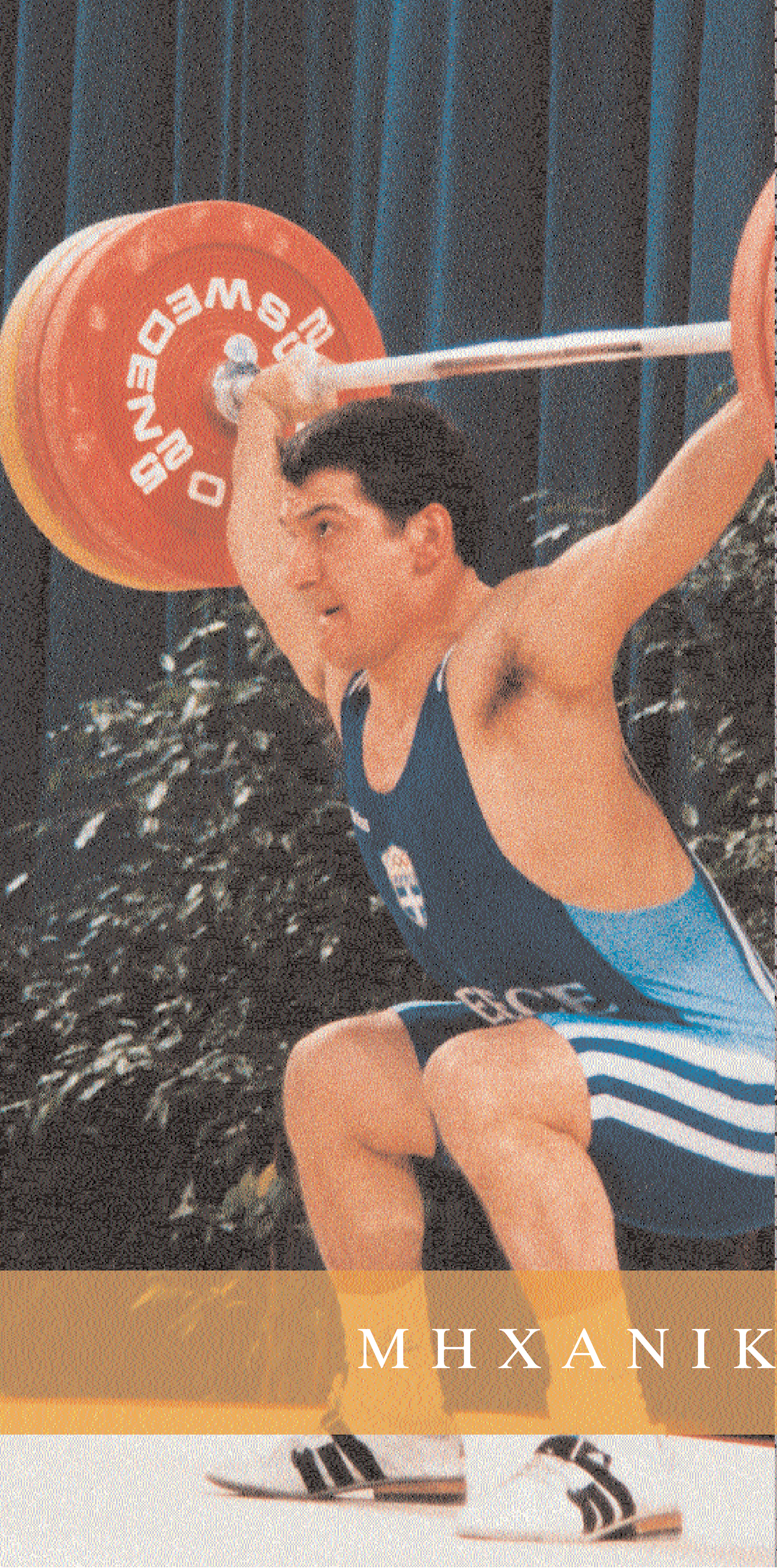


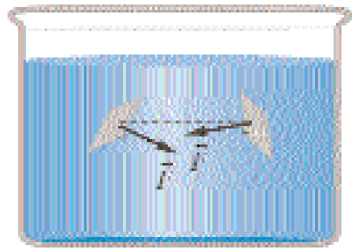
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

4.1 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μηχανική των ρευστών (ρευστομηχανική) είναι κλάδος της φυσικής που ασχολείται με τη στατική, την κινηματική και τη δυναμική των ρευστών. Η στατική εξετάζει τα ρευστά σε ηρεμία, πιο συγκεκριμένα ασχολείται με την υδροστατική πίεση και τους υπολογισμούς δυνάμεων που ασκούν τα ακίνητα ρευστά σε διάφορες επιφάνειες. Βασικός νόμος της υδροστατικής είναι ο νόμος ή αρχή του Pascal, σύμφωνα με την οποία, "κάθε μεταβολή της πίεσης, που εφαρμόζεται σε ρευστό, που βρίσκεται σε κλειστό χώρο (δοχείο), μεταδίδεται αμετάβλητη σε κάθε σημείο του ρευστού (και στα τοιχώματα του δοχείου)".



ΣΧΗΜΑ 4.1

Ανεξάρτητα προσανατολισμού η δύναμη στην επιφάνεια Α είναι ίδιου μέτρου.

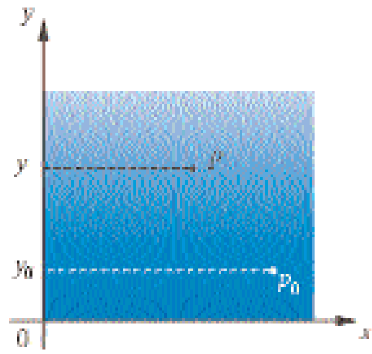
Μια μικρή επιφάνεια σε ένα σημείο ρευστού, δέχεται δύναμη σταθερού μέτρου, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της. Μια σημαντική σχέση στη στατική των ρευστών είναι η

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{4.1}$$

η οποία για ρευστό σταθερής πυκνότητας ρ οδηγεί στη σχέση

$$p = p_0 + \rho g(y_0 - y) \tag{4.2}$$

Όπου p είναι η πίεση του ρευστού σε ύψος y, p_0, η πίεση του ρευστού σε ύψος y_0 (Σχ. 4.2) και g, η επιτάχυνση της βαρύτητας.



ΣΧΗΜΑ 4.2

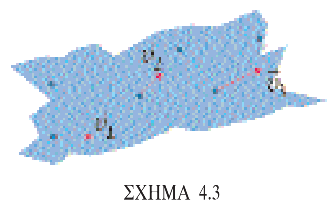
Η πίεση αυξάνεται με το βάθος.

Η κινηματική των ρευστών ασχολείται με την περιγραφή της κίνησής του και εξετάζει κυρίως τα σχετικά με την κίνηση μεγέθη, όπως ταχύτητα, επιτάχυνση και παροχή.

Η δυναμική των ρευστών που είναι ο σημαντικότερος τομέας της ρευστομηχανικής, ενδιαφέρεται κυρίως για τις μεταβολές ενέργειας και για τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά τη ροή των ρευστών.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

<u>Ορισμός του ρευστού.</u> Στο άκουσμα της λέξης ρευστό έρχονται στο νου μας τα υγρά και τα αέρια. Πράγματι, ρευστό θεωρείται μια ουσία που έχει την ιδιότητα (δυνατότητα) να ρέει, ιδιότητα που σαφώς έχουν τα υγρά και τα αέρια. Τα υγρά ρέουν και λαμβάνουν το σχήμα του δοχείου, στο οποίο τοποθετούνται, έχοντας σταθερό όγκο. Τα αέρια δεν έχουν σταθερό όγκο και καταλαμβάνουν εξ ολοκλήρου τον όγκο του δοχείου, στο οποίο βρίσκονται.

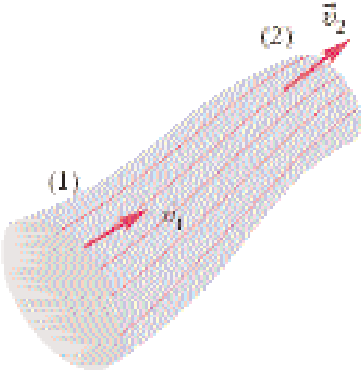


ΣΧΗΜΑ 4.3

Σε κάθε στοιχείο του ρευστού υπάρχει ένα σημείο του ρευστού το οποίο έχει συγκεκριμένη ταχύτητα.

Στοιχείο ρευστού. Ένα μικρό κομμάτι του ρευστού, θα αποτελείται από μόρια, τα οποία κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις. Θεωρώντας το ρευστό ως συνεχές μέσο, ορίζουμε ως στοιχείο ή σωμάτιο ρευστού μια στοιχειώδη (πολύ μικρή) ποσότητα του ρευστού (Σχ. 4.3).

Ο όγκος του στοιχείου ρευστού για αέρια ή υγρά σε πίεση περίπου 1 atm είναι $\Delta V_0 \approx 10^{-9}$ mm^3. Επομένως, η πυκνότητα σε κάθε σημείο του ρευστού ορίζεται ως



ΣΧΗΜΑ 4.4

Η ταχύτητα του στοιχείου ρευστού που διέρχεται από τη θέση (1) είναι μικρότερη από αυτή του στοιχείου ρευστού στη θέση

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \Delta V_0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

όπου ΔV ο όγκος που περικλείει το συγκεκριμένο σημείο και Δm η μάζα του ρευστού σ' αυτό τον όγκο.

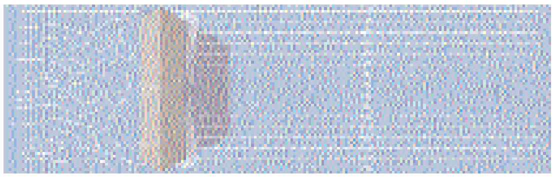
Σε κάθε σημείο του ρευστού ορίζεται μια ταχύτητα που είναι η μέση ταχύτητα των μορίων του ρευστού στο συγκεκριμένο σημείο. Οι θερμικές ταχύτητες των μορίων είναι πολύ μεγαλύτερες από την ταχύτητα του στοιχείου ρευστού. Όμως, επειδή τα μόρια του στοιχείου του ρευστού συγκρούονται μεταξύ τους, παραμένουν σε αυτόν τον μικρό όγκο.

Ρευματική γραμμή ή ροϊκή γραμμή: Η τροχιά ενός στοιχείου ρευστού, κατά τη ροή του ρευστού, αποτελεί τη ρευματική γραμμή. Σε κάθε σημείο της ρευματικής γραμμής η ταχύτητα του στοιχείου ρευστού είναι εφαπτόμενη στη ρευματική γραμμή (Σχ. 4.4). Μια ρευματική γραμμή είναι η πορεία που ακολουθεί ένα μικρό κομμάτι ξύλου, όταν το ρίξουμε σ΄ ένα υγρό που ρέει. Σε ένα ρευστό η ταχύτητα των στοιχείων ρευστού είναι μεγαλύτερη στα σημεία, όπου οι ρευματικές γραμμές είναι πυκνές, απ' ότι στα σημεία που είναι αραιές.

Στρωτή ή μόνιμη ροή: Μια ροή ονομάζεται μόνιμη ή στρωτή ή στατική, ή στάσιμη, όταν η πυκνότητα και η ταχύτητα του ρευστού παραμένουν σταθερές με το χρόνο, σε κάθε σημείο του ρευστού. Δηλαδή, σε ένα συγκεκριμένο σημείο του ρευστού, κάθε διερχόμενο στοιχείο ρευστού από αυτό, έχει πάντα την ίδια ταχύτητα. Η ταχύτητα ενός στοιχείου ρευστού, μπορεί να μεταβάλλεται, όμως, όταν αυτό διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο, έχει την ίδια ταχύτητα, που είχε κάθε άλλο στοιχείο ρευστού που πέρασε προηγουμένως, καθώς και κάθε επόμενο που θα περάσει από το σημείο αυτό. Στη μόνιμη ροή οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται, απλώς μπορεί να πυκνώνουν ή να αραιώνουν. Παρατηρείται σε ρευστά με μικρές ταχύτητες ροής.

Τυρβώδης ή μη στρωτή ή μη μόνιμη λέγεται η ροή, κατά την οποία η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο του δεν παραμένει σταθερή, αλλά κυμαίνεται γύρω από κάποια μέση τιμή. Στην περίπτωση αυτή οι ροϊκές γραμμές τέμνονται και γενικά η ροή είναι ακατάστατη. Παρατηρείται στα ρευστά με μεγάλες ταχύτητες π.χ. καταράκτες, υδατοπτώσεις κ.λπ.

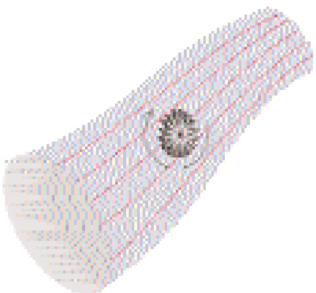
Στροβιλή και αστρόβιλη ροή: Η απλούστερη περίπτωση στροβιλής ροής, είναι η ροή κατά την οποία τα στοιχεία ρευστού, εκτελούν περιστροφική κίνηση σχηματίζοντας κλειστές ρευματικές γραμμές (στροβίλους). Λόγου χάρη, στο πίσω μέρος μιας σανίδας, η οποία είναι βυθισμένη σε νερό που ρέει, δημιουργούνται στρόβιλοι και καθιστουν τη ροή στροβιλή (Σχ. 4.5). Η



ΣΧΗΜΑ 4.5

Πίσω από τη σανίδα δημιουργούνται στρόβιλοι.

ροή μπορεί να είναι στροβιλή χωρίς να υπάρχουν εμφανείς στρόβιλοι. Ένας απλός τρόπος για να το διαπιστώσουμε είναι να τοποθετήσουμε ένα μικρό τροχό (Σχ. 4.6) στα διάφορα σημεία της ροής. Όταν ο τροχός δεν

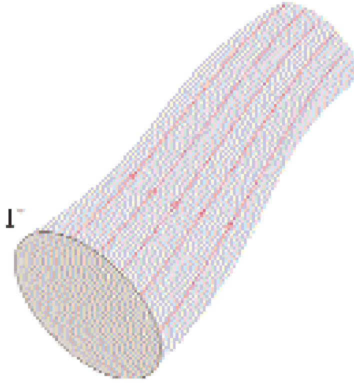


ΣΧΗΜΑ 4.6

Ένας μικρός τροχός, ο οποίος τοποθετείται στη φλέβα ενός υγρού, περιστρέφεται όπως στο σχήμα.

περιστρέφεται, για οποιοδήποτε σημείο της ροής, η ροή είναι αστρόβιλη, στην αντίθετη περίπτωση είναι στροβιλή.

Φλέβα ή σωλήνας ροής. Θεωρούμε μια κλειστή γραμμή Γ σ' ένα ρευστό με στρωτή ροή. Οι ρευματικές γραμμές (ή ροϊκές γραμμές) που διέρχονται από τα σημεία της κλειστής γραμμής, ορίζουν έναν σωλήνα, ο οποίος ονομάζεται σωλήνας ροής ή φλέβα ή ρευματοσωλήνας (Σχ. 4.7). Οι ρευματικές γραμμές δεν διαπερνούν τα σύνορα του ρευματοσωλήνα, αυτές οι οποίες είναι στο εσωτερικό, παραμένουν σε όλη την έκταση του στο εσωτερικό του. Συνεπώς, τα στοιχεία ρευστού που μπαίνουν σε ένα ρευματοσωλήνα, τα ίδια βγαίνουν από αυτόν.



ΣΧΗΜΑ 4.7
Η κλειστή γραμμή ορίζει ρευματοσωλήνα.

Συμπιεστά και ασυμπίεστα ρευστά. Ρευστά είναι τα υγρά και τα αέρια. Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα, ενώ τα αέρια είναι συμπιεστά δηλ. μεταβάλλουν τον όγκο τους σε αντίστοιχες μεταβολές της πίεσης τους. Κατά τη ροή υγρού η πυκνότητα είναι ίδια σε όλη την έκταση της ροής, ενώ κατά τη ροή αερίου μπορεί και να μεταβάλλεται. Στην περίπτωση, κατά την οποία η πυκνότητα παραμένει σταθερή, η ροή λέγεται ασυμπίεστη, ενώ, όταν μεταβάλλεται η ροή, λέγεται συμπιεστή ή συμπιέσιμη.

Ιδανικό ρευστό: Ένα ρευστό λέγεται ιδανικό, όταν πληρεί της εξής προϋποθέσεις.

α) Είναι τελείως ασυμπίεστο

β) Είναι απαλλαγμένο εσωτερικής τριβής

γ) Είναι απαλλαγμένο δυνάμεων μεταξύ αυτού και του σωλήνα, μέσα στον οποίο ρέει (δυνάμεις συνάφειας)

Στα παρακάτω η ροή μας θα θεωρείται στρωτή, αστρόβιλη, ασυμπίεστη και χωρίς εσωτερικές τριβές. Με αυτές τις προϋποθέσεις θα εξάγουμε δύο βασικούς νόμους της δυναμικής των ρευστών, το νόμο της συνεχείας και το νόμο του Bernoulli.

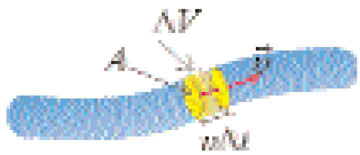
ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΚΑΙ ΕΞίΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Παροχή: Παροχή είναι το πηλίκο του όγκου ΔV του ρευστού, που περνάει από μια διατομή του σωλήνα, μέσα στον οποίο κινείται, σε χρονική διάρκεια Δt, δια του Δt.

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{4.3}$$

Η παροχή στο S.I. έχει μονάδες m^3/s και οι διαστάσεις της είναι L^3T^{-1}.

Έστω ότι σε σημείο ρευστού, δεδομένης ροής, το μέτρο της ταχύτητάς του είναι υ. Αν η διατομή του σωλήνα σε κείνο το σημείο είναι A (Σχ. 4.8) τότε σε μικρό χρονικό διάστημα Δt το ρευστό που περνάει, έχει όγκο ίσο με τον όγκο του κυλίνδρου με βάση Α και ύψος $\upsilon\Delta t$. Άρα, είναι

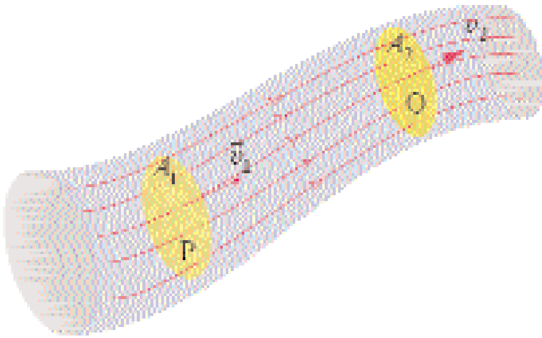


ΣΧΗΜΑ 4.8
Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt από τη διατομή A διέρχεται όγκος $A\upsilon\Delta t$

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\,\upsilon\,\Delta t}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Pi = A\,\upsilon \tag{4.4}$$

ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Θεωρούμε τη φλέβα (ή σωλήνα ροής) του σχήματος 4.9. Στη θέση P η διατομή του σωλήνα ροής είναι A_1, η ταχύτητα του ρευστου υ_1 και η πυκνότητα του ρευστού ϱ_1. Οι αντίστοιχες τιμές στη θέση Q είναι A_2, υ_2 και ϱ_2. Σε χρόνο Δt ο όγκος υγρού που εισρέει από τη διατομή A_1, είναι



ΣΧΗΜΑ 4.9

Η μάζα του ρευστού στο ρευματοσωλήνα διατηρείται σταθερή.

$$\Delta V_1 = \Pi_1 \Delta t = A_1 \upsilon \Delta t$$

και έχει μάζα

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 \upsilon_1 \Delta t$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt ο όγκος υγρού που εκρέει από τη διατομή A_2 είναι

$$\Delta V_2 = \Pi_2 \Delta t = A_2 \upsilon_2 \Delta t$$

και η αντίστοιχη μάζα του είναι

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 \upsilon_1 \Delta t$$

Για το ρευματικό σωλήνα θεωρούμε ότι:

α) Κάθε στοιχείο ρευστού ακολουθεί την ρευματική γραμμή και επομένως, από τα τοιχώματα του ρευματικού σωλήνα δεν διαφεύγει μάζα, διότι η ροή μας είναι στρωτή και οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται. Επομένως, όσες ρευματικές γραμμές διαπερνούν τη διατομή A_1, αυτές και μόνο διαπερνούν και την A_2.

β) Στο εσωτερικό του ρευματικού σωλήνα δεν υπάρχουν ούτε πηγές που να παρέχουν ρευστό ούτε καταβόρθες που να απορροφούν ρευστό. Άρα, η μάζα του ρευστού που περιέχει ο σωλήνας διατηρείται σταθερή. Επομένως, η μάζα του ρευστού που εισρέει στο σωλήνα από τη διατομή A_1, είναι ίση με τη μάζα του ρευστού που εκρέει από τη διατομή A_2, δηλαδή

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \qquad \text{ή}$$

$$\rho_1 A_1 \upsilon_2 \Delta t = \rho_2 A_2 \upsilon_2 \Delta t \qquad \text{ή}$$

$$\rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2 \tag{4.5}$$

Επειδή τα σημεία Ρ και Q είναι τυχαία μπορούμε να πούμε ότι για κάθε σημείο του σωλήνα

$$\rho A \upsilon = \text{σταθ.} \tag{4.6}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την **εξίσωση της συνέχειας** και εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας του ρευστού.

Επιπλέον, επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, ισχύει $\rho_1 = \rho_2$ και επομένως, έχουμε την έκφραση

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \tag{4.7}$$

Από τη σχέση (4.7) συμπεραίνουμε ότι εκεί που ο σωλήνας ροής (φλέβα) στενεύει, δηλαδή το εμβαδόν της διατομής A μικραίνει, η ταχύτητα της ροής αυξάνεται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ροή ενός ποταμού. Εκεί που η κοίτη του ποταμού στενεύει, τα νερά γίνονται πιο ορμητικά, ενώ εκεί που πλαταίνει, η ροή είναι πιο ήπια.

Παράδειγμα 4-1

Αγωγός διατομής 2,0 m^2 διαρρέεται από υγρό. Αν η παροχή του αγωγού είναι 3,0 $m^3 s^{-1}$, να υπολογισθεί η ταχύτητα του υγρού στον αγωγό. Κατά την εκροή του υγρού από τον αγωγό η ταχύτητά του είναι 12 $m \cdot s^{-1}$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του στομίου εκροής.

Απάντηση

Η ταχύτητα του υγρού στον αγωγό βρίσκεται από τη σχέση

$$\Pi = A\upsilon \quad \text{ή} \quad \upsilon = \frac{\Pi}{A}$$

οπότε

$$\upsilon = \frac{3{,}0}{2{,}0}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Από την εξίσωση συνέχειας (4.7) έχουμε

$$A\upsilon = A'\upsilon' \quad \text{ή} \quad A' = \frac{A\upsilon}{\upsilon'} \quad \text{ή}$$

$$A' = \frac{2{,}0 \times 1{,}5}{12}\ \mathrm{m^2} \quad \text{ή} \quad A' = 0{,}25\ \mathrm{m^2}$$

Επομένως, το εμβαδόν του στομίου εκροής είναι 0,25 m^2.

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ BERNOULLI

Θεωρούμε τη φλέβα ενός ιδανικού ρευστού, (Σχ. 4.10), η οποία ξεκινάει από το σημείο P, όπου η διατομή του είναι A_1, και καταλήγει στο σημείο Q, όπου η διατομή του γίνεται A_2.

Παρατηρούμε τη φλέβα τη χρονική στιγμή t (Σχ. 4.10α) και τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ (Σχ. 4.10β), όπου Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Το γραμμοσκιασμένο τμήμα μήκους $\Delta \ell_1$ έχει μάζα $\Delta m_1 = \rho A_1 \upsilon_1 \Delta t$ και το γραμμοσκιασμένο τμήμα μήκους $\Delta \ell_2$ έχει μάζα $\Delta m_2 = \rho A_2 \upsilon_2 \Delta t$. Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \rho A_1 \upsilon_1 \Delta t = \Delta m \qquad (4.8)$$

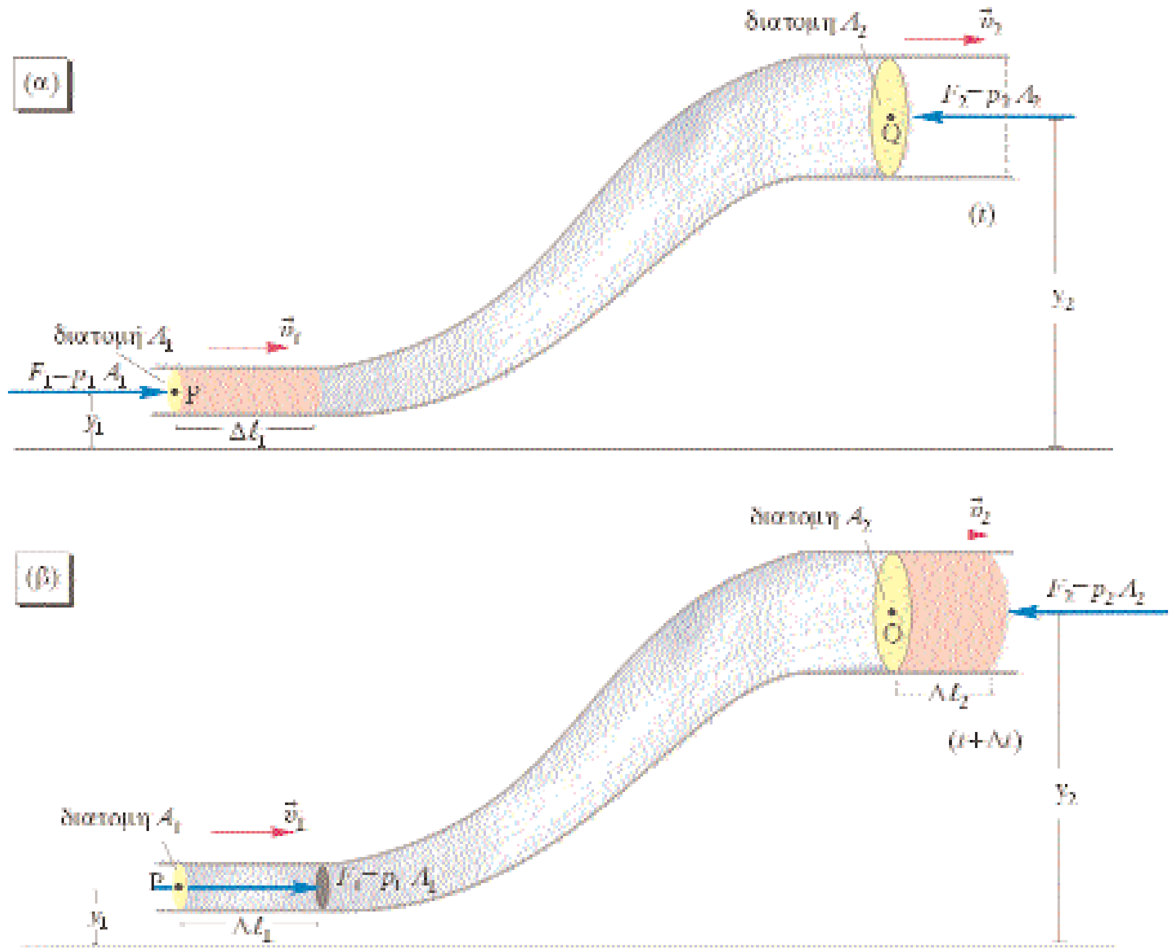
Η μάζα Δm της φλέβας αυξάνει την ενέργεια της λόγω του συνολικά παραγόμενου έργου από τις δυνάμεις F_1 και F_2 (Σχ. 4.10). Η αύξηση υπολογίζεται, αν σκεφτεί κανείς, ότι η μάζα Δm στο σημείο P έχει μηχανική ενέργεια

$$E_{\mathrm{P}} = U_{\mathrm{P}} + K_{\mathrm{P}} = \Delta m\, g\, y_1 + \frac{1}{2}\Delta m\, \upsilon_1^2$$

και η μάζα Δm στο σημείο Q έχει μηχανική ενέργεια

$$E_{\mathrm{Q}} = U_{\mathrm{Q}} + K_{\mathrm{Q}} = \Delta m\, g\, y_2 + \frac{1}{2}\Delta m\, \upsilon_2^2$$

Άρα, η αύξηση της μηχανικής ενέργειας είναι



ΣΧΗΜΑ 4.10

Στα σχήματα 4.10α και 4.10β παρατηρούμε τις θέσεις μιας ποσότητας ρευστού για δύο κοντινές χρονικές στιγμές t και $t + \Delta t$.

$$\Delta E = E_Q - E_P = \Delta m\, g\,(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}\Delta m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \qquad (4.9)$$

Όμως αυτή η αύξηση της ενέργειας ισούται με το συνολικό έργο των δυνάμεων $F_1 = p_1 A_1$ (ασκείται στο ρευστό στη θέση P) και της $F_2 = p_2 A_2$ (η οποία ασκείται στη θέση Q) δηλαδή,

$$\Delta E = \Delta W_{F_1} + \Delta W_{F_2} \qquad (4.10)$$

Όμως

$$\Delta W_{F_1} = F_1\, \Delta l_1 = p_1\, A_1\, v_1\, \Delta t \qquad (4.11)$$

και
$$\Delta W_{F_2} = -F_2\, \Delta l_2 = -p_2\, A_2\, v_2\, \Delta t = -p_2\, A_1\, v_1\, \Delta t \qquad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.10) τις (4.8), (4.9), (4.11) και (4.12) έχουμε

$$\Delta m\, g\left(y_2 - y_1\right) + \frac{1}{2}\Delta m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = p_1\, A_1\, v_1\, \Delta t - p_2\, A_1\, v_1\, \Delta t \qquad ή$$

$$\rho\, A_1\, v_1 \Delta t g\,\left(y_2 - y_1\right) + \frac{1}{2}\,\rho\, A_1\, v_1\, \Delta t\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \left(p_1 - p_2\right) A_1\, v_1\, \Delta t \qquad ή$$

$$\frac{1}{2}\rho\, \upsilon_1^2 + \rho\, g\, y_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\, \upsilon_2^2 + \rho\, g\, y_2 + p_2 \qquad (4.13)$$

Επειδή τα σημεία P και Q ήταν τυχαία, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να παραλείψουμε τους δείκτες, οπότε έχουμε

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 + \rho\, g\, y_1 + p = \text{σταθ.}} \qquad (4.14)$$

Σημείωση: Γενικώς, η σταθερά εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ρευματική γραμμή. Αν το πεδίο ροής είναι αστρόβιλο, τότε η σταθερά είναι ίδια για κάθε σημείο του πεδίου ροής.

Η εξίσωση 4.14 αποτελεί το νόμο του Bernoulli, η διατύπωση του οποίου είναι η εξής:

“Κατά μήκος μια ροϊκής γραμμής, η παράσταση

$$\frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 + \rho\, g\, y + p$$

διατηρεί την τιμή της σταθερή". Αυτό εκφράζει την αρχή διατήρησής της ενέργειας. Η ποσότητα

$$\frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta m\, \upsilon^2}{\Delta V} = \frac{\Delta K}{\Delta V}$$

είναι η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας του ρευστού.

Ο όρος

$$\rho\, g\, y = \frac{\Delta m}{\Delta V}\, g\, y = \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

είναι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας του ρευστού.

Η πίεση $p = \dfrac{p\,\Delta V}{\Delta V}$ εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας πιέσεως.

Όταν σ' ένα ρευστό εμφανίζονται τριβές, τότε δεν ισχύει επ' ακριβώς ο νόμος του Bernoulli, διότι τμήμα του έργου των δυνάμεων F_1 και F_2 μετατρέπεται σε εσωτερική (θερμόδυναμική) ενέργεια, λόγω των τριβών. Μπορούμε όμως να εφαρμόζουμε το νόμο για εξαγωγή προσεγγιστικών αποτελεσμάτων.

Όταν η φλέβα είναι οριζόντια τότε έχουμε $y_1 = y_2$ και η (4.13) γίνεται

$$\frac{1}{2}\rho\, \upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\, \upsilon_2^2 + p_2 \qquad (4.15)$$

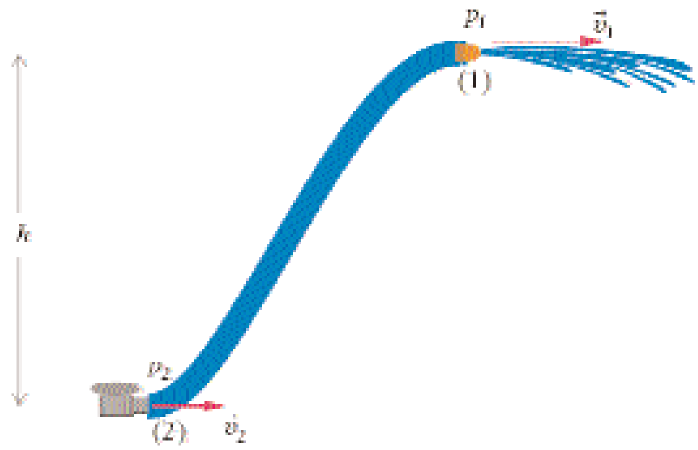
Επίσης, όταν το ρευστό δεν κινείται (υδροστατική - αεροστατική), τότε είναι $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$ και ο νόμος παίρνει τη μορφή

$$\rho\, g\, y_1 + p_1 = \rho\, g\, y_2 + p_2 \qquad (4.16)$$

που είναι ο γνωστός νόμος της υδροστατικής.

Παράδειγμα 4-2

Ένα λάστιχο με κυκλική διατομή ακτίνας 0,60 cm, συνδέεται με βρύση στο ισόγειο και μεταφέρει το νερό στην ταράτσα κτιρίου ύψους 10 m. Αν το στόμιο εκροής είναι κυκλικό και έχει ακτίνα 0,15 cm, ενώ η ταχύτητα, με την οποία εκτοξεύεται το νερό είναι $8{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ να υπολογισθούν: α) Η ταχύτητα του νερού στο λάστιχο. β) Η πίεση του νερού στη θέση του στόμιου της βρύσης. Η ροή να θεωρηθεί χωρίς τριβές.



ΣΧΗΜΑ 4.11

Απάντηση

α) Από την εξίσωση συνεχείας για τα σημεία (1) και (2) έχουμε

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \quad ή \quad \upsilon_2 = \frac{A_1 \upsilon_1}{A_2} \quad ή$$

$$\upsilon_2 = 8\,\frac{\pi\,(0{,}15)^2}{\pi\,(0{,}60)^2}\ \mathrm{ms^{-1}} \quad ή \quad \upsilon_2 = 0{,}50\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

β) Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία (1) και (2) έχουμε

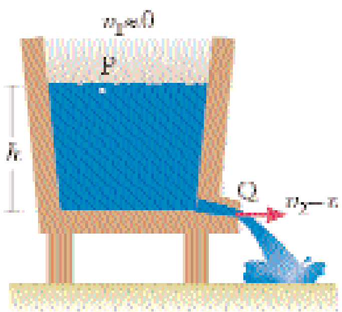
$$p_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 = p_1 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 \quad ή \quad p_2 = p_1 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right)$$

Η πίεση στη θέση (1) ισούται με την ατμοσφαιρική, δηλ. είναι $p_1 = 1\ \mathrm{atm} = 10^5\ \mathrm{N.m^{-2}}$ Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην τελευταία σχέση παίρνουμε

$$p_2 = \left[10^5 + 10^3 \times 10 \times 10 + \frac{1}{2} \times 10^3\left(8^2 - 0{,}5^2\right)\right]\mathrm{Pa} \quad ή \quad p_2 = 2{,}32 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$$

(Ποιά θα είναι η τιμή της p_2, αν διπλασιασθεί η παροχή από τη βρύση;)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ TORRICELLI



ΣΧΗΜΑ 4.12

Το νερό έχει ταχύτητα υ κατά την εκροή του, ενώ η ελεύθερη επιφάνεια κατεβαίνει πολύ αργά.

Το δοχείο του σχήματος 4.12 έχει μεγάλες διαστάσεις και η ελεύθερη επιφάνεια βρίσκεται σε ύψος h από τον πυθμένα. Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα, με την οποία ποσότητα νερού εκρέει από το κάτω άκρο του δοχείου. Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τα σημεία P της ελεύθερης επιφάνειας και Q του κάτω άκρου του δοχείου. Θέτουμε $y_1 = h$, $y_2 = 0$, $\upsilon_1 = 0$ και $\upsilon_2 = \upsilon$ οπότε η 4.13 μας δίνει

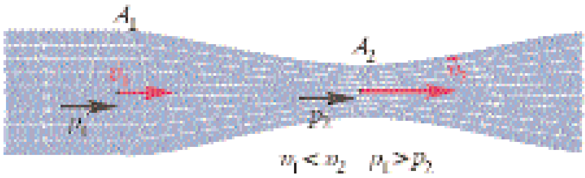
$$\rho g h + p_1 = \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + p_2$$

Οι πιέσεις p_1 και p_2 είναι ίσες με την ατμοσφαιρική, επομένως έχουμε

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{2 g h}$$

Παρατηρούμε ότι, η ταχύτητα είναι ίδια με την ταχύτητα που θα αποκτούσε το σωμάτιο αν εκτελούσε ελεύθερη πτώση από ύψος *h*. Η τελευταία πρόταση είναι το θεώρημα του Torricell.

Παρατήρηση: Έστω, κάποιο ρευστό κινείται στο σωλήνα του σχήματος 4.13.



ΣΧΗΜΑ 4.13

Στη στένωση η ταχύτητα του ρευστού είναι μεγαλύτερη και η πίεση μικρότερη.

Για δύο σημεία του σωλήνα, στα οποία οι διατομές είναι A_1 και A_2 με $A_1 > A_2$, εφαρμόζοντας το νόμο συνέχειας έχουμε

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Επειδή $A_1 > A_2$ συμπεραίνουμε

$$v_1 < v_2$$

Κατόπιν εφαρμόζοντας το νόμο του Bernoulli έχουμε

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

και επειδή $v_1 < v_2$ συμπεραίνουμε

$$p_1 > p_2$$

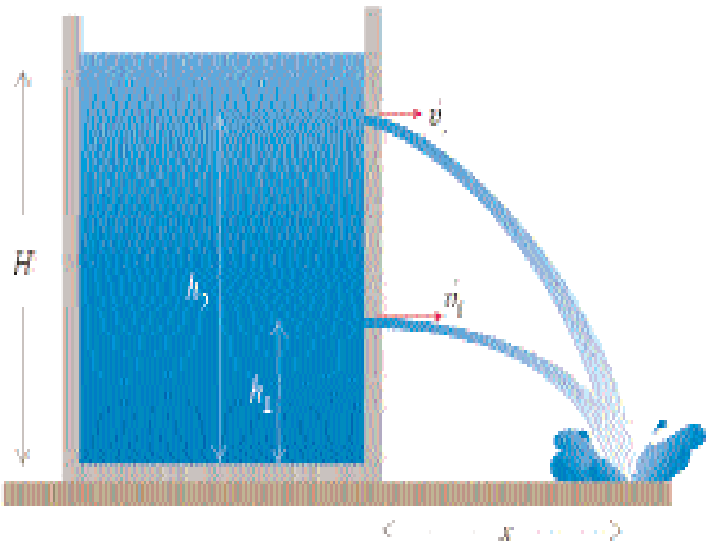
Επομένως, στις στενώσεις οι ρευματικές (ροϊκές) γραμμές είναι πυκνότερες, η ταχύτητα μεγαλύτερη και η πίεση μικρότερη (υποπίεση). Αντίθετα, εκεί που είναι μεγαλύτερη η διατομή του ρευματικού σωλήνα η πίεση είναι μεγαλύτερη, η ταχύτητα μικρότερη, και οι ρευματικές γραμμές πιο αραιές.

Παράδειγμα 4-3

Ένα δοχείο περιέχει νερό μέχρι ύψους *H* και βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι. Ανοίγοντας δύο οπές στο δοχείο σε ύψη h_1 και h_2, από το τραπέζι, παρατηρούμε ότι το νερό που εκρέει από τις δύο οπές συναντάει το τραπέζι στο ίδιο σημείο. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα ύψη h_1 και h_2.

Απάντηση

Από το θεώρημα του Torricelli, η ταχύτητα v_1, με την οποία εκρέει το νερό από την οπή (1), είναι



ΣΧΗΜΑ 4.14

$$v_1 = \sqrt{2g(H - h_1)}$$

Τα σωμάτια ρευστού που εξέρχονται εκτελούν οριζόντια βολή. Ο χρόνος, για να φτάσουν στο έδαφος, υπολογίζεται από την κίνησή τους στον κατακόρυφο άξονα (εκτελούν ελεύθερη πτώση). Είναι

$$h_1 = \frac{1}{2} g\, t_1^2 \quad \text{ή} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Άρα, το βεληνεκές είναι

$$x_1 = v_1 t_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = \sqrt{4(H - h_1)h_1}$$

Όμοια για τη δεύτερη οπή

$$x_2 = \sqrt{4(H - h_2)h_2}$$

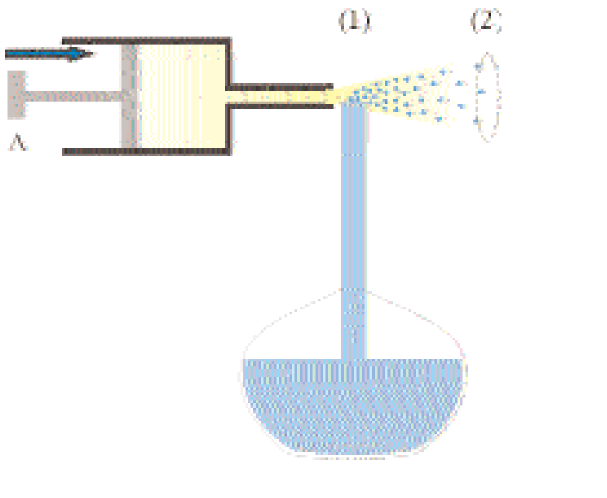
Επειδή φτάνουν στο ίδιο σημείο, είναι

$$x_1 = x_2 \quad \text{ή} \quad (H - h_1)\,h_1 = (H - h_2)\,h_2 \quad \text{ή} \quad h_1 + h_2 = H$$

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ BERNOULLI

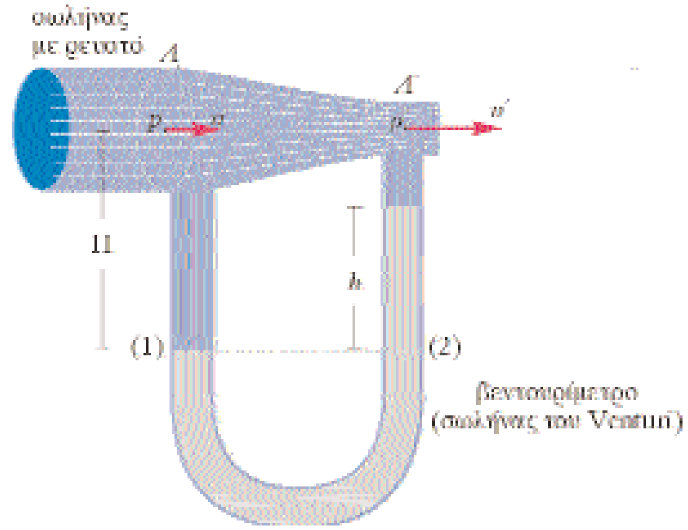
Οι πρακτικές εφαρμογές του νόμου του Bernoulli είναι πολλές. Η αρπαγή των στεγών από τον αέρα, και το απλό ψέκασμα με μια κολώνια, είναι εφαρμογές αυτού του νόμου. Παρακάτω περιγράφουμε ορισμένες χαρακτηριστικές εφαρμογές.

α) **Ψεκαστήρας**: Στο σχήμα 4.15 εικονίζεται ένας ψεκαστήρας. Πιέζοντας με ταχύτητα το έμβολο Δ δημιουργούμε εκροή αέρα από το στόμιο του κυλίνδρου. Η φλέβα αέρα που εκρέει από το στόμιο, ανοίγει καθώς απομακρύνεται από αυτό. Επομένως, στη θέση (1) έχουμε στένωση και έτσι, η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη και η πίεση μικρότερη. Συνέπεια της υποπίεσης στη θέση (1) είναι η ανύψωση του υγρού στο σωλήνα Σ, το οποίο παρασύρεται από το ρεύμα του αέρα, σταγονοποιείται και εκτοξεύεται.



ΣΧΗΜΑ 4.15

Αρχή λειτουργίας του ψεκαστήρα.



ΣΧΗΜΑ 4.16

Βεντουρίμετρο. Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας ενός ρευστού.

β) **Βεντουρίμετρο**: Το βεντουρίμετρο ή σωλήνας του Venturi είναι μια συσκευή, με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε την ταχύτητα της ροής ρευστού σε ένα σωλήνα. ΄Εστω, ότι η διατομή του σωλήνα είναι A. Συνδέουμε με το σώληνα το βεντουρίμετρο, το οποίο πιο πέρα έχει στένωση με εμβαδόν διατομής A'. Το μανόμετρο περιέχει συνήθως υδράργυρο, του οποίου η πυκνότητα είναι ρ' γνωστή. Μετρούμε την ένδειξη h του μανομέτρου (Σχ. 4.16). Από το νόμο της συνέχειας έχουμε

$$A\,v = A'\,v' \quad \text{ή} \quad v' = \frac{A}{A'}v$$

όπου v και v' η ταχύτητα του ρευστού στην διατομή A και A' αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Bernoulli για δύο σημεία, ένα της διατομής A και ένα της διατομής A', έχουμε

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\rho v'^2 + p'$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, p και p' η πίεση του ρευστού στις διατομές A και A'.

Τα σημεία (1) και (2) του υδραργύρου έχουν ίδια πίεση δηλαδή

$$p_1 = p_2$$

Όμως

$$p_1 = p + \rho g H \qquad \text{και}$$

$$p_2 = p' + \rho' g h + \rho g (H - h)$$

Άρα

$$p + \rho g H = p' + \rho' g h + \rho g (H - h) \quad \text{ή}$$

$$p - p' = (\rho' - \rho) g h$$

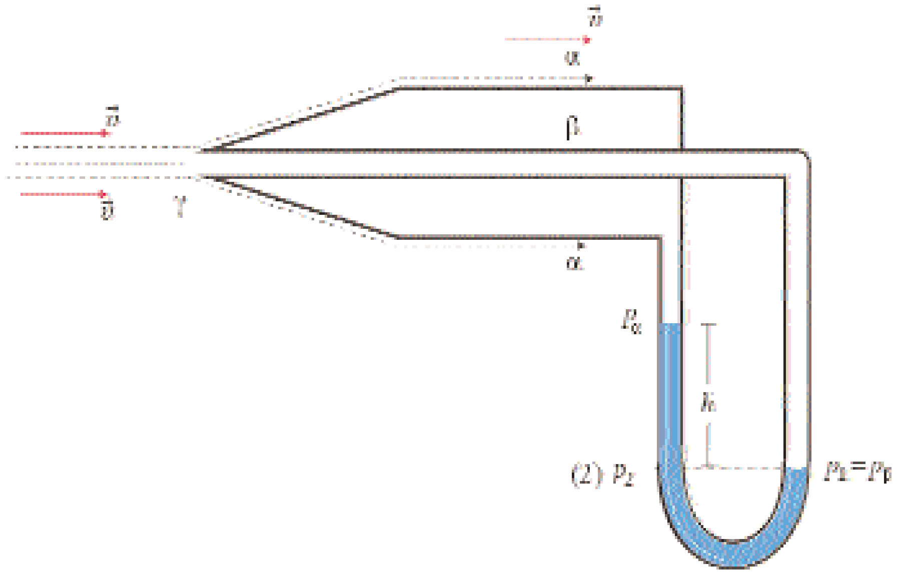
όπου h η ένδειξη του μανομέτρου. Συνδυάζοντας τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p - p' = \frac{1}{2}\rho v'^2 \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + (\rho' - \rho) g h = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A}{A'}\right)^2 v^2 \quad \text{ή}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) g h}{\rho\left[\left(\dfrac{A}{A'}\right)^2 - 1\right]}} \tag{4.17}$$

γ) **Σωλήνας Pilot**: Είναι μια συσκευή, η οποία χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας αέρα. Τοποθετείται, έτσι ώστε το άνοιγμά της (γ) να είναι παράλληλο στο ρεύμα του αέρα (Σχ. 4.17). Τα σημεία (α), όπου υπάρχουν ανοίγματα, και το σημείο (β) είναι αρκετά μακριά από το σημείο εισόδου (γ). Μ' αυτό το τρόπο στο (α) αποκαθίσταται η κανονική ροή του αερίου, που διαταράχθηκε με κάποιο πύκνωμα στο (γ). Έτσι, έχουμε ακριβώς την ταχύτητα του αερίου χωρίς διαταραχές. Στο (β) η τυχόν ταχύτητα που είχαν τα σωμάτια που εισέρχονται στο (γ) έχει σχεδόν μηδενιστεί.
Από το νόμο του Bernoulli έχουμε



ΣΧΗΜΑ 4.17

Σωλήνας Pitot. Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας ενός αερίου.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_\alpha = 0 + p_\beta$$

Για το υγρό του μανομέτρου ισχύει $p_1 = p_2$.

Όμως η $p_1 = p_\beta$ και $p_2 = p_\alpha + \rho' g h$, όπου ρ' η πυκνότητα του υγρού του μανομέτρου.

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε,

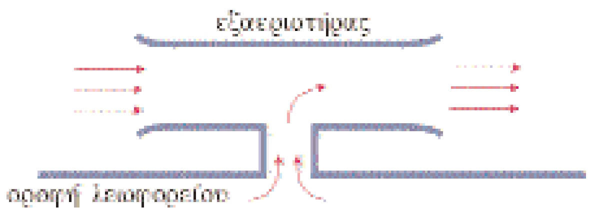
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_\alpha = p_\alpha + \rho' g h \quad \text{ή}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho}} \tag{4.18}$$

Από την ένδειξη h του μανομέτρου και με γνωστές τις πυκνότητες του αερίου και του υγρού του μανομέτρου, ρ και ρ' αντίστοιχα, υπολογίζουμε την ταχύτητα του αερίου.

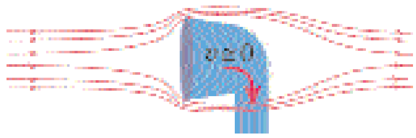
δ) **Εξαεριστήρας λεωφορείου - Ανεμοδόχος πλοίου**: Η μορφή των εξαεριστηρίων ενός λεωφορείου είναι αυτή του σχήματος 4.18. Καθώς κινείται το λεωφορείο οι ροϊκές γραμμές πυκνώνουν στον εξαεριστήρα με συνέπεια να δημιουργείται υποπίεση. Λόγω της υποπίεσης φεύγουν μάζες αέρα από το εσωτερικό του λεωφορείου.

Αντίθετα, οι ανεμοδόχοι των πλοίων έχουν τη μορφή του σχήματος 4.19.



ΣΧΗΜΑ 4.18

Εξαεριστήρας λεωφορείου. Το λεωφορείο κινείται προς τα αριστερά.

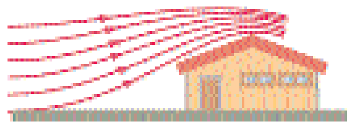


ΣΧΗΜΑ 4.19

Ανεμοδόχος πλοίου.

Καθώς κινείται το πλοίο ή φυσάει αέρας, έχουμε στον ανεμοδόχο, αραίωση των ρευματικών γραμμών και ταχύτητα σχεδόν μηδέν. Επομένως, δημιουργείται υπερπίεση και έτσι οδεύει αέρας στο εσωτερικό του πλοίου.

ε) **Αρπαγή στεγών**: Με τον νόμο του Bernoulli εξηγείται και η αρπαγή των στεγών από τους δυνατούς ανέμους. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.20, πάνω από τη στέγη έχουμε στένωση της φλέβας του ανέμου, επομένως δημιουργία υποπίεσης. Η μεγάλη διαφορά της εξωτερική πίεσης από αυτή της πίεσης του εσωτερικού του σπιτιού, η οποία ισούται με την ατμοσφαιρική, δημιουργεί δύναμη με φορά προς τα επάνω η οποία σηκώνει τη στέγη. (Μάλιστα η στέγη κινείται αντίθετα από την κατεύθυνση του ανέμου).

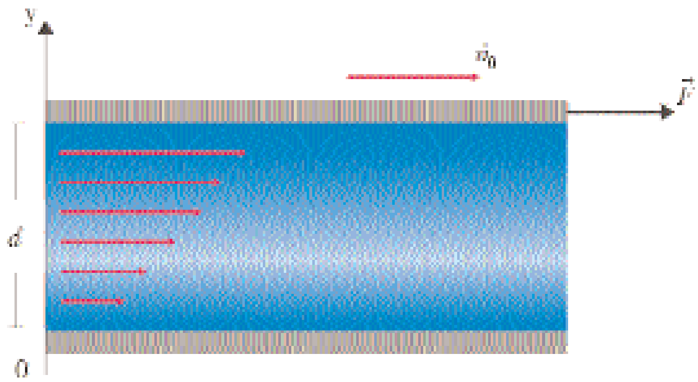


ΣΧΗΜΑ 4.20

Οι δυναμικές γραμμές πυκνώνουν στην οροφή του σπιτιού.

ΙΞΩΔΕΣ

Θεωρούμε δύο πλάκες, οι οποίες απέχουν μικρή απόσταση d και ανάμεσά τους υπάρχει ένα ρευστό. ΄Εστω, ότι η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0 και η κάτω είναι ακίνητη (Σχ. 4.21). Αποδεικνύεται πειραματικά, για πλάκες από διαφορετικά υλικά και για οποιοδήποτε ρευστό, ότι τα στοιχεία ρευστού που βρίσκονται σε επαφή με την πάνω πλάκα έχουν ταχύτητα υ_0 και αυτά τα οποία βρίσκονται σε επαφή με την κάτω έχουν ταχύτητα μηδέν. Η κατανομή των ταχυτήτων είναι αυτή του σχήματος 4.21. Η δύναμη F που ασκείται στην πάνω πλάκα, είναι ανάλογη του εμβαδού A



ΣΧΗΜΑ 4.21

Η ταχύτητα των διαφόρων στρωμάτων του ρευστού μεταβάλλεται από μηδέν (ταχύτητα κάτω πλάκας) έως υ_0 (ταχ’θητα πάνω πλάκας).

της πλάκας και της ταχύτητας υ_0. Επίσης είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης d και εξάρτεται από το υλικό. Άρα

$$F = \eta\, A\, \frac{\upsilon_0}{d} \tag{4.19}$$

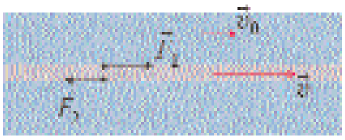
Η ποσότητα η ονομάζεται ιξώδες του ρευστού. Λύνοντας την 4.19 ως προς η έχουμε

$$\eta = \frac{F}{A}\frac{d}{\upsilon_0} \quad \text{ή}$$

$$\eta = \tau\, \frac{d}{\upsilon_0} \tag{4.20}$$

Η ποσότητα $\tau = \dfrac{F}{A}$ καλείται διατμητική τάση και είναι η διατμητική δύναμη ανά μονάδα επιφανείας.
Η μονάδα του ιξώδους, η, στο S.I. είναι το Pa.s και οι διαστάσεις του είναι $ML^{-1}T^{-1}$. Η μονάδα poise (P) του παλιού συστήματος CGS είναι, 1 poise = 10^{-1} Pa·s.

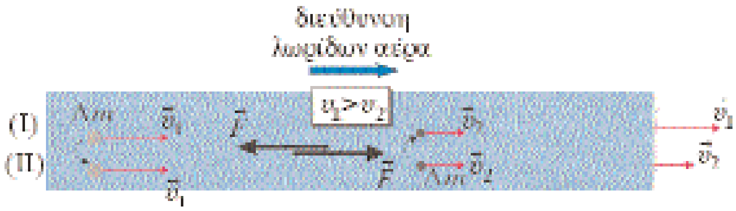
Ας εξετάσουμε μια λεπτή οριζόντια λωρίδα του ρευστού που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο πλάκες (Σχ. 4.22). Αυτή η λωρίδα έχει ταχύτητα υ. Η λωρίδα ακριβώς πάνω από αυτή, έχει μεγαλύτερη ταχύτητα και η λωρίδα ακριβώς κάτω από αυτή μικρότερη ταχύτητα. Η διατμητική δύναμη που δέχεται από την πάνω λωρίδα είναι η F_1 και έχει φορά προς τα δεξιά, και η δύναμη από την κάτω λωρίδα είναι η F_2 και έχει φορά προς τα αριστερά. Δηλαδή, κατά την κίνηση του ρευστού, αναπτύσσονται διατμητικές δυνάμεις ή αλλιώς δυνάμεις εσωτερικής τριβής. Η ανάπτυξη αυτών των δυνάμεων οφείλεται σε διαφορετικούς λόγους στα υγρά απ’ ότι στα αέρια. Στα υγρά οι διατμητικές δυνάμεις οφείλονται στις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων του υγρού. Με την αύξηση της θερμοκρασίας οι δυνάμεις συνοχής μικραίνουν, επομένως αναμένουμε μείωση των διατμητικών δυνάμεων, το οποίο και συμβαίνει. Γι’ αυτό το λόγο, στα υγρά το ιξώδες μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.



ΣΧΗΜΑ 4.22

Μια λωρίδα του ρευστού δέχεται διατμητικές δυνάμεις από τις γειτονικές της λωρίδες

Στα αέρια οι δυνάμεις συνοχής είναι αμελητέες και δεν δικαιολογούν τις διατμητικές δυνάμεις, οι οποίες εξηγούνται ως εξής: Τα μόρια στα αέρια κινούνται ελεύθερα σε όλη την έκταση του όγκου του αέρα. Συνεπώς, μεταξύ δύο γειτονικών λωρίδων συμβαίνει ανταλλαγή μάζας. Η μάζα από την λωρίδα με την μεγαλύτερη ταχύτητα, καθώς εισέρχεται στην λωρίδα με την μικρότερη ταχύτητα, συμπαρασύρει την μάζα της λωρίδας αυτής, άρα, ασκείται στην λωρίδα μικρότερης ταχύτητας, δύναμη ομόρροπη με την ταχύτητα της ροής. Η μάζα όμως, από την λωρίδα μικρότερης ταχύτητας που εισέρχεται στην λωρίδα μεγαλύτερης ταχύτητας, μειώνει την ταχύτητα της δεύτερης, επομένως στη λωρίδα μεγαλύτερης ταχύτητας ασκείται διατμητική δύναμη, η οποία έχει



ΣΧΗΜΑ 4.23

Μάζα Δm με ταχύτητα υ_1 μεταφέρεται στη λωρίδα (ΙΙ). Συγχρόνως μάζα Δm με ταχύτητα υ_2 μεταφέρεται στη λωρίδα (Ι).

φορά αντίθετη από την ταχύτητα της ροής (Σχ. 4.23). Όσο πιο γρήγορα γίνεται η ανταλλαγή μάζας μεταξύ των δύο λωρίδων, τόσο πιο μεγάλες θα είναι οι διατμητικές δυνάμεις. Η ανταλλαγή μάζας εξαρτάται από την ταχύτητα των μορίων του αερίου, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της απολύτου θερμοκρασίας T. Άρα, οι διατμητικές δυνάμεις και κατ’ επέκταση το ιξώδες των αερίων, θα είναι ανάλογο της $\sqrt{T}$.

αέριο	$\eta(p)$
Ne	$29,7 \times 10^{-5}$
H_2	$8,4 \times 10^{-5}$
O_2	$18,9 \times 10^{-5}$
N_2	$16,6 \times 10^{-5}$
CH_4	$10,3 \times 10^{-5}$
CO_2	$13,9 \times 10^{-5}$

ΣΧΗΜΑ 4.24

Πειραματικές τιμές του ιξώδους σε μονάδες poise, στη θερμοκρασία 0°C.

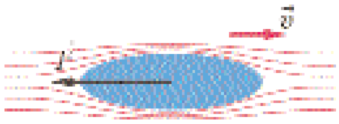
Στο πίνακα του σχήματος 4.24 δίνονται οι τιμές του ιξώδους για διάφορα αέρια. Για τον αέρα σε θερμοκρασία 20 °C το ιξώδες είναι $1,8 \times 10^{-5} \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΙΒΗΣ ΣΕ ΣΩΜΑΤΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΡΕΥΣΤΑ

Από την καθημερινότητα εύκολα διαπιστώνουμε ότι, ένα σώμα που βρίσκεται σ' ένα ρευστό και κινείται σχετικά με αυτό, δέχεται δύναμη από το ρευστό.

Βγάζοντας το χέρι μας έξω από το παράθυρο, όταν κινούμαστε με ένα αυτοκίνητο, δεχόμαστε δύναμη αντίθετη από την κίνηση του αυτοκινήτου. Ο ισχυρός άνεμος λυγίζει τα δέντρα κατά τη φορά της κίνησης του. Μετακινώντας το χέρι μας, ενώ το έχουμε βυθισμένο στο νερό, νοιώθουμε αντίσταση από το νερό κ.ο.κ.

Όταν ένα συμμετρικό σώμα κινείται σε ρευστό με ταχύτητα παράλληλη σε ένα επίπεδο συμμετρίας του, τότε η δύναμη που δέχεται από το ρευστό έχει διεύθυνση ίδια με αυτή της ταχύτητας του σώματος και φορά αντίθετη, ονομάζεται δε αντίσταση ή οπισθέλκουσα ή και δύναμη τριβής (Σχ. 4.25).



ΣΧΗΜΑ 4.25

Σ' ένα συμμετρικό σώμα η δύναμη από το ρευστό είναι αντίθετης φοράς με την ταχύτητά του.

Τα πειράματα δείχνουν ότι η δύναμη αντίστασης που δέχεται ένα σώμα, καθώς κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέσα ένα ακίνητο ρευστό, έχει φορά αντίθετη από αυτή της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και το μέτρο της, προσεγγιστικά για μικρές ταχύτητες, δίνεται από τη σχέση

$$F_{\alpha\nu} = C_1 \upsilon \tag{4.21}$$

και για μεγαλύτερες από τη σχέση

$$F_{\alpha\nu} = C_2 \upsilon^2 \tag{4.22}$$

όπου C_1 και C_2 σταθερές ανεξάρτητες της ταχύτητας.

Για την περίπτωση σφαιρικού σώματος θα υπολογίσουμε τους συντελεστές C_1 και C_2 με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης. Οι συντελεστές C_1 και C_2 εξαρτώνται από την πυκνότητα του υλικού ρ, το *ιξώδες* η και την ακτίνα R της σφαίρας.

Έστω $C_1 \propto \rho^{k} \eta^{\lambda} R^{\mu}$. Ισχύει, για τις διαστάσεις

$$\left[C_1\,\upsilon\right] = \left[F\right] \quad \text{ή} \quad \left[\rho\right]^{k}\left[\eta\right]^{\lambda}\left[R\right]^{\mu}\left[\upsilon\right] = \left[F\right] \quad \text{ή}$$

$$(\mathrm{ML}^{-3})^{k}(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1})^{\lambda}(\mathrm{L})^{\mu}(\mathrm{LT}^{-1}) = \mathrm{MLT}^{-2} \quad \text{ή}$$

$$\mathrm{M}^{k+\lambda}\,\mathrm{L}^{-3k-\lambda+\mu+1}\,\mathrm{T}^{-\lambda-1} = \mathrm{M}^1\,\mathrm{L}^1\,\mathrm{T}^{-2} \quad \text{ή}$$

$$\left.\begin{array}{r} k + \lambda = 1 \\ -3k - \lambda + \mu + 1 = 1 \\ -\lambda - 1 = -2 \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} k = 0 \\ \mu = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}$$

Άρα, είναι

$$C_1 \propto \eta\, R$$

Πράγματι η ακριβής σχέση είναι

$$C_1 = 6\pi\,\eta\, R \tag{4.23}$$

οπότε η (4.21) γίνεται

$$F_{\alpha\nu} = 6\pi\,\eta\, R\,\upsilon \quad \text{(Νόμος του Stokes)} \tag{4.24}$$

Όμοια $C_2 \propto \rho^{\alpha} \eta^{\beta} R^{\gamma}$ και πρέπει

$$[C_2\, v^2] = [F] \quad \text{ή} \quad [\rho]^{\alpha}[\eta]^{\beta}[R]^{\gamma}[v]^2 = [F]$$

κάνοντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 2$$

Άρα

$$C_2 \propto \rho R^2$$

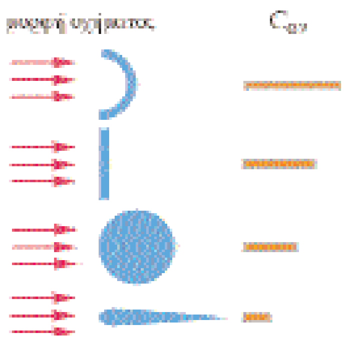
Η ακριβής τιμή είναι

$$C_2 = \frac{\pi}{4}\rho R^2 \tag{4.25}$$

Για διάφορες γεωμετρικές μορφές αποδεικνύεται ότι ο C_2 δίνεται από τη σχέση

$$C_2 = C_{\alpha\nu}\, A^2 \frac{\rho}{2} \tag{4.26}$$

όπου $C_{\alpha\nu}$ είναι ο συντελεστής αντίστασης, ο οποίος εξαρτάται από το σχήμα του σώματος και κυρίως από αυτό του πίσω μέρους του, μικραίνοντας αρκετά όταν το σώμα έχει αεροδυναμική (ιχθυώδη) μορφή. Στο σχήμα 4.26 δίνεται ένα μέτρο σύγκρισης του $C_{\alpha\nu}$ για διάφορα γεωμετρικά σχήματα.



ΣΧΗΜΑ 4.26

Σύγκριση συντελεστών αντίστασης για διάφορα γεωμετρικά σχήματα.

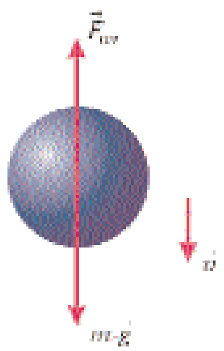
A: η μετωπική επιφάνεια του σώματος, δηλαδή η μέγιστη διατομή του σώματος, η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητά του.

ρ: η πυκνότητα του ρευστού.

Παρατήρηση: Όταν κινείται το ρευστό και το σώμα είναι ακίνητο, η ταχύτητα υ στους προηγούμενους τύπους είναι η ταχύτητα του ρευστού. Αν κινούνται και το σώμα και το ρευστό, τότε η ταχύτητα είναι η σχετική τους ταχύτητα. Επίσης, η ροή γύρω από το σώμα, στην περίπτωση του νόμου του Stokes, πρέπει να είναι στρωτή.

Παράδειγμα 4-4

Σφαιρικό σώμα ακτίνας $R = 10\,\text{cm}$ και μάζας $m = 2{,}0\,\text{kg}$ αφήνεται να πέσει από αρκετό ύψος. Να υπολογιστεί η οριακή ταχύτητα που αποκτά το σώμα. Θεωρείστε συνεισφορά στην δύναμη αντίστασης μόνο από τον όρο $C_2 \upsilon^2$.



