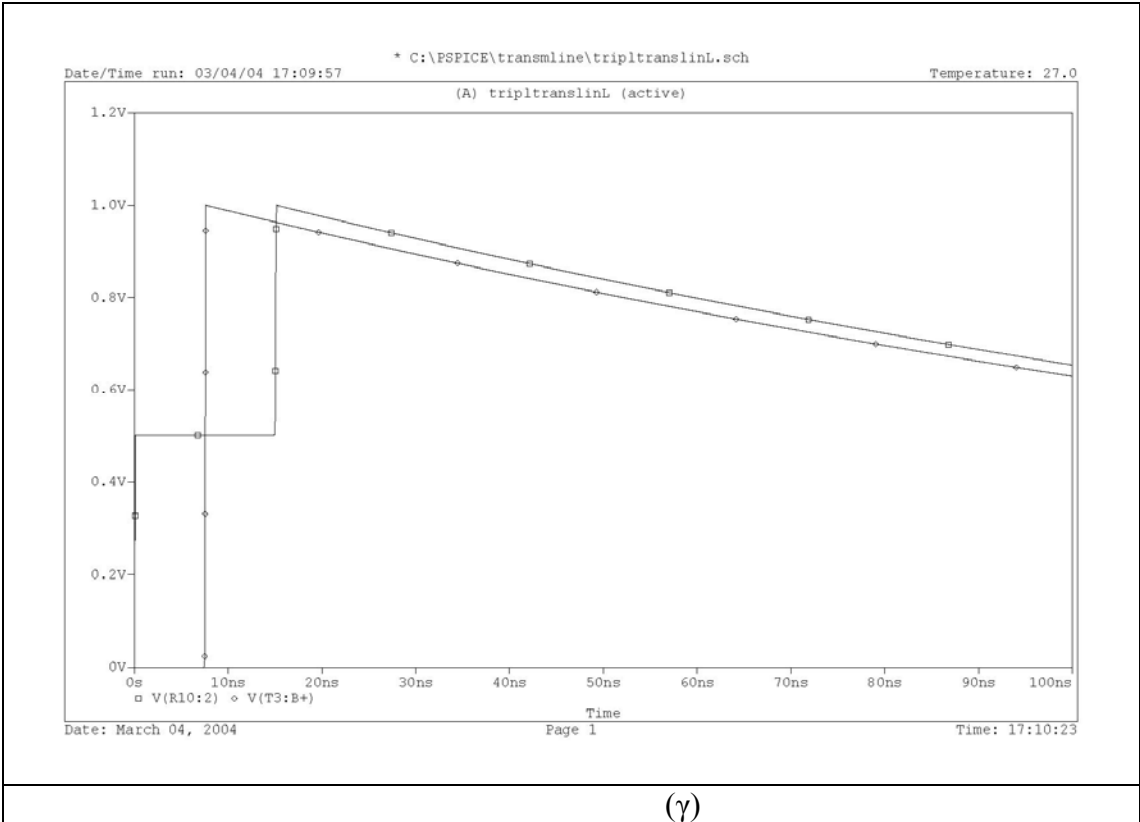
Στο Σχήμα 7.3 φαίνονται οι κυματομορφές στην αρχή και στο τέλος της γραμμής για διάφορα στοιχεία κυκλώματος στο τέρμα της γραμμής. Η τάση της πηγής είναι βηματική ως προς το χρόνο και η εσωτερική αντίσταση της πηγής είναι ίση με τη χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής η οποία είναι ωμική,  $R_s = R_0$ .

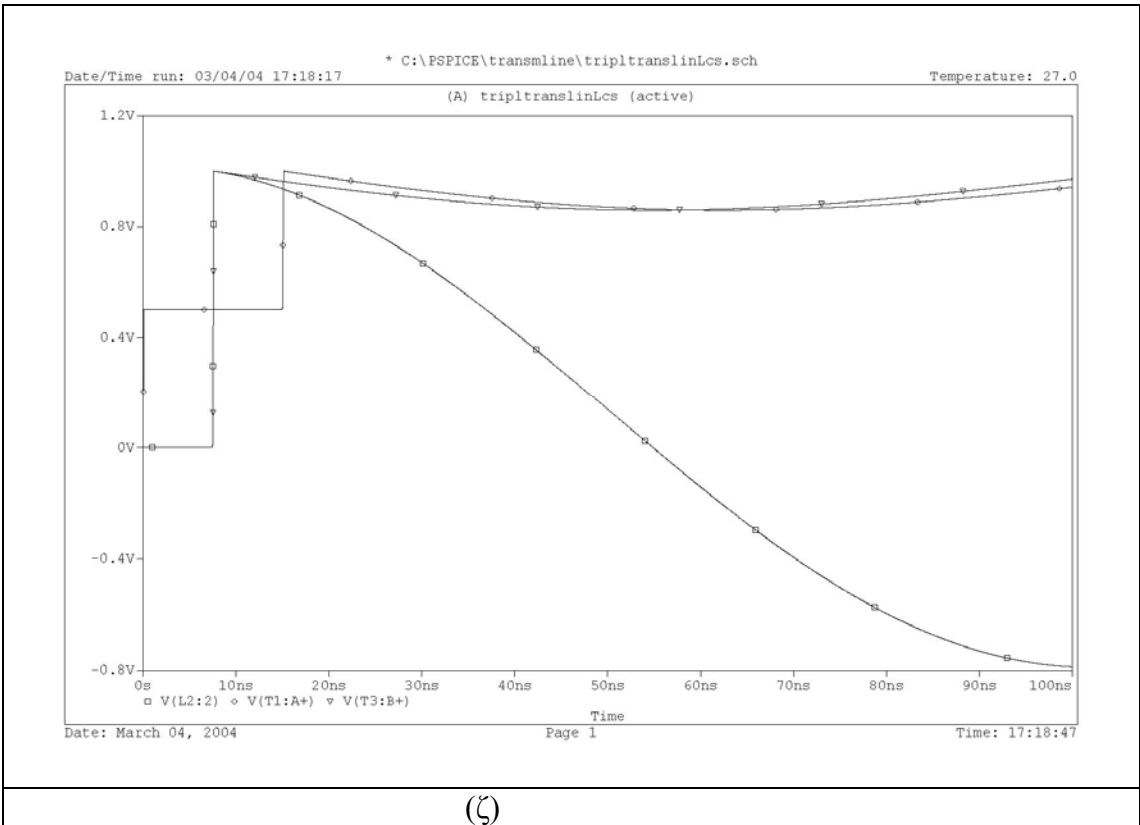
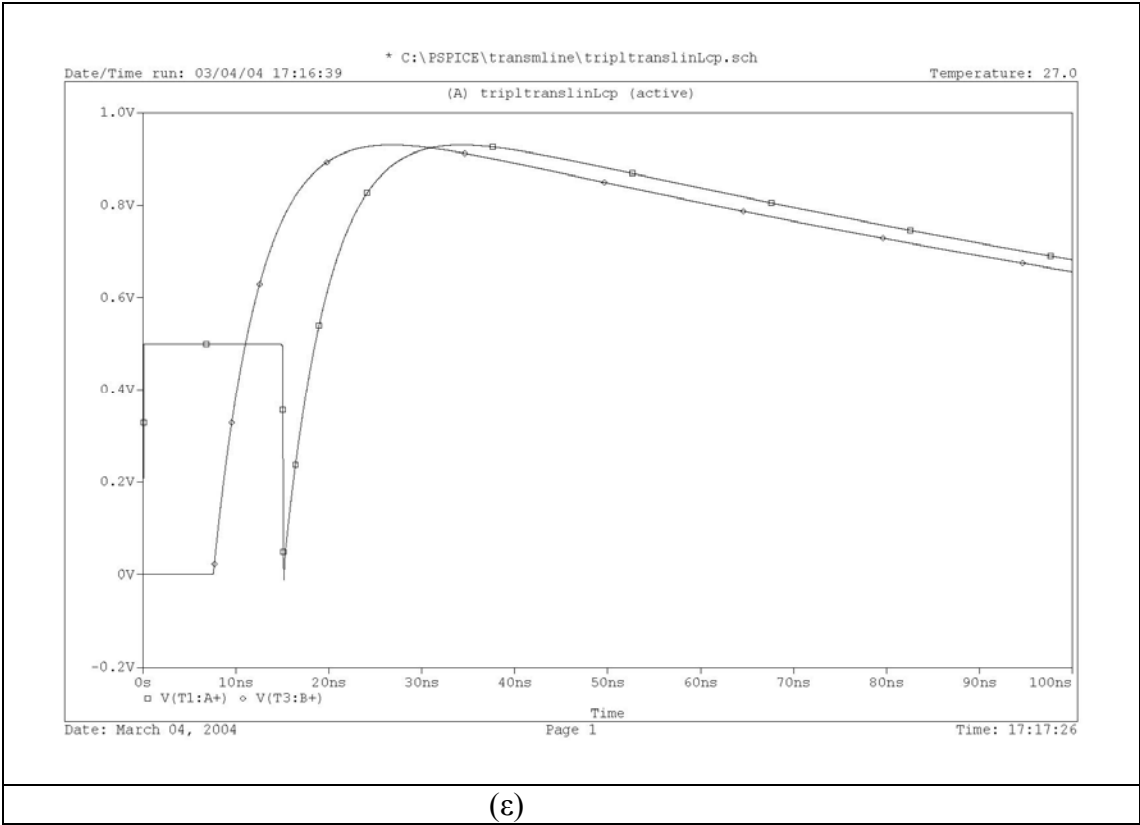


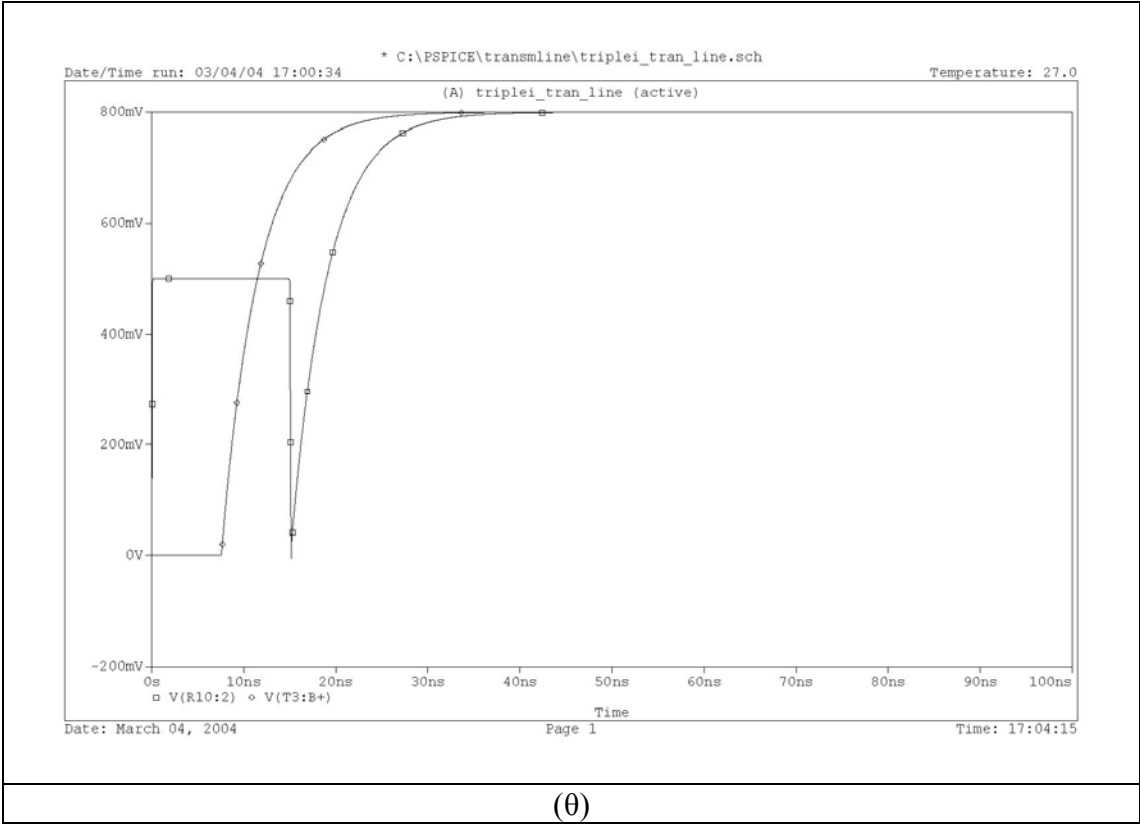
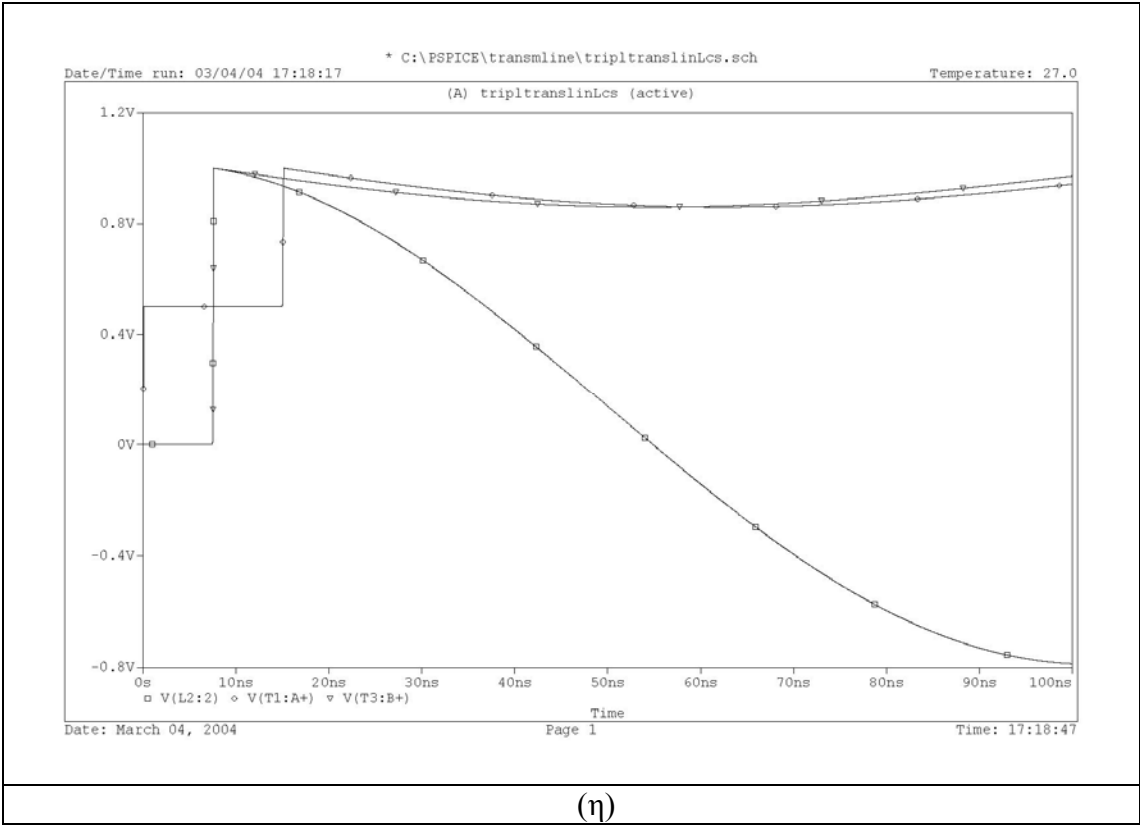
(α)



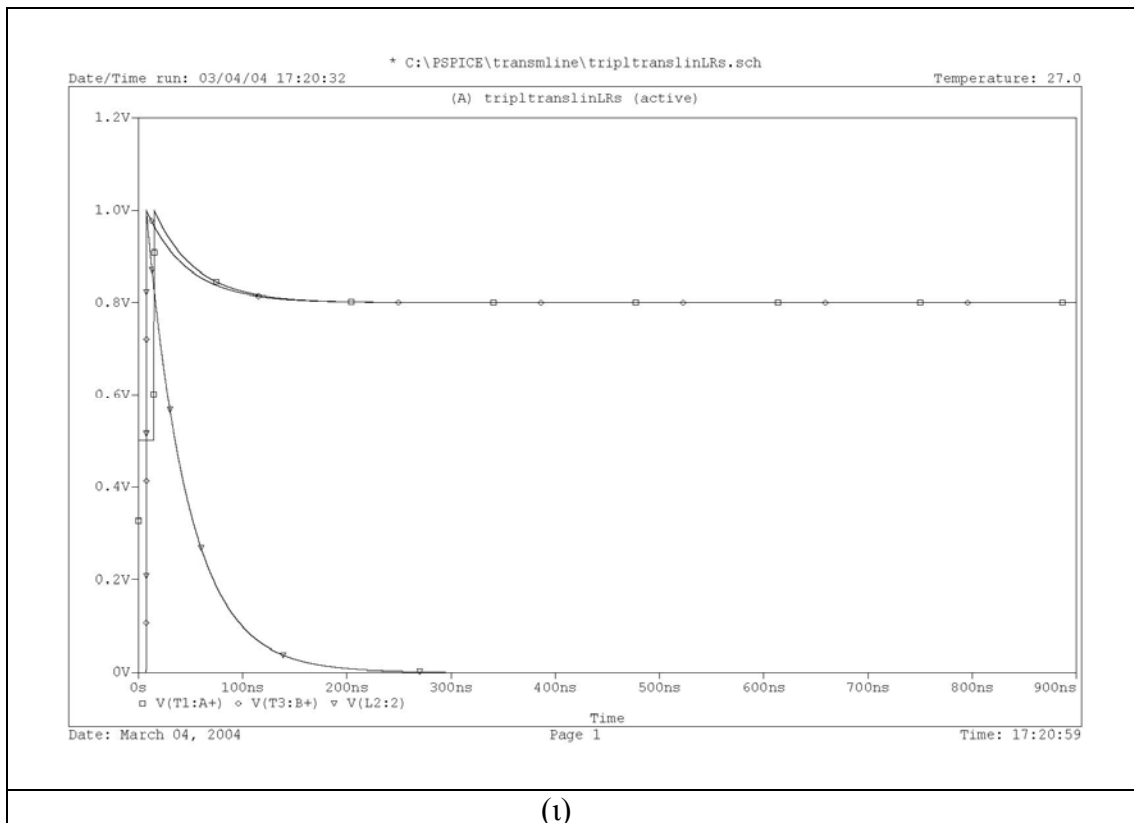
(β)











(i)

Σχήμα 7.3

## 8. ΕΚΦΟΡΤΙΣΗ ΙΔΑΝΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Έστω η γραμμή μεταφοράς του Σχήματος 8.1α, μήκους  $l$  φορτισμένη έτσι που σε όλα τα σημεία της η τάση είναι  $V_a$  και το ρεύμα  $I_a = 0$ . Η γραμμή είναι ιδανική και ανοιχτή και στα δυο της άκρα και έχει ωμική χαρακτηριστική αντίσταση  $R_0$ . Η ταχύτητα διάδοσης είναι  $c$ . Τη στιγμή  $t = 0_+$  στο ένα άκρο της γραμμής που θα ονομάζουμε τέρμα της γραμμής, συνδέεται (τερματική) αντίσταση  $R_1$  ενώ στο άλλο, όπου συνήθως είναι η πηγή που θα ονομάζουμε αρχή της γραμμής και εδώ το δηλώνουμε με το δείκτη  $i$ , εφόσον η γραμμή είναι ανοιχτή  $R_1 = \infty$ . Να βρεθεί η τάση και το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου για κάθε σημείο της γραμμής.

Μπορεί κάποιος να εργαστεί με διάφορους τρόπους. Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό Laplace και διαδοχικές ανακλάσεις στα δυο άκρα. Ξεκινούμε από τις βασικές σχέσεις (2.1) χωρίς απώλειες ( $R_l = 0$ ,  $G_l = 0$ ).

$$\text{Έχουμε, } \frac{dV(z,s)}{dz} + sL_l I(z,s) - L_l i_0(z) = 0, \quad \frac{dI(z,s)}{dz} + sC_l V(z,s) - C_l v_0(z) = 0$$

$$\text{Έστω } i_0(z) = i(z, 0_+), \quad v_0(z) = v(z, 0_+)$$

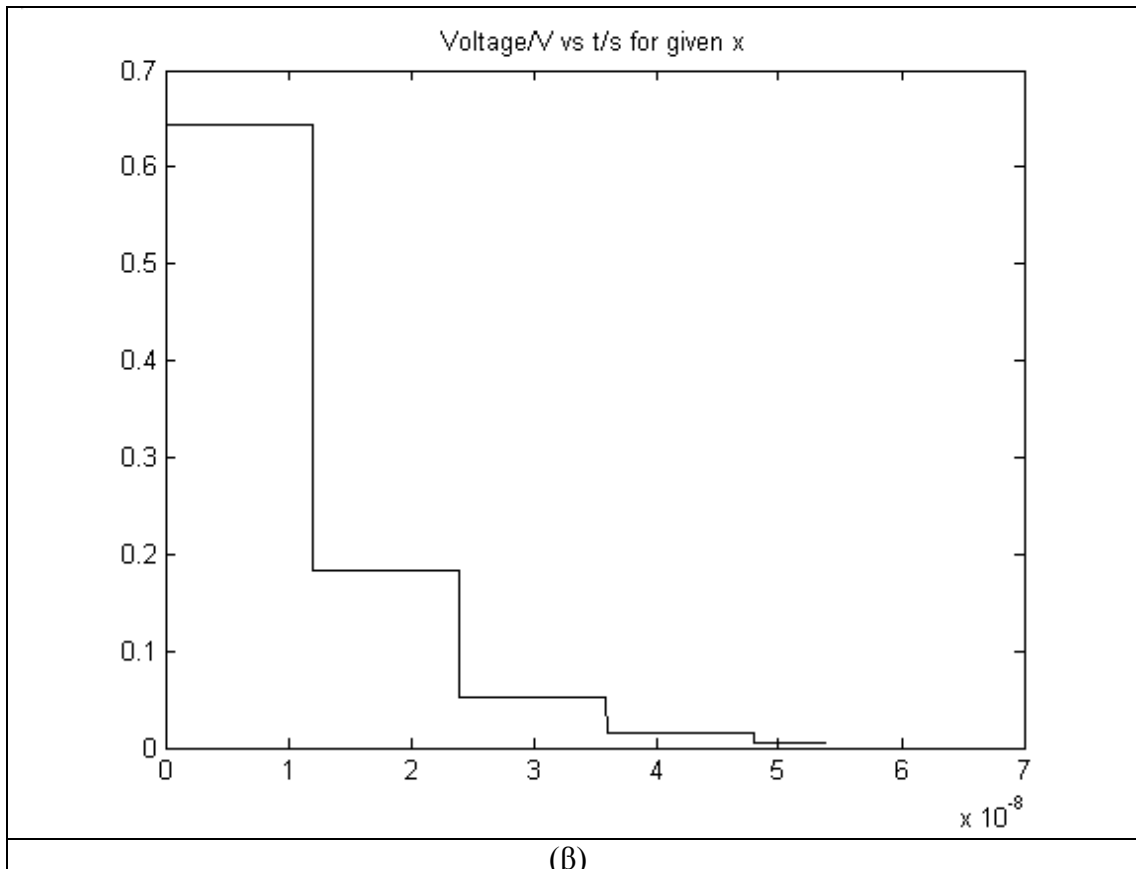
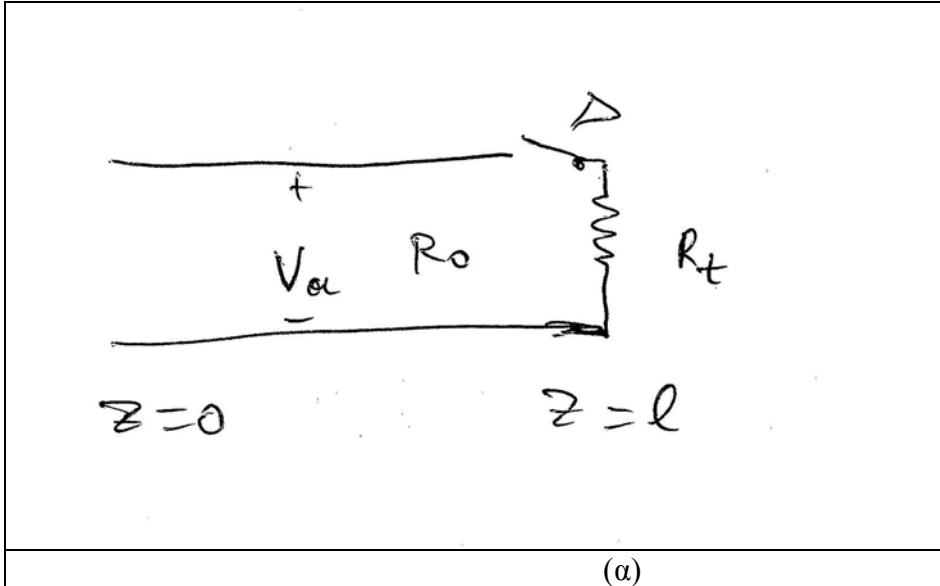
Η γενική λύση του συστήματος είναι της μορφής

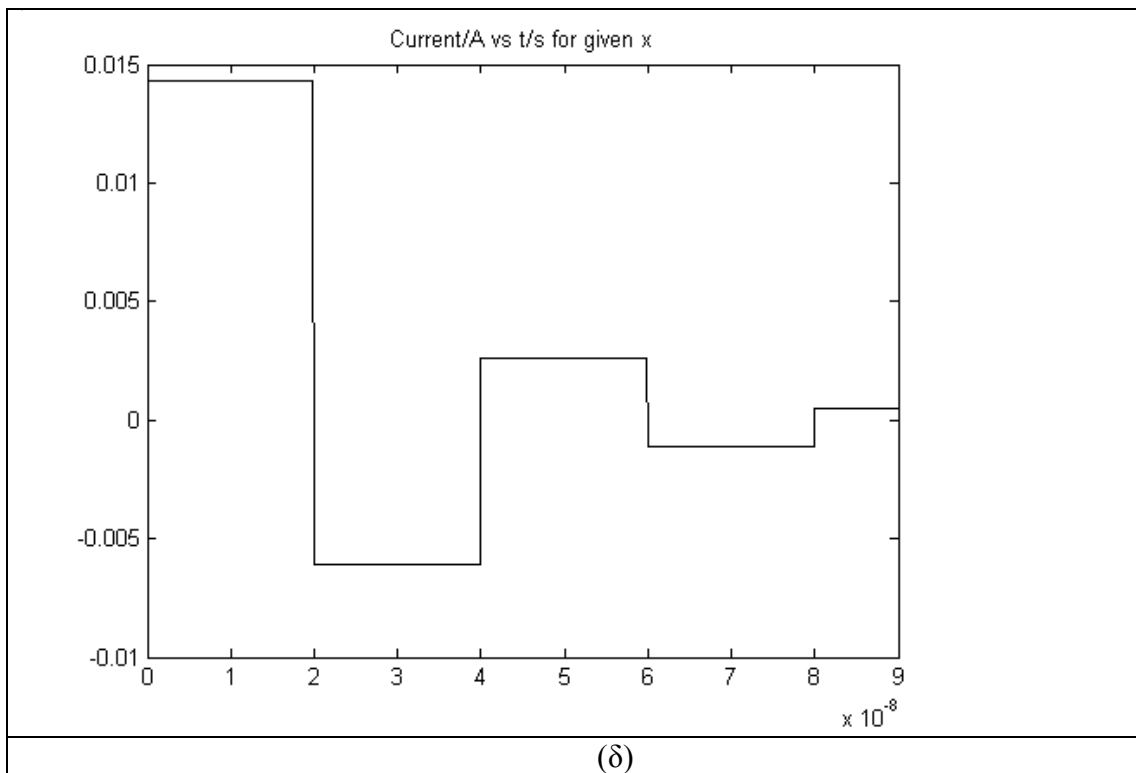
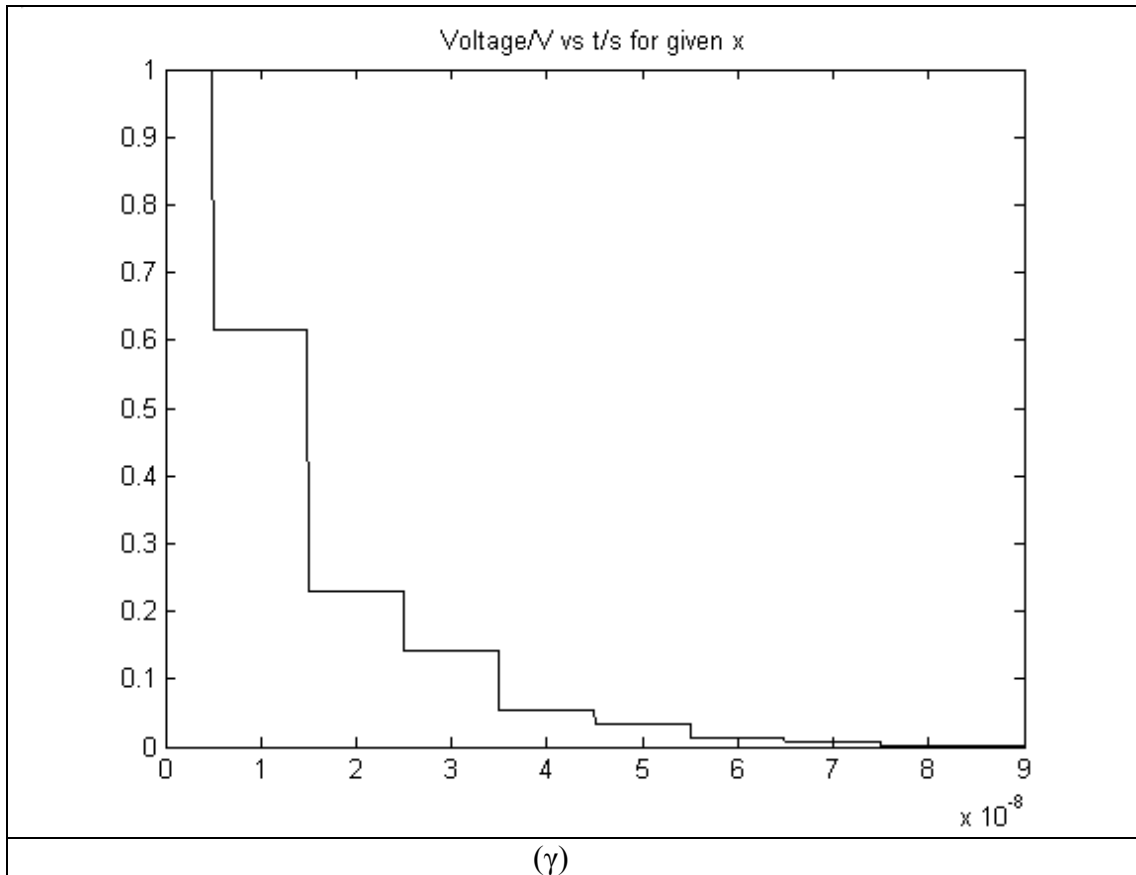
$$V(z,s) = V_+(s)e^{-\frac{sz}{c}} + V_-(s)e^{+\frac{sz}{c}} + V_0(s) \quad (8.1)$$

$$I(z,s) = I_+(s)e^{-\frac{sz}{c}} + I_-(s)e^{+\frac{sz}{c}} + I_0(s)$$

Αντικαθιστούμε στις διαφορικές εξισώσεις και καταλήγουμε στις σχέσεις

$$V_+(s) = R_0 I_+(s), \quad V_-(s) = -R_0 I_-(s), \quad V_0(s) = \frac{v_0(x)}{s}, \quad I_0(s) = \frac{i_0(z)}{s}.$$





Σχήμα 8.1

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το αρχικό ρεύμα (για  $t = 0_+$ )  $i_0(z) = i_0$  είναι ανεξάρτητο από το  $z$  και η προτελευταία ότι η αρχική τάση  $v_0(z)$  είναι ανεξάρτητη του  $z$ . Εφόσον τα αρχικά ρεύμα και τάση είναι ανεξάρτητα του  $z$  και αφού τα απομακρυσμένα από το τέρμα σημεία δεν επηρεάζονται ακαριαία με το κλείσιμο του διακόπτη, προφανώς ισχύουν  $i_0 = I_a = 0$ ,  $v_0 = V_a$ . Αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη υπάρχει μόνο παλμός που οδεύει από το τέρμα προς την αρχή, δηλαδή ο όρος με δείκτη  $r$ . Στο τέρμα της γραμμής έχουμε τη συνθήκη

$$V(l, s) = I(l, s)R_t \quad \text{δηλαδή} \quad V_-(s)e^{\frac{sl}{c}} + \frac{V_a}{s} = I_-(s)e^{\frac{sl}{c}} R_t$$

$$\text{επομένως} \quad V_-(s)e^{\frac{sl}{c}} + \frac{V_a}{s} = -\frac{V_-(s)}{R_0}e^{\frac{sl}{c}}R_t, \quad V_-(s) = -\frac{V_a R_0}{R_0 + R_t} \frac{e^{-\frac{sl}{c}}}{s}$$

κυματομορφή που οδεύει προς την αρχή είναι

$$V_1(z, s) = V_-(s)e^{+\frac{sz}{c}} = -\frac{V_a R_0}{R_0 + R_t} \frac{e^{-\frac{s}{c}(l-z)}}{s} \quad (8.2)$$

Αντιστρέφουμε και βρίσκουμε

$$v_1(z, t) = -\frac{V_a R_0}{R_0 + R_t} \theta\left(t - \frac{l-z}{c}\right) \quad (8.3)$$

Το ύψος του παλμού αυτού είναι  $V_1 = \frac{V_a R_0}{R_0 + R_t}$ , δηλαδή μικρότερο από την τάση αρχικής φόρτισης και έχει αντίθετη πολικότητα από την τάση φόρτισης οπότε αφαιρείται από αυτήν. Η ολική τάση της γραμμής είναι

$$v(z, t) = V_a + v_1(z, t) = V_a \left[1 - \frac{R_0}{R_0 + R_t} \theta\left(t - \frac{l-z}{c}\right)\right] \quad (8.4)$$

Η σχέση ισχύει μέχρις ότου ο οδεύων παλμός φτάσει στην αρχή,  $0 < t < \frac{l}{c}$ .

Κατόπιν ξεκινά ο ανακλώμενος στην αρχή βηματικός παλμός ο οποίος έχει ίδιο πρόσημο με τον προσπίπτοντα και οδεύει προς το τέρμα. Και αυτός αφαιρείται από την τάση φόρτισης  $V_a$ . Η συνολική τάση αποτελείται από τρεις όρους. Εύκολα βρίσκουμε ότι το πλάτος του ανακλώμενου είναι  $V_2 = V_1 \rho_1$  όπου για το συντελεστή ανάκλασης στην αρχή έχουμε  $\rho_1 = 1$ . Επομένως η συνολική τάση θα είναι  $v(z, t) = V_a + v_1(z, t) + v_2(z, t)$  δηλαδή

$$v(z, t) = V_a \left[1 - \frac{R_0}{R_0 + R_t} \theta\left(t - \frac{l-z}{c}\right) - \frac{R_0}{R_0 + R_t} \theta\left(t - \frac{z+l}{c}\right)\right] \quad (8.5)$$

Αυτή η περιγραφή ισχύει μέχρις ότου ο παλμός  $v_2$  φτάσει στο τέρμα όπου ανακλάται

και ο ανακλώμενος έχει πλάτος  $V_3 = -V_a \frac{R_0}{R_0 + R_t} \rho_t$  όπου  $\rho_t = \frac{R_t - R_0}{R_t + R_0}$  είναι ο

συντελεστής ανάκλασης στο τέρμα. Θα έχουμε επομένως και άλλον έναν βηματικό παλμό τάσης προς την αρχή της γραμμής, άρα

$$v(z,t) = V_a \left[ 1 - \frac{R_0}{R_0 + R_t} \left[ \theta\left(t - \frac{l-z}{c}\right) + \theta\left(t - \frac{z+l}{c}\right) + \rho_t \theta\left(t - \frac{2l-z}{c}\right) \right] \right] \quad (8.6)$$

Ο ανακλώμενος παλμός στο τέρμα μπορεί να έχει ίδιο ή αντίθετο πρόσημο με τον προσπίπτοντα ανάλογα με το πρόσημο του συντελεστή ανάκλασης. Η διαδικασία συνεχίζεται κατά προφανή τρόπο.

Είναι εύκολο να προσδιορίσει κάποιος το ρεύμα. Ξεκινούμε από τις βασικές σχέσεις

$$I(z,s) = I_+(s)e^{-\frac{sz}{c}} + I_-(s)e^{+\frac{sz}{c}}, \quad V_+(s) = R_0 I_+(s), \quad V_-(s) = -R_0 I_-(s) \text{ και τη συνοριακή συνθήκη στο τέρμα της γραμμής } V_-(s)e^{\frac{sl}{c}} + \frac{V_a}{s} = I_-(s)e^{\frac{sl}{c}} R_t \text{ καθώς και τη συνθήκη στην αρχή της γραμμής } 0 = I_+(s) + I_-(s).$$

Κάνοντας ανάλυση όπως προηγουμένως καταλήγουμε στη σχέση

$$i(z,t) = \frac{V_a}{R_0 + R_t} \left[ \theta\left(t - \frac{l-z}{c}\right) - \theta\left(t - \frac{z+l}{c}\right) + \rho_t \theta\left(t - \frac{2l-z}{c}\right) \right] \quad (8.7)$$

Το Σχήμα 8.1β δείχνει την τάση στο τέρμα της γραμμής συναρτήσει του χρόνου όταν ο συντελεστής ανάκλασης είναι θετικός,  $\rho_t = \frac{R_t - R_0}{R_t + R_0} > 0$ , δηλαδή  $R_t > R_0$ .

Το Σχήμα 8.1γ δείχνει την ίδια σχέση για τη μέση της γραμμής,  $z = \frac{l}{2}$ .

Το Σχήμα 8.1δ δείχνει την εξάρτηση της τάσης συναρτήσει του χρόνου στο τέρμα της γραμμής για  $R_t = R_0/2$ ,  $\rho_t = -\frac{1}{3}$  δηλαδή για αρνητικό συντελεστή ανάκλασης. Η περίπτωση όπου  $R_t = R_0$ ,  $\rho_t = 0$  είναι πολύ ενδιαφέρουσα, τότε έχουμε μόνο μια ανάκλαση στην αρχή της γραμμής. Το αποτέλεσμα είναι ότι στο φόρτο, στο τέρμα της γραμμής ( $R_t = R_0$ ), έχουμε ορθογώνιο παλμό τάσης ύψους  $\frac{V_a}{2}$  ο οποίος διαρκεί

$$\text{επί χρόνο } 2T_0 = 2\frac{l}{c}.$$

Σε αυτή την περίπτωση που υπάρχει προσαρμογή, η γενική σχέση για την τάση, που εδώ ισχύει κάθε χρονική στιγμή, είναι

$$v(z,t) = V_a \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \theta\left(t - \frac{l-z}{c}\right) + \theta\left(t - \frac{z+l}{c}\right) \right] \right] \quad (8.8)$$

Το Σχήμα 8.2α δείχνει την τάση στο τέρμα της προσαρμοσμένης γραμμής συναρτήσει του χρόνου. Το Σχήμα 8.2β δείχνει ένα στιγμιότυπο της τάσης στη γραμμή τη

χρονική στιγμή  $t = \frac{l}{2c} = T_0/2$  ενώ το Σχήμα 8.2γ δείχνει στιγμιότυπο τη στιγμή

$$t = \frac{3l}{2c} = \frac{3}{2}T_0 \text{ όπου } T_0 \text{ ο χρόνος που χρειάζεται για να διαδοθεί ένα μέτωπο σήματος}$$

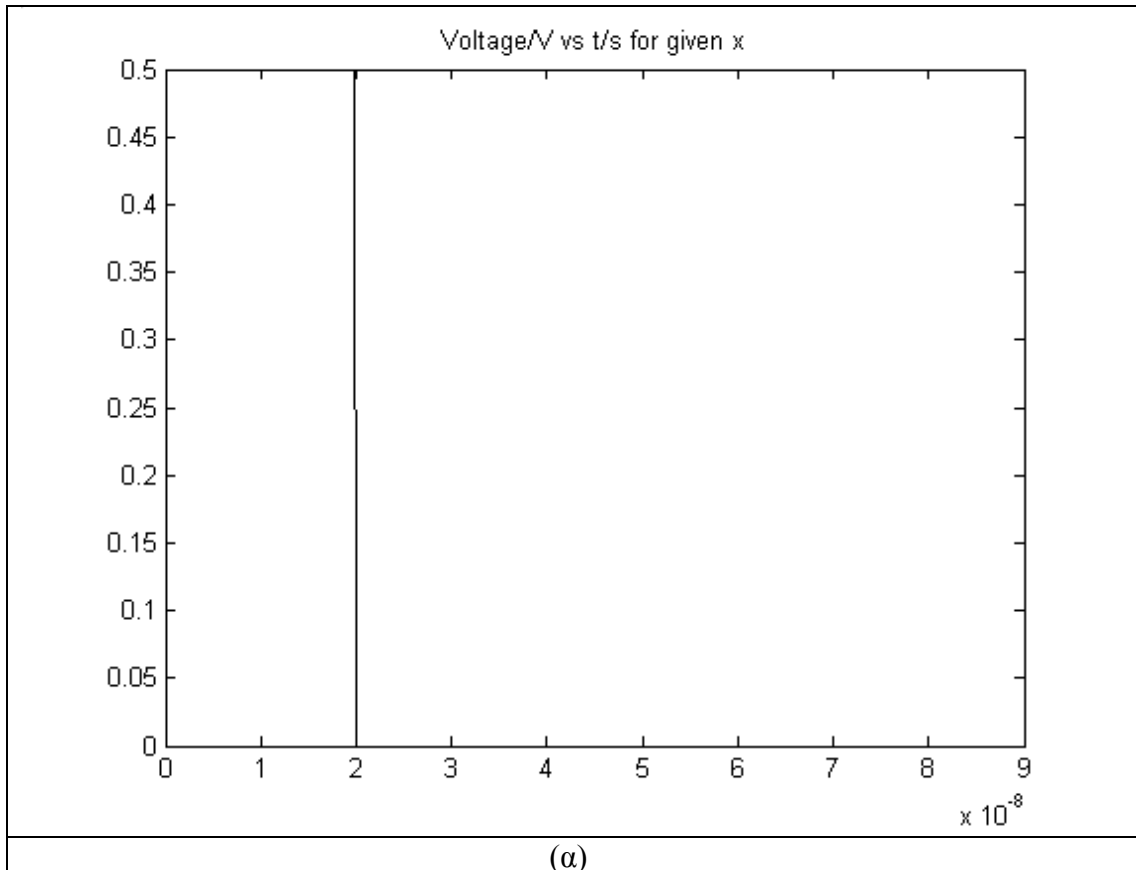
κατά μήκος της γραμμής (καθυστέρηση της γραμμής).

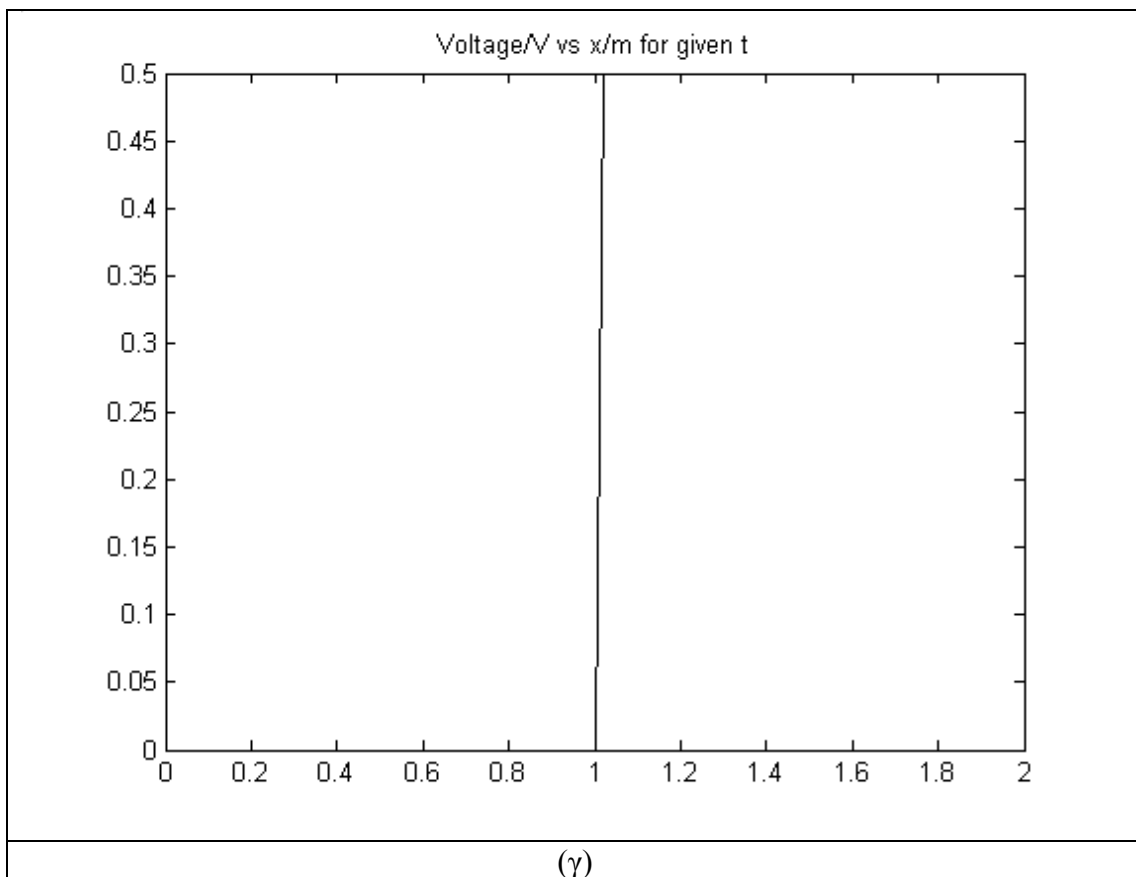
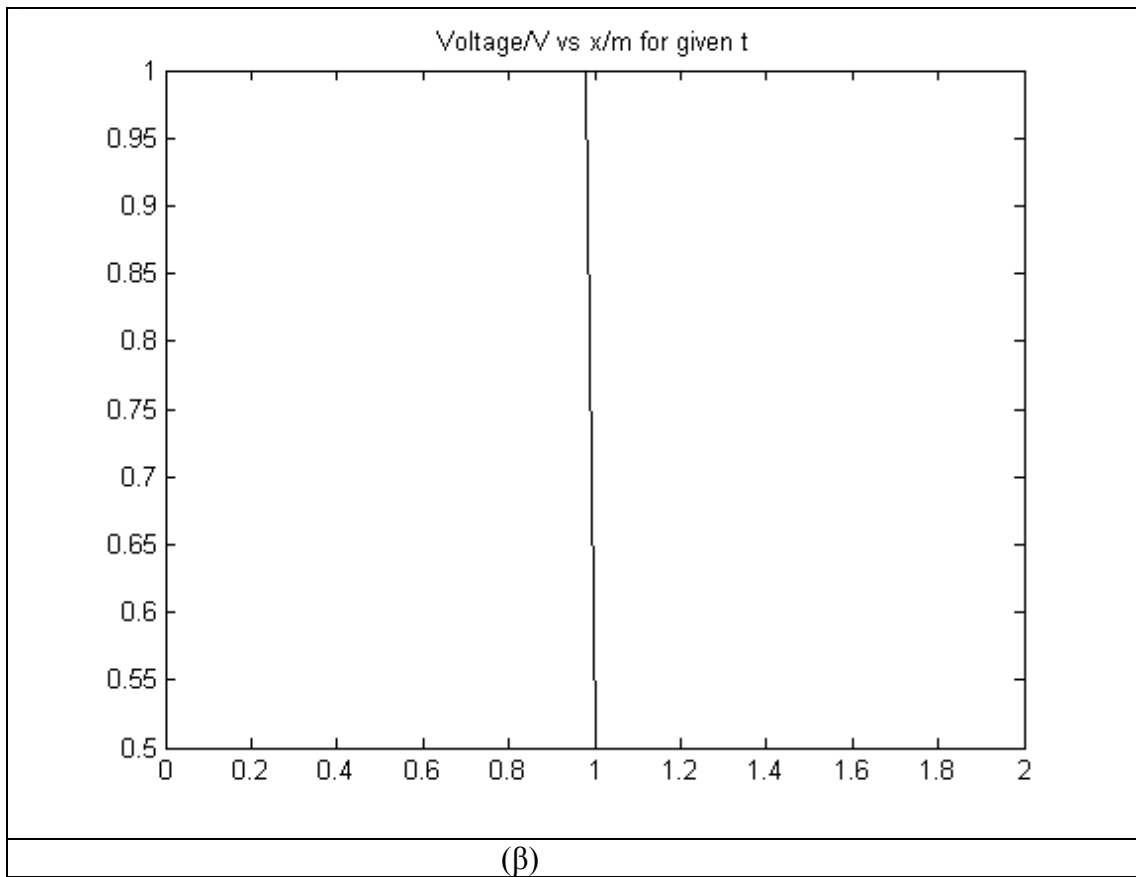
Η τελευταία περίπτωση είναι πολύ σημαντική διότι δείχνει ότι καθ' όλη τη διάρκεια της εκφόρτισης της γραμμής η τάση στο τέρμα,  $z = l$ , μένει σταθερή. Η γραμμή

εκφορτίζεται σε χρόνο  $t_d = \frac{2l}{c} = 2T_0$ . Μετά από αυτό το χρόνο η τάση παντού στη

γραμμή είναι μηδέν. Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι διαδικασίες αυτές είναι σε συμφωνία με το ισοζύγιο ενεργειών όπου πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι μέρος της αρχικής ηλεκτροστατικής ενέργειας μετατρέπεται σε μαγνητική ενέργεια όταν αρχίζει και διέρχεται ρεύμα από τη διάταξη.

Η τελευταία διαδικασία (όπου  $R_t = R_0$ ) είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις που χρειάζεται να εφαρμοστεί σε κάποια διάταξη (όπως laser, ανιχνευτές σωματιδίων και ακτινοβολιών κλπ) τάση απότομα και να παραμένει σταθερή για κάποιο χρονικό διάστημα. Αν χρησιμοποιηθεί εκφόρτιση πυκνωτή τότε θα υπάρχει μείωση τάσης εκθετική με το χρόνο.





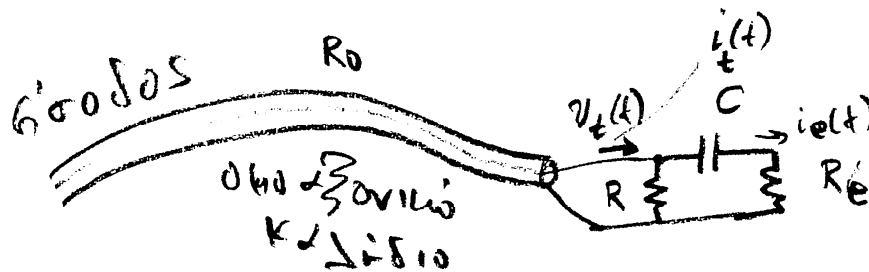
Σχήμα 8.2

Μπορεί εύκολα να δείχτεί ότι, στη γενική περίπτωση όπου επιτρέπονται γενικώς άπειρες ανακλάσεις, οι σχέσεις είναι,

$$\begin{aligned}
 v(z,t) &= \frac{R_0}{R_t + R_0} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_t^r \{ e^{-\alpha[l(2r+1)-z]} \theta(t - [l(2r+1) - z]/c) \\
 &+ e^{-\alpha[l(2r+1)+z]} \theta(t - [l(2r+1) + z]/c) \} \\
 i(z,t) &= \frac{1}{R_t + R_0} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_t^r \{ e^{-\alpha[l(2r+1)-z]} \theta(t - [l(2r+1) - z]/c) \\
 &- e^{-\alpha[l(2r+1)+z]} \theta(t - [l(2r+1) + z]/c) \}
 \end{aligned}
 \tag{8.9}$$

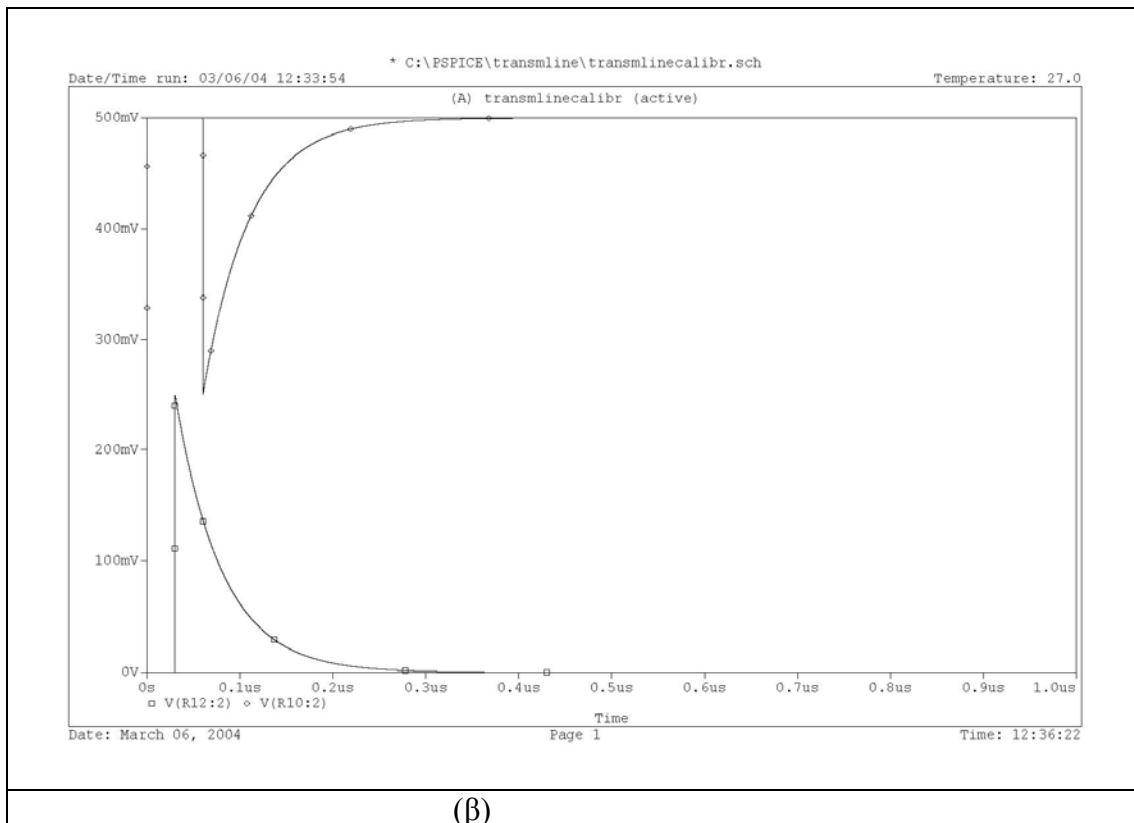
### 9. ΚΥΚΛΩΜΑ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ

Ας θεωρήσουμε τη διάταξη του Σχήματος 9.1. Στην είσοδο του ομοαξονικού καλωδίου εφαρμόζεται βηματική τάση ύψους  $V_a$ . Το ομοαξονικό καλώδιο δεν έχει απώλειες και η χαρακτηριστική αντίστασή του είναι ωμική  $R_0$ . Θα γίνει ανάλυση της συμπεριφοράς της διάταξης.



(α)





(β)

Σχήμα 9.1

Θα θεωρήσουμε ότι γίνεται ανάκλαση μόνο μια φορά στο τέρμα του καλωδίου. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι η θέση  $z = 0$  είναι στο τέρμα του καλωδίου και εξετάζουμε τι γίνεται μόνο σε αυτή τη θέση αφού δεν χρειάζεται να γράψουμε τις σχέσεις για τη διάδοση στο καλώδιο. Ο θετικός άξονας είναι από το τέρμα προς το φόρτο καλωδίου, παρόλο που και αυτό δεν έχει πολύ σημασία για τη συγκεκριμένη ανάλυσή μας. Η ολική εμπέδηση του δικτυώματος στο τέρμα του ομοαξονικού καλωδίου είναι

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_e + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{R} + \frac{sC}{sR_eC + 1} \quad \text{έστω } v_i(t) \text{ η τάση στο τέρμα της γραμμής που}$$

οφείλεται μόνο στο οδεύον προς το τέρμα σήμα. Προφανώς μπορούμε να γράψουμε  $v_i(t) = V_a \theta(t)$ . Έστω  $v_r(t)$  το ανακλώμενο σήμα, προφανώς  $V_i(s) = V_f(s)$ . Έχουμε κατά τα γνωστά

$$\frac{V_r(s)}{V_i(s)} = \frac{V_r(s)}{V_f(s)} = A_t = \frac{Z(s) - R_0}{Z(s) + R_0} \quad (9.1)$$

Για την (ολική) τάση στο τέρμα του καλωδίου ισχύει

$$V_t(s) = V_i(s) + V_r(s)$$

άρα 
$$V_t(s) = V_i(s) \frac{2Z(s)}{Z(s) + R_0} \quad (9.2)$$

Ισχύουν  $I_-(s) = I_+(s)$ ,  $I_i(s) = I_-(s)$ ,  $I_+(s) = \frac{V_+(s)}{R_0}$ ,  $I_-(s) = -\frac{V_-(s)}{R_0}$  και

$$I_t(s) = I_-(s) + I_i(s) = \frac{V_t(s)}{Z(s)} = \frac{2V_i(s)}{Z(s) + R_0} \quad (9.3)$$

Για το ρεύμα  $i_e(t)$  ( $I_e(s)$ ) που εισέρχεται στην  $R_e$  έχουμε

$$I_e(s) = I_t(s) - \frac{V_t(s)}{R} = \frac{2V_i(s)}{Z(s) + R_0} - \frac{V_+(s)}{R} = \frac{2Z(s)}{Z(s) + R_0}$$

Προφανώς  $V_i(s) = \frac{V_a}{s}$  άρα βρίσκουμε τελικώς

$$I_e(s) = \frac{2V_a R}{(RR_e + R_e R_0 + RR_0)} \frac{1}{s + \alpha} \quad (9.4)$$

$$\alpha = \frac{R + R_0}{C(RR_e + R_e R_0 + RR_0)}$$

επομένως

$$i_e(t) = \frac{2V_a R}{RR_e + R_e R_0 + RR_0} e^{-\alpha t} \quad (9.5)$$

Η σταθερά χρόνου  $\frac{1}{\alpha} = \frac{C(RR_e + R_e R_0 + RR_0)}{R + R_0}$  αυξάνεται με την  $R_e$ , αυτό σημαίνει

ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να περάσει από την  $R_e$  δεδομένο ποσοστό του συνολικού φορτίου είναι μεγαλύτερος όσο μεγαλύτερη είναι η  $R_e$ .

Το συνολικό φορτίο δια της  $R_e$  είναι

$$Q = \int_0^{\infty} i_e(t) dt = \frac{2V_a R}{RR_e + R_e R_0 + RR_0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt$$

$$\text{άρα } Q = \frac{2V_a RC}{R + R_0} \quad (9.6)$$

$$v_e(t) = i_e(t) R_e = \frac{2V_a RR_e}{RR_e + R_e R_0 + RR_0} e^{-\alpha t} \quad (9.7)$$

Αν  $R = R_e$

$$\text{τότε } Q = V_a C \quad (9.8).$$

Πρέπει να τονιστεί ότι εφόσον υπάρχει ο πυκνωτής  $C$  δεν είναι δυνατό να έχουμε τερματισμό του καλωδίου στη χαρακτηριστική του η οποία είναι ωμική. Πάντα έχουμε ανακλώμενο σήμα τάσης που ισούται με

$$V_-(s) = \frac{V_a}{s} \frac{Z(s) - R_0}{Z(s) + R_0} \quad (9.9)$$

Προφανώς αυτή η παράσταση δεν μπορεί να γίνει ποτέ μηδέν διότι ο αριθμητής είναι πάντα διάφορος του μηδενός αφού το  $Z(s)$  δεν είναι πραγματικό αφού υπάρχει χωρητικότητα. Το ανωτέρω απλό κύκλωμα με  $R = R_0$  χρησιμοποιείται για βαθμονόμηση διατάξεων όταν χρειάζεται να ξέρομε το συνολικό φορτίο που παρέχουμε στη διάταξη. Χρειάζεται να ξέρομε με ακρίβεια το  $C$  και το ύψος της βηματικής τάσης  $V_a$ . Παρόλο που υπάρχει ανάκλαση, το φορτίο δια μέσου της διάταξης (με αντίσταση  $R_e$ ) είναι ίσο με το φορτίο πυκνωτή  $C$  φορτισμένου σε τάση  $V_a$  ο οποίος εκφορτίζεται εξολοκλήρου μέσα στην αντίσταση  $R_e$ .

## 10. ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Όταν η διέγερση της γραμμής μεταφοράς γίνεται από πηγή με τάση ή ρεύμα αρμονικά με το χρόνο, τότε εργαζόμαστε συνήθως με φάσορες και η απόκριση της γραμμής είναι αρμονική με το χρόνο. Για το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων (1.3) και (1.4) αναζητούμε λύσεις της μορφής,  $v(z, t) = V e^{\pm \gamma z} e^{j\omega t}$ ,  $i(z, t) = I e^{\pm \gamma z} e^{j\omega t}$ , οπότε αντικαθιστώντας στις ανωτέρω εξισώσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - \gamma^2 v(z, t) &= 0 \\ \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - \gamma^2 i(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= (R_l + j\omega L_l)(G_l + j\omega C_l) \\ \gamma(\omega) &= \alpha(\omega) + jk(\omega) \end{aligned}$$

Όπου  $k(\omega) \geq 0$  ο συντελεστής φάσης και  $\alpha(\omega) > 0$  ο συντελεστής εξασθένησης. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha(\omega)^2 &= \frac{1}{2} \left[ (R_l G_l - \omega^2 L_l C_l) + \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)} \right] \\ k(\omega)^2 &= \frac{1}{2} \left[ -(R_l G_l - \omega^2 L_l C_l) + \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)} \right] \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$c = c(\omega) = \omega / k(\omega)$$

Η φασική ταχύτητα, για κυκλική συχνότητα  $\omega$ , εξαρτάται γενικώς από τη συχνότητα κατά τρόπο που εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά της γραμμής και δεν είναι ίση με την ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο διηλεκτρικό υλικό της γραμμής μεταφοράς.

Όταν ο συντελεστής απόσβεσης είναι ανεξάρτητος της συχνότητας τότε, προφανώς, όλες οι συχνότητες που συνιστούν κάποια κυματομορφή υφίστανται την ίδια απόσβεση. Όταν ο συντελεστής φάσης είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας τότε είναι ευνόητο ότι η ταχύτητα διάδοσης (φάσης) είναι ανεξάρτητη της συχνότητας. Αν ισχύουν και οι δυο αυτές προϋποθέσεις μαζί τότε έχουμε διάδοση χωρίς παραμόρφωση (μπορεί όμως να υπάρχει μείωση σήματος). Στην ειδική περίπτωση που ο συντελεστής απόσβεσης να είναι μηδέν τότε έχουμε διάδοση χωρίς μείωση.

Από τις σχέσεις (10.2) μπορεί ναδειχτεί ότι στην ανωτέρω περίπτωση πρέπει να ισχύει,

$$L_l G_l = R_l C_l \quad (10.3)$$

Αυτή είναι η συνθήκη του Heaviside. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \alpha(\omega) + jk(\omega) \\ Z_0 = R_0 &= \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \sqrt{\frac{R_l}{G_l}} \\ \alpha(\omega) &= \alpha = R_l \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} = \frac{R_l}{R_0} \\ k(\omega) &= \omega \sqrt{L_l C_l} = \omega / c \end{aligned} \quad (10.4)$$

Στην ειδική περίπτωση που  $G_l = 0$ ,  $R_l = 0$ ,  $C_l \neq 0$ ,  $L_l \neq 0$ , πάλι ισχύει η (10.3), και έχουμε

$$\alpha = 0, \quad k(\omega) = \omega / c.$$

Η γενική λύση είναι  $v(z, t) = v_+ e^{-\gamma z} e^{j\omega t} + v_- e^{+\gamma z} e^{j\omega t}$ .

Για σχετικά μικρές απώλειες, έχουμε  $\frac{R_l}{\omega L_l} \ll 1$ ,  $\frac{G_l}{\omega C_l} \ll 1$ , οπότε ισχύουν οι προσεγγίσεις

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{1}{2} \left( R_l \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} + G_l \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \right) \\ k &\approx \omega \sqrt{L_l C_l} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε διάδοση με ταχύτητα σχεδόν όπως και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες ή ισχύει η συνθήκη του Heaviside,

$$c \approx \frac{\omega}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$$

και η εξασθένηση είναι πρακτικώς ανεξάρτητη της συχνότητας.

Προφανώς στις ανωτέρω περιπτώσεις όπου υπάρχει εξασθένηση ανεξάρτητη της συχνότητας και ο συντελεστής φάσης είναι ανάλογος της συχνότητας ισχύει, στο πεδίο των μιγαδικών συχνοτήτων  $s$ , η σχέση  $\gamma(s) = \alpha + s / c$ .

Για ομοαξονικά καλώδια αυτή η περιοχή υψηλών συχνοτήτων αρχίζει περίπου σε  $\omega \approx 100$  kHz. Για συνήθεις παλμούς από πειράματα με ανιχνευτές σωματιδίων και ακτινοβολιών, αυτή είναι περίπου η ελάχιστη συχνότητα της περιοχής συχνοτήτων

των σημάτων που μας ενδιαφέρουν και για αυτό είναι πολλές φορές χρήσιμη η ανωτέρω προσέγγιση.

Όμως από αυτή περίπου τη συχνότητα και πάνω αρχίζει να εμφανίζεται και το επιδερμικό φαινόμενο το οποίο εισάγει εξάρτηση από τη συχνότητα. Εδώ αναφερόμαστε στο κανονικό επιδερμικό φαινόμενο, το ανώμαλο επιδερμικό φαινόμενο εμφανίζεται σε πάρα πολύ υψηλές συχνότητες που είναι πολύ έξω από τα όρια που μας ενδιαφέρουν.

Για μια μοναδική συχνότητα, η εξάρτηση της ωμικής αντίστασης ανά μονάδα μήκους από τη συχνότητα, για σχετικά ψηλές συχνότητες στις οποίες κυριαρχεί το επιδερμικό φαινόμενο, δίνεται, για ομοαξονικά καλώδια, από τη γνωστή σχέση από τον ηλεκτρομαγνητισμό,

$$R_{skl}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu_r\mu_0}{2\sigma}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (10.6)$$

Ένεκα του επιδερμικού φαινομένου η αυτεπαγωγή επίσης, εξαρτάται από τη συχνότητα αλλά όπως προαναφέραμε για ψηλές συχνότητες αυτή η εξάρτηση γίνεται αμελητέα.

Πρέπει να πούμε ότι σε υψηλές συχνότητες επηρεάζεται επίσης και το  $C_l$  διότι η επιτρεπτότητα (διηλεκτρική συνάρτηση, διηλεκτρική «σταθερά») εξαρτάται από τη συχνότητα αλλά για τις συνήθεις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι πρακτικώς σταθερή και δε θα ασχοληθούμε εδώ με αυτό το θέμα.

Επίσης η αγωγιμότητα ένεκα διαρροής  $G_l$  γενικώς εξαρτάται από τη συχνότητα.

Τα σχετικά με τη σύνθετη αγωγιμότητα, που σύμφωνα με το Σχήμα 1.1 είναι,

$$Y_l = G_l + \frac{1}{sC_l} \text{ σχετίζονται με τη διηλεκτρική επιτρεπτότητα (διηλεκτρική σταθερά) η}$$

οποία γενικώς είναι μιγαδική στην περιγραφή με φάσορες, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν απώλειες διηλεκτρικού. Σε πολλές εφαρμογές οι απώλειες ένεκα του  $G_l$  είναι αμελητέες, οπότε τότε έχουμε  $G_l = 0$ . Για να επιτευχθεί αυτό πολλές φορές σε καλώδια για πολύ ψηλές συχνότητες, χρησιμοποιούνται πολύ καλής ποιότητας διηλεκτρικό ή φτιάχνονται τα καλώδια έτσι που να υπάρχει κυρίως αέρας ως διηλεκτρικό και το στερεό διηλεκτρικό να είναι απλώς για στήριγμα του κεντρικού αγωγού. Για τη μαγνητική σταθερά έχουμε  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ . Για χαλκό (που έχει αγωγιμότητα  $\sigma \approx 5,81 \times 10^7 \text{ siemens (S)}$ ) και  $\mu_r \approx 1$ , έχουμε την εμπειρική σχέση

$$R_{skl}(f) = 4,17 \times 10^{-8} \sqrt{f} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (10.7)$$

όπου το  $f$  είναι σε Hz, τα  $a, b$  σε μέτρα και το  $R_l$  σε  $\Omega/\text{m}$ . Για καλώδιο τύπου RG-58C/U με  $b = 0,25 \text{ cm}$  βρίσκουμε ότι το  $R_l$  είναι  $2,4 \times 10^{-2} \Omega/\text{m}$  για

$$f = 100 \text{ kHz} \text{ και } 2,4 \Omega/\text{m} \text{ για } f = 1 \text{ GHz}. \text{ Έχουμε διαλέξει } \frac{b}{a} \approx 3,6 \text{ διότι τότε, όπως}$$

προαναφέραμε, έχουμε ελάχιστο στην εξασθένηση ένεκα επιδερμικού φαινομένου.

Σε ακόμη μεγαλύτερες συχνότητες έχουμε εξάρτηση του  $G_l$  (ρεύμα διαρροής) από τη συχνότητα ένεκα απωλειών διηλεκτρικού. Για πολυαιθυλένιο και τεφλόν που είναι διηλεκτρικά που χρησιμοποιούνται σε ομοαξονικά καλώδια, αυτή η εξάρτηση είναι μικρή μέχρι μερικές εκατοντάδες MHz. Επειδή όμως η εξάρτηση διαρροής

αυξάνεται γραμμικά με το  $\omega$ , κυριαρχεί σε σχέση με το επιδερμικό φαινόμενο γύρω και πάνω από 1 GHz.

Η εξάρτηση της εξασθένησης από τη συχνότητα, αν ληφθούν υπόψη και τα δυο παραπάνω φαινόμενα, είναι της μορφής  $\alpha(f) = a\sqrt{f} + bf$ . Στο Σχήμα 10.1α φαίνεται αυτή η εξάρτηση του συντελεστή εξασθένησης για διάφορα ομοαξονικά καλώδια όπου ο συντελεστής συμβολίζεται με  $A_0(f)$ .

Στο Σχήμα 10.1β δίνονται διάφορα χαρακτηριστικά καλωδίων.

Για καλώδια με απώλειες η χαρακτηριστική αντίσταση, χωρίς το επιδερμικό φαινόμενο, είναι

$$Z_0(j\omega) = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} \quad (10.8)$$

Για  $G_l = 0$ ,  $R_l \ll 2\omega L_l$  έχουμε

$$Z_0(j\omega) = \sqrt{\frac{L_l}{C_l} \left(1 + \frac{R_l}{j\omega L_l}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{L_l}{C_l} \left(1 + \frac{R_l}{2j\omega L_l}\right)} \quad (10.9)$$

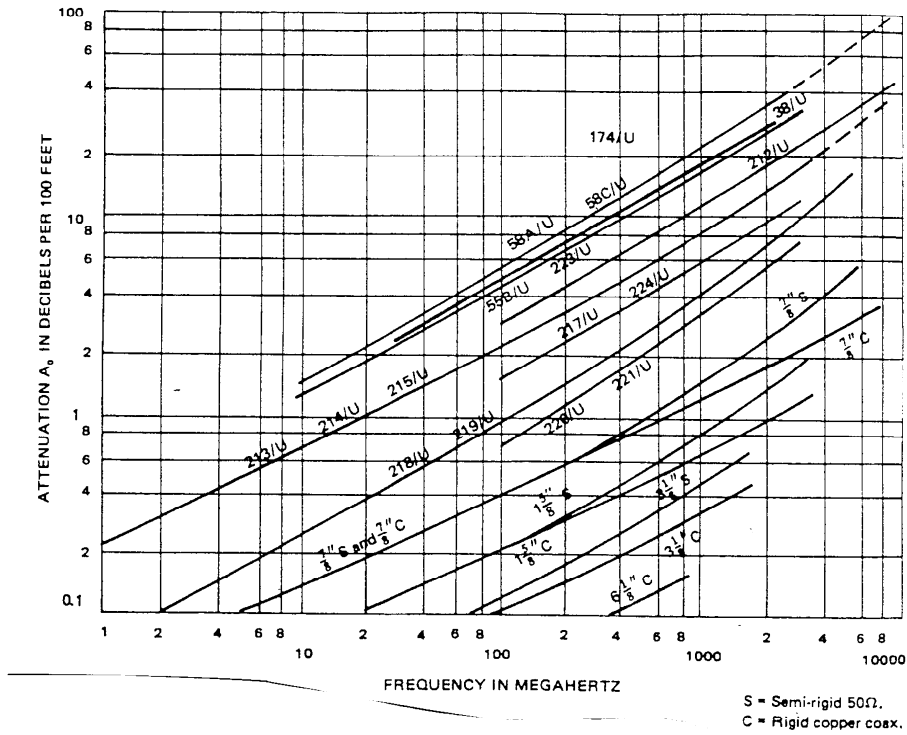
Όταν το επιδερμικό φαινόμενο είναι αμελητέο τότε τα διάφορα μεγέθη είναι

ανεξάρτητα της συχνότητας και αφού θέσουμε  $R' = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$ ,  $C' = 2\sqrt{\frac{L_l C_l}{R_l}}$

Μπορούμε να πούμε ότι είναι σαν να έχουμε σε σειρά αντιστάτη  $R'$  και χωρητικότητα, οπότε ισχύει για τη χαρακτηριστική αντίσταση

$$Z_0(j\omega) = R' + \frac{1}{j\omega C'} \quad (10.10).$$

### Attenuation of Cables



Properties of Coaxial Cables<sup>a</sup>

	Insulating Material	Cable Diameter (cm)	Characteristic Impedance (ohms)	Signal <sup>b</sup> Propagation	HV Rating	Cable Capacitance (pF/m)	Signal Attenuation per Meter	
							MHz	dB
RG-8/U	Polyethylene	1.03	52	0.659	5000	96.8	100	0.066
							400	0.154
RG-11/U	Polyethylene	1.03	75	0.659	5000	67.3	100	0.066
							400	0.138
RG-58/U	Polyethylene	0.50	53.5	0.659	1900	93.5	100	0.135
							400	0.312
RG-58C/U	Polyethylene	0.50	50	0.659	1900	100.1	100	0.174
							400	0.413
RG-59/U	Polyethylene	0.61	73	0.659	2300	68.9	100	0.112
							400	0.233
RG-62/U	Semisolid polyethylene	0.61	93	0.840	750	44.3	100	0.102
							400	0.207
RG-174/U	Polyethylene	0.25	50	0.659	1500	101.0	100	0.289
							400	0.656
RG-178/U	TFE teflon	0.18	50	0.694	1500	95.1	400	0.951
Double Shielded Coaxial Cables								
RG-9/U	Polyethylene	1.07	51	0.659	5000	98.4	100	0.062
							400	0.135
RG-223/U	Polyethylene	0.52	50	0.659	1900	101.0	100	0.157
							400	0.328

<sup>a</sup>Data derived in part from Coaxial Cable Catalog, Belden Corporation, Richmond, IN.

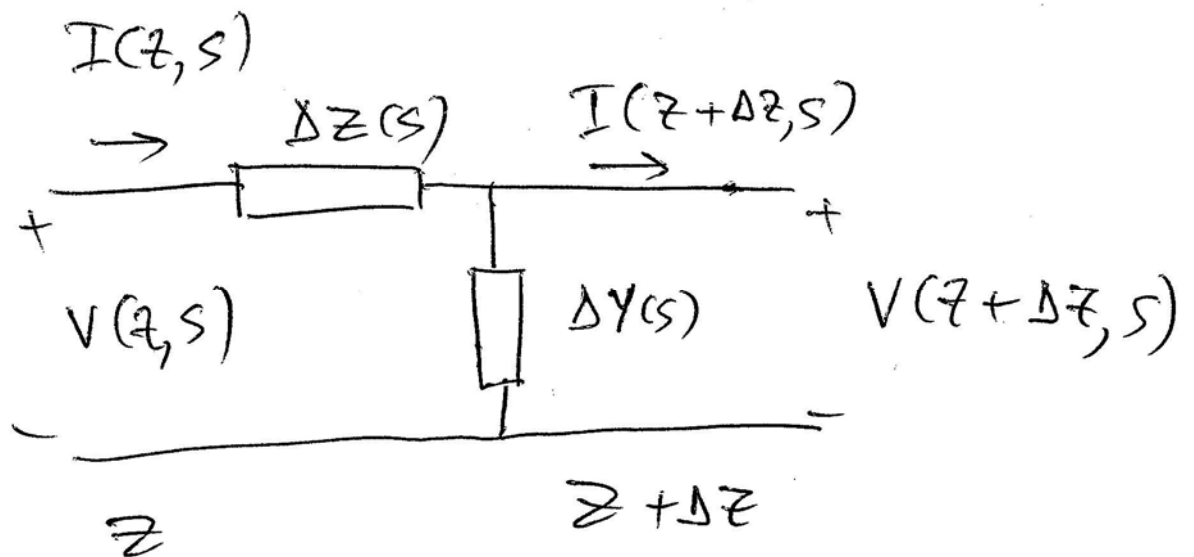
<sup>b</sup>Fraction of speed of light in a vacuum ( $3.00 \times 10^8$  m/s).

Σχήμα 10.1

- Επιδερμικό φαινόμενο

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια χρήσιμη γενίκευση.

Θα θεωρήσουμε αντί του Σχήματος 1.1 το Σχήμα 10.2 για ένα μικρό κομμάτι της γραμμής μεταφοράς.



Σχήμα 10.2

Θεωρούμε ότι έχουμε στο χώρο των μιγαδικών συχνοτήτων  $s$ , το γενικό στοιχείο εμπέδησης  $\Delta Z(s)$  σε σειρά στη γραμμή και το γενικό στοιχείο σύνθετης αγωγιμότητας  $\Delta Y(s)$  παράλληλα στη γραμμή. Δεχόμαστε ότι αυτά τα στοιχειώδη στοιχεία κυκλωμάτων είναι χωρίς αρχική ενέργεια και ότι ισχύουν οι γνωστές γραμμικές σχέσεις στο χώρο των μιγαδικών συχνοτήτων μεταξύ τάσης και ρεύματος αυτών των στοιχείων. Έτσι από τους νόμους του Kirchhoff βρίσκουμε

$$\begin{aligned} -V(z, s) + I(z, s)\Delta Z(s) + V(z + \Delta z, s) &= 0 \\ -I(z, s) + I(z + \Delta z, s) + \Delta Y(s)V(z + \Delta z, s) &= 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$

Προφανώς

$$\begin{aligned} V(z + \Delta z, s) &\approx V(z, s) + \frac{dV(z, s)}{dz} \Delta z \\ I(z + \Delta z, s) &\approx I(z, s) + \frac{dI(z, s)}{dz} \Delta z \end{aligned} \quad (10.12)$$



Από τις Σχέσεις 10.11 και 10.12 βρίσκουμε για  $\Delta z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{dV(z,s)}{dz} + I(z,s)Z_l(s) &= 0 \\ \frac{dI(z,s)}{dz} + V(z,s)Y_l(s) &= 0 \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$Z_l(s) = \frac{dZ(s)}{dz}, \quad Y_l(s) = \frac{dY(s)}{dz}$$

Με απαλειφή καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(z,s)}{dz^2} - \gamma^2 V(z,s) &= 0 \\ \frac{d^2I(z,s)}{dz^2} - \gamma^2 I(z,s) &= 0 \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$\gamma^2 = Y_l(s)Z_l(s)$$

Αυτές οι σχέσεις είναι ευνόητο ότι καταλήγουν στις Σχέσεις 2.1 και 2.2, αν θέσουμε αρχικές συνθήκες μηδέν και  $Z_l(s) = R_l + sL_l$ ,  $Y_l(s) = G_l + sC_l$ .

Οι Σχέσεις 10.13 και 10.14 είναι πιο γενικές με την έννοια ότι δεν μπήκε περιορισμός στη μορφή των χαρακτηριστικών στοιχείων κυκλώματος της γραμμής. Έτσι μπορεί να καλυφθούν περιπτώσεις εξάρτησης από τη συχνότητα πράγμα που δεν είναι σαφές πως γίνεται αν χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη ανάλυση.

Από την Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία είναι γνωστό ότι όταν κυριαρχεί το επιδερμικό φαινόμενο εμφανίζεται αύξηση της ωμικής αντίστασης του μετάλλου.

Ακριβέστερα, αποτέλεσμα του επιδερμικού φαινομένου είναι να εμφανίζεται πεδιακή εμπέδηση σε παχύ, ως προς το επιδερμικό βάθος, αγωγό. Έστω ότι το εύρος του αγωγού, στην κάθετη διεύθυνση,  $y$ , ως προς τη διεύθυνση διάδοσης,  $z$ , είναι  $w$  και η διάδοση είναι παράλληλη προς την επιφάνεια του αγωγού. Τότε η πεδιακή εμπέδηση είναι

$$Z_{\text{fskl}}(j\omega) = \frac{E_x}{H_y} = \frac{1+j}{w} \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu_r}{2\sigma}} \quad (10.15)$$

Αυτή η εμπέδηση είναι ανά μονάδα μήκους στη διεύθυνση της διάδοσης.

$$\text{Έχουμε (αφού ισχύει ότι } 1+j=\sqrt{2}j) \text{ ότι, } Z_{\text{field}}(j\omega) = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{j\omega\mu_0\mu_r}{\sigma}}$$

Προφανώς αυτό σημαίνει ότι ( $j\omega \Rightarrow s$ )

$$Z_{\text{fskl}}(s) = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\sigma}} \sqrt{s} \quad (10.16)$$

Προφανώς αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού και το νόμο του Ampere ο οποίος ισχύει με καλή προσέγγιση στις περιπτώσεις των γραμμών μεταφοράς, έχουμε

$$\Delta V = E_x \Delta z, H_y = I_w w$$

$$Z_{fskl}(j\omega) = \frac{E_x \Delta z}{H_y \Delta z} = \frac{\Delta V}{I_w w \Delta z} = \frac{Z_{sk}}{\Delta z} = Z_{skl} \quad (10.17)$$

όπου,  $\Delta V$  είναι η πτώση τάσης στο μικρό τμήμα του αγωγού  $\Delta z$ , κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης,  $z$ ,  $I_w$  είναι το ρεύμα ανά μονάδα μήκους στη διεύθυνση,  $y$ , οπότε το ρεύμα για εύρος  $w$ , είναι  $I_w w$  (κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης,  $z$ ).

$Z_{sk}$  είναι η εμπέδηση για αγωγό μήκους  $\Delta x$  και  $Z_{skl}$  είναι η εμπέδηση ανά μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση  $z$ . Άρα αν έχουμε δυο αγωγούς που σχηματίζουν γραμμική μεταφοράς (π.χ. ομοαξονικό καλώδιο) και για τη διάδοση TEM που μας ενδιαφέρει, η εμπέδηση της γραμμής ανά μονάδα μήκους, ένεκα επιδερμικού φαινομένου, για τον καθένα αγωγό της συμπίπτει με την εμπέδηση ανά μονάδα μήκους του πεδίου,  $Z_{skl} = Z_{fskl}$ . Για κυκλικό ομοαξονικό καλώδιο προφανώς αφού υπάρχουν δυο αγωγοί και οι εμπεδήσεις προστίθενται, έχουμε για τη συνολική εμπέδηση (ανά μονάδα μήκους), η οποία συμπεριλαμβάνει και την εμπέδηση από τη συνήθη αυτεπαγωγή,  $sL_l$ ,

$$Z_l(s) = Z_{skl}(s) + sL_l = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\sigma}} \sqrt{s} + sL_l \quad (10.18)$$

Η συνήθης αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους σχετίζεται με την αλληλεπίδραση όλων των διαφόρων τμημάτων των αγωγών και εξαρτάται από το σχήμα της όλης διάταξής τους σε αντίθεση με την εμπέδηση ανά μονάδα μήκους που λαμβάνει υπόψη μόνο το επιδερμικό φαινόμενο η οποία είναι κατά κάποιο τρόπο τοπικό φαινόμενο και εξαρτάται από το σχήμα των αγωγών στο συγκεκριμένο σημείο. Πρέπει να τονίσουμε ότι η έννοια της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των δυο αγωγών του ομοαξονικού καλωδίου έχει νόημα μόνο για τη διάδοση TEM. Δεν μπορεί να οριστεί κατά τον γνωστό χρήσιμο τρόπο διαφορά δυναμικού στις περιπτώσεις διάδοσης TE και TM. Αν δεν υπήρχε το επιδερμικό φαινόμενο θα είχαμε στη θέση της εμπέδησης  $Z_{skl}$  μόνο το  $R_l$  που δεν εξαρτάται από την όλη διεύθυνση των αγωγών αλλά από το σχήμα τους στο συγκεκριμένο σημείο της γραμμής.

Στην περίπτωση που το επιδερμικό φαινόμενο είναι σημαντικό και αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει διαρροή οπότε  $G_l(s) = 0$ , ισχύουν προφανώς οι σχέσεις

$$Y_l(s) = sC_l$$

$$Z_l(s) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\sigma}} \sqrt{s} + sL_l \quad (10.19)$$

άρα

$$\gamma(s) = \sqrt{Z_l(s)Y_l(s)} = s\sqrt{L_l C_l} \left(1 + \frac{A_l}{L_l \sqrt{s}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.20)$$

$$A_l = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\sigma}}$$

Οι απώλειες συνήθως είναι μικρές οπότε έχουμε  $\left|\frac{A_l}{L_l \sqrt{s}}\right| \ll 1$ ,

άρα κατά προσέγγιση

$$\gamma(s) = s\sqrt{L_l C_l} + \frac{1}{2} \frac{A_l}{\sqrt{L_l / C_l}} \sqrt{s} \quad (10.21)$$

Τα  $L_l, C_l$  είναι οι γνωστές ποσότητες που ξέρομε για ομοαξονικό καλώδιο σε χαμηλές συχνότητες.

Για να πάμε στην περιγραφή με φάσορες θέτομε όπου  $s$  το  $j\omega$  οπότε έχουμε

$$\gamma(j\omega) = \gamma(\omega) = j\omega\sqrt{L_l C_l} + \frac{1}{2} \frac{A_l}{R_0} \sqrt{\frac{\omega}{2}} (1 + j) \quad (10.22)$$

$$= \alpha(\omega) + jk(\omega)$$

Επομένως ο συντελεστής εξασθένησης και η σταθερά φάσης, η οποία καθορίζει τη φασική ταχύτητα, είναι

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} \frac{A_l}{R_0} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

$$k(\omega) = \omega\sqrt{L_l C_l} + \frac{A_l}{2R_0} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \quad (10.23)$$

$$c(\omega) = \omega / k(\omega) = 1 / \left(\sqrt{L_l C_l} + \frac{A_l}{2R_0 \sqrt{2\omega}}\right)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε εξάρτηση της φασικής ταχύτητας από τη συχνότητα και επομένως υπάρχει παραμόρφωση του διαδιδόμενου σήματος.

Αν ισχύει  $\frac{A_l}{2R_0} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \ll \omega\sqrt{L_l C_l}$  (πολύ μικρές απώλειες) τότε η φασική ταχύτητα είναι

ανεξάρτητη της συχνότητας και ισχύουν

$$k(\omega) \approx \omega\sqrt{L_l C_l} = \omega / c \quad (10.24)$$

$$c = 1 / \sqrt{L_l C_l}$$

Ας υποθέσομε ότι στην είσοδο της γραμμής μήκους  $l$ , έχουμε σήμα της μορφής

$v_i(t) = V_a \theta(t)$  και ότι το  $\gamma(s)$  δίνεται από τη σχέση (10.21), τότε στο τέλος της γραμμής, η οποία υποθέτουμε ότι είναι τερματισμένη στη χαρακτηριστική της (προσαρμογή), θα έχουμε τάση της μορφής

$$V(l, s) = \frac{V_a}{s} \exp(-sl/c) \exp\left(-l \frac{\sqrt{s} A_l}{2R_0}\right) \quad (10.25)$$

Αντιστρέφουμε και βρίσκουμε

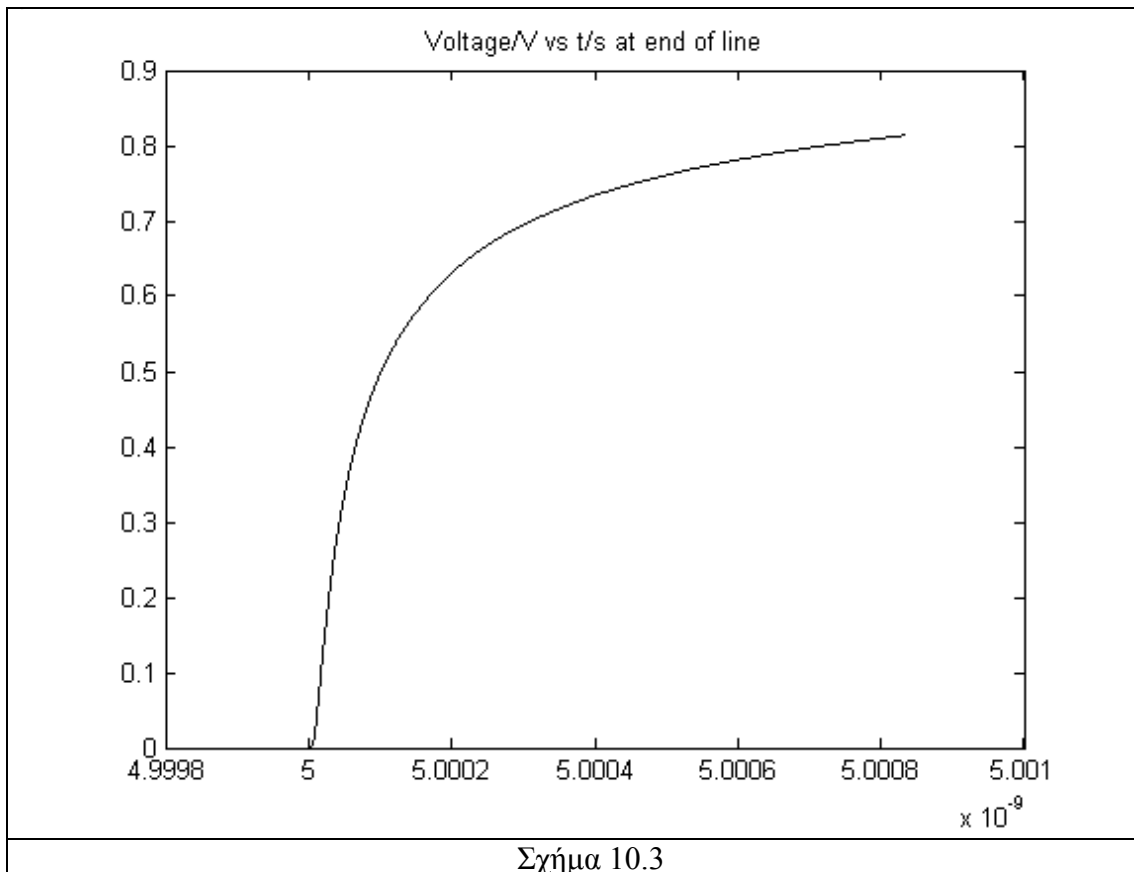
$$v_i(t) = 0 \quad t < l/c$$

$$v_i(t) = V_a \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t-l/c}{\tau_0}}}\right) \quad t \geq l/c \quad (10.26)$$

$$\tau_0 = \left(\frac{lA_l}{2}\right)^2 / R_0$$

Η συνάρτηση  $\operatorname{erfc}$  είναι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος και ορίζεται από τη σχέση  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ . Στο Σχήμα 10.3 φαίνεται η γραφική παράσταση

για την τάση  $v_i(t)$  ως προς το χρόνο όταν  $V_a = A$ . Σε αυτό το σχήμα έχουμε μετατοπίσει την αρχή του χρόνου στη στιγμή που ο παλμός φτάνει στο τέρμα.