ΣΧΗΜΑ 4.27

Απάντηση

Καθώς το σώμα πέφτει, ασκούνται σ' αυτό το βάρος και η αντίσταση του αέρα. Αρχικά το βάρος είναι μεγαλύτερο και το σώμα επιταχύνεται. Η αύξηση της ταχύτητας του σώματος συνεπάγεται αύξηση και της αντίστασης του αέρα. Η ταχύτητα αποκτά την **οριακή** της **τιμή** όταν οι δυνάμεις γίνουν ίσες κατά μέτρο, δηλαδή

$$F_{\alpha\nu} = mg \quad \text{ή}$$

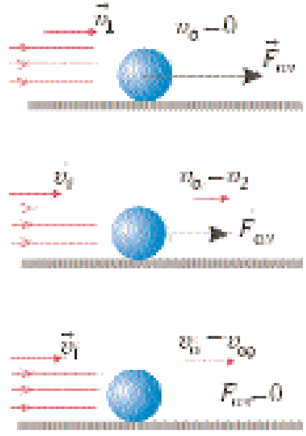
$$\frac{\pi}{4}\rho R^2 \upsilon_{o\rho}^2 = m\,g \quad \text{ή} \quad \upsilon_{o\rho} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{m\,g}{\pi\rho}} \quad \text{άρα}$$

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{2}{0{,}1} \times \sqrt{\frac{2{,}0 \times 9{,}8}{3{,}14 \times 1{,}3}}\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \quad \text{ή} \quad \upsilon_{o\rho} = 43\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$

Παράδειγμα 4-5

Σε ένα οριζόντιο και λείο τραπέζι βρίσκεται μικρή μπίλια ακτίνας R = 0,50 mm. Με ένα φυσερό δημιουργούμε οριζόντιο ρεύμα αέρος ταχύτητας $\upsilon_1 = 6{,}0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Να υπολογιστεί η δύναμη, την οποία το ρεύμα αέρος ασκεί στη μπίλια,

α) Όταν η μπίλια είναι ακίνητη, β) όταν αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_2 = 4{,}0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, γ) όταν αποκτήσει την οριακή της ταχύτητα. Θεωρήστε ότι η δύναμη από τον αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας. ($\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa.s)



ΣΧΗΜΑ 4.28-30

<u>Απάντηση</u>

α) Όταν η μπίλια είναι ακίνητη είναι

$$F_{αν} = C_1\upsilon_1 \quad ή \quad F_{αν} = 6\pi\eta R\upsilon_1$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$F_{αν} = (6 \times 3{,}14 \times 1{,}8 \times 10^{-5} \times 0{,}5 \times 10^{-3} \times 6{,}0)\ \mathrm{N} \quad ή$$

$$F_{αν} = 1{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

β) Όταν η μπίλια αποκτά ταχύτητα υ_2 η σχετική της ταχύτητα, ως προς τον αέρα, είναι $(\upsilon_1 - \upsilon_2)$. Άρα, η δύναμη από τον αέρα είναι

$$F_{αν} = C_1(\upsilon_1 - \upsilon_2) \ ή \ F_{αν} = 6\pi\eta R(\upsilon_1 - \upsilon_2)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$F_{αν} = 6 \times 3{,}14 \times 1{,}8 \times 10^{-5} \times 0{,}5 \times 10^{-3} \times 2{,}0\ \mathrm{N} \quad ή$$

$$F_{αν} = 0{,}3 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

γ) Οριακή ταχύτητα θα αποκτήσει η μπίλια, όταν η δύναμη (αντίσταση) γίνει μηδέν. Άρα

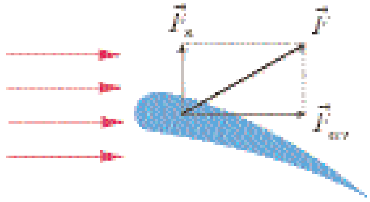
$$F_{αν} = 0$$

οπότε

$$\upsilon_{ορ} = \upsilon_1 = 6{,}0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

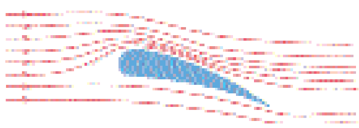
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΩΣΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την δύναμη που αναπτύσσεται σ' ένα σώμα, όταν αυτό κινείται ως προς το ρευστό. Εξετάσαμε την περίπτωση κατά την οποία το σώμα είναι συμμετρικό, οπότε η δύναμη (αντίσταση) που εξασκείται σ' αυτό είναι αντίθετη προς την ταχύτητα. Αν όμως το σώμα δεν είναι συμμετρικό, τα πράγματα είναι διαφορετικά, η δύναμη F από το ρευστό δεν είναι αντίθετη της ταχύτητάς του. Για παράδειγμα, η δύναμη στην πτέρυγα ενός αεροπλάνου είναι όπως στο σχήμα 4.31. Αναλύοντας την δύναμη F του σχήματος 4.31 παίρνουμε δύο συνιστώσες. Η οριζόντια συνιστώσα $F_{αν}$ είναι η δύναμη τριβής (η αντίσταση) και η κατακόρυφος συνιστώσα F_{κ} είναι μια δύναμη που ονομάζεται **δυναμική άνωση**. Η εξήγηση της δημιουργίας της δυναμικής άνωσης είναι η εξής: Όταν η πτέρυγα του αεροπλάνου κινείται, η μορφή των ρευματικών γραμμών είναι αυτή του σχήματος 4.32. Οι δυναμικές γραμμές πυκνώνουν στο πάνω μέρος της πτέρυγας και αραιώνουν στο κάτω. Επομένως, στην πτέρυγα του αεροπλάνου η ταχύτητα του αέρα είναι μεγαλύτερη στο επάνω μέρος της πτέρυγας και μικρότερη στο κάτω ($\upsilon_1 > \upsilon_2$). Άρα, με βάση το νόμο του Bernoulli, η πίεση στο επάνω μέρος είναι μικρότερη από αυτή στο κάτω μέρος. Επομένως, και η δύναμη του αέρα στην πτέρυγα είναι μεγαλύτερη στο κάτω μέρος απ' ότι στο επάνω. Η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων έχει φορά προς τα επάνω και ονομάζεται δυναμική άνωση.



ΣΧΗΜΑ 4.31

Η δύναμη του αέρα στην πτέρυγα είναι πλάγια και όχι οριζόντια



ΣΧΗΜΑ 4.32

Οι δυναμικές γραμμές γύρω από την πτέρυγα αεροπλάνου.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

❑ Κατά την κίνηση των ρευστών ισχύουν οι εξής νόμοι:

α) Ο νόμος της συνέχειας, σύμφωνα με τον οποίο το γινόμενο της ταχύτητας του ρευστού επί το εμβαδόν της διατομής του ρευματικού σωλήνα, σε κάθε σημείο του (κατά μήκος του σωλήνα) είναι το ίδιο.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

β) Ο νόμος του Bernoulli, σύμφωνα με τον οποίο, για δύο σημεία του ρευστού και αστρόβιλη ροή, ισχύει

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 + p_2$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, y_1, y_2 οι κατακόρυφες απόστασεις των σημείων από δεδομένο οριζόντιο επίπεδο και p_1, p_2 οι πιέσεις στα σημεία. Εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

❑ Μερικές από τις εφαρμογές του νόμου του Bernoulli είναι ο ψεκαστήρας, το βεντουρίμετρο, ο σωλήνας Pitot κ.τ.λ.

❑ Έστω δύο πλάκες εμβαδού A, που απέχουν απόσταση d και ανάμεσά τους υπάρχει ρευστό. Η πάνω πλάκα κινείται με ταχύτητα v_0, παράλληλα προς την άλλη που είναι ακίνητη. Το ιξώδες του ρευστού ορίζεται από τη σχέση

$$\eta = \tau \frac{d}{v_0}$$

όπου $\tau = F/A$ η διατμητική τάση και d η απόσταση μεταξύ δύο πλακών.

❑ Όταν ένα σώμα κινείται μέσα σε ένα ρευστό με σχετική ταχύτητα v, για μικρες ταχύτητες δέχεται αντίσταση από το ρευστό

$$F = C_1 v$$

και για μεγάλες ταχύτητες

$$F = C_2 v^2$$

Αν το σώμα είναι σφαιρικό ακτίνας R, αποδεικνύεται ότι είναι

$$C_1 = 6\pi \eta R$$

όπου η το ιξώδες του ρευστού και

$$C_2 = \frac{\pi}{4}\rho R^2$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού.

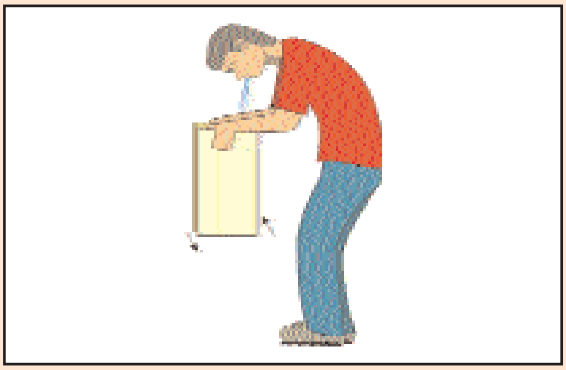
❑ Στη περίπτωση που ασύμμετρο σώμα κινείται οριζόντια στον αέρα, με ορισμένες προϋποθέσεις η δύναμη από τον αέρα έχει κατακόρυφη συνιστώσα με φορά προς τα πάνω η οποία ονομάζεται δυναμική άνωση.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

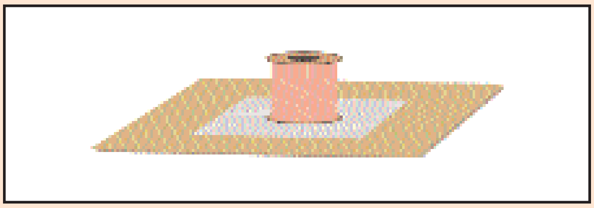
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ BERNOULLI

1. Πάρτε δύο φύλλα χαρτί, τοποθετήστε τα παράλληλα με τη μεγάλη διάσταση κατακόρυφη και σε απόσταση μεταξύ τους ≈ 5 cm. Φυσήξτε ανάμεσά τους από πάνω προς τα κάτω και παρατηρήστε ότι αυτά έλκονται. Εξηγήστε το φαινόμενο.

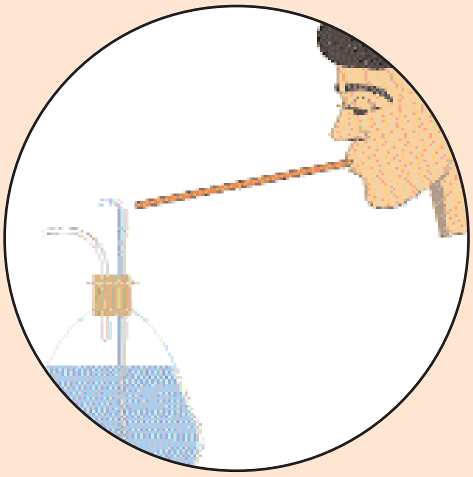
2. Πάρτε ένα κομμάτι χαρτιού διαστάσεων 5 cm × 5 cm και αφήστε το πάνω στο τραπέζι. Τοποθετείστε μια κουβαρίστρα με τον άξονά



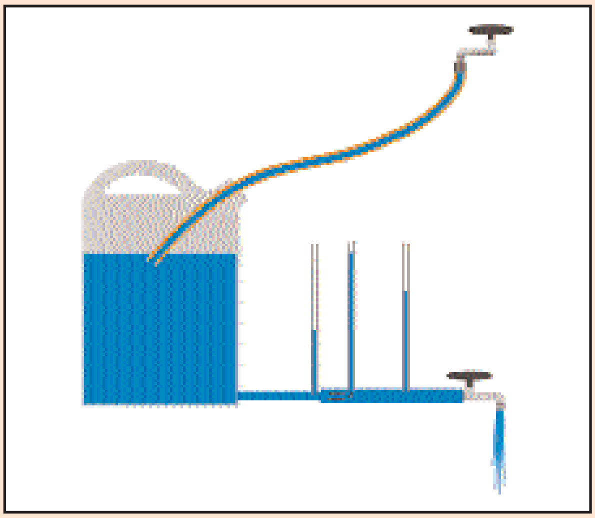
της κάθετο στο μέσο του χαρτιού, ώστε η κάτω βάση της να απέχει περίπου 1 mm με 2 mm από το χαρτί. Φυσήξτε από την πάνω τρύπα της κουβαρίστρας προς τα κάτω και παρατηρήστε ότι το χαρτι ανυψώνεται και κολλάει στην κάτω βάση της κουβαρίστρας. Εξηγήστε το φαινόμενο.



3. Ψεκαστήρας: Χρησιμοποιήστε μια φιάλη χωρητικότητας περίπου 250 mL και πώμα από φελό ή λάστιχο με δύο οπές. Γεμίστε τη φιάλη με νερό λίγο πιο πάνω από τη μέση. Περάστε δύο γυάλινους σωλήνες ή "καλαμάκια" από τις οπές του πώματος, ο ένας με αμβλεία γωνία, χωρίς να είναι βυθισμένος στο υγρό, και ο άλλος κατακόρυφος βυθισμένος στο υγρό με ακροφύσιο στην άκρη που είναι έξω από το δοχείο. Με τρίτο σωλήνα, ο οποίος καταλήγει σε ακροφύσιο, φυσήξτε πολύ δυνατά, ακριβώς πάνω από τα χείλη του άλλου ακροφυσίου, δημιουργώντας οριζόντιο ρεύμα. Παρατηρήστε ότι το νερό στο βυθισμένο σε αυτό σωλήνα ανέρχεται και μάλιστα, σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να εξέλθει δημιουργώντας πίδακα. Εξηγείστε το φαινόμενο. Οι διαστάσεις των γυάλινων σωλήνων που θα χρησιμοποιηθούν στο πείραμα να είναι περίπου 5 mm.



4. Σ' ένα πλαστικό μπετόνι ανοίγουμε μια οπή στο κατατώτερο μέρος. Μ' ένα πώμα από φελό, το οποίο έχει μια τρύπα, κλείνουμε την κάτω

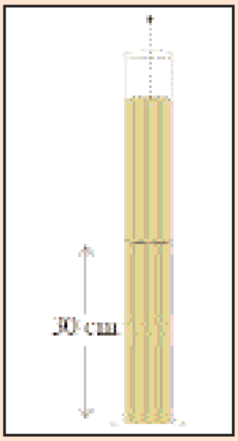


οπή και περνάμε από το φελό ένα λάστιχο μικρού μήκους. Σε αυτό συνδέουμε διαδοχικά άλλο λάστιχο διπλάσιας περίπου διατομής, στο τέλος του οποίου έχουμε συνδέσει μια βρύση. Κατά μήκος των δύο λάστιχων ανοίγουμε οπές, όπου βυθίζουμε, πολύ λίγο καλαμάκια. Ένα από αυτά είναι σπαστό και μικραίνοντας πιο πολύ το μικρό σκέλος, το τοποθετούμε μέσα στο σωλήνα, ώστε να είναι παράλληλο στο λάστιχο (δες σχήμα). Χρησιμοποιείστε σιλικόνη, για να μην έχετε διαρροές στις διάφορες τρύπες που ανοίξατε. Επίσης, αν χρειάζεται, τοποθετείστε διπλά καλαμάκια τοποθετώντας άλλα μικρότερης διατομής πάνω από τα πρώτα, ώστε να αυξηθεί το ύψος των μανομέτρων. Τροφοδοτήστε μ' ένα λάστιχο που είναι συνδεμένο με την βρύση του σπιτιού το σωλήνα και ρυθμίστε τη βρύση της συσκευής, ώστε η στάθμη του νερού στο μπετόνι να παραμένει σταθερή. Μετρήστε τα ύψη του νερού στα μανόμετρα και εξηγήστε το αποτέλεσμα. Κατόπιν αυξήστε και τις δύο παροχές και μάλιστα στο διπλάσιο, προσέχοντας η στάθμη του νερού στο μπετόνι να είναι ίδια όπως πριν. Ξαναμετρήστε τις ενδείξεις των μανομέτρων, συγκρίνετε αυτές με τις προηγούμενες και εξηγήστε τα αποτελέσματα.

(Πώς μπορούμε να διπλασιάσουμε τις παροχές;).

5. ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΙΞΩΔΟΥΣ

Γεμίστε ένα μακρόστενο σωλήνα με παχύρευστο λάδι, π.χ. καστορέλαιο (καθαρτικό λάδι), και σημειώστε το σημείο που απέχει 30 cm από τον πυθμένα του κάνοντας μια γραμμή με μαρκαδόρο. Αφήστε από κάποιο ύψος από την επιφάνεια μικρές ατσάλινες σφαίρες, αφού πρώτα μετρήσετε την διάμετρό τους. Με χρονόμετρο χειρός μετρείστε το χρόνο που χρειάζονται να διανύσουν τα 30 cm και υπολογίστε την ταχύτητά τους. Θεωρώντας την ως την οριακή, υπολογίστε από το νόμο του Stokes το συντελεστή ιξώδους.



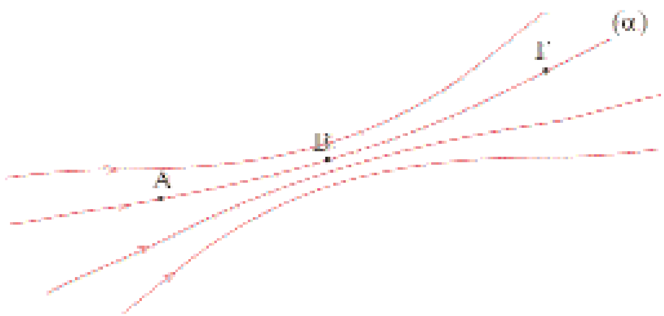
6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΑΛΕΞΙΠΤΩΤΙΣΤΗ

Φτιάξτε ένα απλό αλεξίπτωτο με χαρτί ή ύφασμα. Ένας φίλος σας αφήνει το αλεξίπτωτο από την βεράντα του τελευταίου ορόφου της πολυκατοικίας σας και εσείς, από την βεράντα του πρώτου ορόφου, μετράτε με χρονόμετρο χειρός το χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει το αλεξίπτωτο την απόσταση από εσάς μέχρι το έδαφος. Μετά με μια μεζούρα μετρήστε το ύψος από το έδαφος και υπολογίστε την ταχύτητα του αλεξίπτωτου. Θεωρώντας ότι είναι η οριακή ταχύτητα, και μετρώντας την διάμετρο του αλεξίπτωτου, καθώς και το βάρος του με ζυγαριά, υπολογίστε την οριακή ταχύτητα ενός πραγματικού αλεξίπτωτου υποθέτοντας ότι έχει μετωπική επιφάνεια κυκλική, διαμέτρου περίπου 7 m και το συνολικό βάρος αλεξιπτωτιστή - αλεξιπτώτου είναι περίπου 80 kgf (kp).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Ένα σωμάτιο ρευστού ακολουθεί τη ροϊκή γραμμή (α). Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).



i) Όταν το σωμάτιο ρευστού βρίσκεται στη θέση Β έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

ii) Επειδή οι ροϊκές γραμμές δεν κλείνουν η ροή είναι αστρόβιλη.

2

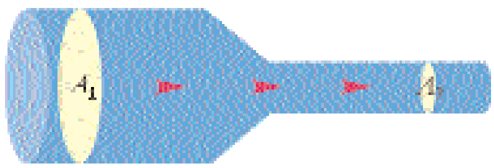
Μπορούν δύο ροϊκές γραμμές να τέμνονται;

3

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση. “Κατά την κίνηση του ρευστού σε ρευματικό σωλήνα, από τα τοιχώματά του δεν διαφεύγει (α) ..... και στο εσωτερικό δεν υπάρχουν (β) ....., άρα η μάζα του ρευστού διατηρείται σταθερή. Συνεπώς η μάζα που εισρέει από την μια ακραία διατομή (γ) ..... με αυτή (δ) ..... από την άλλη ακραία διατομή”.

4

Στο σώληνα του σχήματος ρέει υγρό. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).



(α) Η παροχή στην διατομή A_1 είναι ίση με την παροχή στη διατομή A_2 διότι τα υγρά είναι ασυμπίεστα και συνεπώς η μάζα που εισέρχεται στο τμήμα του σωλήνα μεταξύ των διατομών A_1 και A_2 είναι ίση με αυτή που εξέρχεται (αρχή διατήρησης της μάζας).

(β) Για να είναι η παροχή της διατομής A_1 ίση με αυτή της διατομής A_2 θα πρέπει να μην υπάρχουν εσωτερικές τριβές στο υγρό καθώς και τριβές μεταξύ υγρού και σωλήνα.

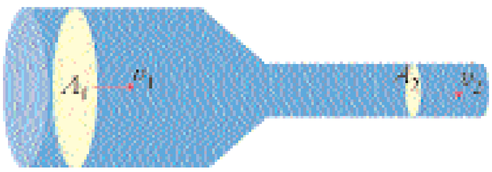
(γ) Η ταχύτητα του ρευστού της διατομής A_1 είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ρευστού της διατομής A_2.

5

Γιατί όταν ποτίζουμε τα λουλούδια με ένα λάστιχο μειώνουμε την επιφάνεια του στομίου όταν θέλουμε να πάει το νερό μακρύτερα;

6

Για το ιδανικό ρευστό του σχήματος οι διατομές A_1 και A_2 έχουν σχέση 3:1. Αν Π_1, υ_1 και Π_2, υ_2 οι παροχές και οι ταχύτητες στις διατομές A_1 και A_2 αντίστοιχα.



Ποιό από τα παρακάτω είναι σωστό.

(α) $\Pi_1 = \Pi_2$ και $\upsilon_1 = 3\upsilon_2$

(β) $\Pi_1 = 3\Pi_2$ και $\upsilon_2 = 3\upsilon_1$

(γ) $\Pi_1 = \Pi_2$ και $\upsilon_2 = 3\upsilon_1$

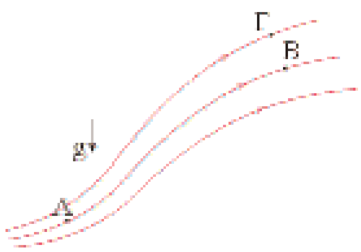
(δ) $\Pi_2 = 3\Pi_1$ και $\upsilon_1 = \upsilon_2$

7

Ο νόμος του Bernoulli σύμφωνα με τον οποίο το πολυώνυμο (α) ..... έχει σταθερή τιμή, εκφράζει την (β) ..... Όπου η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας είναι η ποσότητα (γ) ....., της δυναμικής (δ) ..... και της ενέργειας πιέσεων η (ε) .....".

8

Στη φλέβα του σχήματος ρέει ιδανικό ρευστό με αστρόβιλη ροή. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές.



(α) Ο νόμος του Bernouli ισχύει για τα σημεία Α και Β και όχι για τα σημεία Α και Γ.

(β) Η πίεση στη θέση Α είναι πάντα μεγαλύτερη από την πίεση στη θέση Β, διότι στην αντίθετη περίπτωση δεν θα ανέρχονταν το ρευστό και θα έρρεε προς την αντίθετη κατεύθυνση.

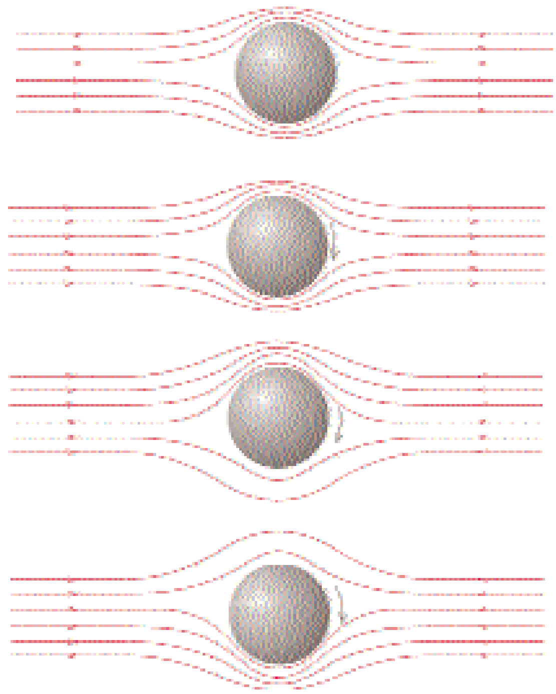
(γ) Η μηχανική ενέργεια της μάζας Δm ενός σωμάτιου ρευστού στην θέση Α είναι ίση με την μηχανική ενέργεια (Δυναμική συν κινητική) ενός σωματίου ρευστού μάζας Δm στη θέση Β, επειδή ισχύει ο νόμος του Bernoulli ο οποίος εκφράζει το ισοζύγιο ενεργειών.

(δ) Η ταχύτητα στη θέση Β είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα στη θέση Α.

(ε) Αν η φλέβα έχει ίδια διατομή σε όλη την έκτασή της οι πιέσεις στα διάφορα σημεία σχετίζονται μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο όπως και στην υδροστατική.

9

(α) Μια μπάλα βρίσκεται σε μια ροή όπως στο σχήμα, μέσα σε πραγματικό ρευστό με στρωτή



ροή, χωρίς να περιστρέφεται. Ποιές δυνάμεις ασκούνται στη μπάλα;

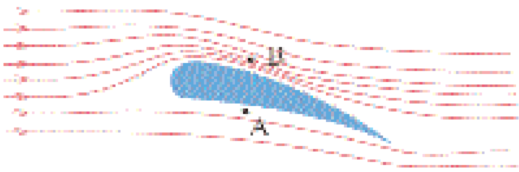
(β) Αν η μπάλα περιστρέφεται γύρω από άξονα ο που διέρχεται από το κέντρο της, κατά τη φορά των δεικτών του ορολογιού, ποιό από τα υπόλοιπα σχήματα παριστάνει πιο πιστά τη μορφή των ροϊκών γραμμών και ποιές δυνάμεις ασκούνται τότε στη μπάλα;

10

Εξηγήστε γιατί μπορεί ένα ιστιοφόρο να κινείται σχεδόν αντίθετα προς τον άνεμο.

11

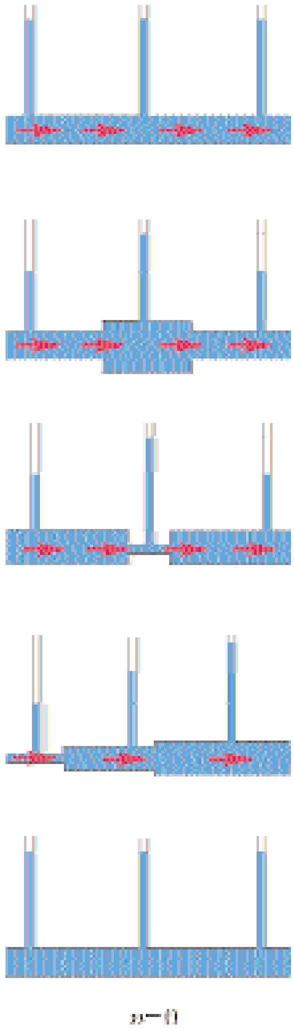
Η πτέρυγα του σχήματος βρίσκεται σε οριζόντιο ρεύμα αέρα. Πως αποδεικνύεται ότι η πίεση στο



σημείο Α είναι μεγαλύτερη από την πίεση στο Β; Η ροή είναι αστρόβιλη.

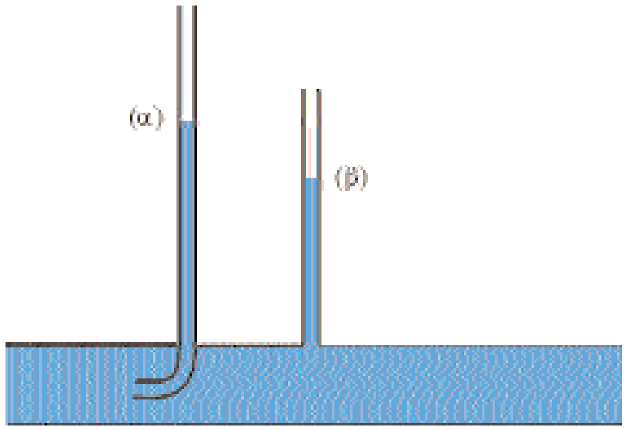
12

Για ένα ιδανικό ρευστό ποιό από τα παρακάτω σχήματα είναι λάθος και ποιό σωστό;



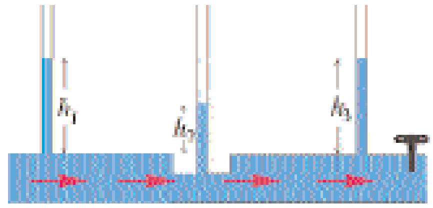
13

Εξηγείστε γιατί στο σχήμα η στάθμη του υγρού στο σωλήνα (α) είναι υψηλότερη από αυτή του σωλήνα (β).



14

Στο σχήμα τα ύψη του υγρού είναι h_1, h_2, h_3 όταν η στρόφιγγα είναι ανοικτή. Μπορείτε να προβλέψετε



τα αντίστοιχα ύψη όταν κλείσει η στρόφιγγα και σταματήσει η ροή του υγρού.

15

Αν σε μια ιατρική σύριγγα διπλασιάσουμε των δύναμη με την οποία πιέζουμε το έμβολο, η ταχύτητα εκτόξευσης του περιεχομένου, αν αρχικά ήταν v, θα γίνει

(α) $2v$, (β) $\sqrt{2}\,v$, (γ) $4v$ ή (δ) $v/2$;

16

Εξηγείστε γιατί η φλέβα νερού από βρύση που “τρέχει” λεπταίνει όσο η απόσταση από τα χείλη της βρύσης μεγαλώνει (μέχρι κάποια απόσταση, όπου από στρωτή, η ροή γίνεται τυρβώδης).

17

΄Ενα ποτιστήρι κήπου έχει στην επιφάνειά του 140 μικρές τρύπες 2,0 mm^2 η κάθε μία. Εάν η παροχή του λάστιχου τροφοδοσίας είναι $3{,}0\times10^{-3} m^3 s^{-1}$, ποιά είναι η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το νερό από τις τρύπες;

18

Αντιστοιχίστε τα γράμματα με τους αριθμούς

(α) $\varrho A v =$ σταθ.

(β) $1/2\, \varrho v^2 + \varrho g y + p =$ σταθ.,

(γ) $1/2\, \varrho v^2 + p =$ σταθ.

(1) Νόμος Bernoulli για ρευστό σε οριζόντιο σωλήνα.

(2) Νόμος Bernoulli για ακίνητο ρευστό.

(3) Νόμος συνέχειας.

(4) Νόμος Bernoulli, στη γενική περίπτωση.

19

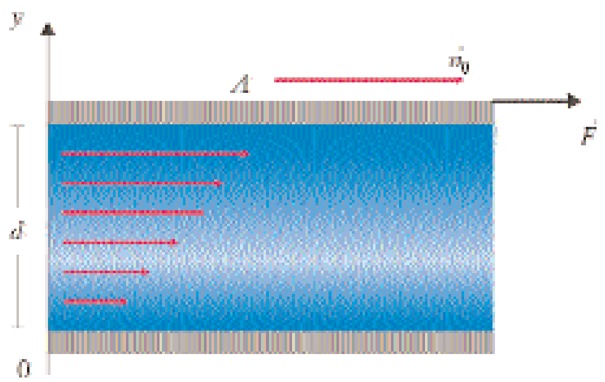
(α) Αφήνουμε σε δύο δοχεία με ίδιο υγρό να πέσουν δύο όμοιες μικρές μεταλλικές σφαίρες. Η θερμοκρασία του πρώτου δοχείου είναι μεγαλύτερη από αυτή του δευτέρου. Ποιά σφαίρα θα φτάσει γρηγορότερα στον πυθμένα, αν το ύψος του υγρού είναι ίδιο και για τα δύο δοχεία και το σώμα αφέθηκε από την επιφάνεια;

(β) Αν αντί υγρού στα δοχεία υπήρχε αέριο, θα ήταν ίδια, όπως πριν, η σειρά αφιξης των μεταλλικών σφαιρών στους πυθμένες;

20

Στο πιο κάτω σχήμα εάν χρησιμοποιήσουμε πλάκα μεγαλυτέρου εμβαδού επιφανείας A, το ιξώδες του υγρού

(α) θα αυξηθεί



(β) θα ελαττωθεί

(γ) θα παραμείνει ίδιο;

21

Κατά την κίνηση πραγματικού ρευστού σε ένα σωλήνα, δύο εφαπτόμενες λεπτές λωρίδες ρευστού, παράλληλες με την κατεύθυνση της κίνησης έχουν διαφορετικές ταχύτητες με αποτέλεσμα να (α) ..... μεταξύ τους (β) ..... Οι δυνάμεις αυτές στα υγρά οφείλονται στις (γ) ..... ενώ στα αέρια στην (δ) ..... μεταξύ των δύο λωρίδων".

22

Αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα v κόντρα στον άνεμο δέχεται δύναμη αντίστασης $F = C_2 v^2$. Αν κινηθεί αντίθετα με την ίδια ταχύτητα η δύναμη της αντίστασης γίνεται

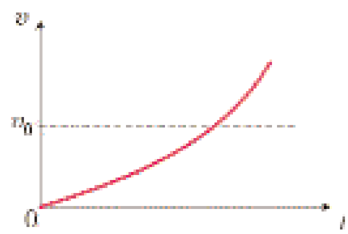
$$F' = \frac{9}{16} F$$

Η ταχύτητα του ανέμου είναι

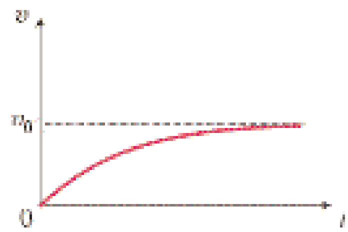
(α) $\frac{3}{4} v$ (β) $\frac{9}{16} v$ (γ) $\frac{v}{7}$ (δ) $\frac{4v}{3}$

23

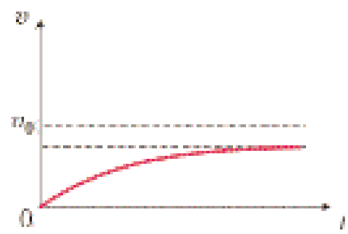
Αερόστατο αρχίζει να παρασύρεται από άνεμο σταθερής ταχύτητας v_0. Ποιά από τις παρακάτω



(α)



(β)



(γ)

γραφικές παραστάσεις παριστάνει καλύτερα την οριζόντια ταχύτητα του αερόστατου με το χρόνο;

24

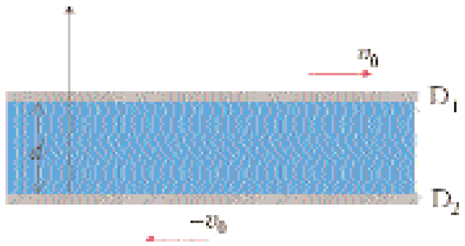
Όταν αυτοκίνητο διανύει μια απόσταση, με ταχύτητα v, ξοδεύεται ενέργεια W για την υπερνίκηση της αντίστασης που οφείλεται στον αέρα. Αν διανύσει την ίδια απόσταση με ταχύτητα $\upsilon' = 2\upsilon$ η αντίστοιχη ενέργεια W' είναι

(α) $2W$, (β) W, (γ) $4W$, (δ) $8W$

Θεωρήστε την αντίσταση αέρα $C_2\upsilon^2$.

25

Εάν στο σχήμα οι δύο πλάκες D_1 και D_2 κινούνται αντίθετα με ταχύτητες υ_0 και $-\upsilon_0$ αντίστοιχα, να



σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των ταχυτήτων των σωματίων μη ιδανικού ρευστού κατά μήκος μιας κατακορύφου (η ροή είναι στρωτή).

26

Δύο ομογενείς σφαίρες ίδιου υλικού και ακτίνων R και $2R$ αντίστοιχα αφήνονται να πέσουν μέσα σε ρευστό. Η οριακή ταχύτητα της μικρής σφαίρας είναι $\upsilon_{ορ}$.

(α) Αν θεωρήσουμε ότι η αντίσταση είναι $C_1\upsilon$, η οριακή ταχύτητα της μεγάλης σφαίρας είναι

(i) $\upsilon_{ορ}$, (ii) $2\upsilon_{ορ}$, (iii) $\upsilon_{ορ}/4$, ή (iv) $4\upsilon_{ορ}$;

(β) Αν θεωρήσουμε, αντίσταση $C_2\upsilon^2$, η οριακή ταχύτητά της μεγάλης σφαίρας είναι

(i) $\upsilon_{ορ}$, (ii) $2\upsilon_{ορ}$, (iii) $\upsilon_{ορ}/2$, (iv) $4\upsilon_{ορ}$;

27

Αντιστοιχίστε τις φυσικές ποσότητες, οι οποίες αναφέρονται στη δύναμη αντίστασης, που αναπτύσσεται κατά την κίνηση ενός σώματος σε ρευστό, με τις μονάδες της διπλανής στήλης.

(1) n ιξώδες	(1) Καθαρός αριθμός
(2) C_1 συντελεστής για μικρές ταχύτητες	(2) $kg.m^{-1}.s^{-1}$
(3) C_2 συντελεστής για μεγάλες ταχύτητες	(3) $kg.s^{-1}$
(4) $C_{αν}$ συντελεστής αντίστασης	(4) $kg.m^{-1}$

28

Κατά την κίνηση της πτέρυγας του αεροπλάνου στον αέρα, έχουμε (α) ..... των δυναμικών γραμμών στο επάνω μέρος της με αποτέλεσμα τη δημιουργία (β) ..... σε κείνο το μέρος. Αυτό έχει ως συνέπεια την εμφάνιση και μιας άλλης δύναμης (γ) ..... διεύθυνσης που ονομάζεται (δ) .....”.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

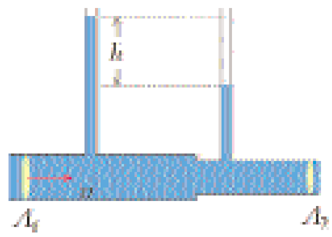
Η παροχή του καταρράκτη του Νιαγάρα είναι $8000\ m^3s^{-1}$ και η χωρητικότητα της τεχνητής λίμνης του Μαραθώνα $44 \times 10^6\ m^3$. Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται ώστε τα νερά του Νιαγάρα να γεμίσουν την λίμνη του Μαραθώνα.

2

Στον πυθμένα βαρελιού είναι ανοιγμένη μια οπή από την οποία ρέει κρασί με ταχύτητα $6{,}0\ m\ s^{-1}$. Αν η ελεύθερη επιφάνεια του κρασιού κατέρχεται με σχεδόν μηδενική ταχύτητα ποιό είναι το ύψος του βαρελιού; Είναι $g = 10\ m s^{-2}$.

3

Στο σωλήνα του σχήματος ρέει πετρέλαιο. Αν ο λόγος των διατομών είναι $A_1/A_2 = 5{,}0$ και το ύψος $h = 15$ cm, να βρεθεί η ταχύτητα του υγρού στη διατομή A_1. Η επιτάχυνση της βαρύτητας να ληφθεί $g = 10\ m s^{-2}$.



4

Οριζόντιος σωλήνας διαρρέεται από νερό. Σε δύο περιοχές του σωλήνα οι διατομές είναι $0{,}20\ m^2$ και $0{,}050\ m^2$ αντίστοιχα. Αν η ταχύτητα στην πρώτη διατομή είναι 5,0 m s^{-1} και η πίεση στη δεύτερη $2{,}0 \times 10^5\ N\ m^{-2}$ να βρείτε:

(α) Την ταχύτητα του υγρού στη δεύτερη διατομή

(β) Την πίεση στην πρώτη διατομή.

Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$.

5

Η οπή εκτόξευσης του νερού ενός νεροπίστολου είναι $1{,}0\ mm^2$ και το εμβαδόν του εμβόλου που πιέζει το νερό $75\ mm^2$. Η εταιρεία κατασκευής απαιτεί γι’ αυτό το νερό που εκτοξεύεται, όταν ένα παιδί χειρίζεται το παιχνίδι, και εκτοξεύεται οριζόντια κατά 3,5 m, ενώ κατακόρυφη απόκλισή του να είναι μικρότερη από 1,0 m. Αν ένα παιδί μπορεί να ασκήσει δύναμη περίπου 10 N, έχει τις προδιαγραφές της εταιρείας το νεροπίστολο; Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0\times10^3$ kg m^3 και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

6

Δοχείο είναι γεμάτο νερό μέχρι ύψους H και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Βρείτε σε ποιό ύψος από το τραπέζι, πρέπει να ανοίξουμε μικρή τρύπα στο δοχείο, ώστε το νερό που θα εκτοξευθεί να πέσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση πάνω στο τραπέζι. Πόση είναι αυτή η μέγιστη απόσταση;

7

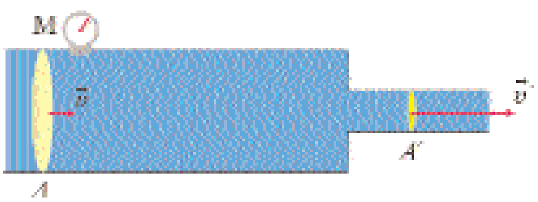
΄Ενα δοχείο είναι κυλινδρικό και έχει εμβαδόν διατομής 0,010 m^2. Ενώ στο δοχείο εισέρχεται νερό με ρυθμό $2{,}0\times10^{-4}$ m^{3}s^{-1}, στον πυθμένα του έχει ανοιχθεί μία τρύπα διατομής 1,0 cm^2. Να αποδείξετε ότι η στάθμη του νερού στο δοχείο θα αυξάνεται μέχρι ενός ύψους στο οποίο πλέον θα διατηρηθεί. Επίσης να υπολογίσετε το ύψος αυτό. Είναι $g = 10$ m s^{-2}.

8

΄Ενα βεντουρίμετρο έχει διάμετρο σωλήνα 30 cm και διάμετρο λαιμού 15 cm. Αν οι πιέσεις στο σωλήνα και στη στένωση είναι αντίστοιχα $4{,}0\times10^4$ Pa και $3{,}0\times10^4$ Pa, να υπολογιστεί η παροχή του νερού στο σωλήνα. Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0\times10^3$ kg m^{-3}.

9

Η ένδειξη του μανόμετρου του σχήματος είναι $1{,}75\times10^5$ Pa. Αν οι διατομές των σωλήνων A και

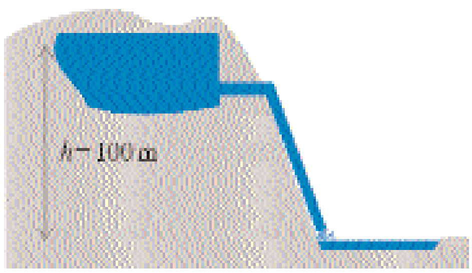


$A´$ έχουν σχέση $A = 6A´$, υπολογίστε τις ταχύτητες υ και $\upsilon´$, ώστε η πίεση στην διατομή $A´$ να είναι μηδέν. (Το φαινόμενο στην $A´$ είναι γνωστό ως σπηλαίωση και παρατηρείται εξάτμιση του νερού και δημιουργία φυσαλίδων σε εκείνη τη θέση, που αγνοούμε κατά την ανάλυσή μας). Η πυκνότητα του νερού είναι 10^3 kg m^{-3}.

10

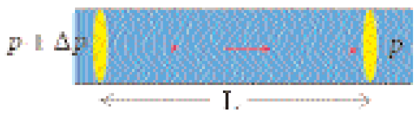
΄Ενας σωλήνας Pitot στερεώνεται σε φτερό αεροπλάνου. Το υγρό που χρησιμοποιείται είναι αλκοόλη και η ένδειξη είναι 26,5 cm. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του αεροπλάνου σε km h^{-1}. Η πυκνότητα της αλκοόλης είναι $0{,}800\times10^3$ kg m^{-3} και του αέρα 1,30 kg m^{-3}. Δίνεται επίσης $g = 9{,}80$ m s^{-2}.

11



Υδατόπτωση δημιουργείται από τεχνητή λίμνη. Αν είναι $h = 100$ m και η παροχή της υδατόπτωσης 200 m^3 s^{-1}, να υπολογισθεί η ισχύς της υδατόπτωσης. Να θεωρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ ms^{-2} και την πυκνότητα του νερού 10^3 kg m^{-3}.

12



Σε ένα οριζόντιο αγωγό πετρελαίου η πίεση μειώνεται κατά $5{,}0\times10^3$ N m^{-2} κάθε χιλιόμετρο αγωγού. Υπολογίστε τις απώλειες ενέργειας για κάθε m^3 πετρελαίου, καθώς προχωράει απόσταση 1,0 m.

13

Τα φτερά ενός αεροπλάνου έχουν συνολικό εμβαδόν 20 m^2 (από τη μία πλευρά). Σε μια πτήση του αεροπλάνου, η ταχύτητα του αέρα στην κάτω μεριά των φτερών μετρήθηκε και βρέθηκε 40 m s^{-1}, ενώ στην πάνω 50 m s^{-1}. Να υπολογιστεί το βάρος του αεροπλάνου. Η πυκνότητα του αέρα είναι 1,3 kg m^{-3}.

14

Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα σταγόνας βροχής αν η ακτίνα της είναι $1{,}5 \times 10^{-3}$ m. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $1{,}0 \times 10^{3}$ kgm^{-3} και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$. Η πυκνότητα του αέρα είναι 1,3 kgm^{-3}. Δίνεται το ιξώδες του αέρα $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa s

15

Αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα υ και καταναλίσκει ισχύ P.

(α) Αν διπλασιάσει την ισχύ του, ποιά ταχύτητα θα αποκτήσει;

(β) Αν η ταχύτητά του αυξηθεί κατά 20 % πόσο θα αυξηθεί η ισχύς του;

16

Σφαίρα ακτίνας 5,0 cm και μάζας 0,5 kg αφήνεται από μεγάλο ύψος να πέσει. Να υπολογισθεί η οριακή ταχύτητα της σφαίρας. Δίνεται η πυκνότητα του αέρα 1,3 kg × m^{-3} και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8$ m·s^{-2}. Επίσης να αγνοηθεί η συνεισφορά του όρου $c_1\upsilon$ καθώς και η άνωση του αέρα στην σταγόνα.

17

Ομογενής σφαίρα ακτίνας R αφήνεται να πέσει κατακόρυφα και παρατηρούμε ότι αποκτά οριακή ταχύτητα $\upsilon_{\text{ορ}} = 40$ m·s^{-1}. Αν η σφαίρα δεθεί με μια άλλη ομογενή σφαίρα από το ίδιο υλικό και ακτίνας $R' = 2R$ και αφεθούν να πέσουν, να βρείτε την οριακή ταχύτητα που αποκτούν οι δύο σφαίρες μαζί. Εξετάστε τις περιπτώσεις:

(α) Η δύναμη αντίστασης να είναι $F_{\alpha\nu} = C_1\upsilon$

(β) Η δύναμη αντίστασης να είναι $F_{\alpha\nu} = C_2\upsilon^2$

Να αγνοηθεί η δύναμη της άνωσης του αέρα.

18

Αλεξιπτωτιστής πέφτοντας αποκτά οριακή ταχύτητα ίση με την ταχύτητα που θα αποκτούσε αν έπεφτε χωρίς αλεξίπτωτο από 2,5 m. Αν η ακτίνα του αλεξίπτωτου είναι $r = 2{,}0$ m υπολογίστε την τιμή του συντελεστή αντίστασης $C_{\alpha\nu}$. Η συνολική μάζα αλεξιπτωτιστή και αλεξιπτώτου είναι 80,0 kg. Η πυκνότητα του αέρα είναι 1,3 kg m^{-3} και η επιτάχυνση της βαρύτητας να θεωρηθεί 10 m·s^{-2}.

19

Σώμα αφήνεται από αρκετό ύψος να πέσει ενώ συγχρόνως στην περιοχή φυσάει άνεμος ταχύτητας υ. Εάν οι συνθήκες είναι τέτοιες ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε συνεισφορά στη δύναμη αντίστασης από τον αέρα μόνο του όρου $c_1\upsilon$, να αποδείξετε ότι η οριακή ταχύτητα που αποκτά το σώμα δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon_{\text{ορ}} = \sqrt{\upsilon^2 + \left(\frac{m\,g}{C_1}\right)^2}$$

20

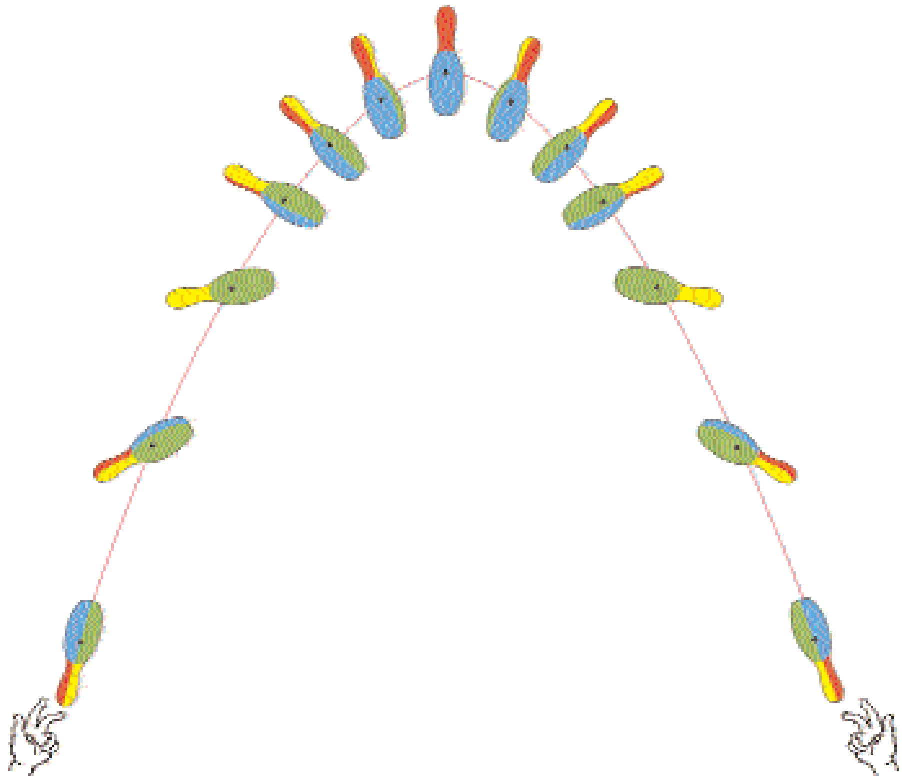
Με ένα φυσερό δημιουργούμε ρεύμα αέρος κατακόρυφα προς τα επάνω. Στο ρεύμα του αέρα αφήνουμε μικρό σφαιρικό σώμα μάζας m και ακτίνας R. Αυξομειώνοντας την ταχύτητα του ρεύματος για κάποια τιμή υ πετυχαίνουμε το σφαιρικό σώμα να αιωρείται. Να υπολογισθεί το ιξώδες του αέρα. Δίνεται το g.

4.2 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μέχρι τώρα αντιμετωπίζαμε τα διάφορα αντικείμενα ως **υλικά σημεία**. Δηλαδή κάθε αντικείμενο το θεωρούσαμε πολύ μικρών διαστάσεων (σημειακό), με όλη τη μάζα του συγκεντρωμένη σε ένα σημείο. Όταν εκτοξεύουμε ένα σφαιρίδιο μικρών διαστάσεων, πλάγια προς τα επάνω, αυτό διαγράφει μια σχεδόν παραβολική τροχιά. Η αντιμετώπιση του σφαιριδίου ως υλικού σημείου, στην περίπτωση αυτή, είναι επιτυχής. Επιτυχής επίσης είναι και η αντιμετώπιση ως υλικού σημείου ενός κιβωτίου που σύρεται πάνω στο έδαφος ή ακόμη και ενός παιδιού που κάνει τσουλίθρα.

Όταν όμως ο ζογκλέρ εκτοξεύει πλάγια μια κορίνα (βλ. Σχ. 4.33) παρατηρούμε ότι αυτή εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις, τη μεταφορική (όμοια



ΣΧΗΜΑ 4.33

Η κορίνα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση.

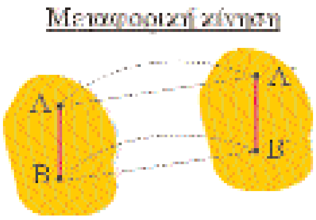
με του υλικού σημείου) και την περιστροφική. Ένα σώμα, όπως η κορίνα, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ένα πλήθος υλικών σημείων, που το καθένα έχει τη δική του ταχύτητα. Η κορίνα είναι ένα στερεό σώμα. Παρακάτω θα ορίσουμε την έννοια του κέντρου μάζας στερεού σώματος και θα μελετήσουμε την κίνηση του στερεού στην περίπτωση της περιστροφής γύρω από σταθερό άξονα, καθώς και στην περίπτωση της σύνθετης κίνησης, δηλαδή της ταυτόχρονα μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης. Κατόπιν θα ορίσουμε τη ροπή, ως το αίτιο της περιστροφικής κίνησης, και θα διατυπώσουμε το νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή στερεού. Επίσης, αντίστοιχα με την ορμή του υλικού σημείου θα ορίσουμε την στροφορμή και θα διατυπώσουμε τον αντίστοιχο νόμο διατήρησής της.

ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ - ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

Ένα σώμα θα χαρακτηρίζεται στερεό, όταν οι αποστάσεις μεταξύ των σωματίων, απ' τα οποία αποτελείται, παραμένουν σταθερές, δηλαδή το σώμα έχει σταθερό μέγεθος και σχήμα, έστω και αν κινείται.

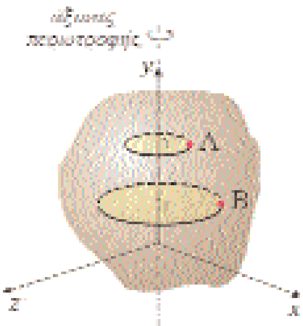
Η κίνηση ενός στερεού σώματος ονομάζεται μεταφορική, όταν κάθε ευθύγραμμο τμήμα του σώματος (ή της επέκτασής του) παραμένει παράλληλο προς τον εαυτό του. Στην περίπτωση αυτή κάθε χρονική στιγμή, όλα τα σωμάτιά του έχουν την ίδια (διανυσματική) ταχύτητα (βλ. Σχ. 4.34), π.χ. η κίνηση του έλκυθρου, η κίνηση ενός αυτοκινήτου με μπλοκαρισμένους τροχούς κ.ά.



ΣΧΗΜΑ 4.34

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μετατοπίζεται παράλληλα στον εαυτό του

Περιστροφική κίνηση στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα ονομάζουμε την κίνηση, κατά την οποία δύο τουλάχιστον σημεία του σώματος (ή της επέκτασής του) παραμένουν ακίνητα οπότε ορίζουν τον άξονα περιστροφής του σώματος. Όλα τα σημεία του άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητα μηδέν, ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία του σώματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και διαγράφουν κυκλικές τροχιές με τα επίπεδά τους κάθετα στον άξονα (βλ. Σχ. 4.35). Παραδείγματα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση του δίσκου του πικάπ, η κίνηση μιας ακλόνητης τροχαλίας κ.ά.



ΣΧΗΜΑ 4.35

Κατά την περιστροφή στερεού γύρω από άξονα τα επίπεδα των τροχιών των σημείων του σώματος είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής.

Όταν ένα σώμα εκτελεί κίνηση γενικότερης μορφής, τότε αυτή μπορεί να αναλυθεί, κάθε στιγμή, σε μεταφορική κίνηση και περιστροφική κίνηση περί άξονα. Η ανάλυση αυτή μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Η επίπεδη κίνηση, που εξετάζουμε, μπορεί να αναχθεί σε καθαρά περιστροφική, γύρω από κάποιο στιγμιαίο άξονα. Συνήθως, όπως θα δούμε παρακάτω, κάνουμε ανάλυση της κίνησης, σε μεταφορική και σε περιστροφική γύρω από το κέντρο μάζας. Η γωνιακή ταχύτητα είναι η ίδια ανεξάρτητα από τον άξονα περιστροφής.

Επίπεδη κίνηση στερεού ονομάζεται η κίνηση, κατά την οποία κάθε σημείο του στερεού κινείται παράλληλα σε σταθερό επίπεδο.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Ας επανέλθουμε στην κίνηση της κορίνας. Παρατηρούμε ότι ένα σημείο της εκτελεί παραβολική κίνηση, παρόμοια με αυτή που θα εκτελούσε η κορίνα, αν η μάζα της ήταν συγκεντρωμένη σ' αυτό το σημείο. Αυτό το σημείο ονομάζεται κέντρο μάζας της κορίνας (ΚΜ ή CM).

Γενικά το **κέντρο μάζας** ενός συστήματος σωματίων είναι ένα σημείο, το οποίο κινείται, σαν να είναι όλη η μάζα του συστήματος συγκεντρωμένη σ' αυτό και να ασκούνται πάνω του όλες οι εξωτερικές δυνάμεις, που δέχονται τα σωμάτια του συστήματος.

Έστω ένα σύστημα σωματίων με μάζες m_1, m_2, ... και ένα σύστημα αναφοράς τριών αξόνων x, y, z. Οι συντεταγμένες του σωματίου μάζας m_1 είναι (x_1, y_1, z_1), του σωματίου μάζας m_2 είναι (x_2, y_2, z_2) κ.ο.κ. Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του συστήματος είναι

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \tag{4.27α}$$

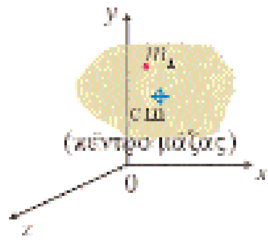
$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \tag{4.27β}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i} \qquad (4.27\gamma)$$

Μπορούμε να πούμε ότι, το κέντρο μάζας είναι η "μέση θέση" της μάζας του συστήματος. Αν π.χ. έχουμε δύο σωμάτια ίσων μαζών, το κέντρο μάζας του συστήματος τους είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σωμάτια. Αν δεν είναι ίσες οι μάζες, η “μέση θέση δεν είναι στο κέντρο.

Το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος υπολογίζεται με τη λογική ότι αυτό είναι ένα σύστημα πυκνοτοποθετημένων σωματίων. Για ομογενή και συμμετρικά σώματα το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω σε άξονα ή σε επίπεδο συμμετρίας τους. Το κέντρο μάζας π.χ. μίας ομογενούς σφαίρας ή ενός ομογενούς κύβου συμπίπτει με το γεωμετρικό τους κέντρο. Επίσης το κέντρο μάζας μιας λεπτής ομογενούς ράβδου βρίσκεται πάνω σ' αυτή και στο μέσο της.

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



ΣΧΗΜΑ 4.36

Το κέντρο μάζας ενός σώματος ορισμένο ως προς ένα σύστημα αναφοράς.

Έστω στερεό σώμα, σε μια θέση στο γήινο βαρυτικό πεδίο. Στην περιοχή που βρίσκεται το σώμα το πεδίο θεωρείται ομογενές. Επιλέγουμε ένα σύστημα αναφοράς, όπως στο σχήμα 4.36, δηλαδή, με τον άξονα y κατακόρυφο. Θέτουμε μηδέν τη βαρυτική δυναμική ενέργεια στα σημεία του επιπέδου xOz. Το σώμα αποτελείται από τα σωμάτια μαζών m_1, m_2.... που έχουν αντίστοιχα δυναμική ενέργεια $m_1 g y_1$, $m_2 g y_2$, ... Η δυναμική ενέργεια του στερεού σώματος ισούται με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των σωματίων, απ' τα οποία αποτελείται

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \ldots$$

$$U = \left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots\right) g$$

Από τις σχέσεις ορισμού του κέντρου μάζας έχουμε ότι

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots = \left(m_1 + m_2 + \ldots\right) y_{cm}$$

Άρα

$$U = \left(m_1 + m_2 + \ldots\right) g\, y_{cm}$$

Εφόσον

$$m_1 + m_2 + \ldots = M$$

όπου M η συνολική μάζα του σώματος έχουμε

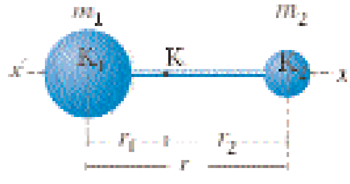
$$U = M g y_{cm} \qquad (4.28)$$

Συμπεραίνουμε ότι η δυναμική ενέργεια στερεού σώματος μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο υπολογίζεται υποθέτοντας ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας του.

Παράδειγμα 4-6

Θεωρούμε στερεό σώμα που αποτελείται από δύο ομογενείς σφαίρες m_1, m_2 ($m_1 > m_2$), οι οποίες κρατούνται σε σταθερή απόσταση r μεταξύ των κέντρων τους, με τη βοήθεια μιας λεπτής ράβδου αμελητέας μάζας, όπως στο σχήμα. Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας Κ του συστήματος.

Εφαρμογή: $m_1 = 2m_2$ και $r = 1{,}2$ m



ΣΧΗΜΑ 4.37

Απάντηση

Το κέντρο μάζας κάθε σφαίρας βρίσκεται στο κέντρο της, άρα το πρόβλημα απλοποιείται, γιατί ανάγεται στον υπολογισμό του κέντρου μάζας δύο σωματίων με μάζες m_1, m_2, που βρίσκονται αντίστοιχα στα κέντρα K_1, K_2 των σφαιρών. Προφανώς το κέντρο μάζας K βρίσκεται πάνω στην ευθεία K_1, K_2, την οποία ταυτίζουμε με τον άξονα x΄x. Θεωρούμε ακόμα ως αρχή του άξονα το σημείο K.

΄Εχουμε

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ή}$$

$$0 = \frac{m_1(-r_1) + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ή}$$

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{ή}$$

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ή}$$

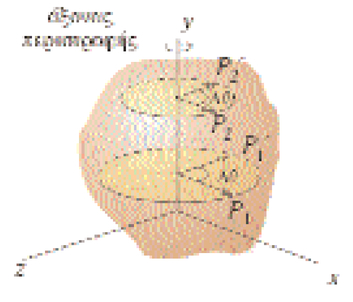
$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

Ακόμη $$r_2 = r - r_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

Εφαρμογή: $r_1 = 0{,}4\,\text{m}$ και $r_2 = 0{,}8\,\text{m}$

ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ

΄Εστω στερεό σώμα, το οποίο στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Κάθε σημείο του σώματος διαγράφει κυκλική τροχιά, της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής. Σε χρόνο Δt η γωνιακή μετατόπιση όλων των σημείων του σώματος είναι $\Delta\theta$, γι' αυτό, όταν θα λέμε γωνιακή μετατόπιση του σώματος, θα εννοούμε τη γωνιακή μετατόπιση ενός οποιουδήποτε σημείου του (βλ. Σχ. 4.38).



ΣΧΗΜΑ 4.38

΄Ολα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

Ονομάζουμε **μέση γωνιακή ταχύτητα** ω_{av} του σώματος το πηλίκο της γωνιακής μετατόπισης, προς τον αντίστοιχο χρόνο.

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{4.29}$$

Το όριο της μέσης γωνιακής ταχύτητας, όταν το Δt τείνει στο μηδέν, καλείται στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{4.30}$$

Μονάδα γωνιακής ταχύτητας είναι το 1 rad/s και οι διαστάσεις της είναι

$$\dim \omega = T^{-1}$$

Προφανώς, όλα τα σημεία του στερεού σώματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή.

Όταν μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ενός στερεού σώματος, λέμε ότι αυτό έχει γωνιακή επιτάχυνση. Ονομάζουμε **μέση γωνιακή επιτάχυνση** του στερεού, σε χρόνο Δt, το πηλίκο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας στο χρονικό διάστημα Δt, προς το χρονικό διάστημα Δt.

$$\alpha_{\text{av}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{4.31}$$

Το όριο της μέσης γωνιακής επιτάχυνσης α_{av}, όταν το Δt τείνει στο μηδέν, ονομάζεται στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση

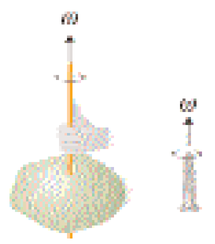
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{4.32}$$

Μονάδα γωνιακής επιτάχυνσης είναι το $1\ \text{rad/s}^2$ και οι διαστάσεις της

$$\dim \alpha = T^{-2}$$

Τα μεγέθη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα και στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση είναι διανυσματικά μεγέθη.

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά, η οποία προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (βίδα). Ο κοχλίας τοποθετείται παράλληλα με τον άξονα περιστροφής και στρέφεται όπως το σώμα (Σχ. 4.39), η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας ταυτίζεται με τη φορά προς την οποία προχωράει ο κοχλίας.



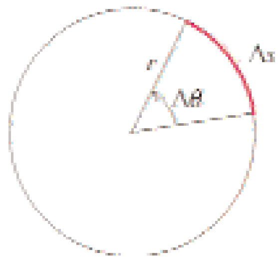
ΣΧΗΜΑ 4.39

Η φορά της γωνιακής ταχύτητας καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας.

Επίσης, η φορά μπορεί να καθορισθεί και με τον κανόνα του δεξιού χεριού σύμφωνα με τον οποίο, η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας είναι αυτή του αντίχειρα, όταν τα υπόλοιπα δάκτυλα δείχνουν την κατεύθυνση περιστροφής του σώματος.

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την ίδια διεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα. Αυτά είναι ομόρροπα διανύσματα όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αυξάνει, και αντίρροπα όταν μειώνεται.

Η γωνιακή ταχύτητα, όπως είπαμε, είναι η ίδια για όλα τα υλικά σημεία του στερεού, δεν είναι όμως ίδια η γραμμική ταχύτητα. Έστω r η ακτίνα περιστροφής ενός σημείου P, το οποίο σε χρόνο Δt διαγράφει τόξο Δs (Σχ. 4.40). Η σχέση μεταξύ του τόξου Δs και της αντίστοιχης γωνιακής μετατόπισης είναι



ΣΧΗΜΑ 4.40

Το τόξο Δs που διαγράφει ένα σημείο δίνεται από τη σχέση $\Delta s = r\Delta\theta$.

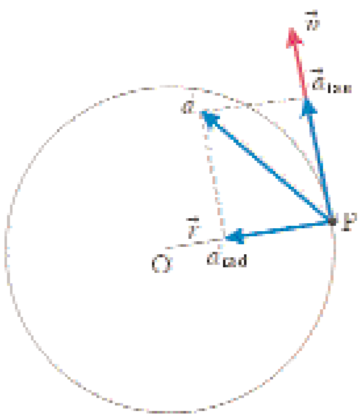
$$\Delta s = r\,\Delta\theta \qquad \text{ή}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{ή}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{ή}$$

$$\upsilon = r\omega \tag{4.33}$$

Η τελευταία σχέση είναι η σχέση που συνδέει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου του σώματος με το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας. Η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του σημείου P είναι πάντα εφαπτόμενη της τροχιάς του και μεταβάλλεται τουλάχιστον κατά κατεύθυνση (στη γενική περίπτωση και κατά μέτρο), καθώς αυτό στρέφεται. Αφού λοιπόν η $\vec{\upsilon}$ μεταβάλλεται, το P έχει επιτάχυνση $\vec{a}$, η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες (βλ. Σχ. 4.41)



ΣΧΗΜΑ 4.41
Ανάλυση της επιτάχυνσης σε ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα.

i) Την ακτινική (a_{rad}) που σχετίζεται με την αλλαγή της κατεύθυνσης της $\vec{v}$ και είναι

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{4.34}$$

ii) Την εφαπτομενική (a_{tan}) που σχετίζεται με την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας του P. Είναι

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt}$$

όμως από την (4.33) προκύπτει

$$a_{tan} = r\frac{d\omega}{dt}$$

οπότε, λόγω της (4.32), καταλήγουμε στην

$$a_{tan} = r\,\alpha \tag{4.35}$$

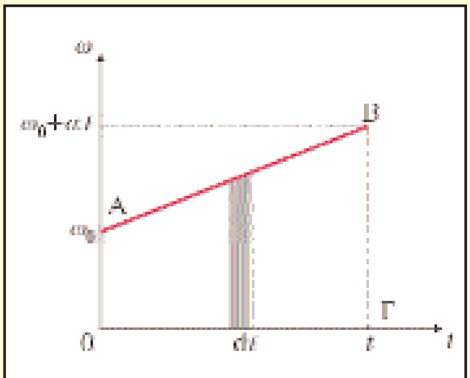
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κάποιο στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α. Την στιγμή $t = 0$ η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι ω_o. Θα υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα και τη γωνιακή μετατόπιση, συναρτήσει του χρόνου, καθώς και τη μεταξύ τους σχέση.

Επειδή η γωνιακή επιτάχυνση α είναι σταθερή έχουμε

$$\alpha = \alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$



ΣΧΗΜΑ Ι

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα $\omega = f(t)$. Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt η γωνιακή ταχύτητα ω είναι πρακτικά σταθερή, οπότε η αντίστοιχη γωνιακή μετατόπιση είναι $d\theta = \omega\, dt$. Η $d\theta$ ισούται με το "εμβαδόν" της έντονα γραμμοσκιασμένης λωρίδας του σχήματος. Διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα $\Delta t = t - 0$ σε στοιχειώδη χρονικά διαστήματα dt. Σε κάθε διάστημα dt η γωνιακή μετατόπιση δίνεται από το εμβαδόν της αντίστοιχης λωρίδας. Η συνολική γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ στο χρόνο $\Delta t = t - 0$ ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου (ΟΑΒΓ).

$$\Delta\theta = \frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha\, t}{2}\, t$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Η $\omega = \omega(t)$ δίνει

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

την οποία θέτουμε στην προηγούμενη, οπότε καταλήγουμε στην

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

Οι σχέσεις αντιστοιχίας μεταξύ της μεταφορικής κίνησης με σταθερή γραμμική επιτάχυνση και της περιστροφικής με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Μεταφορική κίνηση	Περιστροφική κίνηση
a = σταθ	α = σταθ.
$\upsilon = \upsilon_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$\Delta s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\Delta s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ - ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Το περιστρεφόμενο, γύρω από σταθερό άξονα, στερεό σώμα, που απεικονίζεται στο σχήμα 4.42, αποτελείται από σωμάτια με μάζες m_1, m_2, ... τα οποία απέχουν r_1, r_2, ... αντίστοιχα από τον άξονα περιστροφής. Το σώμα έχει κινητική ενέργεια, που ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωματίων, απ' τα οποία αποτελείται αυτό, δηλαδή

$$K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \ldots$$

Όλα τα σωμάτια έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, οπότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\upsilon_1 = \omega r_1,\ \upsilon_2 = \omega r_2\ \ldots$$

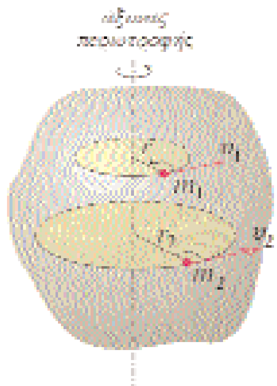
Άρα

$$K = \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \ldots$$

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right)\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\Sigma m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Ορίζουμε **ροπή αδράνειας** I σώματος, ως προς άξονα περιστροφής, το άθροισμα των γινομένων της μάζας επί το τετράγωνο της απόστασης από τον άξονα περιστροφής, κάθε σωματίου του σώματος



ΣΧΗΜΑ 4.42

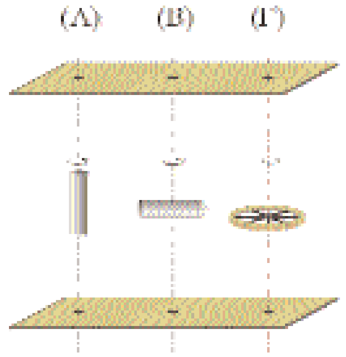
Κινητική ενέργεια του στρεφόμενου στερεού σώματος είναι το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται

$$I = \Sigma m_i r_i^2 \qquad (4.36)$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος, εξαρτάται κάθε φορά από τον συγκεκριμένο άξονα περιστροφής, η μονάδα της είναι το $1 kg{\cdot}m^2$ και οι διαστάσεις της $L^2 M^1 T^0 I^0 = L^2 M^1$.