Με χρήση του θεωρήματος συνέλιξης μπορούμε να βρούμε την απόκριση (την τάση στο τέρμα) για κάθε παλμό εισόδου στη γραμμή. Αυτό μπορεί να γίνει αν υπολογίσουμε την απόκριση (τάση στο τέλος της γραμμής) για παλμό στην είσοδο που είναι η κρουστική συνάρτηση (συνάρτηση  $\delta$ ). Προφανώς επειδή η συνάρτηση  $\delta(t)$  έχει μετασχηματισμό Laplace τη μονάδα, η απόκριση βρίσκεται από την αντιστροφή της

$$H(s) = \exp(-sl/c) \exp\left(-l \frac{\sqrt{s} A_l}{2R_0}\right) \quad (10.27)$$

αυτό οδηγεί στην

$$h(t) = 0 \quad t < l$$

$$h(t) = A_1 (t-l/c)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{A_2}{t-l/c}\right) \quad t \geq l \quad (10.28)$$

$$A_1 = \frac{lA_l}{4\sqrt{\pi}R_0}, \quad A_2 = \left(\frac{lA_l}{4R_0}\right)^2$$

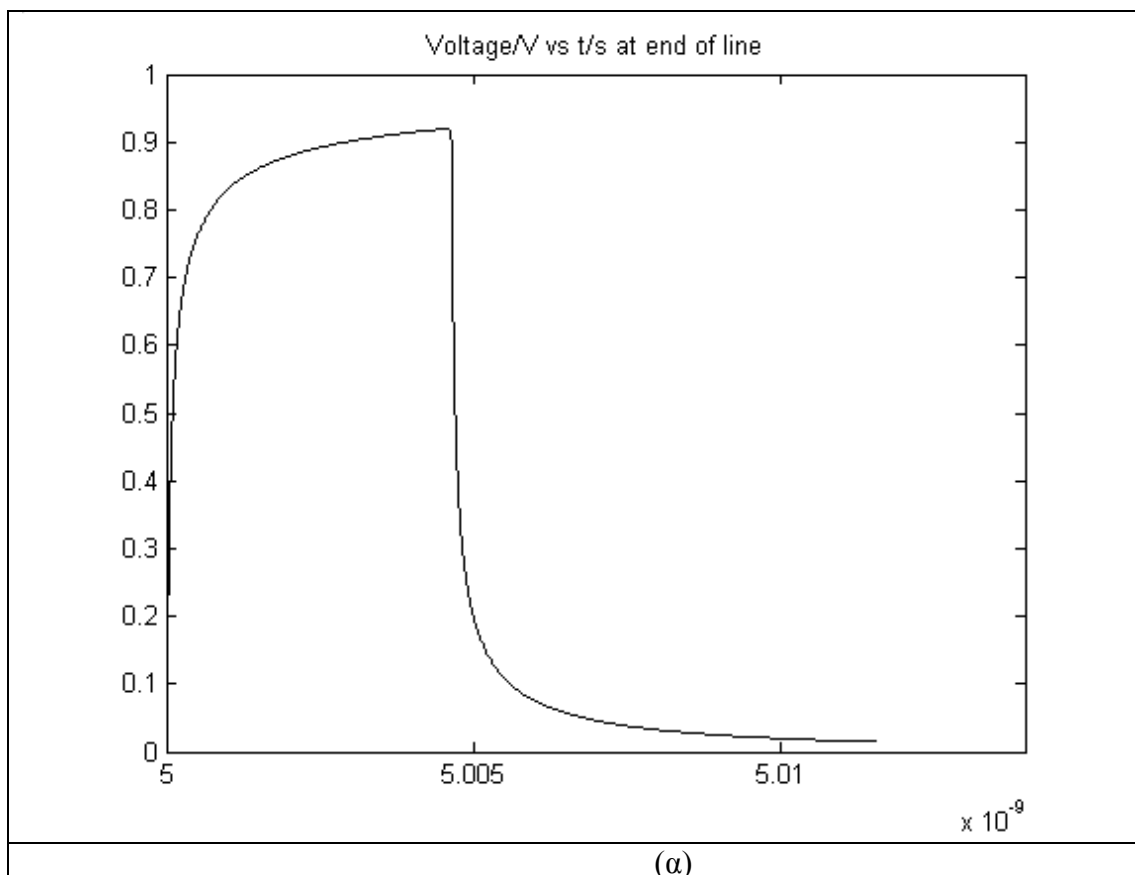
Η συνέλιξη είναι

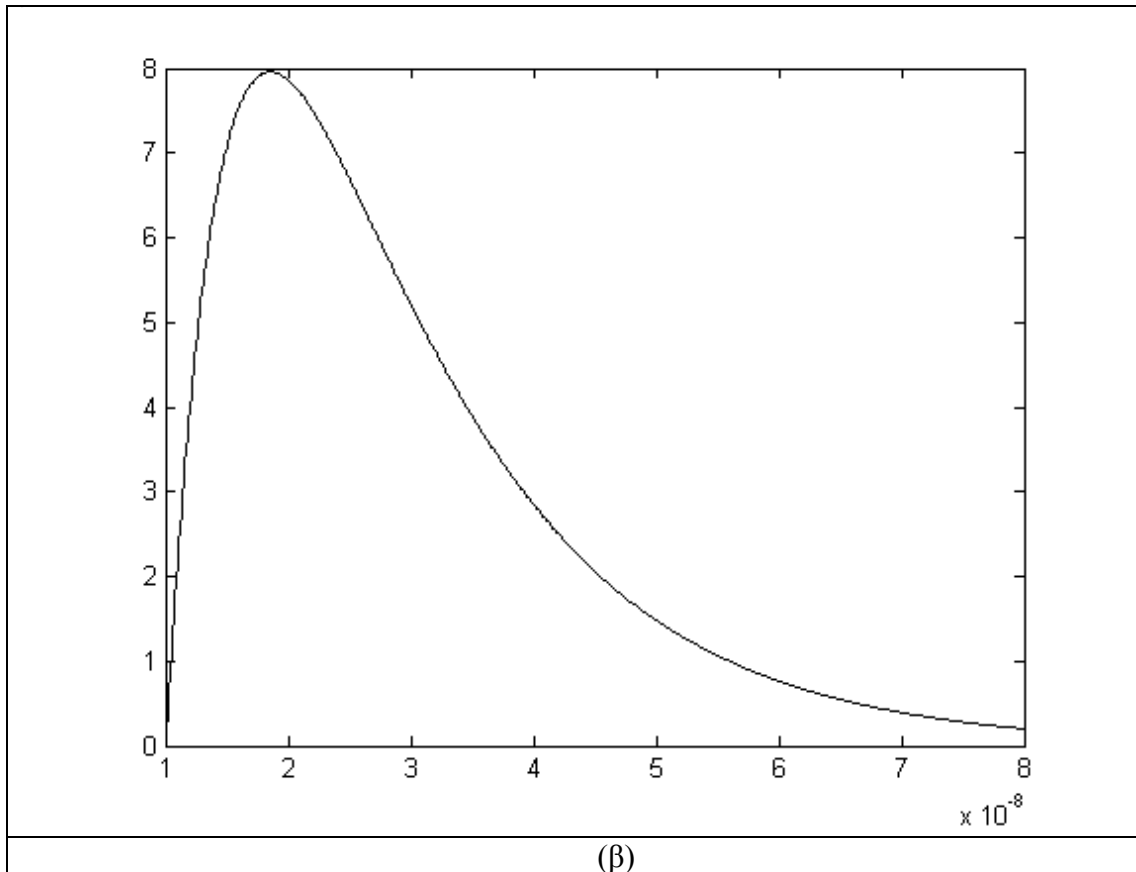
$$v_i(t) = \int_0^t v_i(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (10.29)$$

Μπορεί, φυσικά, κάποιος να χρησιμοποιήσει κατευθείαν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace αρκεί να έχει το μετασχηματισμό Laplace του σήματος εισόδου, δηλαδή την  $V_i(s)$  και να μπορεί να αντιστραφεί η προκύπτουσα συνάρτηση,  $V(l,s)$ . Ισχύει η σχέση

$$V(l,s) = V_i(s)H(s) \quad (10.30)$$

Στο Σχήμα 10.4α φαίνονται παλμοί στο τέρμα της γραμμής για ορθογώνιους παλμούς στην είσοδο, με χρονικό εύρος  $\Delta$ . Στο Σχήμα 10.4β φαίνονται αντίστοιχοι παλμοί αλλά για πιο ρεαλιστικό παλμό στην είσοδο.





Σχήμα 10.4

## 11. ΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΚΑΙ ΩΜΙΚΕΣ ΕΜΠΕΔΗΣΕΙΣ

Θα εξετάσουμε εδώ την περίπτωση όπου η τάση της πηγής διέγερσης είναι της μορφής  $v_s(t) = V_a \cos(\omega t + \varphi)$  για  $t \geq 0$  και  $v_s(t) = 0$  για  $t < 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace είναι  $V_s(s)$ . Η γραμμή έχει σταθερό συντελεστή απόσβεσης  $\alpha$  και οι διάφορες εμπεδήσεις είναι  $Z_0(s)$ ,  $Z_t(s)$ ,  $Z_s(s)$ . Η διέγερση είναι μηδέν για  $t < 0$  και γενικώς μη μηδενική για  $t \geq 0$ . Δηλαδή η διέγερση ξεκινά τη στιγμή  $t = 0$  και η γραμμή δεν έχει αρχική ενέργεια. Η ταχύτητα διάδοσης είναι  $c$ .

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εξεταστεί το πρόβλημα χορδής που διεγείρεται στο ένα της άκρο έτσι που αυτό να εκτελεί δεδομένη αρμονική κίνηση.

Μπορούμε να ακολουθήσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών ανακλάσεων ή να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις 2.35 με

$$V_s(s) = V_a \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \quad (11.1)$$

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που οι εμπεδήσεις είναι ωμικές (πραγματικές) οπότε και οι συντελεστές ανάκλασης είναι πραγματικοί,  $(R_0, R_s, R_t, \rho_s, \rho_t)$ .

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ξεκινήσουμε από τις σχέσεις (2.31) με  $\gamma = \alpha + \frac{s}{c}$  ενώ στην ουσία δεν χρειάζεται η σχέση (11.1). Καταλήγουμε στις σχέσεις

$$V(z, s) = \frac{R_0}{R_0 + R_s} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m V_s(s) (e^{-\alpha(2ml+z)} e^{-(2ml+z)s/c} + \rho_t e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} e^{-[2(m+1)l-z]s/c}) \quad (11.2)$$

$$I(z, s) = \frac{1}{R_0 + R_s} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m V_s(s) (e^{-\alpha(2ml+z)} e^{-(2ml+z)s/c} - \rho_t e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} e^{-[2(m+1)l-z]s/c})$$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού laplace (ιδιότητα μετατόπισης) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \frac{V_a R_0}{R_0 + R_s} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m [e^{-\alpha(2ml+z)} \cos(\omega(t - \frac{2ml+z}{c}) + \varphi) \theta(t - \frac{2ml+z}{c}) \\ &+ \rho_t e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} \cos(\omega(t - \frac{2(m+1)l-z}{c}) \theta(t - \frac{2(m+1)l-z}{c})] \quad (11.3) \\ i(z, t) &= \frac{V_a}{R_0 + R_s} \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_s \rho_t)^m [e^{-\alpha(2ml+z)} \cos(\omega(t - \frac{2ml+z}{c}) + \varphi) \theta(t - \frac{2ml+z}{c}) \\ &- \rho_t e^{-\alpha[2(m+1)l-z]} \cos(\omega(t - \frac{2(m+1)l-z}{c}) \theta(t - \frac{2(m+1)l-z}{c})] \end{aligned}$$

Είναι ευνόητο ότι κάθε φορά που γίνεται ανάκλαση εμφανίζεται ένας καινούργιος όρος στο άθροισμα. Στην πραγματικότητα υπάρχει κάθε φορά μια μέγιστη τιμή για τον τρέχοντα δείκτη  $m$  και σίγουρα όλοι οι όροι με μεγαλύτερο  $m$  είναι μηδέν. Ακριβέστερα, πρέπει να τονίσουμε ότι μόνο ο όρος που αντιστοιχεί στην τελευταία ανάκλαση χρειάζεται να έχει τη σχετική συνάρτηση  $\theta(t - \dots)$  ενώ οι προηγούμενοι έχουν συναρτήσεις  $\theta(t - \dots)$  που είναι ίσες με τη μονάδα ενώ οι επόμενοι όροι έχουν συναρτήσεις  $\theta(t - \dots)$  ίσες με μηδέν.

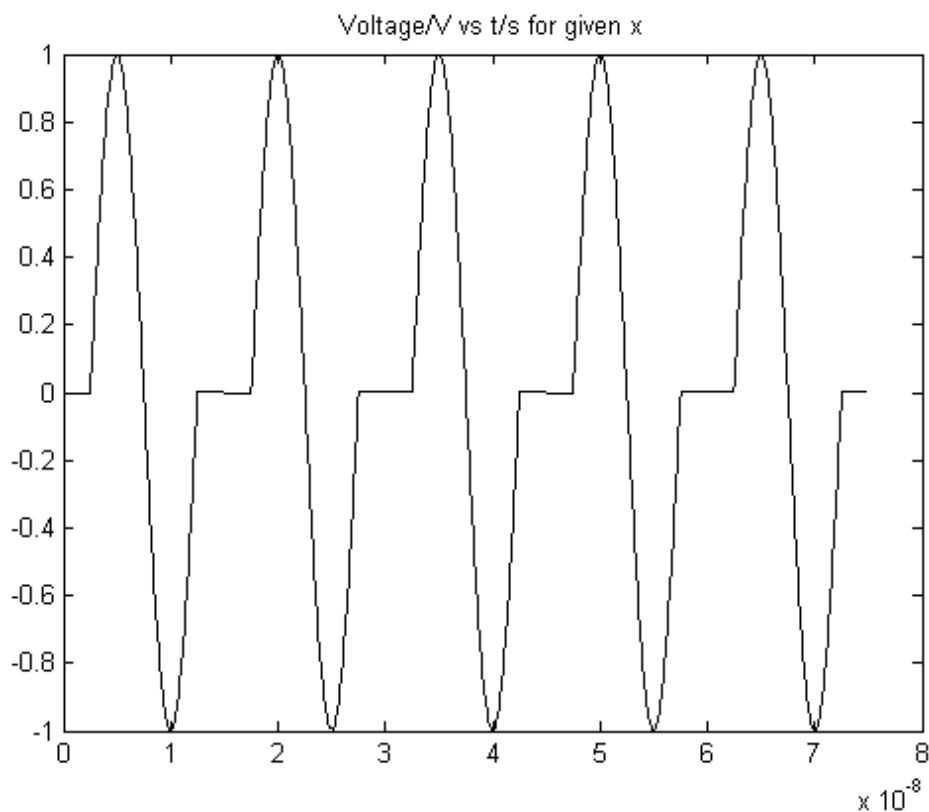
Αν δεν υπάρχει απορρόφηση (απώλεια) ενέργειας στην αρχή ή στο τέλος της γραμμής ή ένεκα απωλειών κατά μήκος της, τότε δεν αποκαθίσταται ποτέ μόνιμο φαινόμενο και οι διαδοχικοί όροι δεν τείνουν στο μηδέν καθώς γίνονται όλο και περισσότερες ανακλάσεις. Έχουμε συνεχώς οδεύοντα κύματα και οι παραπάνω σειρές δεν συγκλίνουν. Ανάλογα συμβαίνουν αν έχουμε κύκλωμα με  $L, C$  σε σειρά που τροφοδοτείται με αρμονική πηγή χωρίς (ωμική) αντίσταση. Τότε, γενικώς, έχουμε επαλληλία ρεύματος αρμονικού με το χρόνο που έχει συχνότητα την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος και ρεύματος με συχνότητα τη συχνότητα της πηγής τροφοδοσίας. Αν οι δυο συχνότητες συμπέσουν τότε το πλάτος θα αυξάνεται επ' άπειρον. Πολλές φορές ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, δίνουμε ως ρεύμα του κυκλώματος αυτό που αντιστοιχεί στο μόνιμο φαινόμενο, υποθέτοντας σιωπηρά ότι υπάρχει έστω και μικρή απόσβεση η οποία οδηγεί στο μόνιμο φαινόμενο χωρίς να επηρεάζει το ρεύμα του κυκλώματος σημαντικά. Ανάλογα γίνονται και στις γραμμές μεταφοράς.



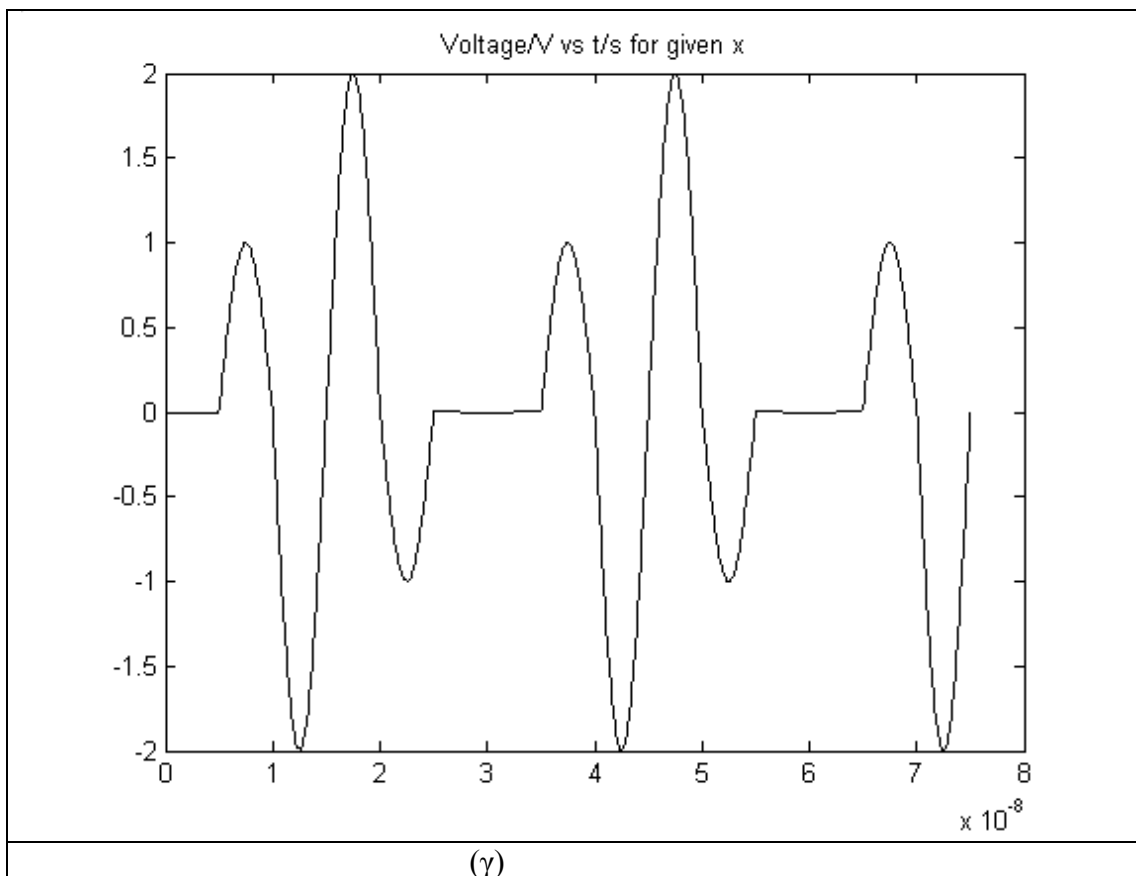
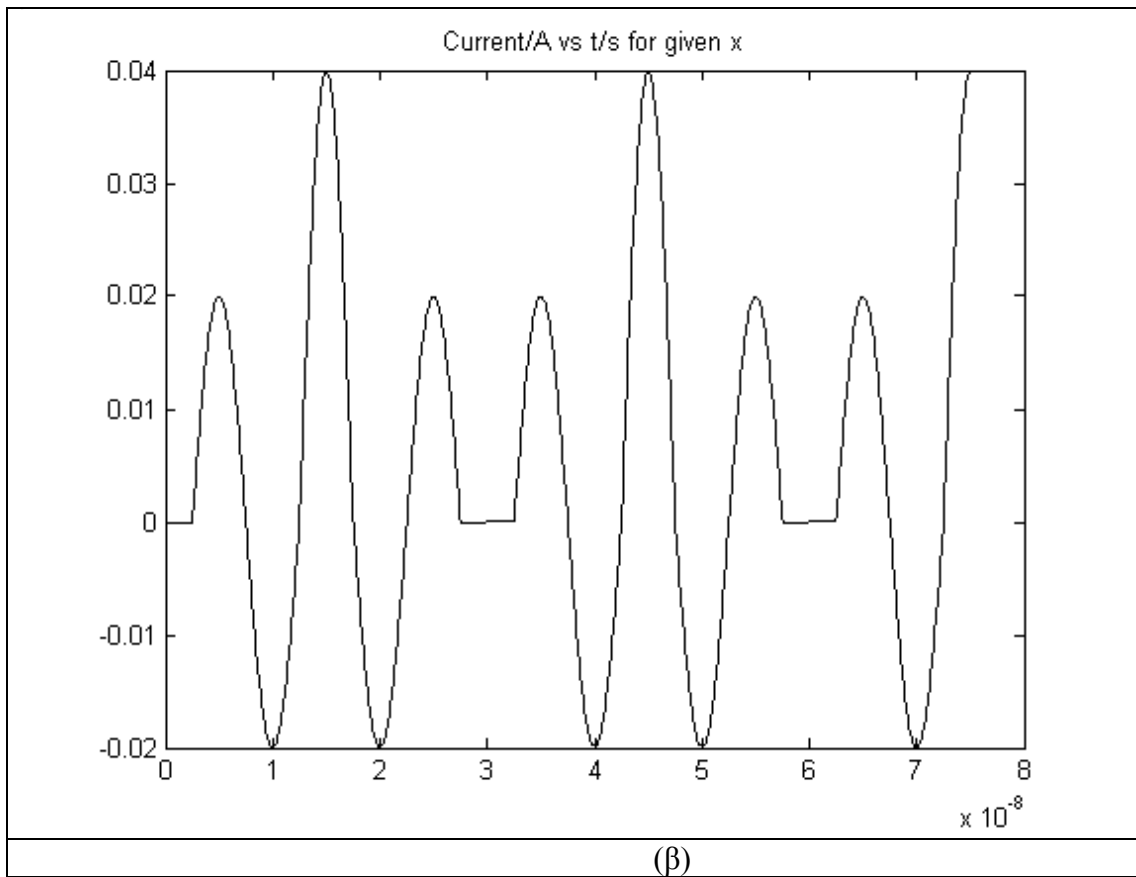
Ας υποθέσουμε την περίπτωση γραμμής μήκους 1,5 m με  $\rho_s = -1$ ,  $\rho_l = -1$ , δηλαδή έχουμε διέγερση από πηγή χωρίς αντίσταση και η γραμμή είναι βραχυκυκλωμένη στο τέρμα της. Έστω επίσης ότι  $c = 2 \times 10^8$  m/s,  $\omega = 2\pi \times 10^8$  Hz, άρα  $\lambda = 2$  m. Ακόμη έστω ότι  $R_0 = 50 \Omega$ ,  $V_a = 1$  V. Η γραμμή είναι μήκους  $3 \times \frac{\lambda}{4}$ .

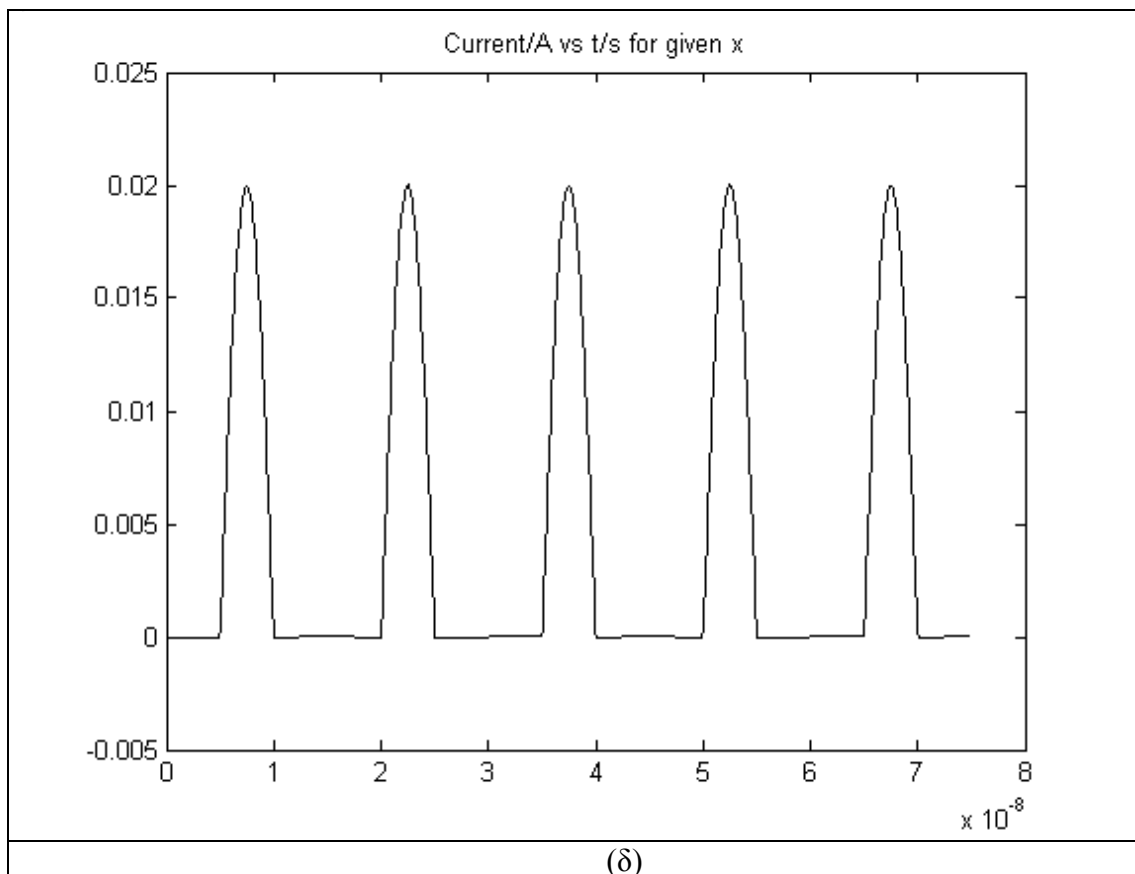
Στο Σχήμα 11.1α φαίνεται η τάση συναρτήσει του χρόνου στη θέση  $z = 0,5$  m. Αυτό το σημείο είναι σημείο δεσμού αν είχαμε μόνιμο φαινόμενο και θα έπρεπε η τάση να ήταν συνεχώς μηδέν, πράγμα που δεν ισχύει, όπως δείχνει και το σχήμα.

Το Σχήμα 11.1 β δείχνει την τάση συναρτήσει του χρόνου στη θέση  $z = 1$  m. Στο μόνιμο φαινόμενο η τάση θα ήταν αρμονική με το χρόνο με μέγιστο πλάτος ενώ όπως δείχνει το σχήμα αυτό δεν γίνεται ποτέ.



(α)



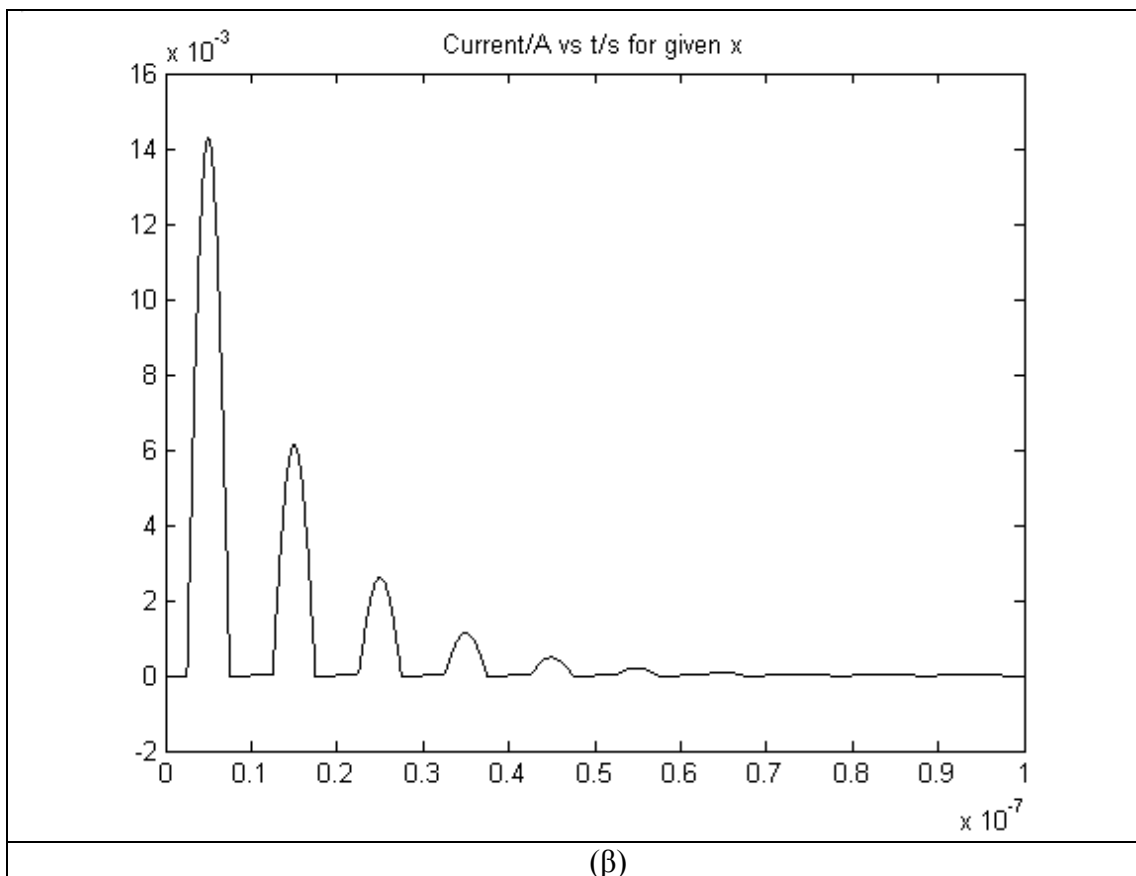
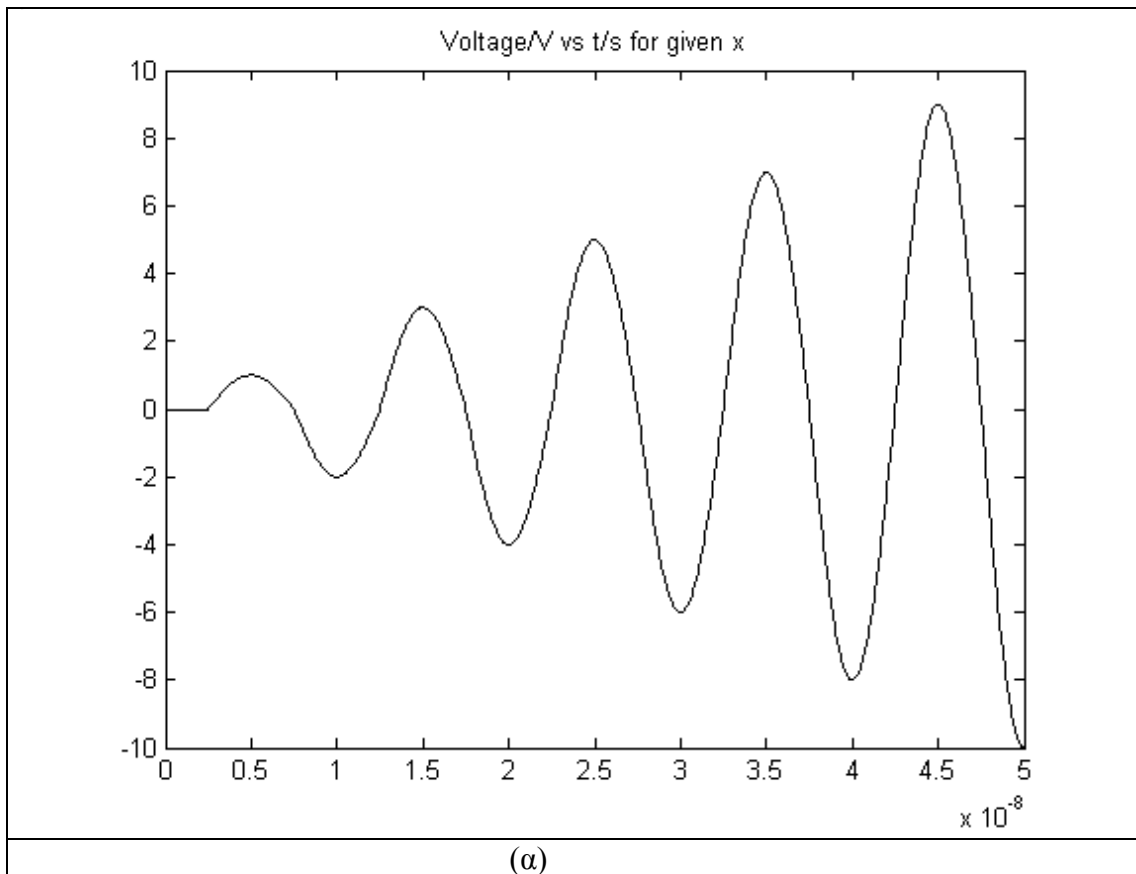


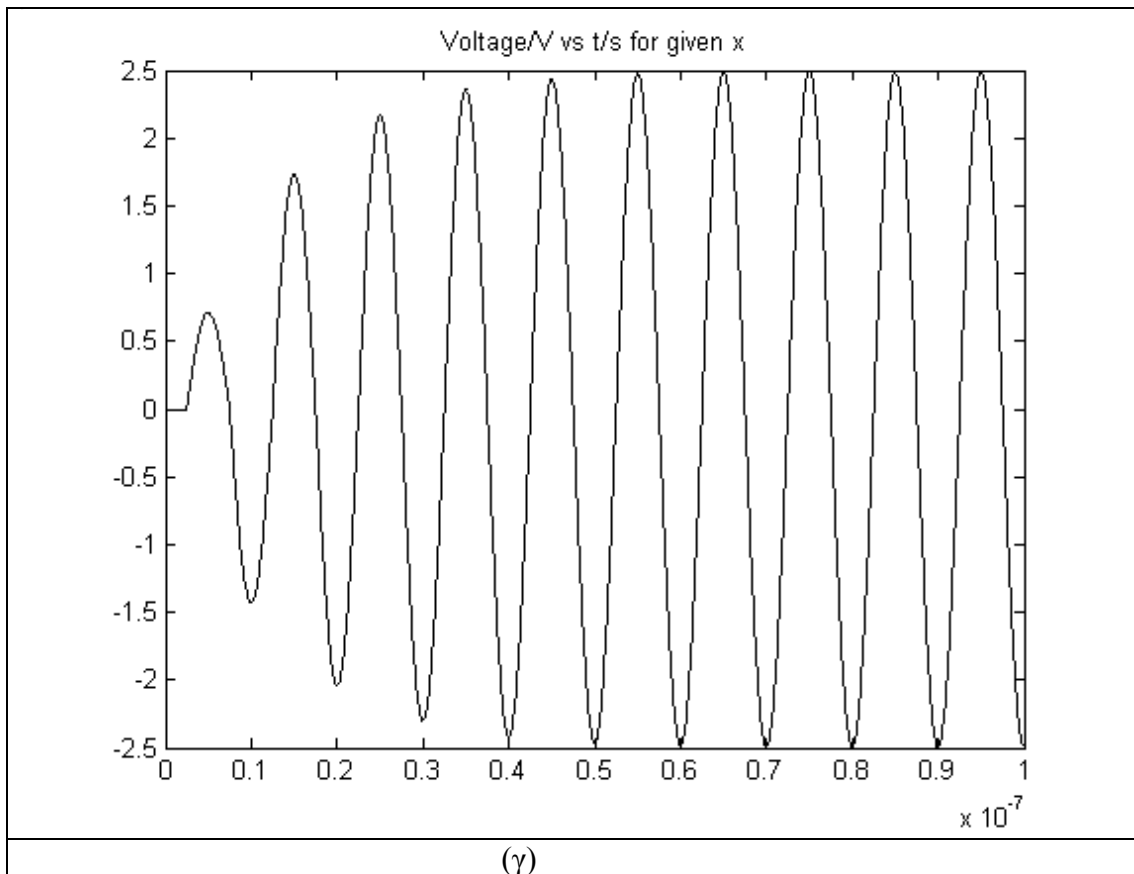
Σχήμα 11.1

Στο Σχήμα 11.2α φαίνεται η τάση συναρτήσει του χρόνου σε γραμμή (μήκους)  $\frac{\lambda}{2}$ ,

στο σημείο  $z = \frac{\lambda}{4}$  σε περίπτωση που δεν υπάρχουν καθόλου απώλειες ενέργειας. Η

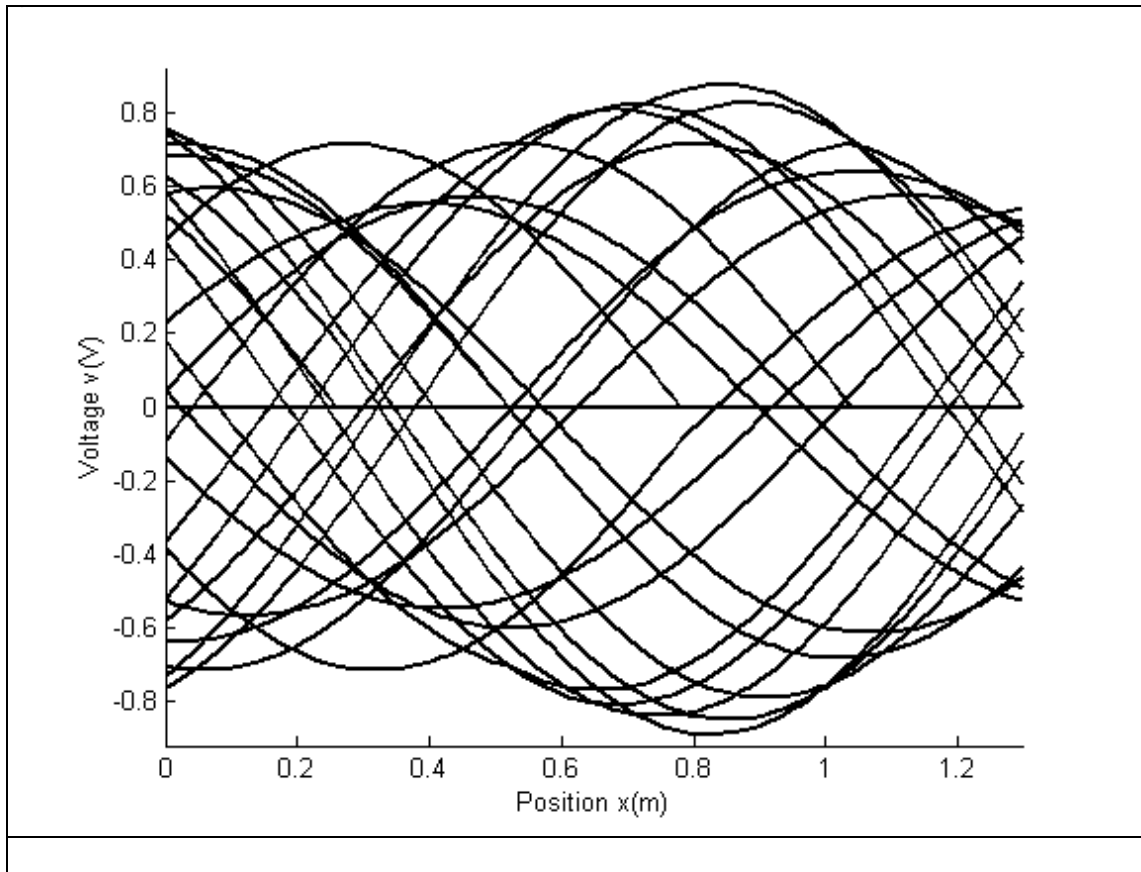
διέγερση της γραμμής γίνεται στην αρχή της που θα ήταν δεσμός (απομάκρυνση μηδέν!) αν είχαμε μόνιμο φαινόμενο (στάσιμο κύμα). Στην περίπτωση μας δεν έχουμε στάσιμο φαινόμενο και η τάση αυξάνεται συνεχώς με το χρόνο. Το Σχήμα 11.2 β δείχνει την περίπτωση που η πηγή έχει αντίσταση  $R_s = 20 \Omega$ . Μετά από κάποιο χρόνο έχουμε μόνιμο φαινόμενο, στάσιμο κύμα. Ο χρόνος αποκατάστασης του μόνιμου φαινομένου εξαρτάται, γενικώς, από τους συντελεστές ανάκλασης, από το συντελεστή απωλειών κατά μήκος της γραμμής και από το χρόνο διαδρομής της γραμμής (δηλαδή από το μήκος της και την ταχύτητα διάδοσης).



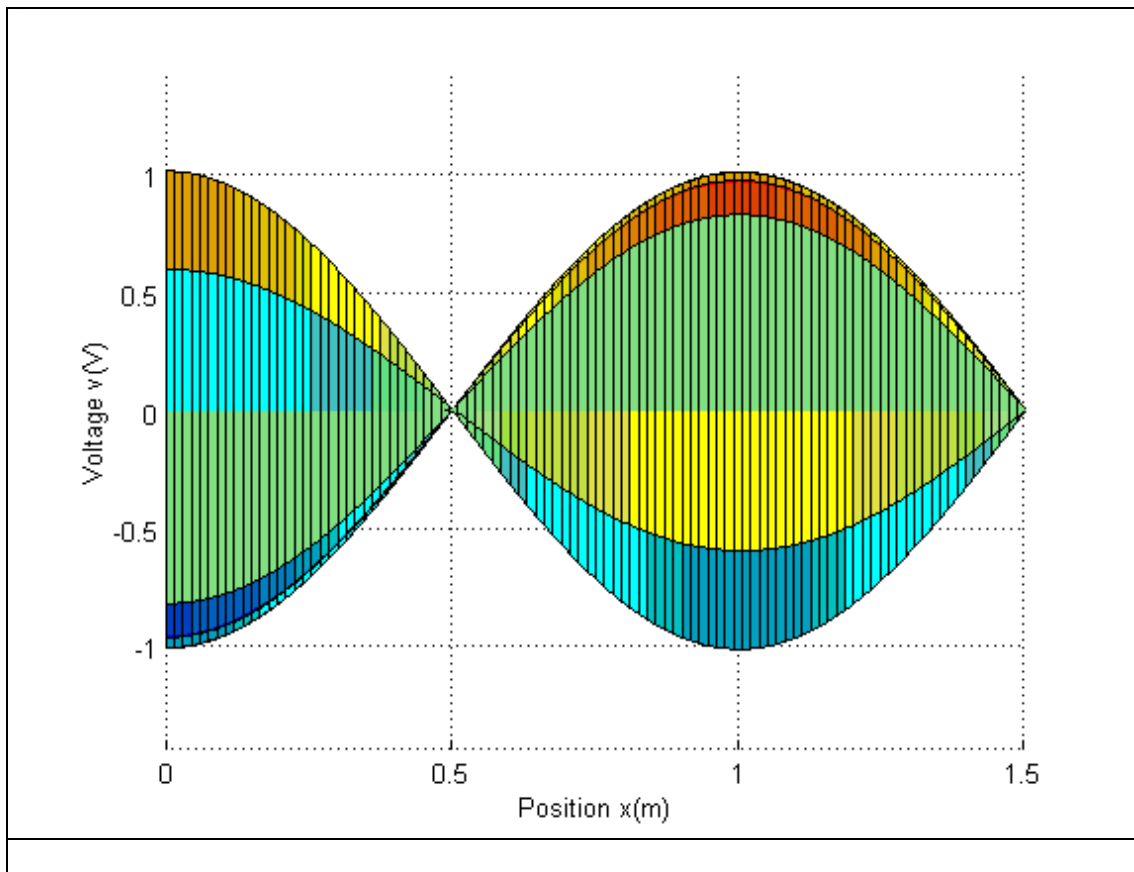


Σχήμα 11.2

Το Σχήμα 11.3 δείχνει την τάση κατά μήκος της γραμμής για σχετικά μικρούς χρόνους, πριν αποκατασταθεί το μόνιμο φαινόμενο (δηλαδή, πριν να σχηματιστούν στάσιμα κύματα) και το Σχήμα 11.4 μετά από αρκετό χρόνο οπότε έχει γίνει αποκατάσταση του μόνιμου φαινομένου. Έχουμε ως δεδομένα,  
 $R_0 = 50 \Omega$ ,  $R_s = 20 \Omega$ ,  $R_l = 30 \Omega$ ,  $l = 1,3 \text{ m}$ ,  $c = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$

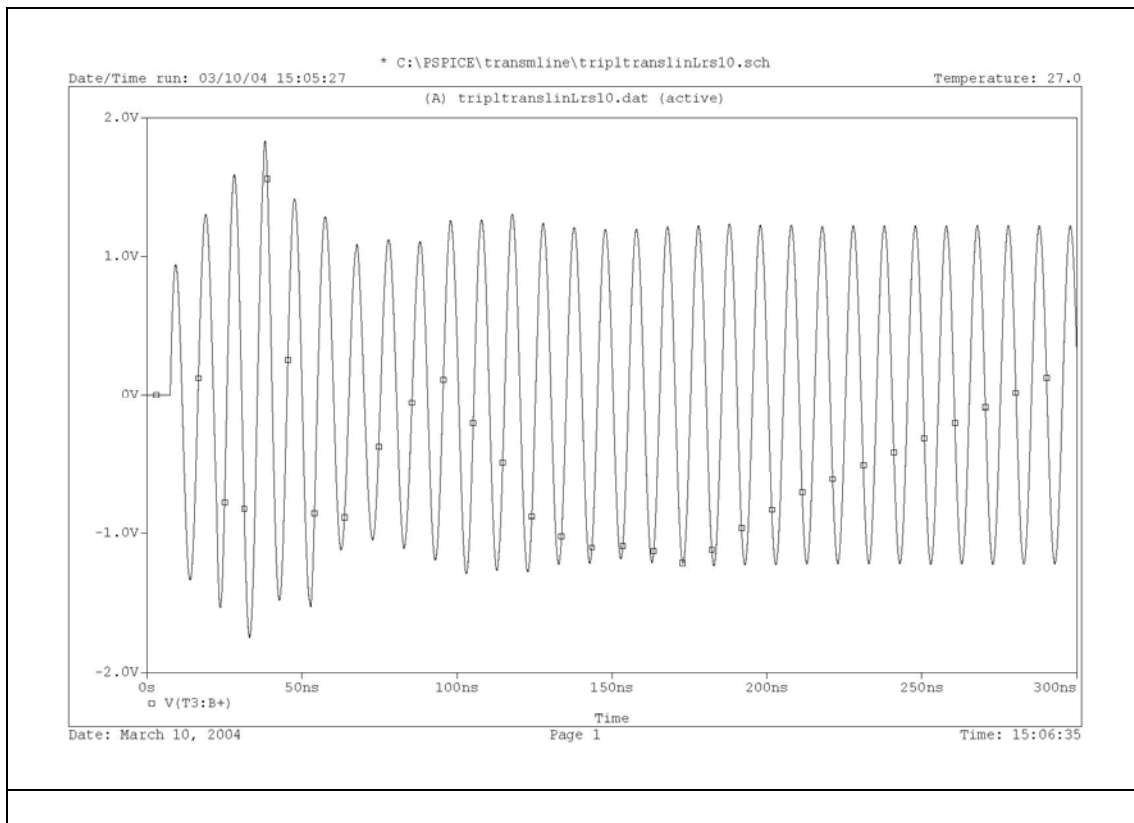


Σχήμα 11.3



Σχήμα 11.4

Γενικώς στις γραμμές μεταφοράς μπορεί να εμφανίζονται υπερτάσεις για διάφορους λόγους που σχετίζονται με μεταβατικά φαινόμενα ή και φαινόμενα «συντονισμού» που εξαρτώνται από τη συχνότητα, το μήκος της γραμμής κτλ. Στο Σχήμα 11.5 φαίνονται οι τάσεις στο τέρμα της γραμμής που διεγείρεται με αρμονική τάση με το χρόνο, η πηγή έχει εσωτερική αντίσταση και η τερματική αντίσταση είναι μη ωμική. Τα αποτελέσματα έχουν βρεθεί με τη χρήση του PSPICE.



Σχήμα 11.5

## 12. ΜΟΝΙΜΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΓΙΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΣΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Θα ξεκινήσουμε, στην αρχή, με την σχετικά απλούστερη περίπτωση που οι διάφορες εμπεδήσεις είναι ωμικές αντιστάσεις όπως και στην παράγραφο 11.

Το μόνιμο φαινόμενο συμβαίνει αφού περάσει αρκετός χρόνος από τη στιγμή που εφαρμόστηκε η τάση στη γραμμή, οπότε ένεκα των απωλειών ενέργειας στα άκρα της γραμμής, πρακτικώς δεν έχουμε άπειρες ανακλάσεις αλλά ένα πεπερασμένο πλήθος ανακλάσεων. Τότε έχουμε, κατά κάποια έννοια μια συχνότητα, της οποίας το πλάτος υφίσταται εκθετική απόσβεση κατά μήκος της γραμμής, πράγμα που αν μιλήσουμε αυστηρά δεν αντιστοιχεί σε μια συχνότητα. Παρόλο που λέμε για διέγερση με αρμονική τάση ως προς το χρόνο, αυτό δεν είναι ακριβές όταν εξετάζουμε και το μεταβατικό φαινόμενο όπου η τάση περιγράφεται με αρμονική συνάρτηση του χρόνου αλλά αυτό ισχύει από κάποια στιγμή και μετά ενώ για προηγούμενους χρόνους η τάση ήταν μηδέν. Μια τέτοια τάση δεν αντιστοιχεί σε μια συχνότητα με την αυστηρή έννοια, απλώς μπορεί να προσεγγιστεί ως τέτοια μετά από αρκούντως μεγάλο χρόνο. Αν δεχτούμε ότι υπάρχει απόσβεση κατά μήκος της γραμμής τότε μετά από πολύ χρόνο η τάση και το ρεύμα θα γίνουν μηδέν. Περιμένει κάποιος, να μπορεί να μεταβεί στο μόνιμο φαινόμενο ξεκινώντας από το πλήρες φαινόμενο όπου υπάρχει και το μεταβατικό. Αυτή δεν φαίνεται να είναι μια απλή διαδικασία οπότε προτιμούμε να βρούμε κατευθείαν τις λύσεις για το μόνιμο φαινόμενο.

Η περιγραφή μπορεί να γίνει ξεκινώντας με λύσεις φάσορες των διαφορικών εξισώσεων, με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Αρχικά θα ξεκινήσουμε από το γεγονός ότι ξέρουμε τις εξισώσεις του συστήματος, δηλαδή τις συναρτήσεις



μεταφοράς στο πεδίο των μιγαδικών συχνοτήτων όπου έχουν ληφθεί υπόψη οι συνοριακές συνθήκες. Έχομε

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V(z, s)}{V_s(s)} \\ H'(s) &= \frac{I(z, s)}{V_s(s)} \end{aligned} \quad (12.1)$$

Οι σχέσεις για το μόνιμο φαινόμενο, δηλαδή για μια συχνότητα χωρίς μεταβατικά φαινόμενα, βρίσκονται κάνοντας την αντικατάσταση  $s \Rightarrow j\omega$ , έχομε

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}(z)}{\mathbf{V}_s} &= H(j\omega) \\ \frac{\mathbf{I}(z)}{\mathbf{V}_s} &= H'(j\omega) \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\mathbf{V}_s = V_a e^{j\varphi_s}, \quad v_s(t) = V_a \cos(\omega t + \varphi_s) = \text{Re}[\mathbf{v}_s e^{j\omega t}] = \text{Re}[V_a e^{j(\omega t + \varphi_s)}]$$

Από τις σχέσεις (2.25) βρίσκομε ότι

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Z_0(s)}{Z_0(s) + Z_s(s)} \frac{e^{-\gamma z} + A_t(s)e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - A_s(s)A_t(s)e^{-2\gamma l}} \\ H'(s) &= \frac{1}{Z_0(s) + Z_s(s)} \frac{e^{-\gamma z} - A_t(s)e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - A_s(s)A_t(s)e^{-2\gamma l}} \end{aligned} \quad (12.3)$$

άρα γενικώς

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{Z_0(j\omega)}{Z_0(j\omega) + Z_s(j\omega)} \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_t(\omega)e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_s(\omega)\Gamma_t(\omega)e^{-2\gamma l}} \\ H'(j\omega) &= \frac{1}{Z_0(j\omega) + Z_s(j\omega)} \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_t(\omega)e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_s(\omega)\Gamma_t(\omega)e^{-2\gamma l}} \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$Z_0 = R_0 + jX_t, \quad Z_t = R_t + jX_t, \quad Z_s = R_s + jX_s$$

$$\gamma = \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + jk(\omega) = \alpha(\omega) + j\omega / c(\omega) = \alpha + j\omega / c$$

Σε όλα τα στάδια της ανάλυσης, οι όροι για το ρεύμα που έχουν προέλθει από ανάκλαση στο τέρμα της γραμμής και οδεύουν προς την αρχή, έχουν αντίθετο πρόσημο από τους αντίστοιχους στην έκφραση για την τάση. Γι αυτό μπορεί να βρεθεί η έκφραση για το ρεύμα από την έκφραση για την τάση αρκεί να διαιρέσομε και δια της χαρακτηριστικής εμπέδησης  $Z_0$ . Αν υποθέσομε ότι

$$Z_0 = R_0, Z_s = R_s, Z_t = R_t \quad (12.5)$$

βρίσκομε

$$H(j\omega) = \frac{R_0}{R_0 + R_s} \frac{e^{-\alpha z} e^{j\omega z/c} + \rho_t e^{-\alpha(2l-z)} e^{j\omega(2l-z)/c}}{1 - \rho_s \rho_t e^{-\alpha 2l} e^{-j\omega 2l}} \quad (12.6)$$

$$H'(j\omega) = \frac{1}{R_0 + R_s} \frac{e^{-\alpha z} e^{j\omega z/c} - \rho_t e^{-\alpha(2l-z)} e^{j\omega(2l-z)/c}}{1 - \rho_s \rho_t e^{-\alpha 2l} e^{-j\omega 2l}}$$

Γενικώς  $c = c(\omega)$ . Λαβαίνοντας υπόψη και τις σχέσεις (12.2) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$v(z, t) = (V_a/D) \left( \frac{R_0}{R_s + R_0} \right) \{ e^{-\alpha z} \cos[\omega(t - z/c) + \varphi] + \rho_t e^{-\alpha(2l-z)} \cos[\omega(t + z/c) + \varphi - \omega 2l/c] - \rho_s \rho_t e^{-\alpha(2l+z)} \cos[\omega(t - z/c) + \varphi + \omega 2l/c] - \rho_s \rho_t^2 e^{\alpha(4l-z)} \cos[\omega(t + z/c) + \varphi] \} \quad (12.7)$$

$$D = 1 - e^{-\alpha 2l} 2\rho_s \rho_t \cos(\omega 2l/c) + e^{-\alpha l} \rho_s^2 \rho_t^2$$

Η έκφραση για το ρεύμα  $i(z, t)$  προκύπτει από την πρώτη από τις σχέσεις (12.7) αν διαιρέσουμε όλους τους όρους δια του  $R_0$  και αλλάξουμε τα πρόσημα των όρων που παριστάνουν διάδοση προς την αρχή της γραμμής. Αργότερα θα δούμε την πιο γενική περίπτωση όπου οι εμπεδήσεις δεν είναι ωμικές. Αν στην παρούσα περίπτωση υποθέσουμε ότι η απόσβεση είναι αμελητέα ( $\alpha = 0$ ) τότε προκύπτουν οι σχέσεις (12.8), οι οποίες λέμε ότι παριστάνουν ένα είδος γενικευμένου στάσιμου κύματος.

$$v(z, t) = (V_a/D) \left( \frac{R_0}{R_s + R_0} \right) \{ \cos[\omega(t - z/c) + \varphi] + \rho_t \cos[\omega(t + z/c) + \varphi - \omega 2l/c] - \rho_s \rho_t \cos[\omega(t - z/c) + \varphi + \omega 2l/c] - \rho_s \rho_t^2 \cos[\omega(t + z/c) + \varphi] \} \quad (12.8)$$

$$D = 1 - 2\rho_s \rho_t \cos(\omega 2l/c) + \rho_s^2 \rho_t^2$$

Από τις σχέσεις (12.8), μπορούμε να πούμε ότι είναι σαν να έχουμε συμβολή δυο κυμάτων που οδεύουν προς το τέρμα και δυο κυμάτων που οδεύουν προς την αρχή της γραμμής, με (γενικώς) διάφορα πλάτη και φάσεις. Οι φάσεις είναι αυτές που προβλέπονται για τις τρεις πρώτες διαδοχικές ανακλάσεις.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν έχουμε δυο κύματα ίδιας συχνότητας, που οδεύουν προς την ίδια κατεύθυνση και έχουν γενικώς διαφορετικά πλάτη, η συμβολή τους δίνει κύμα που οδεύει προς την ίδια κατεύθυνση. Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις (12.9) που περιγράφουν αυτό το φαινόμενο.

$$\begin{aligned}
f_1 &= a \cos(\omega(t \mp z/c) + \varphi_1) \\
f_2 &= b \cos(\omega(t \mp z/c) + \varphi_2) \\
f &= f_1 + f_2 = A \cos(\omega(t \mp z/c) + \varphi) \\
A &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (12.9) \\
\sin \varphi &= (a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2) / A \\
\cos \varphi &= (a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2) / A \\
\varphi &= \arctan(\sin \varphi, \cos \varphi)
\end{aligned}$$

Επομένως ο πρώτος και ο τρίτος όρος του δευτέρου μέλους της πρώτης σχέσεις από τις (12.8) δίνει οδεύον κύμα προς το τέρμα και οι δυο άλλοι όροι οδεύον κύμα προς την αρχή της γραμμής. Η συμβολή αυτών των δυο αντίθετων κυμάτων οδηγεί γενικώς σε πολύπλοκη κυματομορφή που είναι η γενική περίπτωση στάσιμου κύματος.

- Γενίκευση και πρακτική μορφή τάσης και ρεύματος στο μόνιμο φαινόμενο με αρμονική διέγερση

Οι γενικές σχέσεις για τους φάσορες της τάσης και του ρεύματος, με κυκλική συχνότητα  $\omega$ , είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(z) &= \mathbf{V}_+ e^{-\gamma z} + \mathbf{V}_- e^{+\gamma z} \\
\mathbf{I}(z) &= \mathbf{I}_+ e^{-\gamma z} + \mathbf{I}_- e^{+\gamma z} \\
\mathbf{V}_+ &= V_+ e^{j\varphi_+}, \quad \mathbf{V}_- = V_- e^{j\varphi_-} \\
\gamma &= \sqrt{Z_l(G_l + j\omega C_l)} = \alpha(\omega) + jk(\omega) \\
Z_l &= Z_{fskl} + j\omega L_l \\
c &= c(\omega) = \omega / k(\omega)
\end{aligned} \quad (12.10)$$

Τα  $\mathbf{V}_+$ ,  $\mathbf{V}_-$ ,  $\mathbf{I}_+$ ,  $\mathbf{I}_-$  είναι σταθερά μιγαδικά και λαμβάνεται υπόψη το επιδερμικό φαινόμενο.

Ισχύουν και οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_+ &= \frac{\mathbf{V}_+}{Z_0} \\
\mathbf{I}_- &= -\frac{\mathbf{V}_-}{Z_0} \\
Z_0 &= \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} = R_0 + jX_0 = |Z_0| e^{j\varphi_0}
\end{aligned} \quad (12.11)$$

Η περιγραφή του φαινομένου μπορεί να γίνει αν είναι γνωστοί οι φάσορες  $\mathbf{V}_+$ ,  $\mathbf{V}_-$  και τα χαρακτηριστικά της γραμμής καθώς και η συχνότητα. Για τον προσδιορισμό των φασόρων χρειάζονται δυο σχέσεις οι οποίες μπορεί να συνδέουν κάποια από τα εξής

μεγέθη, τάση στην αρχή της γραμμής, ρεύμα στην αρχή της γραμμής, τάση στο τέρμα της γραμμής, ρεύμα στο τέρμα της γραμμής, εμπέδηση (τερματική) στο τέρμα. Αυτό γίνεται επειδή αυτές οι ποσότητες μπορεί να μετρηθούν στην πράξη. Συνήθως είναι γνωστή η τερματική εμπέδηση και ένα από τα άλλα μεγέθη. Στα προηγούμενα θελήσαμε να λάβουμε εξαρχής υπόψη την τάση της πηγής ( $v_s(t)$ ) και ακολουθήσαμε τη διαδικασία να εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες στην αρχή και στο τέρμα της γραμμής. Δηλαδή θεωρήσαμε ως δεδομένα την τάση της πηγής διέγερσης, την εμπέδησή της και την τερματική εμπέδηση. Αυτή η διαδικασία οδηγεί σε πολύπλοκες σχέσεις. Θα προχωρήσουμε στη γενίκευση όπου οι εμπεδήσεις δεν είναι ωμικές, και θα αναδείξουμε τα ενδιάμεσα στάδια που οδηγούν σε χρήσιμες σχέσεις χωρίς να γραφτούν οι πολύπλοκες τελικές σχέσεις.

### α. Λόγος τάσεων στάσιμου κύματος

Όταν μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση  $\alpha = 0$ , από τις σχέσεις (12.10) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(z) &= \mathbf{V}_+ e^{-j\omega z/c} + \mathbf{V}_- e^{+j\omega z/c} \\ \mathbf{I}(z) &= \mathbf{I}_+ e^{-j\omega z} + \mathbf{I}_- e^{+j\omega z} \quad (12.12) \\ \mathbf{V}_+ &= V_+ e^{j\varphi_+}, \quad \mathbf{V}_- = V_- e^{j\varphi_-} \end{aligned}$$

Κατά τα γνωστά έχουμε

$$\begin{aligned} v(z,t) &= \text{Re}[\mathbf{V}(z)e^{j\omega t}] = \text{Re}[\mathbf{V}_+ e^{-j\omega(z/c-t)} + \mathbf{V}_- e^{j\omega(z/c+t)}] \\ v(z,t) &= \text{Re}[V_+ e^{j[\omega(t-z/c)+\varphi_+]} + V_- e^{j[\omega(t+z/c)+\varphi_-]}] \quad (12.13) \end{aligned}$$

άρα,

$$\begin{aligned} Z_0 &= |Z_0| e^{j\varphi_0} \\ v(z,t) &= V_+ \cos(\omega(t-z/c) + \varphi_+) + V_- \cos(\omega(t+z/c) + \varphi_-) \\ i(z,t) &= (V_+/|Z_0|) \cos(\omega(t-z/c) + \varphi_+ - \varphi_0) - (V_-/|Z_0|) \cos(\omega(t+z/c) + \varphi_- - \varphi_0) \\ &= (V_+/|Z_0|) \cos(\omega(t-z/c) + \varphi_+ - \varphi_0) + (V_-/|Z_0|) \cos(\omega(t+z/c) + \varphi_- - \varphi_0 + \pi) \quad (12.14) \end{aligned}$$

Τα πλάτη  $V_+$ ,  $V_-$  είναι πραγματικά. Η σχέση για το ρεύμα προκύπτει εύκολα σύμφωνα με όσα είπαμε στα προηγούμενα, ουσιαστικά γίνεται χρήση των σχέσεων 12.11. Όπως προαναφέραμε, έχουμε συμβολή δυο αντίθετα κινούμενων αρμονικών κυμάτων, με διαφορετικά πλάτη και (αρχικές) φάσεις και με ίδια συχνότητα, τα οποία οδηγούν στη γενική μορφή στάσιμου κύματος. Εύκολα φαίνεται ότι σε κάθε σημείο της γραμμής μεταφοράς, έχουμε αρμονική με το χρόνο μεταβολή της τάσης ενώ το πλάτος της τάσης μεταβάλλεται από θέση σε θέση. Παρακάτω θα βρούμε την περιβάλλουσα (περιβάλλουσες) της οικογένειας των καμπύλων (ανεξάρτητη μεταβλητή η θέση  $x$ , παράμετρος ο χρόνος  $t$ ) που παριστάνονται από τις η σχέσεις (12.14). Τα μέγιστα και ελάχιστα πλάτη αντιστοιχούν στα μέγιστα και ελάχιστα που παρουσιάζει η περιβάλλουσα με θετικές τιμές. Είναι καλύτερα να ξεκινήσουμε από τις σχέσεις (12.12). Εφόσον έχουμε

αρμονική εξάρτηση από το χρόνο, τα πλάτη για δεδομένη θέση  $x$  δίνονται από τις σχέσεις που ακολουθούν και οδηγούν στις ζητούμενες περιβάλλουσες,

$$\begin{aligned}
 |V(z)| &= |V_+ e^{-j(\omega z/c - \varphi_+)} + V_- e^{j(\omega z/c + \varphi_-)}| \\
 &= |V_+ \cos(\omega z/c - \varphi_+) + V_- \cos(\omega z/c + \varphi_-) - jV_+ \sin(\omega z/c - \varphi_+) + jV_- \sin(\omega z/c + \varphi_-)| \\
 &= \sqrt{V_+^2 + V_-^2 + 2V_+ V_- \cos(2\omega z/c + \varphi_- - \varphi_+)} \\
 V_c &= \pm |V(z)|
 \end{aligned} \tag{12.15}$$

$$\begin{aligned}
 |I(z)| &= \frac{1}{|Z_0|} |V_+ e^{-j(\omega z/c - \varphi_+ + \varphi_0)} - V_- e^{j(\omega z/c + \varphi_- - \varphi_0)}| \\
 &= \frac{1}{|Z_0|} \sqrt{V_+^2 + V_-^2 - 2V_+ V_- \cos(2\omega z/c + \varphi_- - \varphi_+)} \\
 I_c &= \pm |I(z)|
 \end{aligned} \tag{12.16}$$

Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
 V(z) &= |V(z)| e^{j\varphi_v} \\
 \cos \varphi_v &= \frac{V_+ \cos(-\omega z/c + \varphi_+) + V_- \cos(\omega z/c + \varphi_-)}{|V(z)|} \\
 \sin \varphi_v &= \frac{V_+ \sin(-\omega z/c + \varphi_+) + V_- \sin(\omega z/c + \varphi_-)}{|V(z)|}
 \end{aligned} \tag{12.17}$$

$$\varphi_v = \arctan(\sin \varphi_v, \cos \varphi_v)$$

$$\begin{aligned}
 I(z) &= |I(z)| e^{j\varphi_1} \\
 \cos \varphi_1 &= \frac{1}{|Z_0|} \frac{V_+ \cos(-\omega z/c + \varphi_+ - \varphi_0) + V_- \cos(\omega z/c + \varphi_- - \varphi_0 + \pi)}{|I(z)|} \\
 \sin \varphi_1 &= \frac{1}{|Z_0|} \frac{V_+ \sin(-\omega z/c + \varphi_+ - \varphi_0) + V_- \sin(\omega z/c + \varphi_- - \varphi_0 + \pi)}{|I(z)|}
 \end{aligned} \tag{12.18}$$

$$\varphi_1 = \arctan(\sin \varphi_1, \cos \varphi_1)$$

Στο Σχήμα 12.1α φαίνονται οι περιβάλλουσες για

$$V_+ = 3 \text{ V}, V_- = 1 \text{ V}, \varphi_+ = 0,6, \varphi_- = 1,1, \omega = 1,0 \times 10^8 \text{ Hz}, c = 2,0 \times 10^8 \text{ m/s}, l = 3,1 \text{ m}.$$

Στο Σχήμα 12.1 β φαίνεται η οικογένεια των καμπύλων που παριστάνει η σχέση για την τάση από τις (12.14) για τις ίδιες τιμές. Είναι προφανές ότι οι περιβάλλουσες του Σχήματος 12.1α είναι πράγματι οι περιβάλλουσες της οικογένειας καμπύλων του Σχήματος 12.1β. Το Σχήμα 12.2 δείχνει δυο καμπύλες που παριστάνει η σχέση για την τάση από τις (12.14) για δυο γειτονικές στιγμές

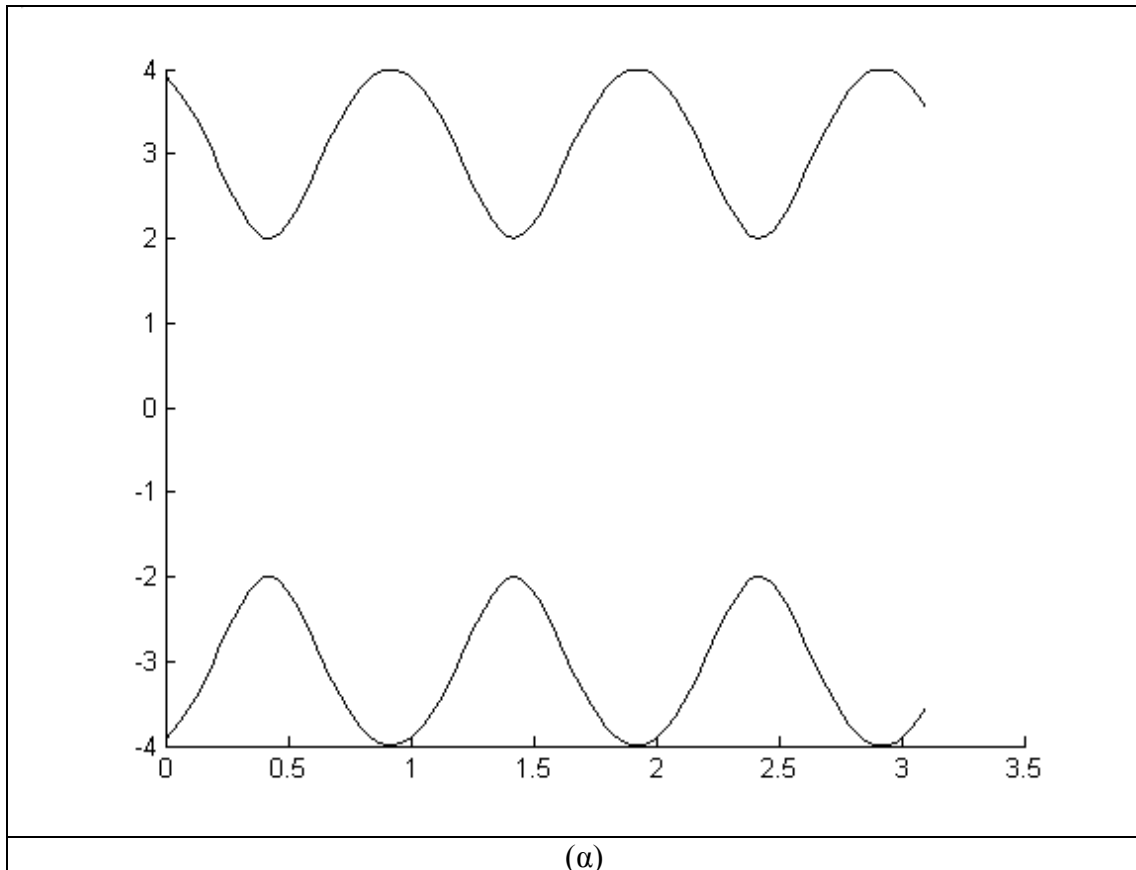
$$t_1 = 0,5 \times 10^{-8} \text{ s}, t_2 = 0,55 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

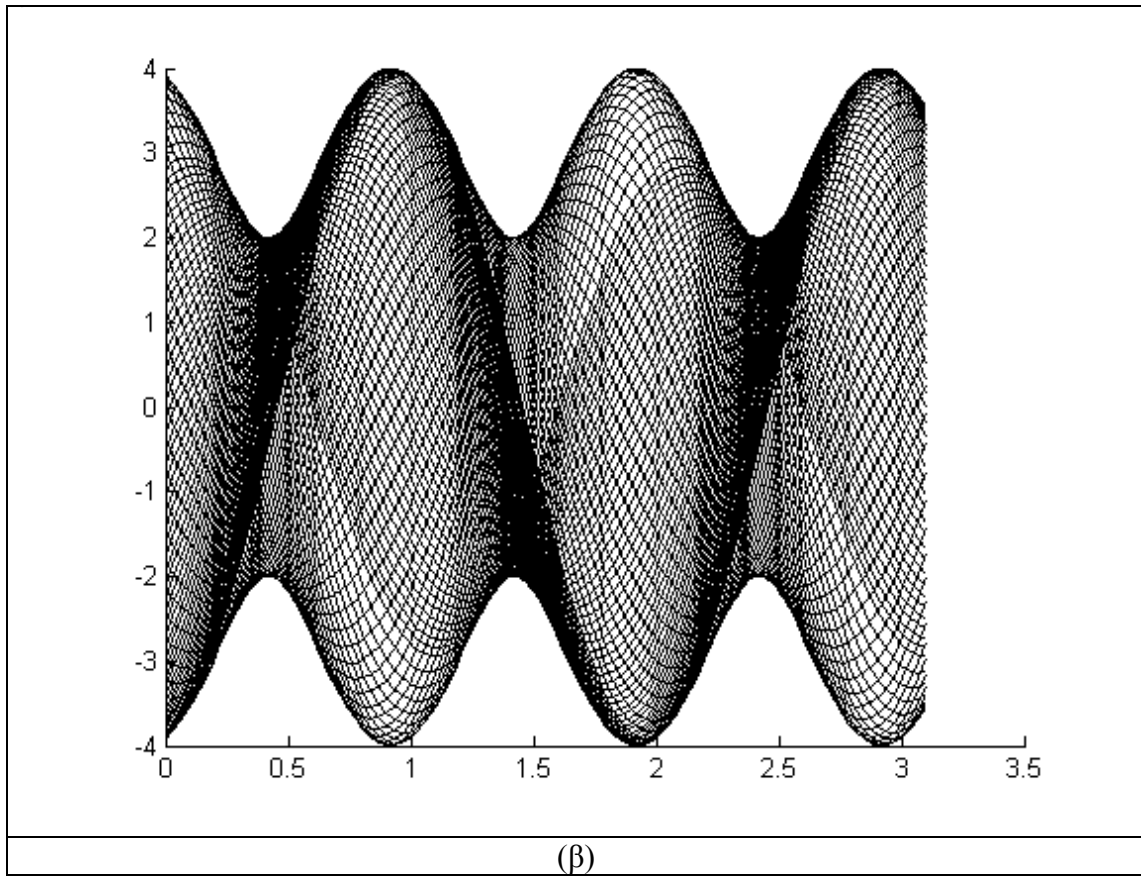
Η κυματομορφή κινείται προς το τέρμα αν  $V_+ > V_-$ , ενώ αν  $V_+ < V_-$  η κίνηση θα γίνονταν προς την αρχή της γραμμής. Επειδή έχουμε μόνο παθητικά στοιχεία κυκλωμάτων πάντα  $V_+ > V_-$ , άρα η κυματομορφή κινείται πάντα προς το τέρμα της γραμμής.

Ορίζεται ως λόγος στάσιμου κύματος η παράσταση

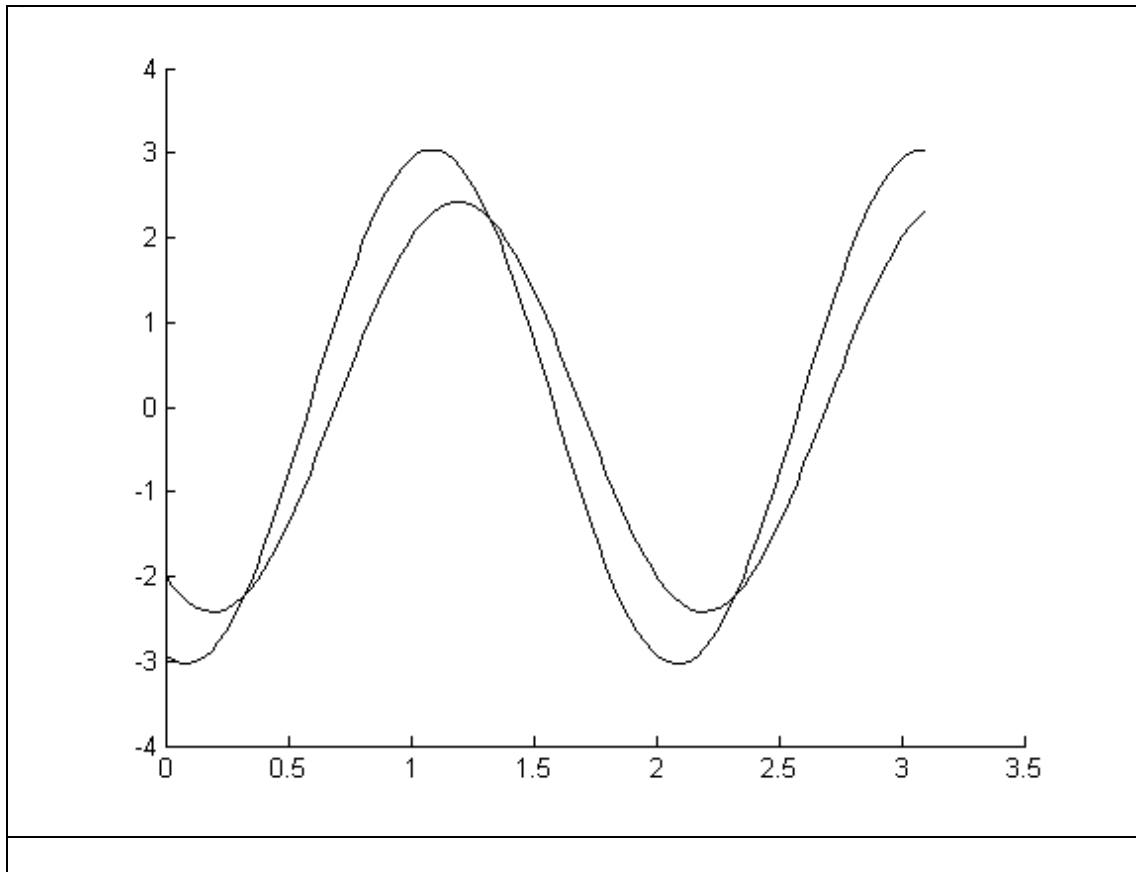
$$S = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{V_+ + V_-}{V_+ - V_-} = \frac{|\mathbf{v}_+| + |\mathbf{v}_-|}{|\mathbf{v}_+| - |\mathbf{v}_-|} \quad (12.22)$$

Στη γενική περίπτωση στάσιμου κύματος απλώς οι περιβάλλουσες μένουν σταθερές ενώ η κυματομορφή κινείται. Μόνο σε ειδικές περιπτώσεις όπως θα δούμε παρακάτω έχουμε τελείως στάσιμες κυματομορφές χωρίς τέτοια κίνηση προς κάποια κατεύθυνση.





Σχήμα 12.1



Σχήμα 12.2

Αν δεχτούμε γνωστό το  $\mathbf{V}_+$  μπορούμε να προσδιορίσουμε το  $\mathbf{V}_-$  χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη στο τέρμα της γραμμής  $\mathbf{V}(l) = \mathbf{I}(l)Z_t$ .

Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= \frac{Z_t - R_0}{Z_t + R_0} = |\Gamma_t| e^{j\varphi_t} \\ \mathbf{v}_- &= \Gamma_t \mathbf{v}_+ e^{-j2\omega l/c} = |\Gamma_t| |\mathbf{v}_+| e^{j(\varphi_t - 2\omega l/c)} = |\Gamma_t| V_+ e^{j(\varphi_t + \varphi_+ - 2\omega l/c)} \\ \mathbf{v}(z) &= \mathbf{v}_+ e^{-j\omega z/c} + |\Gamma_t| |\mathbf{v}_+| e^{j(\omega z/c + \varphi_t - 2\omega l/c)} \\ \mathbf{I}(z) &= \frac{\mathbf{v}_+}{|Z_0|} e^{-j(\omega z/c + \varphi_0)} - |\Gamma_t| \frac{\mathbf{v}_+}{|Z_0|} e^{j(\omega z/c + \varphi_t - \varphi_0 - 2\omega l/c)} \end{aligned} \quad (12.23)$$

Προφανώς, αν  $Z_t = R_t$  τότε οι ελάχιστες τιμές για τη φάση είναι  $\varphi_t = 0$ , ( $\Gamma_t > 0$ ) ή  $\varphi_t = \pi$ , ( $\Gamma_t < 0$ ).

Μετά από μερικούς υπολογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις



$$\begin{aligned}
v(z, t) &= \operatorname{Re}[V_+ e^{j[\omega(t-z/c)+\varphi_+]} + |\Gamma_t| V_+ e^{j[\omega(t+z/c)-2l\omega/c+\varphi_+\varphi_t]}] \\
v(z, t) &= V_+ \cos(\omega(t-z/c) + \varphi_+) + |\Gamma_t| V_+ \cos(\omega(t+z/c) - 2l\omega/c + \varphi_+ + \varphi_t) \\
i(z, t) &= \frac{1}{|Z_0|} \operatorname{Re}[V_+ e^{j[\omega(t-z/c)+\varphi_+-\varphi_0]} - |\Gamma_t| V_+ e^{j[\omega(t+z/c)-2l\omega/c+\varphi_+\varphi_t-\varphi_0]}] \\
i(z, t) &= \frac{1}{|Z_0|} [V_+ \cos(\omega(t-z/c) + \varphi_+ - \varphi_0) - |\Gamma_t| V_+ \cos(\omega(t+z/c) - 2l\omega/c + \varphi_+ + \varphi_t - \varphi_0)]
\end{aligned} \tag{12.24}$$

Από τη σύγκριση με τις σχέσεις (12.14) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
V_- &= |\Gamma_t| V_+ \\
\varphi_- &= \varphi_+ + \varphi_t - 2l\omega/c
\end{aligned} \tag{12.25}$$

Από τον ορισμό του λόγου στάσιμου κύματος βρίσκουμε ότι

$$S = \frac{V_+ + V_-}{V_+ - V_-} = \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} \tag{12.26}$$

Από τα προηγούμενα, για παράδειγμα από τις σχέσεις (12.15) και (12.16) βρίσκουμε τις θέσεις των μέγιστων και ελάχιστων. Στις θέσεις που υπάρχει μέγιστο τάσης υπάρχει ελάχιστο ρεύματος και αντιστρόφως, επίσης η απόσταση μεταξύ διαδοχικών μέγιστων, αντιστοίχως ελάχιστων, είναι  $\lambda/2$ . Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών μέγιστου από ελάχιστο είναι  $\lambda/4$ . Συγκεκριμένα έχουμε για τις θέσεις μέγιστων τάσης

$$\begin{aligned}
z_{\max} &= r\pi c/\omega + l - \varphi_t c/(2\omega) = l + (r - \frac{\varphi_t}{2\pi}) \frac{\lambda}{2}, \quad 0 \leq z_{\max} \leq l \\
z_{\min} &= (2r+1)\pi c/(2\omega) + l - \varphi_t c/(2\omega) = l + (r - \frac{\varphi_t}{2\pi}) \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}, \\
&= z_{\max} + \lambda/4, \quad 0 \leq z_{\min} \leq l \\
r &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots
\end{aligned} \tag{12.27}$$

## β. Γενίκευση

Θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι δίνονται η τάση της (ιδανικής) πηγής διέγερσης και η εμπέδηση, που βρίσκονται σε σειρά στην είσοδο της γραμμής και θα προσδιορίσουμε τα  $V_+$ ,  $V_-$  στη γενική περίπτωση όπου οι εμπεδήσεις είναι μιγαδικές και γενικώς, εξαρτώνται από τη συχνότητα,  
 $\alpha = \alpha(\omega)$ ,  $c = c(\omega)$ .

Μπορεί στην είσοδο της γραμμής να υπάρχει πολύπλοκη διάταξη η οποία όμως με βάση τα γνωστά από τη θεωρία κυκλωμάτων ανάγεται σε μια ιδανική πηγή τάσης και μian εμπέδηση σε σειρά με την πηγή.

Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την τεχνική που ξεκινά από τις σχέσεις (12.3) όπως κάναμε και πριν αλλά προτιμούμε να ακολουθήσουμε αυτοτελή διαδικασία και να χρησιμοποιήσουμε τη συνοριακή συνθήκη στην αρχή της γραμμής, έχουμε

$$\begin{aligned}
Z_s &= |Z_s| e^{j\varphi_s} \\
\mathbf{v}_s &= V_s e^{j\varphi} \\
v_s(t) &= \text{Re}[V_s e^{j(\omega t + \varphi)}] = \text{Re}[\mathbf{v}_s e^{j\omega t}] \\
\mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_s - \mathbf{I}(0)Z_s
\end{aligned} \tag{12.27}$$

Ισχύει

$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = |\Gamma_s| e^{j\varphi_s} \tag{12.28}$$

Για τον συντελεστή ανάκλασης  $\Gamma_s$  ισχύει το ανάλογο που ισχύει για τον  $\Gamma_t$ , δηλαδή, όταν  $Z_0 = R_0$ ,  $Z_s = R_s$  οι ελάχιστες δυνατές φάσεις είναι  $\varphi_s = 0$  ( $\Gamma_s > 0$ ) ή  $\varphi_s = \pi$ , ( $\Gamma_s < 0$ ).

Λαβαίνοντας υπόψη και τις σχέσεις (12.10) και τη συνοριακή συνθήκη στο τέρμα της γραμμής  $V(l) = \mathbf{I}(l)Z_t$ , βρίσκουμε τελικώς

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_+ &= d \frac{V_s e^{j\varphi}}{1 - \Gamma_t \Gamma_s e^{-2\gamma l}}, \quad d = \frac{Z_0}{Z_s + Z_0} = |d| e^{j\varphi_d} \\
\mathbf{v}_- &= \Gamma_t e^{-2\gamma l} \mathbf{v}_+ = d |\Gamma_t| e^{-2\gamma l} e^{j\varphi_t} \frac{V_s e^{j(\varphi + \varphi_s)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_s e^{-2\gamma l}}
\end{aligned} \tag{12.29}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\omega / c(\omega) \\
c &= c(\omega)
\end{aligned}$$

Για τον παρονομαστή θέτομε

$$\begin{aligned}
D &= 1 - |\Gamma_t| |\Gamma_s| e^{-2\alpha l} e^{j(\varphi_t + \varphi_s - \omega 2l / c)} = |D| e^{j\varphi_D} \\
|D| &= \sqrt{1 + |\Gamma_t|^2 |\Gamma_s|^2 e^{-4\alpha l} - 2 |\Gamma_t| |\Gamma_s| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_t + \varphi_s - \omega 2l / c)} \\
\sin \varphi_D &= |\Gamma_t| |\Gamma_s| e^{-2\alpha l} \sin(\varphi_t + \varphi_s - \omega 2l / c + \pi) / |D| \\
\cos \varphi_D &= \{1 - |\Gamma_t| |\Gamma_s| e^{-2\alpha l} \cos(\varphi_t + \varphi_s - \omega 2l / c)\} / |D| \\
\varphi_D &= \arctan(\sin \varphi_D, \cos \varphi_D)
\end{aligned} \tag{12.30}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_+ &= |d| \frac{V_s}{|D|} e^{j(\varphi - \varphi_D + \varphi_s)} \\
\mathbf{v}_- &= \Gamma_t e^{-2\alpha l} e^{-j2\omega l / c} \mathbf{v}_+ = |d| |\Gamma_t| e^{-2\alpha l} \frac{V_s}{|D|} e^{j(\varphi + \varphi_t + \varphi_s - \varphi_D - 2\omega l / c)}
\end{aligned} \tag{12.31}$$

Τελικώς κατά τα γνωστά, βρίσκουμε τις σχέσεις (12.32) που είναι η γενίκευση της σχέσης (12.8) για την τάση

$$\begin{aligned}
v(z,t) &= \text{Re}\left[|d|\frac{V_s}{|D|}e^{-\alpha z}e^{j[\omega(t-z/c)+\varphi+\varphi_d-\varphi_D]}\right. \\
&+ \left.|d|e^{-\alpha(2l-z)}|\Gamma_t|\frac{V_s}{|D|}e^{j[\omega(t+z/c)+\varphi+\varphi_t+\varphi_d-\varphi_D-2\omega l/c]}\right] \\
v(z,t) &= |d|\frac{V_s}{|D|}e^{-\alpha z}\{\cos[\omega(t-z/c)+\varphi+\varphi_d-\varphi_D] \\
&+ |\Gamma_t|e^{-\alpha(2l-z)}\cos[\omega(t+z/c)+\varphi+\varphi_t+\varphi_d-\varphi_D-2\omega l/c]\} \\
i(z,t) &= \frac{|d|V_s}{|D||Z_0|}\{e^{-\alpha z}\cos[\omega(t-z/c)+\varphi+\varphi_d-\varphi_D-\varphi_0] \\
&- |\Gamma_t|e^{-\alpha(2l-z)}\cos[\omega(t+z/c)+\varphi+\varphi_t+\varphi_d-\varphi_D-\varphi_0-2\omega l/c]\}
\end{aligned} \tag{12.32}$$

Στις σχέσεις (12.32) φαίνονται σαφώς τα δυο κύματα που οδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις, πράγμα που τονίσαμε και για τις σχέσεις (12.8). Μπορεί κάποιος να κάνει χρήση της δυνατότητας προγραμματισμού με μιγαδικά μεγέθη οπότε μπορεί να χρησιμοποιήσει τις σχέσεις χωρίς να πάρει τα πραγματικά μέρη, δηλαδή,

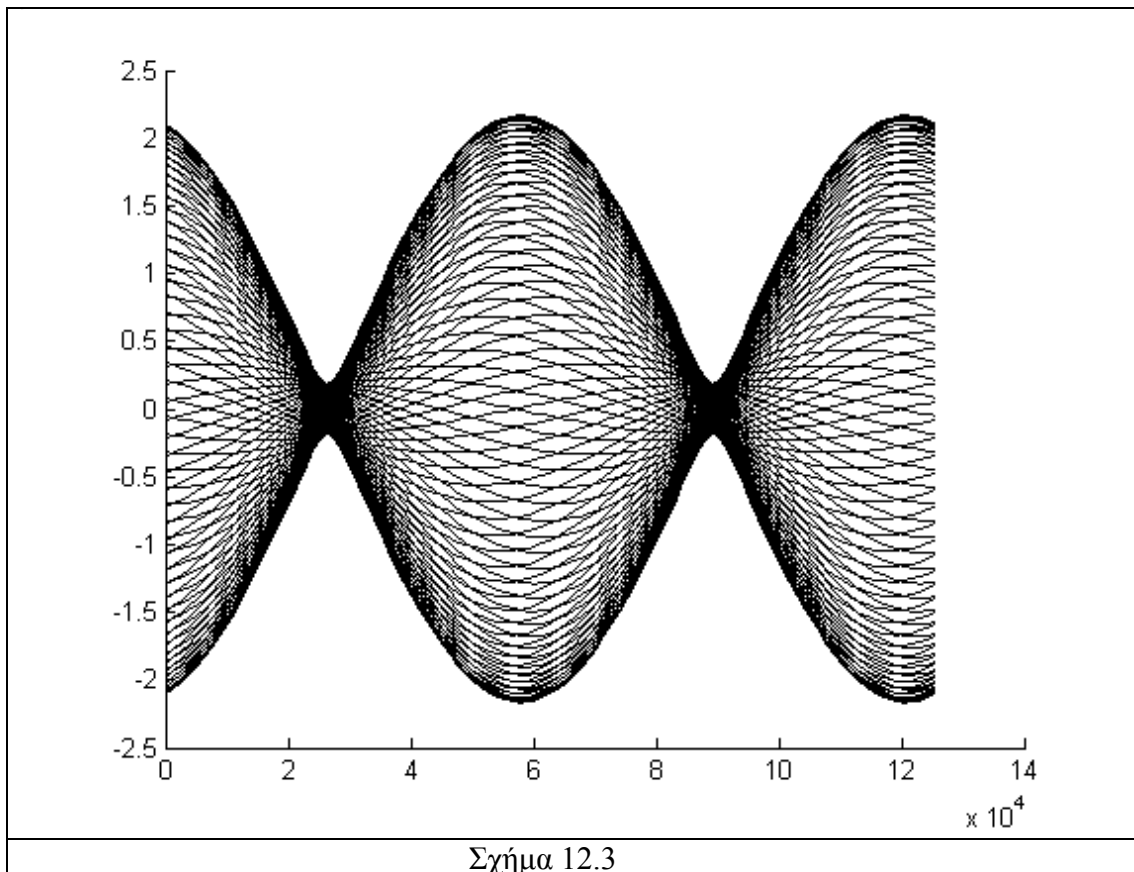
$$\begin{aligned}
v(z,t) &= \text{Re}[V_+\exp(-\gamma z) + V_-\exp(+\gamma z)] \\
i(z,t) &= \text{Re}\left[\frac{V_+}{Z_0}\exp(-\gamma z) - \frac{V_-}{Z_0}\exp(+\gamma z)\right] \\
V_+ &= \frac{V_s}{1-\Gamma_t\Gamma_s} \frac{Z_0}{Z_s+Z_0} \\
\Gamma_t &= \frac{Z_t-Z_0}{Z_t+Z_0}, \quad \Gamma_s = \frac{Z_s-Z_0}{Z_s+Z_0} \\
V_- &= \Gamma_t e^{-2\gamma l} V_+ \\
\gamma &= \sqrt{Z_l(G_l + j\omega C_l)} = \alpha(\omega) + j\omega/c(\omega)
\end{aligned} \tag{12.33}$$

Στο Σχήμα 12.3 φαίνεται μια γενική περίπτωση στάσιμου κύματος (τάση συναρτήσει θέσης) όπου γίνεται εφαρμογή των γενικευμένων σχέσεων (12.32) ή (12.33) με  $\alpha = 0$

$$V_s = 1 \text{ V}, Z_s = R_s + \frac{1}{j\omega C}, R_s = 20 \text{ } \Omega, \omega = 0,01 \text{ Mrad/s}, C = 10 \text{ } \mu\text{F}$$

$$Z_t^{-1} = R_t^{-1} + \frac{1}{j\omega L}, R_t = 70 \text{ } \Omega, L = 5000 \text{ H}, Z_0 = R_0 + jX_0$$

$$R_0 = 100 \text{ } \Omega, X_0 = -60 \text{ } \Omega, l = 3 \text{ m}, c = 2 \times 10^8 \text{ m/s}, \varphi = 0$$



Σχήμα 12.3

### γ. Απλές περιπτώσεις

Θα εξετάσουμε μερικές απλές περιπτώσεις όπου οι κυματομορφές είναι πραγματικά στάσιμες και όχι μόνο οι περιβάλλουσες.