Μπορούμε πλέον να γράψουμε την εξίσωση που μας δίνει την κινητική ενέργεια του περιστρεφόμενου σώματος, γύρω από σταθερό άξονα, ως

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (4.37)$$



ΣΧΗΜΑ 4.43

Τα σώματα έχουν ίδια μάζα αλλά διαφορετική ροπή αδρανείας.

Η κινητική ενέργεια ενός στρεφόμενου σώματος, για μια δοσμένη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, εξαρτάται όχι μόνο από την μάζα του σώματος, αλλά και από τον τρόπο κατανομής της γύρω από τον άξονα περιστροφής. Έστω, ότι τρια σώματα, μια ράβδος κατακόρυφη, μια ράβδος οριζόντια και ένας σφόνδυλος, με την ίδια μάζα, μπορούν να στρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, όπως στο σχήμα 4.43. Στην περίπτωση (Β) τα σωμάτια της ράβδου, κατά μέσο όρο, βρίσκονται μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής απ' ότι στην περίπτωση (Α) και ακόμη μακρύτερα βρίσκονται στην περίπτωση του σφονδύλου. Ισχύει δηλαδή για τις ροπές αδράνειας

$$I_A < I_A < I_\Gamma$$

άρα, και για τις κινητικές ενέργειες (με την ίδια γωνιακή ταχύτητα)

$$K_A < K_A < K_\Gamma$$

Πράγματι μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δυσκολότερα θέτουμε σε περιστροφή (δηλαδή δαπανάμε περισσότερο έργο) τον σφονδύλο, λιγότερο δύσκολα την οριζόντια ράβδο και πιο εύκολα την κατακόρυφη ράβδο.

Όπως η μάζα αποτελεί ένα μέτρο της "αντίστασης" ενός σωματίου στη μεταβολή της κίνησης του έτσι και η ροπή αδράνειας αποτελεί το μέτρο της "αντίστασης" ενός σώματος στη μεταβολή της περιστροφικής του κίνησης.

Παράδειγμα 4-7

ΣΧΗΜΑ 4.44

Στερεό σώμα αποτελείται από δύο μικρές σφαίρες (σχεδόν υλικά σημεία), μάζας $m = 2{,}0$ kg η κάθε μία, κολλημένες στα άκρα ελαφριάς (χωρίς μάζα) ράβδου μήκους $r = 0{,}80$ m. Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας, και η κινητική ενέργεια του στερεού, που προκύπτει όταν στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 3{,}0$ rad/s, γύρω από άξονα, ο οποίος διέρχεται:

α) από το μέσον της ράβδου

β) από το ένα άκρο της ράβδου

Απάντηση

α) Η ροπή αδράνειας είναι

$$I_1 = \Sigma m_i r_i^2 = m\left(\frac{r}{2}\right)^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad ή$$

$$I_1 = \frac{m\,r^2}{2} = \frac{2\text{ kg} \times (0{,}8\text{ m})^2}{2} = 0{,}64\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Η κινητική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση

$$K_1 = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \left(\frac{1}{2} \times 0{,}64 \times 9\right)\text{ J} \quad \text{ή}$$

$$K_1 = 2{,}9\text{ J}$$

β) Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$I_2 = \Sigma\, m_i\, r_i^2 = m\,r^2 \qquad \text{ή}$$

$$I_2 = 2\text{ kg} \times (0{,}8\text{ m})^2 = 1{,}3\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

και συνεπώς

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2\,\omega^2 = \left(\frac{1}{2} \times 1{,}3 \times 9\right)\text{ J}$$

$$K_2 = 5{,}8\text{ J}$$

Παρατηρούμε ότι στην δεύτερη περίπτωση είναι διπλάσια τόσο η ροπή αδράνειας, όσο και η κινητική ενέργεια.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ (ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER)

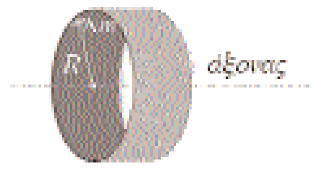
Προκειμένου να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας στερεού με συνεχή κατανομή μάζας ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Θεωρούμε ότι το στερεό αποτελείται από πολύ μικρές μάζες Δm_i ($\Delta m_i \to 0$), αμελητέων διαστάσεων (σωμάτια).

Η (στοιχειώδης) ροπή αδράνειας ενός σωματίου είναι $r_i^2 \Delta m_i$, όπου r_i η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

Η ροπή αδράνειας του σώματος ισούται με το άθροισμα των στοιχειωδών ροπών αδράνειας.

$$I = \Sigma\, r_i^2\, \Delta m_i$$

Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας I γενικώς απαιτεί γνώσεις ολοκληρωτικού λογισμού. Εμείς δεν θα προχωρήσουμε σε τέτοιους υπολογισμούς. Θα αναφέρουμε όμως ενδεικτικά την απλή περίπτωση του υπολογισμού της ροπής αδράνειας λεπτότοιχου σωλήνα μάζας M και ακτίνας R, ως προς τον άξονα του (Σχ. 4.45).



ΣΧΗΜΑ 4.45

Λεπτότοιχος σωλήνας ακτίνας R, όπου όλη η μάζα του βρίσκεται στην επιφάνειά του.

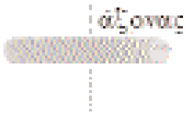
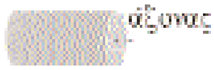
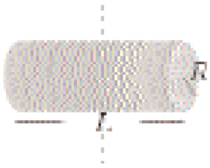
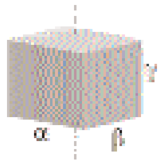
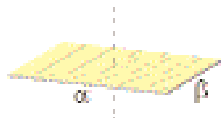
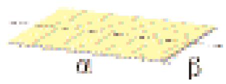
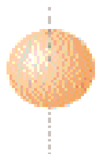
Χωρίζουμε τον σωλήνα σε στοιχειώδεις μάζες πολύ μικρών διαστάσεων. Κάθε στοιχειώδης μάζα απέχει απόσταση R από τον άξονα, οπότε έχουμε

$$I = \Sigma\, R^2\, \Delta m = R^2 \Sigma\, \Delta m$$

$$I = R^2 M \tag{4.38}$$

Ένα θεώρημα που μας βοηθά στον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός σώματος, είναι το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα Steiner , το οποίο αναφέρει

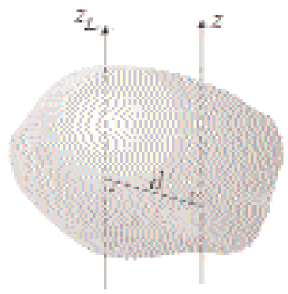
ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Λεπτή ράβδος μήκους L $I = \frac{1}{12} M L^2$ 	Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας R $I = \frac{1}{2} M R^2$ 	Συμπαγής σφαίρα ακτίνας R  $I = \frac{2}{5} M R^2$
Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας R και μήκους L  $I = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$	Συμπαγής παραλληλεπίπεδο διαστάσεων α, β, γ  $I = M \frac{a^2 + \beta^2}{12}$	Λεπτή ορθογώνια επιφάνεια διαστάσεων α, β  $I = M \frac{a^2 + \beta^2}{12}$
Δίσκος ακτίνας R $I = \frac{1}{2} M R^2$	Δίσκος ακτίνας R  $I = \frac{1}{4} MR^2$	Λεπτή ορθογώνια επιφάνεια διαστάσεων α, β  $I = \frac{1}{12} M\beta^2$
Δακτυλίδι ακτίνας R  $I = MR^2$	Δακτυλίδι ακτίνας R  $I = \frac{1}{2} MR^2$	Λεπτός σφαιρικός φλοιός ακτίνας R  $I = \frac{2}{3} MR^2$

“Η ροπή αδράνειας I ενός στερεού σώματος μάζας M ως προς ένα τυχαίο άξονα z, συνδέεται με τη ροπή αδρανείας I_{cm}, ως προς άξονα z_c, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού και είναι παράλληλος με τον z, με τη σχέση

$$I = I_{cm} + Md^2 \tag{4.39}$$

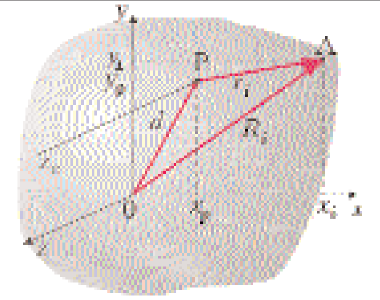
όπου d η απόσταση των αξόνων z και z_c (βλ. σχ. 4.46)



ΣΧΗΜΑ 4.46

Ο άξονας z είναι παράλληλος στον άξονα z_c που διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Steiner



ΣΧΗΜΑ 4.47

Θεωρούμε αρχή τυ συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο μάζας του στερεού σώματος.

Έστω το σώμα του σχήματος 4.47, του οποίου το κέντρο μάζας βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, άρα $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. Θεωρούμε τον άξονα z και έναν άλλο που διέρχεται από το σημείο P, με συντεταγμένες $(x_P,\ y_P,\ 0)$ που είναι παράλληλος προς τον z. Η θέση μιας στοιχειώδους μάζας m_i του σώματος προβάλλεται σ’ ένα σημείο A του επιπέδου xOy με συντεταγμένες $(x_i,\ y_i,\ 0)$.

Η ροπή αδράνειας του σώματος, ως προς τον άξονα (z) είναι

$$I_{cm} = \Sigma\, m_i R_i^2 = \Sigma\, m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \tag{I}$$

Η ροπή αδράνειας του σώματος, ως προς τον άλλο άξονα είναι

$$I_p = \Sigma\, m_i r_i^2 = \Sigma\, m_i \left[\left(x_i - x_p\right)^2 + \left(y_i - y_p\right)^2\right] \tag{II}$$

Η τελευταία σχέση μετά τις πράξεις δίνει

$$I_p = \Sigma\, m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) + \left(x_p^2 + y_p^2\right)\Sigma\, m_i - 2\,x_p\,\Sigma\, m_i\, x_i - 2\,y_p\,\Sigma\, m_i\, y_i$$

Επειδή $x_{cm} = 0$, $y_{cm} = 0$ έχουμε ότι

$$\Sigma\, m_i\, x_i = 0 \tag{III}$$

$$\Sigma\, m_i\, y_i = 0 \tag{IV}$$

Αν d είναι η απόσταση μεταξύ των αξόνων, έχουμε

$$x_p^2 + y_p^2 = d^2 \tag{V}$$

Τέλος αν M η μάζα του σώματος είναι

$$\Sigma\, m_i = M \tag{VI}$$

Η (II) λόγω των (I), (III), (IV), (V) και (VI) δίνει

$$I_p = I_{cm} + M\,d^2$$

Παράδειγμα 4-8

Δίνεται λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L. Η ροπή αδράνειάς της, ως προς άξονα κάθετο σ' αυτή, που περνά από το μέσο της, είναι

$$I = \frac{1}{12} M L^2$$

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας I' της ράβδου, ως προς άξονα κάθετο σ' αυτή, που περνά από το ένα άκρο της.

Απάντηση

Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι το μέσο της, οπότε από το θεώρημα του Steiner έχουμε

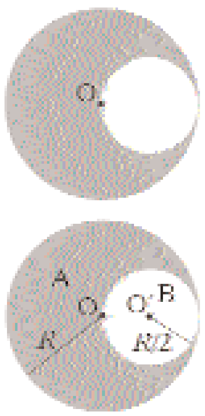
$$I' = I + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \qquad \text{ή}$$

$$I' = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M L^2 \qquad \text{ή}$$

$$I' = \frac{1}{3} M L^2$$

Παράδειγμα 4-9

Από ομογενή δίσκο ακτίνας R, και αρχικής μάζας M, αφαιρείται τμήμα, όπως στο σχήμα (4.48). Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας του στερεού που απομένει ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο O.



ΣΧΗΜΑ 4.48

Απάντηση

Για τον πλήρη δίσκο η ροπή αδρανείας του είναι

$$I_0 = \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} M R^2 \qquad \text{ή}$$

$$M \frac{R^2}{2} = \sum_A m_i r_i^2 + \sum_B m_i r_i^2$$

Το άθροισμα $\sum\limits_A m_i r_i^2$ είναι η ζητούμενη ροπή αδρανείας I. Το άθροισμα $\sum\limits_B m_i r_i^2$ είναι η ροπή αδρανείας I', ως προς το O, του δίσκου που αφαιρείται.

Η μάζα του μικρού δίσκου είναι

$$M' = M \frac{(R/2)^2}{R^2} = \frac{M}{4}$$

και η ροπή αρδανείας του ως προς το O′, είναι

$$I'_c = M' \frac{(R/2)^2}{2} = \frac{M}{4} \frac{R^2}{8} = \frac{M R^2}{32}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Steiner για το μικρό δίσκο έχουμε

$$I' = I'_c + M' d^2 \qquad \text{ή}$$

$$I' = M\frac{R^2}{32} + \frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 \qquad \text{ή}$$

$$I' = MR^2\frac{3}{32}$$

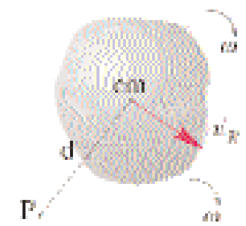
Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση έχουμε

$$M\frac{R^2}{2} = I + \frac{3}{32}R^2M \qquad \text{ή}$$

$$I = \frac{13}{32}MR^2$$

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η κινητική ενέργεια του στερεού του σχήματος 4.49, μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (Steiner). Από το σημείο Ρ διέρχεται ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής, όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως για την επίπεδη κίνηση. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής περί το Ρ, είναι ίδια με τη γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Συνεπώς η κινητική ενέργεια του σώματος είναι



ΣΧΗΜΑ 4.49

Για το στερεό σώμα που κινείται, υπάρχει στιγμιαίος άξονας που διέρχεται από το σημείο Ρ, γύρω από τον οποίο η κίνηση του σώματος είναι καθαρά περιστροφική.

$$K = \frac{1}{2}I_P \cdot \omega^2$$

όπου I_P και ω η ροπή αδρανείας και η γωνιακή ταχύτητα ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ρ.

Από το θεώρημα του Steiner έχουμε

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$

όπου M η μάζα του σώματος και d η απόσταση του κέντρου μάζας από το σημείο P. Αντικαθιστώντας έχουμε

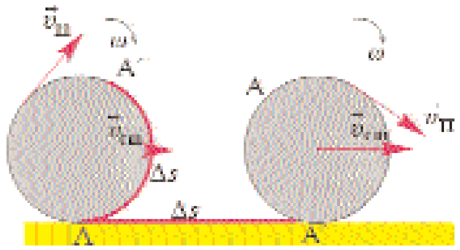
$$K = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + Md^2\right)\omega^2 \qquad \text{ή}$$

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2 + \frac{1}{2}M(d\cdot\omega)^2$$

Αλλά $d\cdot\omega = v_{cm}$ οπότε

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \qquad (4.40)$$

Η σχέση (4.40) δείχνει ότι, η κινητική ενέργεια του στερεού στη γενική περίπτωση, αποτελείται από δύο όρους, δηλαδή τον όρο $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, που είναι η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης και τον όρο $\frac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2$, που είναι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.



ΣΧΗΜΑ 4.50

ΚΥΛΙΣΗ ΔΙΣΚΟΥ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ο δίσκος του σχήματος 4.50 κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Θεωρούμε ένα νήμα μήκους Δs, το οποίο τυλίγεται καλύπτοντας το τόξο AA' της περιφέρειας. Όταν μετά από χρόνο Δt το σημείο Α′ ακουμπήσει στο έδαφος, το νήμα θα έχει απλωθεί εξ' ολοκλήρου στο έδαφος. Συνεπώς, λόγω μεταφορικής κίνησης, η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$v_{cm} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Εξετάζοντας την περιστροφική κίνηση μεμονωμένα, έχουμε ότι στον ίδιο χρόνο Δt, το σημείο Α′ διέγραψε τόξο Δs, άρα η γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής είναι

$$v_\pi = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Συνεπώς

$$v_\pi = v_{cm} = \omega R \tag{4.41}$$

Επίσης το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι

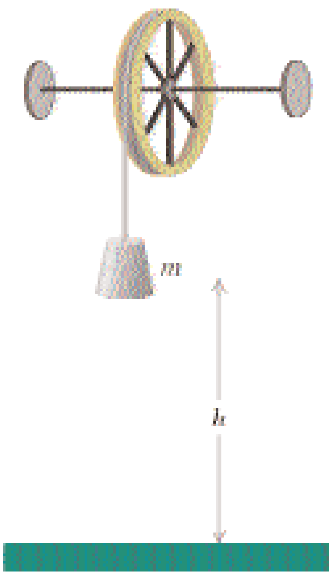
$$a = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{dv_\pi}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt}$$

$$a = R\alpha \tag{4.42}$$

όπου α η γωνιακή επιτάχυνση.

Παράδειγμα 4-10

Σφόνδυλος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα. Στην περιφέρεια του σφονδύλου στερεώνουμε τη μία άκρη ενός νήματος και το τυλίγουμε γύρω του, ενώ στην άλλη άκρη του νήματος δένουμε σωμάτιο μάζας m. Το σωμάτιο αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το δάπεδο. Να βρεθεί η ταχύτητα του σωματίου, όταν φθάνει στο δάπεδο, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του σφονδύλου την ίδια στιγμή.



ΣΧΗΜΑ 4.51

Απάντηση

Το σωμάτιο αρχικά έχει δυναμική ενέργεια

$$U = m\,g\,h$$

Όταν φθάνει στο έδαφος, η κινητική ενέργεια του σώματος είναι

$$K_1 = \frac{1}{2} m\,v^2$$

και του στρεφόμενου σφονδύλου

$$K_2 = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2} M\,R^2\,\omega^2$$

Εφόσον η γραμμική ταχύτητα του σώματος ισούται με την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του σφονδύλου έχουμε

$$v = \omega R$$

οπότε

$$K_2 = \frac{1}{2} M\,v^2$$

Αφού οι τριβές είναι αμελητέες, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει

$$U = K_1 + K_2$$

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}m\,\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\,\upsilon^2$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,h}{m+M}}$$

Τέλος έχουμε

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\,m\,g\,h}{m+M}}$$

Παράδειγμα 4-11

Συμπαγής-ομογενής κύλινδρος αφήνεται να κυλίσει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου από ύψος h. Να υπολογισθεί η μεταφορική ταχύτητα του κυλίνδρου, όταν αυτός φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Αυτή η ταχύτητα είναι ίση, μικρότερη ή μεγαλύτερη από την ταχύτητα που θα αποκτούσε ο κύλινδρος στην περίπτωση, κατά την οποία ολίσθαινε χωρίς τριβές και χωρίς να κυλάει; Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, ως προς τον άξονά του, είναι

$$I = \frac{1}{2}M\,R^2$$

Απάντηση

Την στιγμή που αφήνεται ο κύλινδρος έχει μόνο δυναμική ενέργεια

$$U = M\,g\,h$$

Την στιγμή που φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, ο κύλινδρος δεν έχει δυναμική ενέργεια, αλλά μόνο κινητική.

$$K = \frac{1}{2}I\,\omega^2 + \frac{1}{2}M\,\upsilon^2 \qquad \text{ή}$$

$$K = \frac{1}{2}\frac{1}{2}M\,R^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}M\,\upsilon^2$$

Όμως, η γραμμική ταχύτητα περιστροφής των σημείων της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου, ως προς τον άξονά του, ισούται με την μεταφορική ταχύτητα, άρα

$$\upsilon = \omega\,R$$

οπότε

$$K = \frac{1}{4}M\,\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\,\upsilon^2 = \frac{3}{4}M\,\upsilon^2$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει

$$U = K \qquad \text{ή}$$

$$M\,g\,h = \frac{3}{4}M\,\upsilon^2 \qquad \text{ή}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$$

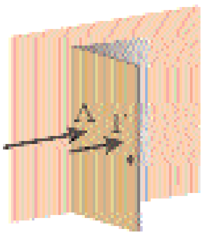
Αν ο κύλινδρος ολίσθαινε θα είχαμε

$$M g h = \frac{1}{2} M \upsilon'^2$$

$$\upsilon' = \sqrt{2 g h}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $\upsilon' > \upsilon$. Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί στη δεύτερη περίπτωση η αρχική δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια μόνο μεταφορικής κίνησης, ενώ στην πρώτη περίπτωση ένα μέρος της αρχικής ενέργειας "δεσμεύεται" σε κινητική ενέργεια περιστροφής.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

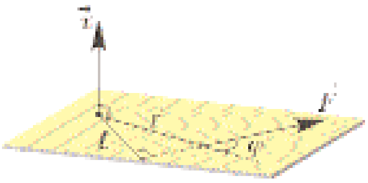


ΣΧΗΜΑ 4.52

Ευκολότερα κλείνουμε την πόρτα ασκώντας δύναμη στο Γ παρά στο Α.

Προσπαθώντας να ανοίξουμε μια βαριά αυλόπορτα (Σχ. 4.52), διαπιστώνουμε ότι ανοίγει ευκολότερα, αν ασκούμε δύναμη όσο το δυνατόν μακρύτερα από τους μεντεσέδες. Ακόμη χρησιμοποιούμε αποτελεσματικότερα ένα κλειδί, για να ξεβιδώσουμε μια βίδα, ασκώντας δύναμη στο άκρο του και κάθετα προς αυτό. Η εμπειρία μας γενικά, για την ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέψει ένα στερεό σώμα, μας οδηγεί στον ορισμό ενός φυσικού μεγέθους που ονομάζεται **ροπή δύναμης**.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ



ΣΧΗΜΑ 4.53

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από την δύναμη και το σημείο.

Η ροπή δύναμης, ως προς σημείο Ο, ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{r}$ επί την δύναμη $\vec{F}$, δηλαδή

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

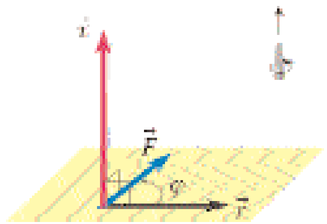
όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο Ο και πέρας το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}$ (Σχ. 4.53) (Βλέπε Μαθηματικό συμπλήρωμα σελ. 146).

Το μέτρο της ροπής είναι

$$\tau = Fr \sin\varphi$$

όπου φ η μικρότερη (κυρτή) γωνία που διαγράφεται από το διάνυσμα $\vec{r}$ προς τη δύναμη $\vec{F}$.

Η διεύθυνση της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Ο και το διάνυσμα της δύναμης και η φορά της προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.



ΣΧΗΜΑ 4.54

Η φορά της ροπής προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

Τοποθετούμε τον κοχλία κατά μήκος της διεύθυνσης της ροπής, και τον στρέφουμε ώστε το διάνυσμα $\vec{r}$ να πέσει στη δύναμη $\vec{F}$, σαρώνοντας την κυρτή γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους. Η φορά κίνησης του κοχλία δείχνει τη φορά του διανύσματος της ροπής $\vec{\tau}$ (Σχ. 4.54).

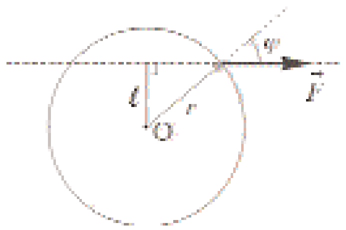
Οι μονάδα ροπής στο SI είναι 1 Nm και οι διαστάσεις ML^2T^{-2}.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Στον τροχό του σχήματος 4.55 δρα η δύναμη $\vec{F}$. Η ροπή της δύναμης, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του τροχού, είναι το γινόμενο της δύναμης F επί την απόσταση ℓ του άξονα περιστροφής από την "γραμμή δράσης" της δύναμης. Δηλαδή,

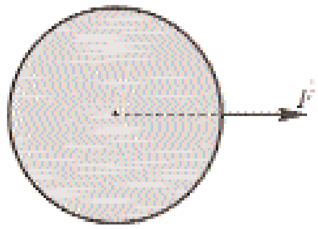
$$\tau = F\ell = Fr\sin\varphi \tag{4.43}$$

Η απόσταση ℓ ονομάζεται **μοχλοβραχίονας** της δύναμης $\vec{F}$.
Προφανώς, όταν η δύναμη F διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, έχει ροπή μηδέν (Σχ. 4.56).



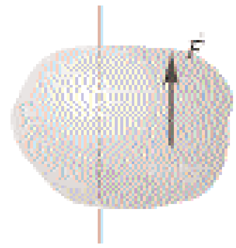
ΣΧΗΜΑ 4.55

Η ικανότητα της δύναμης να στρέψει τον τροχό εξαρτάται από την απόσταση ℓ.



ΣΧΗΜΑ 4.56

Η δύναμη F δεν μπορεί να στρέψει τον τροχό, έχει ροπή μηδέν.



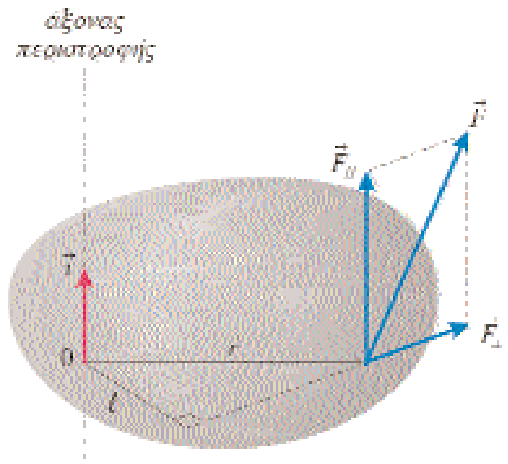
ΣΧΗΜΑ 4.57

Η δύναμη F δεν μπορεί να στρέψει το στερεό σώμα γύρω από άξονα παράλληλο προς τη διεύθυνσή της.

Στην περίπτωση που μια δύναμη είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής (Σχ. 4.57), δεν μπορεί να στρέψει το στερεό σώμα, δηλαδή η ροπή της είναι μηδέν.

Γενικά αν η διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ είναι τυχαία (Σχ. 4.58), αναλύουμε την δύναμη σε δύο συνιστώσες, η μία ($F_{//}$) είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής και η άλλη ($F_{\perp}$) βρίσκεται στο κάθετο επίπεδο, στον άξονα περιστροφής. Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$, ως προς τον άξονα, ισούται με τη ροπή τ' της δεύτερης συνιστώσας $F_{\perp}$, δηλαδή έχουμε

$$\tau = \tau' = F_{\perp}\ell$$



ΣΧΗΜΑ 4.58

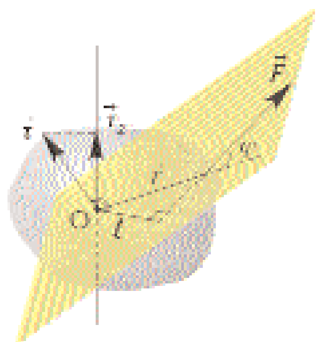
Η ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα ισούται τη ροπή της συνιστώσας $F_{\perp}$.

Παρατήρηση:

Η ροπή ως προς σημείο, ταυτίζεται με τη ροπή ως προς άξονα, μόνο όταν ο άξονας έχει τη διεύθυνση της ροπής, δηλαδή είναι κάθετος στο επίπεδο του σημείου και της δύναμης. Στην περίπτωση που ο άξονας είναι διαφορετικός, η ροπή ως προς τον άξονα υπολογίζεται όπως αναφέρθηκε στην περίπτωση του σχήματος 4.58, και αποδεικνύεται ότι ισούται με την συνιστώσα τ_Z (στον άξονα περιστροφής) της ροπής τ, ως προς το σημείο Ο (Σχ. 4.59).

Όταν σε ένα στερεό σώμα που μπορεί να στραφεί γύρω από άξονα δρουν πολλές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ κ.λπ., τότε η συνολική ροπή ισούται με το άθροισμα των ροπών κάθε δύναμης. Δηλαδή

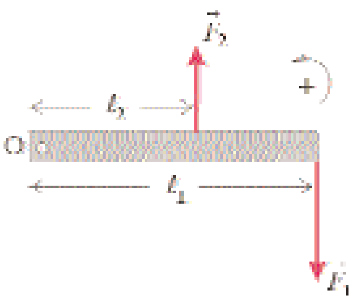
$$\tau_{ολ} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots$$



ΣΧΗΜΑ 4.59

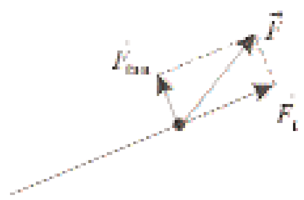
Η ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα, είναι η συνιστώσα στον άξονα, της ροπής της δύναμης ως προς το σημείο.

Χαρακτηρίζουμε συνήθως ως θετική, τη ροπή της δύναμης που στρέφει το στερεό αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και ως αρνητική αυτή που στρέφει το στερεό σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού. Για παράδειγμα, στο σχήμα 4.60, η ροπή της $\vec{F}_1$ είναι $\tau_1 = -F_1\ell_1$ και η ροπή της δύναμης $\vec{F}_2$ είναι $\tau_2 = +F_2\ell_2$.



ΣΧΗΜΑ 4.60

Όταν η δύναμη τείνει να στρέψει το στερεό κατά την αντίθετη φορά από αυτή των δεικτών του ρολογιού έχει ροπή θετική.



ΣΧΗΜΑ 4.61

Η ροπή της δύναμης F ισούται με τη ροπή της $F_{\tan}$.

Θεώρημα των ροπών

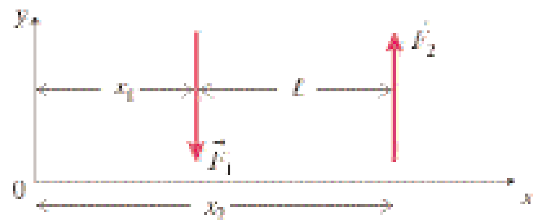
Αποδεικνύεται ότι η συνολική ροπή πολλών δυνάμεων ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης. Δηλαδή, αν σε ένα στερεό σώμα δρουν πολλές δυνάμεις, οι $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, ... η συνολική ροπή ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης.

Εάν έχουμε μια δύναμη $\vec{F}$ σε τυχαία διεύθυνση (Σχ. 4.61), αναλύουμε τη δύναμη σε ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα. Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με το άθροισμα της ροπής της συνιστώσας $F_{\tan}$ και της συνιστώσας F_{rad}. Όμως, η ροπή της F_{rad} είναι μηδέν, συνεπώς, η συνολική ροπή ισούται με τη ροπή της $F_{\tan}$.

Παράδειγμα 4-12

Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε το σύστημα δύο παράλληλων δυνάμεων, ίδιου μέτρου ($F_1 = F_2 = F$) και αντίθετης φοράς. Η απόσταση ℓ μεταξύ των δυνάμεων ονομάζεται **μοχλοβραχίονας του ζεύγους**. Το διανυσματικό άθροισμα (η συνισταμένη) των δυνάμεων είναι μηδέν. Η μόνη συνέπεια του ζεύγους είναι η δημιουργία ροπής στρέψης. Να βρεθεί η ολική ροπή του ζεύγους, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων, που διέρχεται από τυχαίο σημείο Ο.



ΣΧΗΜΑ 4.62

Απάντηση

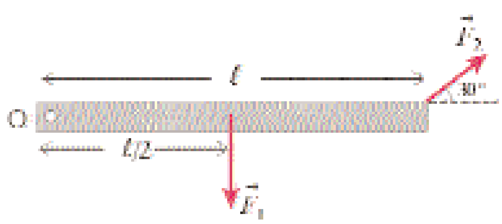
Έχουμε $\tau_0 = F_2 x_2 - F_1 x_1 = F x_2 - F x_1$, ή $\tau_0 = F(x_2 - x_1)$ ή $\tau_0 = F\ell$.

Το μέτρο της ροπής του ζεύγους, ως προς οποιοδήποτε σημείο, ισούται με το γινόμενο του μέτρου της μιας δύναμης επί τον μοχλοβραχίονά του. Αν περιοριζόμαστε στο επίπεδο η ροπή του ζεύγους μπορεί να θεωρείτα ως μονόμετρο μέγεθος με πρόσημο.

Ζεύγος δυνάμεων ασκούμε στο "σταυρό" όταν αλλάζουμε το λάστιχο του αυτοκινήτου. Επίσης ζεύγος δυνάμεων εμφανίζεται σ' ένα ηλεκτρικό δίπολο ή σ' ένα μαγνητικό δίπολο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό ή ομογενές μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4-13

Σε μια οριζόντια ράβδο που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το ένα άκρο της, δρουν δυνάμεις, όπως στο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 4.63

Να υπολογισθεί η συνολική ροπή των δυνάμεων αν

$$F_1 = 30\,\text{N}, \quad F_2 = 20\,\text{N} \quad \text{και} \quad \ell = 2{,}0\,\text{m}$$

<u>Απάντηση</u>

Αναλύουμε την F_2 σε δύο συνιστώσες, την F_{2x} και την F_{2y}.
Είναι

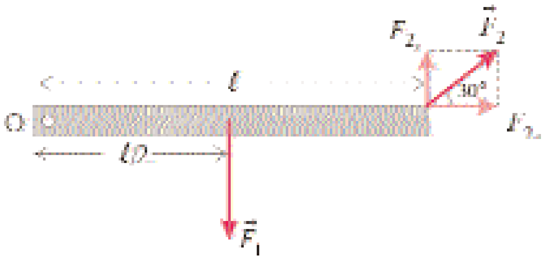
$$\tau_2 = \tau_{F_{2x}} + \tau_{F_{2y}}$$

Άρα

$$\tau_2 = +\ell F_{2y} + 0F_{2x} \quad \text{ή}$$

$$\tau_2 = +\ell\,\mathrm{F}_2 \sin 30^o \quad \text{ή}$$

$$\tau_2 = +20\,\text{Nm}$$



ΣΧΗΜΑ 4.64

Επίσης

$$\tau_1 = -F_1\ \ell/2 \quad \text{ή}$$

$$\tau_1 = -(30 \cdot 2/2)\ \text{Nm} \quad \text{ή}$$

$$\tau_1 = -30\,\text{Nm}$$

Άρα

$$\tau_{\text{ολ}} = \tau_1 + \tau_2 \quad \text{ή}$$

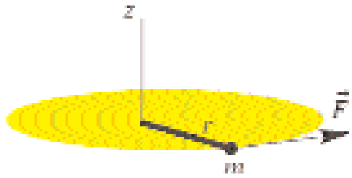
$$\tau_{\text{ολ}} = (+20 - 15)\ \text{Nm} \quad \text{ή}$$

$$\tau_{\text{ολ}} = -10\,\text{Nm}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΕΡΕΟΥ Η ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Θεωρούμε ράβδο αμελητέας μάζας και μήκους r, η οποία μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ένα άκρο της (Σχ. 4.65). Στο άλλο άκρο είναι στερεωμένο ένα σώμα μικρών διαστάσεων, μάζας m. Αν στο σώμα δρα δύναμη $\vec{F}$ διαρκώς εφαπτομένη στην τροχιά που διαγράφει, θα προκαλέσει επιτρόχια επιτάχυνση $a_{\tan}$. Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = m a_{\tan} \quad \text{ή} \quad rF = m r a_{\tan}$$



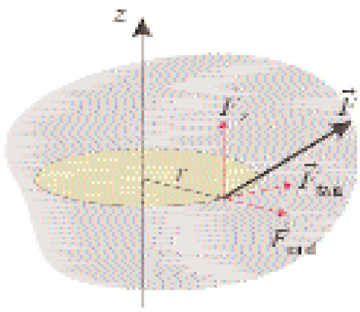
ΣΧΗΜΑ 4.65

Η εφαπτομενική δύναμη F προκαλεί εφαπτομενική επιτάχυνση.

Όμως, όπως ξέρουμε $rF = \tau$ και $a_{\tan} = \alpha r$, όπου α η γωνιακή επιτάχυνση.
Άρα

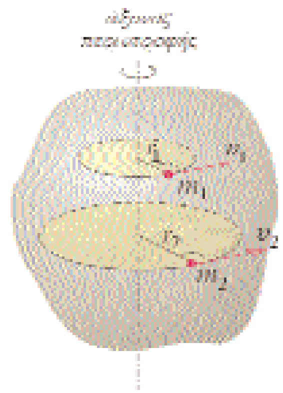
$$\tau = mr^2\alpha \tag{4.46}$$

Εάν στο σώμα δρα δύναμη $\vec{F}$ τυχαίας διεύθυνσης, αναλύουμε τη δύναμη σε τρεις συνιστώσες, όπως στο σχήμα 4.66. Από το θεώρημα των ροπών έχουμε ότι, η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίση με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της. Άρα, η ροπή της $\vec{F}$, ισούται με τη ροπή της εφαπτομενικής συνιστώσας $F_{\tan}$, διότι οι άλλες δύο δυνάμεις έχουν ροπή μηδέν. Επομένως στη σχέση (4.46), έχουμε τη ροπή τ της δύναμης $\vec{F}$, ανεξάρτητα από τη διεύθυνση αυτής.



ΣΧΗΜΑ 4.66

Αποτέλεσμα στην περιστροφή επιφέρει μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα.



ΣΧΗΜΑ 4.67

Κάθε στοιχειώδες τμήμα του στερεού εκτελεί κυκλική κίνηση.

ΣΧΗΜΑ 4.68

Η εσωτερικές δυνάμεις έχουν ροπή 0, διότι είναι ζεύγος με μοχλοβραχίοντα μήκους μηδέν.

Έστω ένα στερεό σώμα, που περιστρέφεται εξ' αιτίας της δράσεως διαφόρων δυνάμεων (Σχ. 4.67). Κάθε στοιχειώδες τμήμα του στερεού εκτελεί κυκλική κίνηση. Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.46) για καθένα από τα στοιχειώδη τμήματα έχουμε

$$\tau_1 = m_1 r_1^2 \alpha,\ \tau_2 = m_2 r_2^2 \alpha \ldots$$

Εφόσον οι ροπές τ_1, τ_2, ... είναι συγγραμμικές, προσθέτουμε κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις, οπότε προκύπτει

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + \ldots = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)\ \alpha \quad \text{ή}$$

$$\tau = I \cdot \alpha \qquad (4.47)$$

όπου τ είναι η συνολική ροπή και I η ροπή αδρανείας του στερεού ως προς τον συγκεκριμένο άξονα. Τονίζουμε ότι η συνολική ροπή τ οφείλεται μόνο στις εξωτερικές δυνάμεις, διότι οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των τμημάτων του στερεού έχουν συνισταμένη ροπή μηδέν. Πράγματι, από τον τρίτο Νόμο του Νεύτωνα, έχουμε ότι ανά δύο έχουν ίδιο μέτρο, αντίθετη φορά και ίδια "γραμμή δράσης" (Σχ. 4.68), άρα αποτελούν ζεύγος με μοχλοβραχίονα μήκους μηδέν.

Η σχέση (4.47) αποτελεί το Νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση και η διατύπωσή του είναι η εξής:

"Το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σ' ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από άξονα, ισούται με το **γινόμενο** της γωνιακής επιτάχυνσης, που αποκτά το στερεό, επί τη ροπή αδρανείας του στερεού, ως προς τον άξονα αυτό".

Παρατήρηση

Όλα τα παραπάνω αναφέρονται σε επίπεδη κίνηση, κατά την οποία κάθε σημείο του στερεού κινείται σε συγκεκριμένο σταθερό επίπεδο.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

I) **Όταν το στερεό σώμα έχει σταθερό άξονα περιστροφής**: υπολογίζουμε την συνολική ροπή των δυνάμεων, ως προς τον σταθερό άξονα και εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα (σχέση 4.47), απ' όπου υπολογίζουμε την γωνιακή επιτάχυνση α.

II) **Όταν το στερεό σώμα δεν έχει σταθερό άξονα περιστροφής** τότε εργαζόμαστε ως εξής: Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θεωρώντας το σώμα ως υλικό σημείο, που η μάζα του κινείται όπως το *ΚΜ*. Άρα $F = m a_{cm}$, απ' όπου υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και μελετάμε τη μεταφορική κίνησή του. Την περιστροφική κίνηση τη μελετάμε ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Υπολογίζουμε τη συνολική ροπή ως προς αυτόν τον άξονα και εφαρμόζουμε την σχέση (4.47), $\tau = I_{cm}\ \alpha$, όπου I_{cm} η ροπή αδρανείας ως προς τον συγκεκριμένο άξονα.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα στα οποία εφαρμόζουμε τις πιο πάνω μεθόδους.

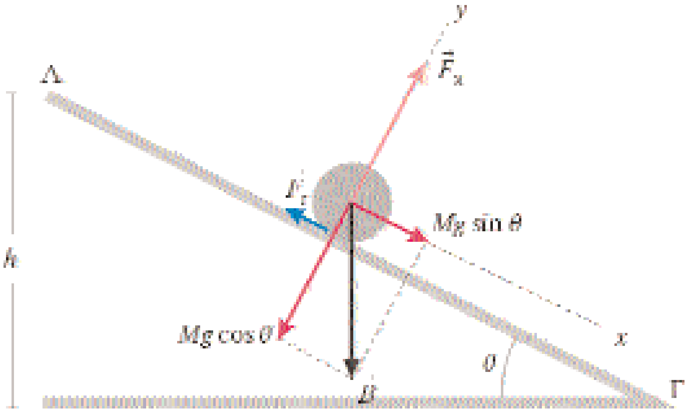
Παράδειγμα 4-14

Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας *M* αφήνεται να κυλίσει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας θ. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, θεωρώντας γνωστή την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Απάντηση

Στον κύλινδρο ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{F}_k$ και η τριβή $\vec{F}_\tau$. Η ροπή $\vec{\tau}$, ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, οφείλεται μόνο στην $\vec{F}_\tau$, οπότε ισχύει

$$\tau = I\alpha \qquad \text{(I)}$$



ΣΧΗΜΑ 4.69

Αν R η ακτίνα του κυλίνδρου, έχουμε

$$\tau = F_\tau R \qquad \text{(II)}$$

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, ως προς τον άξονά του είναι

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \qquad \text{(III)}$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας a_{cm} και η γωνιακή επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R} \qquad \text{(IV)}$$

Η (I) λόγω των (II), (III), (IV) γίνεται

$$F_\tau = \frac{1}{2} M a_{cm} \qquad \text{(V)}$$

Από το 2ο νόμο του Newton για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε

$$\Sigma F_x = M\, a_{cm} \quad \text{ή} \quad M\, g \sin\theta - F_\tau = M\, a_{cm}$$

Λόγω των (V), (VI) έχουμε

$$a_{cm} = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και ως εξής:

Αν υ είναι η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης, με την οποία φθάνει ο κύλινδρος στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας, $Ma_{cm}(\text{ΑΓ}) = M\upsilon^2/2$, ισχύει

$$\upsilon^2 = 2\, a_{cm}(\text{ΑΓ}) = 2\, a_{cm} \frac{h}{\sin\theta}$$

Όμως δείξαμε ενεργειακά, στο παράδειγμα 4-11, ότι ισχύει

$$v^2 = \frac{4}{3} g\, h$$

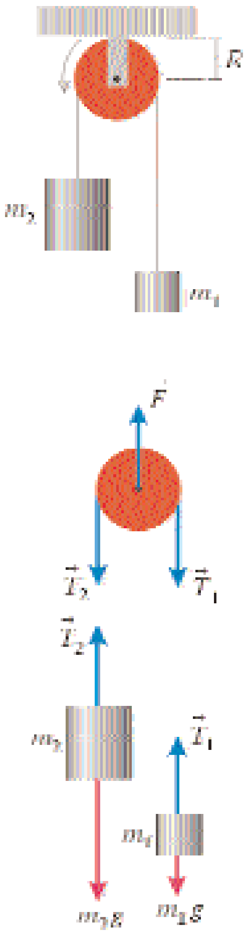
άρα

$$2\, a_{\mathrm{cm}} \frac{h}{\sin\,\theta} = \frac{4}{3} g\, h$$

$$a_{\mathrm{cm}} = \frac{2}{3} g \sin\,\theta$$

Παράδειγμα 4-15

Δύο σώματα μαζών m_1, m_2 δένονται στα άκρα άμαζου νήματος, το οποίο περνά από τροχαλία χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρειά της. Η τροχαλία έχει ακτίνα R, ροπή αδράνειας I και στρέφεται χωρίς τριβή γύρω απ΄τον άξονα της. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση των μαζών.



ΣΧΗΜΑ 4.70

Απάντηση

Στο σώμα μάζας m_2, ασκείται το βάρος του και η δύναμη $\vec{T}_2$ από το νήμα. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την κίνησή του δίνει

$$m_2\, g - T_2 = m_2\, a \qquad \text{(I)}$$

Ανάλογα για το σώμα μάζας m_1 ισχύει

$$T_1 - m_1\, g = m_1\, a \qquad \text{(II)}$$

Για την περιστροφή της τροχαλίας έχουμε

$$\tau = I\,\alpha \quad \text{ή} \quad T_2\, R - T_1\, R = I\,\alpha \qquad \text{(III)}$$

Η εφαπτομενική συνιστώσα, $a_{\tan} = R\,\alpha$, της επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας ισούται με την επιτάχυνση a των δύο σωμάτων, διότι το νήμα δεν έχει ελαστικότητα και δεν ολισθαίνει.
Άρα, η (III) γίνεται

$$\left(T_2 - T_1\right) R = I\, \frac{a}{R} \qquad \text{(IV)}$$

Από τις (I), (II) (IV) καταλήγουμε στην σχέση

$$a = \frac{\left(m_2 - m_1\right) g}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}} \qquad \text{(V)}$$

Η παραπάνω διάταξη ονομάζεται μηχανή του Atwood και χρησιμεύει στον υπολογισμό της τιμής του g Αν οι μάζες m_1, m_2 διαφέρουν λίγο τότε η επιτάχυνση a είναι αρκετά μικρότερη του g, οπότε μετριέται πειραματικά εύκολα και κατόπιν από την σχέση (V) υπολογίζεται η τιμή του g.

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ - ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

Γενικά λέμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε **μηχανική ισορροπία** ή απλά σε ισορροπία ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όταν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι σταθερή, δηλαδή η επιτάχυνση του είναι μηδέν

$a_{cm} = 0$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από έναν άξονα, δηλαδή η γωνιακή του επιτάχυνση είναι μηδέν $\alpha = 0$. Το σώμα ειδικότερα βρίσκεται σε **στατική ισορροπία** ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, εάν δεν μεταφέρεται ούτε περιστρέφεται, ως προς αυτό το σύστημα. Δηλαδή πρέπει, ως προς το δοσμένο σύστημα αναφοράς, να είναι μηδέν αφενός μεν η ταχύτητα του κέντρου μάζας, αφετέρου δε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, γύρω από οιονδήποτε άξονα. Η μεταφορική κίνηση ενός στερεού σώματος καθορίζεται από την εξίσωση $\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$. Στην ισορροπία έχουμε $\vec{a}_{cm} = 0$, οπότε $\vec{F} = 0$. Η περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος διέπεται από την εξίσωση $\tau = I\alpha$. Στην ισορροπία έχουμε $\alpha = 0$, οπότε $\vec{\tau} = 0$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι οι συνθήκες για την ισορροπία ενός στερεού σώματος είναι:

1. $$\Sigma \vec{F} = 0$$

δηλ. η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, είναι μηδέν,

2. $$\Sigma \vec{\tau} = 0$$

δηλ. το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, ως προς οιονδήποτε άξονα, είναι μηδέν.

Στα προβλήματα που θα συναντήσουμε οι δυνάμεις θα είναι ομοεπίπεδες, οπότε μετά την ανάλυση τους σε άξονες x, y, αντί για τη σχέση $\Sigma \vec{F} = 0$ θα γράφουμε

$$\Sigma F_x = 0 \qquad (\alpha)$$

και

$$\Sigma F_y = 0 \qquad (\beta)$$

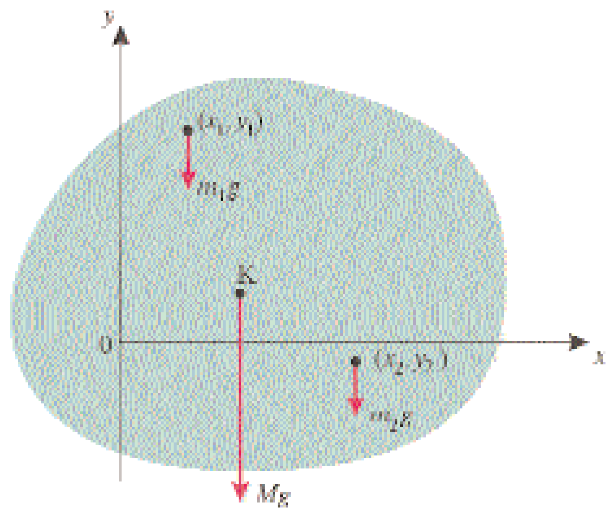
Ακόμη επειδή ως προς οποιοδήποτε σημείο ή άξονα ισχύει $\Sigma\boldsymbol{\tau}=0$ μπορούμε να επιλέγουμε άξονα (z) κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων (ή σημείο του επιπέδου των δυνάμεων) και να γράφουμε

$$\Sigma \tau_z = 0 \qquad (\gamma)$$

Το σημείο του επιπέδου των δυνάμεων, απ' το οποίο διέρχεται ο άξονας (z), το επιλέγουμε εμείς κατάλληλα, ώστε να απλοποιείται το πρόβλημα. Μπορεί π.χ. να είναι σημείο εφαρμογής "άγνωστης" δύναμης. Συνεπώς στην περίπτωση ομοεπιπέδων δυνάμεων το πρόβλημα της ισορροπίας επιλύεται με τη βοήθεια των σχέσεων (α), (β), (γ).

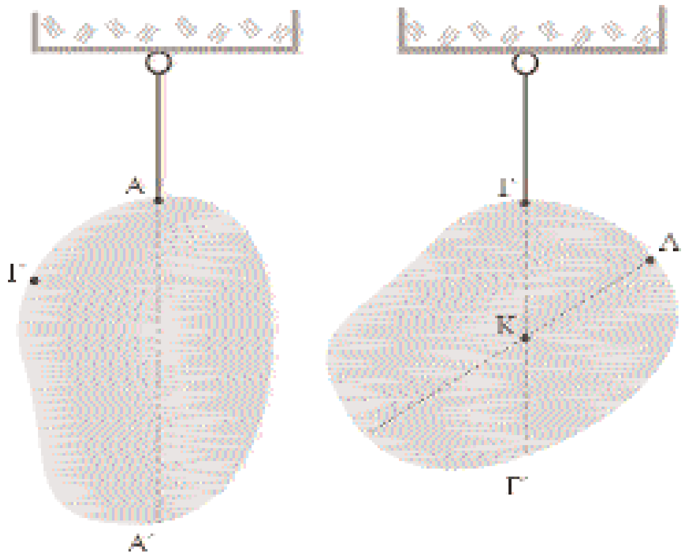
ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

Στα περισσότερα προβλήματα μία απ' τις δυνάμεις, που ασκούνται σ' ένα σώμα, είναι το βάρος του και επομένως, πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε τη ροπή του. Το βάρος του σώματος είναι η συνισταμένη των βαρών των σωματίων, απ' τα οποία θεωρούμε ότι αποτελείται το σώμα. Μπορούμε να υπολογίζουμε τη ροπή του βάρους, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του σώματος, θεωρώντας ότι αυτό ασκείται σε ένα σημείο, που ονομάζεται **κέντρο βάρους**. Από αυτό το σημείο διέρχεται ο φορέας του βάρους, όπως και αν στραφεί το σώμα. Όταν το βαρυτικό πεδίο είναι ομογενές, στην περιοχή που βρίσκεται το σώμα, το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Την παραπάνω πρόταση θα την δείξουμε στην απλή περίπτωση, που το σώμα περιορίζεται σ' ένα επίπεδο (Σχ. 4.71). Πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό του κέντρου βάρους η ροπή του Mg, ως προς το Ο, να ισούται με το άθροισμα των ροπών των βαρών των σωματίων, απ' τα οποία αποτελείται το σώμα.



Σχήμα 4.71

Στο ομογενές βαρυτικό πεδίο το κέντρο μάζας ταυτίζεται με το κέντρο βάρους.



Σχήμα 4.72

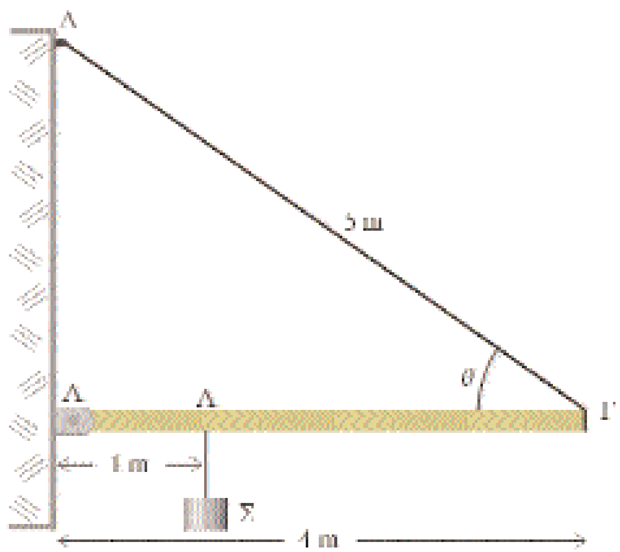
Πειραματικός προσδιορισμός του κέντρου βάρους.

Δηλαδή

$$Mgx_K = m_1gx_1 + m_2gx_2 + \ldots \qquad \text{ή}$$

$$x_K = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots}{M} = x_{cm} \tag{4.48}$$

Για τον προσδιορισμό του κέντρου βάρους ομογενών συμμετρικών σωμάτων ισχύει ότι αναφέραμε και στον προσδιορισμό του κέντρου μάζας τους. Για τον πειραματικό προσδιορισμό του κέντρου βάρους χρησιμοποιούμε την παρακάτω ιδιότητά του. Όταν ισορροπεί ένα σώμα κρεμασμένο από ένα σημείο του Α, τότε το κέντρο βάρους βρίσκεται στην κατακόρυφο που διέρχεται απ' το Α. Αν δεν συνέβαινε αυτό θα είχαμε ροπή του βάρους ως προς το σημείο ανάρτησης, άρα το σώμα δεν θα ισορροπούσε. Εξαρτώντας λοιπόν ένα σώμα διαδοχικά με τη βοήθεια νήματος, από δύο διαφορετικά σημεία, το κέντρο βάρους του θα βρίσκεται στο σημείο τομής των προεκτάσεων του νήματος στήριξης (Σχ. 4.72).



Σχήμα 4.73

Παράδειγμα 4-16

Ομογενής σανίδα μήκους 4,0 m και βάρους 100 N διατηρείται οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σανίδα στηρίζεται μέσω άρθρωσης, με το ένα άκρο της σε κατακόρυφο τοίχο και με το άλλο άκρο της στηριγμένο από τον ίδιο τοίχο, μέσω νήματος μήκους 5,0 m. Από σημείο Λ, που απέχει 1,0 m από την άρθρωση, κρέμεται ένα σώμα Σ βάρους 400 N. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις που δέχεται η σανίδα από το νήμα και τον τοίχο στο σημείο άρθρωσης.

Απάντηση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται η σανίδα (δες σχήμα). Σ' αυτήν ασκούνται;

(i) Το βάρος της 100 N, το οποίο εφαρμόζεται στο μέσο της Μ, αφού είναι ομογενής.

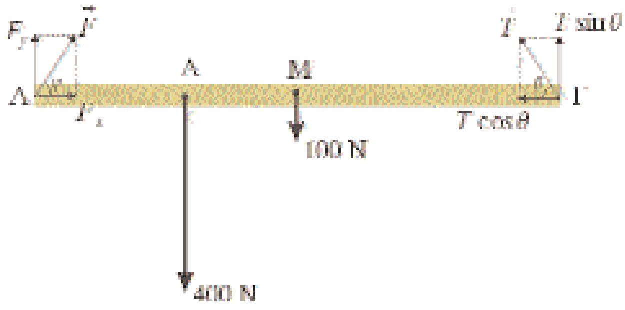
(ii) Η κατακόρυφη δύναμη 400 N στο σημείο Λ.

(iii) Η δύναμη Τ από το νήμα (σχεδιάζεται στη διεύθυνση του νήματος).

(iv) Η δύναμη F από την άρθρωση.

Αναλύουμε κατόπιν κάθε μία απ' τις δυνάμεις T και F σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ (Σχ. 4.73) έχουμε



ΣΧΗΜΑ 4.74

$$\cos\theta = \frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΓΔ})} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{3}{5}$$

Εφόσον η σανίδα ισορροπεί έχουμε

$$\Sigma Fy = 0 \quad \text{ή}$$

$$Fy + T\sin\theta - 400\text{ N} - 100\text{ N} = 0 \qquad \text{(I)}$$

και

$$\Sigma Fx = 0 \quad \text{ή}$$

$$Fx - T\cos\theta = 0 \qquad \text{(II)}$$

Επίσης

$$\Sigma\tau_A = 0 \quad \text{ή}$$

$$T\sin\theta\,(4\text{m}) - (100\text{ N})\cdot(2\text{m}) - (400\text{ N})\cdot(1\text{ m}) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Επιλέξαμε το σημείο Α, ως σημείο αναφοράς για τις ροπές, γιατί ως προς αυτό η ροπή της $\vec{F}$ (άγνωστη δύναμη κατά μέτρο και κατεύθυνση) είναι μηδέν.

Από την (III) προκύπτει

$$T\sin\theta = 150\text{N} \quad \text{ή}$$

$$T\frac{3}{5} = 150\text{ N} \quad \text{ή}$$

$$T = 250\text{ N}$$

Η (II) δίνει

$$Fx = T\frac{4}{5} = 250\text{ N}\times\frac{4}{5} = 200\text{ N}$$

Από την (1) έχουμε

$$Fy = 500\text{ N} - T\frac{3}{5} = 500\text{ N} - 250\text{ N}\times\frac{3}{5} = 350\text{ N}$$

Το μέτρο της F είναι

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{200^2 + 350^2}\text{ N} \quad \text{ή} \quad F = 400\text{ N}$$

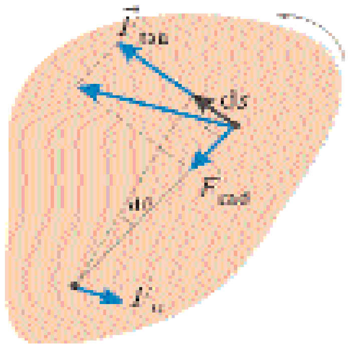
Η κατεύθυνση της F προσδιορίζεται με τον υπολογισμό της γωνίας φ

$$\tan\varphi = \frac{Fy}{Fx} = \frac{350}{200} = 1{,}75$$

άρα

$$\varphi = 60^{\text{o}}$$

ΕΡΓΟ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



ΣΧΗΜΑ 4.75

Κατά τη στοιχειώδη μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F, παράγει έργο μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα.

Θεωρούμε στερεό σώμα που στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα (Σχ. 4.75). Στο σώμα ασκείται η δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη $\vec{F}_\alpha$ του άξονα. Αναλύουμε την $\vec{F}$ στις συνιστώσες $\vec{F}_{\text{rad}}$ (ακτινική) και $\vec{F}_{\tan}$ (εφαπτομενική). Το έργο της $\vec{F}_{\text{rad}}$ είναι μηδέν. Για μια πολύ μικρή (στοιχειώδη) μετατόπιση ds το έργο της $\vec{F}$ είναι

$$\mathrm{d}W = F_{\tan}\,\mathrm{d}s = F_{\tan} R\,\mathrm{d}\theta$$

Όμως το γινόμενο $F_{\tan} R$ είναι η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το O, άρα

$$\mathrm{d}W = \tau\, d\theta \tag{4.49}$$

Αν η ροπή $\vec{\tau}$ είναι σταθερή, τότε μπορούμε να γράψουμε για οποιαδήποτε γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$.

$$W = \tau \Delta\theta \tag{4.50}$$

Η ισχύς που παρέχει η $\vec{F}$ (ή η ισχύς που παρέχει η ροπή), είναι

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \tau \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \text{ή}$$

$$P = \tau\,\omega \tag{4.50α}$$

Η σχέση (4.50α) είναι η ανάλογη της $P = F\,\upsilon$, που ισχύει στη μεταφορική κίνηση.

Όπως γνωρίζουμε από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, το άθροισμα των έργων των δυνάμεων, που ασκούνται σ' ένα σώμα, ισούται με την μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος.

$$\Sigma W = \Delta E_\kappa$$

Για σώμα που στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα το παραπάνω θεώρημα έχει την μορφή

$$\Sigma W = \frac{1}{2} I\omega^2_{\text{τελ}} - \frac{1}{2} I\omega^2_{\text{αρχ}} \tag{4.51}$$

Την σχέση (4.51) θα την αποδείξουμε στην ειδική περίπτωση που στο στρεφόμενο σώμα εφαρμόζεται σταθερή ροπή τ, οπότε αυτό έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.

Η σχέση (4.50) λόγω της σχέσης (4.47) γίνεται

$$W = I\,\alpha\,\Delta\theta$$

Όμως γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ γωνιακής ταχύτητας και μετατόπισης, στην κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, είναι

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$$

Επομένως $$W = I\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2}$$

Συνεπώς $$W = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2$$

Παράδειγμα 4-17

Το τιμόνι ενός φορτηγού έχει διάμετρο d και για την περιστροφή του ο οδηγός ασκεί ζεύγος δυνάμεων, όπως στο σχήμα. Οι δυνάμεις, τις οποίες ασκεί ο οδηγός έχουν σταθερό μέτρο F. Να βρεθεί η ενέργεια που δαπανά ο οδηγός για στροφή του τιμονιού κατά γωνία θ.

Απάντηση

Η δαπανώμενη ενέργεια ισούται με το έργο των ασκούμενων δυνάμεων. Η ροπή κάθε δύναμης, ως προς τον άξονα του τιμονιού, είναι

$$\tau = F\frac{d}{2}$$

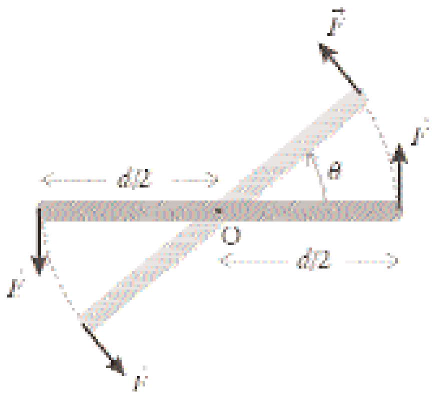
και το έργο της

$$W = \tau\theta = F\frac{d}{2}\theta$$

Συνεπώς, η ζητούμενη ενέργεια είναι

$$E = 2W = 2F\frac{d}{2}\theta$$

$$E = Fd\theta$$



ΣΧΗΜΑ 4.76

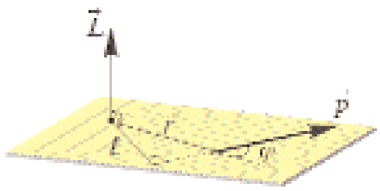
Η ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΚΑΙ Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ

Η στροφορμή στην περιστροφική κίνηση είναι το αντίστοιχο μέγεθος με την ορμή στη μεταφορική κίνησης. Παρακάτω θα ορίσουμε την στροφορμή ενός υλικού σημείου, καθώς και τη στροφορμή στερεού σώματος. Επίσης θα δείξουμε τον αντίστοιχο νόμο διατήρησής της, ένα σπουδαίο εργαλείο για την επίλυση πολλών φυσικών προβλημάτων.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Στροφορμή ενός υλικού σημείου ως προς σημείο Ο, ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης με αρχή το Ο, $\vec{r}$, επί την ορμή του υλικού σημείου $\vec{p}$ (Σχ. 4.77). Δηλαδή

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{4.52}$$


ΣΧΗΜΑ 4.77

Η στροφορμή υλικού σημείου ως προς σημείο Ο, είναι διανυσματικό μέγεθος, κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το Ο και την ορμή του.

Η στροφορμή είναι διανυσματικό μέγεθος με τα εξής χαρακτηριστικά

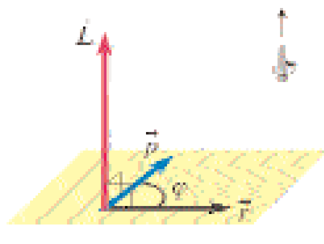
α) ΄Εχει μέτρο

$$L = rp\sin\varphi = mrv\sin\varphi = mv\ell \tag{4.53}$$

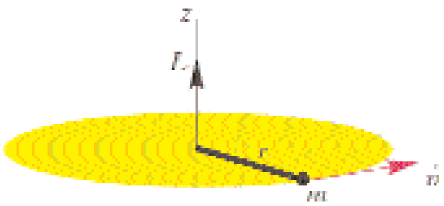
όπου φ η κυρτή γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{p}$.

β) Η διεύνθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Ο και το διάνυσμα της ορμής $\vec{p}$.

γ) Η φορά της προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Τοποθετούμε τον κοχλία κατά μήκος της διεύθυνσης της στροφορμής και τον στρέφουμε ώστε το διάνυσμα $\vec{r}$ να πέσει στο διάνυσμα της ορμής $\vec{p}$ σαρώνοντας την κυρτή γωνία φ. Η φορά της στροφορμής ταυτίζεται με τη φορά κίνησης του δεξιόστροφου κοχλία (Σχ. 4.78). Οι μονάδες της στροφορμής στο SI είναι $\mathrm{kgm^2/s}$ και οι διαστάσεις $\mathrm{L^2MT^{-1}}$.

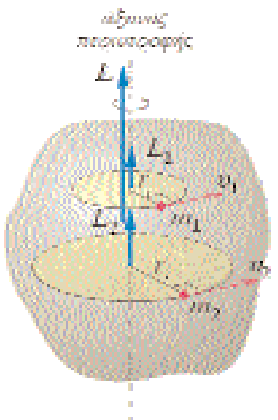

ΣΧΗΜΑ 4.78

Η φορά της στροφορμής προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.



ΣΧΗΜΑ 4.79

Η στροφορμή της μάζας m ως προς άξονα είναι κατά την διεύθυνση του άξονα.



ΣΧΗΜΑ 4.80

Η συνολική στροφορμή του στερεού ως προς τον άξονα ισούται με το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών τμημάτων του.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας m, στο άκρο ράβδου αμελητέας μάζας, το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα z σε επίπεδο κάθετο σ' αυτόν (Σχ. 4.79). Το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου περί τον άξονα περιστροφής είναι

$$\mathrm{L} = rp \quad \text{ή} \quad \mathrm{L} = rmv \quad \text{ή}$$

$$\mathrm{L} = rmr\omega \ \text{ή}$$

$$L = mr^2\omega \tag{4.54}$$

και η φορά της είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 4.79.

Έστω στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται, ως προς ένα σταθερό άξονα (Σχ. 4.80). Η συνολική στροφορμή του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής, είναι το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών τμημάτων του, ως προς τον ίδιο άξονα, γιατί αυτές είναι συγγραμμικές και ομόρροπες, δηλαδή

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + ...$$

Λόγω της σχέσης (4.54) η συνολική στροφορμή L γίνεται

$$L = m_1 r_1^2\omega^2 + m_2 \mathrm{r}_2^2\omega^2 + m_3 r^3\omega^2 + ... = (m_1 r_1^2 + m_2 \mathrm{r}^2 + m_3 \mathrm{r}^3 + ...)\omega \quad \text{ή}$$

$$L = I\,\omega \tag{4.55}$$

Παρατηρούμε ότι η στροφορμή ενός στερεού σώματος για την ίδια γωνιακή ταχύτητα είναι μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδρανείας του.

Όταν ο άξονας περιστροφής του στερεού σώματος είναι σταθερός, η ροπή αδρανείας είναι σταθερή, επομένως από τη σχέση (4.55) έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

Με βοήθεια της σχέσης (4.47) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \tau \tag{4.56}$$

Η σχέση (4.56) είναι ο νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή του στερεού σώματος σε πιο γενική μορφή, αντίστοιχος με την μορφή $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ολ}$ του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση. Αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά το σύστημα σωμάτων (ειδική περίπτωση είναι το στερεό σώμα) και διατυπώνεται ως εξής: "Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων, ισούται με τη συνολική ροπή, η οποία είναι το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων.

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Εάν σε ένα σύστημα σωμάτων η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν, από τη σχέση (4.56) έχουμε

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{ή} \quad L = \text{σταθ.} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{I\,\omega = \text{σταθ.}} \tag{4.57}$$

Δηλαδή η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή. Το αποτέλεσμα αυτό είναι η αρχή διατήρησης της στροφορμής και είναι αντίστοιχη της αρχής διατήρησης της ορμής στη μεταφορική κίνηση. Από τη σχέση (4.57) έχουμε ότι, αν σε ένα σύστημα σωμάτων που δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις μεταβληθεί η ροπή αδρανείας, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητα, ώστε η στροφορμή να παραμένει σταθερή. Δηλαδή αν αρχικά ήταν I_1 και ω_1 η ροπή αδρανείας και η γωνιακή ταχύτητα αντίστοιχα, και τελικά γίνουν I_2 και ω_2, ισχύει

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

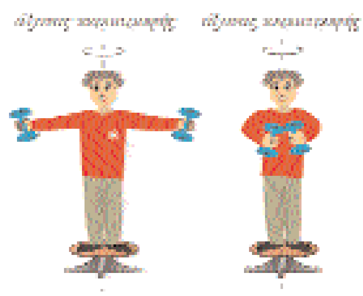
Το παραπάνω συμπέρασμα εκμεταλλεύονται οι αθλητές των καταδύσεων, όπου στις διάφορες επιδείξεις κουλουριάζονται μικραίνοντας την ροπή αδρανείας τους, με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής τους ταχύτητας (Σχ. 4.81).

ΣΧΗΜΑ 4.81

Για να αυξήσει ο δύτης τη γωνιακή ταχύτητα κατά την εκτέλεση ελεύθερης κατάδυσης μειώνει τη ροπή αδρανείας του συσπειρώνοντας το σώμα του.

Παράδειγμα 4-18

Μαθητής στέκεται στο κέντρο ενός περιστρεφόμενου (χωρίς τριβές) σκαμνιού, διατηρώντας τεντωμένα τα χέρια του και κρατώντας στο καθένα έναν αλτήρα μάζας 4,0 kg Ο μαθητής στρέφεται εκτελώντας μισή στροφή κάθε δευτερόλεπτο. Πόσες στροφές θα εκτελεί ανά δευτερόλεπτο όταν συσπειρώσει τα χέρια του; Να βρεθεί ακόμα η αρχική και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος. Η ροπή αδράνειας του μαθητή (χωρίς αλτήρες) μαζί με το στρεφόμενο τμήμα του σκαμνιού ως προς τον άξονα περιστροφής, με τα χέρια τεντωμένα είναι 3,0 kg·m^2, ενώ με τα χέρια συσπειρωμένα 2,5 kg·m^2. Αρχικά κάθε αλτήρας απέχει 1,0 m από τον άξονα περιστροφής, ενώ τελικά 0,20 m.



ΣΧΗΜΑ 4.82

Απάντηση

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, η στροφορμή του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής, διατηρείται.

Άρα

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{I}$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα των ροπών του μαθητή - σκαμνιού και των αλτήρων, άρα

$$I_1 = 3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2\times(4\ \text{kg})\times(1\ \text{m})^2 = 11\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_2 = 2{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2\times(4\ \text{kg})\times(0{,}2\ \text{m})^2 = 2{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Η αρχική συχνότητα περιστροφής είναι

$$f_1 = 0{,}5\ \frac{\text{στροφές}}{\text{δευτερόλεπτο}} = 0{,}5\,\text{Hz}$$

Τέλος αν f_2 η τελική συχνότητα περιστροφής, η σχέση (I) δίνει

$$I_1 \, 2\pi f_1 = I_2 \, 2\pi f_2 \qquad ή$$

$$I_1 f_1 = I_2 f_2 \qquad ή$$

$$f_2 = \frac{I_1 f_1}{I_2} = \frac{11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 0{,}5 \text{ Hz}}{2{,}8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \qquad ή$$

$$f_2 = 2{,}0 \text{ Hz}$$

Δηλαδή όταν ο μαθητής συσπειρώσει τα χέρια του εκτελεί 2 περιστροφές ανά δευτερόλεπτο.

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 (2\pi v_1)^2 = 2 I_1 \pi^2 v_1^2$$

$$K_1 = 2 \times (11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \times 3{,}14^2 \times (0{,}5 \text{ Hz})^2$$

$$K_1 = 54 \text{ J}$$

Όμοια η τελική κινητική ενέργεια είναι

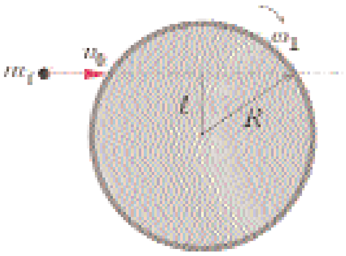
$$K_2 = 2 I_2 \pi^2 v_2^2$$

$$K_2 = 2\,(2{,}8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\; 3{,}14^2 \,(2{,}0 \text{ Hz})^2$$

$$K_2 = 220 \text{ J}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται γιατί ο μαθητής παράγει έργο (δαπανά ενέργεια) για την συσπείρωση των χεριών του.

Παράδειγμα 4-19



ΣΧΗΜΑ 4.83

Το βλήμα του σχήματος έχει μάζα $m_1 = 0{,}0200$ kg και κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0 = 200$ m/s σε διεύθυνση που απέχει απόσταση $\ell = 0{,}300$ m από τον άξονα του τροχού. Αρχικά ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 6{,}00$ rad/s γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Η ακτίνα του τροχού είναι $R = 0{,}500$ m και η μάζα του, η οποία είναι συγκεντρωμένη σχεδόν εξ' ολοκλήρου στην περιφέρεια, είναι $m_2 = 2{,}00$ kg. Να υπολογίσετε:

α) Τη στροφορμή του βλήματος και του τροχού πριν το βλήμα καρφωθεί στον τροχό

β) Την γωνιακή ταχύτητα αφού το βλήμα καρφωθεί στην περιφέρεια του τροχού του.

<u>Απάντηση</u>

α) Η αρχική στροφορμή του βλήματος είναι

$$L_1 = m_1 v_0 \ell \qquad ή$$

$$L_1 = 0{,}0200 \times 200 \times 0{,}300 \text{ k}$$

$$L_1 = 1{,}2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Επειδή η μπάλα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, η ροπή αδράνειάς του είναι

$$I = m_2 R^2 = 2{,}00 \times 0{,}500^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad ή$$

$$I = 0{,}500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

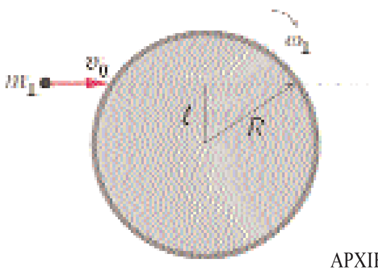
Άρα η στροφορμή του τροχού είναι

$$L_2 = I\omega_1 \quad \text{ή} \quad L_2 = (0{,}500 \cdot 6{,}00)\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \quad \text{ή}$$

$$L_2 = 3{,}00\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

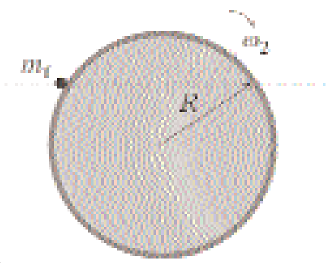
β) Η ροπή αδρανείας μετά την κρούση είναι

$$I' = \sum m_i r_i^2 = m_2 R^2 + m_1 R^2 \quad \text{ή}$$



ΑΡΧΙΚΑ

ΣΧΗΜΑ 4.84



ΤΕΛΙΚΑ

ΣΧΗΜΑ 4.85

$$I' = (0{,}500 + 0{,}0200 \cdot 0{,}500^2)\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \quad \text{ή} \quad I' = 0{,}505\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε

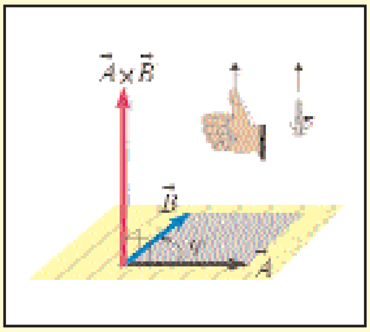
$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad L_1 + L_2 = I' \cdot \omega_2 \quad \text{ή}$$

$$(1{,}20 + 3{,}00)\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = 0{,}505\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \cdot \omega_2 \quad \text{ή}$$

$$\omega_2 = 8{,}32\ \text{rad/s}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων.



Προκειμένου να ορίσουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{A}$, $\vec{B}$ τα μεταφέρουμε παράλληλα και τα σχεδιάζουμε με κοινή αρχή.

Ως εξωτερικό γινόμενο $\vec{A} \times \vec{B}$ των διανυσμάτων $\vec{A}$, $\vec{B}$ ορίζουμε ένα άλλο διάνυσμα $\vec{\Gamma}$,

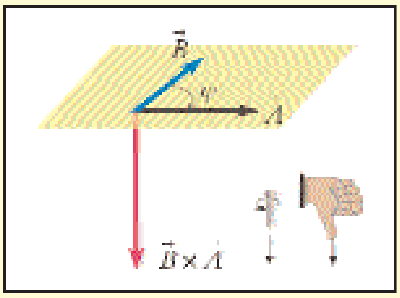
$$\vec{\Gamma} = \vec{A} \times \vec{B}$$

με τα παρακάτω χαρακτηριστικά

i) το μέτρο του $\vec{\Gamma}$ είναι

$$\Gamma = A\,B \sin\varphi$$

Η γωνία φ είναι η μικρότερη γωνία, που διαγράφεται από το $\vec{A}$ κατά την στροφή του προς το $\vec{B}$. Παρατηρούμε ότι το μέτρο Γ ισούται με το εμβαδό του σκιασμένου παραλληλογράμμου.



ii) Η διεύθυνση του $\vec{\Gamma}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{A}$, $\vec{B}$

iii) Η φορά του $\vec{\Gamma}$ καθορίζεται από τον παρακάτω κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας.

Κανόνας δεξιού χεριού

Τοποθετούμε τη δεξιά παλάμη, ώστε τα δάκτυλα να δείχνουν τη φορά διαγραφής της γωνίας φ και τότε ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του $\vec{\Gamma}$.

Κανόνας δεξιόστροφης βίδας

Το $\vec{\Gamma}$ έχει τη φορά προς την οποία προχωρά η δεξιόστροφη βίδα, όταν αυτή στρέφεται προς τη φορά διαγραφής της φ.

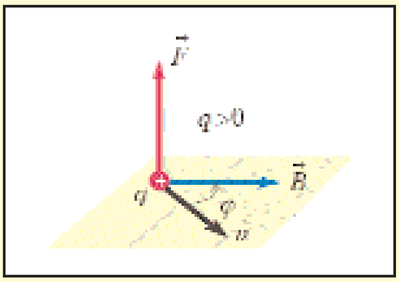
Προφανώς είναι

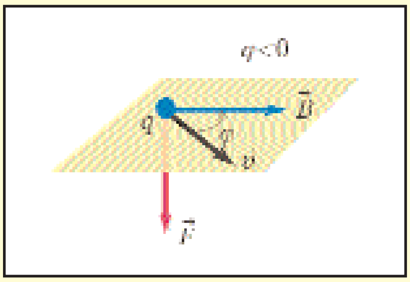
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Δηλαδή στο εξωτερικό γινόμενο παίζει ρόλο η σειρά γραφής των διανυσμάτων (Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα).

Ας θυμηθούμε για παράδειγμα τη μαγνητική δύναμη που δέχεται κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

Το μέτρο της δύναμης αυτής είναι





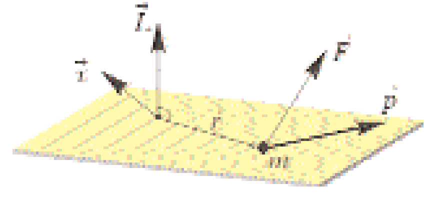
$$F = |q|\, \upsilon\, B \sin\varphi$$

η διεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{B}$. Η φορά της δύναμης καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιου χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας και από το πρόσημο του φορτίου. Συνεπώς μπορούμε να γράφουμε

$$\vec{F} = q\,\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

Επομένως, έχουμε δύο ειδών γινόμενα μεταξύ δύο διανυσμάτων, το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο. Το εσωτερικό γινόμενο είναι μονόμετρο μέγεθος, ενώ το εξωτερικό είναι διανυσματικό μέγεθος.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ



ΣΧΗΜΑ Ι

Η ροπή της δύναμης και η στροφορμή του σώματος δεν είναι κατ' ανάγκη ομόρροπα διανύσματα.

Στο σωμάτιο του σχήματος (Ι) δρα δύναμη $\vec{F}$. Αν $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του και $\vec{p}$ η ορμή του, η στροφορμή του σώματος περί σημείου Ο δίνεται από τη σχέση

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad \text{ή}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{ή}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\upsilon} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Όμως $\vec{\upsilon} \times \vec{p} = 0$, διότι τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$ η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ περί το 0. Συνεπώς

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Αν έχουμε σύστημα πολλών σωματίων έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{ολ}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{ολ} \qquad (\alpha)$$

όπου η $\vec{L}_{ολ}$ είναι η συνολική στροφορμή και $\vec{\tau}_{ολ}$ η συνολική ροπή, ορισμένες και οι δύο ως προς σημείο Ο. Η σχέση (α) είναι ο νόμος του Νεύτωνα στη γενική του μορφή.

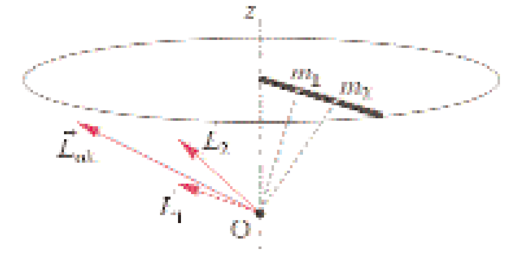
Στο κυρίως κείμενο δείξαμε το νόμο του Νεύτωνα (σχέση 4.56) θεωρώντας την κίνηση γύρω από σταθερό άξονα. Παρακάτω θα δείξουμε ότι η σχέση (4.56) απορρέει από τη γενική σχέση (α).

Όταν η ομογενής ράβδος του σχήματος ΙΙ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z, οι στροφορμές $\vec{L}_i$ των στοιχειωδών τμημάτων της ράβδου m_i περί το σημείο Ο είναι όπως στο σχήμα ΙΙ. Συνεπώς η ολική στροφορμή $\vec{L}_{ολ} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots$ θα έχει διεύθυνση διάφορη του άξονα z.

Ας υπολογίσουμε τη συνιστώσα της στροφορμής στον άξονα z, την $L_{ολ,z}$. Από το σχήμα ΙΙΙ είναι

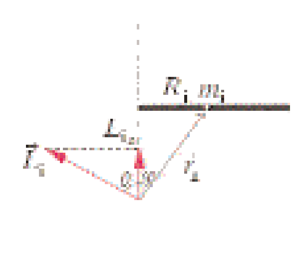
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad \text{ή}$$

$$L_i = r_i m_i \, \upsilon_i$$



ΣΧΗΜΑ ΙΙ

Στροφορμή της ράβδου περί του Ο έχει διεύθυνση διαφορετική από αυτή του άξονα περιστροφής.



ΣΧΗΜΑ ΙΙΙ

Η συνιστώσα της στον άξονα ισούται με τη στροφορμή περί του άξονα.

Έχουμε

$$L_{\mathrm{i\,z}} = L_{\mathrm{i}}\cos\theta = L_{\mathrm{i}}\sin\varphi = r_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \upsilon_{\mathrm{i}} \sin\varphi =$$
$$= R_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} \upsilon_{\mathrm{i}} = R_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} R_{\mathrm{i}}\, \omega = m_{\mathrm{i}} R_{\mathrm{i}}^2\, \omega$$

Ισχύει

$$\varphi + \theta = \pi/2 \quad \text{και} \quad r_{\mathrm{i}} \sin\varphi = R_{\mathrm{i}}$$

Συνεπώς

$$L_{\mathrm{o\lambda\,z}} = m_1 R_1^2 \omega + m_2 R_2^2 \omega + \dots = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots)\,\omega \ \text{ ή}$$
$$L_{\mathrm{o\lambda,\,z}} = I \cdot \omega \qquad (\beta)$$

όπου I η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα z. Δηλαδή η στροφορμή περί τον άξονα, ισούται με την προβολή της στροφορμής ως προς το σημείο Ο, στον άξονα.

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}L_{\mathrm{o\lambda\,z}}}{\mathrm{d}t} = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad (\gamma)$$

Από την διανυσματική ισότητα $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{o\lambda}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\mathrm{o\lambda}}$ προκύπτει ότι

$$\frac{\mathrm{d}L_{\mathrm{o\lambda\,z}}}{\mathrm{d}t} = \tau_{\mathrm{o\lambda\,z}} \qquad (\delta)$$

Συνδιάζοντας την (γ) και την (δ) έχουμε

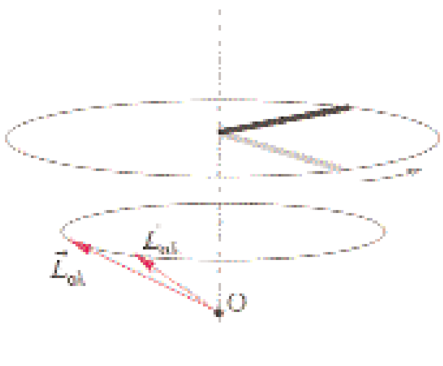
$$\tau_{\mathrm{o\lambda\,z}} = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

η οποία είναι η σχέση (4.56) επειδή η προβολή της ροπής $\tau_{\mathrm{o\lambda z}}$ είναι η συνολική ροπή των δυνάμεων, ως προς τον άξονα z.

Ακόμη αν η ράβδους του σχήματος ΙΙ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, είναι $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$ και συνεπώς $\tau_{\mathrm{o\lambda z}} = 0$. Όμως έχουμε

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$$

επειδή αλλάζει η διεύθυνση της στροφορμής (Σχ. IV), και συνεπώς $\vec{\tau}_{ολ} \neq 0$. Πράγματι, όταν γυρίζουμε μια ροκάνα, όλοι αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει να ασκούμε ροπή για να κρατάμε σταθερό τον άξονα της ροκάνας.

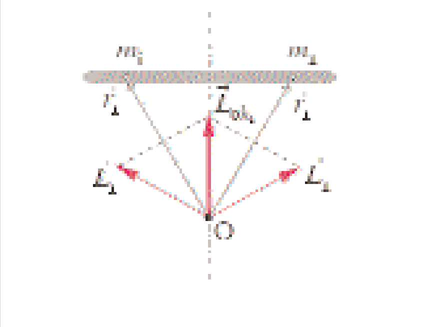


ΣΧΗΜΑ IV

Αν και η ράβδος κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, η συνολική στροφορμή περί του Ο μεταβάλλεται. Η στροφορμή περί του άξονα διατηρείται σταθερή.

Αν ο άξονας περιστροφής για την ράβδο είναι η μεσοκάθετος της ράβδου, τότε λόγω συμμετρίας όπως φαίνεται στο σχήμα V (υπολογίζοντες συνολική ροπή μαζών συμμετρικών ως προς τον άξονα), η συνολική στροφορμή έχει την διεύθυνση του άξονα *z*, ο οποίος τότε ονομάζεται και κύριος άξονας. Συνεπώς τότε έχουμε

$$L = I\omega$$



ΣΧΗΜΑ V

Η συνολική στροφορμή περί του Ο ταυτίζεται με τη ροπή περί του άξονα.

Αν η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή είναι και $\vec{L}$ = σταθ. Άρα

$$\frac{d\vec{L}_{ολ}}{dt} = 0$$

και επομένως

$$\tau_{ολ} = 0$$

Δηλαδή δεν ασκείται καμμιά ροπή στη ράβδο. Όλα τα πιο πάνω συμπεράσματα γενικεύονται για οποιοδήποτε στερεό σώμα. Αποδεικνύεται ότι, οποιοδήποτε στερεό σώμα έχει τουλάχιστον δύο κύριους άξονες. Όταν το στερεό σώμα έχει άξονες συμμετρίας, τότε κάθε άξονας συμμετρίας είναι και κύριος άξονας.

Εφαρμογή του φαινομένου των κυρίων αξόνων, έχουμε στην περίπτωση που περιστρέφουμε την μπάλα μπάσκετ και καταφέρνουμε να περιστρέφεται πάνω στο δάκτυλό μας. Ακόμη η ζυγοστάθμιση των τροχών είναι μια διαδικασία, κατά την οποία τροποποιείται η ροπή αδρανείας τους, ώστε ο άξονας περιστροφής τους να γίνει κύριος άξονας και να δέχεται, όσο το δυνατόν, λιγότερες καταπονήσεις.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΜΕΓΕΘΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ
Μετατόπιση Δx	Γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$
Ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $a = \frac{dv}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Μάζα M	Ροπή αδράνειας $I = \sum m_i R_i^2$
Δύναμη F	Ροπή $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Ορμή $p = mv$	Στροφορμή $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
2ος Νόμος κίνησης $\Sigma F = \frac{dP}{dt}$ ή $\Sigma F = ma$	2ος Νόμος κίνησης $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ ή $\Sigma\tau = I\alpha$
Έργο σταθερής δύναμης $W = F\,\Delta x$	Έργο σταθερή ροπής $W = \tau\,\Delta\theta$
Ισχύς $P = F\upsilon$	Ισχύς $P = \tau\omega$
Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας $\Sigma W = \frac{1}{2} M v_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} M v_{\alpha\rho\chi}^2$	Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας $\Sigma W = \frac{1}{2} I \omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\alpha\rho\chi}^2$
Αρχή διατήρησης ορμής Αν $\sum \tau_{\varepsilon\xi} = 0$ τότε $p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda}$	Αρχή διατήρησης στροφορμής Αν $\sum \tau_{\varepsilon\xi} = 0$ τότε $L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

❑ Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας συστήματος σωματίων είναι

$$x_{cm} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$$

$$z_{cm} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}$$

Η δυναμική ενέργεια στερεού σώματος, μάζας M, δίνεται από τη σχέση

$$U = Mg\,y_{cm}$$

όπου y_{cm} η συντεταγμένη του κέντρου μάζας του σώματος στον κατακόρυφο άξονα y. Στο επίπεδο xOz θεωρούμε $U = 0$

❑ Οι εξισώσεις ορισμού της γωνιακής ταχύτητας ω και της γωνιακής επιτάχυνσης α είναι

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

❑ Ροπή αδρανειάς ενός στερεού σώματος, ως προς κάποιο άξονα, ονομάζουμε το άθροισμα των γινομένων των μαζών των σωματίων, απ'τα οποία αποτελείται το σώμα, επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα.

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

❑ Η κινητική ενέργεια στερεού σώματος, που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του σώματος και I η ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα περιστροφής

❑ Η ροπή αδρανείας I_{cm} σώματος, μάζας M, ως άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και η ροπή αδρανείας I_p του σώματος, ως προς οποιονδήποτε άξονα παράλληλο προς τον προηγούμενο συνδέονται με τη σχέση

$$I_p = I_{cm} + M d^2$$

όπου d η απόσταση των δύο αξόνων. Η παραπάνω πρόταση ονομάζεται θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner)

❑ Η κινητική ενέργεια σώματος, που εκτελεί επίπεδη κίνηση, έχει δύο προσθετέους. Ο ένας ισούται με την κινητική ενέργεια περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του σώματος και ο άλλος ισούται με την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2 + \frac{1}{2} M\,\upsilon_{cm}^2$$

❑ Η ροπή δύναμης $\vec{F}$, ως προς σημείο Ο, ορίζεται, ως προς το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της $\vec{F}$.
Η ροπή δύναμης περί άξονα ορίζεται ως το γινόμενο της δύναμης επί τον μοχλοβραχίονά της.

$$\tau = F\,\ell$$

❑ Ο νόμος του Νευτωνα για την περιστροφή στερεού σώματος, γύρω από σταθερό άξονα, έχει την μορφή

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

όπου $\Sigma\tau$ το άθροισμα των ροπών περί του άξονα των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο στερεό σώμα, I η ροπή αδρανείας του, ως προς τον άξονα περιστροφής και α η γωνιακή του επιτάχυνση.

❑ Οι συνθήκες για την ισορροπία στερεού σώματος είναι

$$\Sigma F = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma\tau = 0$$

❑ Το έργο σταθερής ροπής τ για γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ είναι

$$\mathrm{d}W = \tau\, d\,\theta$$

Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, για σώμα που στρέφεται γύρω απο σταθερό άξονα, έχει τη μορφή

$$\Sigma W = \frac{1}{2} I\,\omega^2_{\text{τελ}} - \frac{1}{2} I\,\omega^2_{\text{αρχ}}$$

❑ Η στροφορμή σωματίου με ορμή $\vec{p}$ και διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ορίζεται ως προς την αρχή των αξόνων Ο, ως το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Η στροφορμή στερεού σώματος περί άξονα, ως προς τον οποίο στρέφεται το σώμα ισούται με το γινόμενο της ροπή αδράνειας, ως προς αυτόν τον άξονα, επί τη γωνιακή ταχύτητα.

$$L = I\,\omega$$

❑ Ο νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή στερεού γύρω από άξονα είναι ο εξής

$$\Sigma\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

όπου $\Sigma\,\tau$ είναι η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων περί του άξονα περιστροφής.

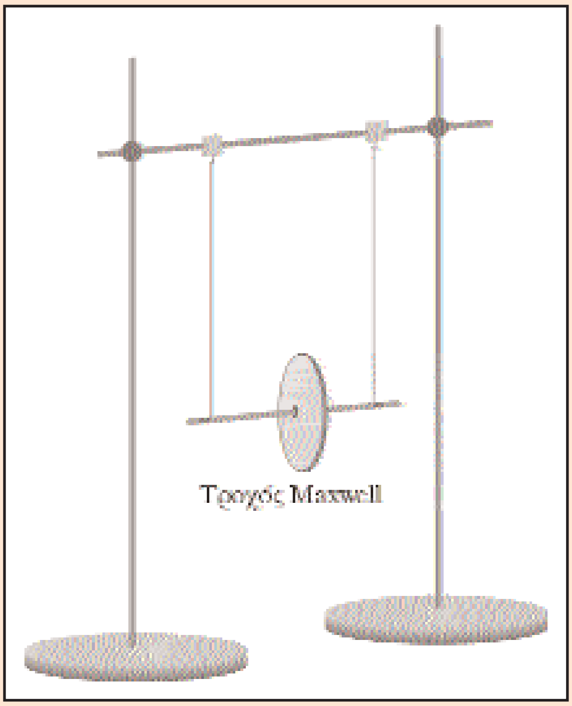
❑ Η αρχή διατήρησης της στροφορμής διατυπώνεται ως εξής: (για σημείο ή για άξονα)

“Αν το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται σε ένα σύστημα είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή με το χρόνο.

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ

1. Ο ΤΡΟΧΟΣ ΤΟΥ MAXWELL

Ο τροχός του Maxwell είναι ένας μεταλλικός τροχός με άξονα. Ο άξονας είναι δεμένος από οριζόντιο στήριγμα με δύο σχοινιά. Αυτή η διάταξη υπάρχει στο εργαστήριό σας. Τυλίξτε τα σχοινιά γύρω από τον άξονα, ώστε ο τροχός να ανέλθει όσο το δυνατόν ψηλότερα και κατόπιν αφήστε τον τροχό ελεύθερο. Παρατηρείστε για αρκετή ώρα την κίνηση του τροχού. Ποιές ενεργειακές μετατροπές διαπιστώνετε;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση.
"Η κίνηση του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων είναι ίδια με την κίνηση (α) …… μάζας ίσης με την συνολική μάζα του συστήματος, αν ασκούνται πάνω του όλες (β) …… που ασκούνται στα σωμάτια του συστήματος. Επομένως για την μελέτη της κίνησης του κέντρου μάζας εφαρμόζουμε το (γ) …… δηλ. τη σχέση (δ) ……".

2

Πετάμε μια χειροβομβίδα, η οποία εκρήγνυται στον αέρα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή όσον αφορά την κίνηση του κέντρου μάζας, αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα.

(α) Η κίνηση του κέντρου μάζας δεν μπορεί να προβλεφθεί, διότι τα κομμάτια της βόμβας αποκτούν επιπλέον κινητική ενέργεια από την έκρηξη

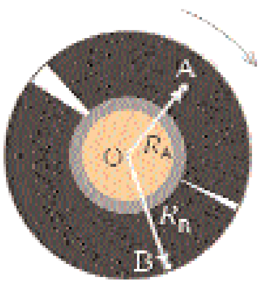
(β) Το κέντρο μάζας θα φτάσει τώρα πιο μακρυά απ' ότι θα έφτανε αν η χειροβομβίδα δεν εκρήγνυντο, διότι αποκτά πρόσθετη κινητική ενέργεια.

(γ) Το κέντρο μάζας θα διαγράψει την ίδια τροχιά είτε εκραγεί η χειροβομβίδα είτε όχι, διότι η μόνη εξωτερική δύναμη είναι το συνολικό της βάρος.

(δ) Επειδή η χειροβομβίδα διαμελίζεται, παύει να είναι στερεό σώμα, άρα δεν υφίσταται κέντρο μάζας.

3

Δίσκος πικάπ στρέφεται με σταθερή γωνιακή

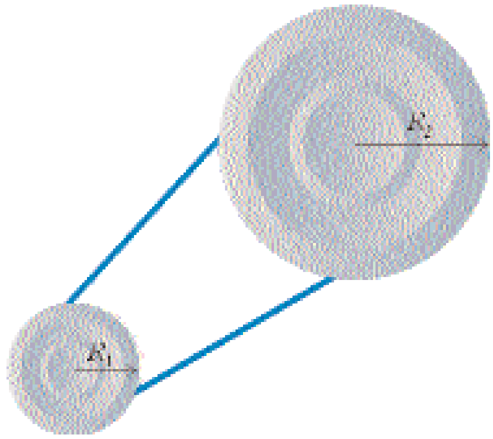


ταχύτητα. Δύο σημεία A, B του δίσκου απέχουν από το κέντρο O απόσταση $R_A = 2{,}0$ cm και $R_B = 6{,}0$ cm. Ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων των σημείων υ_A/υ_B είναι

(α) 3 (β) 1 (γ) 1/3 (δ) 1/9

4

Δύο τροχοί συνδέονται με ιμάντα και περιστρέφονται χωρίς να γλυστρά ο ιμάντας. Ο ένας τροχός έχει



ακτίνα $R_1 = 10$ cm και γωνιακή ταχύτητα ω_1 και ο άλλος τροχός έχει ακτίνα $R_2 = 20$ cm και γωνιακή ταχύτητα ω_2. Ο λόγος ω_1/ω_2 είναι:

(α) 1/4 (β) 1/2 (γ) 1 (δ) 2

5

Πώς ορίζεται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα και πώς ως προς σημείο;

6

Ένας άνθρωπος είναι όρθιος και κρατάει στο κάθε χέρι του από ένα βαράκι. Η ροπή αδράνειας ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κεφάλι του είναι μεγαλύτερη

(α) Όταν έχει τα χέρια του στην πρόταση

(β) Όταν έχει τα χέρια του στην έκταση

(γ) Και τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις είναι ίδια.

Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

7

Δύο διαφορετικοί παράλληλοι άξονες απέχουν αντίστοιχα από το κέντρο μάζας του στερεού αποστάσεις d_1 και d_2 με $d_1 > d_2$. Αν I_1 και I_2 είναι οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες αυτούς, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή

(α) $I_1 > I_2$

(β) $I_1 < I_2$

(γ) Για να συγκρίνουμε τις ροπές αδρανείας πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή μάζας του στερεού.

Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

8

Ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το ΚΜ. Φανταστείτε ότι το ίδιο σώμα στρέφεται περί άξονα παράλληλο προς τον πρώτο που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η ενέργεια περιστροφής ως προς τον αρχικό άξονα που περνά από το κέντρου μάζας είναι

(α) μεγαλύτερη
(β) μικρότερη
(γ) ίδια

Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

9

Για δύο περιστρεφόμενα στερεά, γύρω από σταθερούς άξονες, η ροπή αδράνειας του πρώτου είναι η μισή από αυτή του δεύτερου και η γωνιακή ταχύτητα διπλάσια. Η σχέση που συνδέει τις κινητικές τους ενέργειες είναι

(α) $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{1}{2}$ (γ) $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{1}{4}$

(β) $\dfrac{K_1}{K_2} = 1$ (δ) $\dfrac{K_1}{K_2} = 2$

10

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση.
“Κατά την σύνθετη κίνηση ενός στερεού, η συνολική κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση:

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2$$

όπου ο πρώτος όρος δίνει την (α) …… και ο δεύτερος την (β) …… Όταν έχουμε καθαρά μεταφορική κίνηση ο πρώτος όρος μηδενίζεται διότι είναι μηδέν η ποσότητα (γ) ……”.

11

Για ένα στερεό σώμα που κινείται, χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

(α) Η συνολική κινητική ενέργεια του στερεού δίνεται πάντα από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^2$$

(β) Ο τύπος της κινητικής ενέργειας

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^2$$

δεν ισχύει όταν το στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, διότι τότε η κινητική ενέργεια είναι $K = \dfrac{1}{2} I\omega^2$, όπου I η ροπή αδρανείας ως προς τον σταθερό άξονα

(γ) Οι σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^2 \quad \text{και} \quad K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

όταν το στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα (στιγμιαία ή μόνιμα) είναι και οι δύο σωστές και μάλιστα από την μια προκύπτει η άλλη.

12

Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου αφήνουμε να κυλίσουν δύο συμπαγείς σφαίρες α, β από το ίδιο υλικό. Η σφαίρα α έχει διπλάσια ακτίνα από τη β και η ροπή αδράνειας σφαίρας μάζας m και ακτίνας R, ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της είναι $\dfrac{2}{5} m R^2$. Ποιό απ’ τα παρακάτω είναι σωστό;

(α) Με μεγαλύτερη ταχύτητα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου η α σφαίρα.
(β) Με μεγαλύτερη ταχύτητα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου η σφαίρα β.
(γ) Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου φθάνουν και οι δύο σφαίρες με την ίδια ταχύτητα.

13

Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου αφήνοντας να κυλίσουν χωρίς ολίσθηση δύο σφαίρες α, β ίδιας μάζας και ίδιας ακτίνας. Η σφαίρα α είναι συμπαγής και η β κοίλη και λεπτότοιχη. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές.

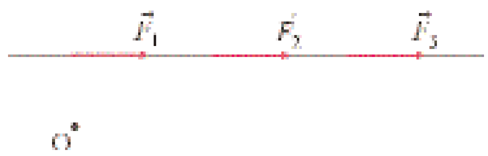
(α) Μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ως προς κάποια διαμετρικό άξονα, έχει η σφαίρα α.
(β) Μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς κάποιο διαμετρικό άξονα, έχει η σφαίρα β.
(γ) Με μεγαλύτερη ταχύτητα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου η σφαίρα α.
(δ) Με μεγαλύτερη ταχύτητα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου η σφαίρα β.
(ε) Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου φθάνουν και οι δύο σφαίρες με την ίδια ταχύτητα.

14

Πώς ορίζεται η ροπή δύναμης ως προς άξονα;

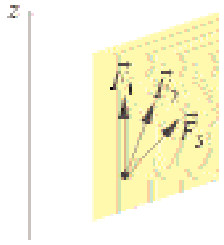
15

Ποια από τις δυνάμεις του σχήματος έχει μεγαλύτερη ροπή ως προς τον κάθετο άξονα στο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Ο; Οι δυνάμεις έχουν ίδιο μέτρο.



16

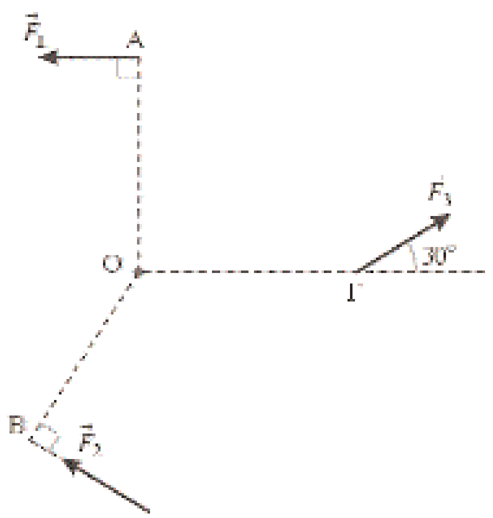
Οι τρεις δυνάμεις του σχήματος είναι ομοεπίπεδες και το επίπεδό τους είναι παράλληλο στον άξονα z. Επίσης τα



μέτρα τους είναι ίσα. Ποια δύναμη έχει μεγαλύτερη ροπή ως προς τον άξονα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

17

Δίνονται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, με ίσα μέτρα και ένα σημείο Ο του επιπέδου τους. Οι αποστάσεις (ΟΑ), (ΟΒ) και (ΟΓ) είναι ίσες



μεταξύ τους. Ποιά (ποιές) από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (σωστές).

(α) Οι ροπές των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ως προς το Ο, έχουν ίσα μέτρα.

(β) Οι ροπές των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$, ως προς το Ο, έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.

(γ) Οι ροπές των $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ως προς το Ο, έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.

(δ) Η ροπή της $\vec{F}_1$ ως προς το Ο είναι διπλάσια κατά μέτρο από τη ροπή της $\vec{F}_3$ περί του Ο.

18

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση.
“Κατά την περιστροφή ενός σώματος γύρω από έναν άξονα, ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας είναι ανάλογος (α) …… και αντιστρόφως ανάλογος (β) ……”.

19

Αντιστοιχίστε τις ποσότητες που αναφέρονται στην περιστροφή στερεού με αυτές της κίνησης υλικού σημείου.

Στερεό σώμα	Υλικό σημείο
τ	m
I	a
ω	Δx
$\Delta\theta$	υ
α	F

20

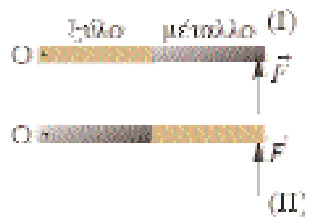
Τροχός στρέφεται γύρω από άξονα κάθετο σ’ αυτόν, που περνά απ’ το κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 5{,}0$ rad/s. Η ροπή αδράνειας του ροχού, ως προς τον άξονα περιστροφής του, είναι $I = 50\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Η σταθερή ροπή που πρέπει να ασκηθεί στον τροχό, ώστε να σταματήσει την περιστροφή του σε 10 s είναι:

(α) 100 N·m (β) 25 N·m

(γ) 1 N·m (δ) 250 N·m

21

Ο μισός χάρακας είναι ξύλινος και ο άλλος μισός



μεταλλικός. Σε ποια περίπτωση η δύναμη F προκαλεί μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση;

(α) στη (I)
(β) στη (II)
(γ) και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια

Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

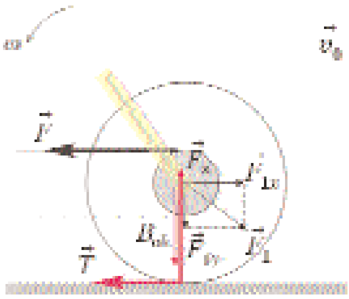
22

Πολλές φορές με την μπάλα ποδοσφαίρου

πετυχαίνουμε το εξής “κόλπο”. Πατάμε την μπάλα κατάλληλα, έτσι ώστε ενώ η μπάλα αρχικά να φεύγει προς τα εμπρός και φτάνει μέχρι ενός σημείου και κατόπιν επιστρέφει πίσω. Εξηγήστε το φαινόμενο.

23

Στο σχήμα παριστάνεται ο πίσω τροχός ποδηλάτου και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτόν.



(α) Εξηγήστε την προέλευση της κάθε δύναμης
(β) Γράψτε τις σχέσεις για την κίνηση του κέντρου μάζας του τροχού
(γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δύναμη T;
(δ) Γράψτε το νόμο του Νεύτωνα για τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του τροχού.
(ε) Ορισμένες φορές, συνήθως στο ξεκίνημα, ο τροχός σπινιάρει, πως εξηγείτε αυτό;

24

Ταυτίζεται πάντα το κέντρο βάρους με το κέντρο μάζας;

25

Μπορεί το κέντρο βάρους ενός στερεού να βρίσκεται εκτός σώματος;

26

Κινούμαστε με ένα ποδήλατο ασκώντας σταθερή δύναμη στα πεντάλ του. Αν αρχικά η ταχύτητα ήταν υ και κατόπιν έγινε 2υ, τί συμβαίνει με την ισχύ που ξοδεύουμε;
(α) διπλασιάζεται
(β) μένει σταθερή
(γ) υποδιπλασιάζεται
(δ) τετραπλασιάζεται

27

Πώς ορίζεται η στροφορμή ως προς σημείο, και πως ως προς άξονα;

28

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:
"Όταν σε ένα σύστημα σωμάτων η συνισταμένη ροπή είναι μηδέν, τότε η (α) ...... παραμένει σταθερή. Αν αυξηθεί η ροπή αδρανείας του συστήματος θα (β) ...... η γωνιακή ταχύτητα και αντιστρόφως".

29

Αντιστοιχείστε τα φυσικά μεγέθη με τις μονάδες τους

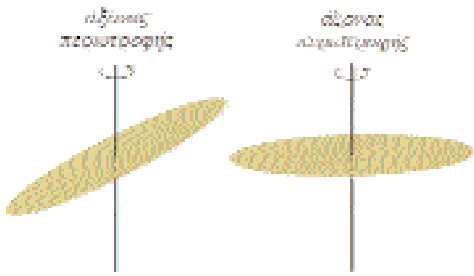
Φυσικά μεγέθη	Μονάδες
ορμή	kg m/s
Στροφορμή	kg m^2
ροπή	J
Έργο	kg m^2/s
Ροή αδράνειας	N m

30

Στην περιστρεφόμενη οριζόντια ρόδα της παιδικής χαράς, ένα παιδάκι προχωράει από τον άξονα περιστροφής προς τα καθίσματα. Τι θα συμβεί με τη γωνιακή ταχύτητα της ρόδας;

31

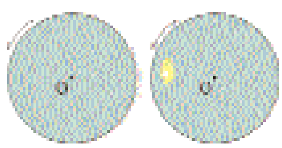
Οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με την γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τους αντίστοιχους άξονες. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;



(α) Η στροφορμή του πρώτου δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μεγαλύτερη από αυτή του δεύτερου δίσκου
(β) Για να τεθεί σε περιστροφή ο δεύτερος δίσκος δαπανάμε περισσότερη ενέργεια απ' ότι για τον πρώτο.
(γ) Αν υπάρχουν ίδιες τριβές ο πρώτος δίσκος θα σταματήσει νωρίτερα απ' το δεύτερο

32

Δύο όμοιοι δίσκοι είναι κατακόρυφοι και στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιους άξονες, οι οποίοι

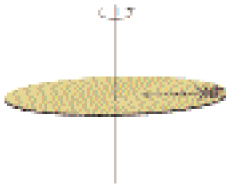


διέρχονται από τα κέντρα τους. Στον δεύτερο δίσκο έχουμε κολλήσει μια τσίχλα. Χαρακτηρίστε σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις

(α) Η στροφορμή διατηρείται και στους δύο δίσκους
(β) Η στροφορμή διατηρείται σταθερή στον πρώτο δίσκο και μεταβάλλεται στο δεύτερο
(γ) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται στον πρώτο δίσκο, ενώ μειώνεται στο δεύτερο
(δ) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται και στους δύο δίσκους

33

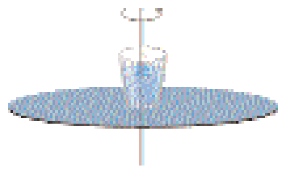
Ο δίσκος περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς τριβές γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, που



διέρχεται από το κέντρο του, και η κατσαρίδα πλησιάζει προς τον άξονα περιστροφής. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;
(α) Η στροφορμή του συστήματος μειώνεται και η κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή
(β) Η στροφορμή του συστήματος καθώς και η κινητική ενέργεια παραμένουν σταθερές
(γ) Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή ενώ η κινητική του ενέργει αυξάνει
(δ) Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, ενώ η κινητική του ενέργεια μιεώνεται

34

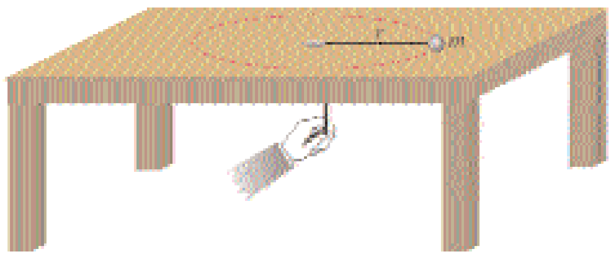
Επάνω στον κυκλικό δίσκο είναι κολημένο ομοκεντρικό κυκλικό δοχείο που περιέχει πάγο. Τριβές δεν υπάρχουν και το σύστημα (μαζί και ο πάγος) περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα,



ο οποίος διέρχεται από το κέντρο τους. Όταν ο πάγος λιώσει η γωνιακή ταχύτητα
(α) θα αυξηθεί
(β) θα ελαττωθεί
(γ) θα παραμείνει ίδια
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

35

Σφαιρίδιο μάζας m έχει τεθεί σε κυκλική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Το σφαιρίδιο συγκρατείται με σχοινί, το οποίο περνά μέσα από μία τρύπα Ο. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του



σφαιριδίου είναι ω και η ακτίνα της τροχιάς του r. Τραβώντας το σχοινί μειώνουμε την ακτίνα περιστροφή στο μισό. Τότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής
(α) θα διπλασιαστεί
(β) θα τετραπλασιαστεί
(γ) θα γίνει μισή
(δ) θα μείνει ίδια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων xOy. Στο επίπεδο των αξόνων βρίσκονται τρια σωμάτια Α, Β, Γ με μάζες αντίστοιχα $m_1 = 1{,}0\ \text{kg}$, $m_2 = 2{,}0\ \text{kg}$, $m_3 = 1{,}0\ \text{kg}$. Οι συντεταγμένες του Α είναι Α ($x_A = 2$ cm, $y_A = 3$ cm) του Β ($x_B = 1$ cm, $y_B = 2$ cm) και του Γ ($x_\Gamma = 4$ cm, $y_\Gamma = 2$ cm) ακριβώς. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας.

2

Μια λεπτή κυλινδρική ράβδος ΑΓ μήκους 100 cm αποτελείται από δύο ομογενή τμήματα ΑΜ και ΜΓ ίδιων διαστάσεων. Το ΑΜ είναι από αργίλιο και το ΜΓ από σίδηρο. Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της ράβδου.
Πυκνότητα αργιλίου: $2{,}70\ \text{g/cm}^3$, πυκνότητα σιδήρου: $7{,}80\ \text{g/cm}^3$

3

Τετραγωνικό πλαίσιο ΑΒΓΔ πλευράς 9 cm αποτελείται από ομογενές κυλινδρικό σύρμα. Αφαιρούμε το σύρμα ΑΔ. Να βρεθεί το κέντρο μάζας του σύρματος που απομένει.

4

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της και η γραμμική

ταχύτητα των σημείων του ισημερινού, ως προς τον άξονά της.
Η ακτίνα της Γης είναι $6{,}4 \times 10^3$ km

5

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δευτερολεπτοδείκτη ενός ρολογιού και η ταχύτητα του άκρου του ίδιου δείκτη αν έχει μήκος 1,5cm.

6

Τροχός ποδηλάτου ακτίνας $R = 0{,}50$ m περιστρέφεται γύρω απ' τον άξονά του (χωρίς να μετατοπίζεται) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 6{,}0$ rad/s. Να βρεθεί η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού.

7

Στις κορυφές Α, Β, Γ ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\alpha = 3{,}0$ m υπάρχουν τρεις σημειακές μάζες $m_A = 1{,}0$ kg, $m_B = 2{,}0$ kg, $m_\Gamma = 3{,}0$ kg. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος των μαζών, ως προς άξονα

(α) κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου που περνά από το Α
(β) κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου που περνά από το περίκεντρο
(γ) που ταυτίζεται με το ύψος του τριγώνου που άγεται από το Α προς την πλευρά ΒΓ.

8

Λεπτή κυκλική στεφάνη μάζας $m = 1{,}0$ kg και ακτίνας $R = 0{,}10$ m στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 4{,}0$ rad/s, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της, που διέρχεται από σημείο της περιφέρειάς της. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της στεφάνης.

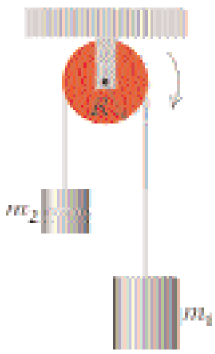
9

Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $l = 2{,}0$ m στέκεται κατακόρυφη πάνω στο έδαφος. Με πόση ταχύτητα φθάνει στο έδαφος η ανώτερη άκρη της ράβδου όταν αυτή ανατρέπεται. (Η άκρη που είναι στο έδαφος δεν μετακινείται). Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το ένα άκρο της είναι:

$$I = \frac{1}{3} m\, l^2 \quad , \qquad g = 10\ \text{m/s}^2$$

10

Τροχαλία μάζας $m = 2{,}0$ kg και ακτίνας R είναι στερεωμένη σε αρκετό ύψος. Ένα αβαρές σχοινί είναι περασμένο από το αυλάκι της τροχαλίας και



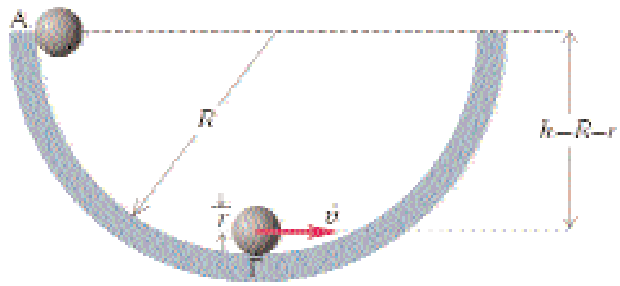
στα άκρα του είναι δεμένα δύο σώματα μαζών $m_1 = 6{,}0$ kg και $m_2 = 3{,}0$ kg τα οποία κρατούνται με το νήμα τεντωμένο. Κάποια στιγμή αφήνουμε τα σώματα. Να βρεθεί η ταχύτητά τους τη στιγμή που το m_1 έχει κατέλθει κατά 6,0 m. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $\frac{1}{2} m R^2$, $g = 10$ m/s². Το σχοινί δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία.

11

Αυτοκίνητο επιταχύνεται ομαλά και η ταχύτητά του αυξάνεται από 6,0 km/h σε 42 km/h μέσα σε 5,0 s. Αν η ακτίνα των τροχών είναι 40 cm, ποιά είναι η γωνιακή τους επιτάχυνση; Οι τροχοί του αυτοκινήτου δεν ολισθαίνουν σε όλη τη διάρκεια της κίνησης.

12

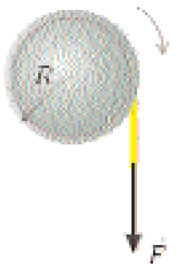
Μικρή συμπαγής σφαίρα ακτίνας $r = 1{,}0$ cm αφήνεται από της θέση Α ημικυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας



$R = 8{,}0$ cm. Η σφαίρα κατεβαίνει κυλώντας χωρίς να ολισθαίνει και στη θέση Γ αποκτά ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Για τη σφαίρα η ροπή αδράνειας, ως προς άξονα, που περνά απ' το κέντρο της είναι $I = \frac{2}{5} m\, r^2$ και ακόμη είναι $g = 10$ m/s². Να βρεθεί η ταχύτητα υ.

13

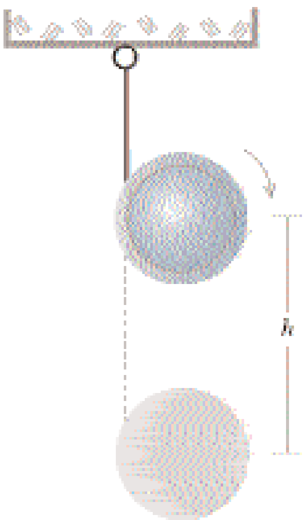
Αμαζο νήμα μεγάλου μήκους είναι τυλιγμένο στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας $R = 0{,}2$ m (ακριβώς). Ο κύλινδρος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές



γύρω από τον άξονά του. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος εφαρμόζεται σταθερή δύναμη $F = 10\,\text{N}$ (ακριβώς), όπως στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, ως προς τον άξονά του δίνεται $I = 2 \times 10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (ακριβώς). Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου και η γωνιακή ταχύτητα μετά $2\,\text{s}$.

14

Άμαζο νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τροχαλία μάζας m και ακτίνας R. Το ένα άκρο του νήματος



είναι στερεωμένο στην οροφή. Αφήνουμε την τροχαλία να κατέλθει και το σχοινί ξετυλίγεται. Να βρεθεί:

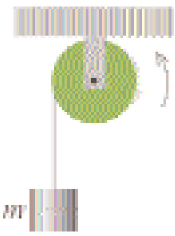
(α) Η επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται το ΚΜ της τροχαλίας.

(β) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της τροχαλίας όταν έχει κατέλθει κατά $h = 0{,}30\,\text{m}$. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας, είναι

$I = \frac{1}{2} m R^2$. Ακόμη να ληφθεί $g = 10\,\text{m/s}^2$

15

Άμαζο σχοινί είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια τροχαλίας, μάζας M και ακτίνας R. Η τροχαλία

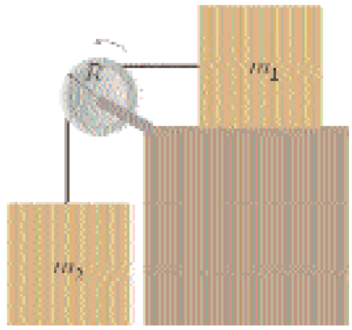


είναι στηριγμένη στην οροφή (όπως στο σχήμα) και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά της, ως προς τον οποίο η ροπή αδράνειάς της είναι $\frac{1}{2} M R^2$.

Σώμα μάζας $m = 2M$ είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη του νήματος. Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο να κατέλθει υπολογίστε την επιτάχυνσή του (το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία). $g = 10\,\text{m/s}^2$

16

Τα σώματα μαζών $m_1 = 1{,}0\,\text{kg}$ και $m_2 = 2{,}0\,\text{kg}$ του σχήματος είναι δεμένα στα άκρα νήματος, που περνά από το αυλάκι τροχαλίας μάζας $M = 2{,}0\,\text{kg}$. Η ροπή

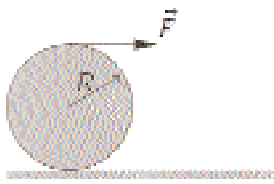


αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $\frac{1}{2} M R^2$. Το σύστημα αφήνεται

ελεύθερο και το σώμα μάζας m_1 κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση των σωμάτων (το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία). Είναι $g = 10\,\text{m/s}^2$

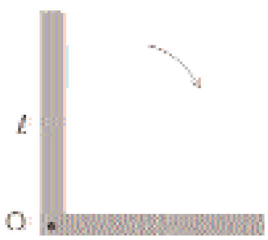
17

Γύρω από ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας m, είναι περιτυλιγμένο ένα σχοινί. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος σε λείο οριζόντιο επίπεδο (βλ.



σχήμα). Έλκουμε μέσω του σχοινιού το δίσκο ασκώντας οριζόντια σταθερή δύναμη F. Προσδιορίστε τη γωνιακή επιτάχυνση, καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Αποδείξτε ότι το έργο που καταναλώνουμε ($W = F \cdot S$, όπου S η μετακίνηση του άκρου του σχοινιού απ' όπου έλκουμε) ισούται με την κινητική ενέργεια που αποκτά ο δίσκος. Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του είναι $I = 1/2\, mR^2$.

18



Η ράβδος του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το O. Εκτρέποντας ελαφρώς την ράβδο από την κατακόρυφη θέση, αυτή κατέρχεται. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη ράβδο, τη στιγμή που η ράβδος γίνεται οριζόντια. Δίνονται το μήκος της ράβδου $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$, η μάζα της $m = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Επίσης η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον συγκεκριμένο άξονα, δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{1}{3} m\ell^2$$

19

Ένας συμπαγής κύλινδρος αφήνεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με τον άξονά του σε οριζόντια θέση. Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης μ μεταξύ επιπέδου και κυλίνδρου, ώστε αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του, $I = mR^2/2$.

20

Αμέσως μετά από κατάλληλο κτύπημα, η μπίλια του μπιλιάρδου ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται, με αρχική ταχύτητα υ_0. Κατόπιν ολισθαίνει και κυλίεται συγχρόνως, μέχρι που η κίνηση γίνεται καθαρή κύλιση. Να αποδείξετε ότι:

(α) τη στιγμή που αρχίζει η καθαρή κύλιση, η ταχύτητα της μπίλιας είναι $\upsilon = 5\upsilon_0/7$.

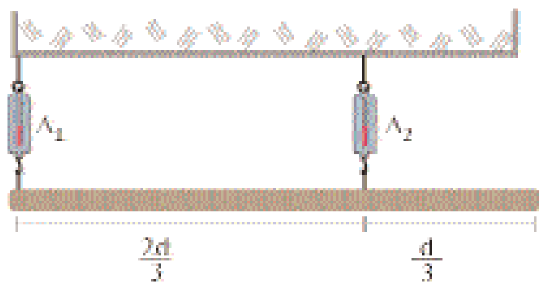
(β) το διάστημα που διανύει η μπίλια κατά την μετάβαση από την καθαρή ολίσθηση έως την καθαρή κύλιση είναι $12\upsilon_0^2/49\,\mu g$, όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, μεταξύ μπίλιας και τσόχας, και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Επίσης η ροπή αδράνειας της μπίλιας είναι $I = (2/5)\, mR^2$, όπου R η ακτίνα της μπίλιας.

21

Μια ομογενής σανίδα ΑΓ, βάρους 100 N είναι αρθρωμένη (με μεντεσέ) στον τοίχο και διατηρείται

οριζόντια υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, που εφαρμόζεται στο Γ και σχηματίζει γωνία 60^o με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί το μέτρο της F.

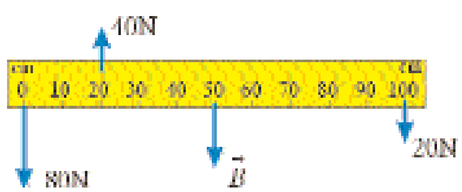
22



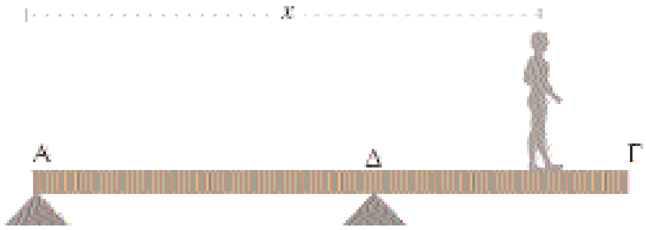
Οριζόντια ομογενής ράβδος βάρους $\vec{B}$ και μήκους d, ισορροπεί κρεμασμένη από την οροφή μέσω δύο δυναμομέτρων Δ_1, Δ_2. Αν F_1 η ένδειξη του δυναμομέτρου Δ_1 και F_2 η ένδειξη του δυναμομέτρου Δ_2, ποιά είναι η τιμή του λόγου F_1/F_2.

23

Οριζόντιος ομογενής κανόνας μήκους 100 cm και βάρους $B = 20\,\mathrm{N}$ ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα και μιας ακόμα

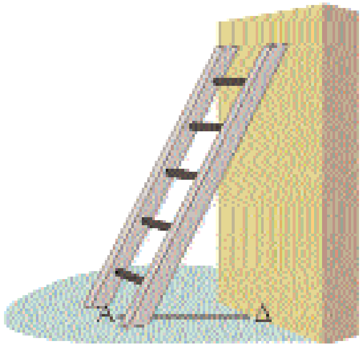


κατακόρυφης δύναμης $\vec{F}$, η οποία δεν φαίνεται. Να προσδιορίσετε τη δύναμη $\vec{F}$.



24

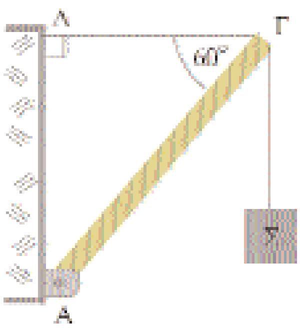
Ομογενής δοκός ΑΓ μήκους 4,0 m και βάρους 900 N είναι οριζόντιος και ακουμπά σε δύο στηρίγματα στα σημεία Α και Δ, όπου (ΑΔ) = 2,5 m.
Ένας άνθρωπος βάρους 7560N αρχίζει να περπατά πάνω στο δοκάρι από το Α προς το Γ.



Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση *x* που θα διανύσει ο άνθρωπος χωρίς να ανατραπεί το δοκάρι.

25

Σκάλα ΑΓ μήκους 5m και βάρους 200 N στηρίζεται σε λείο τοίχο και σε λείο δάπεδο με τη βοήθεια σχοινίου ΑΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σχοίνι ΑΔ έχει μήκος 3,0m και όριο θραύσης 495N. Το κέντρο βάρους της σκάλας είναι το μέσο της.
Ποιά η μέγιστη απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας άνθρωπος βάρους 70 N, ανεβαίνοντας τη σκάλα, χωρίς να σπάσει το σχοινί;

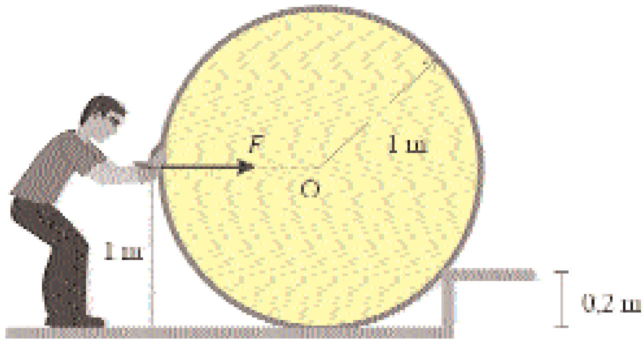


26

Ομογενής ράβδος ΑΓ, βάρους B = 40,0 N στηρίζεται από κατακόρυφο τοίχο μέσω μεντεσέ Α και σχοινιού ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Από το άκρο Γ κρέμεται σώμα Σ βάρους 100,0 N. Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο από το σχοινί και την άρθρωση.

27

Ομογενής κύλινδρος ακτίνας 1m (ακριβώς) και



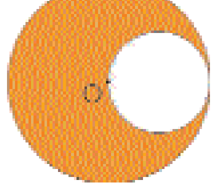
βάρους 1200N ακουμπά στο οριζόντιο δάπεδο και σε ένα σκαλοπάτι ύψους 0,20 m. Εργάτης ασκεί στον κύλινδρο οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 450 N, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Να υπολογισθούν τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν το δάπεδο και το σκαλοπάτι στον κύλινδρο.

28

Μια ανομοιογενής ράβδος ΑΓ έχει μήκος 105 cm. Όταν δεθεί από το Α σε δυναμόμετρο, ενώ το Γ ακουμπά σε λείο δάπεδο, το δυναμόμετρο δείχνει 40 N. Όταν δεθεί από το Γ σε δυναμόμετρο, ενώ το Α ακουμπά σε λείο δάπεδο, το δυναμόμετρο δείχνει 30 N. Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους Κ της ράβδου.

29

Δυο ομογενείς και ισοπαχείς κυκλικοί δίσκοι από το ίδιο υλικο βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και εφάπτονται. Ο πρώτος έχει κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 30 cm, ενώ ο δεύτερος έχει κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα 10 cm. Να βρεθεί το κέντρο βάρους του συστήματος των δύο δίσκων.



Σχήμα Άσκησης 30

30

Από ομογενή κυκλικό δίσκο ακτίνας 12 cm, αφαιρούμε κυκλικό δίσκο με διάμετρο ίση με την ακτίνα του αρχικού δίσκου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί το κέντρο βάρους του κομματιού που απομένει.

31

Διαβάζουμε από ένα περιοδικό ειδικό για αυτοκίνητα ότι το μοντέλο “Alfa Romeo 156. 1.6l” έχει ισχύ 118 ίππους (hp) στις 6200 στροφές ανά λεπτό και ροπή 145 N·m στις 4190 στροφές ανά λεπτό. Αν 1 hp = 746 W, να βρεθούν
(α) Η ροπή στις 6200 στροφές ανά λεπτό.
(β) Η ισχύς στις 4190 στροφές ανά λεπτό.

32

Ο σφόνδυλος ατμομηχανής έχει μάζα 800 kg και ακτίνα 1,0 m. Τη στιγμή $t_0 = 0$, που ο σφόνδυλος στρέφεται εκτελώντας 180 στροφές ανά λεπτό, κλείνεται η βαλβίδα του ατμού, με αποτέλεσμα να αρχίσει η επιβράδυνση του σφονδύλου, λόγω διαφόρων αντιστάσεων. Ο σφόνδυλος σταματά μέσα σε 5 λεπτά ακριβώς. Αν θεωρήσουμε σταθερή τη ροπή των διαφόρων αντιστάσεων, να βρεθούν
(α) Η ροπή των αντιστάσεων
(β) Το έργο αυτής της ροπής και η μέση ισχύς της στη διάρκεια της επιβράδυνση.
(γ) Η στιγμιαία ισχύς της ροπής των αντιστάσεων την στιγμή $t_0 = 0$ και τη στιγμή $t_1 = 3$ s.

$$\pi^2 = 10$$

33

Ηλεκτρικός κινητήρας ασκεί σταθερή ροπή $\tau = 12$ N·m σε ένα τροχό, του οποίου η ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα περιστροφής του, είναι $I = 2{,}5$ kg·m^2. Η εκκίνηση του τροχού από την ηρεμία γίνεται τη στιγμή $t_0 = 0$. Να βρεθούν:
(α) Το έργο που παράγει ο κινητήρας, από τη στιγμή της εκκινησης ως τη στιγμή $t_1 = 4{,}50$ s.
(β) Η ισχύς του κινητήρα τη στιγμή $t_1 = 4{,}50$ s.

34

Οριζόντιος δίσκος περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από κατακόρυφο άξονα, που περνά από το κέντρο του, με συχνότητα 2,0 Hz. Η ροπή αδρανείας του δίσκου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, είναι $I = 2{,}0 \times 10^{-4}$ kg·m^2. Ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας $m = 20$ g και αμελητέων διαστάσεων πέφτει κατακόρυφα και κολλάει στο δίσκο σε απόσταση 0,10 m από τον άξονα περιστροφής. Ποιά η νέα συχνότητα περιστροφής του δίσκου;

35

Άνθρωπος πατάει πάνω σε τραπεζάκι που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβές. Με το ένα χέρι του ο άνθρωπος κρατά τον άξονα ενός οριζόντιου τροχού, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Το σύστημα αρχικά ηρεμεί. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος θέτει σε κίνηση τον τροχό με γωνιακή ταχύτητα 6,0rad/s. Δείξτε ότι ο άνθρωπος θα περιστραφεί με αντίθετη φορά από τον τροχό. Ακόμη να υπολογισθεί η ενέργεια που δαπάνησε ο άνθρωπος για να θέσει σε κίνηση τον τροχό. Η ροπή αδράνειας του τροχού, ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι 0,50 kg·m^2, ενώ του ανθρώπου (μαζί με το κινούμενο τμήμα του τραπεζιού) είναι 3,0 kg·m^2.