Έστω ότι  $R_i = 0$  άρα  $\rho_i = -1$  και  $R_s = R_0$  οπότε  $\rho_s = 0$ , δηλαδή η γραμμή είναι βραχυκυκλωμένη στο τέρμα της και στην αρχή (στην πηγή) οπισθοπροσαρμοσμένη, έστω ακόμη ότι  $\alpha = 0$ . Είναι ευνόητο ότι περιμένουμε ανάκλαση στο τέρμα με αντιστροφή της τάσης ενώ στην αρχή της γραμμής γίνεται απορρόφηση του προσπίπτοντος κύματος και δεν υπάρχει ανάκλαση.

Οι σχέσεις (12.8) δίνουν

$$\rho_i = -1, \rho_s = 0, D = 1$$

$$v(z, t) = \frac{1}{2} V_a \{ \cos[\omega(t - z/c) + \varphi] + \cos[\omega(t + z/c) + \varphi + \pi - \omega 2l/c] \}$$

$$i(z, t) = \frac{1}{2} (V_a/R_0) \{ \cos[\omega(t - z/c) + \varphi] - \cos[\omega(t + z/c) + \varphi + \pi - \omega 2l/c] \} \quad (12.23)$$

$$v(z, t) = V_a \sin(\omega(l/c - t) - \varphi) \sin(\omega(l - z)/c)$$

$$i(z, t) = (V_a/R_0) \cos(\omega(t - l/c) + \varphi) \sin(\omega(l - z)/c)$$

Σύγκριση με τις σχέσεις από τις (12.14) οδηγεί στις συσχετίσεις

$$V_+ = V_a, \quad \varphi_+ = \varphi, \quad V_- = V_a, \quad \varphi_- = \varphi + \pi - 2\omega l / c \quad (12.24)$$

Ο λόγος στάσιμου κύματος είναι  $S = \infty$ .

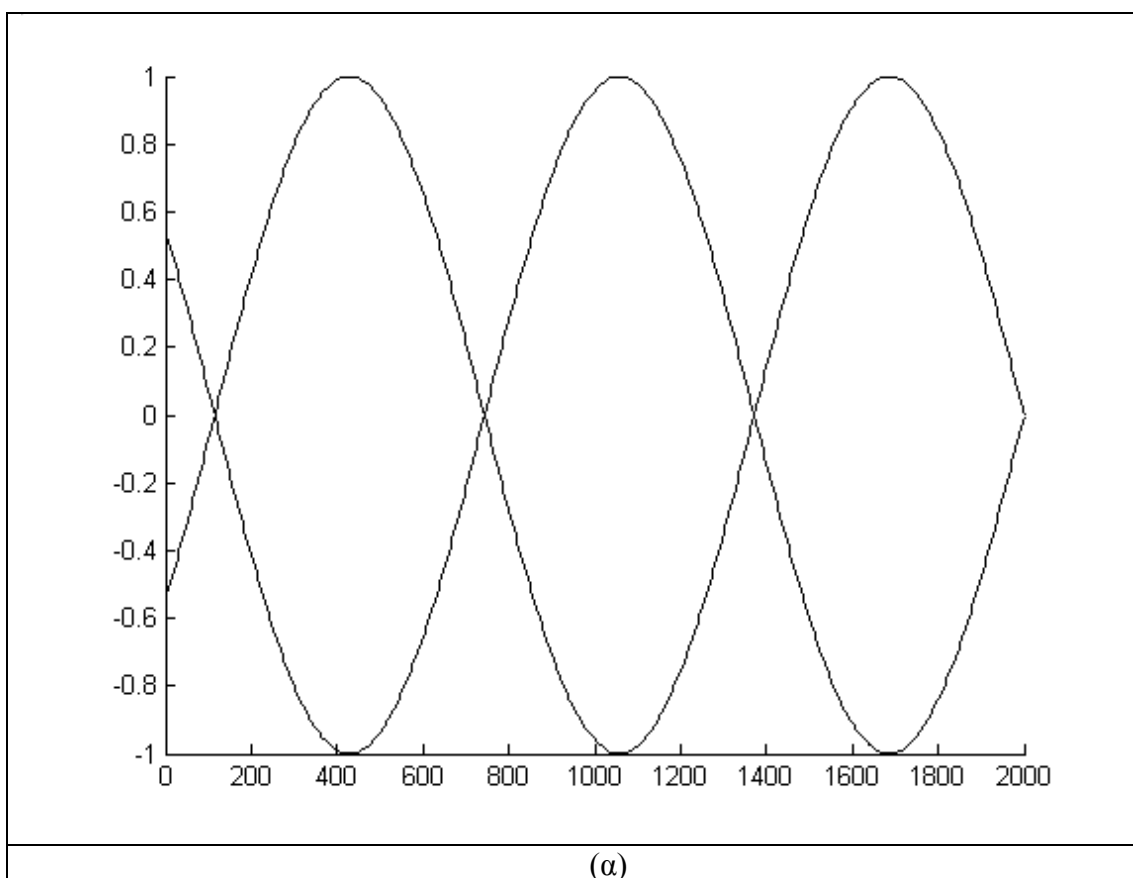
Στα Σχήματα 12.4α,β φαίνονται στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος για την τάση και το ρεύμα αντίστοιχα, με

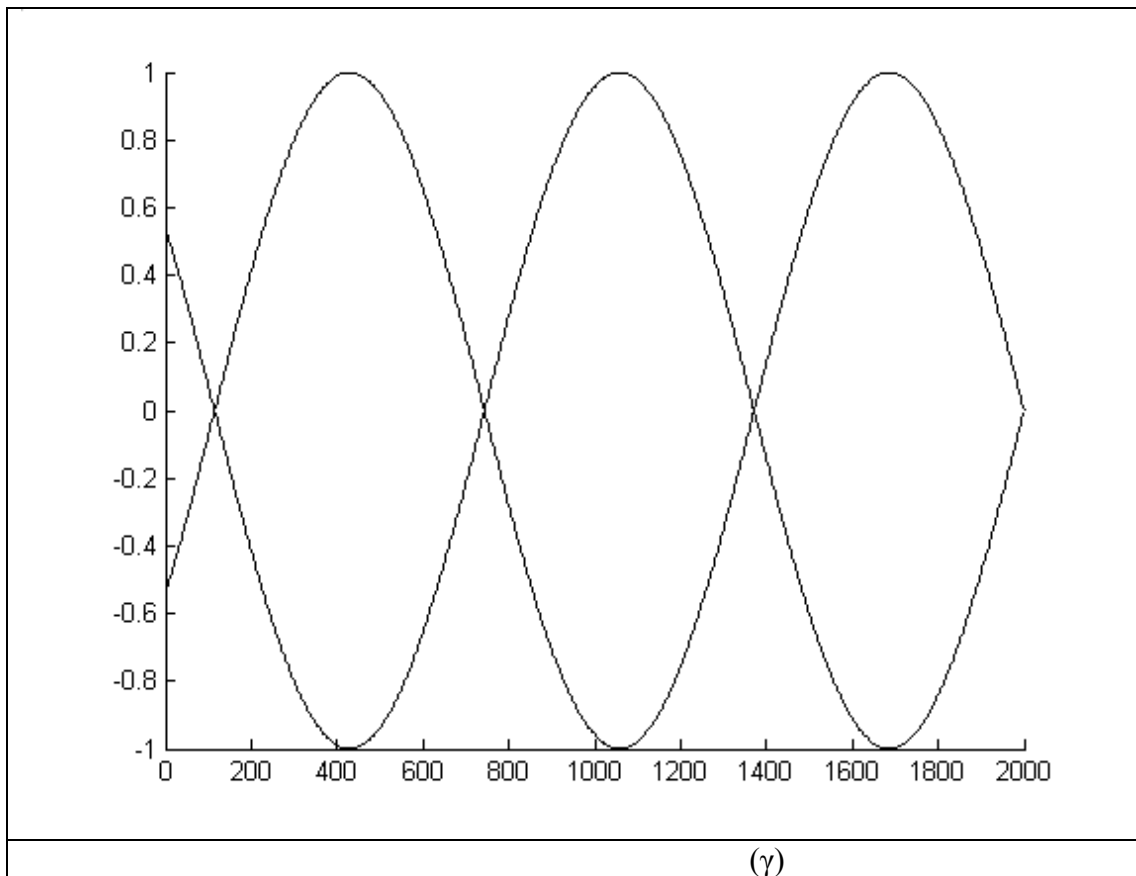
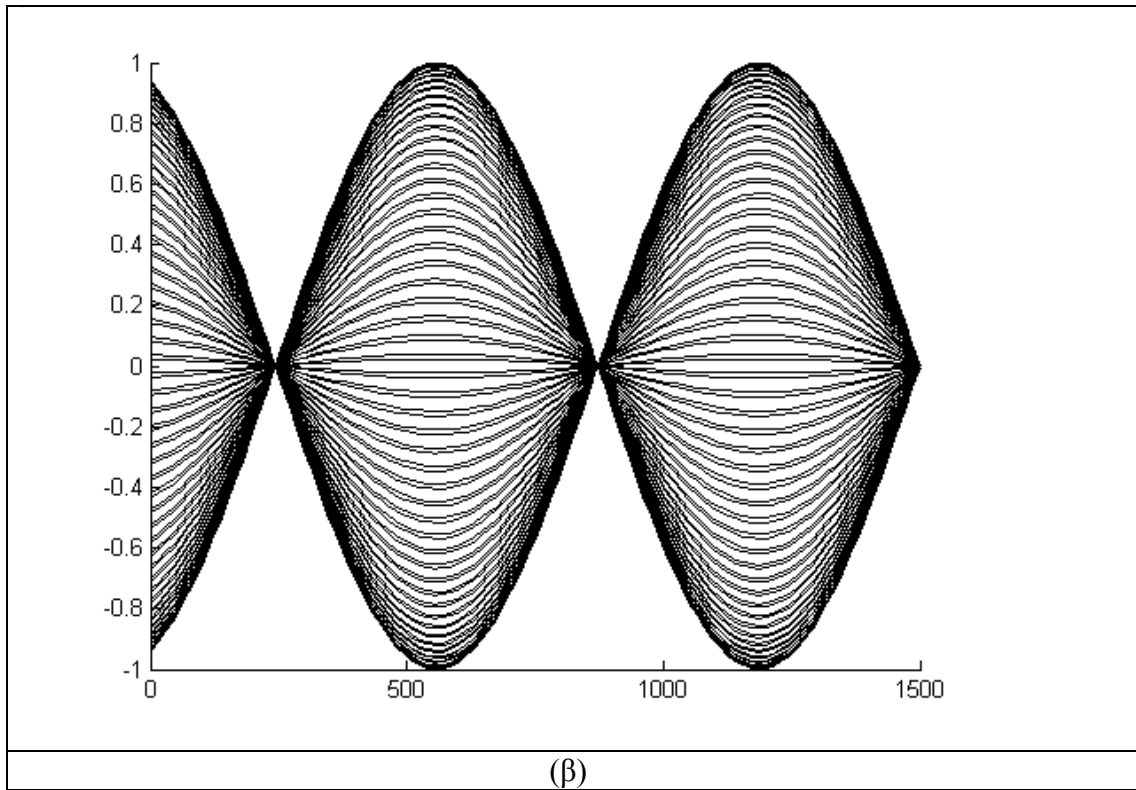
$$V_a = 1 \text{ V}, \quad \omega = 10^6 \text{ Hz}, \quad l = 2000 \text{ m}, \quad \varphi = 0 \text{ rad}, \quad c = 2 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Σε αυτή την περίπτωση οι μεταβολές με το χρόνο είναι κατά κάποιο τρόπο σε φάση, δηλαδή σε κάθε σημείο η τάση γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη ταυτόχρονα σε όλα τα σημεία. Από τη σχέση (12.21) ή την προ τελευταία από τις σχέσεις (12.23) προκύπτει ότι οι περιβάλλουσες για την τάση είναι

$$v_m(z) = \pm V_a |\sin(\omega(l-z)/c)| \quad (12.25)$$

Οι περιβάλλουσες αυτές φαίνονται στο Σχήμα 12.4γ.





Σχήμα 12.4

Μια άλλη περίπτωση είναι όταν  $R_t = \infty$  ( $\rho_t = 1$ ) και  $R_s = R_0$  καθώς και  $\alpha = 0$ .  
 Δηλαδή γραμμή ανοιχτή στο τέρμα και οπισθοπροσαρμοσμένη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_t &= 1, \rho_s = 0, D = 1 \\ v(z, t) &= \frac{1}{2} V_a \{ \cos[\omega(t - z/c) + \varphi] \\ &+ \cos[\omega(t + z/c) + \varphi - \omega 2l/c] \} \\ i(z, t) &= \frac{1}{2} (V_a/R_0) \{ \cos[\omega(t - z/c) + \varphi] \\ &- \cos[\omega(t + z/c) + \varphi - \omega 2l/c] \} \\ v(z, t) &= V_a \cos(\omega(t - l/c) + \varphi) \cos(\omega(l - z)/c) \\ i(z, t) &= (V_a/R_0) \sin(\omega(l/c - t) - \varphi) \sin(\omega(l - z)/c) \end{aligned} \quad (12.26)$$

Σύγκριση με τις σχέσεις (12.14) οδηγεί στις

$$V_+ = V_a, \varphi_+ = \varphi, V_- = V_a, \varphi_- = \varphi - \omega 2l/c$$

Ο λόγος στάσιμου κύματος είναι  $S = \infty$ .

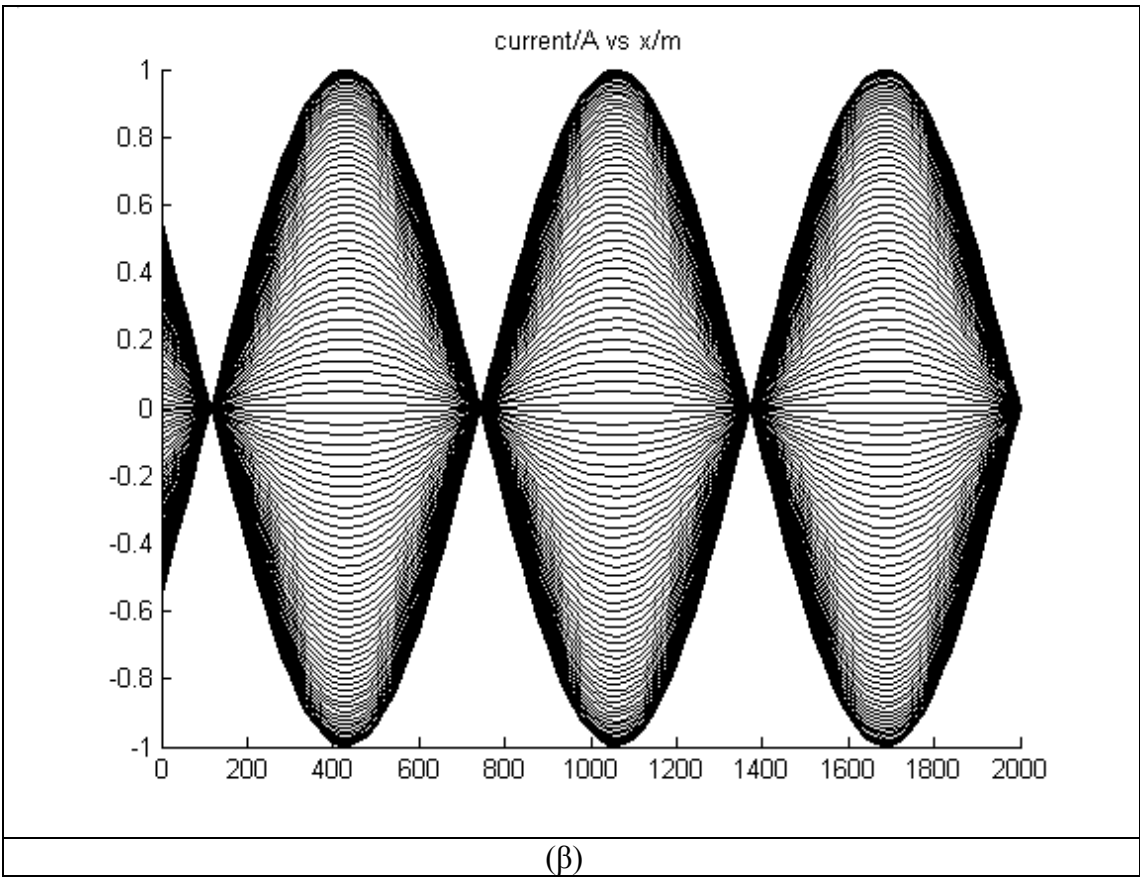
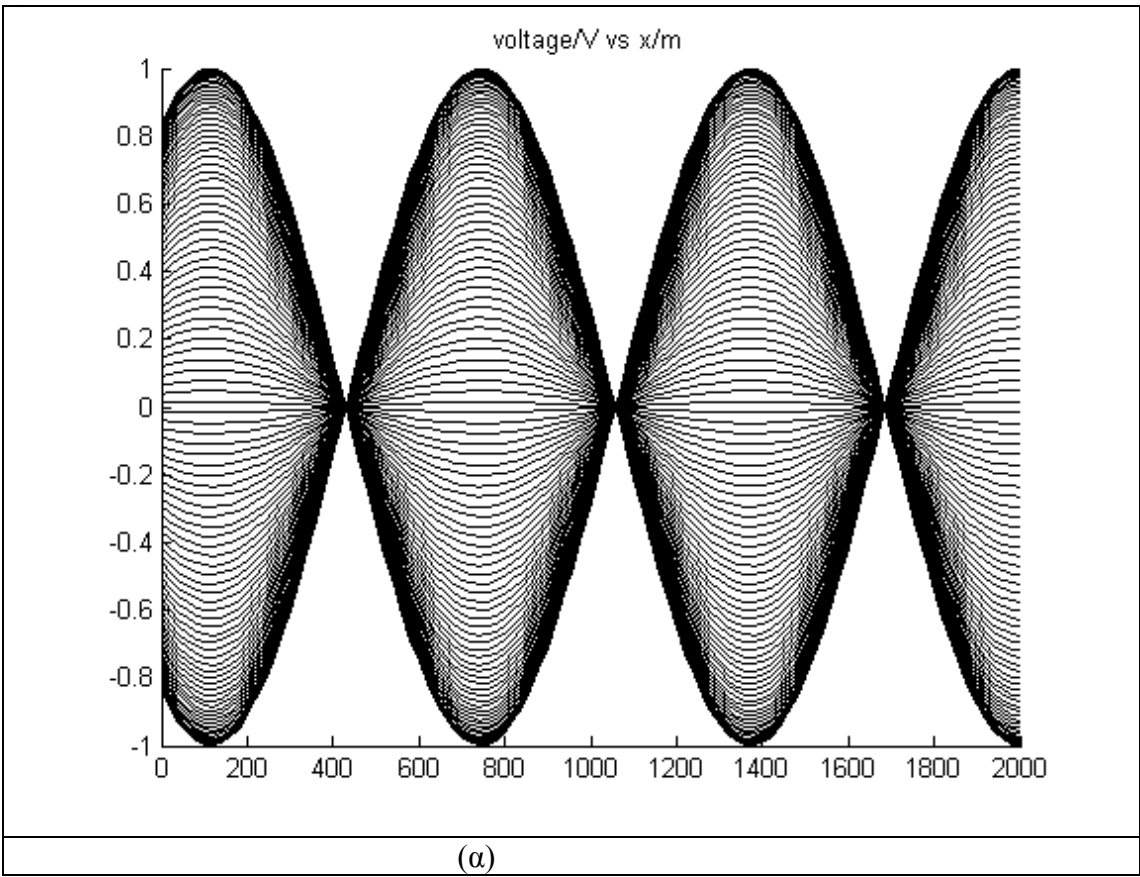
Στα Σχήματα 12.5α,β φαίνονται στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος για την τάση και το ρεύμα αντίστοιχα, με  $V_a = 1$  V,  $\omega = 10^6$  Hz,  $l = 2000$  m,  $\varphi = 1$  rad,  $c = 2 \times 10^8$  m/s.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έτσι και σε αυτήν εδώ, οι μεταβολές με το χρόνο είναι σε φάση, δηλαδή σε κάθε σημείο η τάση γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη ταυτόχρονα.

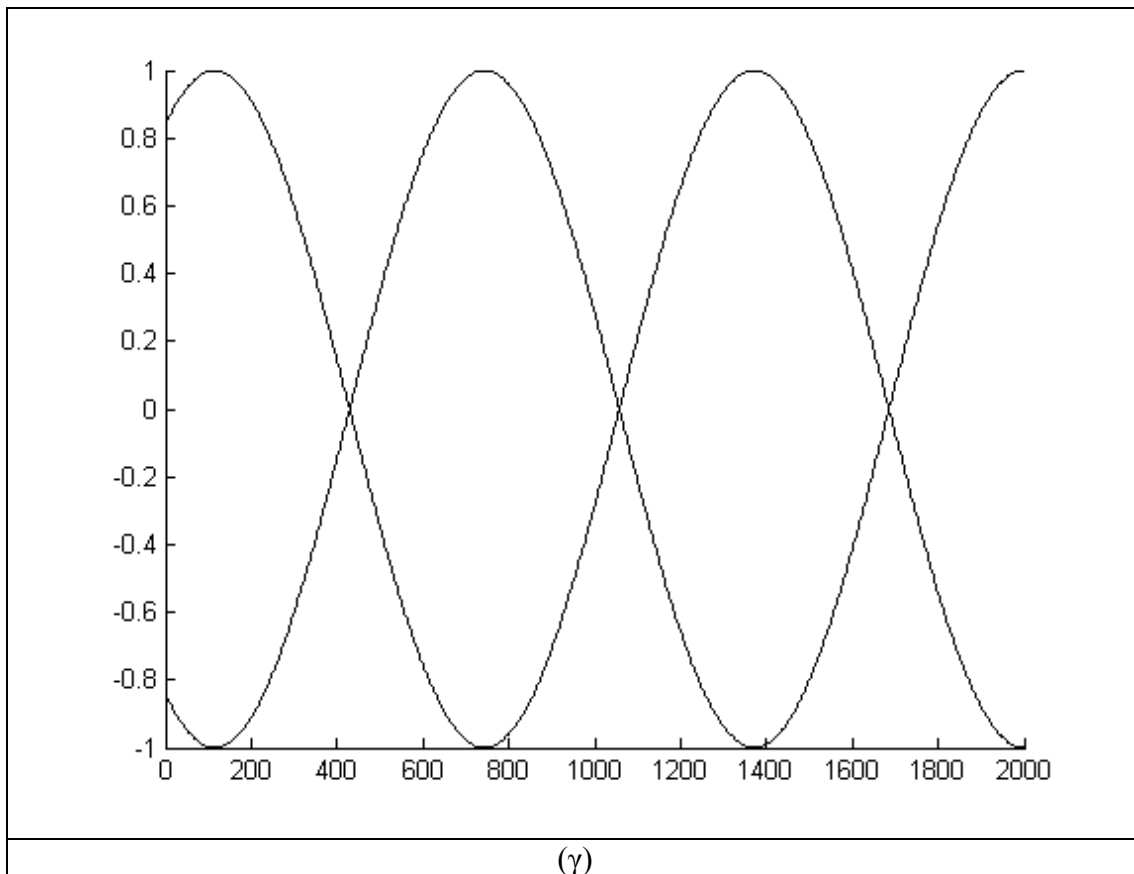
Από τη σχέση (12.21) ή την προ τελευταία από τις σχέσεις (12.26) βρίσκουμε για τις περιβάλλουσες της τάσης

$$v_m(z) = \pm V_a |\cos(\omega(l - z)/c)| \quad (12.27)$$

Στο Σχήμα 12.5γ φαίνονται αυτές οι περιβάλλουσες.







Σχήμα 12.5

Πολλές φορές δίνονται οι μορφές στάσιμου κύματος για την περίπτωση που  $R_s = 0$  ( $\rho_s = -1$ ),  $R_t = 0$  ( $\rho_t = -1$ ) ή  $R_s = 0$  ( $\rho_s = -1$ ),  $R_t = \infty$  ( $\rho_t = 1$ ), κανονικά αυτές οι καταστάσεις δεν οδηγούν σε στάσιμα κύματα διότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας κατά τις ανακλάσεις. Στην πράξη, μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή κατάσταση όταν η πηγή για παράδειγμα έχει κάποια μικρή αντίσταση. Ανάλογα ισχύουν για κύκλωμα  $LC$  με πολύ μικρές απώλειες.

Όταν έχουμε, γενικώς, αρμονικά κύματα ίδιας συχνότητας και πλάτους που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις τότε πάντοτε οδηγούν σε απλό στάσιμο κύμα όπου οι ταλαντώσεις σε όλα τα σημεία είναι σε φάση. Αυτό φαίνεται εύκολα διότι ισχύουν

$$f = a \cos(\omega(t - z/c) + \varphi_1) + a \cos(\omega(t + z/c) + \varphi_2)$$

$$f = a \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega z/c + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (12.28)$$

Αυτές οι σχέσεις σε συνδυασμό με τις σχέσεις (12.8) και (12.9) μας οδηγούν στη διαπίστωση ότι, οι σχέσεις (12.8) οδηγούν σε στάσιμο κύμα της μορφής των σχέσεων (12.28) όταν  $\rho_t = \pm 1$ . Πράγματι αν συνθέσουμε τα κύματα των (12.8) που οδεύουν προς την ίδια κατεύθυνση θα καταλήξουμε σε δυο κύματα που οδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις και έχουν ίδια πλάτη, οπότε έχουμε την περίπτωση των σχέσεων (12.28). Τα ίσα πλάτη προκύπτουν διότι αφενός τα πλάτη των κυμάτων που κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση και συντίθενται είναι και για τις δυο περιπτώσεις

κίνησης τα ίδια  $[\frac{R_0 V_a}{(R_s + R_0)D}, \frac{\rho_s R_0 V_a}{(R_s + R_0)D}]$  και αφετέρου οι φάσεις τους  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , σχέσεις (12.9), είναι ίδιες  $(\omega 2l / c)$ .

### 13. ΕΜΠΕΔΗΣΗ ΓΡΑΜΜΗΣ, $Z(z)$ , ΣΤΗ ΘΕΣΗ $z$ .

Ορίζουμε ως μιγαδικό συντελεστή ανάκλασης τάσης στη θέση της γραμμής  $z$ , κυττάζοντας προς το τέρμα της γραμμής, το λόγο,

$\Gamma(z)$  = (φάσoρας διάδοσης τάσης κατά τη θετική φορά στη θέση  $z$ ) / (φάσoρας διάδοσης τάσης κατά την αρνητική φορά στη θέση  $z$ )  
 άρα

$$\Gamma(z) = \frac{\mathbf{V}_- e^{\gamma z}}{\mathbf{V}_+ e^{-\gamma z}} = \Gamma(0) e^{2\gamma z} \quad (13.1)$$

Ορίζεται ως εμπέδηση στο σημείο  $z$  της γραμμής το μέγεθος

$$Z(z) = \frac{\mathbf{V}(z)}{\mathbf{I}(z)} = \frac{\mathbf{V}_+ e^{-\gamma z} + \mathbf{V}_- e^{+\gamma z}}{\mathbf{I}_+ e^{-\gamma z} + \mathbf{I}_- e^{+\gamma z}} \quad (13.2)$$

Αυτή είναι η εμπέδηση κυττάζοντας από το σημείο  $z$  προς το τέρμα της γραμμής. Αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή δια  $\mathbf{V}_+ e^{-\gamma z}$  και λαβαίνοντας υπόψη τις σχέσεις (12.11), βρίσκομε εύκολα ότι

$$\frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (13.3)$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκομε

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0} \quad (13.4)$$

Για  $z = l$  έχομε

$$\Gamma_t = \frac{Z(l) - Z_0}{Z(l) + Z_0} = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} \quad (13.5)$$

Για την εμπέδηση στη θέση  $z$  βρίσκομε

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_0 \frac{1 + \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} e^{-2\gamma(l-z)}}{1 - \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} e^{-2\gamma(l-z)}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_t e^{-2\gamma(l-z)}}{1 - \Gamma_t e^{-2\gamma(l-z)}} \\ &= Z_0 \frac{Z_t \cosh(\gamma(l-z)) + Z_0 \sinh(\gamma(l-z))}{Z_0 \cosh(\gamma(l-z)) + Z_t \sinh(\gamma(l-z))} \end{aligned} \quad (13.6)$$

Για την εμπέδηση στην είσοδο της γραμμής  $Z_i$ , βρίσκουμε,

$$Z(0) = Z_i = Z_0 \frac{1 + \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} e^{-2\gamma l}}{1 - \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} e^{-2\gamma l}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_t e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_t e^{-2\gamma l}} \quad (13.7)$$

$$= Z_0 \frac{Z_t \cosh(\gamma l) + Z_0 \sinh(\gamma l)}{Z_0 \cosh(\gamma l) + Z_t \sinh(\gamma l)}$$

Όταν υπάρχει προσαρμογή οπότε  $Z_t = Z_0$ , η εμπέδηση στην είσοδο της γραμμής είναι  $Z_i = Z_0$  ανεξάρτητα από το μήκος της γραμμής, και γενικώς ισχύει  $Z(z) = Z_0$ .

Αν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε απόσβεση κατά μήκος της γραμμής, δηλαδή

$$R_l = 0, \quad G_l = 0, \quad \text{τότε } \alpha = 0, \quad \gamma = j\omega / c \text{ και } Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}, \text{ ανεξάρτητο της}$$

συχνότητας. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε για την εμπέδηση στη θέση  $z$ ,

$$Z(z) = R_0 \frac{1 + \frac{Z_t - R_0}{Z_t + R_0} e^{j\omega 2(l-z)/c}}{1 - \frac{Z_t - R_0}{Z_t + R_0} e^{j\omega 2(l-z)/c}} = R_0 \frac{1 + \Gamma_t e^{j\omega 2(l-z)/c}}{1 - \Gamma_t e^{j\omega 2(l-z)/c}} \quad (13.8)$$

$$= R_0 \frac{Z_t \cosh(j\omega(l-z)/c) + R_0 \sinh(j\omega(l-z)/c)}{Z_0 \cosh(j\omega(l-z)/c) + Z_t \sinh(j\omega(l-z)/c)}$$

Η εμπέδηση στην είσοδο της γραμμής είναι

$$Z_i = Z(0) = R_0 \frac{1 + \frac{Z_t - R_0}{Z_t + R_0} e^{j\omega 2l/c}}{1 - \frac{Z_t - R_0}{Z_t + R_0} e^{j\omega 2l/c}} = R_0 \frac{1 + \Gamma_t e^{j\omega 2l/c}}{1 - \Gamma_t e^{j\omega 2l/c}} \quad (13.9)$$

$$= R_0 \frac{Z_t \cosh(j\omega l / c) + R_0 \sinh(j\omega l / c)}{R_0 \cosh(j\omega l / c) + Z_t \sinh(j\omega l / c)}$$

Οι παρακάτω είναι μερικές χρήσιμες περιπτώσεις για γραμμές χωρίς απόσβεση,  $\alpha = 0$ ,

$$\begin{aligned} Z_t = 0, & & Z_i = jR_0 \tan(\omega l / c) \\ Z_t = 0, \quad l = \lambda / 4 & & Z_i = \infty \\ Z_t = \infty, & & Z_i = -jR_0 \cot(\omega l / c) \\ Z_t = \infty, \quad l = \lambda / 4 & & Z_i = 0 \end{aligned} \quad (13.10)$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι γραμμές με διάφορα μήκη είναι χρήσιμες ως μεταβλητές αντιδράσεις (σύνθετες αντιστάσεις). Όταν κάποια γραμμή χρησιμοποιείται έτσι λέγεται στέλεχος (stub). Τέτοιες γραμμές μπορεί να χρησιμοποιηθούν για προσαρμογές φόρτων, για παράδειγμα, στο τέρμα γραμμής μεταφοράς. Είναι σημαντικό ότι αυτές οι γραμμές δεν καταναλίσκουν ενέργεια. Για γραμμή (μήκους)  $\lambda/4$  χαρακτηριστικής αντίστασης  $R_0$  η οποία τερματίζεται σε εμπέδηση  $Z_t$ , έχουμε

$$l = \lambda/4, \quad \omega l/c = \pi/2$$

$$Z_i = \frac{R_0^2}{Z_t} \quad (13.11)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές  $\lambda/4$  μπορεί να χρησιμοποιούνται ως μετασχηματιστές εμπεδήσεων.

Θυμίζουμε από τη θεωρία κυκλωμάτων ότι, όταν η εμπέδηση του φόρτου είναι συζυγής μιγαδική της εμπέδησης της πηγής (με αρμονική τάση ως προς το χρόνο), τότε γίνεται μέγιστη μεταφορά ισχύος από την πηγή προς το φόρτο. Αυτό είναι ένα είδος προσαρμογής. Γενικώς χρειάζεται προσαρμογή και στα δυο άκρα της γραμμής μεταφοράς. Πολλές φορές απαιτείται να επιτυγχάνεται μεταφορά ισχύος από κάποια πηγή με τις ελάχιστες δυνατές απώλειες στο φόρτο γραμμής μεταφοράς, επίσης πολλές φορές, χρειάζεται η συμπεριφορά του συστήματος να είναι ανεξάρτητη του μήκους της γραμμής και άλλοτε, να μην υπάρχουν ανακλάσεις.

Στις θέσεις μέγιστης τάσης κατά μήκος γραμμής με  $\alpha = 0$ , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (12.26), (12.27) και (13.8) ή τις σχέσεις (12.26), (12.27), (13.2) και (12.13), βρίσκουμε για την εμπέδηση  $Z(z)$ ,

$$Z(z_{\max}) = R(z_{\max}) = \frac{|\mathbf{V}(z)|_{\max}}{|\mathbf{I}(z)|_{\min}} = R_0 \frac{1 + |\Gamma_t| e^{j(\varphi_t - \omega 2(l - z_{\max})/c)}}{1 - |\Gamma_t| e^{j(\varphi_t - \omega 2(l - z_{\max})/c)}} = R_0 \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} = R_0 S \quad (13.12)$$

Για τις θέσεις ελάχιστης τάσης, με χρήση των αντίστοιχων σχέσεων, βρίσκουμε

$$Z(z_{\min}) = R(z_{\min}) = \frac{|\mathbf{V}(z)|_{\min}}{|\mathbf{I}(z)|_{\max}} = R_0 \frac{1 + |\Gamma_t| e^{j(\varphi_t - \omega 2(l - z_{\min})/c)}}{1 - |\Gamma_t| e^{j(\varphi_t - \omega 2(l - z_{\min})/c)}} = R_0 \frac{1 - |\Gamma_t|}{1 + |\Gamma_t|} = R_0 / S \quad (13.13)$$

Παρατηρούμε ότι οι εμπεδήσεις είναι ωμικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε αυτές τις θέσεις τα  $\mathbf{V}_+$ ,  $\mathbf{V}_-$  είναι, στην πρώτη περίπτωση, σε φάση και στην δεύτερη, με αντίθετες φάσεις.

Με χρήση των ανωτέρω μπορούμε να δείξουμε ότι η εμπέδηση στην είσοδο της γραμμής,  $Z(0) = Z_i$ , θα είναι ωμική αν το μήκος της γραμμής είναι το κατάλληλο σύμφωνα με τις σχέσεις

$$Z_i = R_i = R_0 S, \quad l = \frac{\varphi_t c}{2\omega} + n\pi c / \omega > 0$$

$$Z_i = R_i = R_0 / S, \quad l = \frac{\varphi_t c}{2\omega} + \frac{(2n+1)\pi c}{2\omega} > 0 \quad (13.14)$$

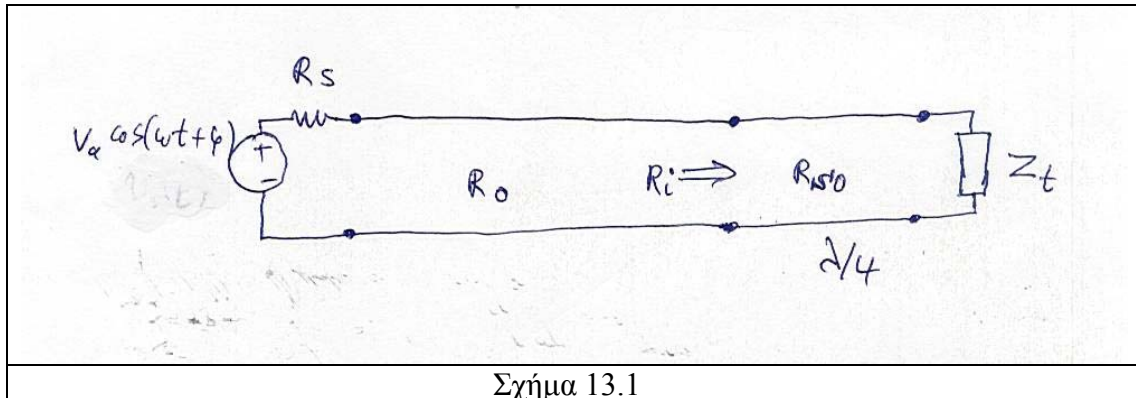
$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

- Προσαρμογή γραμμής μεταφοράς με χρήση βοηθητικών γραμμών

Η μεθοδολογία της προσαρμογής στηρίζεται στο μετασχηματισμό της εμπέδησης και του συντελεστή ανάκλασης κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς.

α) Προσαρμογή με γραμμή μεταφοράς  $\lambda/4$ .

Στο Σχήμα 13.1 φαίνεται πως γίνεται η προσαρμογή γραμμής με χρήση γραμμής μεταφοράς (μετασχηματιστής)  $\lambda/4$ .



Σχήμα 13.1

Η γραμμή μεταφοράς προς τα αριστερά έχει χαρακτηριστική αντίσταση  $R_0$  και θέλουμε να προσαρμοστεί στο τέρμα της στο φόρτο  $R_i$  με χρήση άλλης (βοηθητικής) γραμμής  $\lambda/4$  με κατάλληλη χαρακτηριστική αντίσταση, έτσι ώστε η γραμμή να «βλέπει» στο τέρμα της φόρτο ίσο με τη χαρακτηριστική της αντίσταση. Έστω  $R_{s0}$  η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής  $\lambda/4$ , τότε σύμφωνα με τη σχέση (13.11) πρέπει να ισχύει η σχέση,

$$R_i = R_0 = \frac{R_{s0}^2}{R_i} \quad (13.12)$$

Η τερματική εμπέδηση είναι ωμική ( $R_i$ ) και η σχέση (13.12) δίνει τη χαρακτηριστική αντίσταση,  $R_{s0}$ , που πρέπει να έχει η βοηθητική γραμμή.

Για παράδειγμα αν  $R_i = 50 \Omega$ ,  $R_0 = 50 \Omega$  τότε  $R_{s0} = \sqrt{R_0 R_i} = \sqrt{50 \times 100} \Omega = 71 \Omega$ .

Αν η τερματική εμπέδηση δεν είναι ωμική τότε γίνεται χρήση και μιας άλλης βοηθητικής γραμμής η οποία συνδέεται στο φόρτο και μετατρέπει τη  $Z_t$  σε ωμική, Σχήμα 13.2. Αυτή η γραμμή είναι συνήθως ίδιας κατασκευής με τη γραμμή που θέμε να προσαρμόσουμε, απλώς έχει κατάλληλο μήκος που πρέπει να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια γίνεται η προσαρμογή με γραμμή  $\lambda/4$  όπως προηγουμένως. Για τον υπολογισμό του μήκους και της «μετασχηματισμένης» αντίστασης, γίνεται χρήση των σχέσεων (13.14) όπου, συνήθως, επιλέγεται το ελάχιστο μήκος που οδηγεί σε ωμική αντίσταση.

Γενικώς η μέθοδος αυτή οδηγεί σε τιμές χαρακτηριστικής αντίστασης που δεν υπάρχει σε γραμμές του εμπορίου και γι αυτό πρέπει κάποιος ή να κατασκευάσει κατάλληλη γραμμή ή να ανεχτεί κάποια αποπροσαρμογή.

#### 14. ΣΥΝΟΨΗ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Ανάλογα με το φόρτο στο τέρμα της γραμμής μεταφοράς αλλά και ανάλογα με την εμπέδηση στην τροφοδοσία της, δημιουργούνται ανακλάσεις των σημάτων που μπορεί να οδηγήσουν σε ανεπιθύμητα αποτελέσματα. Στις γραμμές μεταφοράς ισχύος μπορεί να δημιουργηθούν υπερτάσεις και να καταστραφούν μετασχηματιστές του δικτύου. Η συστηματική μελέτη των φαινομένων διάδοσης στις γραμμές μεταφοράς ξεκίνησε στις πρώτες δεκαετίες του 20<sup>ου</sup> αιώνα από την ανάγκη αποφυγής τέτοιων καταστροφικών γεγονότων. Θα συνοψίσουμε μερικά πρακτικά αποτελέσματα. Έστω ότι έχουμε γραμμή μεταφοράς όπως στο Σχήμα 14.1α χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική αντίσταση  $R_0$ , αν παλμός τάσης  $v_1$  οδεύει προς το τέρμα της

γραμμής, ισχύει η σχέση  $R_0 = \frac{v_1}{i_1}$ .

Αν  $\rho = \rho_1 = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} > 0$  δημιουργείται ανακλώμενος παλμός τάσης  $v_2 = \rho v_1$  που

κινείται προς την αρχή της γραμμής ο οποίος έχει την ίδια πολικότητα με τον

προσπίπτοντα. Για τους αντίστοιχους παλμούς ρεύματος ισχύουν  $R_0 = -\frac{v_2}{i_2}$ ,

$i_2 = -\rho i_1$ . Αν  $\rho < 0$  τότε ο ανακλώμενος παλμός τάσης έχει αντίθετο πρόσημο από

αυτό του προσπίπτοντα. Προφανώς αν η γραμμή είναι προσαρμοσμένη οπότε

$R_1 = R_0$ ,  $\rho = 0$ , τότε δεν υπάρχει ανακλώμενος παλμός. Αν  $R_1 = \infty$  (ανοιχτή γραμμή)

τότε  $\rho = 1$  οπότε  $v_2 = v_1$  και  $i_2 = 2i_1$  κατά την επικάλυψη στο τέρμα της γραμμής.

Αν  $R_1 = 0$  (γραμμή βραχυκυκλωμένη) τότε  $\rho = -1$  οπότε  $v_2 = -v_1$  και  $i_2 = 0$  κατά την επικάλυψη στο τέρμα της γραμμής.

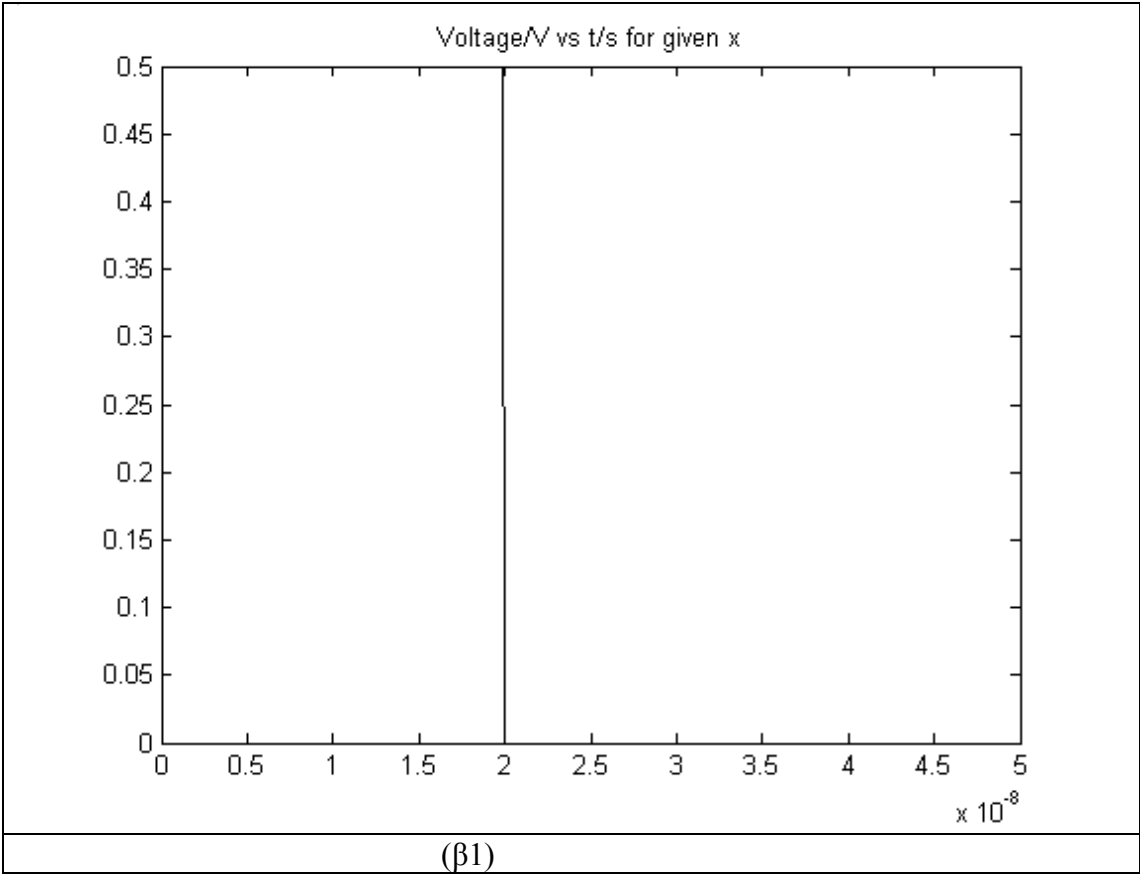
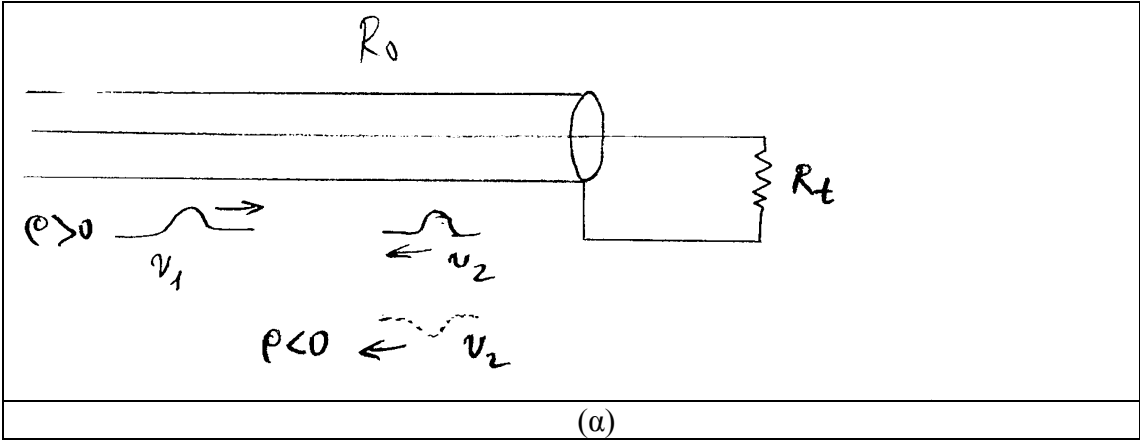
Γενικώς κατά την επικάλυψη στο τέρμα της γραμμής ισχύουν

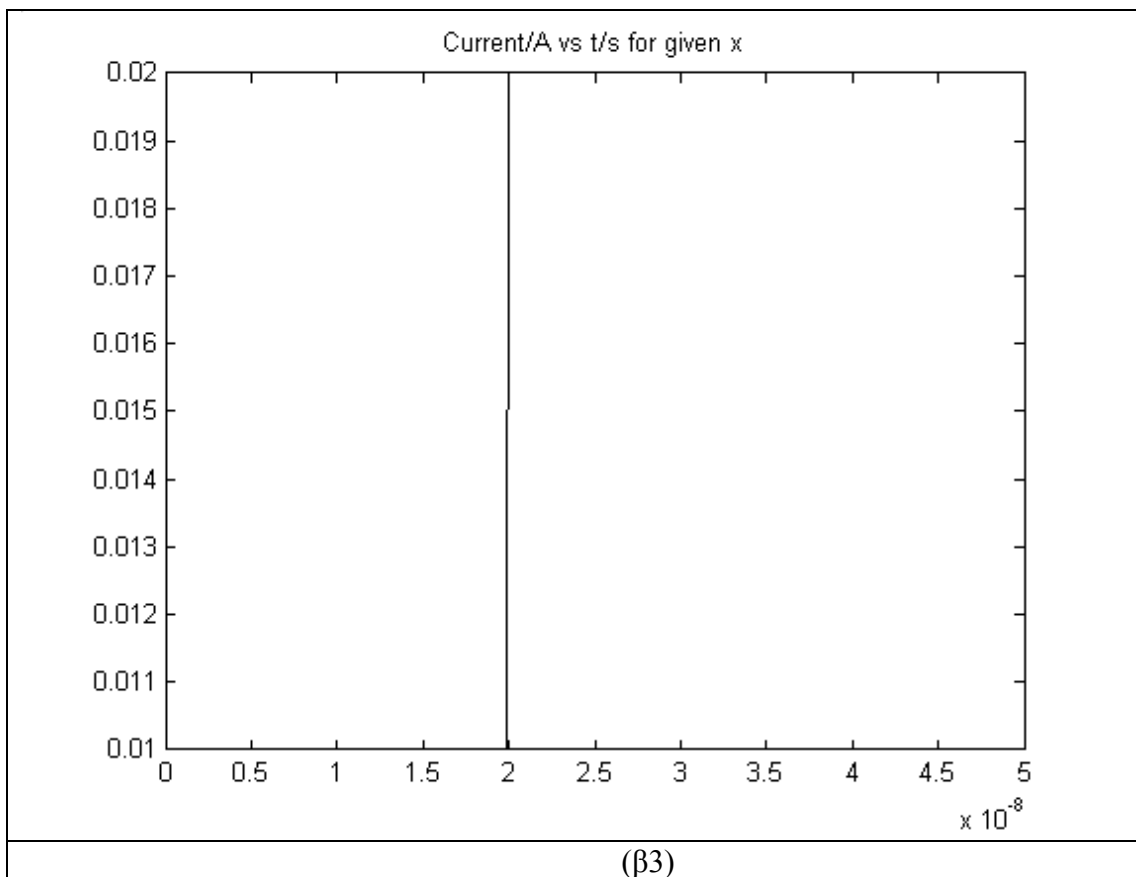
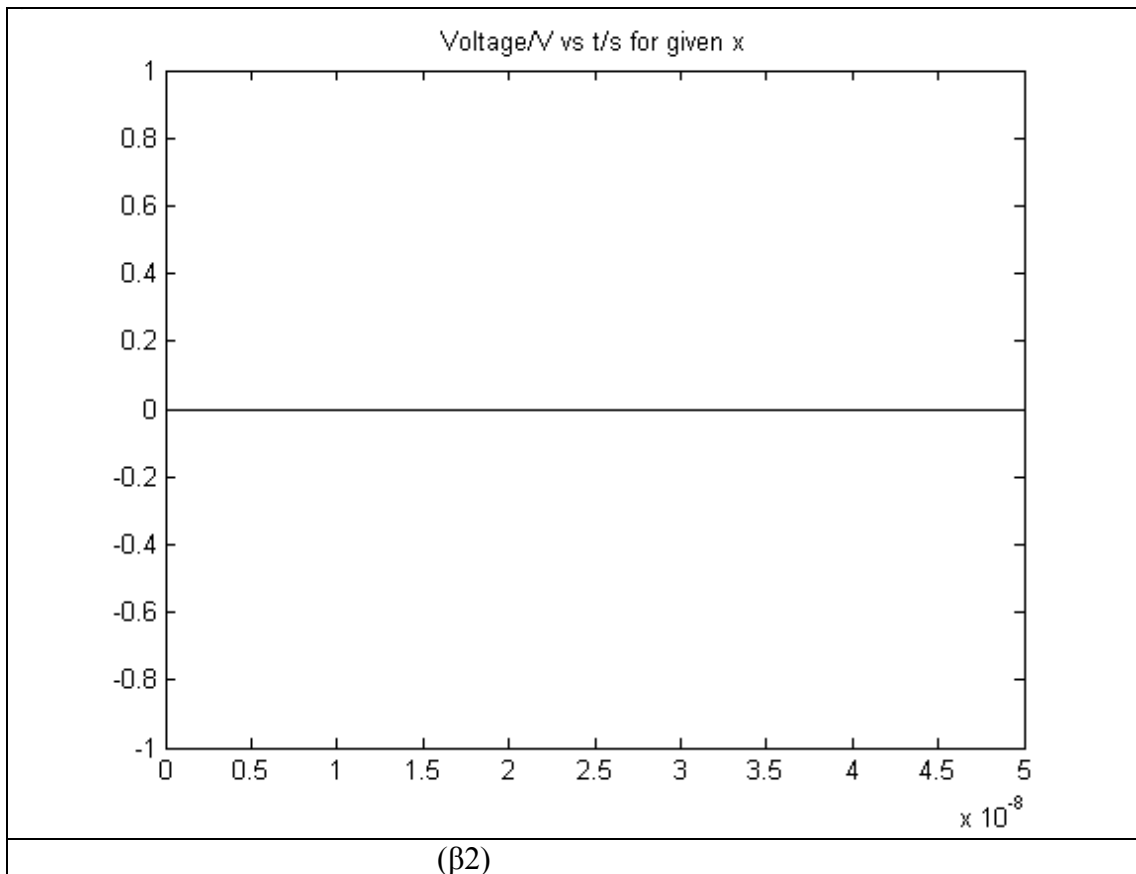
$$\begin{aligned} v_1 &= v_1 + v_2 = (1 + \rho)v_1 = \rho_T v_1 \\ i_1 &= i_1 + i_2 = i_1 + (-\rho i_1) = (1 - \rho)i_1 \end{aligned} \quad (14.1)$$

Ο συντελεστής  $\rho_T = 1 + \rho$  λέγεται συντελεστής μεταφοράς. Στο Σχήμα 14.1β

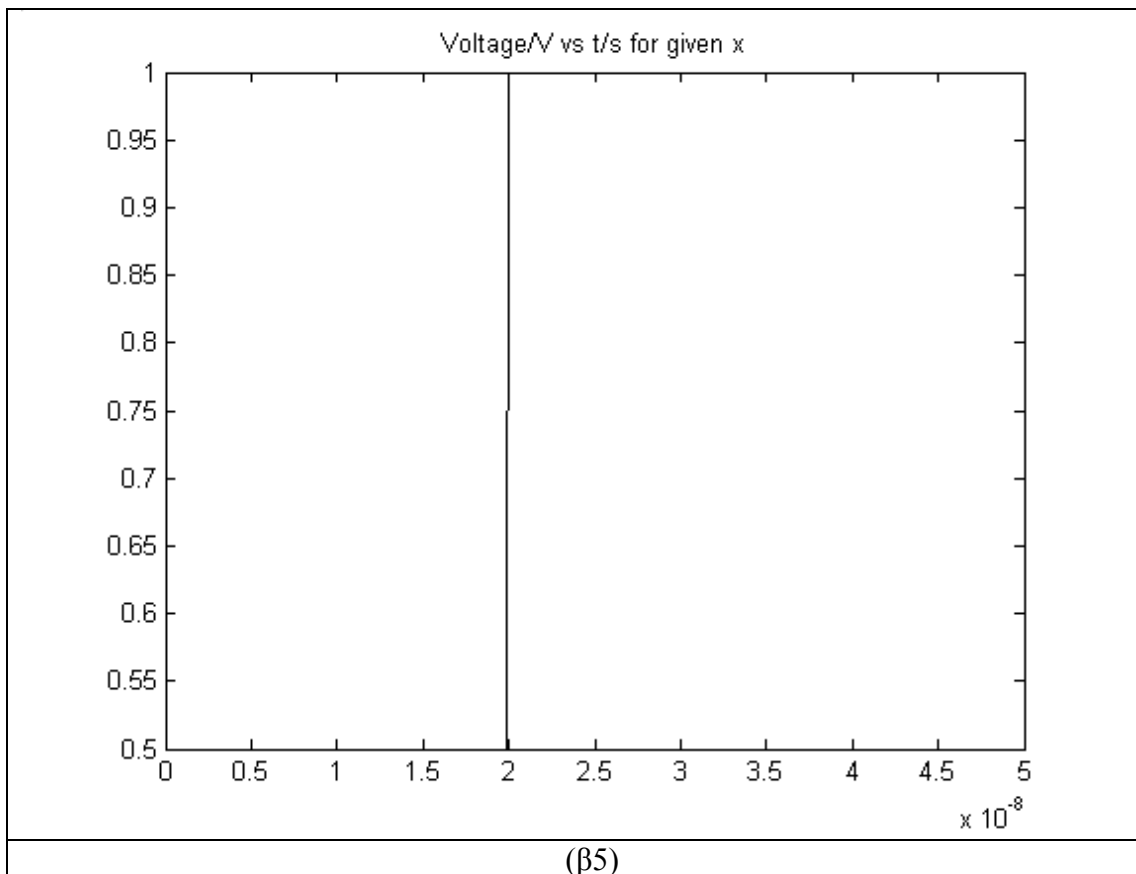
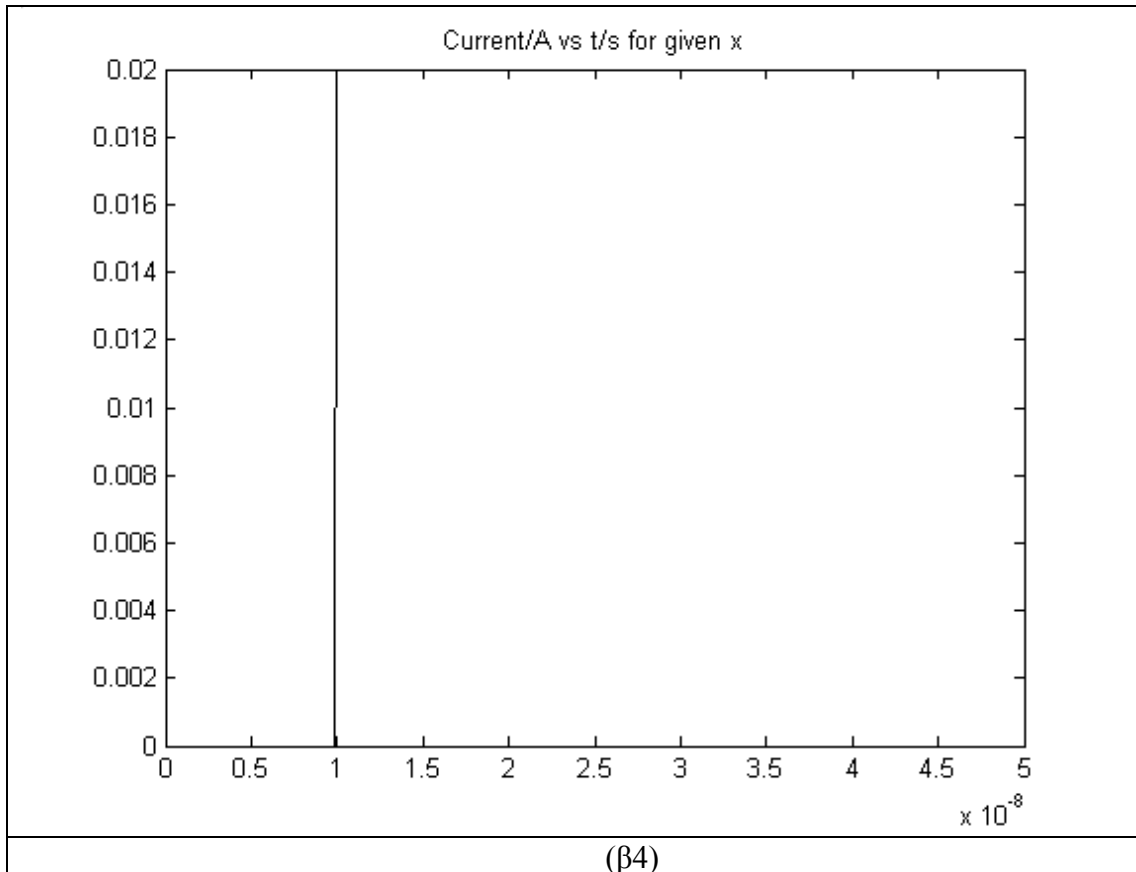
φαίνονται περιπτώσεις με βηματική τάση στην είσοδο της γραμμής. Στο Σχήμα 14.1γ έχουμε την περίπτωση ορθογώνιου παλμού στην είσοδο της γραμμής.

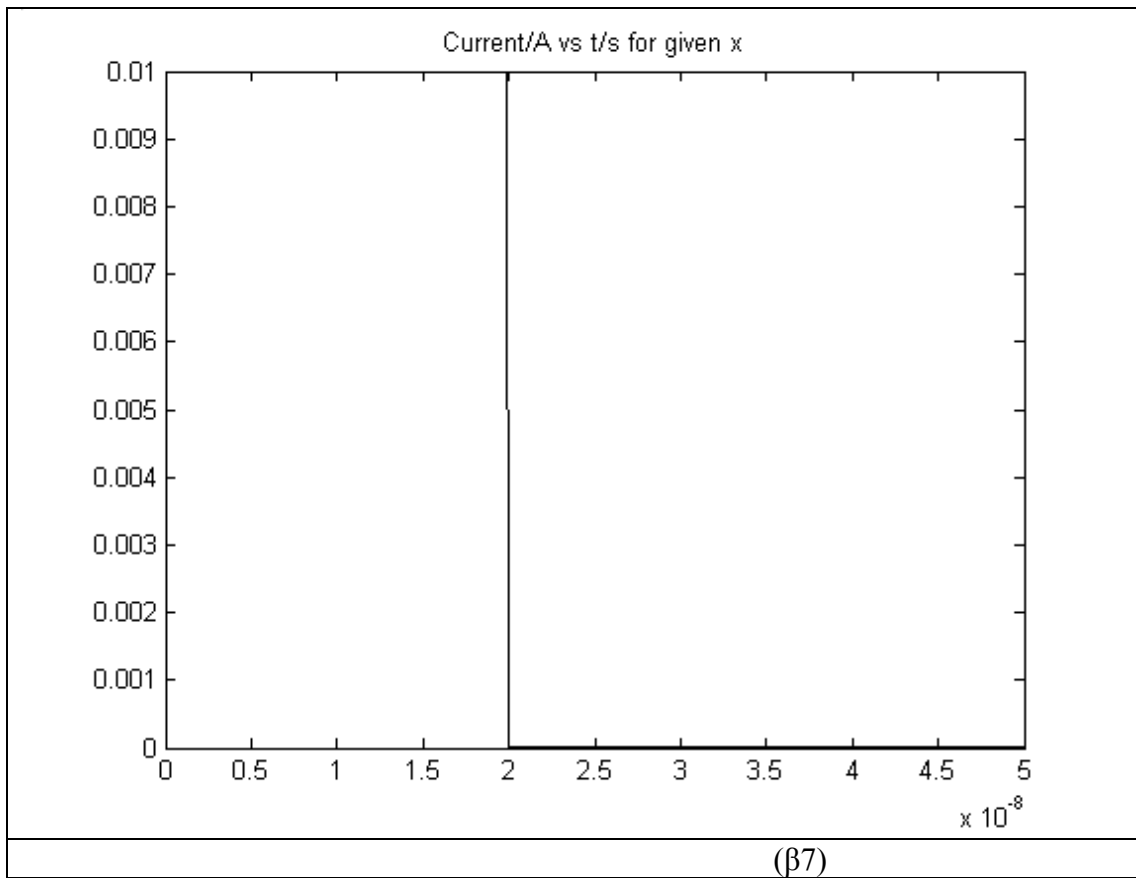
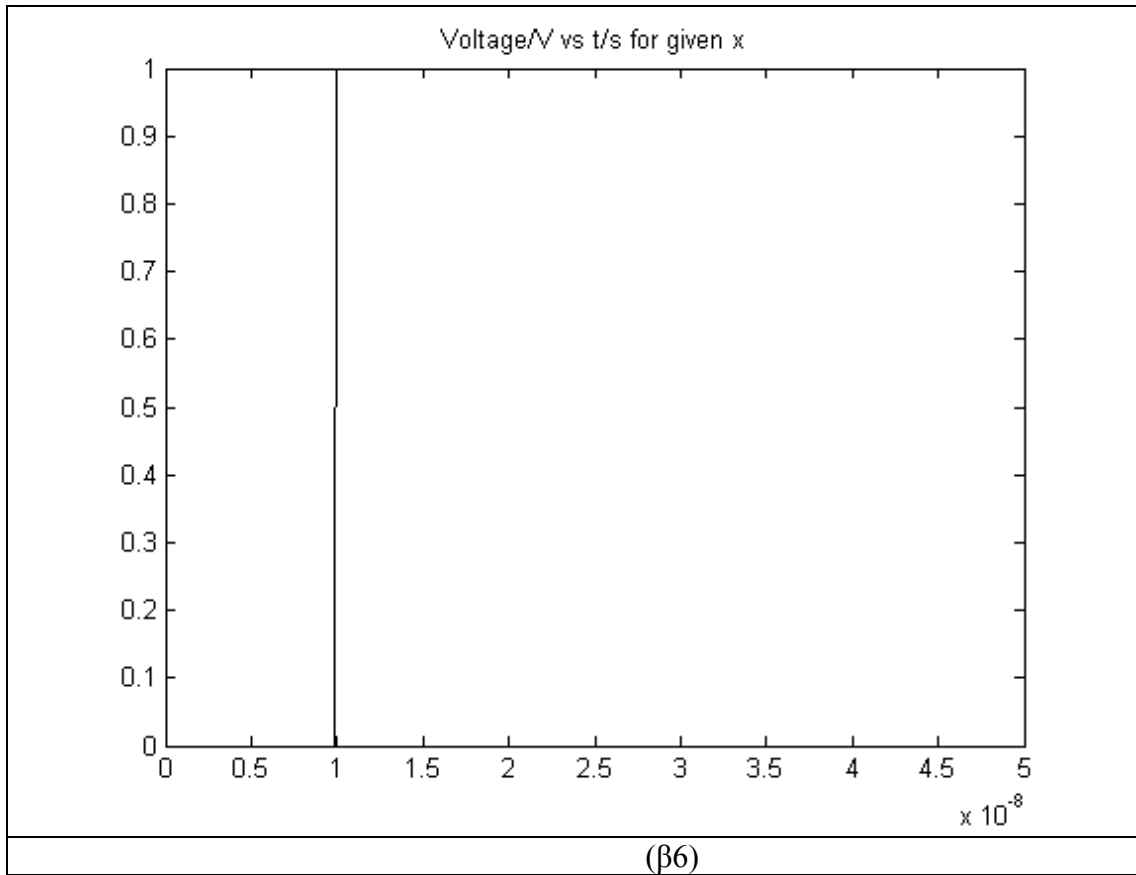
Οι παλμογράφοι έχουν συνήθως αντίσταση εισόδου  $1 \text{ M}\Omega$ , τα ομοαξονικά καλώδια έχουν χαρακτηριστική αντίσταση  $50 \Omega$ . Αν παρατηρούνται στον παλμογράφο παλμοί με εύρος χρόνου μικρό σχετικά με το χρόνο διαδρομής στο καλώδιο που χρησιμοποιείται, τότε πρέπει το καλώδιο να τερματίζεται στην είσοδο του παλμογράφου με αντίσταση  $50 \Omega$ . Έτσι αποφεύγονται ανακλάσεις στην είσοδο του παλμογράφου που μπορεί να οδηγήσουν σε λάθος μέτρηση του ύψους του παλμού.

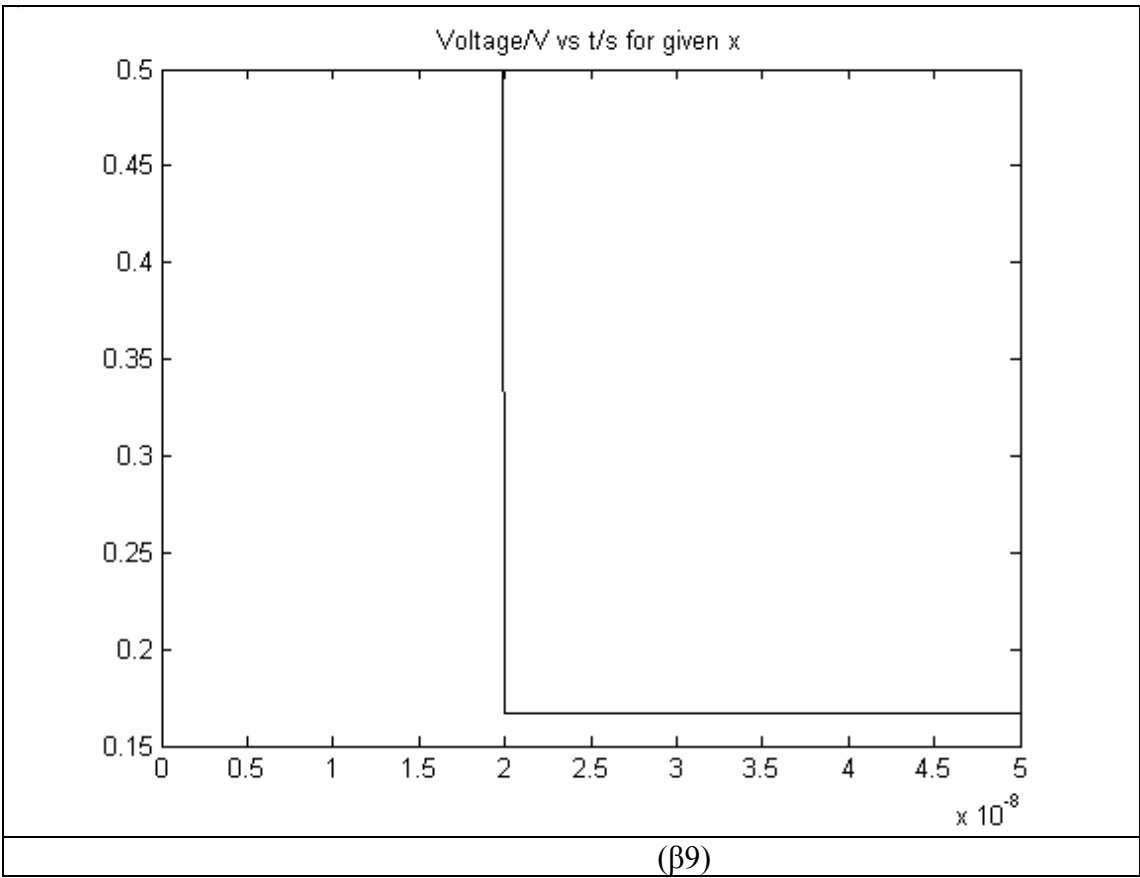
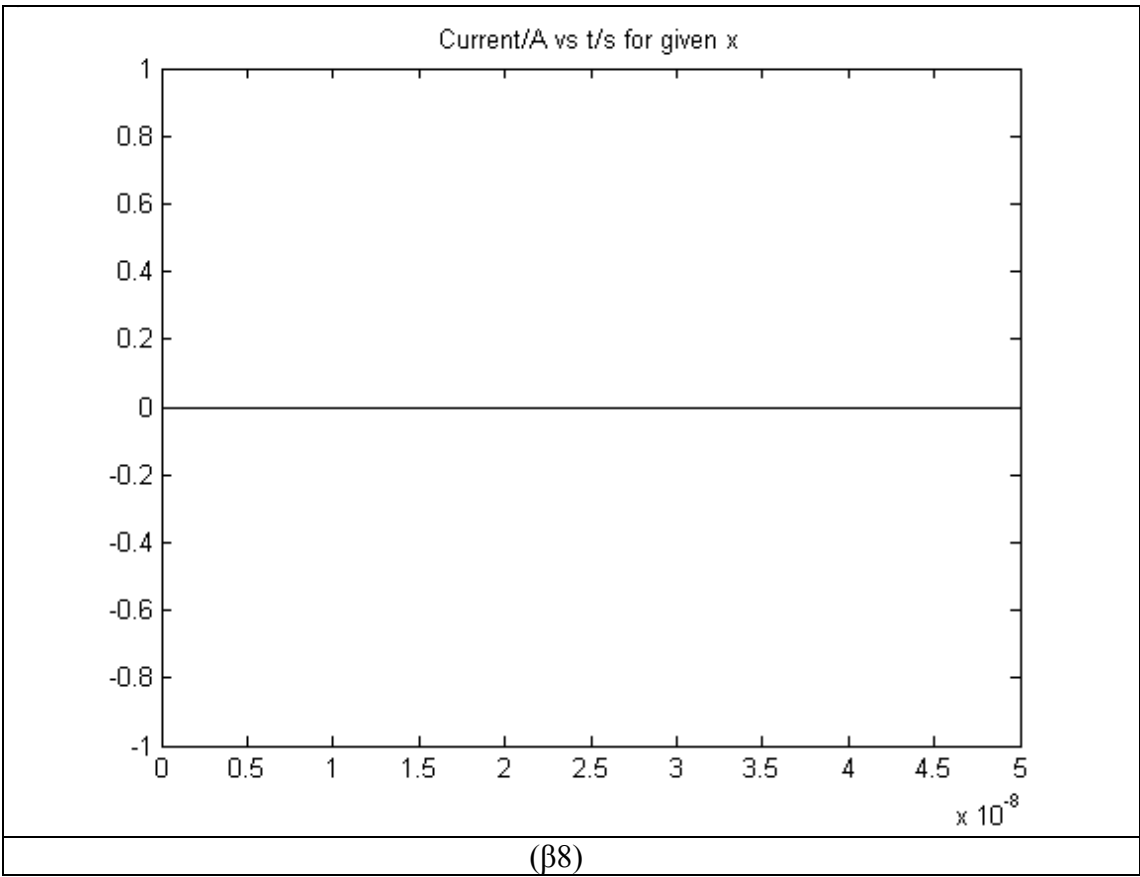


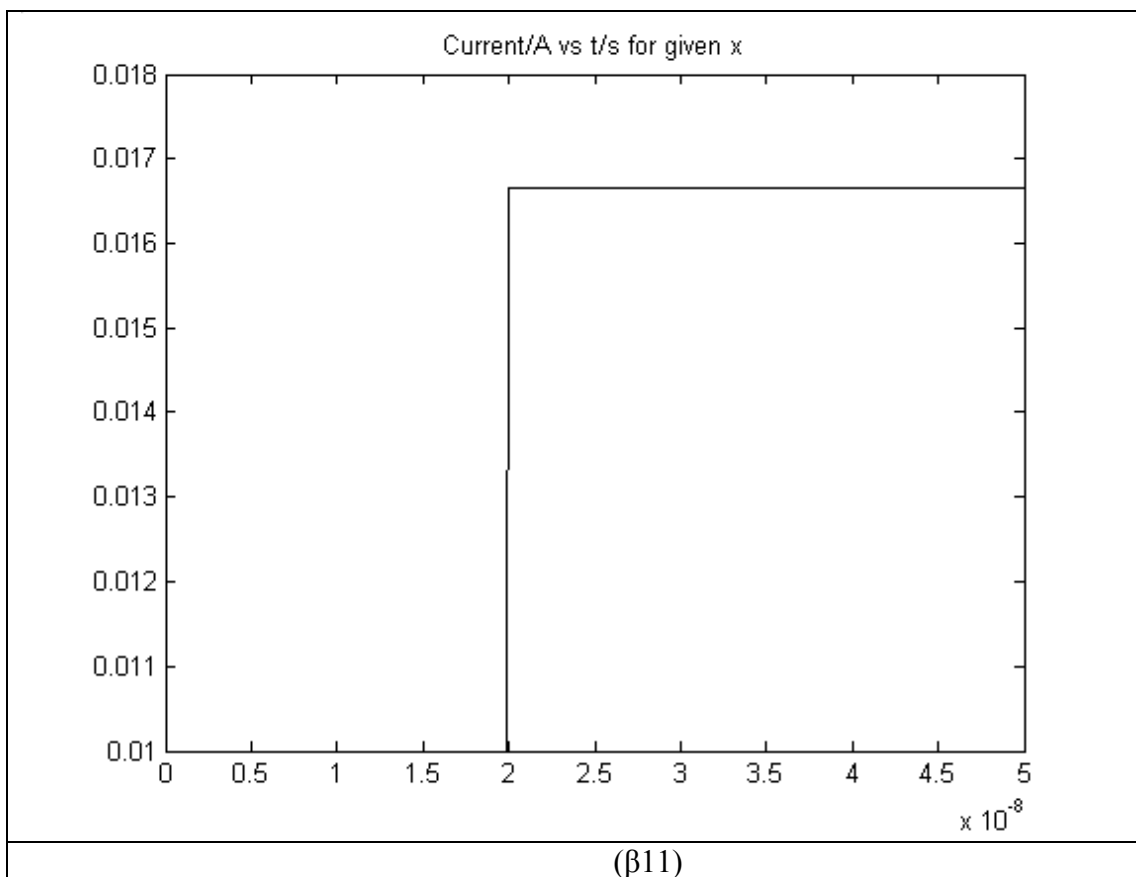
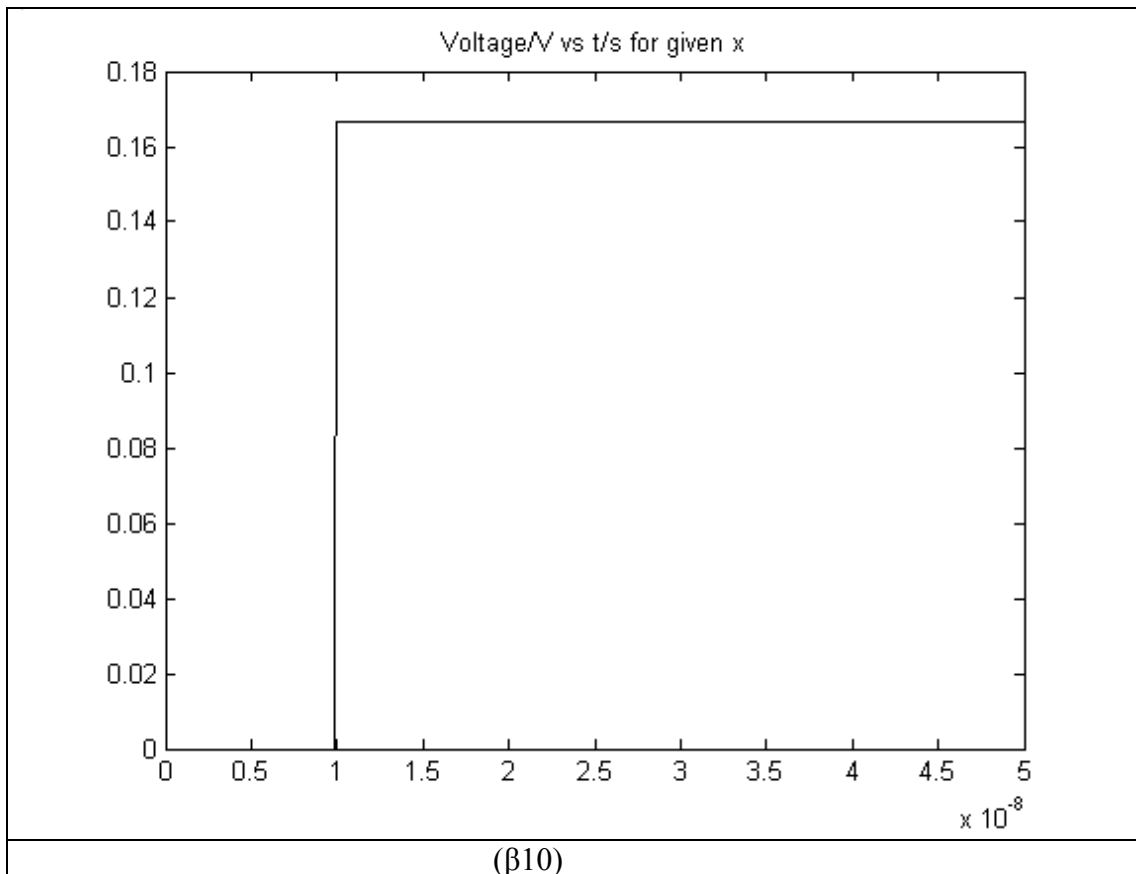


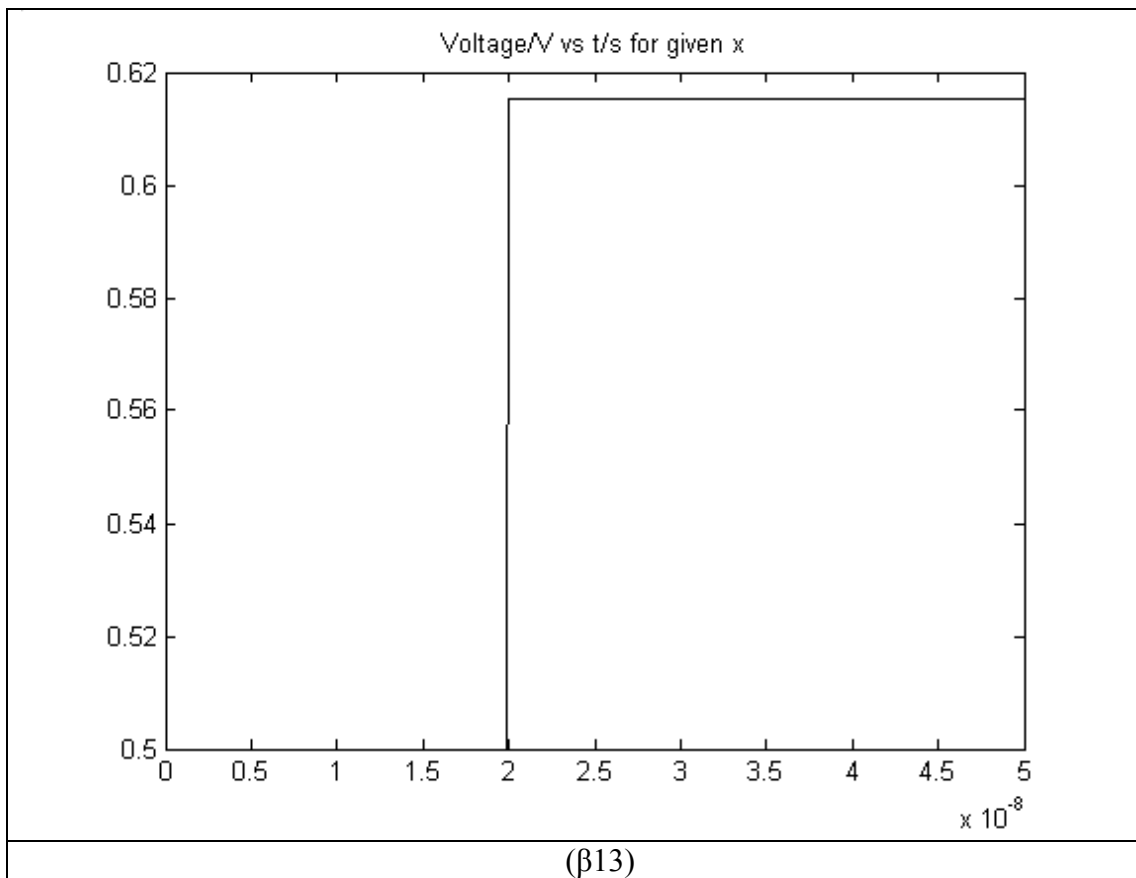
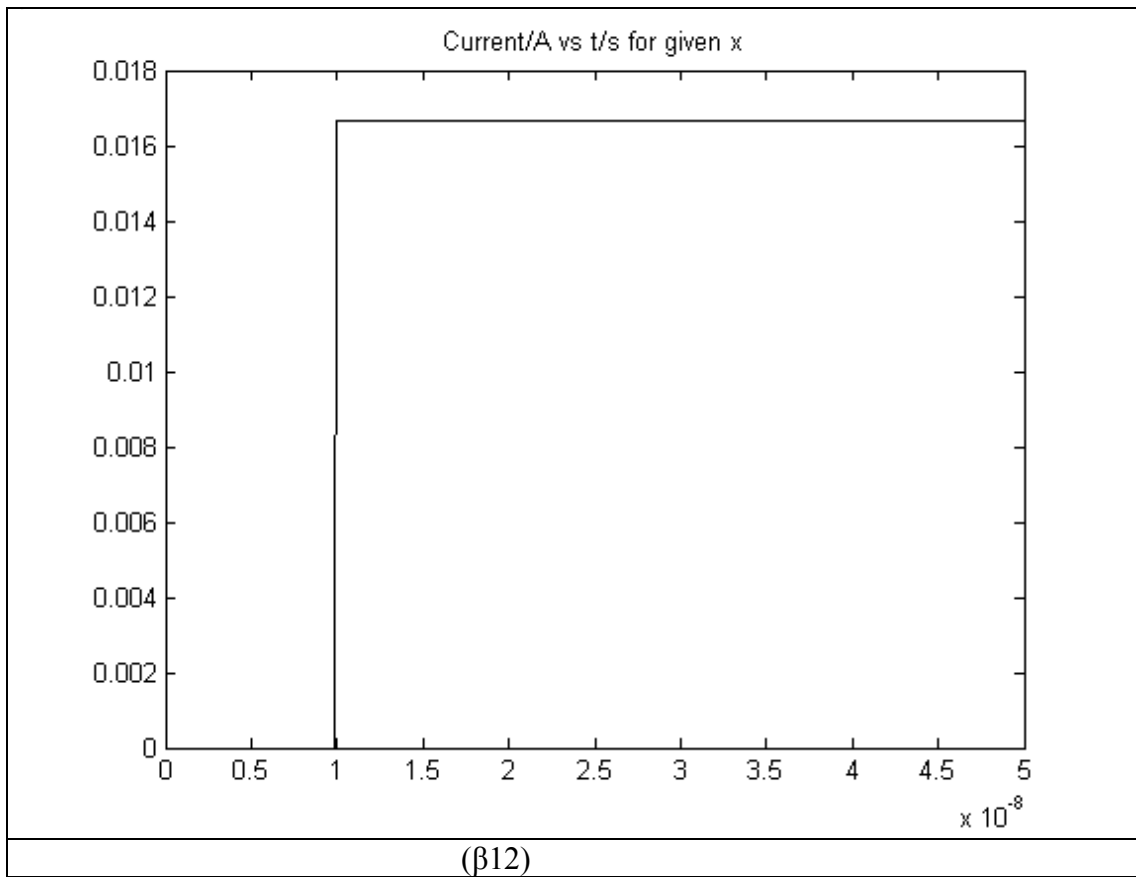