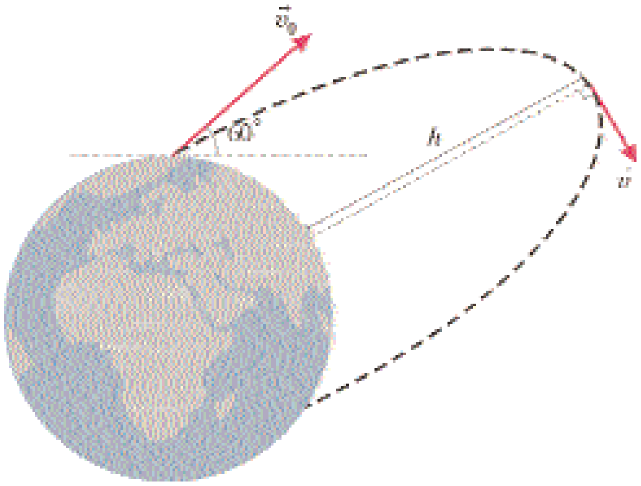
36

Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης. Η ελάχιστη απόσταση ενός πλανήτη από τον Ήλιο (r_π) ονομάζεται περιήλιο και η μέγιστη (r_α) αφήλιο. Αν $\vec{\upsilon}_\pi$ και $\vec{\upsilon}_\alpha$ οι ταχύτητες ενός πλανήτη στο περιήλιο και στο αφήλιο αντίστοιχα, δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{\upsilon_\pi}{\upsilon_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r_\pi}$$

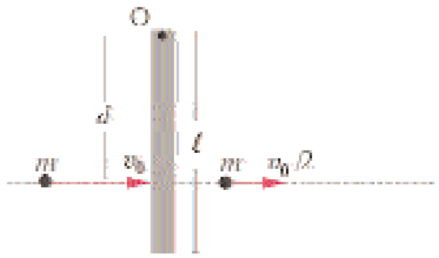
37

Σώμα βάλλεται από το έδαφος με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 60° με τον ορίζοντα. Το σώμα φθάνει σε μέγιστο ύψος $h = R_\Gamma$ όπου R_Γ η ακτίνα της Γης. Να υπολογισθεί το μέτρο της $\vec{\upsilon}_0$, αμελώντας την επίδραση του αέρα της ατμόσφαιρας. Γνωστά είναι η R_Γ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g_0 στην επιφάνεια της Γης.



38

Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος $\ell = 1{,}2$ m και μάζα $M = 2{,}0$ kg. Μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το στήριγμα στο σημείο Ο. Το βλήμα μάζας $m = 0{,}020$ kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0 και διεύθυνσης οριζόντιας που



απέχει απόσταση d = 0,90 m από το Ο. Το βλήμα διαπερνά ακαριαία την ράβδο και εξέρχεται με ταχύτητα $\upsilon_0/2$. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη εκτροπή της ράβδου από την κατακόρυφο είναι 90^o. Να υπολογισθούν:

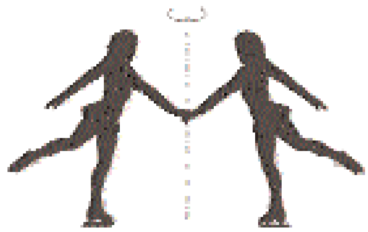
(α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την διέλευση του βλήματος

(β) Η αρχική ταχύτητα του βλήματος

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το στήριγμα είναι $I = 1/3\, M\ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

39

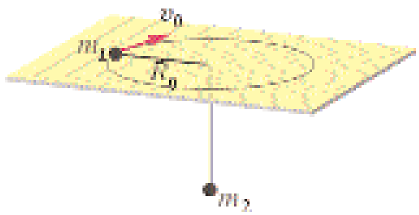
Δύο παγόδρομοι έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = 60$ kg και κινούνται αντίθετα έχοντας ταχύτητα 6,0 m/s ο καθένας με τα χέρια τους στην έκταση. Τη στιγμή που συναντιούνται πιάνει ο ένας το δεξί χέρι του άλλου και περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το σημείο που πιάνονται και ο οποίος αποδεικνύεται ότι παραμένει σταθερός. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα που αποκτούν



οι παγοδρόμοι και τη μεταβολή της κινητική τους ενέργειας. Η ροπή αδράνειας του καθενός ως προς το συγκεκριμένο άξονα να ληφθεί 22 kg m^2 και ακόμη ότι το κέντρο μάζας του καθενός απέχει από τον κατακόρυφο άξονα 0,60 m.

40

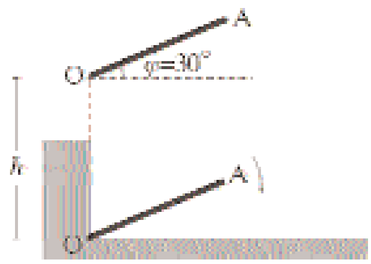
Στο σχήμα τα δύο σώματα έχουν μάζες $m_1 = m_2 = m$ και είναι δεμένα με νήμα χωρίς μάζα (άμαζο). Το m_1 απέχει απόσταση απόσταση R_0 από την οπή Ο



και του δίνουμε ταχύτητα υ_0 κάθετη στην ακτίνα R_0 με μέτρο $\upsilon_0 = \sqrt{2gR_0}$. Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανέλθει το m_2, συναρτήσει της R_0.

41

Η ράβδος (ΟΑ) του σχήματος αφήνεται από ύψος h = 1,8 να πέσει. Όταν φτάνει στο έδαφος, το άκρο της Ο συναντά την κορυφή της γωνίας του οριζοντίου



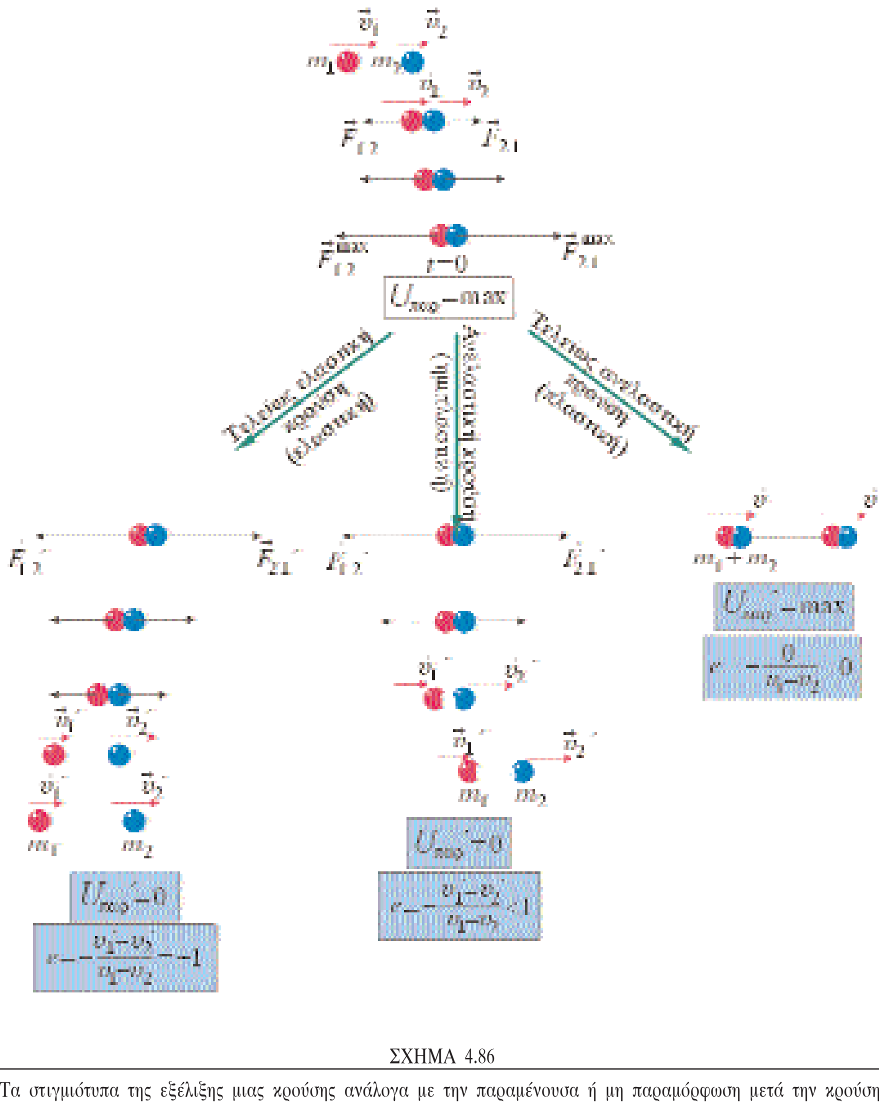
επιπέδου και του σκαλοπατιού. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα της άκρης Α της ράβδου αμέσως μετά την πρόσκρουση του Ο. Δίνονται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ και ότι η ροπή της ράβδου ως προς το Ο είναι 1/3 mℓ^2, όπου m η μάζα της ράβδου.

4.3 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα φαινόμενα των κρούσεων απαντώνται σ' όλη την έκταση της φυσικής. Από τις γιγαντιαίες συγκρούσεις άστρων ως τις κρούσεις μεταξύ υποατομικών σωματιδίων.

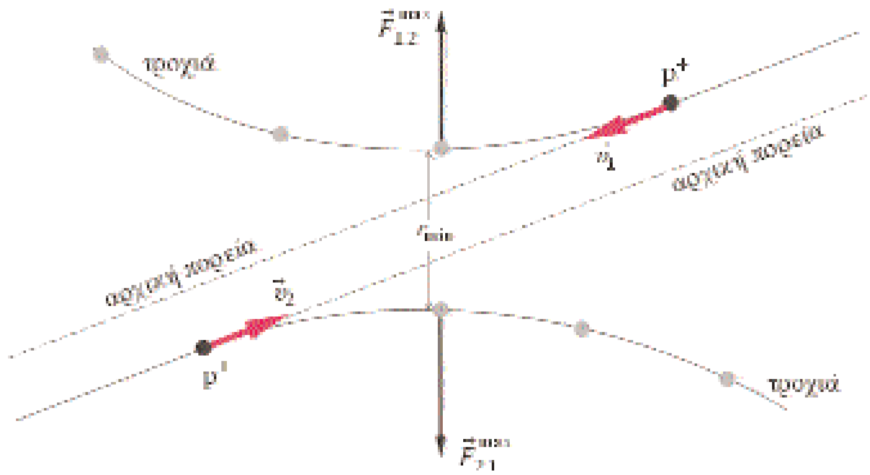
Έτσι, **στη Μηχανική** (μακροσκοπικά), με τον όρο κρούση εννοούμε την επαφή (προσέγγιση) δύο σωμάτων, που διαρκεί ελάχιστο χρόνο και συνοδεύεται με την εμφάνιση ωστικών (κρουστικών) δυνάμεων, που ασκούνται από το ένα σώμα στο άλλο. Οι δυνάμεις αυτές είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερες από άλλες εξωτερικές δυνάμεις, όπως βαρυτικές ή



ΣΧΗΜΑ 4.86

Τα στιγμιότυπα της εξέλιξης μιας κρούσης ανάλογα με την παραμένουσα ή μη παραμόρφωση μετά την κρούση.

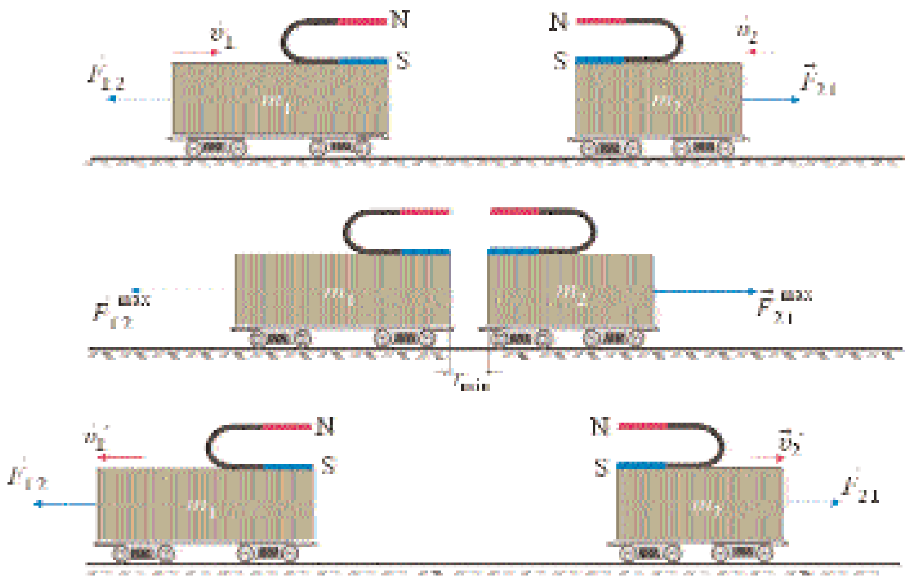
ηλεκτρομαγνητικές, οι οποίες μπορεί να ασκούνται συγχρόνως στα σώματα, κατά τη κρούση τους. Οι κρουστικές δυνάμεις παρόλο που ασκούνται για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, επειδή είναι πολύ μεγάλες, δίνουν στα σώματα, στα οποία ασκούνται πεπερασμένες μεταβολές ορμής.



ΣΧΗΜΑ 4.87

Κρούση (σκέδαση) δύο φορτισμένων σωματιδίων (δύο πρωτονίων).

Στην **ατομική και πυρηνική φυσική** (μικρόκοσμο), πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια της "κρούσης" αφού η "επαφή" στο μικρόκοσμο δεν έχει νόημα, π.χ. όταν ένα πρωτόνιο κινείται προς ένα άλλο πρωτόνιο (χωρίς να πλησιάσουν πάρα πολύ κοντά, ώστε να ασκηθούν και άλλες δυνάμεις όπως αυτές των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, που είναι πολύ μικρότερης εμβέλειας), οι ωστικές δυνάμεις είναι οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης, που οφείλονται στα θετικά τους φορτία. Στην περίπτωση αυτή τα πρωτόνια χωρίς να έλθουν στην πραγματικότητα σε επαφή, αναπτύσουν πολύ μεγάλες απωστικές δυνάμεις σε πολύ μικρό χρόνο, (βλέπε Σχ. 4.87), όπως γίνεται και κατά την κρούση δύο υλικών σωμάτων του μακρόκοσμου. Γι' αυτό εξακολουθούμε να μιλάμε για κρούση, που στην περίπτωση αυτή οδηγεί σε σκέδαση. Η διαδικασία μοιάζει με αυτή που περιγράφεται στο σχήμα 4.88 με μαγνήτες και καρότσια.



ΣΧΗΜΑ 4.88

Η κρούση (χωρίς επαφή) οφείλεται στις αναπτυσσόμενες μαγνητικές δυνάμεις.

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

Σε κάθε κρούση οι κρουστικές δυνάμεις ($\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$) υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και έτσι έχουμε

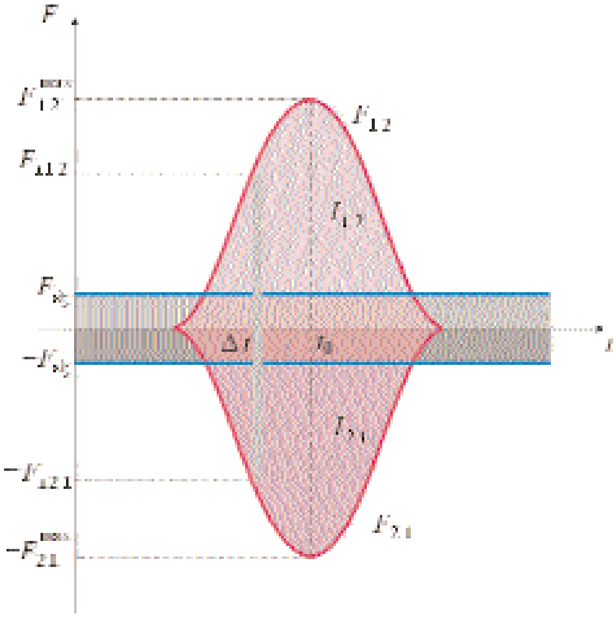
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Άρα και οι ωθήσεις των δυνάμεων αυτών θα είναι αντίθετες

$\vec{I}_{12} = \Sigma \vec{F}_{12}\Delta t_i = -\Sigma \vec{F}_{21}\Delta t_i = -\vec{I}_{21}$ (βλέπε σχήμα 4.89).

Επομένως

$$\vec{I}_{12} + \vec{I}_{21} = 0$$



ΣΧΗΜΑ 4.89

Οι μέσες τιμές των ωστικών δυνάμεων $\vec{F}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ που αναπτύσσονται κατά τις κρούσεις είναι πολύ μεγαλύτερες από' οποιεσδήποτε εξωτερικές δυνάμεις που μπορούν να ασκούνται πάνω στο σύστημα.

Όμως

$$\vec{I}_{12} = \vec{p}_1{}' - \vec{p}_1$$

και

$$\vec{I}_{21} = \vec{p}_2{}' - \vec{p}_2$$

άρα τελικά

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$$

Από τα παραπάνω, λοιπόν, καταλήγουμε στα εξής: Σε κάθε κρούση, όπως την έχουμε ορίσει, όπου η χρονική διάρκεια εξέλιξής της, Δt, είναι αμελητέα σε σχέση με την διάρκεια παρατήρησης του συστήματος, μπορούμε να αμελήσουμε τις όποιες, πεπερασμένες δυνάμεις (βαρύτητας, ηλεκτρομαγνητικές κ.λπ.) που πιθανόν ασκούνται πάνω στο σύστημα. Προφανώς αν οι κρουστικές δυνάμεις είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος των υλικών σωμάτων που μελετούμε, τότε δε μεταβάλλουν την ολική ορμή του συστήματος, υπολογιζόμενη δύο χρονικές στιγμές, μια λίγο πριν και την άλλη λίγο μετά την κρούση.

Επίσης, σύμφωνα με τα ανωτέρω οι οποιεσδήποτε πεπερασμένες δυνάμεις δε μεταβάλλουν την ορμή μεταξύ των ανωτέρω χρονικών στιγμών.

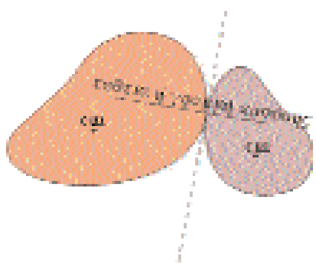
Σε αντίθεση με την ολική ορμή του συστήματος η ολική κινητική ενέργεια των συγκρουομένων σωμάτων, λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση, δεν διατηρείται πάντα. Αυτό ακριβώς αποτελεί και το κριτήριο με το οποίο ταξινομούμε τις κρούσεις. Όπως φαίνεται παρακάτω:

α) Αν η $K_1 + K_2 = K_1' + K_2'$ δηλαδή αν η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος, λίγο πριν την κρούση, είναι ίση με την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση, τότε η κρούση είναι **ελαστική ή τελείως ελαστική**. Παραδείγματα τελείως ελαστικών κρούσεων εμφανίζονται σε κρούσεις μεταξύ ατομικών πυρήνων και στοιχειωδών σωματιδίων. Στην πραγματικότητα, μόνο εκεί μπορούμε να έχουμε αληθινά ελαστικές κρούσεις. Επίσης ικανοποιητικά ελαστικές μπορούν να θεωρούνται οι κρούσεις μεταξύ σφαιρών από ελεφαντόδοντο (μπιλιάρδο) ή από γυαλί ή από ατσάλι, αλλά και από άλλα υλικά (ανάλογα με το πόσο καλά θέλουμε να προσεγγίσουμε την ελαστική κρούση). Θεωρούμε, απλουστευτικά, τις κρούσεις των μορίων ενός αερίου με τα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει, καθώς και τις μεταξύ τους κρούσεις, ελαστικές. Οι μακροσκοπικές κρούσεις είναι μόνο κατά προσέγγιση ελαστικές, αφού πάντοτε παραμένει μια μικρή παραμόρφωση των σωμάτων και αύξηση της θερμοκρασίας τους. Έχομε δηλαδή αύξηση της θερμοδυναμικής τους ενέργειας που δεν περιγράφεται μέσα στα πλαίσια της μηχανικής που εξετάζουμε εδώ, με αποτέλεσμα πάντοτε να υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας.

β) Αν $K_1 + K_2 > K_1' + K_2'$ (ή $K_1 + K_2 < K_1' + K_2'$ που μπορεί να συμβαίνει στην φυσική σωματιδίων αν γίνει μετατροπή άλλης μορφής ενέργειας σε κινητική) τότε η κρούση είναι **ανελαστική ή ημιελαστική**. Γενικώς σε τέτοιες κρούσεις, έχουμε μετατροπή μεταξύ της κινητικής ενέργειας και άλλων μορφών ενέργειας.

Ειδική περίπτωση των ανελαστικών κρούσεων είναι η περίπτωση, που τα σώματα μετά την κρούση παραμένουν ενωμένα σ' ένα συσσωμάτωμα και κινούνται με κοινή ταχύτητα. Η κρούση αυτή λέγεται **τελείως ανελαστική ή πλαστική κρούση**. Για παράδειγμα η κρούση μεταξύ βλήματος και στόχου είναι τελείως ανελαστική, όταν το βλήμα παραμένει σφηνωμένο μέσα στον στόχο. Επίσης, αν συγκρουστούν δύο κομμάτια στόκου θα κολήσουν το ένα με το άλλο και θα κινηθούν με την ίδια ταχύτητα. Όταν ένας μετεωρίτης πέσει πάνω στη Γη ισχωρεί μέσα στο έδαφος με αποτέλεσμα και εδώ η κρούση να είναι τέλεια μη ελαστική. Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι οι τελείως ελαστικές και οι τελείως ανελαστικές κρούσεις είναι ακραίες περιπτώσεις. Οι περισσότερες περιπτώσεις κρούσεων εντάσσονται κάπου ανάμεσά τους.

Οι κρούσεις μεταξύ σωμάτων, που έχουν μη μηδενικές διαστάσεις, χαρακτηρίζονται από τον τρόπο που συγκρούονται, σύμφωνα με τα παρακάτω. Υπάρχει μια κοινή επίπεδη επιφάνεια στην περιοχή (σημείο) επαφής των σωμάτων, βλέπε σχήμα 4.90. Η κάθετη ευθεία στην επιφάνεια επαφής, στο σημείο επαφής, λέγεται ευθεία ή γραμμή κρούσης. Αν τα κέντρα μάζας των δύο σωμάτων κατά την διάρκεια των φαινομένων της κρούσης βρίσκονται πάνω στην ευθεία κρούσης, τότε η κρούση λέγεται **κεντρική**, ενώ αν ένα τουλάχιστον βρίσκεται εκτός αυτής, λέγεται **έκκεντρη**. Αν και οι δύο ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων είναι συγγραμμικές με την γραμμή κρούσης, τότε η κρούση λέγεται **ευθεία ή μετωπική**, αν όχι λέγεται **λοξή ή πλάγια**. Ακόμη, μια κρούση χαρακτηρίζεται ως **λεία,** αν οι κρουστικές δυνάμεις στο σημείο επαφής έχουν τη διεύθυνση της ευθείας κρούσης, ενώ



ΣΧΗΜΑ 4.90

Κρούση δύο σωμάτων τυχαίου σχήματος.

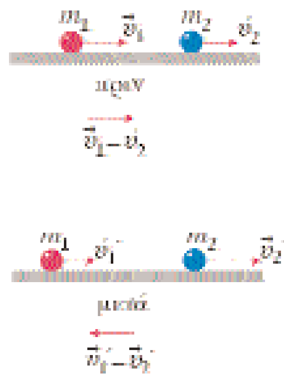
λέγεται **τραχεία** αν αυτό δε συμβαίνει. Προφανές είναι ότι αν συγκρούονται ομογενή σφαιρικά σώματα, πάντοτε οι κρούσεις τους είναι κεντρικές. Οι κρούσεις όμως μεταξύ τέτοιων σφαιρών μπορεί να είναι πλάγιες (λοξές) ή μετωπικές. Δεν ασχολούμαστε εδώ με τις λεπτομέρειες της επίδρασης των φαινομένων της τραχείας και της λείας κρούσης. Συνήθως τα σώματα είναι ομογενείς σφαίρες και δεν λαμβάνεται υπόψη η περιστροφική τους κίνηση.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Α. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΩΠΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Έστω δύο μικρές ελαστικές ομογενείς σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 και με ίδιες ακτίνες, που κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$. Συγκρούονται μετωπικά (και κεντρικά) και ακολούθως συνεχίζουν να κινούνται πάνω στην ίδια διεύθυνση (χωρίς να περιστρέφονται) με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ αντίστοιχα (Σχ. 4.91). Όπως είναι γνωστό ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, η οποία για το σύστημα των δύο σφαιρών γράφεται

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \qquad (4.58)$$



ΣΧΗΜΑ 4.91

Ελαστική μετωπική κρούση δύο μικρών ομογενών ελαστικών σφαιρών σε λείο δάπεδο (χωρίς τριβές).

Επειδή η κρούση είναι τελείως ελαστική διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος δηλαδή

$$\frac{1}{2}m_1\,\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\,\upsilon_2'^2 \qquad (4.59)$$

Οι σχέσεις (4.58) και (4.59) γράφονται αντίστοιχα

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2 - \upsilon_2') \qquad (4.60)$$

και

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2^2 - \upsilon_2'^2) \qquad (4.61)$$

Αν υποθέσουμε ότι $\upsilon_1 \neq \upsilon_1'$ και $\upsilon_2 \neq \upsilon_2'$ και διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4.60) και (4.61) παίρνουμε

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' + \upsilon_2 \quad ή \qquad (4.62)$$

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = -(\upsilon_1' - \upsilon_2') \qquad (4.63)$$

Η σχέση (4.62) συνδιαζόμενη με την (4.58) δίνει

$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2} \qquad (4.64)$$

και

$$\boxed{\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2} \qquad (4.65)$$

Παρατήρηση:

Από τη σχέση (4.63) φαίνεται ότι οι διαφορές των ταχυτήτων τους (δηλαδή οι σχετικές τους ταχύτητες, λαμβανόμενες ως προς την ίδια πάντα σφαίρα) πριν και μετά την κρούση, είναι αντίθετες, γεγονός που σημαίνει ότι οι σφαίρες, μετά την κρούση, θα απομακρύνονται με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα με την οποία πλησίαζαν πριν την κρούση.

Συντελεστής κρούσης ή συντελεστής αποκατάστασης (*e*) των υλικών των δυο σφαιρών, ονομάζεται το αρνητικό πηλίκο της σχετικής ταχύτητάς τους μετα την κρούση, δια της σχετικής ταχύτητάς τους πριν την κρούση, δηλαδή

$$e = -\frac{\upsilon_{\sigma x}}{\upsilon'_{\sigma x}} = -\frac{\upsilon'_1 - \upsilon'_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \tag{4.66}$$

Όπου υ_1 , υ_2, υ'_1 και υ'_2 οι αλγεβρικές προβολές των ταχυτήτων στη γραμμή κρούσης. Για την περίπτωση της τέλειας ελαστικής κρούσης που μελετήσαμε, έχουμε

$$e = -\frac{\upsilon'_1 - \upsilon'_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2} = 1$$

Αυτό σημαίνει ότι η αποκατάσταση των σωμάτων μετά την τέλεια ελαστική κρούση είναι 100 %.

Παρατήρηση:

Ο συντελεστής κρούσης, e, είναι καθαρός αριθμός, εξαρτάται από την φύση των υλικών των δύο σωμάτων και παίρνει τιμές $0 \leq e \leq 1$. Συγκεκριμένα:

$e = 1$ στις τελείως ελαστικές κρούσεις.

$0 < e < 1$ στις ανελαστικές κρούσεις.

$e = 0$ στις τελείως ανελαστικές κρούσεις.

Εφαρμογές

Ας μελετήσουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις τελείως ελαστικών κρούσεων που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον.

α) **Τα συγκρουόμενα σώματα έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$.**

Αντικαθιστώντας στις (4.64) και (4.65) έχουμε $\upsilon'_1 = \upsilon_2$ και $\upsilon'_2 = \upsilon_1$ γεγονός που σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους.

β) **Το σώμα μάζας m_2 είναι αρχικά ακίνητο: $\upsilon_2 = 0$**

Αντικαθιστώντας το $\upsilon_2 = 0$ στις (4.64) και (4.65) παίρνουμε

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \text{και} \tag{4.67}$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \tag{4.68}$$

β$_1$) **Αν στην περίπτωση (β) υποθέσουμε ότι και $m_1 = m_2 = m$ έχουμε** $\upsilon'_1 = 0$ και $\upsilon'_2 = \upsilon_1$ γεγονός που σημαίνει ότι το σώμα μάζας m_1 θα σταματήσει μεταφέροντας όλη την κινητική του ενέργεια στο σώμα που αρχικά ηρεμούσε.

ΕΠΙΒΡΑΔΥΝΣΗ ΝΕΤΡΟΝΙΟΥ

Η τελευταία περίπτωση (β$_1$) βρίσκει εφαρμογή στην επιβράδυνση των νετρονίων, που παράγονται από τη διάσπαση του ουρανίου στους πυρηνικούς αντιδραστήρες. Τα παραγόμενα νετρόνια κινούνται με υψηλές ταχύτητες (γύρω στα 10^7 m/s) και πρέπει να επιβραδυνθούν σε ταχύτητες γύρω στα 10^3 m/s. Αυτό επιβάλλεται γιατί τα βραδέα νετρόνια αφ' ενός έχουν μεγάλη πιθανότητα να προκαλέσουν νέες διασπάσεις του Ουρανίου 235 και αφ' ετέρου δεν απορροφούνται από τους πυρήνες του ισοτόπου του ουρανίου ^{238}U, που συνυπάρχουν κατ' ανάγκη με το ^{235}U το οποίο χρησιμοποιείται ως πρώτη ύλη στους πυρηνικούς αντιδραστήρες.

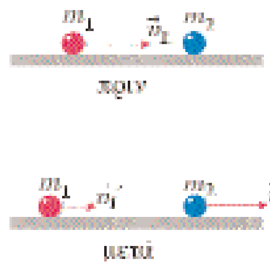
Για το σκοπό αυτό το ουράνιο περιβάλλεται από υλικό με κατάλληλους πυρήνες (επιβραδυντής), οι οποίοι υποβιβάζουν την κινητική ενέργεια των παραγόμενων νετρονίων μέχρι τις επιθυμητές τιμές. Τα παραγόμενα νετρόνια συγκρούονται ελαστικά με τους πυρήνες του επιβραδυντή και έτσι χάνουν ένα μεγάλο μέρος της κινητικής τους ενέργειας, την οποία μεταφέρουν στους πυρήνες του επιβραδυντή, ειδικότερα όταν η μάζα των πυρήνων του επιβραδυντή είναι περίπου ίση με τη μάζα των νετρονίων (πχ. άτομα υδρογόνου που ανήκουν στο μόριο του νερού).

β$_2$) **Αν το ακίνητο σώμα έχει πολύ μεγάλη μάζα, δηλαδή $m_2 >> m_1$** τότε από τις (4.67) και (4.68) έχουμε: $\upsilon_1' \approx -\upsilon_1$ και $\upsilon_2' \approx 0$ γεγονός που σημαίνει ότι το μικρής μάζας σώμα μετά την κρούση κινείται περίπου με αντίθετη ταχύτητα, ενώ το μεγάλης μάζας παραμένει σχεδόν ακίνητο.

β$_2$) **Αν το ακίνητο σώμα έχει πολύ μικρή μάζα, δηλαδή $m_2 << m_1$** τότε από τις (4.67) και (4.68) έχουμε: $\upsilon_1' \approx \upsilon_1$ και $\upsilon_2' \approx 2\upsilon_1$ γεγονός που σημαίνει ότι η ταχύτητα του μεγάλης μάζας σώματος παραμένει περίπου σταθερή, ενώ το μικρής μάζας σώμα εκτινάσσεται με ταχύτητα περίπου διπλάσια από την ταχύτητα που είχε, αρχικά, το μεγάλης μάζας σώμα. Αυτό παρατηρείται όταν, π.χ., ο παίκτης του τένις χτυπά το ακίνητο μπαλάκι με την ρακέτα. Το μπαλάκι αποκτά ταχύτητα διπλάσια της ρακέτας.

Παράδειγμα 4-20

Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2. Να υπολογιστεί το κλάσμα της ενέργειας που μεταφέρεται από τη μάζα m_1 στη μάζα m_2. Τί τιμές παίρνει το ποσοστό αυτό αν: 1) $m_1 = m_2$, 2) $m_1 >> m_2$ και 3) $m_1 << m_2$. Τι παρατηρείτε;



ΣΧΗΜΑ 4.92

Απάντηση

Το ζητούμενο κλάσμα της ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\varkappa = \frac{K_1 - K_1'}{K_1} = 1 - \frac{K_1'}{K_1} = 1 - \frac{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2} = 1 - \frac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2}$$

Όμως στην περίπτωση αυτή η $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

Οπότε προφανώς

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \varkappa = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \qquad (1)$$

1) Αν $m_1 = m_2$ βρίσκουμε $\varkappa = 1$

2) Αν $m_1 >> m_2$ τότε $\dfrac{m_2}{m_1} \approx 0$. Διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή της (1) δια m_1^2 έχουμε

$$\varkappa = \frac{4\dfrac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)^2} \quad \text{, οπότε} \quad \varkappa \approx \frac{0}{(1+0)^2} \quad \text{ή} \quad \varkappa \approx 0$$

3) Αν $m_1 << m_2$ τότε $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$. Διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή της

(1) με m_2^2 έχουμε $\varkappa = \frac{4\frac{m_1}{m_2}}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2}$, οπότε $\varkappa \approx \frac{0}{(1+0)^2}$ δηλαδή πάλι $\varkappa \approx 0$.

Παρατηρήσεις:

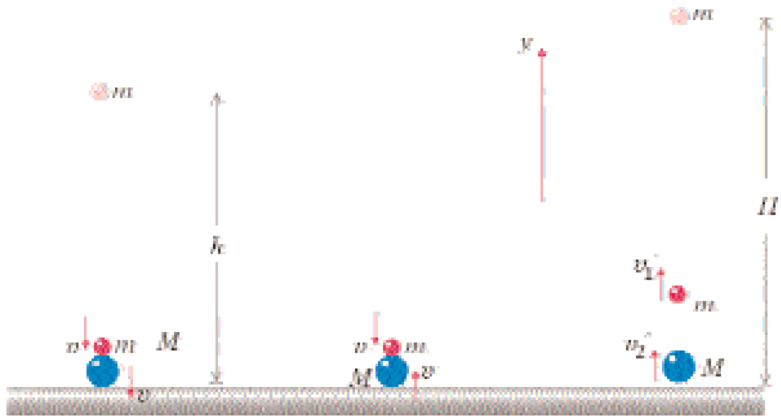
Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι το κλάσμα παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του ($\varkappa = 1$) στην περίπτωση όπου $m_1 = m_2$. Πράγματι στην περίπτωση αυτή έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων και έτσι ολόκληρη η κινητική ενέργεια της μάζας m_1 μεταβιβάζεται στην μάζα m_2 (που ήταν αρχικά ακίνητη).

Τη μικρότερη τιμή του ($\varkappa \approx 0$) την παίρνει στις περιπτώσεις όπου η ακίνητη μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη ή πολύ μικρότερη από αυτήν που κινείται. Πράγματι στην μια περίπτωση ($m_1 >> m_2$) η $\upsilon_1' \approx \upsilon_1$ και στη δεύτερη περίπτωση ($m_1 << m_2$) ή $\upsilon_1' \approx -\upsilon_1$ με αποτέλεσμα η κινητική ενέργεια της m_1 να παραμένει περίπου η ίδια πριν και μετά την κρούση.

Παράδειγμα 4-21

Μικρή σφαίρα με μάζα m βρίσκεται λίγο πιο πάνω από μια σφαίρα με μάζα M πολύ μεγαλύτερη από την μάζα m. Οι σφαίρες αφήνονται να πέσουν στο κενό από ύψος h, πάνω σ' ένα οριζόντιο ακλόνητο επίπεδο με το οποίο συγκρούεται η μεγάλη σφαίρα. Να δειχθεί ότι η σφαίρα m αναπηδώντας θα φτάσει σε ύψος $H = 9h$. Όλες οι κρούσεις είναι ελαστικές και οι διαστάσεις των σφαιρών να μην ληφθούν υπόψη.

Μπορείτε να πειραματιστείται με μπάλα ποδοσφαίρου και μικρό μπαλάκι, όπως αυτό του τένις.



ΣΧΗΜΑ 4.93

Απάντηση

Οι σφαίρες φτάνουν στο έδαφος συγχρόνως και με την ίδια ταχύτητα υ που υπολογίζεται από την σχέση $mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ή $\upsilon = \sqrt{2gh}$.

Στη συνέχεια λαμβάνουν χώρα οι εξής διαδοχικές κρούσεις: Πρώτη κρούση της M με το ακλόνητο επίπεδο, οπότε η ταχύτητά της αντιστρέφεται.

Δεύτερη κρούση της M, που κινείται με ταχύτητα υ προς τα πάνω με την m που έχει ταχύτητα υ προς τα κάτω. Από την αρχή διατήρησης της ορμής και της ενέργειας έχουμε:

Προβολές ορμών στον άξονα y

$$\left.\begin{array}{r}-m\upsilon + M\upsilon = m\upsilon_1' + M\upsilon_2' \\ \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2\end{array}\right\} \quad \text{ή}$$

$$\left|\begin{array}{l}-m(\upsilon_1' + \upsilon) = M(\upsilon_2' - \upsilon) \\ m\left(\upsilon^2 - \upsilon_1'^2\right) = M\left(\upsilon_2'^2 - \upsilon^2\right)\end{array}\right| \quad \text{ή}$$

$$\left|\begin{array}{c}-m(\upsilon_1' + \upsilon) = M(\upsilon_2' - \upsilon) \\ \upsilon_1' - \upsilon = \upsilon_2' + \upsilon\end{array}\right|$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $\upsilon_1' = \dfrac{3M - m}{M + m}\upsilon = \dfrac{3 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}\upsilon$ και

$$\upsilon_2' = \frac{M - 3m}{M + m}\upsilon = \frac{1 - 3\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}\upsilon$$

Θέτοντας $\dfrac{m}{M} \approx 0$ παίρνουμε από τις προηγούμενες σχέσεις αντίστοιχα $\upsilon_1' = 3\upsilon$ και $\upsilon_2' = \upsilon$ Εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη μάζα m έχουμε

$$\frac{1}{2}m(3\upsilon)^2 = mgH$$

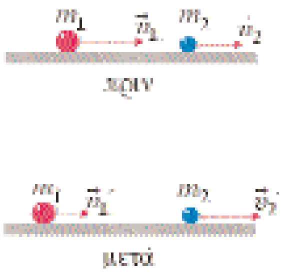
και τελικά $\boxed{H = 9h}$.

ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Όπως είπαμε οι κρούσεις στο μακρόκοσμο συνήθως δεν είναι τελείως ελαστικές, γεγονός που σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια της κρούσης μέρος της κινητικής ενέργειας των συγκρουομένων σωμάτων μετατρέπεται σε θερμοδυναμική (αλλοιώς εσωτερική) ενέργεια. Έτσι αν η κινητική ενέργεια ενός απομονωμένου (δυναμικά) συστήματος σωμάτων μειωθεί, η εσωτερική ενέργειά τους πρέπει να αυξηθεί κατά το ίδιο ποσό, ώστε το άθροισμά τους να παραμείνει σταθερό.

Οι συγκρούσεις, στο μικρόκοσμο, ανάμεσα στα στοιχειώδη σωματίδια, όπως ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια κ.ά. είναι μερικές φορές ελαστικές (ελαστική σκέδαση). Η σύγκρουση ανάμεσα σ' αυτά τα σωματίδια θα είναι μη ελαστική, αν συνεπάγεται τη δημιουργία νέων σωματιδίων, που δεν υπήρχαν ως συστατικά των αρχικών, διέγερση των συγκρουομένων σωματιδίων, διάσπαση των αρχικών ή δημιουργία άλλων σωματιδίων από αναδιάταξη των δομικών συστατικών των αρχικών. Όταν το άθροισμα των μαζών των παραγομένων σωματιδίων είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μαζών των αρχικών σωματιδίων, τότε μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας δαπανήθηκε για τη δημιουργία ισοδύναμης μάζας. Στην αντίστροφη περίπτωση έχουμε μετατροπή μάζας σε ενέργεια.

Β. ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ (ή ΜΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ) ΚΡΟΥΣΗ



ΣΧΗΜΑ 4.94

Ανελαστική κρούση δύο μικρών σφαιρών σε δάπεδο χωρίς τριβές.

Έστω δύο μικρές σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές με ταχύτητες υ_1 και υ_2 συγκρούονται μετωπικά και στη συνέχεια κινούνται πάνω στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητες υ_1' και υ_2' αντίστοιχα (βλέπε σχήμα 4.94).

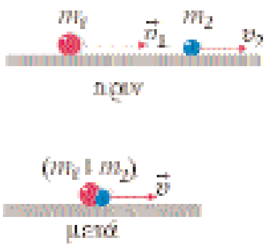
Εφόσον η ορμή διατηρείται, ισχύει $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$

Για την κινητική ενέργεια του συστήματος ισχύει

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \Delta E$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται η μη διατήρηση (γενικώς) της κινητικής ενέργειας του συστήματος και ΔE είναι η απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Γ. ΤΕΛΕΙΩΣ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ (ή ΠΛΑΣΤΙΚΗ) ΚΡΟΥΣΗ



ΣΧΗΜΑ 4.95

Τελείως ανελαστική κρούση.

Στην περίπτωση αυτή τα δύο σώματα μετά την τελείως ανελαστική τους κρούση ενώνονται σ' ένα σώμα μάζας $m_1 + m_2$ που κινείται στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (βλέπε Σχ. 4.95).

Η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων δίνει

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \qquad \text{ή}$$

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Για την κινητική ενέργεια του συστήματος ισχύει

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \Delta E$$

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δειχτεί ότι η απώλεια κινητικής ενέργειας είναι η μέγιστη δυνατή.

Παράδειγμα 4-22

Δύο σφαίρες m_1 και m_2 συγκρούονται μετωπικά και τελείως ανελαστικά (πλαστικά). Να αποδειχθεί ότι η απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι ανάλογη του τετραγώνου της σχετικής ταχύτητας των σφαιρών.

Απάντηση

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σφαιρών έχουμε

Προβολές των ορμών στον άξονα κίνησής τους

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \quad \text{ή}$$

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Για την κινητική ενέργεια του συστήματος έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \Delta E$$

Άρα έχουμε $\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}$

Τελικώς $\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$ ή αν

$$v_1 - v_2 = v_{\sigma\chi}$$

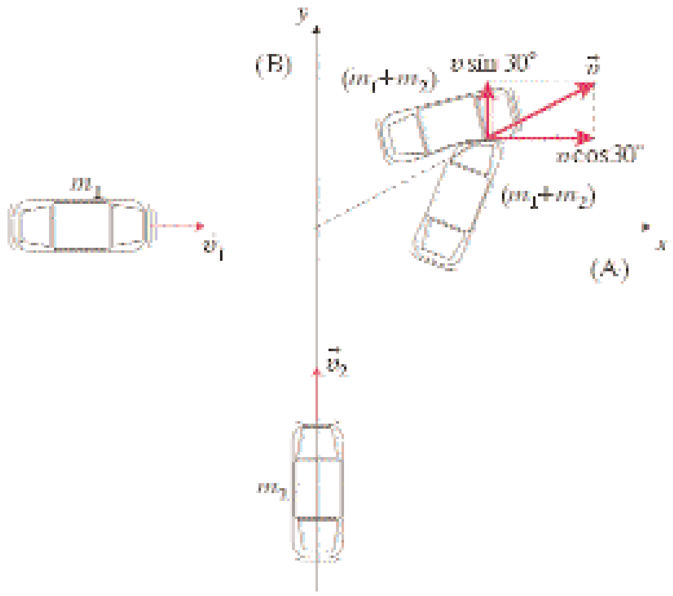
$$\boxed{\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_{\sigma\chi}^2}$$

Σχόλιο: Η ποσότητα $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$ ή $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$ λέγεται **ανηγμένη μάζα** του συστήματος των δύο μαζών, όπως θα δούμε παρακάτω.

Παράδειγμα 4-23

Το αυτοκίνητό σας μάζας $m_1 = 1200$ kg που κινείται προς βορρά συγκρούεται με άλλο αυτοκίνητο μάζας $m_2 = 1500$ kg που κινείται προς την ανατολή. Μετά την σύγκρουση τα δύο τρακαρισμένα αυτοκίνητα παραμένουν ενωμένα και ντελαπάρουν, με μπλοκαρισμένους τους τροχούς εως ότου σταματήσουν. Η έρευνα της Τροχαίας, που ακολούθησε αποκάλυψε ότι τα ελαστικά των τρακαρισμένων αυτοκινήτων άφησαν στον δρόμο σημάδια μήκους 16 m υπό γωνία 30^o ως προς την κατεύθυνση κίνησης του αυτοκινήτου σας. Ποιό από τα δύο αυτοκίνητα έχει υπερβεί το όριο ταχύτητας των 100 km/h;

Δίνεται ότι $g = 10$ m/s^2 και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στους μπλοκαρισμένους τροχούς και την άσφαλτο είναι $\mu = 0{,}80$.



ΣΧΗΜΑ 4.96

Απάντηση

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα των αυτοκινήτων αμέσως μετά το τρακάρισμα μέχρι να σταματήσουν έχουμε

$$0-\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v^2=-\mu\left(m_1+m_2\right)g\,s \qquad \text{ή}$$

$$v=\sqrt{2\,\mu\,g\,s} \quad \text{ή} \quad v=\sqrt{2\times 0{,}8\times 10\times 16}\ \mathrm{m/s} \quad \text{ή}$$

$$v=16\ \mathrm{m/s} \tag{1}$$

Ακολούθως εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στους δύο άξονες x, y παίρνουμε για τις αντίστοιχες συνιστώσες

$$p_{ολ(x)}=p'_{ολ(x)} \ \text{ή} \quad m_1 v_1=(m_1+m_2)\,v\cos 30^{\mathrm{o}} \tag{2}$$

$$p_{ολ(y)}=p'_{ολ(y)} \ \text{ή} \quad m_2 v_2=(m_1+m_2)\,v\sin 30^{\mathrm{o}} \tag{3}$$

Από τη (2) έχουμε

$$v_1=\frac{\left(m_1+m_2\right)v\cos 30^{\mathrm{o}}}{m_1}$$

και αντικαθιστώντας την (1) έχουμε

$$v_1=\frac{2700\times 16\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1200}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{ή}$$

$$v_1\approx 112\ \mathrm{km/h}$$

όμοια για το άλλο αυτοκίνητο έχουμε

$$v_1\approx 52\ \mathrm{km/h}$$

Άρα εσείς έχετε υπερβεί το όριο ταχύτητας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στις κρούσεις, όπως αναπτύξαμε στα προηγούμενα, διατηρείται πάντα η συνολική διανυσματική ορμή του συστήματος. Για τη γενική περίπτωση κρούσης σε δύο διαστάσεις (αλλά και στο χώρο των τριων διαστάσεων) αυτό σημαίνει ότι η ολική ορμή διατηρείται σε κάθε διεύθυνση, άρα και σε κάθε μια από τις διευθύνσεις των αξόνων x και y.

Ας μελετήσουμε την κρούση μεταξύ δύο σφαιρών στο μπιλιάρδο (Σχ. 4.97α) (ή δύο σωματιδίων μαζών m_1 και m_2) εκ των οποίων η μάζα m_2 είναι αρχικά ακίνητη. Προφανώς η κρούση δεν είναι μετωπική και η παράμετρος b (βλέπε Σχ. 4.97) είναι ένα μέτρο της “μετωπικότητας” της κρούσης (προφανώς για $b = 0$ έχουμε μετωπική κρούση). Μετά την κρούση η κατεύθυνση κίνησης του προσπίπτοντος σώματος, μάζας m_1 σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x (αρχική κατεύθυνση κίνησης) και ο στόχος m_2 κινείται με κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x (αρχική κατεύθυνση).

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στους δύο άξονες x και y παίρνουμε για τις αντίστοιχες συνιστώσες,

Συνιστώσες της ορμής στον άξονα x

$$p_{ολ(x)} = p'_{ολ(x)} \qquad ή$$

$$0 = m_2 \upsilon'_2 \sin\varphi - m_1 \upsilon'_1 \sin\theta \tag{4.69}$$

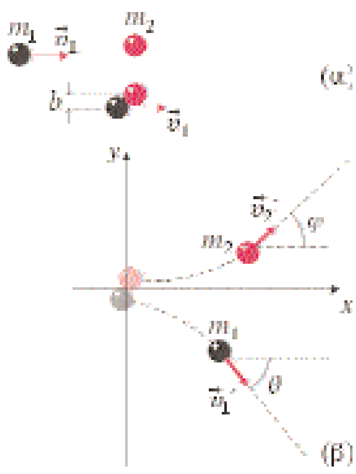
Συνιστώσες της ορμής στον άξονα y

$$p_{ολ(y)} = p'_{ολ(y)} \qquad ή$$

$$0 = m_2 \upsilon'_2 \sin\varphi - m_1 \upsilon'_1 \sin\theta \tag{4.70}$$

Αν η κρούση είναι ελαστική τότε θα έχουμε και διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος δηλαδή

$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 \tag{4.71}$$



ΣΧΗΜΑ 4.97

(α) Πριν και (β) μετά από μια μη μετωπική τελείως ελαστική κρούση.

Παρατηρήσεις:

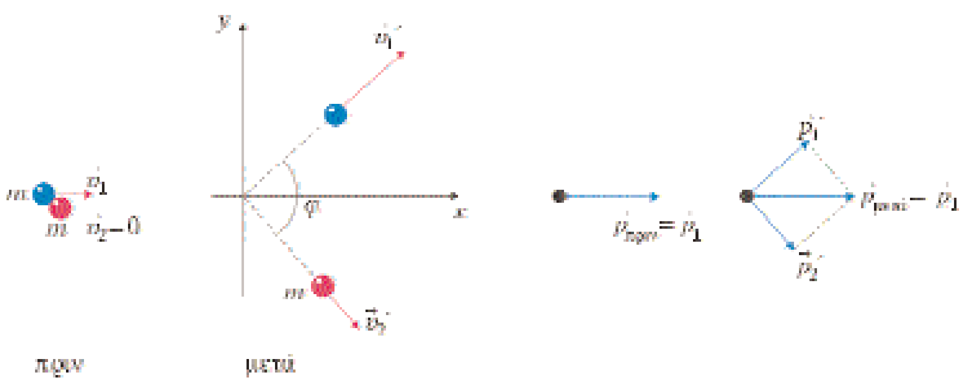
α) Αν η κρούση είναι μη ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος, δεν διατηρείται, οπότε δεν ισχύει η προηγούμενη σχέση (4.71).

β) Αν είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες κρούσης (m_1, m_2 και $\vec{\upsilon}_1$), έχουμε τέσσερεις αγνώστους (υ'_1, υ'_2, φ και θ) αλλά με τρεις μόνο εξισώσεις, που τους συνδέουν. Μπορούμε λοιπόν να γνωρίζουμε την κίνηση των μαζών μετά την κρούση μόνο αν προσδιορίσουμε την τιμή του ενός από αυτούς (π.χ. πειραματικά).

Παράδειγμα 4-24

Να αποδείξετε ότι στη μη μετωπική ελαστική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών ίσων μαζών, κατά την οποία η μία είναι αρχικά ακίνητη, οι ταχύτητές τους αμέσως μετά την κρούση είναι κάθετες μεταξύ τους.

<u>Απάντηση</u>



ΣΧΗΜΑ 4.98

Μη μετωπική ελαστική κρούση δύο σφαιρών ίσων μαζών.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \qquad \acute{\eta}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (1)$$

Αφού η κρούση είναι ελαστική θα ισχύει

$$K_1 + 0 = K_1' + K_2' \qquad \acute{\eta}$$

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m} \qquad \acute{\eta}$$

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, άρα προφανώς η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων p_1' και p_2' είναι ορθή.

ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα, ο νόμος της αδράνειας, λέει ότι: Αν κάποιο σώμα δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα, η διανυσματική του ταχύτητα δεν μεταβάλλεται, δηλαδή το σώμα κινείται ομαλά σε ευθεία γραμμή.

Αυτός ο νόμος δεν είναι σαφής αν δε συνδυαστεί με το κατάλληλο σύστημα αναφοράς. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κίνηση κάποιου σώματος είναι διαφορετική όταν παρατηρείται από διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Ένας άνθρωπος είναι ακίνητος ως προς κάποιο λεωφορείο, το οποίο κινείται σε μια στροφή του δρόμου με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Ως προς τη Γη όμως, ο άνθρωπος έχει επιτάχυνση αφού η διανυσματική ταχύτητά του μεταβάλλεται (μέτρο σταθερό, μεταβολή κατεύθυνσης). Αυτό που ισχύει για τους νόμους της μηχανικής, πιο συγκεκριμένα για τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα (της αδράνειας) και τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \acute{\eta} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(θεμελιώδης νόμος της μηχανικής) είναι, ότι ισχύουν μόνο για ειδικά συστήματα αναφοράς. Ο νόμος της αδράνειας διατυπώνεται καλύτερα ως εξής: Υπάρχουν συστήματα αναφοράς ως προς τα οποία ένα σώμα, το οποίο δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα, κινείται ομαλά σε ευθεία γραμμή. Αυτά είναι τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα είναι και ένας κανόνας που μας επιτρέπει να βρούμε τα “σωστά” αδρανειακά συστήματα αναφοράς, δηλαδή παίζει διπλό ρόλο: Είναι ένας νόμος της φύσεως καθώς και ένας ορισμός για το τι σημαίνει αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πολλοί άλλοι νόμοι της φυσικής, στους οποίους συμπεριλαμβάνεται και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, επίσης παίζουν παρόμοιο διπλό ρόλο, ο δεύτερος νόμος μπορεί να πει κανείς ότι μας καθορίζει και τη δύναμη.

Αν κάποιο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό, οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς, που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (δηλαδή με $\vec{\upsilon}$ = σταθ.) ως προς το πρώτο, θα είναι επίσης αδρανειακό. Ποια από τα συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούμε είναι αδρανειακά; Η καλύτερη προσέγγιση αδρανειακού συστήματος είναι ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με $\vec{v}$ = σταθ. (μπορεί να είναι και $\vec{v} = 0$) σε σχέση με τους μακρινούς αστέρες. Η Γη π.χ. δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς, διότι περιφέρεται γύρω από τον ήλιο με (κεντρομόλο) επιτάχυνση $4{,}4 \times 10^{-3}$ m/s^2 και περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της με (κεντρομόλο) επιτάχυνση στην επιφάνειά της, $3{,}37 \times 10^{-2}$ m/s^2. Οι επιταχύνσεις όμως αυτές είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την επιτάχυνση ένεκα της βαρυτικής έλξης της Γης και συνήθως σε πολλά προβλήματα τις αγνοούμε. Έτσι, για τέτοια προβλήματα, υποθέτουμε ότι η Γη είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Πρέπει να τονίσουμε ξανά, ότι στο νόμο $\vec{F} = m\vec{a}$ ή $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ τα $\vec{a}$, $\vec{p}$ προσδιορίζονται ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η δύναμη $\vec{F}$ οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις του συγκεκριμένου σώματος με άλλα σώματα. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωμάτων, που οδηγούν στην $\vec{F}$, ακολουθούν κάποιους συγκεκριμένους νόμους, όπως π.χ. νόμος της παγκόσμιας έλξης, νόμος της τριβής κ.λπ.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο αδρανειακούς παρατηρητές, που κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες, αλλά ευθύγραμμα και ομαλά ο ένας ως προς τον άλλον και παρακολουθούν κάποιο συγκεκριμένο φαινόμενο, π.χ. τη σύγκρουση δύο σωματιδίων, μια έκρηξη, το άναμα ενός λαμπτήρα και ό,τι άλλο. Επειδή οι παρατηρητές έχουν διαφορετικές ταχύτητες, καθένας τους θα περιγράψει αυτό κατά διαφορετικό τρόπο. Όμως με τη βοήθεια των θεμελιωδών νόμων της φυσικής, που είναι ίδιοι και για τους δυο, μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξη των φαινομένων, όπως τη βλέπει ο ένας και ο άλλος παρατηρητής. Ισχύουν μεταξύ των αδρανειακών συστημάτων οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου, που θα δούμε αργότερα. Στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής του Νεύτωνα, μπορούμε να πούμε, ότι οι νόμοι της μηχανικής, που είναι ουσιαστικά οι νόμοι του Νεύτωνα, είναι οι ίδιοι, (έχουν την ίδια μορφή) για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Για παράδειγμα ο νόμος $\vec{F} = m\vec{a}$ είναι ίδιος για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αλλά δεν ισχύει σε συστήματα που δεν είναι αδρανειακά.

ΜΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, ο 1ος και 2ος νόμος του Νεύτωνα ισχύουν μόνο για αδρανειακά, συστήματα αναφοράς. Κάθε σύστημα στο οποίο δεν ισχύουν οι νόμοι αυτοί λέγεται μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς (δηλαδή σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται ως προς τα αδρανειακά). Στο εδάφιο αυτό εδώ θα δούμε πώς μπορούμε να εισαγάγουμε βοηθητικές έννοιες με τις οποίες να τροποποιήσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ώστε, τυπικά τουλάχιστο, να χρησιμοποιείται και στις περιπτώσεις περιγραφής των φαινομένων από μη αδρανειακά συστήματα. Έστω ότι ένας παρατηρητής βρίσκεται σε κάποιο αδρανειακό σύστημα (αδρανειακός παρατηρητής) και παρατηρεί ένα σώμα πάνω στο οποίο ασκούνται δυνάμεις, που οφείλονται στην αλληλεπίδρασή του με άλλα σώματα (αυτές είναι οι πραγματικές δυνάμεις) και έχουν συνισταμένη $\vec{F}$, τότε ο παρατηρητής αυτός μπορεί να εφαρμόζει τους νόμους του

Νεύτωνα, άρα να εφαρμόσει τη σχέση $\vec{F} = m\vec{a}$, όπου $\vec{a}$ η επιτάχυνση του σώματος που παρατηρεί.

Για έναν μη αδρανειακό παρατηρητή δεν ισχύει αυτός ο νόμος. Μπορούμε όμως να κάνουμε τις εξής σκέψεις: ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα και ένα άλλο μη αδρανειακό, το οποίο προφανώς επιταχύνεται ως προς το πρώτο. Η επιτάχυνση $\vec{a}$, ενός υλικού σημείου ως προς το αδρανειακό σύστημα, ισούται με την επιτάχυνσή του $\vec{a}'$, ως προς το μη αδρανειακό σύστημα, συν μία πρόσθετη επιτάχυνση $\vec{a}_0$, που εξαρτάται από την κίνηση του μη αδρανειακού συστήματος και την κίνηση του υλικού σημείου. Ισχύει δηλαδή

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

Παρακάτω θα δούμε μερικές απλές περιπτώσεις, όπου το $\vec{a}' = 0$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται για το αδρανειακό σύστημα ως εξής

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{ή}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

Ο νόμος αυτός μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}' \tag{4.72}$$

Μπορεί λοιπόν να περιγράψουμε την κίνηση με τον τροποποιημένο νόμο του Νεύτωνα, ως προς το μη αδρανειακό σύστημα, όπου η επιτάχυνση του σώματος είναι $\vec{a}'$, αν πούμε ότι πάνω του εκτός από την πραγματική δύναμη $\vec{F}$ ασκείται και η πλασματική δύναμη $-m\vec{a}_0$ (ψευδοδύναμη) η οποία δεν ασκείται από κάποιο άλλο σώμα, αλλά εξαρτάται από την επιτάχυνση του μη αδρανειακού συστήματος και τη σχετική κίνηση ως προς το μη αδρανειακό σύστημα. Οι δυνάμεις αυτές λέγονται αδρανειακές δυνάμεις ή δυνάμεις D' Alembert και είναι ανάλογες της μάζας του σώματος. Το τελευταίο τις κάνει να μοιάζουν με τις δυνάμεις βαρύτητας και αυτό σχετίζεται με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Πολλές φορές είναι πιο βολικό να εξετάζουμε τα φαινόμενα ως προς μη αδρανειακά συστήματα, όπως θα δούμε με απλά παραδείγματα πιο κάτω.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

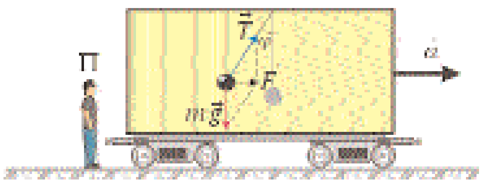
Θα δούμε μερικά παραδείγματα αντιμετώπισης φαινομένων, από την πλευρά αδρανειακού και από την πλευρά μη αδρανειακού συστήματος ή, όπως συνηθίζουμε να λέμε, παρατηρητή. Τα τελικά αποτελέσματα είναι φυσικά τα ίδια.

1ο παράδειγμα:

Έστω ότι στο εσωτερικό βαγονιού που κινείται ευθύγραμμα και οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, είναι κρεμασμένη από την οροφή μικρή σφαίρα μάζας m (βλέπε Σχ. 4.99, 4.100).

Ένας αδρανειακός παρατηρητής Π, που βρίσκεται στο έδαφος ακίνητος, μπορεί να παρατηρεί αυτά που συμβαίνουν μέσα στο βαγόνι. Ένας άλλος μη αδρανειακός παρατηρητής Π΄ βρίσκεται μέσα στο βαγόνι, δηλαδή μετέχει στη κίνηση του συστήματος. Θα εξέτασουμε αυτά που συμβαίνουν, από τη σκοπιά του κάθε παρατηρητή.

Αδρανειακός παρατηρητής



ΣΧΗΜΑ 4.99

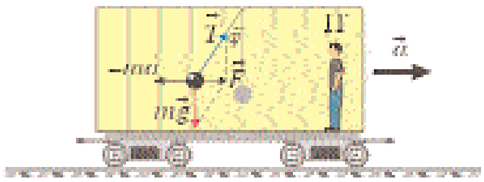
Για τον αδρανειακό παρατηρητή (Π) το βαγόνι και η σφαίρα έχουν την ίδια επιτάχυνση, $\vec{a}$, ως προς το έδαφος. Το νήμα σχηματίζει γωνία φ σε σχέση με την κατακόρυφη διεύθυνση και το φαινόμενο είναι σύμφωνο με το 2ο νόμο του Νεύτωνα, διότι στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος της $m\vec{g}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Για να κινείται όμως η σφαίρα με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$ πρέπει να δέχεται μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, που να έχει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης. Αυτή η σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων $m\vec{g}$ και $\vec{T}$. ΄Αρα το νήμα δεν είναι δυνατόν να είναι κατακόρυφο, αλλά πρέπει να σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφη, που εξαρτάται από την επιτάχυνση. ΄Αρα για τον αδρανειακό παρατηρητή (Π), η σφαίρα κινείται με επιτάχυνση $\vec{a}$, ως προς αυτόν επειδή ασκείται πάνω της σταθερή δύναμη $\vec{F} = m\vec{a}$ συνισταμένη των δυνάμεων $m\vec{g}$ και $\vec{T}$, δηλαδή:

$$\vec{F} = m\,\vec{g} + \vec{T} = m\,\vec{a} \qquad \text{(παρατηρητής Π)}$$

Εύκολα βγαίνει ότι

$$\tan\varphi = \frac{a}{g}$$

Μη αδρανειακός παρατηρητής



ΣΧΗΜΑ 4.100

Για τον μη αδρανειακό παρατηρητή (Π΄) η σφαίρα δεν έχει επιτάχυνση ως προς το όχημα. Και ο παρατηρητής αυτός βλέπει ότι το νήμα δεν είναι κατακόρυφο, αλλά σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο. Για τον παρατηρητή αυτόν, όμως, η σφαίρα ισορροπεί σε ορισμένη θέση. Για να ερμηνεύσει την ισορροπία της σφαίρας, ως προς το επιταχυνόμενο σύστημά του, πρέπει να δεχθεί ότι στη σφαίρα ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος της $m\vec{g}$, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η αδρανειακή δύναμη $-m\vec{a}$, έτσι ώστε η συνισταμένη τους να είναι μηδενική.

΄Αρα για τον μη αδρανειακό παρατηρητή (Π΄), η σφαίρα ισορροπεί με το νήμα να σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφη και με την επίδραση των δυνάμεων $m\vec{g}$, $\vec{T}$ και $-m\vec{a}$ τέτοιων ώστε:

$$m\,\vec{g} + \vec{T} - m\,\vec{a} = 0 \qquad \text{(παρατηρητής Π΄)}$$

Αυτή η σχέση είναι ίδια με την αντίστοιχη σχέση του παρατηρητή (Π) και οδηγεί στην ίδια γωνία φ.

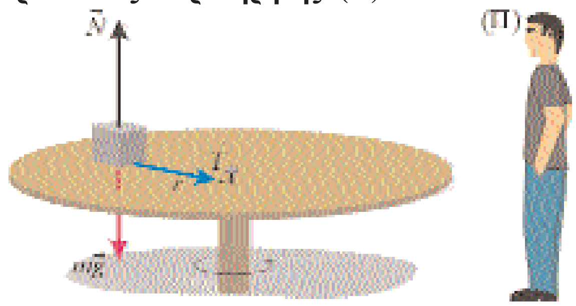
Δηλαδή και οι δύο παρατηρητές καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Εκείνο στο οποίο "διαφωνούν", οι δύο παρατηρητές, είναι η φυσική ερμηνεία του αιτίου της απόκλισης, από την κατακόρυφη θέση, του νήματος.

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

2ο Παράδειγμα

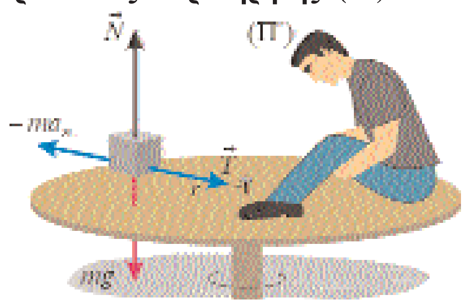
Έστω ότι σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι που περιστρέφεται ομαλά κυκλικά. Το σώμα είναι συνδεδεμένο, μέσω νήματος, με το κέντρο του τραπεζιού, όπως φαίνεται στα σχήματα 4.101, 4.102. Ας παρακολουθήσουμε τις ερμηνείες που δίνουν για αυτά που συμβαίνουν οι δύο παρατηρητές (Π και Π΄), ο καθένας από τη σκοπιά του.

Αδρανειακός παρατηρητής (Π)



ΣΧΗΜΑ 4.101

Μη αδρανειακός παρατηρητής (Π΄)



ΣΧΗΜΑ 4.102

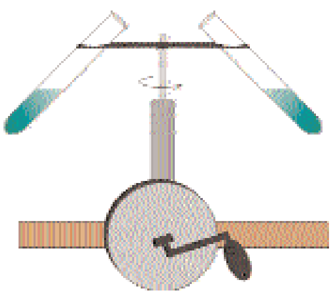
Σύμφωνα με τον παρατηρητή Π, το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά ομαλά και συνεπώς επιταχύνεται με κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}$, όπου υ η γραμμική του ταχύτητα και r η ακτίνα της τροχιάς του. Για να υπάρχει η επιτάχυνση αυτή απαιτείται κεντρομόλος δύναμη (με φορά προς το κέντρο). Η δύναμη αυτή είναι η τάση του νήματος $\vec{T}$ και έτσι γράφει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$\vec{T} = m\vec{\alpha}_\kappa \quad \text{ή} \quad T = m\frac{\upsilon^2}{r}$$ (παρατηρητής Π)

Σύμφωνα με τον παρατηρητή Π΄, το σώμα ηρεμεί και συνεπώς δεν επιταχύνεται. Για να συμβαίνει όμως αυτό, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων, που ασκούνται σε αυτό, να είναι ίση με το μηδέν. Επομένως, εκτός της τάσεως του νήματος, πρέπει να δεχθεί ότι ασκείται και η αδρανειακή δύναμη $-m\vec{\alpha}_\kappa$, αντίθετη προφανώς της τάσεως. ΄Αρα για τον παρατηρητή Π΄, το σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση των δυνάμεων $\vec{T}$ και $-m\vec{\alpha}_\kappa$, τέτοιων ώστε:

$$\vec{T} - m\vec{\alpha}_\kappa = 0 \quad \text{ή} \quad T - m\frac{\upsilon^2}{r} = 0$$ (παρατηρητής Π΄)

Δηλαδή πάλι η ίδια σχέση με τον παρατηρητή Π).



Μηχανή φυγοκέντρησης.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

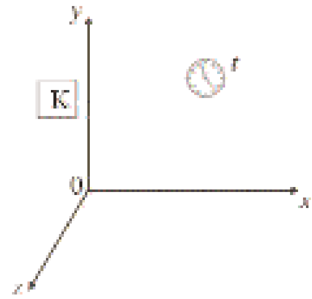
Τα φαινόμενα που οφείλονται στο γεγονός ότι το σύστημα αναφοράς δεν είναι αδρανειακό, μπορεί να αποκτήσουν πρακτικό ενδιαφέρον ή καλύτερα, όπως προαναφέραμε, να διευκολύνουν στη λογική λύσης προβλημάτων, που όμως μπορούν να λυθούν και με το συμβατικό τρόπο, χωρίς αδρανειακές δυνάμεις.