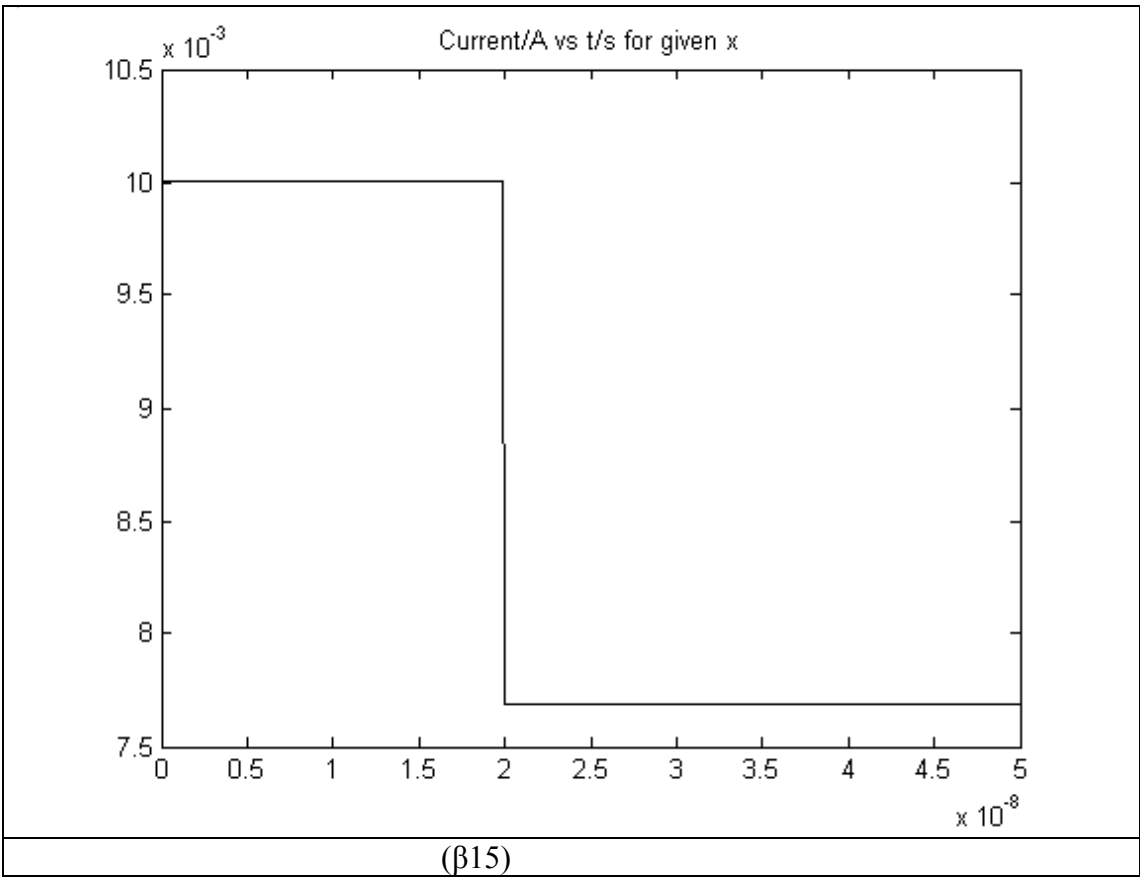
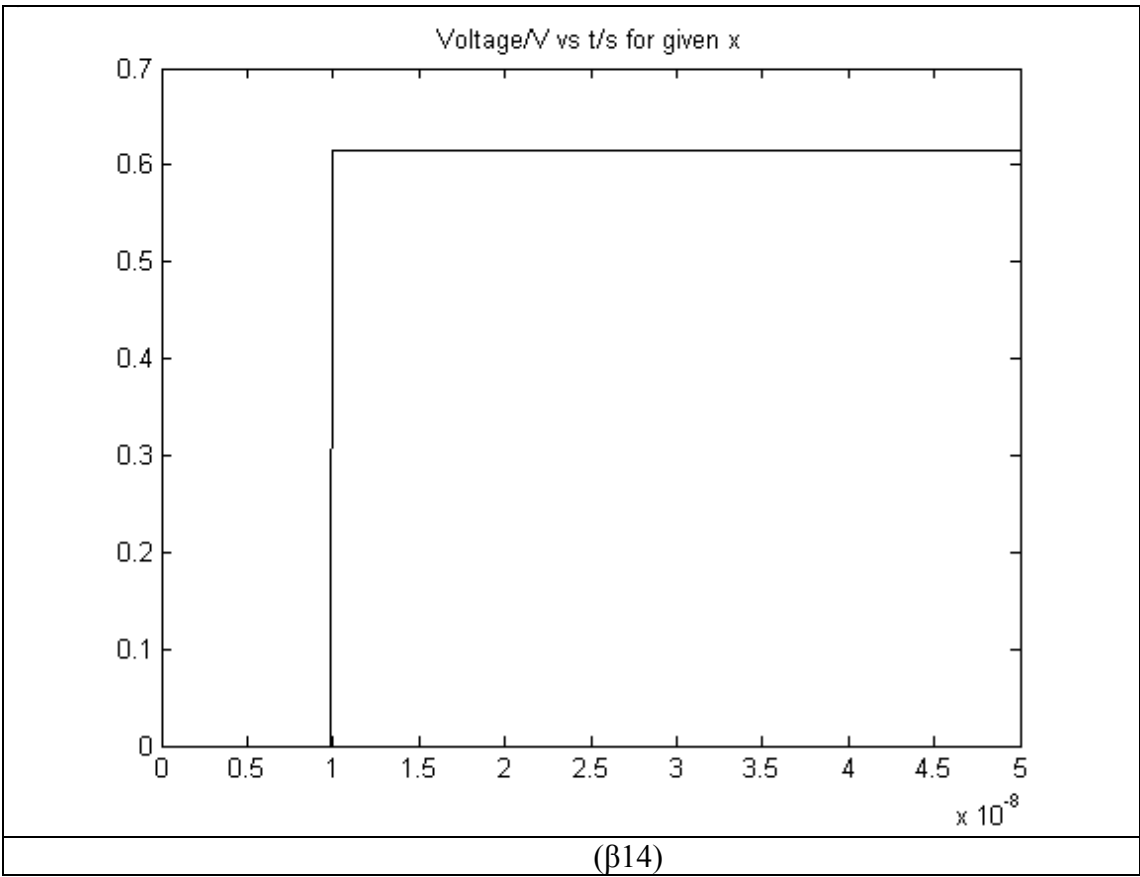


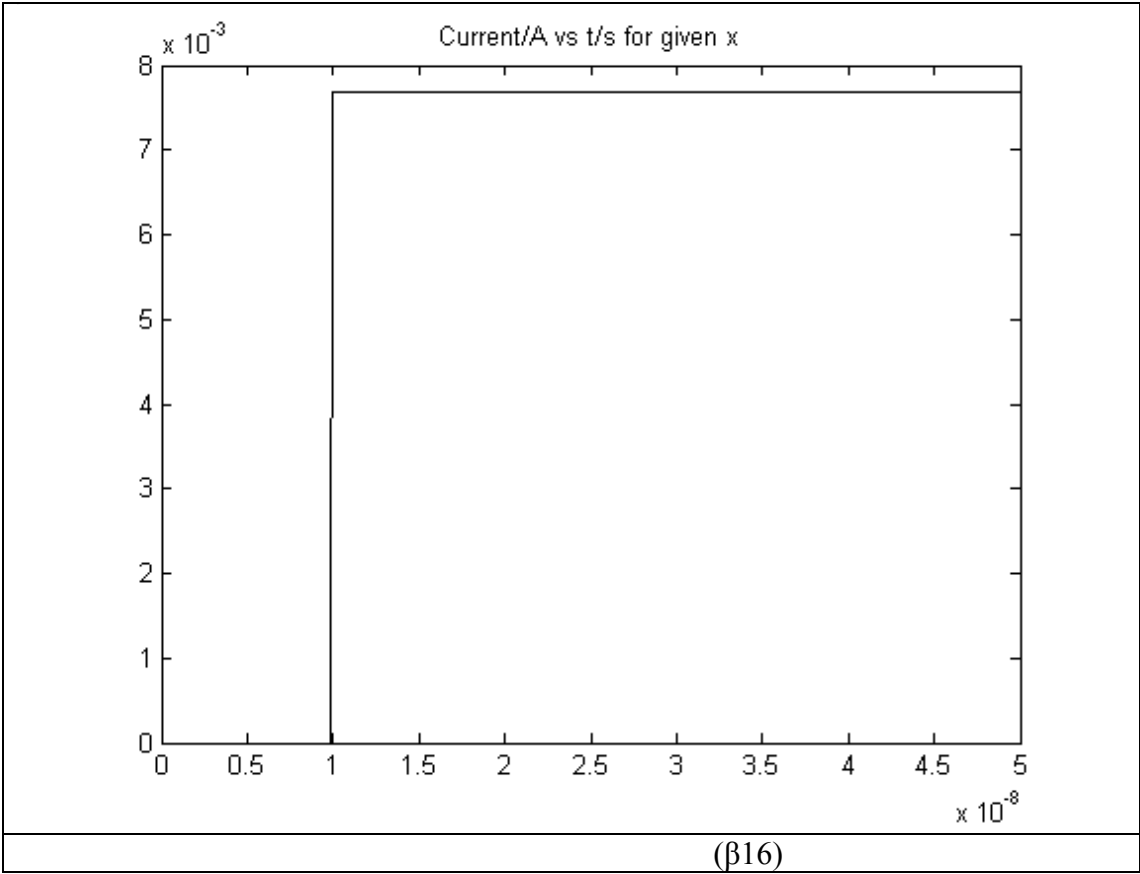




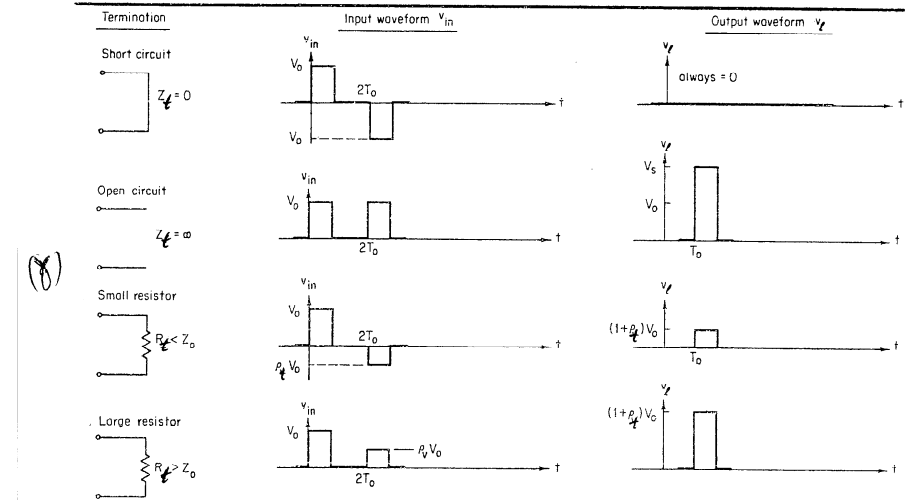


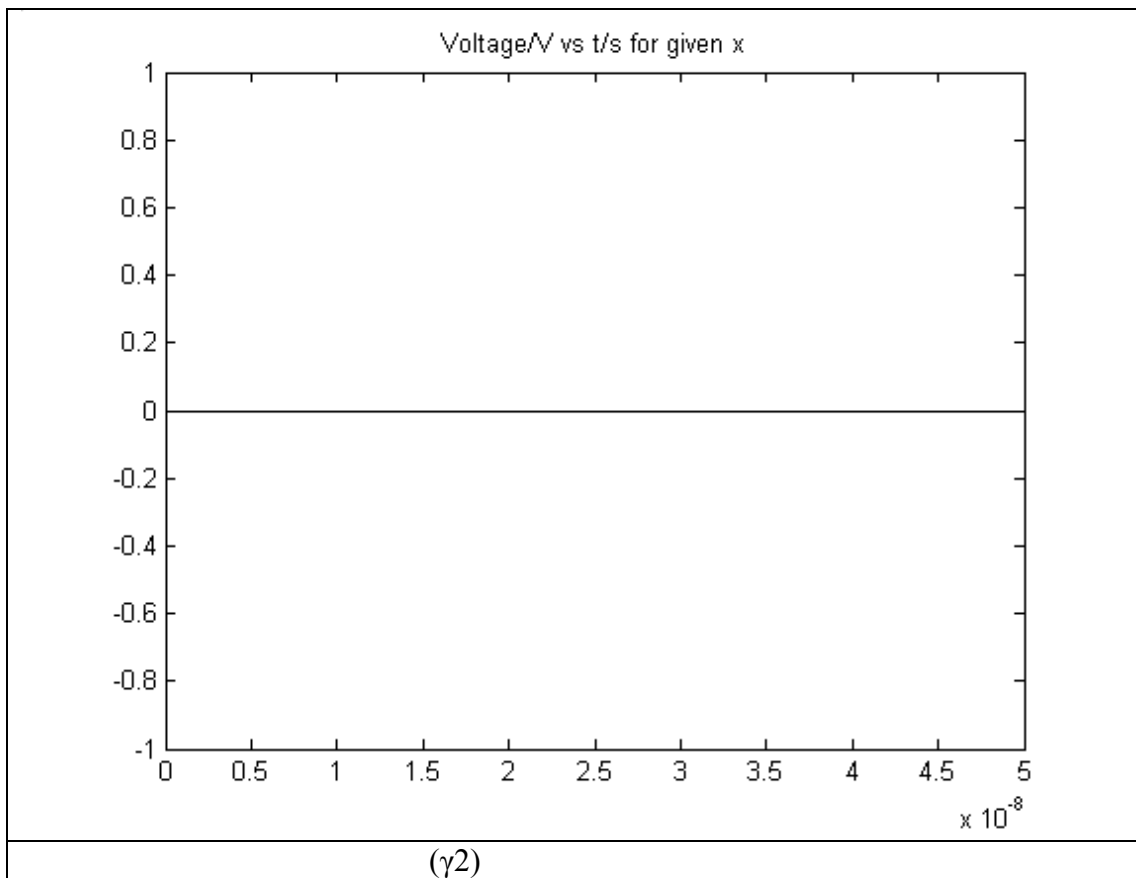
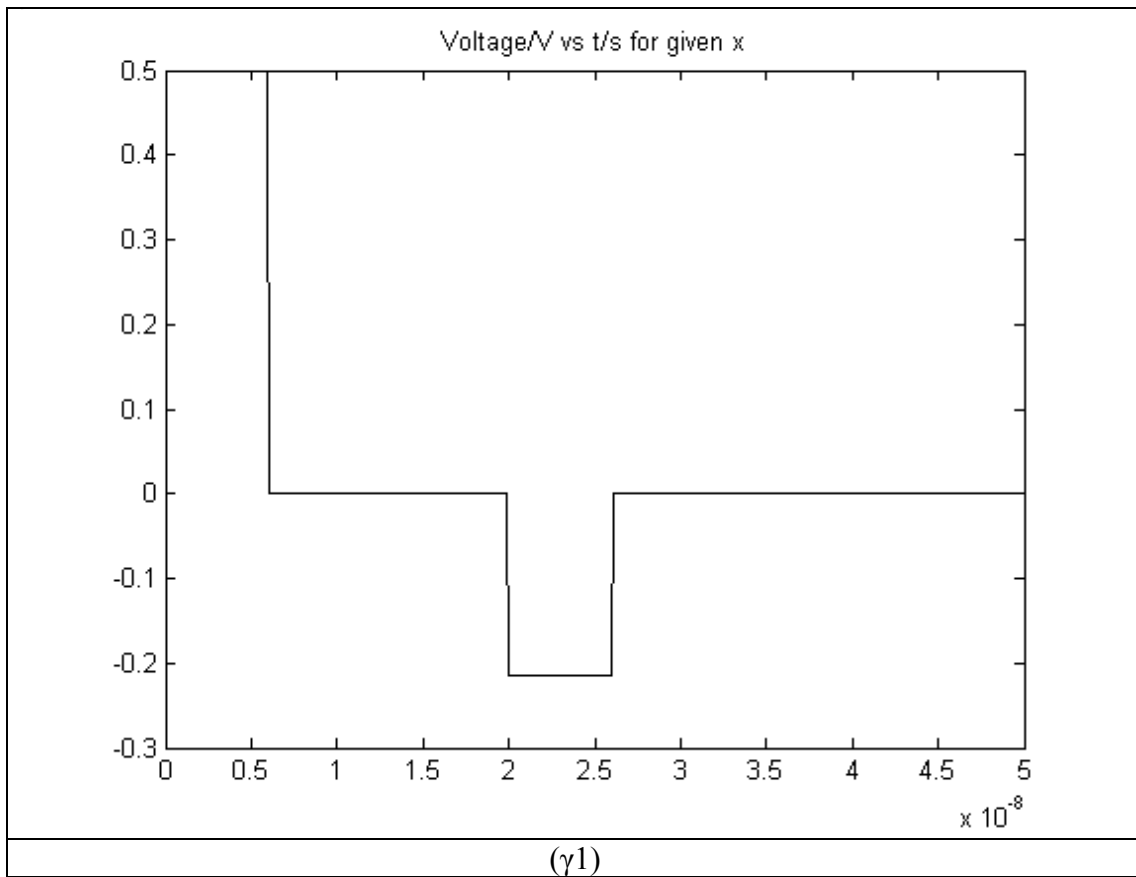




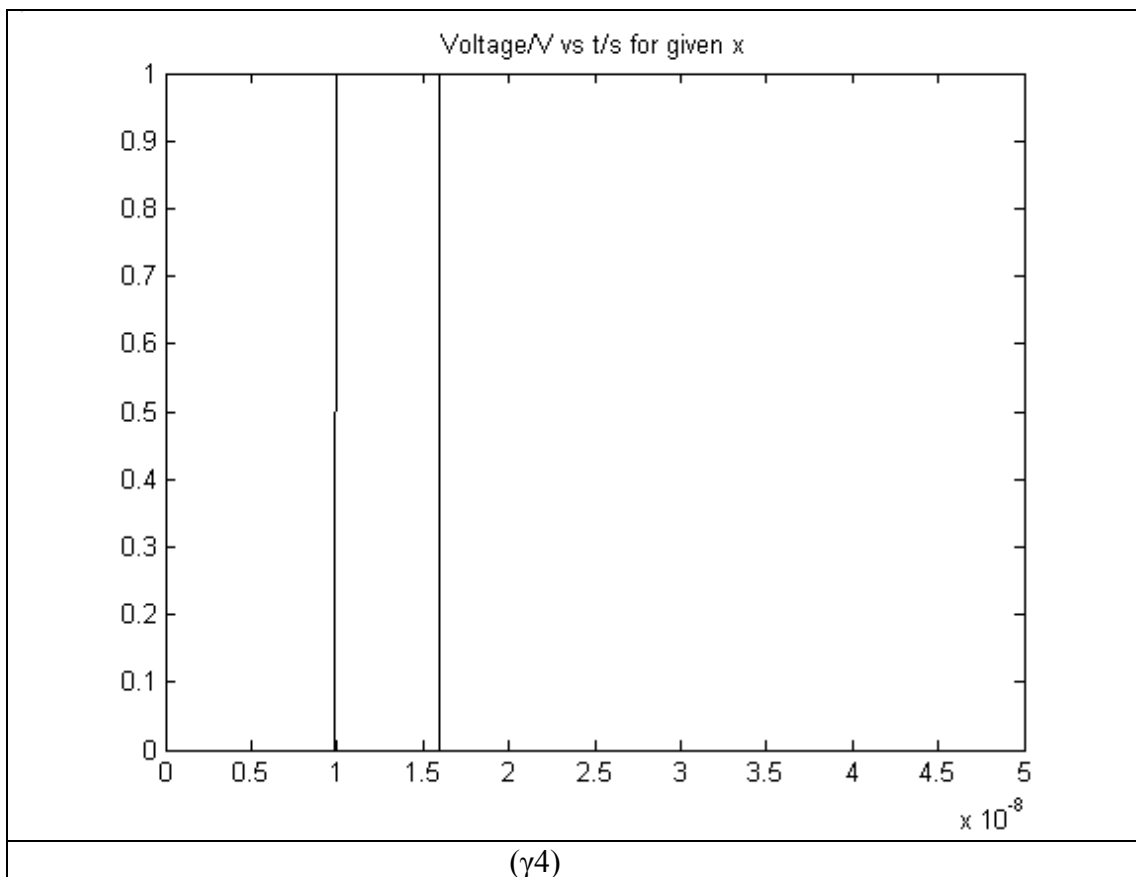
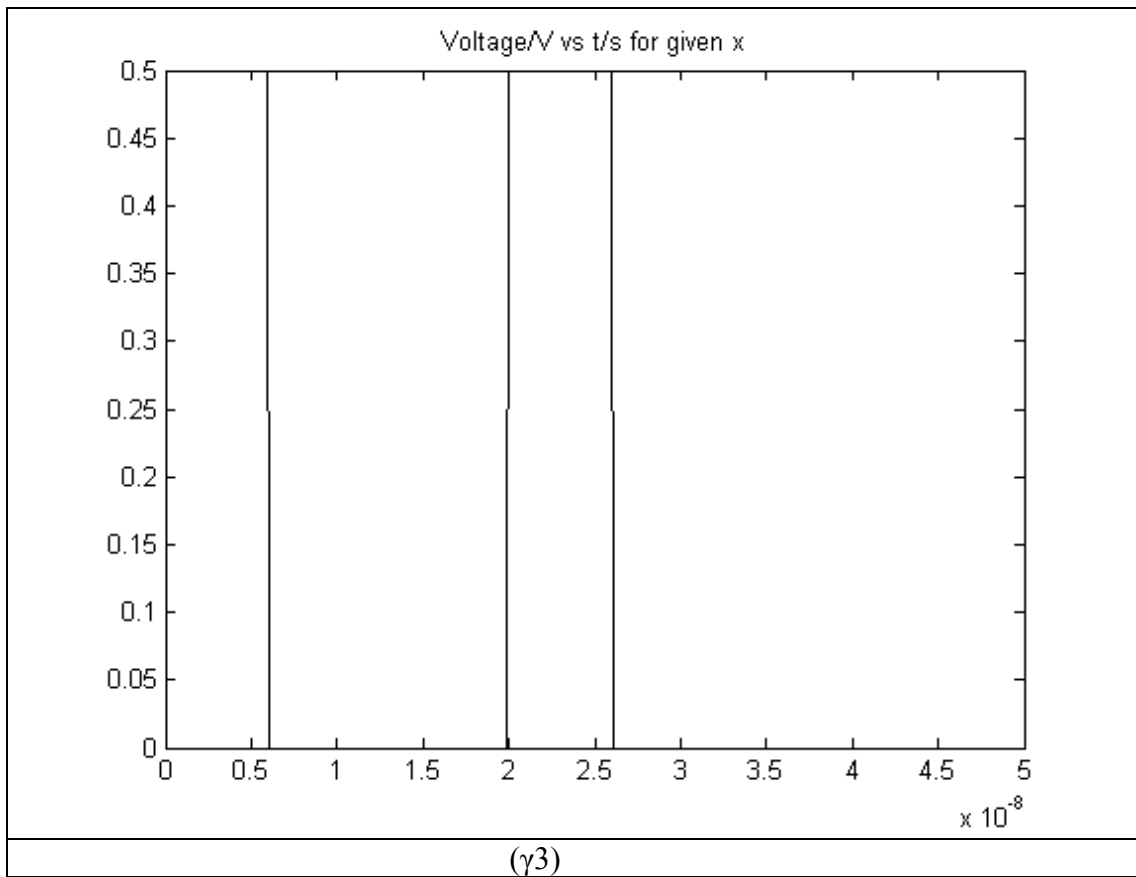


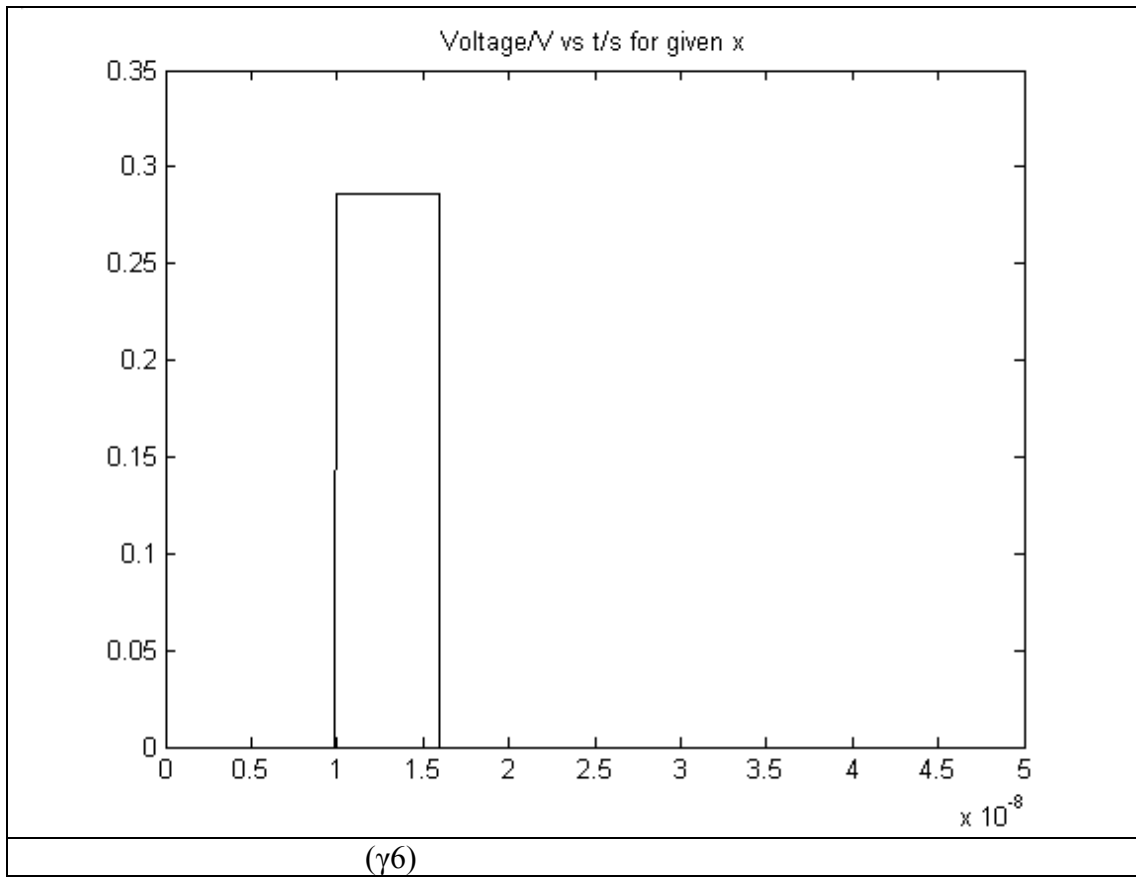
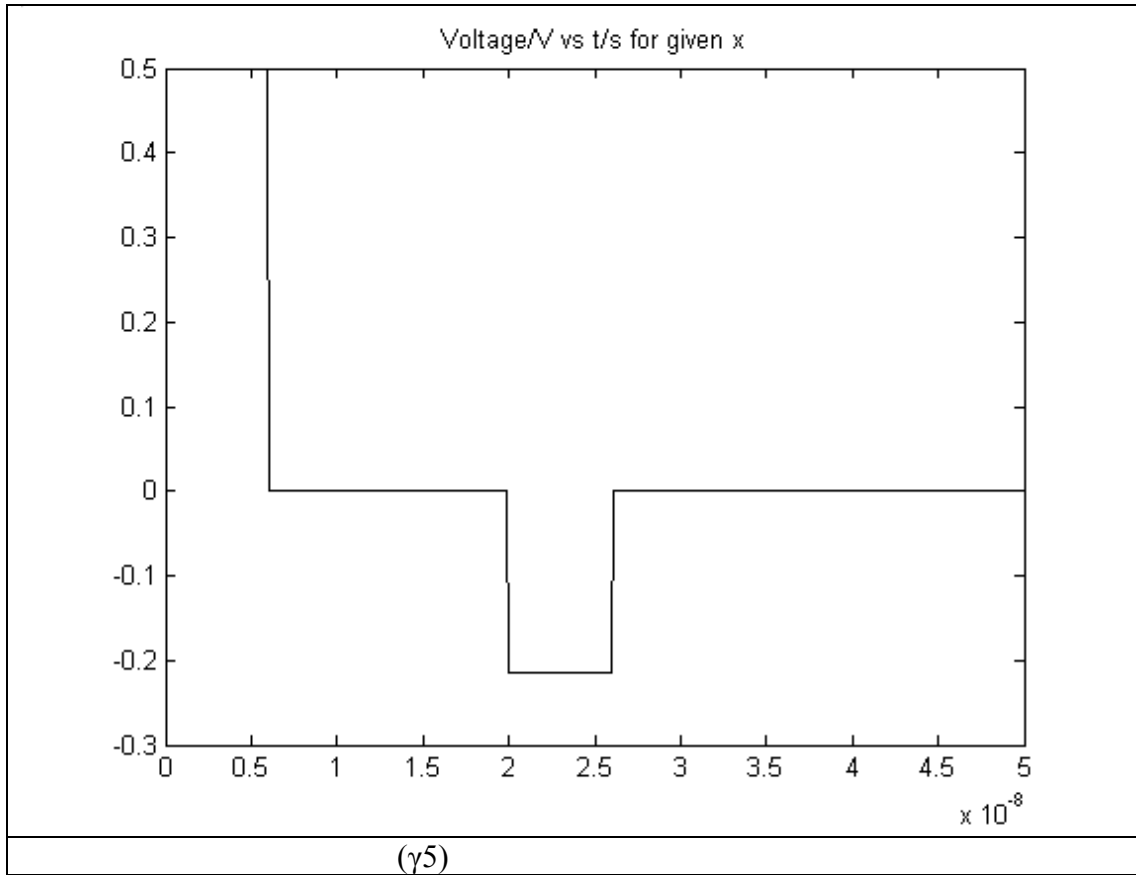
$$V_0 = V_s/2, T = \ell\sqrt{LC}, \rho = (R_f - Z_0)/(R_f + Z_0)$$

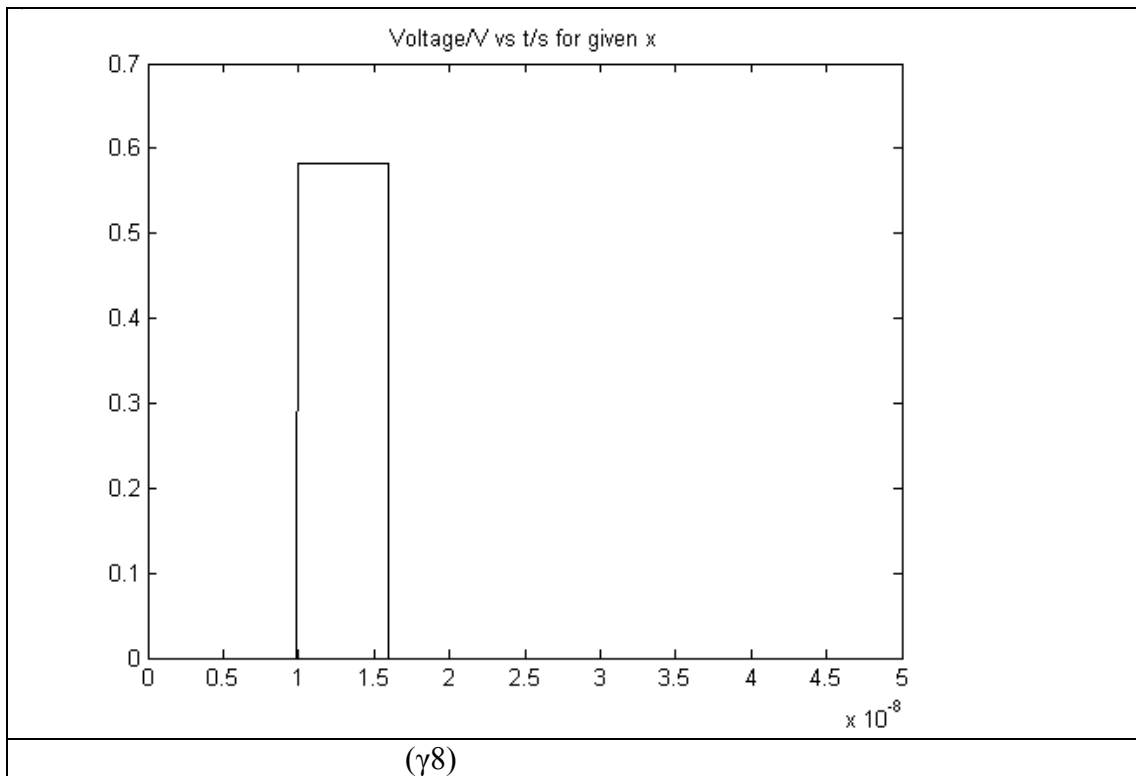
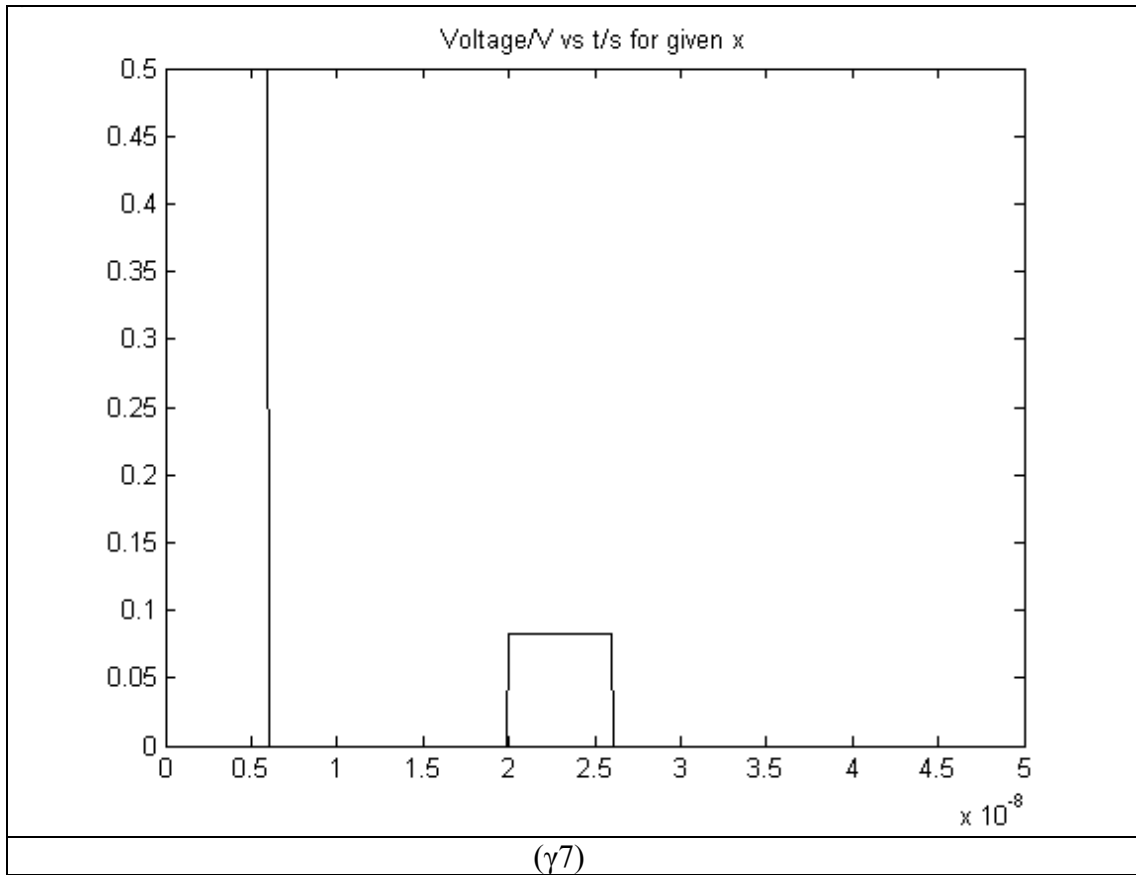










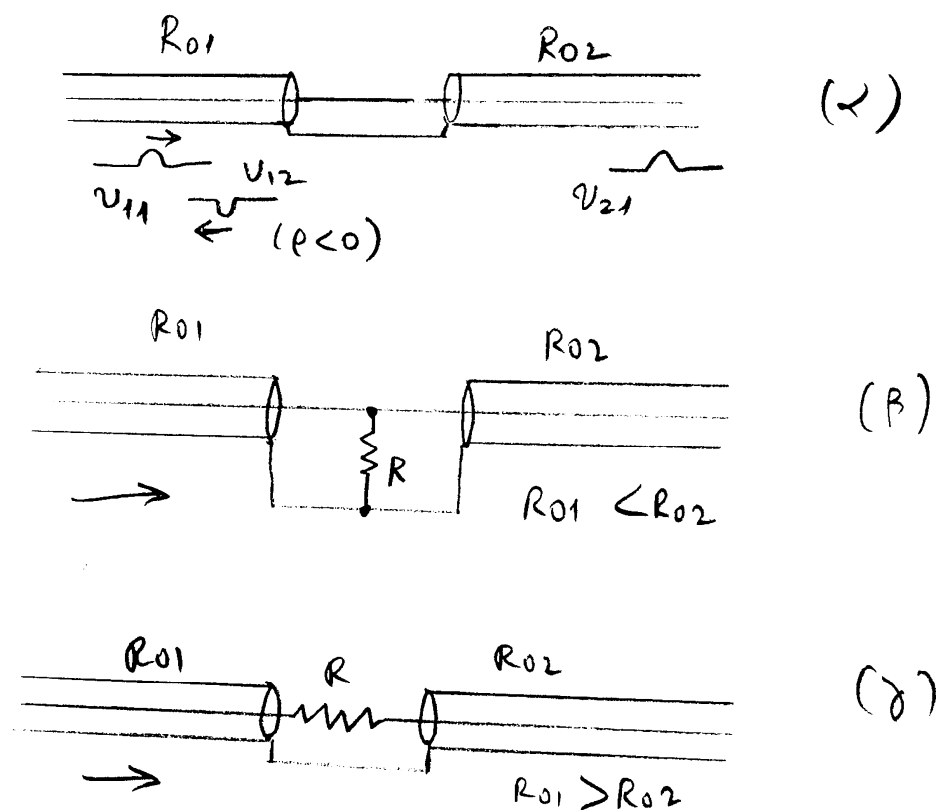


Σχήμα 14.1

Αν υπάρχει ανάκλαση στο τέρμα ο ανακλώμενος παλμός μπορεί να ανακλαστεί ξανά στην είσοδο της γραμμής όπου συνδέεται η διεγείρουσα πηγή. Στο λεγόμενο πρότυπο (standard) NIM (αρχικά σήμαινε Nuclear Instrument Modules, αργότερα National Instrumentation Methods και τώρα απλώς έχει μείνει NIM χωρίς να σημαίνει κάτι), συνήθως απαιτείται οι διάφορες συσκευές για σήματα να έχουν αντίσταση εισόδου αλλά και αντίσταση εξόδου (εσωτερική αντίσταση)  $50 \Omega$ . Η τελευταία απαίτηση λέγεται οπισθοπροσαρμογή, back termination. Καλό είναι να διαβάζει κάποιος τα εγχειρίδια των συσκευών διότι δεν έχουν όλες οι συσκευές οπισθοπροσαρμογή. Υπενθυμίζουμε ότι για γραμμή μεταφοράς χωρίς διηλεκτρικό η ταχύτητα διάδοσης είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Αυτό σημαίνει ότι σε  $3,3 \text{ ns}$  διανύεται απόσταση περίπου  $1 \text{ m}$  ή σε  $1 \text{ ns}$  διανύει περίπου  $30 \text{ cm}$ . Αυτό αντιστοιχεί στην ταχύτητα του φωτός στο κενό, που είναι περίπου  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Για συνήθη ομοαξονικά καλώδια ισχύει ότι σε  $5 \text{ ns}$  διανύεται  $1 \text{ m}$  ή ότι σε  $1 \text{ ns}$  διανύει  $20 \text{ cm}$  αυτό καθορίζει την καθυστέρηση του καλωδίου και αντιστοιχεί σε ταχύτητα σήματος  $2 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

### 15. ΑΠΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΙΣ

Μερικές φορές χρειάζεται να συνδεθούν μεταξύ τους γραμμές (με απλό τρόπο, χωρίς παρεμβολή γραμμής  $\lambda/4$ ) που δεν έχουν την ίδια χαρακτηριστική αντίσταση. Γενικώς χρειάζεται προσοχή διότι θα υπάρχουν ανακλάσεις που μπορεί να είναι ανεπιθύμητες. Τονίζουμε ότι αν συνδεθεί μια δεύτερη γραμμή στο τέλος μιας άλλης, η δεύτερη γραμμή για την άλλη είναι σαν μια τερματική αντίσταση ίση με τη χαρακτηριστική της δεύτερης γραμμής. Έστω ότι έχουμε δυο γραμμές όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.1α.



Σχήμα 15.1

Ο συντελεστής ανάκλασης για παλμό  $v_{11}$  που οδεύει πάνω στη γραμμή 1 προς το τέρμα θα είναι

$$\rho = \frac{R_{02} - R_{01}}{R_{02} + R_{01}} \quad (15.1)$$

Ο ανακλώμενος παλμός θα είναι  $v_{12} = \rho v_{11}$ . Στο Σχήμα 14α υποτίθεται ότι  $R_{02} > R_{01}$  άρα  $\rho > 0$ . Στο τέλος της γραμμής 1 και αρχή της γραμμής 2 (σημείο σύνδεσης) κατά την επικάλυψη των παλμών θα έχουμε  $v_{1t} = v_{11} + v_{12} = v_{21} = (1 + \rho)v_{11} = \rho_T v_{11}$ . Προφανώς

$$v_{21} = v_{1t} = \frac{2R_{02}}{R_{01} + R_{01}} v_{11} \quad (15.2)$$

Αν  $\rho = 0$  (προσαρμογή,  $R_{01} = R_{02}$ ) τότε  $v_{21} = v_{11}$  και  $v_{12} = 0$ , επομένως ο παλμός διέρχεται στη δεύτερη γραμμή χωρίς να γίνεται ανάκλαση στο σημείο σύνδεσης των δυο γραμμών. Για τα ρεύματα ισχύουν κατά την επικάλυψη στο σημείο σύνδεσης,

$$i_{21} = i_{1t} = i_{11} + i_{12} = (1 - \rho)i_{11} \quad (15.3)$$

Εύκολα προκύπτει ότι ισχύει το ισοζύγιο των ισχύων, δηλαδή,

$$\frac{v_{11}^2}{R_{01}} = \frac{v_{12}^2}{R_{01}} + \frac{v_{21}^2}{R_{02}} \quad (15.4)$$

$$\text{ή } i_{11}^2 R_{01} = i_{12}^2 R_{01} + i_{21}^2 R_{02} \quad (15.5)$$

Οι όροι αντιπροσωπεύουν διαδιδόμενη ισχύ

διότι τα  $R_{01}$ ,  $R_{02}$  δεν είναι αντιστάτες που καταναλίσκουν ισχύ αλλά ισοδύναμη αντίσταση που σχετίζεται με απομάκρυνση ενέργειας ένεκα διάδοσης από σημείο σε σημείο όπως ξέρομε από την πεδιακή θεωρία (Κλασική Ηλεκτροδυναμική). Ανάλογα ισχύουν για κεραίες που ακτινοβολούν ενέργεια. Έστω δυο γραμμές μεταφοράς με  $R_{01} < R_{02}$ . Για να έχουμε προσαρμογή κατά τη διάδοση από την 1 στη 2 μπορούμε να κάνουμε αυτό που φαίνεται στο

Σχήμα 15.1β. Ισχύουν  $\frac{1}{R_{01}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{02}}$  άρα για τη βοηθητική αντίσταση ισχύει

$$R = \frac{R_{01}R_{02}}{R_{02} - R_{01}} \quad (15.6)$$

Αν η διάδοση είναι από τη γραμμή 1 προς τη 2 και ισχύει  $R_{01} > R_{02}$  τότε η προσαρμογή μπορεί να γίνει με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 15.1γ. Έχουμε  $R_{01} = R + R_{02}$  άρα

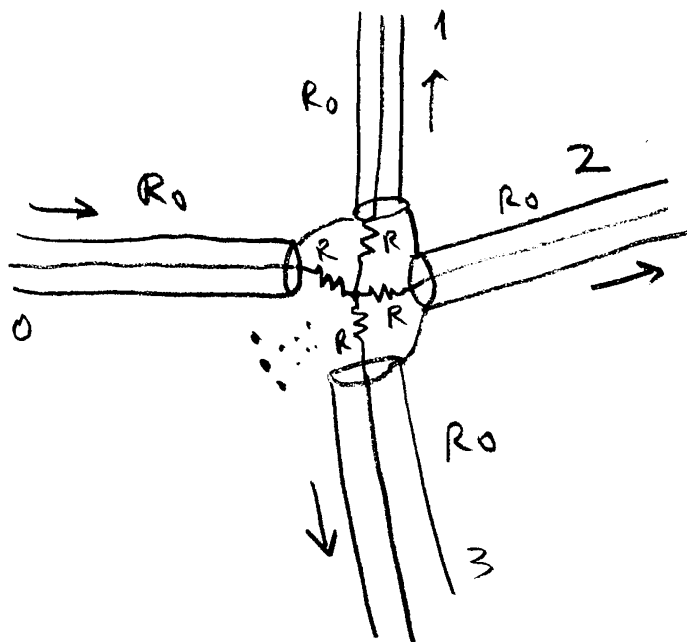
$$R = R_{01} - R_{02} \quad (15.7)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι προσαρμογές που αναφερθήκαμε αναφέρονται σε διάδοση από τη γραμμή 1 προς τη γραμμή 2. Δεν θα υπάρχει προσαρμογή για διάδοση από τη 2 προς την 1. Ανάλογα ισχύουν για προσαρμογή όταν η γραμμή 2 αντικατασταθεί με τη χαρακτηριστική της αντίσταση  $R_{02}$ . Ανάλογα μπορεί να κάνει κάποιος για να έχει οπισθοπροσαρμογή σε συσκευές ή για ανακλώμενα σήματα που διαδίδονται στη

γραμμή 2 και επιστρέφουν διαδιδόμενα προς την 1 και δεν πρέπει να δίνουν ανάκλαση στο σημείο σύνδεσης με τη γραμμή 1.