1) ΟΙ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΙΚΟΙ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΕΣ μπορούν να μελετηθούν με αυτόν τον τρόπο. Χρησιμοποιούνται στα εργαστήρια και στη βιομηχανία για τον γρήγορο διαχωρισμό από ένα μείγμα ορισμένων συστατικών του μείγματος (π.χ. βουτύρου από το γάλα). Στους διαχωριστές αυτούς, η μηχανή στρέφεται με περίπου 6×10^4 στροφές το λεπτό, πετυχαίνοντας κεντρομόλο επιτάχυνση, της τάξης 4×10^5 φορές την επιτάχυνση της βαρύτητας.

2) ΣΤΑ ΚΕΝΤΡΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΥΨΗΛΩΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΩΝ (π.χ. Houston των Η.Π.Α) μπορεί να ακολουθηθεί ανάλογη διαδικασία ανάλυσης. Οι αστροναύτες τοποθετούνται σε ένα τύμπανο, το οποίο περιστρέφεται πάνω σε τόξο ακτίνας περίπου 15 m στην άκρη μιας δοκού, που εκτελεί περίπου 24 στροφές το λεπτό πετυχαίνοντας, έτσι, επιτάχυνση του τυμπάνου, περίπου 10 φορές την επιτάχυνση της βαρύτητας.

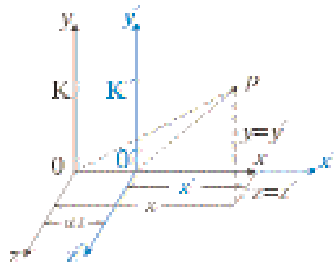
ΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΓΑΛΙΛΑΙΟΥ

Ένα φυσικό γεγονός είναι κάτι που συμβαίνει (π.χ. μια έκρηξη, το άναμα ενός μικροσκοπικού λαμπτήρα, η σύγκρουση δύο σωματιδίων, το πέρασμα ενός παλμού φωτός από καθορισμένο σημείο κ.λπ.). Για να περιγράψουμε ένα τέτοιο φυσικό γεγονός ορίζουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ($Oxyz$) ως προς το οποίο ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα. Κάθε γεγονός συμβαίνει σε κάποια θέση (x, y, z) και κάποια χρονική στιγμή t. Φανταζόμαστε ότι στο σύστημα αναφοράς βρίσκεται κάποιος παρατηρητής, ο οποίος προσδιορίζει το γεγονός ως προς αυτό το σύστημα (Σχ. 4.103).



ΣΧΗΜΑ 4.103
Σύστημα αναφοράς με ρολόϊ για μέτρηση του χρόνου.

Ας εξετάσουμε τι γίνεται όταν έχουμε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς (με σχετική κίνηση μεταξύ τους). Θέλουμε να δούμε, πώς μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες και ο χρόνος ενός γεγονότος, όταν παρατηρείται από δυο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το ένα σύστημα είναι το K και το άλλο το K΄. Για ευκολία, διαλέγουμε τους άξονες έτσι, ώστε οι άξονες Ox και $O'x'$ να βρίσκονται κατά μήκος της ευθείας της σχετικής κίνησης (βλέπε Σχ. 4.104) και οι άξονες Oy και $O'y'$ να είναι παράλληλοι μεταξύ τους όπως και ο Oz με τον $O'z'$. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι τη χρονική στιγμή $t' = t = 0$, οι αρχές των αξόνων των K, K΄ συμπίπτουν έτσι ώστε, αν u είναι η σταθερή (σχετική) ταχύτητα του K΄ ως προς το K, να ισχύει $(OO') = \vec{u}t$. Αν διαλέξουμε τις ίδιες κλίμακες για τα μήκη, στα δυο συστήματα αναφοράς, θα έχουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.104), τις επομένες εξισώσεις μετασχηματισμού, που συνδέουν τις συντεταγμένες (x', y', z', t') με τις συντεταγμένες (x, y, z, t).



ΣΧΗΜΑ 4.104
Ένα φυσικό γεγονός συμβαίνει σε ένα σημείο P. Το γεγονός αυτό παρατηρείται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται στα αδρανειακά συστήματα K, K′. Το σύστημα K′ κινείται ως προς το K με ταχύτητα $\vec{u}$.

$$x' = x - ut,\; y' = y,\; z' = z,\; t' = t \tag{4.73}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου. Σύμφωνα με την παραδοχή της κλασικής μηχανικής, ο χρόνος είναι ο ίδιος για όλα τα συστήματα, οπότε ισχύει $t = t'$. Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου δείχνουν πώς μετασχηματίζονται οι θέσεις και οι χρόνοι γεγονότων, από αδρανειακό σε αδρανειακό σύστημα.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι ένα κινητό κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (υ_x, υ_y, υ_z) ως προς το σύστημα K. Το σύστημα K΄ κινείται ως προς το K με ταχύτητα $\vec{u}$ (u, 0, 0). Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}'$ του κινητού ως προς το K΄ θα βρεθεί με χρήση των μετασχηματισμών Γαλιλαίου. Φανταζόμαστε ότι τη χρονική στιγμή t το κινητό είναι στη θέση (x, y, z) και τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ στη θέση ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$). Από το σύστημα K΄ (ο αντίστοιχος παρατηρητής) τη χρονική στιγμή $t' = t$ θα βλέπει το κινητό στη θέση ($x' = x - ut$, $y' = y$, $z' = z$) και τη χρονική στιγμή $t' + \Delta t' = t + \Delta t$ στη θέση [$x' + \Delta x' = x + \Delta x - u(t + \Delta t)$, $y' + \Delta y' = y + \Delta y$, $z' + \Delta z' = z + \Delta z$].

Προφανώς

$$\Delta x' = \Delta x - u\Delta t$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$
$$\Delta t' = \Delta t$$

άρα

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - u$$

δηλαδή

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - u$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \upsilon_y' = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \upsilon_y$$

$$\frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \upsilon_z' = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \upsilon_z$$

Στο όριο που $\Delta t \to 0$ έχουμε για τις στιγμιαίες ταχύτητες

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_x' &= \upsilon_x - u \\ \upsilon_y' &= \upsilon_y \\ \upsilon_z' &= \upsilon_z \end{aligned}\right\} \text{ δηλαδή } \quad \vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon} - \vec{u} \quad \text{ και } \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{u} \tag{4.74}$$

Αυτή είναι η σχέση συνδιασμού (πρόσθεσης) ταχυτήτων μη σχετικιστικά που την ξέρουμε από την καθημερινή εμπειρία. Συνήθως η $\vec{\upsilon}$ λέγεται **απόλυτη** και η $\vec{\upsilon}\,'$ **σχετική ταχύτητα**. Η διανυσματική σχέση ισχύει ακόμη και αν η ταχύτητα $\vec{u}$ δεν είναι κατά μήκος του άξονα οx αλλά σε τυχαία κατεύθυνση. Η ορμή σωματιδίου μετασχηματίζεται ως

$$\vec{p}\,' = \vec{p} - m\vec{u} \qquad \text{ή} \qquad \vec{p} = \vec{p}\,' + m\vec{u} \tag{4.75}$$

Αν το σωμάτιο είναι ακίνητο στο Κ, τότε ως προς το Κ΄ θα έχει ταχύτητα $-\vec{u}$ και ορμή $-m\vec{u}$.

Ας δούμε τι γίνεται με τις επιταχύνσεις.

Εύκολα βγαίνει ότι, αφού ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \upsilon_x' &= \upsilon_x - u \\ \upsilon_y' &= \upsilon_y - u_y \\ \upsilon_z' &= \upsilon_z - u_z \end{aligned}$$

(γενικευμένη μορφή μετασχηματισμού ταχυτήτων) τη χρονική στιγμή t, τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ $(= t' + \Delta t')$ θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \upsilon_x' + \Delta\upsilon_x' &= \upsilon_x + \Delta\upsilon_x - u_x \\ \upsilon_y' + \Delta\upsilon_y' &= \upsilon_y + \Delta\upsilon_y - u_y \\ \upsilon_z' + \Delta\upsilon_z' &= \upsilon_z + \Delta\upsilon_z - u_z \\ t + \Delta t &= t' + \Delta t' \end{aligned}$$

άρα

$$\frac{\Delta\upsilon_x'}{\Delta t'} = \alpha_x' = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = \alpha_x$$

$$\frac{\Delta\upsilon_y'}{\Delta t'} = \alpha_y' = \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t} = \alpha_y$$

$$\frac{\Delta\upsilon_z'}{\Delta t'} = \alpha_z' = \frac{\Delta\upsilon_z}{\Delta t} = \alpha_z$$

Δηλαδή

$$\vec{\alpha}\,' = \vec{\alpha} \tag{4.76}$$

Τα $\vec{\alpha}\,'$ και $\vec{\alpha}$ συνήθως λέγονται **σχετική** και **απόλυτη επιτάχυνση** αντιστοίχως.

Βλέπουμε ότι οι επιταχύνσεις είναι οι ίδιες στα δύο αδρανειακά συστήματα. Σε συνδιασμό με το γεγονός ότι, οι βασικές δυνάμεις στη κλασική μηχανική, εξαρτώνται από τις αποστάσεις μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωμάτων, οι οποίες αποστάσεις δεν μεταβάλλονται από σύστημα σε σύστημα (δείξτε το), προκύπτει ότι $\vec{F}' = \vec{F}$. Επομένως, $m\vec{a}' = \vec{F}'$ γίνεται $m\vec{a} = \vec{F}$ (το m είναι αναλλοίωτη σταθερά, η μάζα του σωματίου). Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής μένει ο ίδιος υπό τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Προφανώς μπορούμε να γράφουμε ακόμα ότι

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \quad \text{και} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}\,'}{\Delta t'} = \vec{F}'$$

Κατά μια διαφορετική εκδοχή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σχέση $\vec{F} = m\vec{a}$ είναι η σχέση που ορίζει τη δύναμη και αφού $m\vec{a} = m\vec{a}'$ άρα $\vec{F} = \vec{F}'$.

Μπορούμε με την ίδια συλλογιστική να πούμε ότι

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}\,'}{\Delta t} = \vec{F}' \tag{4.77}$$

Παράδειγμα 4-25

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα που ηρεμεί στους 25 ℃ είναι 346 m/s. Να βρεθεί η ταχύτητα, που μετράει παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα 25 m/s στις παρακάτω περιπτώσεις

α) Όταν απομακρύνεται από την πηγή.

β) Όταν πλησιάζει προς την πηγή.

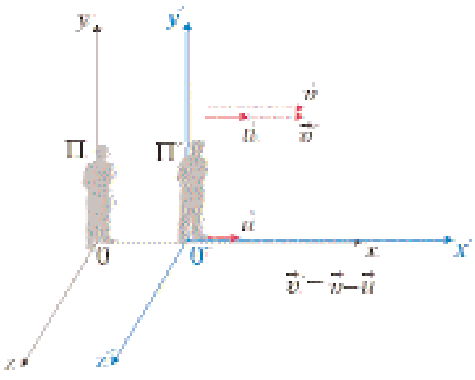
γ) Όταν κινείται κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης του ήχου.

δ) Όταν κινείται κατά τρόπο, που η ταχύτητα του ήχου που μετράει να είναι κάθετη προς την διεύθυνση κίνησης του παρατηρητή.

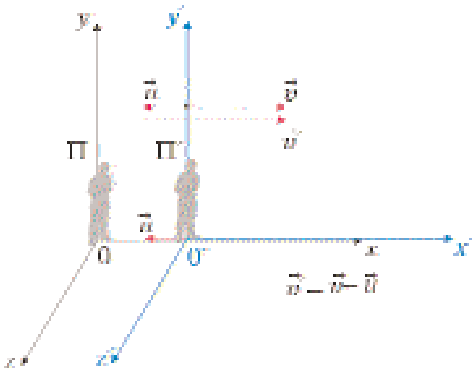
Υποθέστε ότι η πηγή ηρεμεί ως προς το έδαφος και εκπέμπει ήχο ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις.

Απάντηση

Έστω ότι το σύστημα αναφοράς $Oxyz$ είναι στερεωμένο στο έδαφος, άρα

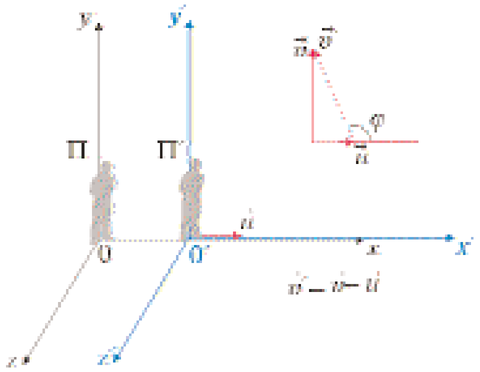


ΣΧΗΜΑ 4.105

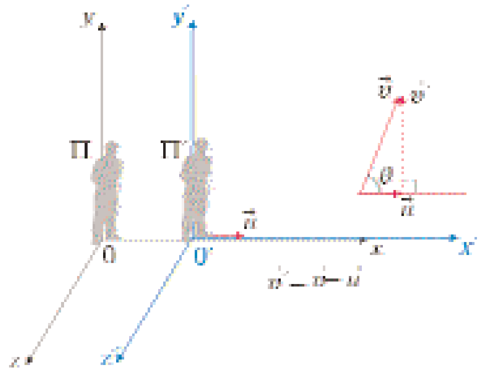


ΣΧΗΜΑ 4.106

σε ηρεμία ως προς τον αέρα. Το σύστημα $O'x'y'z'$ κινείται με τον παρατηρητή με ταχύτητα $u = 25$ m/s, $\upsilon = 346$ m/s η ταχύτητα του ήχου και τέλος υ' η ταχύτητα του ήχου ως προς το σύστημα $O'x'y'z'$, όπως μετρείται από τον κινούμενο παρατηρητή Π΄. Εφαρμόζοντας τον νόμο μετασχηματισμού ταχυτήτων του Γαλιλαίου $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$ έχουμε



ΣΧΗΜΑ 4.107



ΣΧΗΜΑ 4.108

1) Για την περίπτωση (α) $\upsilon' = \upsilon - u = 321$ m/s

2) Για την περίπτωση (β) $\upsilon' = \upsilon - (-u) = 371$ m/s, αφού ο παρατηρητής κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα των x.

3) Για την περίπτωση (γ) παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}$ και $\vec{u}$ είναι κάθετες και επομένως $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$ ή

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon^2 + u^2} = 347 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στον παρατηρητή Π΄ ο ήχος φαίνεται να διαδίδεται κατά διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x' όπου $\tan\varphi = -\dfrac{\upsilon}{u} = -13{,}8$ ή $\varphi \approx 94^{\circ}$.

4) Τέλος, για την περίπτωση (δ) η διεύθυνση διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι τέτοια ώστε να φαίνεται στον παρατηρητή Π΄ ότι κατευθύνεται κατά τον άξονα z', άρα η $\vec{\upsilon}'$ είναι κάθετη προς την $\vec{u}$ και προφανώς ισχύει

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u} \quad \text{ή} \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$$

και επομένως το μέτρο της υπολογίζεται από τη σχέση

$$\upsilon^2 = \upsilon'^2 - u^2 \quad \text{ή} \quad \upsilon' = \sqrt{\upsilon^2 - u^2} \approx 345 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στην περίπτωση αυτή ο ήχος διαδίδεται, στον ακίνητο αέρα, σχηματίζοντας γωνία θ με το άξονα των x όπου

$$\tan\theta = \frac{\upsilon}{u} = 13{,}8 \quad \text{ή} \quad \theta \approx 86^{\circ}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η δυναμική ενέργεια, στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής, όπου υπάρχουν μόνο δυνάμεις βαρύτητας, εξαρτάται από τις αποστάσεις μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωματίων και από τις μάζες που αλληλεπιδρούν. Οι μάζες παραμένουν ίδιες, είναι αμετάβλητες, ανεξάρτητα στο ποιο σύστημα παρατηρούνται (αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου), άρα η δυναμική ενέργεια μένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Ανάλογα μπορεί να πει κάποιος για την ηλεκτροστατική ενέργεια, διότι για τις ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις ισχύει ο νόμος Coulomb. Ο μετασχηματισμός για την κινητική ενέργεια συστήματος υλικών σημείων είναι γενικώς πολύπλοκος. Θα εξετάσουμε στα περί κέντρου μάζας την ενδιαφέρουσα περίπτωση τέτοιου μετασχηματισμού.

Η ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ, ΚΜ (CM), ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα, που αποτελείται από N υλικά σημεία (σωμάτια) με μάζες m_1, m_2, ... Όπως γνωρίζουμε, η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος, δίνεται από τις σχέσεις

$$X_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad Y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad Z_c = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i} \tag{4.78}$$

Αν τα υλικά σημεία κινούνται, τότε από τις σχέσεις (4.78) μπορούμε να υπολογίσουμε τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου μάζας, $\vec{V}_c$, ως εξής

$$V_{cx} = \frac{\Delta X_c}{\Delta t} = \frac{\Sigma m_i \dfrac{\Delta x_i}{\Delta t}}{\Sigma m_i} \quad \text{ή} \quad V_{cx} = \frac{\Sigma m_i \upsilon_{xi}}{\Sigma m_i}$$

και αντίστοιχα

$$V_{cy} = \frac{\Sigma m_i \upsilon_{yi}}{\Sigma m_i} \quad \text{και} \quad V_{cz} = \frac{\Sigma m_i \upsilon_{zi}}{\Sigma m_i}$$

Άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{V}_c = \frac{\Sigma m_i \vec{\upsilon}_i}{\Sigma m_i} \tag{4.79}$$

Αν η ολική μάζα είναι $M = \Sigma m_i$ τότε η σχέση (4.79) γράφεται ισοδύναμα

$$\boxed{\vec{V}_c = \frac{\Sigma m_i \vec{\upsilon}_i}{M}} \tag{4.80}$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε

$$\Sigma m_i \vec{\upsilon}_i = M \vec{V}_c$$

Το αριστερό μέλος της σχέσεις αυτής ισούται με την ολική ορμή του συστήματος. Συνεπώς

$$\boxed{\vec{p}_{o\lambda} = M \vec{V}_c} \tag{4.81}$$

Δηλαδή, η ολική ορμή του συστήματος, ισούται με το γινόμενο της ολικής μάζας επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας. Είναι δηλαδή σαν να έχουμε όλη τη μάζα συγκεντρωμένη σε ένα υλικό σημείο, που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Αν στο σύστημα αυτό των μαζών ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε αυτές θα προκαλέσουν μεταβολή στην ορμή του συστήματος. Ο ρυθμός της μεταβολής αυτής υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t}$$

η οποία μέσω της (4.81) γράφεται

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \frac{\Delta (M \vec{V}_c)}{\Delta t} \quad \text{ή}$$

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\frac{\Delta \vec{V}_c}{\Delta t} \qquad \text{ή}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\,\vec{a}_c} \tag{4.82}$$

όπου $\vec{a}_c = \dfrac{\Delta \vec{V}_c}{\Delta t}$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος. Δηλαδή, το κέντρο μάζας κινείται σαν να ήταν ένα σωματίδιο μάζας Μ στο οποίο ασκείται η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$. (Οι εσωτερικές δυνάμεις, αφού υπακούουν στην αρχή δράσης-αντίδρασης, δίνουν διανυσματικό άθροισμα μηδέν).

Από τη σχέση (4.82) παρατηρούμε ότι: αν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη είναι μηδέν (σύστημα απομονωμένο), τότε η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι επίσης μηδέν. Επομένως, το κέντρο μάζας, είτε παραμένει ακίνητο, είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ότι, όταν αναφερόμαστε στην (μοναδική) ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος, που αποτελείται από πολλά σωμάτια, όπως π.χ. ένα αεροπλάνο ή ένα αυτοκίνητο, τη Γη ή τη Σελήνη ή ακόμα ένα μόριο ή έναν πυρήνα, εννοούμε την ταχύτητα $\vec{V}_c$ του κέντρου μάζας. Ανάλογα, ισχύουν αν αναφερόμαστε σε μοναδική επιτάχυνση ή ορμή συστήματος.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Σε σύστημα μαζών, οι οποίες κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (π.χ. σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου), έστω ότι ασκούνται μόνο οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, χωρίς να υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις (σύστημα δυναμικά μονωμένο). Στην προκειμένη περίπτωση ξέρουμε, από την αρχή διατήρησης της ορμής, ότι η ολική ορμή του συστήματος είναι $\vec{p}_{o\lambda}$ = σταθ. οπότε από την σχέση (4.81) το κέντρο μάζας του παραπάνω συστήματος να κινείται με σταθερή ταχύτητα,

$$\boxed{\vec{V}_c = \frac{\vec{p}_{o\lambda}}{M}} \tag{4.83}$$

ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Θεωρούμε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (που δεν περιστρέφεται ως προς το πρώτο), το οποίο κινείται μαζί με το κέντρο μάζας του απομονωμένου συστήματος. Το σύστημα αυτό λέγεται σύστημα ηρεμίας του κέντρου μάζας ($\vec{V}_c = 0$) ή σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας και συμβολίζεται με ΚΜ ή CM. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωματίων, που μετρείται στο σύστημα ΚΜ είναι μηδέν, γι' αυτό το σύστημα ΚΜ λέγεται και σύστημα μηδενικής ορμής.

Το σύστημα αυτό είναι προτιμώτερο, γιατί πολλά πειράματα που κάνουμε στο εργαστήριο, μπορούμε να τα αναλύσουμε πιο απλά στο σύστημα κέντρου μάζας. Το σύστημα αυτό συνηθίζεται να χρησιμοποιείται στη μελέτη συγκρούσεων στη φυσική σωματιδίων.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΙΩΝ

Η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματίων (υλικών σημείων) m_1, m_2, ..., που κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, ..., ως προς κάποιο σύστημα (έστω το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου) ισούται με το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών όλων των σωματίων, δηλαδή

$$K = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 + \ldots \tag{4.84}$$

ή συνοπτικά

$$\boxed{K = \frac{1}{2} \Sigma m_i \upsilon_i^2} \tag{4.85}$$

Αφού η σχέση (4.81) της ορμής ενός συστήματος σωματίων μας θυμίζει την έκφραση της ορμής ενός σωματίου μάζας M (όση η ολική μάζα), που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, $\vec{V}_c$, θα μπορούσαμε να υποθέσουμεότι και η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματίων επίσης, θυμίζει την κινητική ενέργεια ενός σωματίου μάζας M και έτσι ότι μπορεί να αναχθεί στη μορφή

$$K = \frac{1}{2} M V_c^2 \ (!)$$

Αυτό όμως, όπως θα δούμε, είναι λάθος! Η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος είναι μεγαλύτερη από την τιμή

$$\frac{1}{2} M V_c^2$$

Στη συνέχεια θα δούμε το γιατί.

Ας ξαναγράψουμε την σχέση (4.84) με μορφή που να περιέχει τις ταχύτητες των σωματίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{V}_c$ ως προς το σύστημα του εργαστηρίου. Τις ταχύτητες των σωματίων στο νέο σύστημα αναφοράς θα τις υπολογίσουμε με τη βοήθεια του νόμου μετασχηματισμού ταχυτήτων του Γαλιλαίου.

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{V}_c,\ \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{V}_c, \ldots,\ \vec{\upsilon}_\nu' = \vec{\upsilon}_\nu - \vec{V}_c \tag{4.86}$$

από τις οποίες παίρνουμε

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{V}_c,\quad \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_2' + \vec{V}_c, \ldots,\quad \vec{\upsilon}_\nu = \vec{\upsilon}_\nu' + \vec{V}_c \tag{4.87}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.87) στη σχέση (4.85) παίρνουμε

$$K = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\vec{\upsilon}_i' + \vec{V}_c)^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_i \upsilon_i'^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i V_c^2 + \vec{V}_c (\Sigma m_i \vec{\upsilon}_i') \qquad \text{ή}$$

$$K = \frac{1}{2} \Sigma m_i \upsilon_i'^2 + \frac{1}{2} M V_c^2 = K_{\varepsilon\sigma.} + \frac{1}{2} M V_c^2 \tag{4.88}$$

διότι $\Sigma m_i \vec{\upsilon}_i' = \Sigma \vec{p}_i' = \vec{p}_{o\lambda}' = 0$, αφού πρόκειται για το σύστημα του ΚΜ.

Συνεπώς, η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματίων, που κινούνται ως προς ένα σύστημα (π.χ. το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου) περιλαμβάνει δύο όρους: Ο ένας όρος είναι η μεταφορική κινητική ενέργεια $\frac{1}{2} M V_c^2$. Αυτή είναι η ενέργεια που θα είχε το σύστημα αν εκινείτο με μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{V}_c$ (οπότε κάθε στιγμή όλα τα σημεία, θα είχαν ίδια ταχύτητα, $\vec{V}_c$). Ο άλλος όρος $K_{εσ}$ είναι η κινητική ενέργεια των σωματίων, όπως αυτή φαίνεται από το σύστημα του κέντρου μάζας. Η ενέργεια αυτή λέγεται και **εσωτερική κινητική ενέργεια** του συστήματος και είναι προφανώς ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς. Τελικά

$$\boxed{K = K_{εσ} + \frac{1}{2} M V_c^2}$$

Θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω στα εξής δύο θεωρήματα, που αφορούν στο σύστημα κέντρου μάζας (ΚΜ). Στους τύπους τα τονούμενα μεγέθη είναι μετρημένα ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας.

Θεώρημα 1ο

Η ολική ορμή συστήματος σωματίων ως προς το σύστημα του ΚΜ είναι μηδέν. Δηλαδή

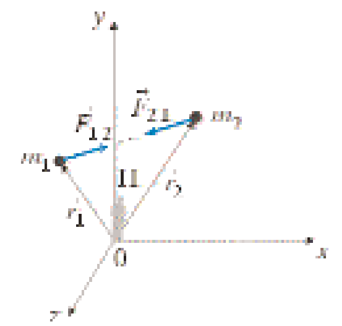
$$\boxed{\vec{p}\,'_c = \Sigma m_i \vec{v}\,'_i = 0} \tag{4.89}$$

Θεώρημα 2ο

Η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματίων ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς (π.χ. του εργαστηρίου), ισούται με την κινητική ενέργεια της ολικής μάζας συγκεντρωμένης στο κέντρο μάζας, συν την κινητική ενέργεια του συστήματος ως προς το σύστημα του ΚΜ, δηλαδή

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\Sigma m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M V_c^2} \quad ή \quad \boxed{K = K_c' + \frac{1}{2} M V_c^2} \tag{4.90}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΙΩΝ ΠΟΥ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΟΥΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ - ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΜΑΖΑ



ΣΧΗΜΑ 4.109

Δύο σωμάτια m_1, m_2 που υπόκεινται μόνο στην αλληλεπίδρασή τους.

Ας μελετήσουμε δύο σωμάτια τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις που υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα χωρίς να ασκούνται άλλες εξωτερικές δυνάμεις. Π.χ. το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο ενός μονωμένου ατόμου υδρογόνου που αλληλεπιδρούν μόνο με ηλεκτροστατικές δυνάμεις. Ας μελετήσουμε τη σχετική κίνηση των δυο σωματίων (βλέπε Σχ. 4.109). Η εξίσωση κίνησης για κάθε ένα σωμάτιο ως προς αδρανειακό σύστημα είναι αντίστοιχα

$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} \quad και \quad \vec{F}_{21} = m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} \quad ή$$

$$\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t}, \quad \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

Αφαιρώντας τις κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} - \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

όμως $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ άρα

$$\vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{\Delta(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{\Delta t}$$

Όμως $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{12}$ είναι η ταχύτητα του m_1 σε σχέση με το m_2 οπότε

$$\frac{\Delta \vec{v}_{12}}{\Delta t} = \vec{\alpha}_{12}$$

όπου $\vec{\alpha}_{12}$ είναι η επιτάχυνση του m_1 σε σχέση με το m_2. Αν ορίσουμε την ποσότητα μ, η οποία ονομάζεται **ανηγμένη μάζα** του συστήματος των δυο σωματίων, ως

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad \text{ή} \tag{4.91}$$

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \mu \vec{\alpha}_{12}} \tag{4.92}$$

Το σπουδαίο αυτό αποτέλεσμα στο οποίο οδηγηθήκαμε λέει ότι:

Η σχετική κίνηση δύο σωματίων, που αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους, είναι ισοδύναμη με την κίνηση ενός σωματίου μάζας μ, ίσης με την ανηγμένη μάζα, πάνω στο οποίο ασκείται δύναμη ίση με τη δύναμη αλληλεπίδρασής τους. Επομένως, όταν περιγράφουμε την κίνηση δύο σωματίων που αλληλεπιδρούν μόνον μεταξύ τους, μπορούμε να ξεχωρίσουμε την κίνηση του συστήματος, στη κίνηση του ΚΜ, που έχει σταθερή ταχύτητα και τη σχετική κίνηση των δύο σωματίων, που μας δίνει η εξίσωση

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{\alpha}_{12}$$

που αναφέρεται στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ.

Έτσι μετασχηματίζουμε το πρόβλημα της κίνησης των δύο αλληλεπιδρώντων σωματίων σε κίνηση ενός σωματίου μάζας μ στο οποίο ασκείται η δύναμη αλληλεπιδρασής τους.

Εφαρμογές:

1) Αν η μάζα του ενός σωματίου είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του άλλου π.χ. $m_2 >> m_1$, τότε η ανηγμένη μάζα μ θα είναι κατά προσέγγιση ίση με τη μικρή μάζα. Πράγματι

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \approx m_1 \quad \left(\text{αφού } \frac{m_1}{m_2} \approx 0\right)$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μελέτη της κίνησης ενός τεχνητού δορυφόρου γύρω από τη γη. Στην περίπτωση αυτή η ανηγμένη μάζα είναι περίπου ίση με τη μάζα του δορυφόρου.

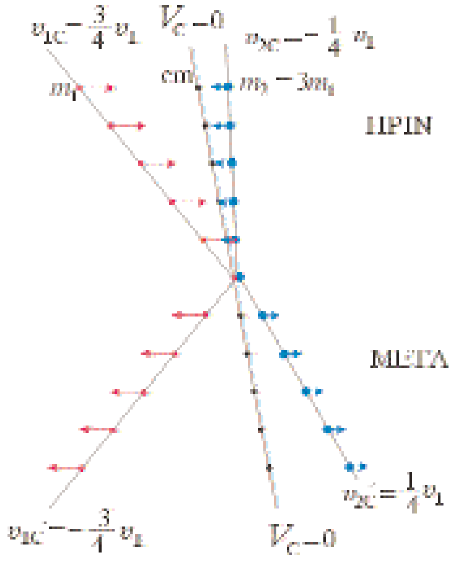
2) Αν τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2$ τότε η ανηγμένη μάζα θα είναι

$$\mu = \frac{m\,m}{m + m} = \frac{m}{2}$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο πυρήνας του δευτερίου, που αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο με $m_p \approx m_n$.

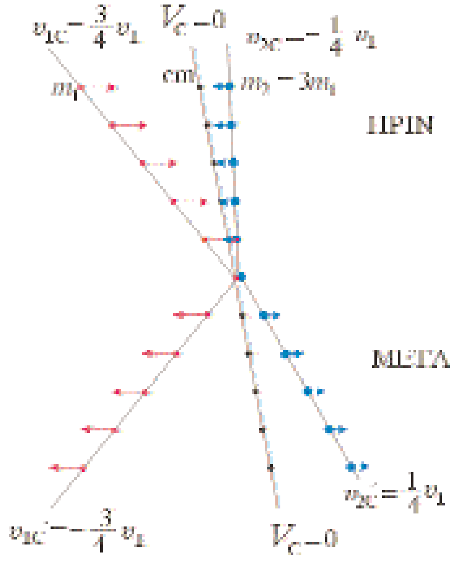
Παράδειγμα 4-26

Έστω σωμάτιο μάζας m_1, που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1$ ως προς το σύστημα του εργαστηρίου και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σωμάτιο μάζας $m_2 = 3m_1$ αρχικά ακίνητο ως προς το ίδιο σύστημα. Να μελετηθεί η κρούση από τη σκοπιά του παρατηρητή, που είναι ακίνητος στο σύστημα του εργαστηρίου και από τη σκοπιά του παρατηρητή που είναι ακίνητος στο σύστημα του κέντρου μάζας (βλ. Σχ. 4.110).



ΣΧΗΜΑ 4.110

Ελαστική κρούση (μετωπική) μάζας m_1 με άλλη αρχικά ακίνητη μάζα $3m$, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.



ΣΧΗΜΑ 4.111

Ελαστική κρούση (μετωπική) μάζας m με άλλη αρχικά ακίνητη μάζα $3m$, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Απάντηση

α) Μελέτη της κρούσης από τη σκοπιά του συστήματος του εργαστηρίου (προφανώς η κίνηση είναι πάντοτε πάνω σε μια ευθεία).

Ο παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς το σύστημα του εργαστηρίου παρατηρεί

Πριν την κρούση:

1) Το σωμάτιο m_1 να κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1$ προς το ακίνητο m_2.

2) Το σωμάτιο m_2 να είναι ακίνητο και

3) Το κέντρο μάζας να κινείται προς το m_2 με ταχύτητα που το μέτρο της υπολογίζεται από τη σχέση (4.79)

$$V_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{ή} \quad V_c = \frac{1}{4} v_1$$

Μετά την κρούση:

1) Το σωμάτιο m_1 να κινείται με ταχύτητα

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -\frac{1}{2} v_1$$

απομακρυνόμενο από το m_2.

2) Το σωμάτιο m_2 να κινείται με ταχύτητα

$$\upsilon_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad ή \quad \upsilon_2' = \frac{1}{2}\upsilon_1$$

απομακρυνόμενο από το m_1.

3) Το κέντρο μάζας να κινείται προς το m_2 με ταχύτητα, υπολογίζεται από τη σχέση

$$V_c' = \frac{m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'}{m_1 + m_2} \quad ή$$

$$V_c' = \frac{m_1\left(-\frac{1}{2}\upsilon_1\right) + 3m_1\frac{1}{2}\upsilon_1}{4m_1} \quad ή$$

$$V_c' = \frac{\upsilon_1}{4} = V_c$$

Παρατηρούμε ότι η κίνηση του κέντρου μάζας παραμένει αμετάβλητη μετά την κρούση.

β) **Μελέτη της κρούσης από τη σκοπιά του συστήματος κέντρου μάζας**.

Ο παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας παρατηρεί:

Πριν την κρούση:

1) Το σωμάτιο m_1 να κινείται προς το m_2 με ταχύτητα

$$\upsilon_{1c} = \upsilon_1 - V_c = \frac{3}{4}\upsilon_1$$

2) Το σωμάτιο m_2 να κινείται προς το κέντρο μάζας με ταχύτητα

$$\upsilon_{2c} = 0 - V_c = -\frac{1}{4}\upsilon_1 \quad και$$

3) Το κέντρο μάζας να παραμένει ακίνητο.

Μετά την κρούση:

Η συνολική ορμή p_c πριν την κρούση ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι

$$p_c = m_1\frac{3}{4}\upsilon_1 - m_2\frac{1}{4}\upsilon_1 = m_1\frac{3}{4}\upsilon_1 - 3m_1\frac{1}{4}\upsilon_1 \quad ή \quad p_c = 0$$

όπως αναμέναμε. Μετά την κρούση θα είναι πάλι $p_c' = 0$ γεγονός που σημαίνει ότι μετά την κρούση τα σωμάτια m_1 και m_2 θα έχουν αντίθετες ορμές στο σύστημα του κέντρου μάζας. Προσέξτε, στο σχήμα 4.111 τη συμμετρία των κινήσεων σε αυτή την περίπτωση. Από την παραπάνω μελέτη παρατηρούμε τη μεγάλη απλότητα, ένεκα συμμετρίας, στη περιγραφή κρούσεων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας. Διότι, είτε οι κρούσεις είναι ελαστικές, είτε ανελαστικές, διατηρείται η ορμή και στο σύστημα του κέντρου μάζας η ολική ορμή είναι μηδέν. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν σε δύο και σε τρεις διαστάσεις.

Ας υπολογίσουμε τώρα τη συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος:

α) **Ως προς το σύστημα του εργαστηρίου**

$$K_L = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 \tag{1}$$

β) **Ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας**

$$K_c = \frac{1}{2} m_1 (\upsilon_1 - V_c)^2 + \frac{1}{2} m_2 (0 - V_c)^2 \qquad \text{ή} \qquad (2)$$

$$K_c = \frac{1}{2} m_1 \left(\upsilon_1 - \frac{1}{4} \upsilon_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 V_c^2 \qquad \text{ή}$$

$$K_c = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{3}{4} \upsilon_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\upsilon_1}{4} \right)^2 \qquad \text{ή}$$

$$K_c = \frac{3}{8} m_1 \upsilon_1^2 \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) παρατηρούμε πώς μετασχηματίζεται η κινητική ενέργεια του συστήματος, από το ένα σύστημα του εργαστηρίου, στο άλλο του κέντρου μάζας και προφανώς δεν παρέμεινε αναλλοίωτη όπως έχουμε αναπτύξει και προηγουμένως. Πράγματι αν αφαιρέσουμε τις (1) και (2) έχουμε

$$K_L - K_c = \frac{1}{8} m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_c^2 \qquad \text{ή}$$

$$\boxed{K_L = K_c + \frac{1}{2} 4 m_1 V_c^2}$$

Όπου $K_c = \frac{3}{8} m_1 \upsilon_1^2$ η **εσωτερική ενέργεια του συστήματος** (ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς) και $\frac{1}{2} 4 m_1 V_c^2$ η μεταφορική κινητική ενέργεια.

Σχόλιο: Αν στη σχέση (2) αντικαταστήσουμε την ταχύτητα V_c από τη σχέση

$$V_c = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$K_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1^2$$

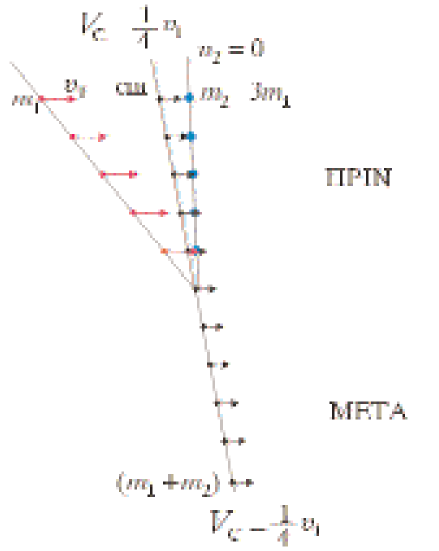
η οποία σύμφωνα με τον ορισμό της ανηγμένης μάζας του συστήματος, γράφεται

$$\boxed{K_c = \frac{1}{2} \mu \upsilon_1^2}$$

Άρα, η εσωτερική κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματίων, δηλαδή, η ενέργεια του συστήματος ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας, είναι ίση με την κινητική ενέργεια ενός σωματίου μάζας μ, που κινείται με την (σχετική) ταχύτητα του ενός σωματίου ως προς το άλλο.

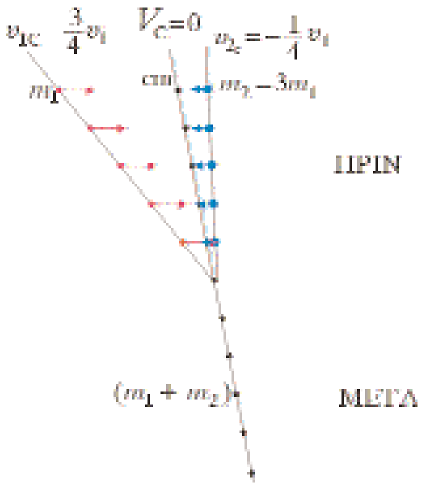
Παράδειγμα 4-27

Να μελετηθεί η προηγούμενη κρούση αν ήταν τελείως ανελαστική (πλαστική), από τη σκοπιά των δυο παρατηρητών, του παρατηρητή από το εργαστήριο και του παρατηρητή από το κέντρο μάζας. Δίνουμε μόνο σχήματα, δουλέψτε το θέμα μόνοι σας.



ΣΧΗΜΑ 4.112

Πλαστική κρούση μάζας *m* με άλλη μάζα 3 *m* αρχικά ακίνητη, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.



ΣΧΗΜΑ 4.113

Πλαστική κρούση μάζας *m* με άλλη μάζα 3 *m* αρχικά ακίνητη, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Σχόλιο:

Στην προκειμένη περίπτωση η εσωτερική ενέργεια του συστήματος

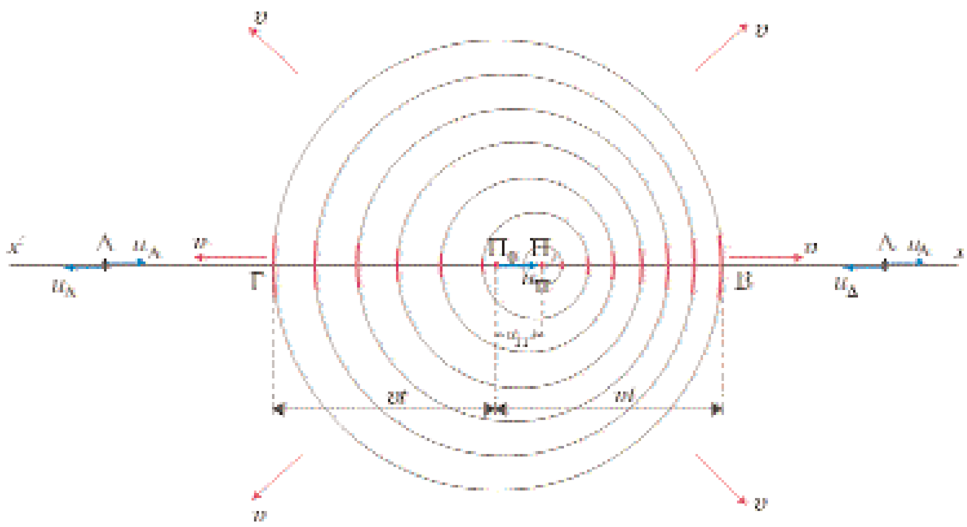
$$K_c = \frac{1}{2}\mu\, v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

είναι ίση με την απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την τέλεια ανελαστική κρούση τους. Βλέπετε γιατί;

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

Η συχνότητα (το ύψος) του ήχου, που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής (δέκτης), εξαρτάται από τον αριθμό των κυματισμών, “κύματα”, τα οποία φθάνουν στο αυτί του παρατηρητή ανά δευτερόλεπτο. ΄Οταν λοιπόν η ηχητική πηγή (πομπός Π) ή ο παρατηρητής (δέκτης Δ) ή και οι δύο κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο, ο αριθμός των κυματισμών που φτάνουν στον παρατηρητή αλλάζει ανάλογα, με αποτέλεσμα ο παρατηρητής να αντιλαμβάνεται διαφορετική συχνότητα από αυτήν της πηγής. Αυτή η αλλαγή της συχνότητας, που οφείλεται στη σχετική κίνηση πομπού - δέκτη ονομάζεται **φαινόμενο Doppler (ή μετατόπιση Doppler).**

Για τη μελέτη του φαινομένου Doppler θεωρούμε το δέκτη Δ και την πηγή Π να κινούνται στην ίδια ευθεία, $x'x$, με ταχύτητες $\vec{u}_\Delta$ και $\vec{u}_\Pi$ αντίστοιχα. Η θέση της πηγής τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι η Π_0 και τη χρονική στιγμή t η Π_t, άρα η απόσταση $(\Pi_0\Pi_t)$ είναι ίση με $u_\Pi t$. Αν η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\vec{v}$, τη χρονική στιγμή t το μέτωπο κύματος που έδωσε η πηγή όταν βρισκόταν στη θέση Π_0 θα είναι σφαιρική επιφάνεια ακτίνας vt και η απόσταση της πηγής από το σημείο Γ της επιφάνειας αυτής θα είναι



ΣΧΗΜΑ 4.114

Μια πηγή Π κινείται ομαλά, με ταχύτητα $\vec{u}_\Pi$ και παρατηρητή Δ κινείται ομαλά με ταχύτητα $\vec{u}_\Delta$ στην περιοχή $(\Pi_t\Gamma)$ ή στην περιοχή $(\Pi_t B)$ πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενος από την πηγή (Π). Ο παρατηρητής στην περιοχή $(\Pi_t\Gamma)$ "αντιλαμβάνεται" μήκος κύματος $\lambda' > \lambda$ και στην περιοχή $\Pi_t B$ $\lambda'' < \lambda$, όπου λ το μήκος κύματος αν η πηγή ήταν ακίνητη.

$$(\Pi_t\Gamma) = vt + u_\Pi t = (v + u_\Pi)t \tag{4.93}$$

Αν f η συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή, τότε σε χρόνο t έχει εκπέμψει

$$N = ft \tag{4.94}$$

αριθμό "κυμάτων", που περιέχονται στο διάστημα $(\Pi_t\Gamma)$. Το μήκος κύματος θα είναι λ', όπου $\lambda' = \dfrac{(\Pi_t\Gamma)}{N}$ ή μέσω των (4.93) και (4.94) έχουμε

$$\lambda' = \frac{(v + u_\Pi)t}{f\,t} \qquad \text{ή} \qquad \lambda' = \frac{v + u_\Pi}{f} \tag{4.95}$$

όμοια σκεπτόμενοι για την περιοχή $(\Pi_t B)$ θα έχουμε

$$\lambda'' = \frac{v - u_\Pi}{f} \tag{4.96}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε το δέκτη (Δ) να κινείται στην ευθεία xx' πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενος της πηγής με ταχύτητα $\vec{u}_\Delta$, θα αντιλαμβάνεται τα κύματα με ρυθμό (συχνότητα) που καθορίζεται από τη σχετική ταχύτητα $v_{\sigma\chi} = v \pm u_\Delta$ (βλ σχήμα 4.114).

(Προφανώς (+) όταν οι ταχύτητες $\vec{u}_\Delta$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπες και (−) όταν είναι ομόρροπες, ανεξάρτητα του αν ο δέκτης (Δ) βρίσκεται στην περιοχή $x'\Pi_t$ ή στην $\Pi_t x$).

Η συχνότητα που θα αντιλαμβάνεται ο δέκτης (Δ) θα είναι

α) Αν βρίσκεται στην περιοχή $x'\Pi_t$

$$f' = \frac{v_{\sigma\chi}}{\lambda'}$$

ή μέσω των (4.95) και (4.97) έχουμε

$$\boxed{f' = \frac{v \pm u_\Delta}{v + u_\Pi} f} \tag{4.98}$$

β) Αν βρίσκεται στην περιοχή $\Pi_t x$

$$f'' = \frac{\upsilon_{\sigma\chi}}{\lambda''}$$

ή μέσω των (4.96) και (4.97) έχουμε

$$f'' = \frac{\upsilon \pm u_\Delta}{\upsilon - u_\Pi} f \qquad (4.99)$$

Αν συγχωνεύσουμε τις σχέσεις (4.98) και (4.99) παίρνουμε τη γενική σχέση

$$f' = \frac{\upsilon \pm u_\Delta}{\upsilon \pm u_\Pi} f \qquad (4.100)$$

Συμπερασματικά, για να υπολογίσουμε τη συχνότητα f', που αντιλαμβάνεται παρατηρητής ή δέκτης (Δ), που κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_\Delta$, σχετικά με πηγή, που κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_\Pi$, αρκεί να υπολογίσουμε τις σχετικές ταχύτητες παρατηρητή και ήχου και πηγής και ήχου, όπως φαίνεται στη σχέση (4.100).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχει και η περίπτωση της κίνησης του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα (πχ. αέρας), τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του κύματος ως προς το ακίνητο μέσο, την αντίστοιχη απόλυτη ταχύτητα του κύματος: $\upsilon' = \upsilon \pm \upsilon_{\mu έσο}$ [(+) όταν η $\vec{\upsilon}$ και η $\vec{\upsilon}_{\mu έσο}$ είναι ομόρροπες και (–) όταν η $\vec{\upsilon}$ και η $\vec{\upsilon}_{\mu έσο}$ είναι αντίρροπες]. Μπορούμε να εργαστούμε και με άλλο τρόπο, να πάμε στο σύστημα ηρεμίας του μέσου, οπότε θα έπρεπε να μετασχηματιστούν κατάλληλα οι ταχύτητες πηγής και δέκτη.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Α. Όταν η πηγή είναι ακίνητη και κινείται ο παρατηρητής με ταχύτητα $\vec{u}_\Delta$, πλησιάζοντας την πηγή ή απομακρυνόμενος από αυτήν, αντιλαμβάνεται συχνότητες

$$f' = f\,\frac{\upsilon + u_\Delta}{\upsilon}$$

ή

$$f'' = f\,\frac{\upsilon - u_\Delta}{\upsilon} \qquad \text{αντίστοιχα} \qquad (4.101)$$

Προφανώς το μήκος κύματος λ παραμένει αμετάβλητο και στις δύο περιπτώσεις που η πηγή είναι ακίνητη.

Σχόλια: 1) Αν $u_\Delta > \upsilon$, από την (4.101) έχουμε $f'' < 0$, γεγονός που σημαίνει ότι τα ηχητικά κύματα δε φτάνουν στον παρατηρητή.

2) Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι, όταν ο παρατηρητής πλησιάζει την ακίνητη πηγή, αντιλαμβάνεται ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο), ενώ όταν απομακρύνεται από την πηγή, αντιλαμβάνεται ήχο μικρότερης συχνότητας (βαρύτερο).

Β. Όταν ο παρατηρητής είναι ακίνητος και κινείται η πηγή, με ταχύτητα $\vec{u}_\Pi$, πλησιάζοντάς τον ή απομακρυνόμενη από αυτόν, αντιλαμβάνεται συχνότητες:

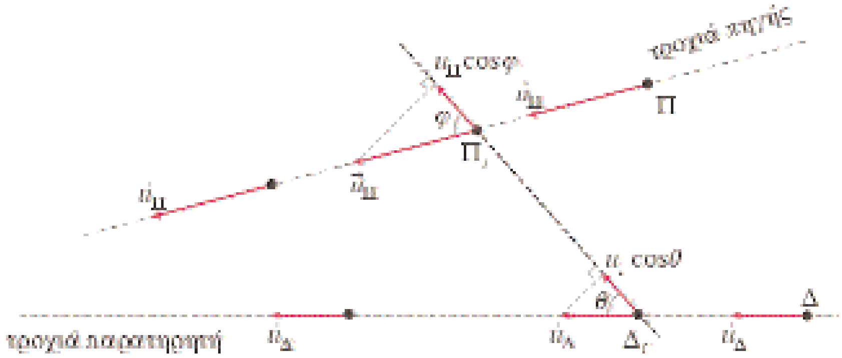
$$f' = f\,\frac{\upsilon}{\upsilon - u_\Pi} \quad \text{ή} \qquad (4.102)$$

$$f'' = f\,\frac{\upsilon}{\upsilon + u_\Pi} \quad \text{αντίστοιχα}$$

Σχόλια: 1) Αν $u_\Pi > \upsilon$, από την (4.102) έχουμε $f' < 0$, γεγονός που σημαίνει ότι η πηγή φτάνει στον ακίνητο παρατηρητή, πριν από τα ηχητικά κύματα.

2) Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι, όταν η πηγή πλησιάζει τον ακίνητο παρατηρητή, τότε αυτός αντιλαμβάνεται ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο), ενώ όταν απομακρύνεται από τον παρατηρητή, αντιλαμβάνεται ήχο μικρότερης συχνότητας (βαρύτερο).

Γ. Όταν η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις. Στην προκειμένη περίπτωση η συχνότητα του ήχου, που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δεν είναι σταθερή. Μπορούμε όμως να βρούμε τη συχνότητα που ακούμε μια χρονική στιγμή. Η στιγμιαία αυτή συχνότητα βρίσκεται, αν στην σχέση (4.100), αντικαταστήσουμε τις ταχύτητες με τις προβολές των ταχυτήτων u_Δ και u_Π πάνω στην ευθεία που ενώνει, τη συγκεκριμένη χρονική



ΣΧΗΜΑ 4.115

Όταν η πηγή Π και ο παρατηρητής Δ κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις, τότε χρησιμοποιούμε τις προβολές των ταχυτήτων $\vec{u}_\Pi$ και $\vec{u}_\Delta$ πάνω στην ευθεία που συνδέει τον παρατηρητή με την πηγή.

στιγμή, τον παρατηρητή με την πηγή (Σχ. 4.115). Οπότε η συχνότητα του ήχου, που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Δ θα είναι

$$f' = f\,\frac{\upsilon + u_\Pi \cos\varphi}{\upsilon + u_\Delta \cos\theta} \qquad (4.103)$$

Δ. Όταν η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται στην ίδια διεύθυνση με κίνηση μη ομαλή.

Στην περίπτωση αυτή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα που είναι μεταβλητή. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την στιγμιαία συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, αν στη σχέση (4.100) αντικαταστήσουμε τις στιγμιαίες ταχύτητες του παρατηρητή και της πηγής.

Η γενικότερη περίπτωση είναι προφανής.

Πρέπει να πούμε ότι, στις περιπτώσεις Γ και Δ, η εγκάρσια μετατόπιση της ευθείας μεταξύ πηγής και παρατηρητή, πρέπει να μην είναι μεγάλη σε μια περίοδο, σε σχέση με το μήκος κύματος, γιατί τότε τα πράγματα γίνονται πιο πολύπλοκα. Δηλαδή πρέπει η συχνότητα να είναι αρκούντως μεγάλη, για να έχουν, νόημα οι υπολογισμοί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ DOPPLER

Το φαινόμενο Doppler παρατηρείται σε όλα τα είδη κυμάτων, που διαδίδονται στον αέρα ή στο κενό. Έτσι παρατηρείται τόσο στην Ακουστική όσο και στην Οπτική. Στην Ακουστική μπορούμε να το αντιληφθούμε με το αυτί ως μεταβολή του ύψους του ήχου, στην Οπτική ως μετατόπιση φασματικών γραμμών στο φάσμα. Το φαινόμενο αυτό έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές, π.χ.

1) Στο φαινόμενο αυτό στηρίζεται η λειτουργία των radar της αστυνομίας για τον έλεγχο των ορίων ταχύτητας των οχημάτων. Τα radar αυτά χρησιμοποιούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα πολύ μεγάλης συχνότητας ($f = 9$ GHz).

2) Το φαινόμενο χρησιμοποιείται στην ιατρική για τη μέτρηση της ταχύτητας του αίματος με υπερήχους. Ανάλογα γίνονται στην μελέτη ροών στην ρευστομηχανική.

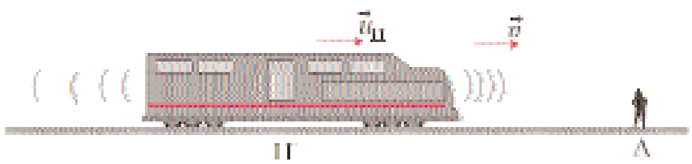
3) Η Αστρονομία επίσης, με τη βοήθεια του φαινομένου αυτού, υπολογίζει την ταχύτητα των ουρανίων σωμάτων, στηριζόμενη στη μετατόπιση των φασματικών γραμμών.

4) Το φαινόμενο Doppler παρατηρείται και στα υδάτινα κύματα. Έτσι αν ένας παρατηρητής κινείται με μικρή βάρκα αντίθετα προς την φορά του ανέμου, τα κύματα πλήττουν τη βάρκα με μεγαλύτερη συχνότητα από την κανονική. Αντίθετα αν κινείται ομόρροπα προς τη φορά του ανέμου, η συχνότητα με την οποία τα κύματα πλήττουν τη βάρκα είναι μικρότερη της κανονικής.

Σχόλιο: Ο ακριβής τύπος Doppler για ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαφέρει από αυτόν για τον ήχο, ένεκα φαινομένων της ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας, όμως τα αποτελέσματα είναι ποιοτικά παρόμοια (βλ. Σχετικότητα). Επίσης και για ηλεκτρομαγνητικά κύματα για πολύ μικρές ταχύτητες παρατηρητή και πηγής ως προς την ταχύτητα του φωτός, οι δυο τύποι δίνουν πρακτικώς τα ίδια αποτελέσματα.

Παράδειγμα 4-28

Σε ένα σημείο ευθύγραμμης σιδηροδρομικής γραμμής βρίσκεται ακίνητος ένας άνθρωπος. Μια ταχεία αμαξοστοιχία πλησιάζει προς αυτόν με σταθερή ταχύτητα, ενώ ταυτόχρονα σφυρίζει επί χρονικό διάστημα t. Ο παραγόμενος ήχος έχει συχνότητα 600 Hz και γίνεται αντιληπτός επί χρονικό διάστημα 25 s. Να βρεθούν:



ΣΧΗΜΑ 4.116

α) Η ταχύτητα της αμαξοστοιχίας.

β) Ο χρόνος t που διήρκησε η εκπομπή του ήχου της αμαξοστοιχίας. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, 340 m/s.

Απάντηση

α) Η ταχύτητα με την οποία κινείται η αμαξοστοιχία βρίσκεται με χρήση της σχέσης

$$f' = f \frac{v}{v - u_\Pi}$$

από την οποία λύνοντας ως προς u_Π παίρνουμε

$$u_{\Pi} = \frac{v\left(f' - f\right)}{f'}$$

και μετά από αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε

$$u_{\Pi} = \frac{340 \times (680 - 600)}{680}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα η ταχύτητα της αμαξοστοιχίας είναι $u_{\Pi} = 40\,\text{m/s}$ ή $u_{\Pi} = 144\,\text{km/h}$.

β) Όπως είναι γνωστό, η συχνότητα εκπομπής μιας πηγής ορίζεται ως ο λόγος του αριθμού των "κυμάτων", που εκπέμφθηκαν από την πηγή, προς τον αντίστοιχο χρόνο εκπομπής.

Ο αριθμός όμως των κυμάτων, που εξέπεμψε η πηγή, είναι ο ίδιος με τον αριθμό των κυμάτων που φθάνουν στον παρατηρητή.

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{N}{t} \\ f' &= \frac{N}{t'} \end{aligned}\right\} \quad \text{ή} \quad t = \frac{f'\,t'}{f} \quad \text{ή} \quad t = \frac{680 \times 25}{600}\ \text{s} \approx 28\ \text{s}$$

Παράδειγμα 4-29

Κύμα υπερήχων 2,00 MHz που διαδίδεται μέσα στο σώμα της μητέρας, ανακλάται από το τοίχωμα της καρδιάς του αγέννητου παιδιού, η οποία εκείνη τη στιγμή κινείται προς το μηχάνημα υπερήχων, που παράγει τα κύματα. Ο ανακλασθείς ήχος συντίθεται με τον παραγόμενο και δημιουργούνται διακροτήματα συχνότητας 160 Hz. Η ταχύτητα των υπερήχων στο σώμα είναι 1500 m/s. Υπολογίστε την ταχύτητα του τοιχώματος της καρδιάς τη στιγμή της μέτρησης.

Απάντηση

Έστω ότι η κίνηση του τοιχώματος της καρδιάς του αγέννητου είναι προς τον πομποδέκτη υπερήχων με ταχύτητα v_{κ}. Η συχνότητα των υπερήχων είναι f και η ταχύτητα στο μητρικό σώμα v. Όταν ο υπέρηχος κατευθύνεται προς την καρδιά, η καρδιά είναι δέκτης, άρα "αισθάνεται" συχνότητα

$$f' = f\,\frac{v + v_{\kappa}}{v}$$

Συγχρόνως όμως γίνεται πομπός, που πλησιάζει προς τον δέκτη του μηχανήματος υπερήχων, άρα αυτό μετρά συχνότητα

$$f'' = f'\,\frac{v}{v - v_{\kappa}}$$

Με συσχετισμό των παραπάνω σχέσεων έχουμε

$$f'' = f\,\frac{v + v_{\kappa}}{v - v_{\kappa}}$$

Προφανώς στο δέκτη του μηχανήματος σχηματίζεται διακρότημα συχνότητας $f_{\delta} = f'' - f$.

Από τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε

$$v_{\kappa} = \frac{v f_{\delta}}{2f + f_{\delta}}$$

Με αντικατάσταση έχουμε, για την ταχύτητα του τοιχώματος της καρδιάς, $v_{\kappa} = 6 \times 10^{-2}$ m/s.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

❑ **Κρουστικές (ωστικές δυνάμεις)**
Είναι πολύ μεγάλες δυνάμεις, πολύ μεγαλύτερες από συνήθεις δυνάμεις που ασκούνται συγχρόνως στα σώματα, κατά τη σύγκρουσή τους.

❑ **Ο νόμος διατήρησης της ορμής**
Όταν δύο σώματα αποτελούν ένα απομονωμένο (δυναμικά) σύστημα, η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται, ανεξάρτητα από το είδος της αλληλεπίδρασής τους. (Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η αρχή δράσης-αντιδρασης.) Δηλαδή

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}\,'_1+\vec{p}\,'_2$$

❑ **Κρούσεις σε μία διάσταση**
Όταν δύο σώματα συγκρούονται, τότε η ολική ορμή, κάθε στιγμή, παραμένει (διανυσματικά) σταθερή, ανεξάρτητη από το είδος της κρούσης.

❑ **Είδη κρούσεων:**

Ελαστικές κρούσεις:
Κρούσεις στις οποίες διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος.

Μη ελαστικές κρούσεις:
Κρούσεις στις οποίες δεν διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος.

Τελείως μη ελαστικές κρούσεις (ή πλαστικές)
Κρούσεις στις οποίες δεν διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος και τα συγκρουόμενα σώματα ενώνονται σε ένα σώμα.

❑ **Συντελεστής κρούσης ή αποκατάστασης των υλικών**
Ονομάζεται το αρνητικό πηλίκο της σχετικής ταχύτητάς τους μετά την κρούση, δια της σχετικής ταχύτητάς τους πριν την κρούση

$$e=-\frac{\upsilon'_{\sigma\chi}}{\upsilon_{\sigma\chi}}=-\frac{\upsilon'_1-\upsilon'_2}{\upsilon_1-\upsilon_2}$$

$e=1$: τελείως ελαστικές κρούσεις
$0<e<1$: ανελαστικές κρούσεις
$e=0$: τελείως ανελαστικές κρούσεις (πλαστικές)

Ταχύτητες στις ελαστικές κρούσεις
Πριν: υ_1 και υ_2
Μετά:

$$\upsilon'_1=\frac{m_1-e\,m_2}{m_1+m_2}\,\upsilon_1+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}\,\upsilon_1$$

$$\upsilon'_2=\frac{m_2-e\,m_1}{m_1+m_2}\,\upsilon_2+\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}\,\upsilon_2$$

❑ **Κρούσεις σε δύο ή τρεις διαστάσεις**
Στις κρούσεις αυτές διατηρούνται οι συνιστώσες της ορμής για κάθε διεύθυνση ξεχωριστά.

❑ **Αδρανειακά συστήματα αναφοράς**
Λέγονται τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο πρώτος και δεύτερος νόμος του Νεύτωνα.

❑ **Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου**
Ισχύουν μεταξύ αδρανειακών συστημάτων και είναι

$$x'=x-ut,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t$$

(κατάλληλος προσανατολισμός)

❑ **Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς**
Λέγοντας τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ισχύουν οι 1ος και 2ος νόμος του Νεύτωνα.

❑ **Η ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματίων**

$$\vec{V}_C=\frac{\sum m_i\vec{\upsilon}_i}{M}$$

❑ **Ολική ορμή συστήματος σωματίων**

$$\vec{p}_{o\lambda}=M\,\vec{V}_c$$

❑ **Θεώρημα 1ο**
Η ολική ορμή ενός συστήματος σωματίων ως προς σύστημα που κινείται με το ΚΜ μεταφορικά (χωρίς να περιστρέφεται), δηλαδή το σύστημα ΚΜ, είναι μηδέν. Δηλαδή

$$\vec{p}\,'_c = \sum m_i \vec{v}\,'_i = 0$$

❑ **Θεώρημα 2ο**
Η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματίων, π.χ. ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (L), ισούται με την κινητική ενέργεια της ολικής μάζας συγκεντρωμένης στο κέντρο μάζας, συν την κινητική ενέργεια του συστήματος ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας, δηλαδή

$$K_L = \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}MV_c^2 \quad \text{ή}$$

$$K_L = K_c + \frac{1}{2}MV_c^2$$

❑ **Ανηγμένη μάζα** (μ)
Ανηγμένη μάζα συστήματος δύο σωματίων, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, ορίζεται ως η ποσότητα

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

❑ **Το φαινόμενο Doppler**
Η συχνότητα (το ύψος) του ήχου, που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής, ο οποίος κινείται σχετικά με μια πηγή, δεν είναι η πραγματική. Αυτή η αλλαγή της συχνότητας ονομάζεται φαινόμενο Doppler (ή μετατόπιση Doppler). Η φαινόμενη συχνότητα f', που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση

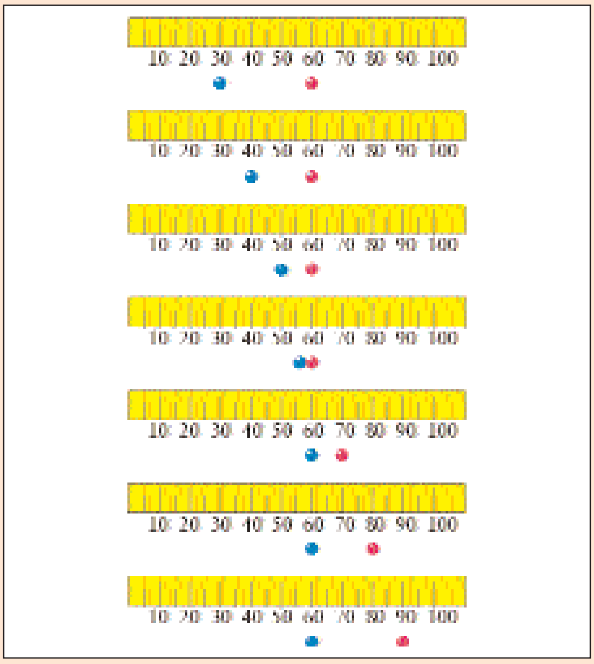
$$f' = f\,\frac{\upsilon \pm u_\Delta}{\upsilon \pm u_\Pi}$$

όπου: u_Δ η ταχύτητα του παρατηρητή
u_Π η ταχύτητα της πηγής και
υ η ταχύτητα του ήχου

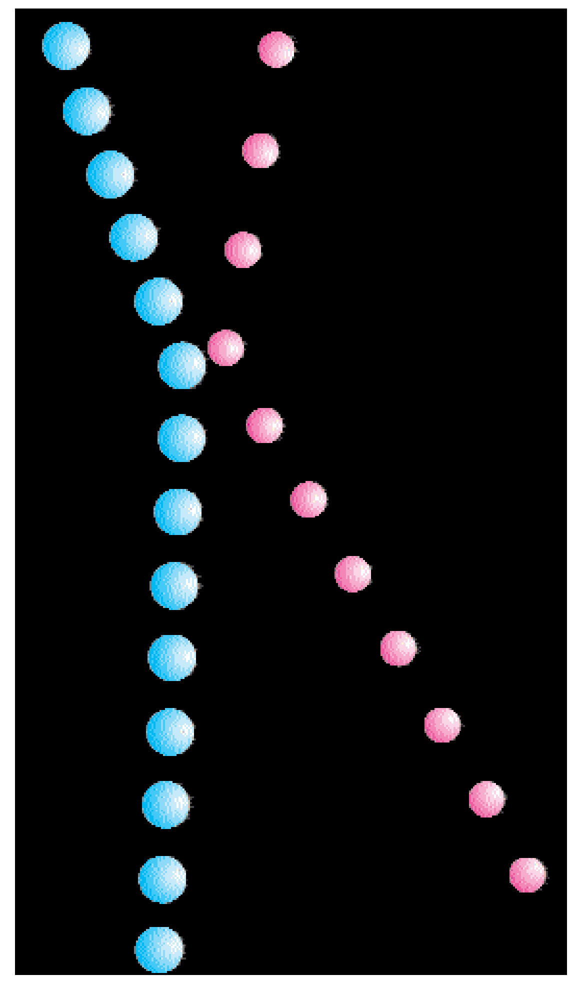
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΣΕ ΜΙΑ ΚΑΙ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

(Α) Στο σχήμα φαίνονται οι θέσεις δύο σφαιριδίων ίσης μάζας, που συγκρούονται μετωπικά (μπάλες μπιλιάρδου).
Στην πρώτη θέση η αριστερή μπάλα κινείται, ενώ η δεξιά είναι ακίνητη. Η στιγμή της σύγκρουσης εμφανίζεται στην τέταρτη από πάνω θέση. Οι θέσεις (στιγμιότυπα) διαφέρουν μεταξύ τους κατά $\Delta t = 0{,}02$ s και ο κανόνας είναι βαθμολογημένος σε εκατοστά.
Να ελέγξετε, αν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της ορμής και αν η κρούση είναι τελείως ελαστική ή όχι.



(Β) Δίνονται τα ίχνη που προκύπτουν από μια στροβοσκοπική φωτογράφηση της σύγκρουσης μεταξύ δύο σφαιρών με μάζες m_1 = 201,1 g και m_2 = 85,4 g. Τα διαδοχικά στιγμιότυπα απέχουν χρονικά μεταξύ τους κατά Δt = 0,033 s. Και οι



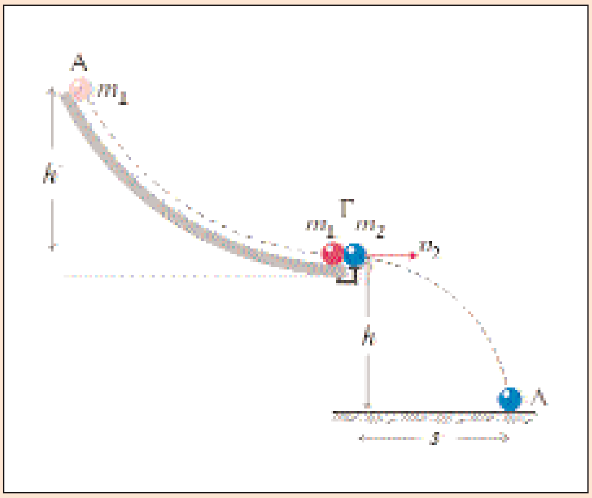
δύο μπάλες ήταν αρχικά σε κίνηση και η διαδικασία ξεκινά από το πάνω μέρος της εικόνας. Να ελέγξετε αν κατά την κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής και η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας.

ΜΕΛΕΤΗ ΒΟΛΗΣ ΜΕ ΤΗ ΣΥΣΚΕΥΗ ΚΡΟΥΣΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Παίρνετε την πειραματική διάταξη του παρακάτω σχήματος. Οι σφαίρες που θα χρησιμοποιήσετε να είναι της ίδιας μάζας και του ίδιου όγκου, μεταλλικές ή γυάλινες. Να φροντίσετε η κρούση να είναι μετωπική.
Χρησιμοποιώντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την σφαίρα m_1 από $Α \rightarrow Γ$ και τις σχέσεις

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{και} \quad s = vt$$

για την κίνηση της σφαίρας m_2 από $Γ \rightarrow Δ$ να ελέγξετε αν η κρούση είναι τελείως ελαστική ή όχι.
Να κάνετε τον ίδιο έλεγχο για την περίπτωση της μη μετωπικής σύγκρουσης.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Κατά την εξέλιξη μιας ελαστικής κρούσης

(α) σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου έχουμε διατήρηση της ολικής κινητικής ενέργειας,

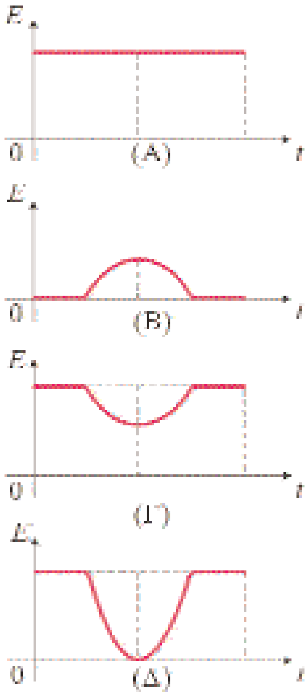
(β) διατήρηση της ορμής έχουμε μόνο στην αρχή και στο τέλος του φαινομένου,

(γ) μέγιστη ενέργεια παραμόρφωσης έχουμε στη θέση όπου η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ελάχιστη,

(δ) διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας έχουμε μόνο πριν και μετά την κρούση.

2

Αναφερόμενοι στο σχήμα 4.86, όπου φαίνονται τα διάφορα στιγμιότυπα κατά την ελαστική κρούση δύο σφαιρών, να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης που αναφέρονται σε γραφικές



(α) Δυναμική ενέργεια συστήματος

(β) Κινητική ενέργεια συστήματος

(γ) Μηχανική ενέργεια συστήματος

παραστάσεις ενέργειας-χρόνου (σε ελεύθερη εκτίμηση) με τα στοιχεία της δεξιάς στήλης.

3

Εάν πετάξετε μια ελαστική μπάλα προς ένα ερχόμενο τρένο και η κρούση είναι μετωπική ελαστική, τότε η μπάλα μετά την κρούση, θα αναπηδήσει προς τα πίσω με ταχύτητα μέτρου

(α) τριπλάσιου του αρχικού.

(β) ίσου με το αρχικό.

(γ) διπλάσιου του αρχικού.

(δ) δεν είναι επαρκή τα στοιχεία για τον υπολογισμό.

4

Μικρή, ελαστική, ομογενής σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ πάνω σε οριζόντιο έδαφος χωρίς να στρέφεται και συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με άλλη σφαίρα ίδιων χαρακτηριστικών και ίδιας ακτίνας μάζας m_2 αρχικά ακίνητης. Αν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση έχουν ίσα μέτρα, αλλά αντίθετες φορές, τότε ο λόγος των μαζών των σφαιρών m_2/m_1 είναι

α) 1 β) >> 1 γ) 3 δ) << 1

5

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση:

(α) οι σφαίρες, μετά την κρούση, έχουν ίδιες κινητικές ενέργειες.

(β) οι σφαίρες υφίστανται ίσες μεταβολές κινητικής ενέργειας.

(γ) η σφαίρα μάζας m_1 υφίσταται τριπλάσια μεταβολή κινητικής ενέργειας, από τη σφαίρα μάζας m_2.

(δ) οι σφαίρες υφίστανται αντίθετες μεταβολές κινητικής ενέργειας.

6

Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σφαιρών, οι διαφορές των ταχυτήτων τους πριν και μετά την κρούση είναι αντίθετες όταν:

(α) οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες

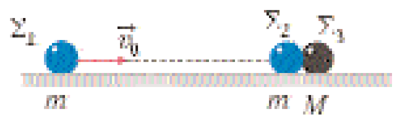
(β) πάντα

(γ) οι σφαίρες έχουν λόγο μαζών >> 1

(δ) η μια σφαίρα είναι αρχικά ακίνητη και έχει μεγαλύτερη μάζα από αυτήν που κινείται

7

Δύο σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$, ομογενείς, με μάζες m και M αντίστοιχα είναι ακίνητες και εφάπτονται. Μια



τρίτη σφαίρα $Σ_1$ ομογενής και ίσου όγκου με τις προηγούμενες, μάζας m, κινείται με ταχύτητα v_0 κατά μήκος της διακέντρου των άλλων δύο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν όλες οι κρούσεις είναι μετωπικές και ελαστικές, τότε:

(α) θα συμβούν τρεις κρούσεις αν $m > M$

(β) θα συμβούν δύο κρούσεις αν $m \geq M$

(γ) συμβαίνουν πάντα δύο κρούσεις ανεξάρτητα σχέσεως μαζών
(δ) συμβαίνουν πάντα τρεις κρούσεις ανεξάρτητα σχέσεως μαζών
(ε) θα συμβούν δύο κρούσεις μόνο αν $m = M$

8

Στην ελαστική μετωπική κρούση δύο ομογενών σφαιρών με μάζες m_1 και m_2 όπου m_2 είναι αρχικά ακίνητη και η m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10$ m/s
(α) τη μεγαλύτερη μεταβολή στην ορμή της σφαίρας m_1 την έχουμε στην περίπτωση που $m_1 = m_2$
(β) ανεξάρτητα σχέσης μαζών έχουμε: $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$
(γ) η ταχύτητα της m_1 μετά την κρούση παίρνει τιμές στο διάστημα $[-20, \ +10]$ m/s
(δ) η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά την κρούση είναι 10 m/s

9

Δύο σφαίρες της ίδιας μάζας κινούνται χωρίς τριβές πάνω στην ίδια ευθεία οριζόντιου επιπέδου. Αν 3,0 s πριν την κρούση τους απέχουν 0,45 m, ενώ 3,0 s μετά την κρούση τους απέχουν 0,36 m
(α) Η κρούση των δύο σφαιρών είναι τελείως ελαστική
(β) Η κρούση των δύο σφαιρών είναι ανελαστική
(γ) Η κρούση των δύο σφαιρών είναι τελείως ανελαστική (πλαστική).

10

Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων
(α) Η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων παραμένει σταθερή.
(β) Η ολική μηχανική ενέργεια των σωμάτων παραμένει σταθερή.
(γ) Η ολική κινητική ενέργεια και η ορμή των σωμάτων ελαττώνεται.
(δ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων ελαττώνεται.

11

Μια βόμβα μικρού βάρους εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Τη στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος διασπάται σε πέντε κομμάτια
(α) η συνολική κινητική ενέργεια των κομματιών είναι μεγαλύτερη της αρχικής
(β) το άθροισμα των μέτρων των ορμών των κομματιών είναι μηδέν
(γ) η μηχανική ενέργεια του συστήματος κατά την έκρηξη διατηρείται σταθερή
(δ) η ολική ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε

12

Δύο μικρές σφαίρες ίσων μαζών συγκρούονται πλαστικά με ταχύτητες ίσων μέτρων. Αν το συσσωμάτωμά τους έχει ταχύτητα ίση κατά μέτρο με το μισό της αρχικής ταχύτητας των σφαιρών, τότε η μεταξύ των αρχικών ταχυτήτων γωνία είναι:
(α) 60^o
(β) 120^o
(γ) 90^o
(δ) 180^o
(ε) 0^o

13

Για κρούση μεταξύ δύο σφαιρών, να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με αυτά της δεξιάς:

(Α) ελαστική κρούση	(α) $0 < e < 1$
(Β) πλαστική κρούση	(β) $e = 0$
(Γ) Ανελαστική κρούση	(γ) $e > 1$
	(δ) $e = 1$

14

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης, που αναφέρονται στις αρχικές συνθήκες μετωπικών ελαστικών κρούσεων, δύο ομογενών ελαστικών σφαιρών μαζών m_1 και m_2 και ταχυτήτων υ_1 και υ_2 αντίστοιχα, με αυτά της δεξιάς στήλης, που είναι οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.

(Α) $m_1 = m_2$ και $\upsilon_2 = 0$	(α) $\upsilon_1' = 0$	$\upsilon_2' = \upsilon_1$
(Β) $m_1 >> m_2$ και $\upsilon_1 = 0$	(β) $\upsilon_1' \approx \upsilon_1$	$\upsilon_2' \approx 2\upsilon_1$
(Γ) $m_1 >> m_2$ και $\upsilon_2 = 0$	(γ) $\upsilon_1' \approx \upsilon_2$	$\upsilon_2' \approx 0$
(Δ) $m_1 << m_2$ και $\upsilon_1 = 0$	(δ) $\upsilon_1' \approx 0$	$\upsilon_2' \approx -\upsilon_2$
	(ε) $\upsilon_1' \approx -\upsilon_1$	$\upsilon_2' \approx 0$

15

Οι καλύτεροι επιβραδυντές νετρονίων είναι:
(α) πυρήνες οξυγόνου ($^{16}_{8}O$)
(β) πυρήνες άνθρακα ($^{12}_{6}C$)
(γ) πυρήνες υδρογόνου ($^{1}_{1}H$)
(δ) πυρήνες δευτερονίου ($^{2}_{1}H$)

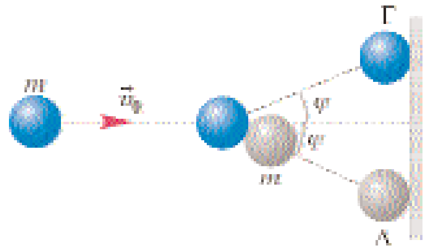
16

Σε μια μονοδιάστατη ελαστική κρούση μεταξύ μιας ομογενούς σφαίρας, μάζας m_1 και μιας ομογενούς σφαίρας, μάζας m_2, που αρχικά ηρεμεί, αντιστοιχίστε τα στοιχεία της αριστεράς στήλης, που αναφέρονται στη σχέση μεταξύ των μαζών, με τα στοιχεία της δεξιάς στήλης

(Α) $3m_1 = m_2$	(α) Η μάζα m_2 αναπηδά με τη μεγαλύτερη ταχύτητα
(Β) $m_1 = m_2$	(β) Η μάζα m_2 αναπηδά με τη μεγαλύτερη ορμή
(Γ) $m_1 >> m_2$	(γ) Η μάζα m_2 αναπηδά με τη μεγαλύτερη κινητική ενέργεια
(Δ) $m_1 << m_2$	

17

Σφαίρα μάζας m συγκρούεται ελαστικά και πλάγια με άλλη όμοια ακίνητη σφαίρα. Αν μετά την κρούση οι σφαίρες φθάνουν ταυτόχρονα στα σημεία Γ και Δ, τότε η γωνία φ είναι:

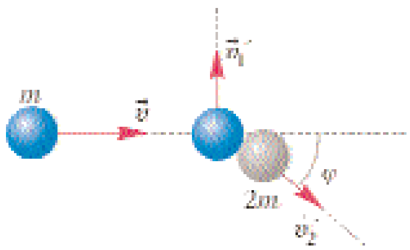


(α) 30^o (β) 45^o (γ) 60^o

[Το δάπεδο είναι χωρίς τριβές].

18

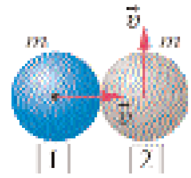
Σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ και συγκρούεται ελαστικά και πλάγια με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας $2m$. Μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m κινείται σε διεύθυνση κάθετη της αρχικής. Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2{}'$, της σφαίρας $2m$, μετά την κρούση είναι:



(α) 30^o (β) 45^o (γ) 60^o (δ) 90^o

19

Δύο τελείως όμοιες ομογενείς σφαίρες μάζας m η κάθε μία, κινούνται με ταχύτητες ίσων μέτρων κάθετες μεταξύ τους. Αν η κρούση είναι ελαστική



(α) Η σφαίρα 1 μένει, μετά την κρούση ακίνητη, ενώ η σφαίρα 2 κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon\sqrt{2}$ και σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45^o με τη διάκεντρο.

(β) Η σφαίρα 2 μένει, μετά την κρούση, ακίνητη, ενώ η σφαίρα 1 κινείται με ταχύτητα μέτρου υ αντίθετα με την αρχική διεύθυνση κίνησής της.

(γ) Οι σφαίρες, μετά την κρούση, κινούνται με ταχύτητες αντίθετες, πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου τους.

20

Δύο σφαίρες Α και Β με διαφορετικές και άγνωστες μάζες συγκρούονται λοξά. Η σφαίρα Α αρχικά ηρεμεί, ενώ η Β έχει ταχύτητα μέτρου υ. Μετά την κρούση, η ταχύτητα της Β υποδιπλασιάζεται και κινείται κάθετα προς την αρχική διεύθυνση.

(1) Η σφαίρα Α μετά την κρούση κινείται έτσι ώστε, η διεύθυνση της ταχύτητάς της να σχηματίζει, σε σχέση με την αρχική διεύθυνση κίνησης της Β γωνία

(α) 30^o (β) 60^o (γ) 27^o (δ) 45^o

(2) Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση είναι:

(α) $\upsilon\sqrt{2}/2$

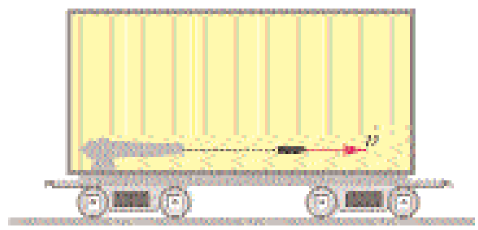
(β) Δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί με τα δεδομένα αυτά

(γ) $\upsilon\sqrt{3}/3$

(δ) $\upsilon\sqrt{3}$

21

Ένα ελαφρύ βαγόνι ηρεμεί πάνω σε λείο δάπεδο. Κάποια στιγμή το κανόνι, που είναι στερεωμένο στο βαγόνι εκπυρσοκροτεί. Το βαγόνι θα κινείται συνεχώς πάνω στο δάπεδο μετά την εκπυρσοκρότηση όταν:



(α) το βλήμα σφηνωθεί στο απέναντι τοίχωμα.
(β) το βλήμα περάσει το τοίχωμα με κάποια ταχύτητα.
(γ) σε καμιά περίπτωση.

22

Ένας παγοδρόμος στέκεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Ένας φίλος του του πετάει μια μπάλα. Ο παγοδρόμος υφίσταται μεγαλύτερη μεταβολή ορμής
(α) όταν πιάνει την μπάλα και την κρατάει
(β) όταν την πιάνει στιγμιαία και την αφήνει ελεύθερη να πέσει κάτω
(γ) όταν την πιάνει και την ξαναπετάει αμέσως πίσω στο φίλο του

23

Τρεις αστροναύτες ίσων μαζών βρίσκονται στο διάστημα, υποθέστε εκτός πεδίου βαρύτητος, έξω από το διαστημόπλοιό τους. Οι δύο από τους αστροναύτες αποφασίζουν να "παίξουν μπάλα" τον τρίτο. Το παιχνίδι αυτό μπορούν να το παίξουν
(α) από μια φορά μόνο ο καθένας τους.
(β) όσες φορές θέλουν.
(γ) μια φορά μόνο ο ένας αστροναύτης.

24

Τρένο αποτελείται από Ν βαγόνια της ίδιας μάζας. Το τρένο κινείται με ταχύτητα υ. Ξαφνικά το τελευταίο βαγόνι αποσπάται, τότε:
(α) Η ορμή του υπόλοιπου τρένου θα αυξηθεί και η ταχύτητα του βαγονιού θα μειωθεί.
(β) Η ορμή του υπόλοιπου τρένου θα μειωθεί και η ταχύτητα του βαγονιού θα αυξηθεί.
(γ) Η ορμή του υπόλοιπου τρένου και η ταχύτητα του βαγονιού θα παραμείνουν ίδιες.
(δ) Η ορμή του υπόλοιπου τρένου και η ταχύτητα του βαγονιού θα αυξηθούν.

25

Άνθρωπος βρίσκεται στο εσωτερικό ακίνητου βαγονιού τρένου. Ισχυρίζεται ότι, πετώντας οριζόντια ελαστικές μπάλες που έχει στη διάθεσή του, στο απέναντι τοίχωμα του βαγονιού, οι οποίες επανέρχονται στα χέρια του, έθεσε σε μόνιμη κίνηση το βαγόνι. Τι πιστεύετε;
(α) Ο ισχυρισμός του είναι αληθής;
(β) Ο ισχυρισμός του είναι ψευδής;
(γ) Δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να απαντήσουμε.

26

Ένας ζογκλέρ στέκεται σε μια ζυγαριά λουτρού και εκτελεί ένα νούμερο, παίζοντας πέντε όμοιες μπάλες μεταξύ των χεριών του. Κατά μέσο όρο η ζυγαριά θα δείχνει:
(α) το βάρος του ζογκλέρ συν το βάρος των πέντε μπαλών.
(β) περισσότερο από την ένδειξη (α).
(γ) λιγότερο από την ένδειξη (α).

27

Ένας τροχονόμος επιβάλλει σε έναν οδηγό φορτηγού που έχει μεγάλο φορτίο από καναρίνια, να οδηγήσει το φορτηγό του σε ένα σταθμό ζύγισης για να το ελέγξει αν είναι υπέρβαρο. Ο οδηγός που ξέρει ότι είναι υπέρβαρο, καθώς το φορτηγό ανεβαίνει στη ζυγαριά, κατεβαίνει κάτω και με ένα ξύλο κτυπά την καρότσα, έτσι ώστε, τρομαγμένα τα καναρίνια να πετάνε συνεχώς μέσα στην κλειστή καρότσα.
(α) Το φορτηγό ζύγιζε πράγματι λιγότερο απ' ότι όταν τα καναρίνια ήταν κουρνιασμένα.
(β) Το φορτηγό ζύγιζε περισσότερο τώρα.
(γ) Το φορτηγό ζύγιζε το ίδιο.

28

Στο θάλαμο ενός αεριωθούμενου, που βρίσκεται στο διάδρομο απογείωσης, ένα κοριτσάκι κρατάει από το σπάγγο του ένα μπαλόνι φουσκωμένο με ήλιο. Όσο το αεριωθούμενο είναι ακίνητο, ο σπάγγος που κρατάει το μπαλόνι είναι κατακόρυφος. Κατά τη διάρκεια της απογείωσης το αεριωθούμενο αναπτύσσει σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, σχεδόν οριζόντια, τότε:
(α) ο σπάγγος θα κλίνει προς τα εμπρός ως προς το αεριωθούμενο κατά γωνία φ.
(β) ο σπάγγος θα κλίνει προς τα πίσω ως προς το αεριωθούμενο κατά γωνία φ.
(γ) ο σπάγγος θα διατηρήσει την κατακόρυφη θέση του.

Δεν υπάρχουν ρεύματα αέρα μέσα στο αεριωθούμενο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας με τη βοήθεια ενός αδρανειακού παρατηρητή και ακολούθως με τη βοήθεια ενός μη αδρανειακού παρατηρητή. $\varrho_{\alpha\varepsilon\rho}=1{,}29\ \text{kg/m}^3$, $\varrho_{\eta\lambda}=0{,}178\ \text{kg/m}^3$, $g=9{,}81\ \text{m/s}$.

29

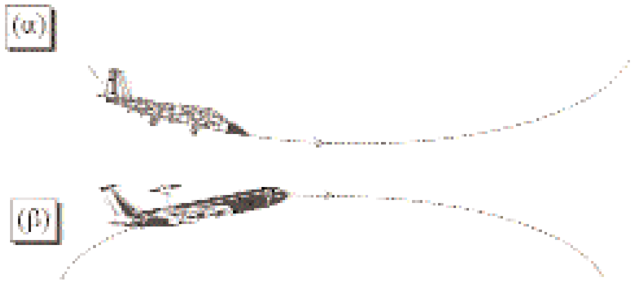
Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση, αν η γωνία απόκλισης του σπάγγου από την κατακόρυφη ήταν $\varphi = 30^o$, τότε η επιτάχυνση του αεριωθούμενου ήταν:
(α) $5{,}7\ \text{m/s}^2$ (β) $8{,}7\ \text{m/s}^2$ (γ) $5{,}0\ \text{m/s}^2$

30

Για να κινείται ένας ποδηλάτης ή ένας μοτοσυκλετιστής με μεγάλη ταχύτητα σε οριζόντια στροφή, κλίνει προς το εσωτερικό της στροφής. Πώς ερμηνεύει το γεγονός αυτό ο αναβάτης και πώς ένας φίλος που τον παρακολουθεί;

31

Στο σχήμα φαίνεται η απότομη έξοδος (α) και η απότομη έναρξη (β) μιας ανακύκλωσης (κατακόρυφης κυκλικής κίνησης) ενός μαχητικού, πολύ γρήγορου αεροπλάνου. Σε ποια από τις δύο



περιπτώσεις ο πιλότος θα πάθει σκοτοδίνη (black out), που οφείλεται στην απότομη απομάκρυνση του αίματος από τον εγκέφαλο (απώλεια πίεσης) και σε ποια θα μαζευτεί το αίμα στο κεφάλι του (υπερβολική πίεση). Αιτιολογήστε την απάντησή σας

(α) Από τη σκοπιά του αδρανειακού παρατηρητή.
(β) Από τη σκοπιά τη μη αδρανειακού παρατηρητή.

32

Κατά τη διάρκεια ενός "περιπάτου στο διάστημα" ένας αστροναύτης είναι μετέωρος στο διάστημα σε απόσταση 8,00 m από το διαστημόπλοιο, που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη. Ο αστροναύτης είναι δεμένος στο διαστημόπλοιο με ένα μακρύ σχοινί. Κάποια στιγμή θέλει να επιστρέψει στο διαστημόπλοιο, για το σκοπό αυτό τραβά προς το μέρος του το σχοινί, οπότε:

(α) αφού διανύσει απόσταση 8,00 m φτάνει στο διαστημόπλοιο.
(β) αφού διανύσει απόσταση 7,70 m φτάνει στο διαστημόπλοιο.
(γ) δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε την απόσταση αυτή, αφού τα σώματα βρίσκονται σε κίνηση γύρω από τη Γη.

Η μάζα του διαστημοπλοίου είναι 3500 kg και του αστροναύτη μαζί με τη διαστημική στολή του είναι 140 kg. Οι διαστάσεις διαστημοπλοίου και αστροναύτη είναι αμελητέες. Θεωρείστε ότι η διανυόμενη απόσταση είναι στο σύστημα διαστημοπλοίου - αστροναύτη.

33

Όπως γνωρίζετε η ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος μαζών m_1, m_2, που κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς (π.χ. του εργαστηρίου), δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = K_c + K'_{εσ}$$

όπου M η συνολική μάζα του συστήματος, V_c η ταχύτητα κίνησης του κέντρου μάζας (cm) και v_1', v_2' οι ταχύτητες των m_1 και m_2 ως το σύστημα του cm.

Προσπαθήστε, ξεκινώντας από τη σχέση αυτή, να αποδείξετε τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_{σχ}^2$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος και $v_{σχ}$ η σχετική ταχύτητα των μαζών, ως προς το σύστημα του εργαστηρίου.

34

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση, έστω ότι οι μάζες m_1, m_2 αποτελούν σύστημα δυναμικά μονωμένο και συγκρούονται.

(α) Ποιος από τους προσθετέους διατηρείται σταθερός ανεξάρτητα του τρόπου κρούσης (τελείως ελαστικά, ανελαστικά, τελείως ανελαστικά);
(β) Στην τελείως ανελαστική κρούση τι εκφράζει ο δεύτερος προσθετέος;

35

Όπως γνωρίζετε σε μια μονοδιάστατη τελείως ελαστική κρούση, οι σχετικές ταχύτητες των συγκρουομένων σωμάτων, πριν και μετά την κρούση, είναι αντίθετες. Αποδείξτε τώρα το γεγονός αυτό χρησιμοποιώντας το σύστημα συντεταγμένων του κέντρου μάζας (ΚΜ). Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε συγκρίνοντας τους δύο τρόπους απόδειξης;

36

Να δείξετε ότι σε μια κρούση με συντελεστή αποκατάστασης e, η τελική εσωτερική ενέργεια είναι μικρότερη της αρχικής, κατά ένα συντελεστή e^2, δηλαδή: $K_{εσ}^{μετά} = e^2 K_{εσ}^{πριν}$.

37

Σε μια κρούση δύο σωμάτων στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας (ΚΜ), όπως γνωρίζετε, οι ορμές των σωματιδίων, τόσο πριν, όσο και

μετά την κρούση είναι αντίθετες. Κάτω από ποιες συνθήκες τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την κρούση
(α) θα αυξάνονταν.
(β) θα μειώνονταν.
(γ) θα έμεναν τα ίδια.

38

Ένα σώμα μάζας m_1, που κινείται με ταχύτητα υ_1, συγκρούεται μετωπικά και τελείως ανελαστικά με σώμα μάζας m_2 αρχικά ακίνητο.
(α) Ποια η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση;
(β) Ποια η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση;
(γ) Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας μετατράπηκε σε θερμοδυναμική ενέργεια;
Ποιες απαντήσεις στα ερωτήματα (α), (β), (γ) δίνει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας που κινείται με ταχύτητα $\vec{V}_c$;
(δ) Η μηχανική ενέργεια, που μετατρέπεται σε θερμοδυναμική ενέργεια, είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις;

39

Κατά τη διάρκεια ενός διαπλανητικού ταξιδιού ένας αστροναύτης, που βρίσκεται σε ένα διαστημόπλοιο, παρατηρεί δύο αστεροειδείς με μάζες m_1 και m_2 και εκτιμά ότι κινούνται με ταχύτητες υ_1 και υ_2 αντίστοιχα ως προς αυτόν.
(α) Δείξτε ότι η ολική κινητική ενέργεια των αστεροειδών, όπως τη μετράει ο αστροναύτης, δίνεται από τη σχέση

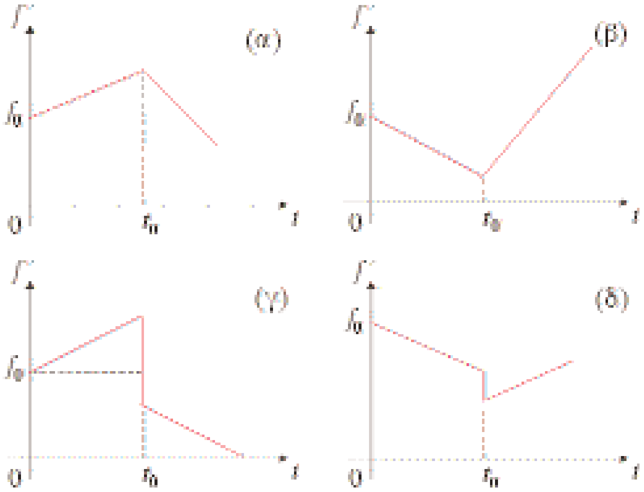
$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_c^2 + \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1 - V_c)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}m_2(\upsilon_2 - V_c)^2$$

(β) Αν οι δύο αστεροειδείς συγκρουστούν, ποια είναι η ελάχιστη ολική κινητική ενέργεια που μπορούν να έχουν μετά την σύγκρουσή τους, όπως τη μετρά ο αστροναύτης;

40

Ο Γιώργος βρίσκεται σε κάποια απόσταση από το φίλο του Γιάννη. Κάποια χρονική στιγμή ο Γιάννης αρχίζει να πλησιάζει το φίλο του με σταθερή επιτάχυνση, σφυρίζοντας συνεχώς με σταθερή συχνότητα f_0, τη χρονική στιγμή t_0 τον φθάνει και στη συνέχεια απομακρύνεται από αυτόν. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη μεταβολή της συχνότητας που ακούει ο Γιώργος συναρτήσει του χρόνου κίνησης;



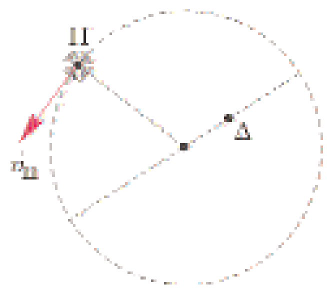
41

Ο Γιώργος οδηγεί ένα ταχύπλοο σκάφος (κρις-κραφτ) που κατευθύνεται προς μια απόκρυμνη βραχώδη ακτή και κτυπά το κλάξον, που εκπέμπει συχνότητα 1500 Hz. Μια φίλη του, η Μαρία, κάθεται στο βράχο και ακούει. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της αριστερά στήλης με αυτά της δεξιά στήλης.

(Α) Η συχνότητα του ανακλώμενου ήχου που ακούει ο Γιώργος είναι:	(α) 1500 Hz
	(β) > 1500 Hz
(Β) Η συχνότητα που ακούει η Μαρία:	(γ) < 1500 Hz

42

Ακίνητος παρατηρητής (Δ) παρακολουθεί την ηχητική πηγή (Π), που κινείται ομαλά κυκλικά (βλέπε σχήμα).



Σε ποιο σημείο θα βρίσκεται η πηγή, όταν η συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής θα είναι:
(α) μέγιστη.
(β) ελάχιστη.
(γ) η ίδια με της πηγής.

43

Παρατηρητής και πηγή κινούνται σε παράλληλες τροχιές, που βρίσκονται σε αρκετή απόσταση, κατά αντίθετη φορά. Τη στιγμή της διασταύρωσής τους

(α) ο παρατηρητής ακούει ήχο της ίδιας συχνότητας με αυτήν της πηγής.
(β) ο παρατηρητής ακούει ήχο υψηλότερης συχνότητας.
(γ) ο παρατηρητής ακούει ήχο χαμηλότερης συχνότητας.
(δ) ο παρατηρητής δεν ακούει τον ήχο που εκπέμπει η πηγή.

44

Η σειρήνα ενός ασθενοφόρου παράγει ήχο συχνότητας f_{Π}. Το ασθενοφόρο κινείται προς ένα κατακόρυφο τοίχο με σταθερή ταχύτητα υ_{Π}. Ένας παρατηρητής που βρίσκεται ακίνητος, πίσω από το ασθενοφόρο, ακούει διακροτήματα

(α) πάντα
(β) όταν η συχνότητα f_{Π} είναι αρκετά υψηλή.
(γ) όταν η συχνότητα f_{Π} είναι αρκετά χαμηλή.
(δ) όταν η ταχύτητα υ_{Π} είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του ήχου.

45

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση, αν ο παρατηρητής βρίσκεται ακίνητος μεταξύ ασθενοφόρου και τοίχου, τότε θα ακούει διακροτήματα

(α) ποτέ.
(β) όταν η ταχύτητα υ_{Π} είναι μικρή ως προς την ταχύτητα του ήχου.
(γ) πάντα.

46

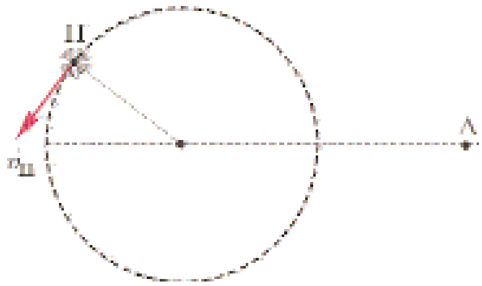
Ο Γιώργος στέκεται βόρεια σε σχέση με τη φίλη του Μαρία, ενώ φυσάει άνεμος από το νότο. Αν και οι δύο σφυρίζουν με την ίδια συχνότητα, έστω 1000 Hz, τότε:

(α) και οι δύο ακούνε την ίδια συχνότητα.
(β) ο Γιώργος ακούει ήχο συχνότητας $f' > 1000$ Hz.
(γ) η Μαρία ακούει ήχο συχνότητας $f'' > 1000$ Hz.
(δ) η Μαρία ακούει ήχο συχνότητας $f'' < 1000$ Hz.
(ε) ο Γιώργος ακούει ήχο συχνότητας $f' < 1000$ Hz.

47

Ακίνητος παρατηρητής (Δ) παρακολουθεί την ηχητική πηγή (Π) που κινείται ομαλά κυκλικά (βλέπε σχήμα). Σε ποιο σημείο θα βρίσκεται η πηγή, όταν η συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής θα είναι:

(α) μέγιστη
(β) ελάχιστη
(γ) η ίδια



ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

Δύο ελαστικές σφαίρες έχουν μάζες $m_1 = 0{,}30$ kg και $m_2 = 0{,}50$ kg και ταχύτητες $\upsilon_1 = 20$ m/s και $\upsilon_2 = 10$ m/s, που έχουν τον ίδιο φορέα και την ίδια φορά.
Οι σφαίρες συγκρούονται, οπότε παραμορφώνονται προσωρινά και στη συνέχεια ξαναπαίρνουν το αρχικό τους σχήμα. α) Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης κατά την κρούση;
β) Ποιές θα είναι οι τελικές ταχύτητες των σφαιρών;
Εννοείται ότι υπάρχει μετατροπή ενέργειας σε θερμοδυναμική ενέργεια.

2

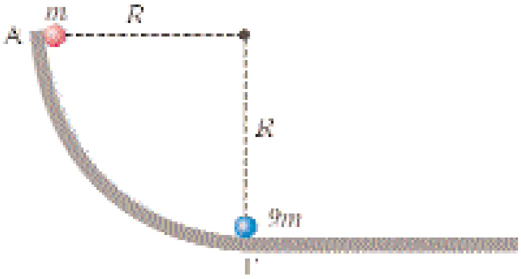
Ελαστική σφαίρα μάζας $3m$ κινείται χωρίς τριβές με ταχύτητα $\upsilon_1 = 10$ m/s σε οριζόντιο δάπεδο και προσπίπτει πάνω σε ακίνητες σφαίρες μαζών $2m$ και m, που βρίσκονται σε επαφή.

(α) Αν οι κρούσεις είναι ελαστικές και μετωπικές, να υπολογιστούν οι τελικές ταχύτητες των τριών σφαιρών μετά τις διαδοχικές κρούσεις.
(β) Αν η μάζα της σφαίρας $2m$ είναι 0,20 kg, να υπολογιστούν οι δυνάμεις κρούσεως που δέχεται

αυτή αν υποτεθούν σταθερές και ότι κάθε κρούση διαρκεί 0,010 s.

3

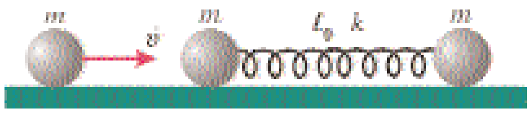
Από το σημείο Α αφήνουμε μια σφαίρα με μάζα m να κινηθεί στο εσωτερικό της κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας $R = 0{,}050$ m. Στο σημείο Γ



συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με μια άλλη σφαίρα της ίδιας ακτίνας και μάζας $9m$ που βρίσκεται ακίνητη στο σημείο Γ. Να βρεθούν οι τελικές ταχύτητες των σφαιρών. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες ($g = 10$ m/s^2).

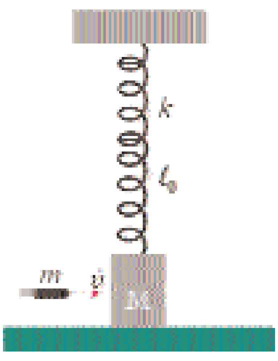
4

Αν η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, να βρεθεί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου (τριβές αμελητέες). Δίνονται: $m = 1{,}0$ kg , $k = 50$ N/m, $\upsilon = 2{,}0$ m/s.



5

Το σύστημα του σχήματος ισορροπεί στο λείο δάπεδο με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Μετά την πλαστική κρούση βλήματος, μάζας $m = 0{,}5$ kg που κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{150}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, με το σώμα μάζας $M = 2{,}0$ kg, το συσσωμάτωμα αρχίζει να απογειώνεται, μέχρι το ελατήριο να σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^{o}$ με την κατακόρυφη. Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 200$ N/m και η ταχύτητα απογείωσης οριζόντια, να υπολογιστεί η ταχύτητα την στιγμή της απογείωσης ($g = 10$ m/s^2).



6

Σώμα αφήνεται από ύψος h πάνω από το οριζόντιο σταθερό επίπεδο. Αν ο συντελεστής αποκατάστασης είναι e υπολογίστε:

(α) το ύψος στο οποίο αναπηδά αφού κτυπήσει στο έδαφος.

(β) Το ύψος στο οποίο αναπηδά μετά από Ν αναπηδήσεις.

(γ) Το κλάσμα της εκάστοτε αρχικής της ενέργειας, που χάνει η σφαίρα μετά από σε κάθε κρούση της.

7

Μια μικρή σφαίρα πέφτει κατακόρυφα πάνω σε σταθερό οριζόντιο επίπεδο. Αν κατά την κρούση της με το επίπεδο χάνει 36 % της ενέργειάς της, πόσος είναι ο συντελεστής αποκατάστασης;

8

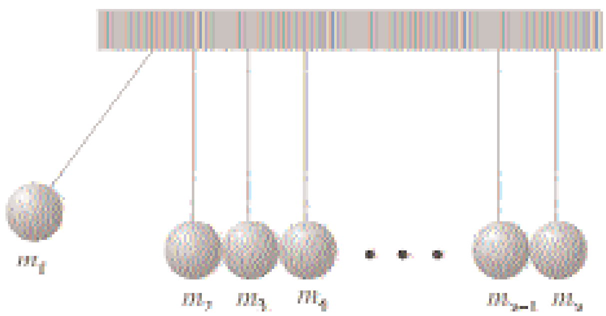
Μικρή σφαίρα αφήνεται να πέσει πάνω σε οριζόντια σταθερή πλάκα από ύψος 4,00 m. Μετά την κρούση της η σφαίρα αναπηδά σε ύψος 2,25 m. Ποιός είναι ο συντελεστής αποκατάστασης;

9

Μικρή σφαίρα μάζας m προσδένεται στην άκρη νήματος του οποίου η άλλη άκρη προσδένεται σε κατακόρυφο τοίχο. Απομακρύνουμε τη σφαίρα από τον τοίχο ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία 60^{o} με την κατακόρυφη και αφήνουμε τη σφαίρα ελεύθερη. Μετά την κρούση η σφαίρα απομακρύνεται μέχρις ότου το νήμα να σχηματίζει γωνία 30^{o} με τον τοίχο. Ποιός ο συντελεστής αποκατάστασης;

10

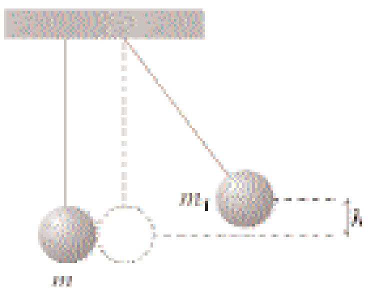
Κ ελαστικές σφαίρες, με μάζες m_1, m_2, ... m_κ κρέμονται με νήματα έτσι ώστε να εφάπτονται μεταξύ



τους και τα κέντρα τους να βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία. Αν η πρώτη σφαίρα συγκρουστεί με τη δεύτερη (τελείως ελαστικά) με ταχύτητα υ_1, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία θα εκτιναχθεί η τελευταία σφαίρα. Πόση θα ήταν η ταχύτητα αυτή, αν οι σφαίρες είχαν ίσες μάζες;

11

Αν οι μάζες των σφαιρών m_1, και m_2, του σχήματος είναι 0,10 kg ακριβώς και 0,30 kg ακριβώς αντίστοιχα και η m_1 αφήνεται ελεύθερη όταν $h = 0{,}20$ m, βρείτε

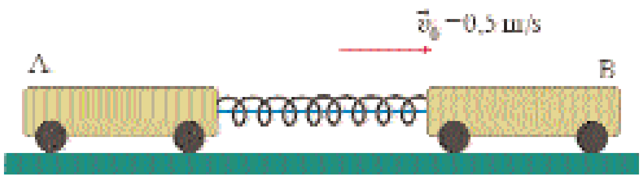


τα ύψη στα οποία θα φτάσουν οι σφαίρες μετά την κρούση, αν η κρούση έχει:

(α) $e = 1{,}0$, (β) $e = 0{,}50$, (γ) $e = 0{,}0$

12

Δυο οχήματα, που το καθένα έχει μάζα 0,80 kg, συνδέονται με νήμα αμελητέας μάζας. Μεταξύ των οχημάτων υπάρχει συσπειρωμένο ελατήριο αμελητέας μάζας, που δεν είναι συνδεδεμένο με τα οχήματα (βλέπε σχήμα). Τα οχήματα είχαν αρχική



ταχύτητα $\upsilon_0 = 0{,}50$ m/s και κάποια στιγμή κόβεται το νήμα. Αν το όχημα Β έχει ταχύτητα 0,30 m/s μετά τον αποχωρισμό του από το ελατήριο, υπολογίστε:

(α) την ταχύτητα του οχήματος Α.

(β) την αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου αν όλη έγινε κινητική των οχημάτων

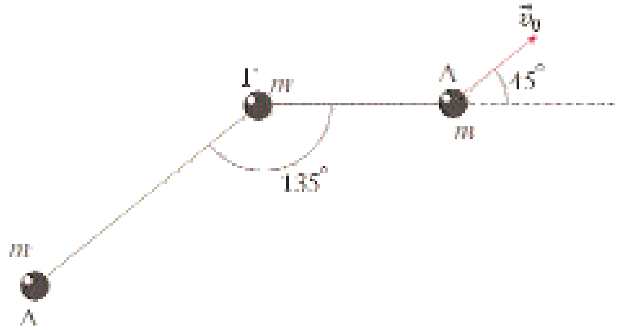
(Οι τριβές αμελούνται, οι τιμές είναι ακριβώς).

13

Η διέγερση των ατόμων μάζας M ενός στοιχείου γίνεται κατά την ελαστική κρούση ηλεκτρονίων με ακίνητα άτομα του στοιχείου. Αν η ενέργεια διέγερσης των ατόμων είναι E, να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα, που πρέπει να έχουν τα ηλεκτρόνια μάζας m, για να προκαλέσουν διέγερση των ατόμων ($M >> m$).

14

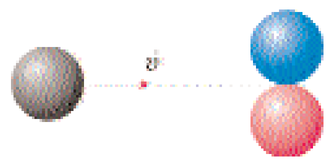
Τρία υλικά σημεία Α, Γ, Δ είναι ακίνητα εκτός πεδίου δυνάμεων και συνδέονται αρθρωτά με άμαζες στερεές ράβδους. Ασκούμε τέτοια ώθηση στο Δ που



αν ήταν ελεύθερο θα αποκτούσε ταχύτητα $\upsilon_0 = 7{,}0$ m/s (ακριβώς), όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα της μάζας, που βρίσκεται στο σημείο Α.

15

Δυο μπάλες μπιλιάρδου τοποθετούνται πάνω σε λείο τραπέζι έτσι ώστε να εφάπτονται. Μια τρίτη μπάλα κινείται προς αυτό το ζεύγος με ταχύτητα 5,0 m/s, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποιά θα είναι η ταχύτητα



(μέτρο και κατεύθυνση) που θα έχουν οι μπάλες μετά την κρούση; Οι μπάλες είναι πανομοιότυπες και οι κρούσεις τελείως ελαστικές.

16

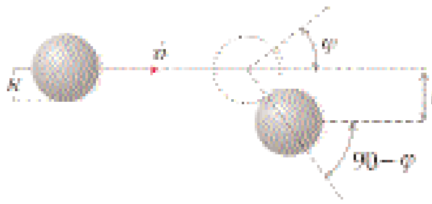
Σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ και συγκρούεται λοξά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα διπλάσιας μάζας. Μετά την κρούση η πρώτη σφαίρα κινείται κάθετα στην αρχική της διεύθυνση. Υπολογίστε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.

17

Ένα αυτοκίνητο μάζας $m_1 = 900$ kg συγκρούεται σε μια κυκλική πλατεία με ένα άλλο αυτοκίνητο μάζας $m_2 = 1200$ kg. Λίγο πριν τη σύγκρουση το πρώτο αυτοκίνητο εκινείτο προς τ' ανατολικά και το άλλο με κατεύθυνση 40^o από ανατολή προς νότο. Μετά τη σύγκρουση τα δύο αυτοκίνητα παραμένουν ενωμένα και ντεραπάρουν με μπλοκαρισμένους τους τροχούς έως ότου σταματήσουν. Η ταχύτητα του πρώτου αυτοκινήτου, πριν τη σύγκρουση, ήταν 14,0 m/s. Το μήκος που άφησαν τα σημάδια ήταν ίσο με 17,4 m και ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μεταξύ των ελαστικών και του δρόμου ήταν 0,850. Υπολογίστε αν το δεύτερο αυτοκίνητο είχε υπερβεί το όριο της ταχύτητας, που στην περιοχή ήταν 60 km/h. Δίνεται: $\sin 40^o \approx 0{,}642$.

18

Μια μπάλα του μπιλιάρδου μάζας m και ακτίνας R, καθώς κινείται με ταχύτητα υ πάνω σε λείο τραπέζι, συγκρούεται ελαστικά με πανομοιότυπη ακίνητη



μπάλα, που αρχικά ηρεμεί. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες (μέτρο, κατεύθυνση) που αποκτούν οι μπάλες μετά την κρούση, καθώς επίσης και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, συναρτήσει της παραμέτρου κρούσεως b (βλέπε σχήμα). Υποθέστε ότι οι μπάλες είναι τελείως λείες.

19

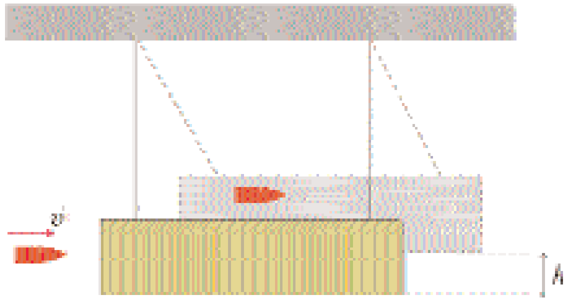
Υπολογίστε την ανηγμένη μάζα των παρακάτω συστημάτων: α) ηλεκτρονίου - πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου β) πρωτονίου - νετρονίου στον πυρήνα του δευτερίου. Συγκρίνετε στην κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα, με τη μάζα του ελαφρύτερου σωματιδίου. Δίνονται: $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1{,}672 \times 10^{-27}$ kg, $m_n = 1{,}674 \times 10^{-27}$ kg.

20

Ένας παρατηρητής μετράει τις ταχύτητες δύο σωμάτων μαζών m_1 και m_2, που κινούνται στην ίδια κατεύθυνση και τις βρίσκει υ_1 και υ_2, αντίστοιχα. Βρείτε την ταχύτητα του καθενός σε σχέση με παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα ΚΜ, καθώς επίσης και την ορμή τους στο σύστημα ΚΜ.

21

Η διάταξη του σχήματος ονομάζεται βαλλιστικό εκκρεμές, χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της ταχύτητας μιας σφαίρας όπλου, μετρώντας το ύψος



h στο οποίο ανεβαίνει το κομμάτι του ξύλου, αφού η σφαίρα έχει σφηνωθεί σε αυτό.
Αποδείξτε ότι η ταχύτητα της σφαίρας, καθώς επίσης και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος σφαίρα - ξύλο, δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$\upsilon = \frac{m_2}{\mu}\sqrt{2g\,h} \qquad \Delta K = \frac{m_2^2\, g\, h}{\mu}$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα του συστήματος ξύλου και σφαίρας και m_2 η μάζα του ξύλου.

22

Βλήμα μάζας m διασπάται με έκρηξη σε δύο κομμάτια. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την έκρηξη έστω $\Delta K = Q$.

(α) Δείξτε ότι τα κομμάτια θα κινηθούν κατά αντίθετη φορά στο σύστημα ΚΜ.

(β) Δείξτε ότι, αν τα κομμάτια έχουν ίσες μάζες, τότε οι ταχύτητες και οι ορμές τους στο σύστημα ΚΜ είναι ίσες με $\sqrt{\frac{mQ}{2}}$ και $\sqrt{\frac{2Q}{m}}$ αντίστοιχα.

23

Αποδείξτε ότι, αν η εσωτερική κινητική ενέργεια ενός συστήματος δύο σωματίων είναι K_c, τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματίων, ως προς το σύστημα ΚΜ είναι:

$$\upsilon_{1c} = \frac{\sqrt{2\mu\, K_c}}{m_1} \quad \text{και} \quad \upsilon_{2c} = \frac{\sqrt{2\mu\, K_c}}{m_2} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Όπου μ: η ανηγμένη μάζα του συστήματος των δύο σωματίων.

24

Βλήμα μάζας 45 kg, που εκτοξεύτηκε από πυροβόλο, έχει ταχύτητα 640 m/s. Το βλήμα εκρήγνυται σε δύο θραύσματα μαζών 32 kg και 13 kg. Και τα δύο θραύσματα κινούνται κατά μήκος της αρχικής διεύθυνσης της κίνησης με ταχύτητες 450 m/s και 1500 m/s αντίστοιχα.

Υπολογίστε τη μεταφορική κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας και την εσωτερική κινητική ενέργεια, πριν και μετά την έκρηξη. Πού οφείλεται η διαφορά τους;

25

Ενα αυτοκίνητο μάζας 1500 kg και ένα φορτηγό 3500 kg συγκρούονται σε μια διασταύρωση. Ακριβώς πριν από την σύγκρουση το αυτοκίνητο εκινείτο προς Βορρά με 80 km/h και το φορτηγό προς την Ανατολή με 50 km/h. Μετά τη σύγκρουση τα αυτοκίνητα παραμένουν ενωμένα. Θεωρήστε τα οχήματα ως σύστημα δύο σωματιδίων και υπολογίστε:

(α) Τη μεταφορική κινητική ενέργεια, του κέντρου μάζας και την εσωτερική κινητική ενέργεια, πριν και μετά τη σύγκρουση.

(β) Πόση κινητική ενέργεια χάνεται κατά τη σύγκρουση;

26

Να αποδειχθεί ότι κατά τη μετωπική κρουση δύο μικρών σφαιρών μαζών m_1 και m_2 που κινούνται χωρίς τριβές με ταχύτητες υ_1 και υ_2 αντίστοιχα, χωρίς να περιστρέφονται, σε οριζόντιο έδαφος:

(α) οι ταχύτητες μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{\mu\,\upsilon_2(1+\mathrm{e})}{m_1} + \frac{\mu\,\upsilon_1\left(1-\mathrm{e}\,\dfrac{m_2}{m_1}\right)}{m_2} \quad \text{και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{\mu\,\upsilon_1(1+\mathrm{e})}{m_2} + \frac{\mu\,\upsilon_2\left(1-\mathrm{e}\,\dfrac{m_1}{m_2}\right)}{m_1} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

(β) Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών, ΔK, δίνεται από τη σχέση

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^2\right)\mu\,\upsilon_{\sigma\chi}^2$$

όπου μ: η ανηγμένη μάζα του συστήματος των σφαιρών,

e: ο συντελεστής αποκατάστασης και

$\upsilon_{\sigma\chi}$: η σχετική ταχύτητα των σφαιρών πριν την κρούση.

(γ) Τι μορφές παίρνουν οι παραπάνω σχέσεις αν η κρούση ήταν i) τελείως ελαστική και ii) τελείως ανελαστική (πλαστική).

27

Ένα ταχύπλοο σκάφος μπορεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα $12\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ακριβώς, ως προς το σύστημα αναφοράς του νερού. Το ρεύμα του ποταμού έχει σταθερή ταχύτητα 43,2 km/h. Να υπολογίσετε:

(α) Ποιά πρέπει να είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας του ταχύπλοου σκάφους, για να φθάσει από τη μια όχθη στην άλλη στο μικρότερο δυνατό χρονικό διάστημα και ποιά η ταχύτητά του ως προς το σύστημα αναφοράς του εδάφους.

(β) Πόσο χρόνο θα κάνει το ταχύπλοο για να φθάσει στην όχθη και πόση απόσταση θα διανύσει κατά μήκος του ποταμού, αν το πλάτος του είναι $240\sqrt{3}$ m , ακριβώς.

28

Αναφερόμενοι στο προηγούμενο πρόβλημα, να υπολογίσετε πόσο χρόνο θα ήθελε το ταχύπλοο να διασχίσει τον ποταμό κάθετα.

29

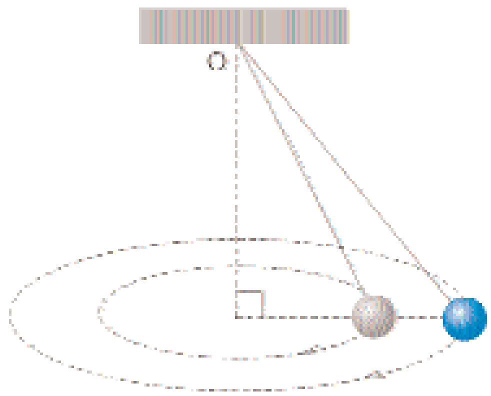
Μια βροχερή ημέρα, λόγω του οριζόντια πνέοντος ανέμου, οι σταγόνες της βροχής πέφτουν με ταχύτητα 4,0 m/s υπό γωνία 30°, ως προς την κατακόρυφο. Υπολογίστε τη γωνία, που πρέπει να σχηματίζει ο άξονας της ομπρέλας σας, με την κατακόρυφη, όταν περπατάτε οριζόντια με ταχύτητα 2,0 m/s ακριβώς, για να έχετε την καλύτερη δυνατή προστασία από τη βροχή ($\sin 19^{\circ} \approx 0{,}327$).

30

Μια βάρκα είναι αγκυροβολημένη σε σημείο Α, στο οποίο τα νερά της θάλασσας κινούνται με ταχύτητα 3,0 m/s προς τα ανατολικά. Δύο ακίνητες σημαδούρες Β και Γ, που κάθε μια απέχει από τη βάρκα απόσταση 80,0 m, βρίσκονται η μια ανατολικά και η άλλη βόρεια. Δύο κολυμβητές, που ο καθένας μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα 5,0 m/s σε ήρεμα νερά, αναχωρούν ταυτόχρονα από τη βάρκα, με σκοπό να φτάσουν στις αντίστοιχες σημαδούρες και στη συνέχεια να επιστρέψουν στη βάρκα. Να βρεθεί ποιός κολυμβητής επιστρέφει πρώτος στη βάρκα και πόσο χρόνο νωρίτερα από τον δεύτερο.

31

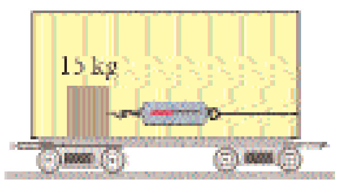
Δύο κωνικά εκκρεμή κρέμονται από την ίδια οροφή (βλέπε σχήμα) και έχουν διαφορετικά μήκη αλλά κινούνται έτσι ώστε τα δύο σφαιρίδια να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Δείξτε ότι τα δυο εκκρεμή περιστρέφονται με ίσες περιόδους.

32

Ένα σώμα μάζας 15 kg δεμένο στο άκρο ενός δυναμομέτρου βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το



δυναμόμετρο, που είναι δεμένο στο μπροστινό τοίχωμα ενός βαγονιού, δείχνει 18 N όταν το βαγόνι κινείται.

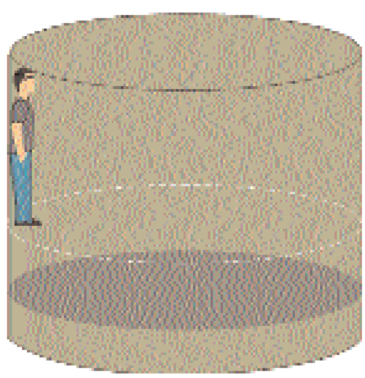
(α) Προσδιορίστε την επιτάχυνση του βαγονιού.

(β) Τι θα δείχνει το δυναμόμετρο αν το βαγόνι κινείται με σταθερή ταχύτητα;

(γ) Περιγράψτε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπως φαίνονται σε έναν παρατηρητή, που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι και σε έναν άλλον, που βρίσκεται ακίνητος έξω από αυτό.

33

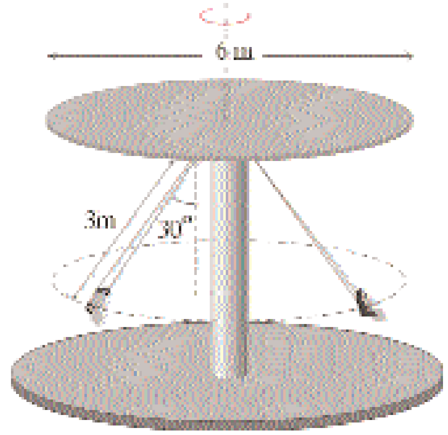
Σε πολλά λούνα-παρκ υπάρχει το περιστρεφόμενο



τύμπανο, δηλαδή μεγάλο κυλινδρικό δοχείο που μπορεί να τεθεί σε περιστροφή γύρω από τον κεντρικό κατακόρυφο άξονά του. Ένας άνθρωπος μπαίνει στο τύμπανο και στέκεται ακουμπώντας στο τοίχο. Η ταχύτητα περιστροφής του τυμπάνου αυξάνεται σταδιακά μέχρι να αποκτήσει καθορισμένη συχνότητα περιστροφής, οπότε το δάπεδο αποσύρεται προς τα κάτω. Ο άνθρωπος παραμένει “καρφωμένος” πάνω στο τοίχωμα του τυμπάνου και δεν πέφτει. Αν ο συντελεστής τριβής των ρούχων του ανθρώπου με το τοίχωμα του τυμπάνου είναι 0,40 και η ακτίνα του είναι 4,0 m, υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της περιόδου περιστροφής του τυμπάνου, για να αποφευχθεί η πτώση του ανθρώπου.

34

Σε ένα λούνα-παρκ ο “μύλος” έχει τα



χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.

(α) Ποιά είναι η ταχύτητα περιστροφής των καθισμάτων του μύλου;

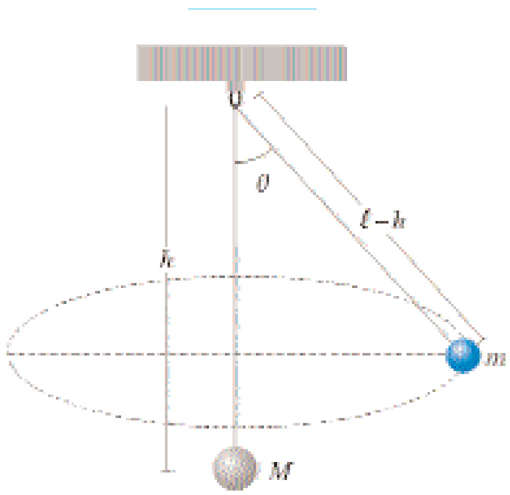
(β) Αν ένα παιδί μάζας 44,0 kg κάθεται σε ένα κάθισμα μάζας 6,00 kg, ποιά η τάση της αλυσίδας;

(γ) Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις, αφ’ ενός από το παιδί και αφ’ ετέρου από τη μητέρα του παιδιού, που παρακολουθεί την κίνηση.

$g = 10{,}0\ m/s^2$, $\sqrt{3} = 1{,}73$

35

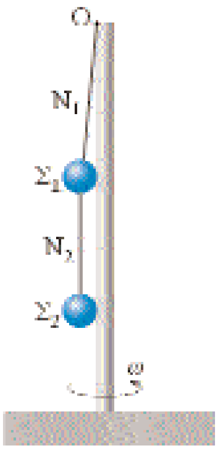
Δύο σφαίρες μαζών m και $M = 2m$ συνδέονται με αμελητέας μάζας νήμα μήκους $\ell = 10{,}0$ m, που διέρχεται από σταθερό λείο δακτύλιο. Η μικρότερη μάζα περιστρέφεται ως κωνικό εκκρεμές ενώ, η άλλη κρέμεται κατακόρυφα. Να υπολογιστούν:



(α) η γωνία θ (βλέπε σχήμα)
(β) η συχνότητα του περιστρεφόμενου σφαιριδίου, αν ένα τμήμα $h = 5{,}0\,\text{m}$ του νήματος κρέμεται κατακόρυφα.

36

Στο άκρο Ο κατακόρυφης ράβδου δένουμε ένα αμελητέας μάζας νήμα N_1, στην άκρη του οποίου



συνδέουμε σφαιρίδιο Σ_1, μάζας m. Από το Σ_1 εξαρτώμε δεύτερο αμελητέας μάζας νήμα N_2, στο άκρο του οποίου, συνδέουμε σφαιρίδιο Σ_2 της ίδιας μάζας με το πρώτο. Τα μήκη των δύο νημάτων είναι ίσα. Να αποδείξετε ότι όταν θέσουμε σε περιστροφική κίνηση τη ράβδο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, η γωνία φ_2, που σχηματίζει το N_2 με την κατακόρυφη, είναι μεγαλύτερη από τη γωνία φ_1, που σχηματίζει το N_1.

37

Για να είναι άνετο ένα αεροπορικό ταξίδι, η δύναμη, που δέχεται από την πλάτη του καθίσματός του ένας επιβάτης, δεν πρέπει να υπερβαίνει το διπλάσιο του βάρους του. Υπολογίστε με ποιά μέγιστη επιτάχυνση μπορεί να κινείται οριζόντια το αεροπλάνο, για να μην αισθάνεται δυσφορία ο επιβάτης.

38

(α) Πώς αντιλαμβάνεται ένας επιβάτης αυτοκινήτου τη μεταβολή της ταχύτητας του οχήματος;
(β) Άνθρωπος βάρους $B = 600\,\text{N}$ βρίσκεται σε αυτοκίνητο που κινείται: i) προς ανατολάς με ταχύτητα 72 km/h, 10min μετά την αναχώρησή του από μια πόλη Α, ii) ο άνθρωπος αισθάνεται για χρόνο 3,14 s μια δύναμη $F_2 = 600\,\text{N}$ να τον ωθεί προς το αριστερό τοίχωμα της καμπίνας του αυτοκινήτου, iii) για 10 s ο άνθρωπος αισθάνεται μια δύναμη ίση με $F_3 = 120\,\text{N}$ να τον ωθεί προς τη ράχη του καθίσματος iv) για χρόνο 1,57 s αισθάνεται μια δύναμη $F_4 = 8000\,\text{N}$ να τον ωθεί προς τα δεξιά v) τέλος και για χρόνο 5 s αισθάνεται την επίδραση μιας δύναμης F_5, που τον ωθεί προς τα εμπρός. Το αυτοκίνητο σταματά σε μια πόλη Ζ. Δώστε με σχεδιάγραμμα την τροχιά του αυτοκινήτου.
(γ) Ποιό το μέτρο της δύναμης F_5;

39

Παρατηρητής βρίσκεται σε απόσταση 680 m από μια ηχητική πηγή. Ο παρατηρητής αρχίζει να κινείται προς την πηγή και διαπιστώνει ότι η συχνότητα του ήχου που ακούει, αυξάνει ανάλογα προς το χρόνο.
(α) Να βρεθεί το είδος της κίνησης του παρατηρητή.
(β) Όταν ο παρατηρητής φτάσει στην πηγή, το πηλίκο της συχνότητας που ακούει, δια της συχνότητας που παράγει η πηγή, είναι 5 : 4. Πόσο χρόνο κινήθηκε ο παρατηρητής;

Ταχύτητα του ήχου 340 m/s.

40

Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο κινείται ομαλά κυκλικά με γωνιακή ταχύτητα 2,00 rad/s σε κυκλική πίστα δοκιμών ακτίνας $R = 25{,}0\,\text{m}$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη συχνότητα του ήχου που ακούει παρατηρητής που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το αυτοκίνητο σε σταθερή απόσταση από το κέντρο της πίστας, έξω από αυτήν. Η συχνότητα του ήχου της μηχανής είναι 850 Hz και η ταχύτητα του ήχου 340 m/s.

41

Ένα τρένο πλησιάζει ένα σταθμό με ταχύτητα 40 m/s. Άνεμος φυσάει με ταχύτητα 30,0 m/s ίδιας κατεύθυνσης με την κίνηση του τρένου. Αν η σφυρίχτρα του τρένου εκπέμπει ήχο συχνότητας 400 Hz και η ταχύτητα του ήχου είναι 340 m/s, ποιά είναι η συχνότητα που ακούει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σταθμό;

42

Αεροπλάνο πετά οριζόντια και κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα 360 km/h σε ύψος 900 m. Δύο παρατηρητές, Δ_1 και Δ_2, που βρίσκονται στο έδαφος στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το αεροπλάνο και απέχουν μεταξύ τους 1350 m, ακούνε τον ήχο, που εξέπεμψε το αεροπλάνο τη στιγμή που πέρναγε από τη μεσοκάθετη των παρατηρητών. Αν f είναι η συχνότητα του ήχου που εξέπεμψε το αεροπλάνο και f'_1, f'_2 οι συχνότητες που θα ακούσουν οι δύο παρατηρητές, να υπολογιστούν οι λόγοι f'_1/f και f'_2/f.

Ταχύτητα διάδοσης του ήχου 340 m/s.

43

Αεροπλάνο κινείται πλησιάζοντας σε στόχο και παράγει ήχο από τους κινητήρες του συχνότητας 800 Hz. Η ταχύτητα του ήχου είναι 340 m/s. Ποιά ταχύτητα πρέπει να έχει το αεροπλάνο, για να μη γίνεται ακουστός ο ήχος των κινητήρων του, αν η μέγιστη ακουστή συχνότητα για παρατηρητή, που βρίσκεται στο στόχο είναι 20 000 Hz;

44

Παρατηρητής Δ ακούει διαπασών Π συχνότητας 500 Hz, που αναχωρεί από την ηρεμία και απομακρύνεται από αυτόν, κινούμενο κατά την ευθεία Δx με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 10{,}0$ m/s^2.

(α) Να υπολογιστεί η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής τη χρονική στιγμή 33,0 s μετά την αναχώρηση του διαπασών.

(β) Τα ίδια αν το διαπασών είναι ακίνητο και ο παρατηρητής απομακρύνεται από αυτό με την ίδια επιτάχυνση. Ταχύτητα του ήχου 330 m/s.

45

Διαπασών εκπέμπει ήχο συχνότητας 435 Hz και αφήνεται να πέσει ελεύθερα από σημείο Π, που βρίσκεται σε ύψος 80 m υπεράνω ακίνητου παρατηρητή και στην ίδια κατακόρυφη. Να βρείτε την συχνότητα, την οποία ακούει ο παρατηρητής: (α) 2,0 s πριν το διαπασών φθάσει στη θέση του παρατηρητή και (β) 2,0 s μετά τη διέλευση του διαπασών από αυτόν. Ταχύτητα του ήχου 340 m/s.

46

Παρατηρητής Δ βρίσκεται σε απόσταση $(\Delta K) = 589$ m από ευθύγραμμη σιδηροδρομική γραμμή, οπότε ακούει σφύριγμα συχνότητας 927 Hz, που προέρχεται από την σιδηροδρομική αμαξοστοιχία (Π), η οποία πλησιάζει το σημείο Κ με σταθερή ταχύτητα 72,0 km/h. Η σφυρίχτρα της αμαξοστοιχίας εκπέμπει ήχο συχνότητας 900 Hz. (α) Πόση είναι η απόσταση (ΔK) τη στιγμή της εκπομπής του σφυρίγματος και (β) πόση τη στιγμή κατά την οποία ακούει ο παρατηρητής Δ το σφύριγμα.