## 16. ΔΙΑΚΛΑΔΩΤΗΡΕΣ

Μια άλλη χρήσιμη διάταξη είναι ο διακλαδωτήρας που φαίνεται στο Σχήμα 16.1.



Σχήμα 16.1

Μερικές φορές διαδίδεται σήμα σε καλώδιο και θέλουμε το σήμα να «διαχωριστεί» στο τέλος του καλωδίου και να διαδοθούν σήματα σε  $N$  άλλα καλώδια συνδεδεμένα με το πρώτο. Έστω ότι όλα τα  $N+1$  καλώδια έχουν ίδια χαρακτηριστική αντίσταση (ωμική)  $R_0$ . Υποθέτουμε ιδανικά καλώδια χωρίς απώλειες. Χρησιμοποιούμε για το σκοπό αυτό  $N+1$  αντιστάτες  $R$  όπως στο Σχήμα 16.1. Από το κοινό σημείο των αντιστατών  $R$  και το κοινό «σημείο» του εξωτερικού περιβλήματος των καλωδίων η αντίσταση που παρουσιάζει το κάθε καλώδιο σε παλμούς που διαδίδονται προς το συγκεκριμένο καλώδιο είναι προφανώς  $R+R_0$ . Οι αντιστάσεις των  $N$  καλωδίων είναι παράλληλα συνδεδεμένες μεταξύ τους όπως φαίνονται από το κοινό σημείο των αντιστατών και του κοινού σημείου του περιβλήματος. Έχουμε επομένως ότι το καλώδιο (εισόδου) στο οποίο διαδίδεται ο παλμός κινούμενος προς το σημείο ένωσης των  $N+1$  καλωδίων, «βλέπει» αντίσταση  $R_t = R + \frac{R+R_0}{N}$  ή

$$R_t = \frac{(N+1)R + R_0}{N} \quad (16.1)$$

Για να υπάρχει προσαρμογή πρέπει  $R_t = R_0 = \frac{(N+1)R + R_0}{N}$  άρα η αντίσταση  $R$  δίνεται από τη σχέση

$$R = \frac{N-1}{N+1} R_0 \quad (16.2)$$

Είναι προφανές ότι αυτή η διάταξη αστέρα  $(N + 1)$  ίσων αντιστατών είναι εντελώς συμμετρική και οποιοδήποτε άκρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως είσοδος. Είναι ευνόητο ότι τα  $N$  καλώδια στα οποία μεταδίδεται το σήμα μετά τη διακλάδωση είναι όλα οπισθοπροσαρμοσμένα. Αυτό σημαίνει ότι αν το άλλο άκρο τους δεν είναι προσαρμοσμένο ο παλμός που θα γυρίσει προς το κοινό σημείο σύνδεσής τους δε θα σκεδαστεί στο ίδιο καλώδιο αλλά όμως θα εισχωρήσει σε όλα τα υπόλοιπα  $N$  καλώδια. Για τη συνήθη περίπτωση που  $R_0 = 50 \Omega$  και  $N = 2$ , έχουμε

$$R = \frac{50}{3} \Omega = 16,7 \Omega \approx 17 \Omega.$$

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Πρόγραμμα 1

%GENERAL CASE TRANSM LINE STEADY STATE VS x.

```
clear all;
aLe=2000;
c=2.0e8;
r0=50;
rs=0;
rt=0;
phi=1;
alph=0.0;
f=159155;
tper=1/f;
omeg=2*pi*f;
k=omeg/c;
d=r0/(r0+rs);
as=(rs-r0)/(rs+r0);
at=(rt-r0)/(rt+r0);
tL=aLe/c;
vs=1;
pp=1+as^2*at^2*exp(-4*alph*aLe)-2*as*at*exp(-2*alph*aLe)*cos(2*k*aLe);
k=omeg/c;
x=[0.0:aLe/100:aLe];
n=100;
```

```

step=tper/n;
hold on
for j=1:n+1;
t=(j-1)*step;
vvv=(d.*vs/pp).*(exp(-alph.*x).*cos(-k.*x+omeg.*t+phi)+at.*exp(-alph.*(2
.*aLe-x))...
.*cos(-k.*(2.*aLe-x)+omeg.*t+phi)-as.*at.*exp(-alph.*(2.*aLe+x))...
.*cos(k.*(2.*aLe-x)+omeg.*t+phi)-as.*at^2.*exp(-alph.*(4.*aLe-x))...
.*cos(k.*x+omeg.*t+phi));
%figure(1)
plot(x,vvv,'k');
end
title('voltage/V vs x/m');
hold off
%xx=[0.0:aLe/100:aLe];
%hold on;
%for jj=1:n+1;
% t=(jj-1)*step;
%iii=(d.*vs/pp).*(exp(-alph.*xx).*cos(-k.*xx+omeg.*t+phi)-at.*exp(-alph.*(2.*...
aLe-xx)) .*cos(-k.*(2.*aLe-xx)+omeg.*t+phi)-as.*at.*exp(alph.*(2.*aLe+xx))...
% .*cos(k.*(2.*aLe-xx)+omeg.*t+phi)+as.*at^2.*exp(-alph.*(4.*aLe-xx))...
.*cos(k.*xx+omeg.*t+phi));
%figure(1)
%plot(xx,iii,'k');
%end
%title('current/A vs x/m');
%hold off

```

#### Πρόγραμμα 2

```

function y=eerrffcc(x,z)
y=0;
if x>0;
y=erfc(0.5/sqrt(x/z));
end

```

#### Πρόγραμμα 3

```

%ENVELOPE OF OPOSITE WAVES VS x.
clear all;
vf=3;
vr=1;
phif=0.6;
phir=1.1;
aLe=3.1;
c=2.0e8;
f=1e8;
omeg=2*pi*f;
x=[0.0:aLe/100:aLe];
vvv=sqrt(vf^2+vr^2+2*vf*vr*cos(2*omeg*x/c-phif+phir));
hold on
plot(x,vvv,'k');
plot(x,-abs(vvv),'k');
hold off

```

#### Πρόγραμμα 4



```
%SIMPLE VOLTAGE ENVELOPE REAL STEADY VS x.
```

```
clear all;
va=1;
aLe=2000;
c=2.0e8;
f=159155;
omeg=2*pi*f
x=[0.0:aLe/700:aLe];
%vqv=va*abs(sin(omeg*(aLe-x)/c));
vqv=va*abs(cos(omeg*(aLe-x)/c));
hold on
plot(x,vqv,'k');
plot(x,-vqv,'k');
hold off
```

Πρόγραμμα 5

```
function varargout = guide_transmlinepropt_xt(varargin)
% GUIDE_TRANSMLINEPROPT_XT Application M-file for guide_transmlinepropt_xt.fig
% FIG = GUIDE_TRANSMLINEPROPT_XT launch guide_transmlinepropt_xt GUI.
% GUIDE_TRANSMLINEPROPT_XT('callback_name', ...) invoke the named callback.
% Last Modified by GUIDE v2.0 03-Jan-2004 12:15:14
if nargin == 0 % LAUNCH GUI
fig = openfig(mfilename,'reuse');
% Use system color scheme for figure:
set(fig,'Color',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
% Generate a structure of handles to pass to callbacks, and store it.
handles = guihandles(fig);
guidata(fig, handles);
if nargin > 0
varargout{1} = fig;
end
elseif ischar(varargin{1}) % INVOKE NAMED SUBFUNCTION OR CALLBACK
try
[varargout{1:nargout}] = feval(varargin{:}); % FEVAL switchyard
catch
disp(lasterr);
end
end
%| ABOUT CALLBACKS:
%| GUIDE automatically appends subfunction prototypes to this file, and
%| sets objects' callback properties to call them through the FEVAL
%| switchyard above. This comment describes that mechanism.
%|
%| Each callback subfunction declaration has the following form:
%| <SUBFUNCTION_NAME>(H, EVENTDATA, HANDLES, VARARGIN)
%|
%| The subfunction name is composed using the object's Tag and the
%| callback type separated by '_', e.g. 'slider2_Callback',
%| 'figure1_CloseRequestFcn', 'axis1_ButtondownFcn'.
%|
%| H is the callback object's handle (obtained using GCBO).
%|
%| EVENTDATA is empty, but reserved for future use.
%|
%| HANDLES is a structure containing handles of components in GUI using
%| tags as fieldnames, e.g. handles.figure1, handles.slider2. This
%| structure is created at GUI startup using GUIHANDLES and stored in
%| the figure's application data using GUIDATA. A copy of the structure
%| is passed to each callback. You can store additional information in
%| this structure at GUI startup, and you can change the structure
%| during callbacks. Call guidata(h, handles) after changing your
%| copy to replace the stored original so that subsequent callbacks see
```

```

%| the updates. Type "help guihandles" and "help guidata" for more
%| information.
%|
%| VARARGIN contains any extra arguments you have passed to the
%| callback. Specify the extra arguments by editing the callback
%| property in the inspector. By default, GUIDE sets the property to:
%| <MFILENAME>(<SUBFUNCTION_NAME>', gcbo, [], guidata(gcbo))
%| Add any extra arguments after the last argument, before the final
%| closing parenthesis.
% -----
function varargout = slider1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.slider1.
speed = get(h,'value');
info.delay=0.1/speed;
guidata(gcbo, info);
% -----
function varargout = pushbutton1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.pushbutton1.
speed=1.0; %ÓÔÍÔÄËÄÓÔÇÓ ÔÁ×ÔÔÇÔÁÓ ÁÐÄËËÏËÉÓÇÓ ÔÇÓ ÊËÍÇÓÇÓ (ÖÖÓËË.=1)
delay=0.1/speed;
info.delay = delay;
guidata(gcbo, info);
%GENERAL PROPAGATION ON TRANSMISION LINE VERSUS TIME.
f=1.0e8; %frequency (Hz)
c=2.0e8; %velocity (m/s)
apo=0.0; %loses (s^-1)
r0=50; %charact. impedance (Ohm)
rs=50; %source resistor
rt=0; %termination resistor
aLe=1.5; %line length (m)
tL=aLe/c; %propagation time (s)
as=(rs-r0)/(rs+r0); %source refl. coef.
at=(rt-r0)/(rt+r0); %term. refl. coef.
divi=r0/(r0+rs); %voltage division
Nt=200;Mx=100; %time and length resolution
tmax=40*tL; %overall calculation time (times tL)
t=[0.:tmax/Nt:tmax];
N=length(t);
x=[0.:aLe/Mx:aLe];
M=length(x);
vtx=zeros(N,M);
m=fix(t/tL)+1;
for j=1:M;
for i=1:N;
vzv(i)=0;
for r=1:m(i);
aa=(-1)^(r+1)*x(j)+2*aLe*fix(r/2);
bb=t(i)-aa/c;
aposv=exp(-apo*aa);
inpu=sin(2*pi*f*bb);
thstep=divi*as^(fix((r-1)/2))*at^(fix(r/2))*aposv*inpu*(sign(bb)+1)/2;
vzv(i)=vzv(i)+thstep;
end
vtx(i,j)=vzv(i);
end
end
%-----
%DISPLAYING THE VOLTAGE ACROSS THE LINE VERSUS TIME
figure(gcf)
set(gcf,'DoubleBuffer','on'); %ÓÔÄËÄÑÏËÉÇÓÇ ÔÇÓ ÌËÍÇÓ
hold on
time=40*tL; %Max time for displaying the voltage across the line
Nm=fix(time/(tmax/Nt))+1;

```

```

vtxm=max(max(vtx,[],2));
for i=1:Nm;
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'-b');
set(hdl,'LineWidth',3);
axis([0 aLe -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
hold off
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'-b');
set(hdl,'LineWidth',3);
axis([0 aLe -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
info = guidata(gcbo);
pause(info.delay) %ΔΑΪΌÇ (όã s)
hold on
end
close(gcf)
hold off
close(1)

```

#### Πρόγραμμα 6

```

function y=htepiderm(a1,a2,t,tL)
%h(t) FOR EPIDERMICO FENOMENO.
y=0;
if t-tL>0
y=a1*(exp(-a2/(t-tL)))/((t-tL)^1.5);
end

```

#### Πρόγραμμα 7

```

function y=pmpulse(G,N,R,t,taus,tau)
%PULSE LIKE PM PULSE.
y=0.;
if t>0;
y=-G*N*(1.6022e-19)*R*(exp(-t/taus)-exp(-t/tau))/(tau-taus);
end

```

#### Πρόγραμμα 8

```

function y=sininp(x,omeg)
%FUNCTION TO CALCULATE INPUT VOLTAGE.
y=sin(omeg*x);

```

#### Πρόγραμμα 9

```

function y=sqrf(x,dt)
y=stepf(x)-stepf(x-dt);

```

#### Πρόγραμμα 10

```

function y=stepf(x)
y=0;
if x>=0;
y=1;
end

```

#### Πρόγραμμα 11

```

%SYMBOLH DY0 ANTITHETON KYMATON VS x.
clear all;
a1=3;

```

```

a2=1;
f1=0.6;
f2=1.1;
aLe=3.1;
c=2.0e8;
f=1e8;
omeg=2*pi*f;
tL=aLe/c;
n=100;
x=[0.0:aLe/100:aLe];
hold on;
%for j=1:90;
for j=1:2;
%t=j*tL/n;
t=0.5e-8+(j-1)*0.05e-8;
vvv=a1*cos(omeg*(t-x/c)+f1)+a2*cos(omeg*(t+x/c)+f2);;
plot(x,vvv,'k');
end
hold off

```

### Πρόγραμμα 12

```

%TRANSMISION LINE DISCHARGE VERSUS TIME.
clear all;
c=2.0e8;
apo=0.0;
r0=50;
rt=50;
va=1;
aLe=2;
tL=aLe/c;
x=1*aLe;
at=(rt-r0)/(rt+r0);
divi=r0/(r0+rt);
t=[0.:tL/100:9*tL];
N=length(t);
m=fix(t/tL)+1;
for i=1:N;
vvv(i)=0;
iii(i)=0;
for r=0:m(i);
aa1=aLe*(2*r+1)-x;
aa2=aLe*(2*r+1)+x;
bb1=t(i)-aa1/c;
bb2=t(i)-aa2/c;
aposv1=exp(-apo*aa1);
aposv2=exp(-apo*aa2);
thstep1=divi*(at^r)*(aposv1*stepf(bb1)+aposv2*stepf(bb2));
thstep2=(divi/r0)*(at^r)*(aposv1*stepf(bb1)-aposv2*stepf(bb2));
vvv(i)=vvv(i)+thstep1;
iii(i)=iii(i)+thstep2;
end
end
figure(1);
plot(t,va*(1-vvv),'k');
title('Voltage/V vs t/s for given x');
figure(2);
plot(t,va*iii,'k');
title('Current/A vs t/s for given x');

```

### Πρόγραμμα 13

```

%TRANSMISION LINE DISCHARGE VERSUS x.

```

```

clear all;
c=2.0e8;
apo=0.0;
r0=50;
rt=50;
va=1;
aLe=2;
tL=aLe/c;
t=1.5*tL;
at=(rt-r0)/(rt+r0);
divi=r0/(r0+rt);
x=[0:aLe/100:aLe];
N=length(x);
m=fix(t/tL)+1;
for i=1:N;
vzv(i)=0;
iii(i)=0;
for r=0:m;
aa1=aLe*(2*r+1)-x(i);
aa2=aLe*(2*r+1)+x(i);
bb1=t-aa1/c;
bb2=t-aa2/c;
aposv1=exp(-apo*aa1);
aposv2=exp(-apo*aa2);
thstep1=divi*(at^r)*(aposv1*stepf(bb1)+aposv2*stepf(bb2));
thstep2=(divi/r0)*(at^r)*(aposv1*stepf(bb1)-aposv2*stepf(bb2));
vzv(i)=vzv(i)+thstep1;
iii(i)=iii(i)+thstep2;
end
end
figure(1);
plot(x,va*(1-vzv),'k');
title('Voltage/V vs x/m for given t');
figure(2);
plot(x,va*iii,'k');
title('Current/A vs x/m for given t');

```

#### Πρόγραμμα 14

```

%GENERAL CASE TRANSM LINE STEADY STATE VS t.
aLe=2000;
c=2.0e8;
r0=50;
rs=50;
rt=0;
x=0;
phi=0;
alph=0;
f=159200;
omeg=2*pi*f;
k=omeg/c;
d=r0/(r0+rs);
as=(rs-r0)/(rs+r0);
at=(rt-r0)/(rt+r0);
tL=aLe/c;
vs=1;
pp=1+as^2*at^2*exp(-4*alph*aLe)-2*as*at*exp(-2*alph*aLe)*cos(2*k*aLe);
k=omeg/c;
t=[0.0:tL/200:10*tL];
vzv=(d*vs/pp)*(exp(-alph*x)*cos(-k*x+omeg*t+phi)+at*exp(-alph*(2*aLe-x))...
*cos(-k*(2*aLe-x)+omeg*t+phi)-as*at*exp(-alph*(2*aLe+x))...
*cos(k*(2*aLe-x)+omeg*t+phi)-as*at^2*exp(-alph*(4*aLe-x))...
*cos(k*x+omeg*t+phi));

```

```
plot(t,vv,'k');
```

#### Πρόγραμμα 15

```
%GENERAL CASE TRANSM LINE STEADY STATE VS x.
clear all;
aLe=2000;
c=2.0e8;
r0=50;
rs=0;
rt=0;
phi=1;
alph=0.0;
f=159155;
tper=1/f;
omeg=2*pi*f;
k=omeg/c;
d=r0/(r0+rs);
as=(rs-r0)/(rs+r0);
at=(rt-r0)/(rt+r0);
tL=aLe/c;
vs=1;
pp=1+as^2*at^2*exp(-4*alph*aLe)-2*as*at*exp(-2*alph*aLe)*cos(2*k*aLe);
k=omeg/c;
x=[0.0:aLe/100:aLe];
n=100;
step=tper/n;
hold on
for j=1:n+1;
t=(j-1)*step;
vv=(d.*vs/pp).*(exp(-alph.*x).*cos(-k.*x+omeg.*t+phi)+at.*exp(-alph.*(2.*aLe-x))...
.*cos(-k.*(2.*aLe-x)+omeg.*t+phi)-as.*at.*exp(-alph.*(2.*aLe+x))...
.*cos(k.*(2.*aLe-x)+omeg.*t+phi)-as.*at^2.*exp(-alph.*(4.*aLe-x))...
.*cos(k.*x+omeg.*t+phi));
%figure(1)
plot(x,vv,'k');
end
title('voltage/V vs x/m');
hold off
%xx=[0.0:aLe/100:aLe];
%hold on;
%for jj=1:n+1;
% t=(jj-1)*step;
%iii=(d.*vs/pp).*(exp(-alph.*xx).*cos(-k.*xx+omeg.*t+phi)-at.*exp(-
alph.*(2.*aLe-xx))...
% .*cos(-k.*(2.*aLe-xx)+omeg.*t+phi)-as.*at.*exp(-alph.*(2.*aLe+xx))...
% .*cos(k.*(2.*aLe-xx)+omeg.*t+phi)+as.*at^2.*exp(-alph.*(4.*aLe-xx))...
% .*cos(k.*xx+omeg.*t+phi));
%figure(1)
%plot(xx,iii,'k');
%end
%title('current/A vs x/m');
%hold off
```

#### Πρόγραμμα 16

```
%STEP VOLTAGE ON TRANSMISION LINE VERSUS TIME FOR GIVEN x
%CAPACITANCE TERMINATION AND BACKTERMINATED.
clear all;
c=2.0e8;
va=1;
r0=50;
cap=1.5e-10;
```

```

aLe=2.0;
tL=aLe/c;
x=0;
t=[0.:tL/100:10*tL];
N=length(t);
for i=1:N;
bb1=(t(i)-x)/c;
bb2=t(i)-(2*aLe-x)/c;
vvv(i)=0.5*va*(stepf(bb1)+(1-2*exp(-bb2/(r0*cap)))*stepf(bb2));
iii(i)=0.5*(va/r0)*(stepf(bb1)-(1-2*exp(-bb2/(r0*cap)))*stepf(bb2));
end
figure(1);
plot(t,vvv,'k');
title('Voltage/V vs t/s for given x');
figure(2);
plot(t,iii,'k');
title('Current/A vs t/s for given x');

```

#### Πρόγραμμα 17

```

%STEP VOLTAGE ON TRANSMISION LINE VERSUS x FOR GIVEN t
%CAPACITANCE TERMINATION AND BACKTERMINATED.
clear all;
c=2.0e8;
va=1;
r0=50;
cap=1.5e-11;
aLe=1.0;
tL=aLe/c;
t=1.6*tL;
x=[0.:aLe/100:aLe];
N=length(x);
for i=1:N;
bb1=t-x(i)/c;
bb2=t-(2*aLe-x(i))/c;
vvv(i)=0.5*va*(stepf(bb1)+(1-2*exp(-bb2/(r0*cap)))*stepf(bb2));
iii(i)=0.5*(va/r0)*(stepf(bb1)-(1-2*exp(-bb2/(r0*cap)))*stepf(bb2));
end
figure(1);
plot(x,vvv,'k');
title('Voltage/V vs x/m for given t');
figure(2);
plot(x,iii,'k');
title('Current/A vs x/m for given t');

```

#### Πρόγραμμα 18

```

%GENERAL PROPAGATION ON TRANSMISION LINE VERSUS TIME.
clear all;
f=1.0e8;
c=2.0e8;
%wave length/4=0.5 meters;
omeg=6.28319*f;
apo=0.0;
r0=50;
rs=50;
rt=70;
aLe=2;
tL=aLe/c;
x=aLe;
as=(rs-r0)/(rs+r0);
at=(rt-r0)/(rt+r0);
divi=r0/(r0+rs);

```

```

delt=0.6*tL;
t=[0.:tL/100:5*tL];
N=length(t);
m=fix(t/tL)+1;
for i=1:N;
vzv(i)=0;
iii(i)=0;
for r=0:m(i);
aa1=2*aLe*r+x;
aa2=2*aLe*(r+1)-x;
bb1=t(i)-aa1/c;
bb2=t(i)-aa2/c;
aposv1=exp(-apo*aa1);
aposv2=exp(-apo*aa2);
%inpu1=sininp(bb1,omeg);
%inpu2=sininp(bb2,omeg);
%inpu1=stepf(bb1);
%inpu2=stepf(bb2);
inpu1=sqrt(bb1,delt);
inpu2=sqrt(bb2,delt);
thstep1=divi*((as*at)^r)*(aposv1*inpu1*stepf(bb1) ...
+at*aposv2*inpu2*stepf(bb2));
thstep2=(divi/r0)*((as*at)^r)*(aposv1*inpu1*stepf(bb1) ...
-at*aposv2*inpu2*stepf(bb2));
vzv(i)=vzv(i)+thstep1;
iii(i)=iii(i)+thstep2;
end
end
figure(1);
plot(t,vzv,'k');
title('Voltage/V vs t/s for given x');
figure(2);
plot(t,iii,'k');
title('Current/A vs t/s for given x');

```

#### Πρόγραμμα 19

%GENERAL PROPAGATION ON TRANSMISION LINE VERSUS TIME.

```

clear all;
close all
f=1.0e8; %frequency (Hz)
c=2.0e8; %velocity (m/s)
apo=0.0; %loses (s^-1)
r0=50; %charact. impedance (Ohm)
rs=20; %source resistor
rt=0; %termination resistor
aLe=1.5; %line length (m)
tL=aLe/c; %propagation time (s)
as=(rs-r0)/(rs+r0); %source refl. coef.
at=(rt-r0)/(rt+r0); %term. refl. coef.
divi=r0/(r0+rs); %voltage division
Nt=100;
Mx=100; %time and length resolution
tmax=20*tL; %overall calculation time (times tL)
t=[0.:tmax/Nt:tmax];
N=length(t);
x=[0.:aLe/Mx:aLe];
M=length(x);
vtx=zeros(N,M);
m=fix(t/tL)+1;
for j=1:M;
for i=1:N;
vzv(i)=0;

```



```

for r=1:m(i);
aa=(-1)^(r+1)*x(j)+2*aLe*fix(r/2);
bb=t(i)-aa/c;
aposv=exp(-apo*aa);
inpu=sin(2*pi*f*bb);
thstep=divi*as^(fix((r-1)/2))*at^(fix(r/2))*aposv*inpu*stepf(bb);
vvv(i)=vvv(i)+thstep;
end
vtx(i,j)=vvv(i);
end
end
end
figure(1)
xpos=(2/3)*aLe; %position for displaying the time evolution of voltage
jx=fix(xpos/(aLe/Nt))+1;
hdl=plot(1e9*t(1:M),vtx(1:M,jx),'b');
set(hdl,'LineWidth',2);
axis([0 1e9*tmax -2 2])
xlabel('Time t(ns)')
ylabel('Voltage v(V)')
figure(2)
time=12*tL; %time for displaying the voltage across the line
i=fix(time/(tmax/Nt))+1;
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'b');
set(hdl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -2 2])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
%-----
%DISPLAYING THE VOLTAGE ACROSS THE LINE VERSUS TIME
figure(3);
set(gcf,'DoubleBuffer','on'); %ÓÔÁÈÈÑĪĐĪÉÇÓÇ ÔÇÓ ĪÈĪÍÇÓ
hold on
time=12*tL; %Max time for displaying the voltage across the line
Nm=fix(time/(tmax/Nt))+1;
vtxm=max(max(vtx,[],2));
for i=1:Nm;
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'-b');
set(hdl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
hold off
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'-b');
set(hdl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
pause(0.1) %waiting 0.1 s
hold on
end
hold off
%3D PLOTS
figure(4)
surf(x,1e9*t,vtx);
axis([0 aLe 0 1e9*tmax -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Time t(ns)')
zlabel('Voltage v(V)')
view(142.5,30)

```

Πρόγραμμα 20

%GENERAL PROPAGATION ON TRANSMISION LINE VERSUS x.

```

%clear all;
f=1.0e8;
c=2.0e8;
%wave length/4=0.5 meters;
omeg=6.28319*f;
apo=0.0;
r0=50;
rs=10;
rt=70;
aLe=1.2;
tL=aLe/c;
t=1.4*tL;
as=(rs-r0)/(rs+r0);
at=(rt-r0)/(rt+r0);
divi=r0/(r0+rs);
delt=0.2*tL;
x=[0:aLe/100:aLe];
N=length(x);
m=fix(t/tL)+1;
for i=1:N;
vzv(i)=0;
iii(i)=0;
for r=0:m;
aa1=2*aLe*r+x(i);
aa2=2*aLe*(r+1)-x(i);
bb1=t-aa1/c;
bb2=t-aa2/c;
aposv1=exp(-apo*aa1);
aposv2=exp(-apo*aa2);
%inpu1=sininp(bb1,omeg);
%inpu2=sininp(bb2,omeg);
%inpu1=stepf(bb1);
%inpu2=stepf(bb2);
inpu1=sqrtf(bb1,delt);
inpu2=sqrtf(bb2,delt);
thstep1=divi*((as*at)^r)*(aposv1*inpu1*stepf(bb1) ...
+at*aposv2*inpu2*stepf(bb2));
thstep2=(divi/r0)*((as*at)^r)*(aposv1*inpu1*stepf(bb1) ...
-at*aposv2*inpu2*stepf(bb2));
vzv(i)=vzv(i)+thstep1;
iii(i)=iii(i)+thstep2;
end
end
hold on
figure(1);
plot(x,vzv,'k');
title('Voltage/V vs x/m for given t');
figure(2);
plot(x,iii,'k');
title('Current/A vs x/m for given t');

```

#### Πρόγραμμα 21

```

%PROPAGATION ON TRANSMISSION LINE VERSUS TIME STEP FUNCTION VOLTAGE.
%VOLTAGE AND CURRENT.
clear all;
c=2.0e8;
%apo=0.03;
apo=0.0;
r0=50;
rt=0;
aLe=2;
tL=aLe/c;

```

```

x=0;
at=(rt-r0)/(rt+r0);
divi=r0/(r0+rt);
va=1;
t=[0:tL/100:5*tL];
N=length(t);
m=fix(t/tL)+1;
y=aLe-x;
for i=1:N;
vzv(i)=0;
iii(i)=0;
for r=1:m(i);
aa=(-1)^(r+1). *y+2. *aLe. *fix(r/2);
bb=t(i)-aa./c;
aposv=exp(-apo. *aa);
thstep1=divi. *(at^(fix((r-1)/2))). *aposv. *stepf(bb);
vzv(i)=vzv(i)+thstep1;
thstep2=(thstep1./r0). *((-1).^(r+1));
iii(i)=iii(i)+thstep2;
end
end
figure(1);
plot(t,va.*(1-vzv),'k');
title('Voltage/V vs t/s for given x')
figure(2);
plot(t,va.*iii,'k');
title('Current/A vs t/s for given x')

```

#### Πρόγραμμα 22

```
%TRANSMISION LINE VERSUS TIME SQUARE VOLTAGE EPIDERMIKO.
```

```

clear all;
va=1;
b=2.5e-2;
a=b/3.6;
sig=5.81e+7;
m0=4*pi*1e-7;
c=2.0e8;
r0=50;
aLe=1.0;
tL=aLe/c;
aL=0.5*sqrt(m0/sig)*((1/a)+(1/b))/pi;
t0=((aLe*aL/2)^2)/r0;
delt=50*t0;
t=[tL:(t0)/100:tL+2.5*delt];
N=length(t);
for i=1:N;
aa=t(i)-tL;
bb=t(i)-tL-delt;
ee1=eerrfcc(aa,t0);
ee2=eerrfcc(bb,t0);
vzv(i)=va*(ee1-ee2);
end
plot(t,vzv,'k');
title('Voltage/V vs t/s at end of line');

```

#### Πρόγραμμα 23

```
%TRANSMISION LINE VERSUS TIME STEP VOLTAGE EPIDERMIKO.
```

```

clear all;
va=1;
b=2.5e-2;
a=b/3.6;

```

```

sig=5.81e+7;
m0=4*pi*1e-7;
c=2.0e8;
r0=50;
aLe=1.0;
tL=aLe/c;
aL=0.5*sqrt(m0/sig)*((1/a)+(1/b))/pi;
t0=((aLe*aL/2)^2)/r0;
t=[tL-t0:t0/100:tL-t0+10*t0];
N=length(t);
for i=1:N;
aa=t(i)-aLe/c;
vvv(i)=va*eerrffcc(aa,t0);
end
plot(t,vvv,'k');
title('Voltage/V vs t/s at end of line');

```

#### Πρόγραμμα 24

%GENERAL PROPAGATION ON TRANSMISION LINE VERSUS TIME OVERLAP.

```

clear all;
close all
f=1.0e8; %frequency (Hz)
c=2.0e8; %velocity (m/s)
apo=0.0; %loses (s^-1)
r0=50; %charact. impedance (Ohm)
rs=20; %source resistor
rt=0; %termination resistor
aLe=1.5; %line length (m)
tL=aLe/c; %propagation time (s)
as=(rs-r0)/(rs+r0); %source refl. coef.
at=(rt-r0)/(rt+r0); %term. refl. coef.
divi=r0/(r0+rs); %voltage division
Nt=100;
Mx=100;
bbb=20;
%time and length resolution
tmax=bbb*tL; %overall calculation time (times tL)
t=[0.:tmax/Nt:tmax];
N=length(t);
x=[0.:aLe/Mx:aLe];
M=length(x);
vtx=zeros(N,M);
m=fix(t/tL)+1;
for j=1:M;
for i=1:N;
vvv(i)=0;
for r=1:m(i);
aa=(-1)^(r+1)*x(j)+2*aLe*fix(r/2);
bb=t(i)-aa/c;
aposv=exp(-apo*aa);
inpu=sin(2*pi*f*bb);
thstep=divi*as^(fix((r-1)/2))*at^(fix(r/2))*aposv*inpu*stepf(bb);
vvv(i)=vvv(i)+thstep;
end
vtx(i,j)=vvv(i);
end
end
figure(1)
xpos=(2/3)*aLe; %position for displaying the time evolution of voltage
jx=fix(xpos/(aLe/Nt))+1;
hndl=plot(1e9*t(1:M),vtx(1:M,jx),'k');
set(hndl,'LineWidth',2);

```

```

axis([0 1e9*tmax -2 2])
xlabel('Time t(ns)')
ylabel('Voltage v(V)')
figure(2)
aaa=12;
time=aaa*tL; %time for displaying the voltage across the line
i=fix(time/(tmax/Nt))+1;
hndl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'k');
set(hndl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -2 2])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
%-----
%DISPLAYING THE VOLTAGE ACROSS THE LINE VERSUS TIME
figure(3);
set(gcf,'DoubleBuffer','on'); %ÓÔÁÈÀÑÏÐĪÉÇÓÇ ÔÇÓ ĪÈĪÍÇÓ
hold on
time=aaa*tL; %Max time for displaying the voltage across the line
Nm=fix(time/(tmax/Nt))+1;
vtxm=max(max(vtx,[],2));
for i=1:Nm;
hndl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'k');
set(hndl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
hold off
hndl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'k');
set(hndl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
pause(0.1) %waiting 0.1 s
hold on
end
hold off
%3D PLOTS
figure(4)
surf(x,1e9*t,vtx);
axis([0 aLe 0 1e9*tmax/3 -1.05*vtxm 1.05*vtxm])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Time t(ns)')
zlabel('Voltage v(V)')
view(0,0)

```

## Πρόγραμμα 25

```

%MOST GENERAL CASE TRANSM LINE STEADY STATE VS x.
clear all;
aLe=2;
aLf=0;
c=2.0e8;
f=1e8;
tper=1/f;
omeg=2*pi*f;
phi=1;
k=omeg/c;
tL=aLe/c;
vs=1;
rs=20;
%rs=80;
%xs=-0.01;
xs=0;

```

```

%rt=23.65;
rt=0;
%xt=33.11;
xt=0;
rL=0;
LL=100*100;
gL=0;
cL=1;
r00=(omeg^2*cL*LL+rL*gL)/(gL^2+omeg^2*cL^2);
x00=omeg*(gL*LL-cL*rL)/(gL^2+omeg^2*cL^2);
x00=-60;
r00=100;
absz0=sqrt(sqrt(r00^2+x00^2));
cs00=r00;
sn00=x00;
ph20=atan2(sn00,cs00);
ph0=ph20/2;
r0=absz0*cos(ph0);
x0=absz0*sin(ph0);
x0=0;
r0=50;
gamt=sqrt(((rt-r0)^2+(xt-x0)^2)/((rt+r0)^2+(xt+x0)^2));
cst=(rt^2-r0^2+xt^2-x0^2);
snt=((xt-x0)*(rt+r0)-(xt+x0)*(rt-r0));
pht=atan2(snt,cst);
gams=sqrt(((rs-r0)^2+(xs-x0)^2)/((rs+r0)^2+(xs+x0)^2));
css=(rs^2-r0^2+xs^2-x0^2);
sns=((xs-x0)*(rs+r0)-(xs+x0)*(rs-r0));
phs=atan2(sns,css);
DD=sqrt(1+(gamt^2)*(exp(-4*aLf*aLe))*(gams^2)-2*gamt*(exp(-2*aLf*aLe))*...
gams*cos(pht+phs-2*k*aLe));
csD=(1-gams*gamt*(exp(-2*aLf*aLe))*cos(pht+phs-2*k*aLe));
snD=-gams*gamt*(exp(-2*aLf*aLe))*sin(pht+phs-2*k*aLe);
phD=atan2(snD,csD);
dd=sqrt((r0^2+x0^2)/((rs+r0)^2+(xs+x0)^2));
snfd=x0*(rs+x0);
csfd=r0*rs+x0*xs+x0^2+r0^2;
phid=atan2(snfd,csfd);
x=[0.0:aLe/100:aLe];
n=100;
step=tper/n;
hold on
for jj=1:n+1;
t=(jj-1)*step;
vvv=(dd*vs/DD).*(exp(-aLf.*x).*cos(omeg.*t-k.*x+phi-phD+phid)+gamt.*exp(-aLf.*(2.*aLe-x))...
.*cos(omeg.*t+k.*x+phi+pht-phD-2.*k.*aLe+phid));
%figure(1);
plot(x,vvv,'k');
end
hold off
%x=[0.0:aLe/100:aLe];
%hold on
%for jjj=1:n;
% t=jjj*tL/n;
%iii=(dd*vs/(DD.*absz0)).*(exp(-aLf.*x).*cos(omeg.*t-k.*x+phi-phD-ph0+phid)...
%gamt.*exp(-aLf.*(2.*aLe-x)).*cos(omeg.*t+k.*x+phi+pht-phD-ph0-2.*k.*aLe+phid));
%figure(2);
%plot(x,iii,'k');
%end
%hold off

```

Πρόγραμμα 26

```

%TRANSMISSION LINE DISCHARGE VERSUS x.
clear all;
c=2.0e8;
apo=0.0;
r0=50;
rt=50;
va=1;
aLe=2;
tL=aLe/c;
t=0.2*tL;
at=(rt-r0)/(rt+r0);
divi=r0/(r0+rt);
x=[0:aLe/2:aLe];
N=length(x);
for i=1:N;
vvv(i)=0;
iii(i)=0;
aa1(i)=aLe-x(i);
aa2(i)=aLe+x(i);
bb1(i)=t-aa1(i)/c;
bb2(i)=t-aa2(i)/c;
xxx=stepf(bb1)
yyy=stepf(bb2)
thstep1=divi.*(stepf(bb1(i))+stepf(bb2(i)))
thstep2=(divi./r0).(stepf(bb1(i))-stepf(bb2(i)));
vvv=vvv+thstep1;
iii=iii+thstep2;
end
%end
figure(1);
plot(x,va.*(1-vvv),'k');
title('Voltage/V vs x/m for given t');
figure(2);
plot(x,va.*iii,'k');
title('Current/A vs x/m for given t');

```

### Πρόγραμμα 27

```

%DISPLAYING THE VOLTAGE ACROSS THE LINE VERSUS TIME
figure(3);
set(gcf,'DoubleBuffer','on'); %モヤチネナムミマノヌモヤヌモマネマハヌモ
hold on
time=12*tL; %Max time for displaying the voltage across the line
Nm=fix(time/(tmax/Nt))+1;
for i=1:Nm;
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'-b');
set(hdl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -2 2])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
hold off
hdl=plot(x(1:M),vtx(i,1:M),'-b');
set(hdl,'LineWidth',2);
axis([0 aLe -2 2])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Voltage v(V)')
pause(0.1) %waiting 0.1 s
hold on
end
hold off

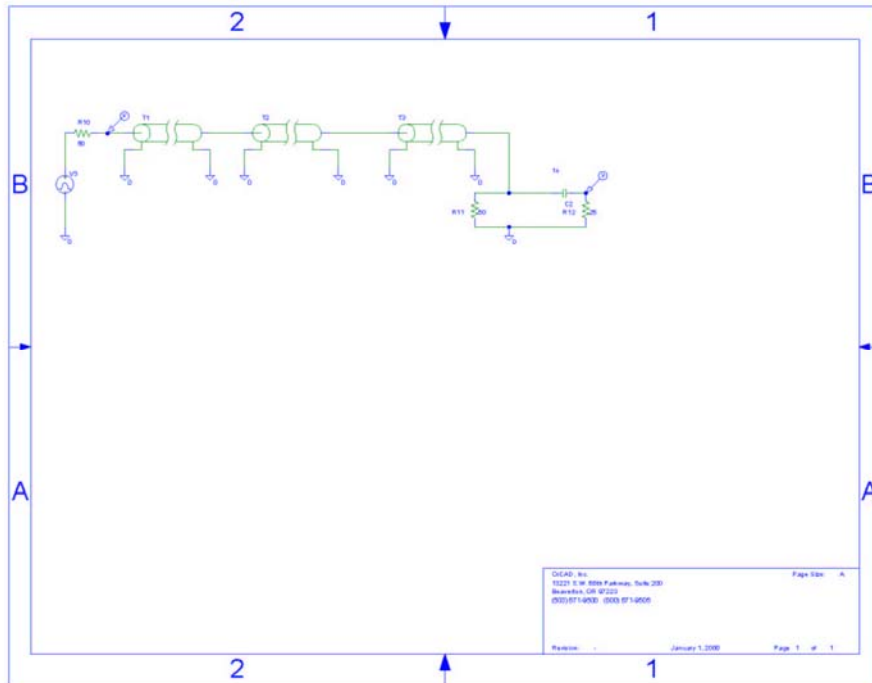
```

```

%3D PLOTS
figure(4)
surf(x, 1e9*t, vtx);
axis([0 aLe 0 1e9*tmax -2 2])
xlabel('Position x(m)')
ylabel('Time t(ns)')
zlabel('Voltage v(V)')
view(142.5, 30)

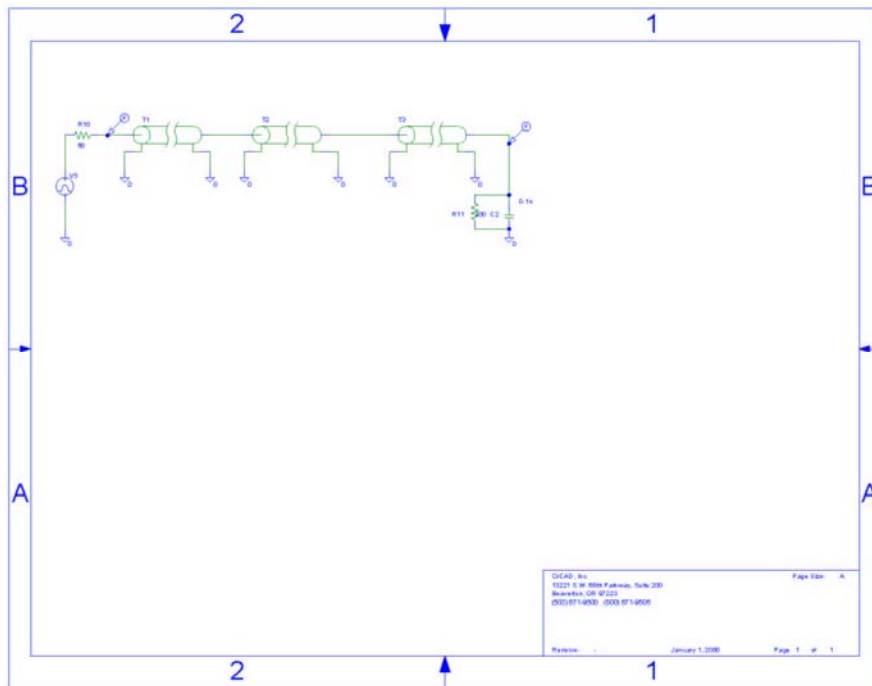
```

Κύκλωμα 1

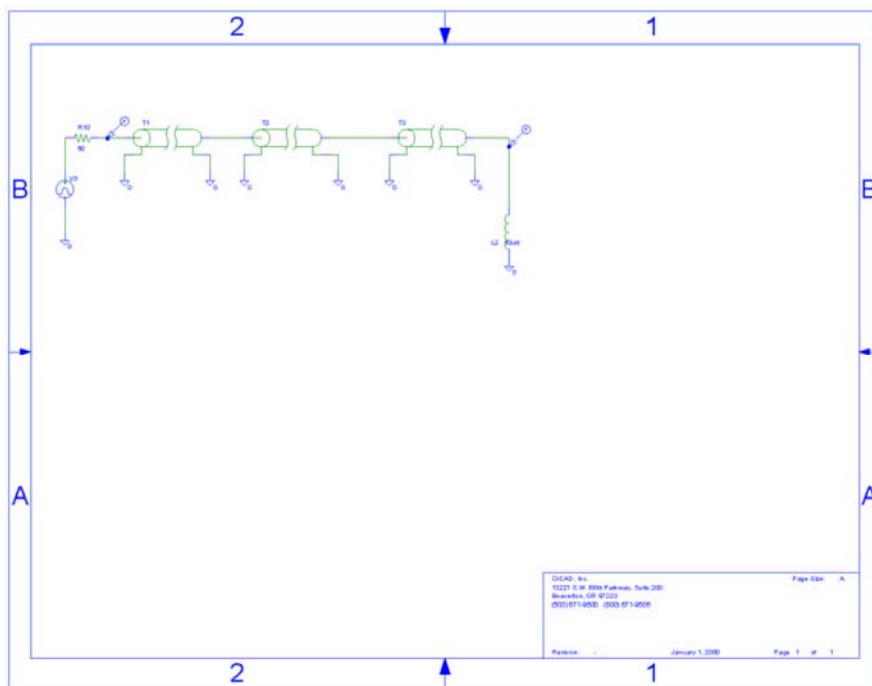


Κύκλωμα 2





Κύκλωμα 3



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) TRANSMISSION LINES FOR DIGITAL AND COMMUNICATION NETWORKS, by Richard E. Matrick, McGraw-Hill Book Co., 1969.
- 2) Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, by W. R. Leo, Spriger-Verlag, 1994.
- 3) Radiation Detection and Measurement, Third Edition, by Glenn F. Knoll, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- 4) ELECTRICITY & MAGNETISM, Third Edition, by B. I. Bleanley and B. Bleanley, Oxford University Press, 1978.
- 5) CLASSICAL ELECTRODYNAMICS, Third Edition, By John David Jackson, John Wiley & Sons, 1999.
- 6) ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ, του Παναγ. Γ. Κωττή, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Θεσσαλονίκη, 2003.
- 7) ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ, του Νικ. Κ. Ουζούνογλου, Β' ΕΚΔΟΣΗ, Εκδόσεις ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ, Αθήνα 1994.
- 8) ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ, Σημειώσεις, του Βασ. Κ. Παπαδιά, Έκδοση Β', Αθήνα 1982.
- 9) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΗΛΕΚΤΡ. ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ, των Στυλ. Μ. Τάκα και Παν. Ι. Τσιλιμίγκρα, ΑΘΗΝΑΙ, 1964.