47

Σιδηροδρομικός υπάλληλος βρίσκεται στη μέση μιας πολύ στενής γέφυρας μήκους 1000 m, όταν αντιλαμβάνεται σε απόσταση 1500 m να έρχεται ένας συρμός. Υποτίθεται ότι ο υπάλληλος είναι σε θέση να εκτιμήσει επακριβώς τη συχνότητα του ήχου, που ακούει από τη σφυρίχτρα της αμαξοστοιχίας, η οποία κινείται και την εκτιμά σε 360 Hz, ενώ γνωρίζει ότι η αμαξοστοιχία εκπέμπει, στην πραγματικότητα, ήχο συχνότητας 340 Hz. Αναγκαζόμενος να βγει έγκαιρα από τη γέφυρα ρυθμίζει την ταχύτητά του ώστε να ακούει σφυρίγματα σταθερής συχνότητας 355 Hz. Ποιά η διαφορά χρόνου μεταξύ της άφιξης του υπαλλήλου και της άφιξης της αμαξοστοιχίας στο τέρμα της γέφυρας (ταχύτητα διάδοσης του ήχου $\upsilon = 340$ m/s).

48

Ένας δρομέας, που μπορεί να ακούσει ήχους από 16 Hz ακριβώς μέχρι 16 kHz, κινείται σε κυκλικό στίβο με ταχύτητα που έχει σταθερό μέτρο. Έξω από τον στίβο υπάρχει ακίνητη ηχητική πηγή που εκπέμπει συχνότητα 15,5 Hz. Να βρεθεί η ταχύτητα του δρομέα, αν γνωρίζουμε ότι ακούει τον ήχο της πηγής, μόνο σε ένα σημείο της διαδρομής του. Ταχύτητα ήχου 340 m/s.

4.4 ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ηλεκτρομαγνητική θεωρία όπως διατυπώθηκε το 1865 από τον Maxwell, περιέγραψε τα κύματα του φωτός ως είδος ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Με τις εμπειρίες των επιστημόνων της εποχής, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, άρα και το φως, έπρεπε να διαδίδονται μέσα σε κάποιο μέσον –φορέα– με ελαστικές ιδιότητες. Από όσα γνώριζαν για τη διάδοση του φωτός στο κενό και μέσα από υλικά, ήταν αναγκαίο να υποθέσουν ότι αυτό το μέσον, ο (φωτοφόρος) αιθέρας, έπρεπε να διαπερνά όλο το χώρο, να έχει αμελητέα πυκνότητα και αμελητέα αλληλεπίδραση με την ύλη. Ο αιθέρας υπήρχε μόνο για να διαδίδονται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Η υπόθεση του αιθέρα ξεχώρισε τον ηλεκτρομαγνητισμό από την υπόλοιπη φυσική, που ουσιαστικά ήταν η Μηχανική.

Ήταν γνωστό ότι οι νόμοι της Μηχανικής ήταν ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το κάθε ένα από αυτά κινείται ως προς κάθε άλλο με διανυσματική ταχύτητα σταθερή. Ο ηλεκτρομαγνητισμός προέβλεπε μια μοναδική ταχύτητα για το φως στο κενό που παριστάνεται με το c. Έτσι οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού θα έπρεπε να ισχύουν μόνο για συγκεκριμένο σύστημα ως προς το οποίο ο αιθέρας, μέσα στον οποίο διαδίδονται τα κύματα είναι ακίνητος και η ταχύτητα των κυμάτων είναι c. Σύμφωνα με το νόμο πρόσθεσης ταχυτήτων της Κλασικής Μηχανικής η ταχύτητα του φωτός και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων γενικότερα, ως προς άλλα αδρανειακά συστήματα θα έπρεπε να είναι διαφορετική και έτσι οι νόμοι του Maxwell να μην ισχύουν για κάθε αδρανειακό σύστημα. Την εποχή που ο Αϊνστάιν άρχισε να σκέφτεται το πρόβλημα υπήρχαν οι εξής σκέψεις:

1. Οι εξισώσεις του Maxwell είναι λάθος.

2. Υπάρχει ένα προτιμόμενο (αδρανειακό) σύστημα, αυτό του ακίνητου αιθέρα, ως προς το οποίο ισχύουν οι εξισώσεις του Maxwell και δεν έχουν την ίδια μορφή στα άλλα αδρανειακά συστήματα.

3. Οι εξισώσεις του Maxwell έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, αλλά οι μετασχηματισμοί των φυσικών μεγεθών από σύστημα σε σύστημα δεν είναι οι κλασικοί του Γαλιλαίου, αλλά άλλοι μετασχηματισμοί.

Υπήρξαν πολλά πειράματα που οδήγησαν στην αποδοχή της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας που διατύπωσε ο Αϊνστάιν το 1905 ακολουθώντας τη σκέψη 3. Τα πειράματα έγιναν για να δουν αν ο αιθέρας συμπαρασύρεται ή όχι από ουράνια σώματα. Άλλα πειράματα έδειχναν ότι ο αιθέρας συμπαρασύρεται και άλλα όχι. Ο Lorentz προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα πιστεύοντας στον αιθέρα και βρίσκοντας νέους νόμους μετασχηματισμού των συντεταγμένων θέσης και του χρόνου, καθώς και των άλλων ποσοτήτων του ηλεκτρομαγνητισμού, έτσι που οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού (του Maxwell) να έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Ο Lorentz δεν μπόρεσε να δει το βαθύτερο νόημα των μετασχηματισμών και τη σχέση τους με την υπόλοιπη Φυσική.

Το 1899 και ξανά το 1900 και 1904 ο Poincaré υπέδειξε ότι η αδυναμία του πειράματος (των Michelson και Morley) να βρει ένα απόλυτο σύστημα αιθέρα, είναι απόρροια μιας γενικής αρχής που λέει ότι δεν μπορεί να ανιχνευτεί απόλυτη κίνηση με κανενός είδους εργαστηριακά πειράματα και ότι όλοι οι νόμοι της φύσης πρέπει να είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αυτό το ονόμασε Αρχή της Σχετικότητας. Επίσης συμπέρανε ότι πρέπει να αναπτυχθεί μια νέα Μηχανική (Δυναμική) που πρέπει να χαρακτηρίζεται εκτός των άλλων και από το γεγονός ότι δεν πρέπει καμιά ταχύτητα σώματος να υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός.

Το 1905 ο Αϊνστάιν εδημοσίευσε το πρώτο άρθρο του για την Ειδική Σχετικότητα, όπου ανέπτυξε αυτή τη θεωρία από δύο βασικά αξιώματα:

(1) Την Αρχή της Σχετικότητας και

(2) Την σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα.

Ανατράπηκαν έτσι οι ιδέες για το χώρο και το χρόνο που δεν εμφανίζονται ως ανεξάρτητες οντότητες. Ο Αϊνστάιν έβγαλε τους μετασχηματισμούς του Lorentz και τις σχέσεις μετασχηματισμού των διαφόρων φυσικών ποσοτήτων από σύστημα σε σύστημα, ώστε οι νόμοι να μένουν οι ίδιοι. Επίσης τροποποίησε τους νόμους της Μηχανικής. Έτσι η ιδέα του αιθέρα έφυγε από τη μέση και η φυσική μπήκε σε νέες βάσεις.

Προσπαθούμε σε αυτό το κεφάλαιο να εισαγάγουμε τους μαθητές στο αντικείμενο της Ειδικής Σχετικότητας περιγράφοντας τις βασικές αρχές. Συγκεκριμένα, εξετάζεται το θέμα των συστημάτων αναφοράς και η ιδιαιτερότητα της ταχύτητας του φωτός στο κενό.

Δίνονται οι Μετασχηματισμοί Lorentz και διάφορες εφαρμογές τους και τέλος δίνονται μερικά στοιχεία της Γενικής Σχετικότητας, όπου δίνεται έμφαση στις έννοιες **αδρανειακή** και **βαρυτική** μάζα. Η ιδέα είναι, να καταλήξει να μην "φοβάται" ο μαθητής τις ιδέες της Σχετικότητας, αφού καταλάβει ότι υπάρχουν πολλά φαινόμενα ακόμη και "δίπλα" του (όπως είναι τα μιόνια που φτάνουν στην επιφάνεια της Γης από τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας) που η ερμηνεία τους γίνεται με την Ειδική Σχετικότητα.

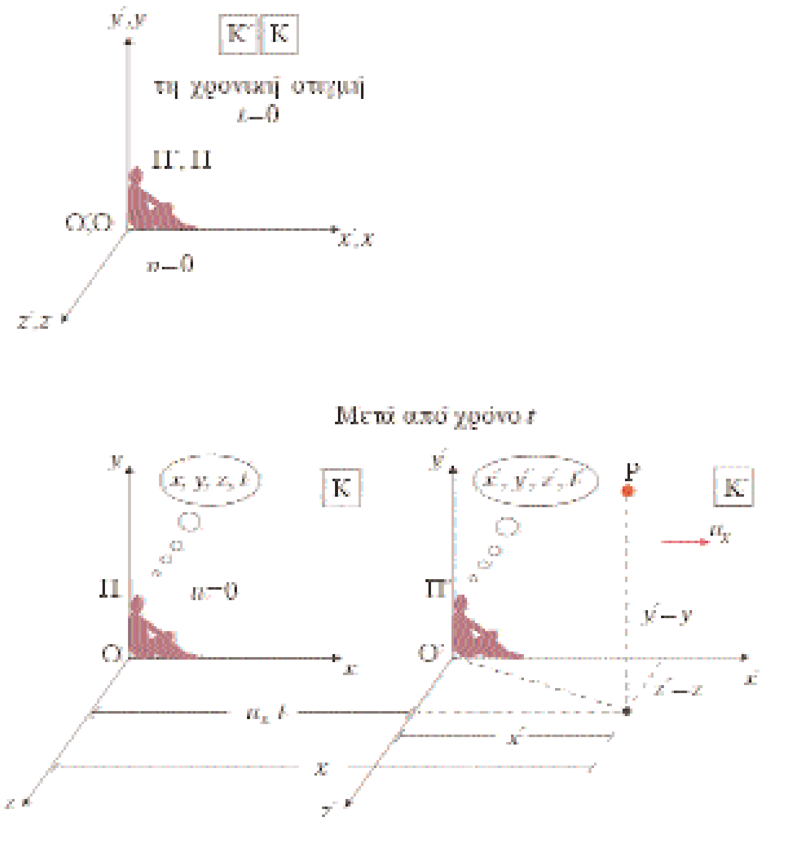
Ο μαθητής πρέπει να λύσει μερικά προβλήματα και να κάνει σκέψεις βασισμένες στις ιδέες της Ειδικής και Γενικής Σχετικότητας για να κατανοήσει πως μπορεί να τις χρησιμοποιεί και να καταλάβει τη διαφορά στις έννοιες που εισάγουν σε σχέση με αυτές της συνήθους φυσικής, που ήξερε μέχρι τώρα.

ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΝΕΥΤΩΝΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Για να περιγράψουμε ένα φυσικό γεγονός στο χώρο και στο χρόνο (π.χ. μια έκρηξη, το άναμα ενός λαμπτήρα, κ.λπ.) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε **χρονομετρητές** (ρολόγια) και ένα **σύστημα αναφοράς**.

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα (νόμος αδράνειας) καθορίζει μια ειδική κατηγορία συστημάτων αναφοράς, που λέγονται αδρανειακά συστήματα αναφοράς. **Αδρανειακό σύστημα** αναφοράς είναι το σύστημα εκείνο στο οποίο ένα σώμα που δεν υφίσταται τη δράση εξωτερικών δυνάμεων ή που η συνισταμένη αυτών που υφίσταται είναι μηδέν, κινείται με σταθερή (διανυσματική) ταχύτητα ή είναι ακίνητο. Ο πρώτος και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ισχύουν για αδρανειακά συστήματα αναφοράς και γιαυτό αναφερόμαστε σε τέτοια (αδρανειακά) συστήματα. Δεν υπάρχει κανένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς που να είναι πιο σημαντικό από κάποιο άλλο. Αυτό σημαίνει ότι αν κάνετε ένα πείραμα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου για να αποδείξετε την ισχύ των νόμων της μηχανικής τότε και ένας παρατηρητής, που κινείται ισοταχώς ως προς το εργαστήριο και εκτελεί τα ίδια πειράματα ή περιγράφει τα δικά σας πειράματα στο δικό του σύστημα, συμφωνεί μαζί σας ως προς τους νόμους που τα διέπουν. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποια απόλυτη κίνηση ενός αδρανειακού συστήματος κάνοντας πειράματα πάνω σε αυτό. Δεν έχει νόημα να μιλάμε για απόλυτη κίνηση. Ως αδρανειακό σύστημα αναφοράς θεωρούμε σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με μακρυνούς απλανείς αστέρες. Κάθε άλλο σύστημα που κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς ως προς αυτό είναι επίσης αδρανειακό. Θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς K, K', με προσανατολισμό αξόνων όπως στο σχήμα 4.117. Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνει χώρα ένα γεγονός (P) και παρατηρείται αφενός από έναν παρατηρητή Π που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς K και αφετέρου από έναν παρατηρητή Π' που βρίσκεται στο κινούμενο ισοταχώς ως προς το K, σύστημα αναφοράς K', με ταχύτητα $u = u_x$ κατά μήκος του άξονα των x. Ο μεν παρατηρητής Π (λέγεται ακίνητος) περιγράφει το γεγονός με τις συντεταγμένες του χώρου και του χρόνου (x, y, z, t) ο δε παρατηρητής Π' (λέγεται κινούμενος) περιγράφει το



ΣΧΗΜΑ 4.117

Η θέση που συντελείται ένα γεγονός P, μπορεί να περιγραφεί με τις συντεταγμένες x, y, z, του συστήματος αναφοράς K ή τις x', y', z' του K'. Το K' κινείται ως προς το K με σταθερή ταχύτητα $u_x = u$ κατά μήκος των αξόνων Ox, Ox'. Οι αρχές Ο και Ο συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$.

ίδιο γεγονός χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες (x', y', z', t'). Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.117 οι συντεταγμένες αυτές συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x' &= x - u_x t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad \text{Μετασχηματισμοί συντεταγμένων του Γαλιλαίου} \qquad (4.104)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως **μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου**. Αν μετασχηματίσουμε με τους παραπάνω μετασχηματισμούς, τους δύο πρώτους νόμους του Νεύτωνα αποδεικνύεται ότι η μορφή τους στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς K' είναι ίδια με εκείνη στο K. Από αυτό το γεγονός συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ των αδρανειακών συστημάτων. Όλα είναι ισοδύναμα ως προς τους νόμους του Νευτωνα (προφανώς και ως προς τον τρίτο νόμο, γιατί οι δυνάμεις τις κλασικής μηχανικής εξαρτώνται μόνο από τις αποστάσεις μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωμάτων και αυτές μένουν ίδιες σε κάθε σύστημα). Από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου βλέπουμε ότι ο χρόνος είναι ο ίδιος και για τα δύο αδρανειακά συστήματα που σημαίνει ότι τα ρολόγια των δύο παρατηρητών $Π$ και $Π'$ λειτουργούν με τον ίδιο ρυθμό. Αν και η αλήθεια αυτής της υπόθεσης φαίνεται ότι είναι προφανής αυτό θα δούμε ότι είναι λάθος για την περίπτωση που οι ταχύτητες είναι συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός, οπότε οι έννοιες της Νευτώνιας σχετικότητας (του Γαλιλαίου) για απόλυτο μήκος και χρόνο δεν ισχύουν.

Ας υποθέσουμε ότι ένα σημείο παρατηρούμενο από το σύστημα K τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση (x_1, 0, 0) και τη χρονική στιγμή t_2 στη θέση (x_2, 0, 0). Από το σύστημα K' θα έχουμε ότι τη στιγμή t_1' θα βρίσκεται στη θέση (x_1', 0, 0) και την στιγμή t_2' στη θέση (x_2', 0, 0). Έχουμε κίνηση κατά μήκος των παράλληλων αξόνων Ox, $O'x'$. Από τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου έχουμε

$$x_2' - x_1' = \Delta x' = x_2 - x_1 - u_x t_2 - u_x t_1$$

$$\Delta y' = \Delta y = \Delta z' = \Delta z = 0 \qquad \text{και} \qquad \Delta t' = \Delta t$$

άρα

$$\Delta x' = \Delta x - u_x \Delta t$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - u_x$$

αν πάρουμε τα Δt, $\Delta t'$, Δx, $\Delta x'$ πολύ μικρά καταλήγουμε στις στιγμιαίες ταχύτητες, δηλαδή

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u_x$$

$$\upsilon_x' = \upsilon_x - u_x$$

Γενικότερα για κάθε ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{u}$ μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει

$$\vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος πρόσθεσης (συνδυασμός) ταχυτήτων του Γαλιλαίου (ή μετασχηματισμός ταχύτητας του Γαλιλαίου)**. Αυτή τη σχέση τη χρησιμοποιούμε καθημερινά και είναι σύμφωνη με την αίσθηση που έχουμε για το χώρο και το χρόνο.

Αν τη σχέση αυτή την εφαρμόσουμε για την ταχύτητα του φωτός δίνει $\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{u}$, άρα $c' \neq c$ Το δεύτερο αξίωμα όμως του Einstein (όπως είδαμε στην εισαγωγή) λέει γεγονός το οποίο και υποστηρίζεται από πειραματικά δεδομένα (π.χ. πείραμα Michelson-Morley). Επομένως οι παραπάνω εξισώσεις χρειάζονται τροποποιήσεις για να εναρμονιστούν με το αξίωμα του Αϊνστάιν όπως θα δούμε σύντομα.

ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ MICHELSON – MORLEY

Ξανατονίζουμε ορισμένα πράγματα, που αναφέραμε και στην Εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου. Από νωρίς είχε διαπιστωθεί ότι οι νόμοι του Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού δεν παραμένουν οι ίδιοι κατά τη μετάβαση από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε άλλο με τη χρήση των μετασχηματισμών Γαλιλαίου. Αυτό οδήγησε σε διάφορους προβληματισμούς.

1. Μια ιδέα ήταν ότι οι εξισώσεις του Maxwell ήταν λάθος. Η σωστή θεωρία για τον ηλεκτρομαγνητισμό θα έδινε εξισώσεις αναλλοίωτες από ένα αδρανειακό σύστημα σε άλλο, με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

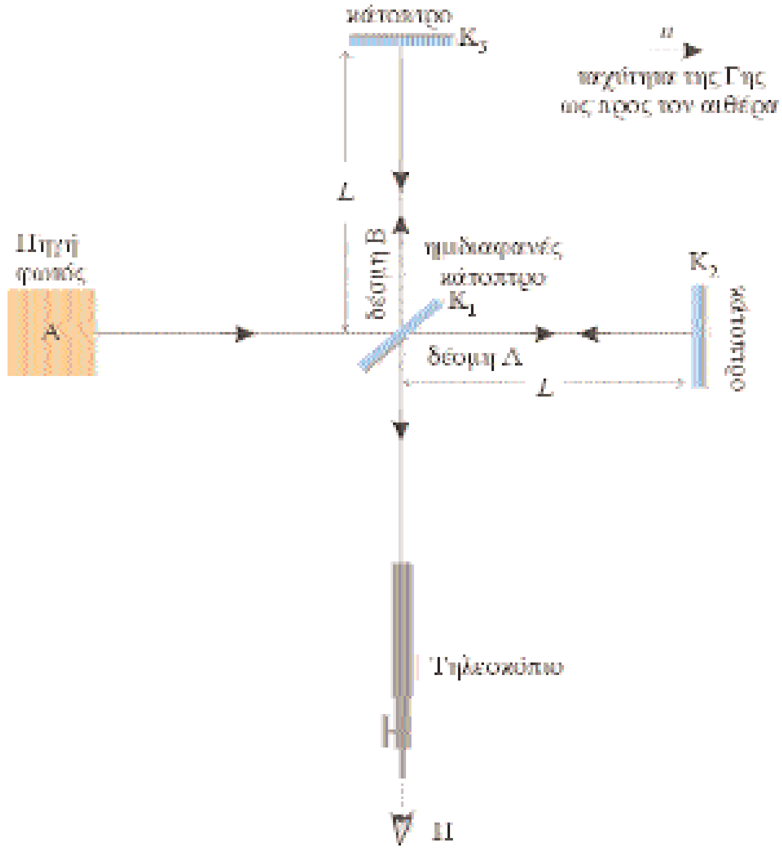
2. Μια άλλη ιδέα ήταν ότι οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου ισχύουν για την κλασική μηχανική, αλλά ο ηλεκτρομαγνητισμός έχει ένα προτιμητέο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο, το μέσον (αιθέρας) στο οποίο διαδίδονται οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις είναι ακίνητο.

3. Η τρίτη ιδέα ήταν ότι υπάρχει μια άλλη αρχή σχετικότητας (όχι του Γαλιλαίου) που ισχύει για τη μηχανική και για τον ηλεκτρομαγνητισμό. Οι νόμοι της μηχανικής πρέπει να τροποποιηθούν.

Η τρίτη ιδέα δεν θεωρήθηκε σοβαρή. Οι περισσότεροι φυσικοί τον καιρό εκείνο (19ος αιώνας) πίστευαν στη δεύτερη. Έτσι ένα πείραμα θα μπορούσε να δείξει ή όχι ότι το φως αλλάζει ταχύτητα ως προς κινούμενο σχετικά με τον αιθέρα σύστημα και μάλιστα σύμφωνα με τον νόμο πρόσθεσης ταχυτήτων της κλασικής μηχανικής που αναφέραμε προηγουμένως.

Η πιο σοβαρή προσπάθεια πειραματικής επιβεβαίωσης της παραπάνω υπόθεσης έγινε με το πείραμα των Michelson - Morley.

Το έτος 1881 ο Αμερικανός φυσικός Albert A. Michelson (1852 - 1931) άρχισε μια σειρά πειραμάτων με τα οποία ήθελε να μετρήσει την ταχύτητα του φωτός σε διάφορες κατευθύνσεις, ως προς την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο. Τα πειράματα κράτησαν πολλά χρόνια. Το 1887 ο Michelson μαζί με τον Edward Morley και με πολύ πιο εξελιγμένα όργανα, συνέχισαν τις μετρήσεις. Προς μεγάλη έκπληξη πολλών (και των ίδιων ακόμα), βρήκαν ότι η ταχύτητα του φωτός, c, ήταν η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις, ανεξάρτητα το πώς κινείται η Γη. Η πειραματική διάταξη των Michelson - Morley ήταν ένα συμβολόμετρο, που είναι γνωστό σήμερα ως συμβολόμετρο του Michelson και η αρχή του περιγράφεται στο σχήμα 4.118.



ΣΧΗΜΑ 4.118

Αρχή λειτουργίας του Συμβολομέτρου Michelson. Η δέσμη φωτός από την πηγή Π χωρίζεται με το ημιδιαφανές κάτοπτρο K_1 σε δύο δέσμες, την Α που κατευθύνεται προς το κάτοπτρο K_2 και την Β προς το K_3. Αυτές ανακλώμενες τελικά φτάνουν στο τηλεσκόπιο παρατήρησης Τ και συμβάλλουν δίνοντας κροσσούς συμβολής.

Ο ένας βραχίονας του συμβολομέτρου έχει τη διεύθυνση της κίνησης της Γης στο διάστημα ως προς τον ακίνητο αιθέρα. Έστω c η ταχύτητα του φωτός ως προς τον αιθέρα. Αν η ταχύτητα της Γης είναι u (προφανώς η ταχύτητα του αιθέρα ως προς της Γη είναι $-u$), τότε η ταχύτητα της δέσμης φωτός Α, όταν κατευθύνεται προς το κάτοπτρο K_2 θα έπρεπε να είναι $c-u$ (νόμος συνδυασμού ταχυτήτων του Γαλιλαίου). Όταν η δέσμη Α ανακλαστεί στο K_2 και κινείται αντίθετα από πριν, η ταχύτητα του φωτός θα έπρεπε να είναι $c+u$. Υπάρχει γενικώς διαφορά οπτικών δρόμων για την Α και Β και άρα και διαφορές φάσεων όταν φτάσουν στο σημείο παρατήρησης, στο τηλεσκόπιο Τ, οπότε συμβάλλουν και δίνουν κροσσούς συμβολής. Όπως θα φανεί από την ανάλυση του πειράματος, αν περιστραφεί η διάταξη στο επίπεδο της κατά 90^o, έτσι ώστε η δέσμη Β να γίνει παράλληλη προς τη διεύθυνση κίνησης της Γης και η Α κάθετη, τότε οι κροσσοί συμβολής θα μετατοπιστούν και η μετατόπισή τους είναι συνάρτηση της ταχύτητας της Γης ως προς τον αιθέρα. Το πείραμα έγινε πολλές φορές και δεν βρέθηκε μετατόπιση μέσα στα πλαίσια της ακρίβειας του πειράματος, που ήταν πολύ μεγάλη. Βρήκαν πρακτικώς μηδέν μετατόπιση κροσσών. Το όριο που μπορούσαν να μετρήσουν ήταν περίπου 0,01 του κροσσού δηλαδή πολύ πιο μικρό από το 0,4 του κροσσού που αναμένονταν από τη γνωστή ταχύτητα της Γης κατά την περιφορά της περί τον Ήλιο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ MICHELSON-MORLEY

1. Έστω ότι η συσκευή είναι ακίνητη ως προς τον αιθέρα.

Είναι προφανές ότι, όταν η συσκευή είναι ακίνητη ως προς τον αιθέρα, η διαφορά χρόνων άφιξης των ακτίνων θα είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της και άρα οι κροσσοί που σχηματίζονται δεν μετατοπίζονται όταν περιστραφεί κατά 90^o. Ας σημειωθεί ότι αν οι οπτικές διαδρομές ήταν ίδιες δεν θα είχαμε διαφορές φάσεων ούτε κροσσούς συμβολής. Ανεξάρτητα όμως από κίνηση ως προς αιθέρα ή όχι αυτό δεν μπορεί να επιτευχθεί στην πράξη, πάντα υπάρχουν διαφορές οπτικών δρόμων και φάσεων και άρα κροσσοί συμβολής. Γιαυτό, αυτό που εξετάζεται στο πείραμα είναι η μετατόπιση των κροσσών κατά τη στροφή της συσκευής.

2. Έστω ότι η συσκευή κινείται με ταχύτητα *u* ως προς τον αιθέρα.

Ας παρακολουθήσουμε στο σχήμα 4.118 την ακτίνα Α που πορεύεται προς το κάτοπτρο K_2, φθάνει σε αυτό κινούμενη με ταχύτητα $c-u$, ως προς το σύστημα αναφοράς της Γης, ανακλάται και επιστρέφει στο K_1, κινούμενη με ταχύτητα $c+u$, ως προς το ίδιο σύστημα.

Επομένως ο συνολικός χρόνος κίνησης για τη διαδρομή $K_1K_2K_1$ θα είναι

$$t_1 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} \qquad \text{ή}$$

$$t_1 = \frac{2Lc}{c^2-u^2} \qquad \text{ή}$$

$$t_1 = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \tag{4.105}$$

Η άλλη ακτίνα που πορεύεται προς το κάτοπτρο K_3, κάθετα προς την ταχύτητα του αιθέρα έχει ταχύτητα $\sqrt{c^2-u^2}$, σε σχέση με το σύστημα αναφοράς της Γης, ίδιου μέτρου και για τις δύο διαδρομές.

Αυτό προκύπτει από τη σχέση πρόσθεσης ταχυτήτων του Γαλιλαίου. Αν $\vec{u}$ η ταχύτητα της Γης ως προς τον αιθέρα και $\vec{\upsilon}'$ η ταχύτητα του φωτός ως προς τη Γη, τότε η ταχύτητα του φωτός ως προς τον αιθέρα θα είναι,

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{\upsilon}'$$

Όμως τα $\vec{u}$ και $\vec{\upsilon}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους άρα

$$c^2 = u^2 + \upsilon'^2 \quad \text{(Πυθαγόρειο θεώρημα)}$$

Άρα

$$\upsilon' = \sqrt{c^2-u^2}$$

Επομένως ο συνολικός χρόνος κίνησης της ακτίνας για τη διαδρομή $K_1K_3K_1$ θα είναι

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} \qquad \text{ή}$$

$$t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{4.106}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (4.105) και (4.106) μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά χρόνου άφιξης των δύο ακτίνων στο σημείο συμβολής. (Δεν μπαίνουμε σε τεχνικές λεπτομέρειες όταν πρέπει να λάβουμε υπόψη και άλλους παράγοντες που τελικώς δεν υπεισέρχονται στο τελικό αποτέλεσμα).

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c}\left[\frac{1}{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}\right] = \frac{2L}{c}\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Την παραπάνω παράσταση μπορούμε να την απλοποιήσουμε σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

για $|x| << 1$ (αυτή είναι μια πολύ χρήσιμη σχέση για πολλά προβλήματα της Σχετικότητας!)

$$x = \frac{u^2}{c^2} \ll 1$$

(αφού το $u \approx 3 \times 10^4$ m/s, είναι η ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον ήλιο) και το $n = -1$ και $-1/2$ αντίστοιχα. Έτσι έχουμε κατά προσέγγιση

$$\Delta t = \frac{2L}{c}\left[1 + \frac{u^2}{c^2} - \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)\right] \qquad \text{ή}$$

$$\Delta t = \frac{Lu^2}{c^3}$$

η διαφορά διαδρομής, που αντιστοιχεί στη χρονική αυτή διαφορά είναι

$$\Delta d = c\Delta t = \frac{Lu^2}{c^2}$$

και η αντίστοιχη διαφορά φάσης

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d = \frac{2\pi L u^2}{\lambda c^2} \tag{4.107}$$

Αποτέλεσμα της διαφοράς φάσης είναι η δημιουργία κροσσών συμβολής. Αν η συσκευή στραφεί κατά 90°, έτσι ώστε ο δρόμος BK_2 να γίνει παράλληλος προς τη διεύθυνση κίνησης της συσκευής και ο BK_1 κάθετος προς αυτή, τότε η διαφορά φάσης θα είναι, $-\Delta\varphi$. Άρα το αποτέλεσμα της περιστροφής αυτής στη διαφορά φάσης, θα είναι μια μεταβολή της κατά

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi - (-\Delta\varphi) = 2\,\Delta\varphi$$

Άρα από την σχέση (4.107) έχουμε

$$\Delta\varphi' = \frac{4\pi L u^2}{\lambda c^2} \tag{4.108}$$

Αποτέλεσμα, λοιπόν, της στροφής της συσκευής κατά 90° θα είναι μια μετατόπιση των κροσσών συμβολής κατά διάστημα που αντιστοιχεί σε διαφορά φάσης $\Delta\varphi' = 2\Delta\varphi$, μικρή μεν αλλά μετρήσιμη. Όπως προαναφέραμε, οι Michelson - Morley περίμεναν μετακίνηση κροσσών κατά, περίπου, 0,4 της απόστασης μεταξύ διαδοχικών κροσσών. Το πείραμά τους μπορούσε να μετρήσει μετατοπίσεις της τάξης μικρότερου του εκατοστού αυτής της μετακίνησης. Μέσα στα όρια της πειραματικής τους ακρίβειας δεν παρατήρησαν καθόλου μετατόπιση.

ΓΕΓΟΝΟΣ ΣΤΟΝ ΤΕΤΡΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ

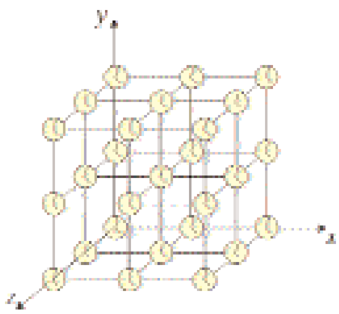
Για να μελετήσουμε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας είναι αναγκαίο να ξαναπούμε και να καταλάβουμε πώς περιγράφεται ένα συμβάν, ένα γεγονός, από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ένα γεγονός (συμβάν) είναι κάτι που συμβαίνει και μπορεί να περιγραφεί (προσδιοριστεί) με τρεις συντεταγμένες του χώρου και μια συντεταγμένη του χρόνου. Μερικά παραδείγματα γεγονότων (συμβάντων) είναι:

1. Το άναμα ενός μικροσκοπικού λαμπτήρα κάποια χρονική στιγμή σε κάποια θέση.
2. Η σύγκρουση δύο σωματιδίων κάποια χρονική στιγμή σε κάποια θέση.
3. Το πέρασμα ενός παλμού φωτός από καθορισμένο σημείο κάποια χρονική στιγμή.
4. Μια έκρηξη σε κάποιο σημείο κάποια χρονική στιγμή.

Σε αντίθεση με τη κλασική φυσική που ο χρόνος είναι ανεξάρτητη οντότητα από το χώρο θα δούμε ότι στη σχετικότητα χώρος και χρόνος είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους. Έτσι μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις τέσσερεις αυτές συντεταγμένες ως συντεταγμένες του χωρόχρονου. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε συνδέεται με το σύστημα αναφοράς από όπου γίνεται η παρατήρηση. Ένα δεδομένο γεγονός μπορεί να καταγραφεί από διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Γενικώς, από διαφορετικά συστήματα, διαφορετικές συντεταγμένες του χωρόχρονου προσδιορίζουν το ίδιο γεγονός.

Στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας για την περιγραφή της εξέλιξης των φαινομένων στο χώρο και στο χρόνο μπορούμε να φανταστούμε το εξής. Στο κάθε σύστημα αναφοράς φανταζόμαστε ένα πλέγα συντεταγμένων, όπως στο σχήμα 4.119. Στον κάθε κόμβο του πλέγματος υπάρχει ένα ρολόι. Όλα τα ρολόγια του συστήματος είναι μεταξύ τους συγχρονισμένα. Η διαδικασία συγχρονισμού των ρολογιών για το συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς βασίζεται στη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός. Για να εξασφαλίσουμε ότι το ρολόι στη θέση (x, y, z) είναι συγχρονισμένο με το ρολόγι στη θέση $(0, 0, 0)$ μπορούμε να φανταστούμε, για παράδειγμα, ότι από τη θέση $(0, 0, 0)$ την χρονική στιγμή t_0, σύμφωνα με το τοπικό ρολόι, στέλνεται φως προς τη θέση (x, y, z). Το δεύτερο τοπικό ρολόι ρυθμίζεται ώστε να δείχνει

$$t_0 + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c}$$



ΣΧΗΜΑ 4.119

Για την περιγραφή γεγονότων στην σχετικότητα φανταζόμαστε ότι στο σύστημα αναφοράς υπάρχει ένα πλέγμα συντεταγμένων. Στον κάθε κόμβο υπάρχει ένα ρολόι και όλα τα ρολόγια είναι μεταξύ τους συγχρονισμένα.

οπότε συγχρονίζεται με το ρολόι της αρχής των αξόνων. Η διαδικασία πρέπει να γίνει για τα ρολόγια όλων του κόμβων. Όσο κοντύτερα είναι ο ένας στον άλλο κόμβο τόσο καλύτερα μπορούν να περιγραφούν τα διάφορα γεγονότα.

Η ίδια διαδικασία γίνεται ξεχωριστά για οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η ανάγκη αυτής της διαδικασίας δεν υπάρχει στη Νευτώνια μηχανική, διότι εκεί υποτίθεται ότι το φως διαδίδεται με άπειρη ταχύτητα, ή αλλοιώς οι διαδικασίες (ταχύτητες) είναι πολύ αργές (μικρές) σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός και οι διαδικασίες συγχρονισμού είναι τετριμένες και δεν χρειάζεται πλέγμα ρολογιών. Κάποιος παρατηρητής στο κάθε σύστημα αναφοράς έχει με μια "ματιά" μια συνολική εικόνα των γεγονότων που συμβαίνουν οπουδήποτε στο σύστημα, αφού τα σήματα φωτός προς τα μάτια του έρχονται ακαριαία από παντού!

1. Οι συντεταγμένες του χώρου

Με τη βοήθεια του παραπάνω πλέγματος συντεταγμένων του συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς μπορεί να εντοπιστεί η θέση ενός γεγονότος (μιας λάμψης π.χ.) αρκεί να διαβαστούν οι τρεις συντεταγμένες του χώρου στη θέση του γεγονότος.

2. Η συντεταγμένη του χρόνου

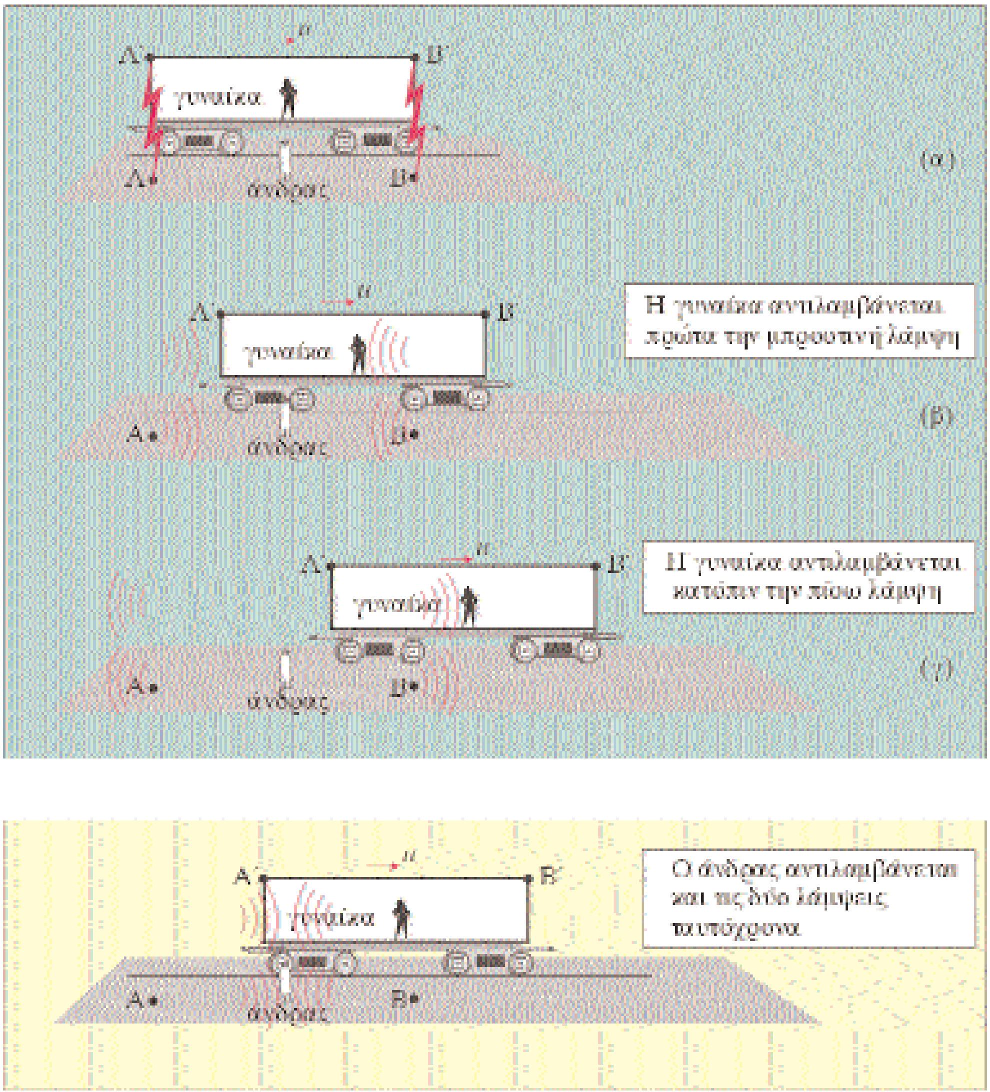
Όπως είπαμε σε κάθε κορυφή του πλέγματος υπάρχει ένα ρολόι. Το ρολόι που βρίσκεται στη θέση που έγινε το γεγονός δίνει τη χρονική στιγμή του γεγονότος.

3. Οι συντεταγμένες του χωρόχρονου

Με βάση τα παραπάνω οι συντεταγμένες του χωρόχρονου καθορίζονται ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα, καταγράφοντας τη θέση του γεγονότος όπως μετριέται με βάση τις συντεταγμένες του κοντυνότερου κόμβου, ο χρόνος είναι ο χρόνος που δείχνει το ρολόι του κόμβου αυτού. Με την παραπάνω επινόηση αποφεύγουμε το πρόβλημα της διάδοσης σημάτων από το γεγονός στον παρατηρητή. Φυσικά ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς η περιγραφή του ίδιου γεγονότος, ακολουθεί την ίδια μεθοδολογία, αλλά με διαφορετικές συντεταγμένες χωρόχρονου. Αυτό συμβαίνει διότι στο δεύτερο σύστημα υπάρχει το δικό του πλέγμα και τα δικά του συγχρονισμένα ρολόγια. Πρέπει να σημειώσουμε ότι όταν ένα ρολόι ενός κινούμενου συστήματος περνά δίπλα από ρολόι ακίνητου συστήματος, επειδή βρίσκονται στιγμιαία πολύ κοντά δεν υπάρχει πρόβλημα στην σύγκριση των ενδείξεών τους, διότι δεν υπάρχουν προβλήματα διάδοσης σημάτων. Το σωστό είναι να φανταζόμαστε πολλούς παρατηρητές ή αυτόματους μηχανισμούς καταγραφής στους κόμβους κάθε συστήματος, οι οποίοι κάνουν τις παρατηρήσεις. Ακόμη και αν μιλούμε για έναν παρατηρητή στο σύστημα, αυτό που εννοούμε είναι, στην ουσία, η παραπάνω διαδικασία παρατήρησης.

Η ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟΥ

Όπως είδαμε από τα προηγούμενα μια από τις βασικές παραδοχές της Νευτώνιας μηχανικής είναι η ύπαρξη "απόλυτου χρόνου", καλά καθορισμένου, που δεν επηρεάζεται από τίποτα. Σύμφωνα όμως με την Ειδική Σχετικότητα, οι μετρήσεις χρονικών διαστημάτων εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς, στο οποίο γίνονται. Ας παρακολουθήσουμε το παρακάτω εικονικό (φανταστικό) πείραμα που επινόησε ο Einstein, για να περιγράψουμε την έννοια του ταυτόχρονου δύο γεγονότων.



ΣΧΗΜΑ 4.120

Αν ο άνδρας δει τις λάμψεις των δύο κεραυνών συγχρόνως, η γυναίκα βλέπει πρώτα τη λάμψη του κεραυνού που έπεσε στο μπροστινό μέρος του βαγονιού.

Υποθέστε ότι μια γυναίκα βρίσκεται στο μέσο ενός βαγονιού τρένου που κινείται ευθύγραμμα και ισοταχώς ως προς τη Γη με ταχύτητα u (Σχ. 4.120). Ένας άνδρας στέκεται στο έδαφος ακίνητος. Δύο κεραυνοί χτυπούν το βαγόνι στα δύο άκρα του, μπρος και πίσω. Κάθε κεραυνός αφήνει από ένα σημάδι (Α′, Β′) στο βαγόνι και από ένα σημάδι (Α, Β) στο έδαφος. Ας υποθέσουμε ότι η γυναίκα βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος Α′Β′ και άνδρας στο μέσο του διαστήματος ΑΒ και ότι τα μέτωπα των φωτεινών κυμάτων φθάνουν στον άνδρα ταυτόχρονα (Σχ. 4.120). Ο άνδρας θα ισχυριστεί ότι τα δύο γεγονότα ήταν ταυτόχρονα, αφού διήνησαν ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους. Η γυναίκα όμως, επειδή κινείται, θα δεχθεί το φως από την μπροστινή λάμψη νωρίτερα από το φως της πίσω λάμψης. Άρα η γυναίκα θα ισχυριστεί ότι, αφού βρίσκεται στο μέσον του βαγονιού και το φως ταξιδεύει ως προς το βαγόνι με ταχύτητα c προς όλες τις κατευθύνσεις, τα γεγονότα δεν ήταν ταυτόχρονα και συγκεκριμένα ο μπροστινός κεραυνός έπεσε πρώτος και ακολούθησε ο πίσω. Είναι προφανές ότι αυτές οι αναφορές "φαινομενικά" δεν συμφωνούν, εν τούτοις και οι δύο παρατηρητές είναι σωστοί.

Σημειώστε ότι το φως κινείται με την ίδια ταχύτητα c και στα δύο συστήματα αναφοράς, όπως απαιτεί η δεύτερη αρχή της σχετικότητας. Αν τα δύο γεγονότα είχαν συμβεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνονται ταυτόχρονα στη γυναίκα, τότε δεν θα ήταν ταυτόχρονα για τον άνδρα. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι το ταυτόχρονο δεν είναι απόλυτη έννοια αλλά εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Συγκεκριμένα: **το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων που συμβαίνουν σε δύο διαφορετικές θέσεις μπορεί να είναι διαφορετικό για διαφορετικά συστήματα αναφοράς.** Άρα λοιπόν πρέπει να μάθουμε να συγκρίνουμε χρονικά διαστήματα μετρημένα σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς (σχετικότητα του χρόνου). Σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, για να περιγράψουμε τα γεγονότα σύμφωνα με τους βασικούς νόμους της φύσης, που ισχύουν ίδιοι σε όλα τα συστήματα. Όπως θα μάθουμε παρακάτω, οι μετασχηματισμοί του Lorentz είναι οι σωστοί μετασχηματισμοί, που συσχετίζουν τις παρατηρήσεις γεγονότων από συστήματα αναφοράς, τα οποία είναι αδρανειακά και κινούνται το ένα ως προς το άλλο.

ΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ LORENTZ

Ο Αϊνστάιν με τα δύο αξιώματα που έβαλε κατέληξε στους μετασχηματισμούς του Lorentz. Υποθέτουμε ότι τα δυο συστήματα (K, K') έχουν την ειδική (ή κανονική) διάταξη, δηλαδή παράλληλους άξονες συνέχεια, οι οποίοι συμπίπτουν, όταν $t = t' = 0$. Τότε, αν το K' κινείται ως προς το Κ με ταχύτητα u κατά μήκος του Ox (Σχ. 4.117) οι μετασχηματισμοί Lorentz από το Κ στο

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \tag{4.109}$$

όπου

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{u}{c}$$

Κ′, που λέγονται και ειδικοί μετασχηματισμοί Lorentz είναι οι εξής:

Αυτοί οι μετασχηματισμοί περιγράφουν πως φαίνεται από το σύστημα Κ′ γεγονός (x', y', z', t') που στο σύστημα K περιγράφεται από τα (x, y, z, t).

Για να βρούμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Lorentz, που θα περιγράφουν στο σύστημα K γεγονός που στο σύστημα K' περιγράφεται από τα

(x', y', z', t'), αρκεί στις παραπάνω σχέσεις (4.109) να αντικαταστήσουμε την ταχύτητα u με την $-u$ (αυτή η αλλαγή προσήμου στην ταχύτητα, απλά αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η ταχύτητα του συστήματος K ως προς το K' είναι αντίθετη της ταχύτητας του K' ως προς το K) προφανώς, μπορείτε να καταλήξετε στο ίδιο αποτέλεσμα λύνοντας τις προηγούμενες εξισώσεις ως προς (x, y, z, t). Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}t\right) \end{aligned} \qquad \text{(4.110)}$$

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz από το K' στο K

Αυτοί θεωρούνται οι σωστοί μετασχηματισμοί και για τη μηχανική και για τον ηλεκτρομαγνητισμό και για όλους τους θεμελιώδεις φυσικούς νόμους. Σε όσα ακολουθούν θα υποθέτομε πάντα ότι έχομε την ειδική διάταξη αξόνων συντεταγμένων και θα χρησιμοποιούμε τους ειδικούς μετασχηματισμούς εκτός αν πούμε κάτι άλλο. Η (παλιά, συνήθης) μηχανική τροποποιήθηκε έτσι που να γίνει σχετικιστική μηχανική, η οποία διαφέρει σημαντικά από τη συνήθη μηχανική στις υψηλές ταχύτητες (κοντά στη ταχύτητα του φωτός) ενώ στις χαμηλές ταχύτητες δίνει ως προσέγγιση τη συνήθη μη σχετικιστική μηχανική. Αν $u/c << 1$ τότε οι μετασχηματισμοί του Lorentz τείνουν στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, δηλαδή

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Δηλαδή, η θεωρία της ειδικής σχετικότητας είναι θεωρία γενικότερη από τη συνήθη μηχανική του Νεύτωνα και οδηγεί στην τελευταία για μικρές ταχύτητες, σε σχέση με αυτήν του φωτός στο κενό.

Αυτό ισχύει για όλες τις θεωρίες που εμπεριέχουν προηγούμενες ως προσεγγίσεις. Λέγεται Αρχή της Αντιστοιχίας.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Πολλές φορές χρειάζεται να υπολογίσουμε τις χωρικές και χρονικές αποστάσεις

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta x' = x_2' - x_1', \quad \Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

μεταξύ δύο γεγονότων όπως φαίνονται από τα συστήματα K και K' αντίστοιχα. Προς τούτο χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις των μετασχηματισμών Lorentz (4.109) και (4.110) υπολογίζουμε τις διαφορές ανάμεσα στις τέσσερεις μεταβλητές x, x', t, t' και καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) \end{aligned} \qquad \text{(4.111)}$$

και

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{aligned} \qquad \text{(4.112)}$$

CERN "Ευρωπαϊκό Συμβούλιο Πυρηνικών Ερτευνών"

Το 1951 δημιουργήθηκε στην Ευρώπη ένα προσωρινό Συμβούλιο (μια ομάδα ανθρώπων), που ονομάστηκε "Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire" (CERN). Το 1953 αυτό το Συμβούλιο αποφάσισε να δημιουργήσει ένα κεντρικό εργαστήριο κοντά στη Γενεύη της Ελβετίας. Εκείνη την εποχή, η έρευνα στην καθαρή φυσική ήταν συγκεντρωμένη γύρω από την κατανόηση του εσωτερικού του ατόμου, γιαυτό η λέξη Nucléaire ("Πυρηνικό"). Με έγκριση και των κοινοβουλίων των κρατών μελών το επίσημο όνομα του εργαστηρίου καθορίστηκε σε "Organisation Européen pour la Recherche Nucléaire" ή "European Organisation for Nuclear Research", δηλαδή "Ευρωπαϊκός Οργανισμός Πυρηνικών Ερευνών". Παρ' όλα αυτά το εργαστήριο αναφέρεται με τα αρχικά CERN. Πολύ σύντομα η ενασχόληση στο εργαστήριο αυτό πήγε πιο βαθύτερα από τις μελέτες του πυρήνα, χρησιμοποιώντας όλο και μεγαλύτερες ενέργειες σωματιδίων.

Το CERN ουσιαστικά είναι κέντρο έρευνας φυσικής υψηλών ενεργειών (ΦΥΕ) δηλαδή έρευνας στοιχειωδών σωματιδίων. Η δραστηριότητά του συγκεντρώνεται κυρίως στη μελέτη των αλληλαπιδράσεων μεταξύ υποπυρηνικών (στοιχειωδών) σωματιδίων, αναφέρεται και με τον τίτλο "European Laboratory for Particle Physics" ("Laboratoire Européen pour la Physique des Particules"), δηλαδή "Ευρωπαϊκό Εργαστήριο Φυσικής Σωματιδίων". Σήμερα αποτελείται από μερικές δεκάδες μέλη κράτη μεταξύ των οποίων και η Ελλάδα η οποία είναι και ιδρυτικό μέλος. Έχει μόνιμο προσωπικό μερικές χιλιάδες και παρόλο που είναι ευρωπαϊκό κάνουν έρευνα σ' αυτό χιλιάδες επιστήμονες από όλο τον κόσμο.

Από τις παραπάνω εξισώσεις λείπουν οι διαφορές στις συντεταγμένες y και z, διότι αυτές δεν επηρεάζονται και ισχύει, $\Delta y = \Delta y'$, $\Delta z = \Delta z'$, αφού η (σχετική) κίνηση γίνεται στη διεύθυνση των x.

Εφαρμογή: ΤΟ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟ

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)$$

από τις παραπάνω σχέσεις (4.112) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η έννοια του ταυτόχρονου δεν είναι απόλυτη. Πράγματι, αν δύο γεγονότα που συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία στο σύστημα αναφοράς K' ($\Delta x' \neq 0$), είναι ταυτόχρονα ($\Delta t' = 0$) αυτά δεν είναι ταυτόχρονα, στο σύστημα αναφοράς K. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των γεγονότων αυτών, μετρούμενο από το σύστημα K, υπολογίζεται σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση, όταν βάλουμε $\Delta t' = 0$ και είναι

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x'$$

Δηλαδή $\Delta t \neq 0$ άρα όχι ταυτόχρονα στο K. Αυτό είναι σύμφωνο με το συμπέρασμα, στο οποίο οδηγηθήκαμε στην παράγραφο για τη Σχετικότητα του Ταυτόχρονου.

Ας βρούμε τώρα τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας με τη χρήση των μετασχηματισμών Lorentz. Για τους υπολογισμούς μας ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x και του άξονα x' και ότι ως προς το κινούμενο με ταχύτητα u σύστημα K' τη χρονική στιγμή t_1' βρίσκεται στη θέση (x_1', y_1', z_1') και τη στιγμή t_2' στη θέση (x_2', y_2', z_2'). Τότε η συνιστώσα v_x', ως προς το K' είναι

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'}$$

στο όριο $\Delta t' \to 0$ έχομε

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$$

Η σχέση αυτή, με τη χρήση των σχέσεων (4.111), που συσχετίζουν τις μεταβολές $\Delta x'$ και $\Delta t'$, όπως φαίνονται από το σύστημα K' με τις αντίστοιχες Δx και Δt όπως φαίνονται από το K, οδηγεί στην

$$v_x' = \frac{\Delta x - u \Delta t}{\Delta t - \dfrac{u}{c^2} \Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \dfrac{u}{c^2} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Στο όριο πολύ μικρών Δx, Δt έχομε

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}$$

Προφανώς η συνιστώσα v_x όπως μετριέται από το “ακίνητο” σύστημα K, είναι

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ή στο όριο } \Delta t \to 0 \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

Συνοψίζοντας έχουμε για το μετασχηματισμό ταχυτήτων από το K στο K'

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{u}{c^2} v_x}}$$

$$\boxed{v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \dfrac{u}{c^2} v_y\right)}} \qquad (4.113)$$

$$\boxed{v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \dfrac{u}{c^2} v_z\right)}}$$

Αν τις παραπάνω σχέσεις, τις λύσουμε ως προς τα v_x, v_y, v_z θα πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ταχυτήτων, από το K' στο K, δηλαδή:

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{u}{c^2} v'_x}}$$

$$\boxed{v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \dfrac{u}{c^2} v'_y\right)}} \qquad (4.114)$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός ταχυτήτων

$$\boxed{v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \dfrac{u}{c^2} v'_z\right)}}$$

Οι τελευταίες σχέσεις αναμένονται, αφού οι τύποι είναι συμμετρικοί και προκύπτουν από τους προηγούμενους αν βάλουμε όπου u το $-u$.

Παρατηρούμε ότι: Στην περίπτωση, που η ταχύτητα u είναι πολύ μικρότερη από τη ταχύτητα του φωτός c, οι παρανομαστές των κλασμάτων θα τείνουν στη μονάδα οπότε, στο όριο αυτό βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Στη μη σχετικιστική φυσική και τα v και το u είναι πολύ μικρότερα του c.

Μπορούμε ακόμη να επιβεβαιώσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι συμβιβαστή με την υπόθεση ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια και για τα δυο συστήματα K και K'. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ενός σήματος που διαδίδεται κατά τον άξονα Ox. Στην περίπτωση αυτή η $\upsilon_x = \upsilon = c$ και έτσι έχουμε,

$$\upsilon'_x = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c^2}c} = \frac{c\left(c - u\right)}{c - u} = c$$

Άρα, οποιοσδήποτε παρατηρητής στο K' μετράει ταχύτητα c, όπως και οποιοσδήποτε παρατηρητής στο K (το αναλλοίωτο της ταχύτητας c του φωτός ή καλύτερα του μέτρου της ταχύτητας του φωτός).

Εύκολα πλέον φαίνεται πως όποιες ταχύτητες, μικρότερες του c, και να προσθέσουμε καταλήγουμε σε ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός c, δηλαδή η ταχύτητα του φωτός c στο (κενό) είναι η έσχατη (η μέγιστη) ταχύτητα, που μπορεί να αποκτήσει κάποιο αντικείμενο. Εφόσον ισχύει

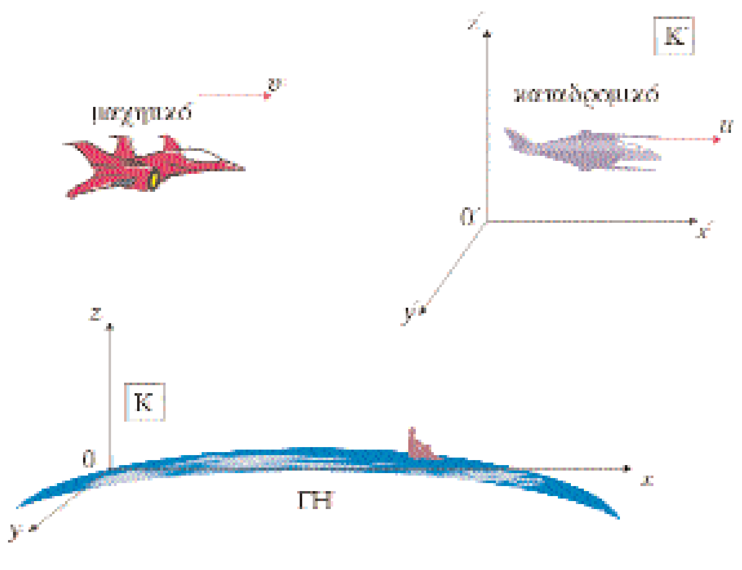
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

συμπεραίνουμε ότι, αφού τα x, x', t, t' είναι πραγματικά, το $u < c$. Δηλαδή δεν υπάρχει φυσικό σύστημα αναφοράς ή αντικείμενο με ταχύτητα μεγαλύτερη του c.

Είχε διατυπωθεί παλιότερα η θεωρία των ταχυονίων, που εθεωρούντο σωματίδια με ταχύτητες μεγαλύτερες της c, αλλά δεν επαληθεύτηκε, αφού δεν βρέθηκαν τέτοια σωματίδια.

Παράδειγμα 4-30

Κατά τη διάρκεια ενός αστρικού πολέμου του μακρυνού μέλλοντος ένα μαχητικό του γήινου στόλου καταδιώκει ένα καταδρομικό του αστρικού στόλου. Για ένα παρατηρητή στη Γη, το μαχητικό κινείται με ταχύτητα $0{,}95c$ και το καταδρομικό κινείται με ταχύτητα $0{,}90c$. Ποιά η ταχύτητα του μαχητικού που παρατηρείται από το καταδρομικό; (Το τελικό αποτέλεσμα να δοθεί με 2 σημαντικά ψηφία).



ΣΧΗΜΑ 4.121

Απάντηση

Ονομάζουμε το σύστημα της γης K και το σύστημα του καταδρομικού $K΄$. Έτσι έχουμε: $u = 0{,}90c$ και $\upsilon = 0{,}95\,c$. Σύμφωνα με τη σχέση

$$\upsilon' = \frac{\upsilon - u}{1 - \upsilon \dfrac{u}{c^2}}$$

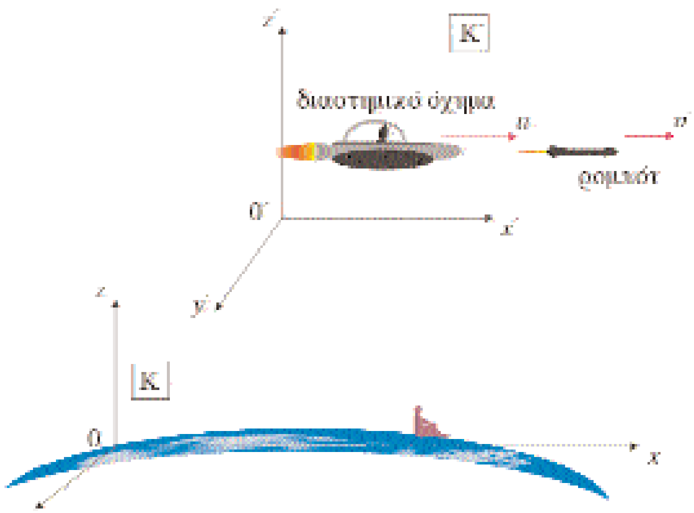
αντικαθιστώντας έχουμε

$$\upsilon' = \frac{0{,}95\ c - 0{,}90\ c}{1 - 0{,}95\,c\,\dfrac{0{,}90\ c}{c^2}}$$

ή $$\upsilon΄ = 0{,}34\ c$$

Παράδειγμα 4-31

Σε κάποιο μελλοντικό αιώνα ένα προχωρημένης τεχνολογίας διαστημικό όχημα εγκαταλείπει τη Γη με ταχύτητα 0,95 c. Το όχημα εκτοξεύει ένα κατασκοπευτικό ρομπότ προς την ίδια κατεύθυνση με αυτή της κίνησής του με ταχύτητα 0,80 c ως προς το όχημα. Ποιά η ταχύτητα του ρομπότ ως προς τη Γη; Αν το όχημα ανάψει τον προβολέα του προς την ίδια κατεύθυνση που κινείται πόση είναι η ταχύτητα του φωτός του προβολέα που μετράει ένας παρατηρητής στη Γη; (Τελικό αποτέλεσμα με 2 σημαντικά ψηφία).



ΣΧΗΜΑ 4.122

Απάντηση

Έστω K το σύστημα αναφοράς της Γης και $K΄$ του οχήματος. Τότε $u = 0{,}95\,c$ και $\upsilon΄ = 0{,}80\,c$. ΄Αρα από τη σχέση

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + u}{1 + \upsilon \dfrac{u'}{c^2}}$$

αντικαθιστώντας έχουμε

$$v = \frac{0{,}80\ c + 0{,}95\ c}{1 + (0{,}80\ \text{c})\dfrac{(0{,}95\ \text{c})}{c^2}} = 0{,}99\ c$$

Άρα

$$v = 0{,}99\ c$$

Η ταχύτητα του φωτός του προβολέα ως προς τη Γη είναι c διότι η ταχύτητα του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ή ίδια και ίση με c. Αυτό μπορεί επίσης να δειχθεί αντικαθιστώντας το v' με το c και $u = 0{,}95\,c$, οπότε έχουμε: $v = c$.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΟΡΜΗ - ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Αποφεύγοντας την επιχειρηματολογία παρουσιάζουμε μόνο το αποτέλεσμα. Η **σχετικιστική ορμή** $\vec{p}$ ενός σωματιδίου μάζας m, που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ είναι

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v} = \gamma\, m\, \vec{v} \tag{4.115}$$

Όταν το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου v είναι πολύ μικρότερο σε σύγκριση με το c ($v << c$), ο ορισμός αυτός δίνει κατά προσέγγιση την Νευτώνια έκφραση $\vec{p} = m\vec{v}$ (αφού ο παρανομαστής τείνει στην μονάδα). Το μέτρο της σχετικιστικής ορμής είναι, εν γένει, μεγαλύτερο από το mv, ($\gamma \geq 1$).

Στην παραπάνω εξίσωση, το m είναι μια σταθερά, που αποτελεί ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό του σωματιδίου και περιγράφει την αδράνειά του. Αφού η έκφραση $p = mv$ ισχύει στο όριο μικρών ταχυτήτων, το m πρέπει να είναι η ίδια ποσότητα που χρησιμοποιείται στη Νευτώνια μηχανική. Στη σχετικιστική μηχανική, το m συνηθιζόταν να λέγεται **μάζα ηρεμίας** (rest mass) του σωματιδίου και παριστανόταν με το m_0. Σήμερα προτιμούμε να ονομάζουμε το m απλά **μάζα**. Το γινόμενο γm λεγόταν "σχετικιστική μάζα" (relativistic mass) m_{rel} (ή m) και έγραφαν τη σχέση

$$m_{\text{rel}}\ (= m) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Η έννοια της σχετικιστικής μάζας έχει σοβαρές αδυναμίες. **Δεν** πρέπει να λέμε ότι η σχετικιστική γενίκευση του ορισμού της ορμής είναι $\vec{p} = m_{\text{rel}}\vec{v}$, διότι αυτό θα μπορούσε να μας οδηγήσει και στη σχετικιστική γενίκευση του νόμου του Νεύτωνα $F = m_{\text{rel}}\,a$ και στη σχετικιστική γενίκευση της κινητικής ενέργειας $K = \dfrac{1}{2} m_{\text{rel}}\, v^2$, που είναι όμως λανθασμένες.

Η σχετικιστική (ολική) ενέργεια ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \gamma mc^2 \tag{4.116}$$

όπου p η σχετικιστική ορμή

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv \tag{4.117}$$

Αν η ταχύτητα του σωματιδίου είναι 0 (οπότε $p = 0$), τότε από τη σχέση (4.116) έχουμε

$$E = E_0 = mc^2 \tag{4.118}$$

Αυτή είναι η περίφημη εξίσωση ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας που αναφέρεται στη λεγόμενη ενέργεια ηρεμίας E_0. Δηλαδή ακόμη και όταν το σώμα είναι ακίνητο ισοδυναμεί με ενέργεια (ηρεμίας) $E_0 = mc^2$.

Αν η μάζα (ηρεμίας) του σωματιδίου είναι 0, τότε από την πρώτη εκ των σχέσεων (4.117) έχουμε

$$E = p \cdot c \tag{4.119}$$

Από τις σχέσεις (4.115) και (4.117) έχουμε

$$\vec{\upsilon} = \frac{c^2 \vec{p}}{E} \qquad \text{και}$$

$$\upsilon = \frac{c^2 p}{E} \tag{4.120}$$

Αν $m = 0$ μέσω των (4.119) και (4.120) βρίσκομε

$$\upsilon = c$$

Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι: Ένα σωματίδιο μηδενικής μάζας (ηρεμίας) κινείται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός και δεν μπορεί να ηρεμεί ποτέ σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτή είναι η περίπτωση του φωτονίου (του κβάντουμ της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας). Η σχέση (4.119) ισχύει, προσεγγιστικά, και για σωματίδια που δεν έχουν μηδενική μάζα, αλλά κινούνται με ταχύτητα συγκρίσιμη της ταχύτητας του φωτός ώστε η ορμή τους p να είναι πολύ μεγάλη οπότε η ποσότητα pc να είναι πολύ μεταλύτερη από την ποσότητα mc^2 στη σχέση (4.116).

Η σχετικιστική κινητική ενέργεια σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$K = E - E_0 = E - mc^2 \tag{4.121}$$

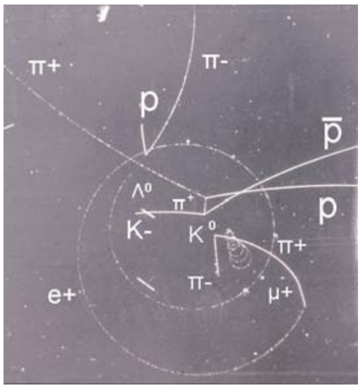
Κατά τις αλληλεπιδράσεις σωματιδίων όπου μπορεί να εξαφανίζονται σωματίδια και να εμφανίζονται άλλα, ισχύουν, η αρχή διατήρησης της Σχετικιστικής Ενέργειας και της Σχετικιστικής ορμής πριν και μετά την αλληλεπίδραση.

Συγκεκριμένα, αν πριν την αλληλεπίδραση έχομε τις σχετικιστικές ενέργειες για τα δύο σωματίδια που συγκρούονται, E_1 και E_2 και τις αντίστοιχες ορμές τους $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, ενώ μετά τη σύγκρουση έχομε τα σωματίδια με σχετικιστικές ενέργειες E_3, E_4, ... και σχετικιστικές ορμές $\vec{p}_3$, $\vec{p}_4$, ... θα έχομε,

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 + \ldots$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \ldots$$

Μπορεί μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας να δαπανηθεί και να παραχθούν σωματίδια που το άθροισμα των μαζών τους (ηρεμίας) να είναι



Αντιπρωτόνιο αντιδρά με πρωτόνιο μέσα σε ανιχνευτή τύπου θαλάμου φυσαλίδων.και παράγονται διάφορα σωματίδια. Ανιχνεύονται οι τροχιές μόνο των φορτισμένων σωματιδίων. Οι τροχιές είναι καμπύλες ένεκα υπάρξεως ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Τα σωματίδια και οι αντιδράσεις τους φαίνονται παρακάτω.

$$\bar{p}p \rightarrow K^0 K^- \pi^+$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \\ \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \\ \mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda^0 \\ \Lambda^0 \rightarrow \pi^- p \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \right\}$$

μεγαλύτερο από τα αθροίσματα μαζών των δύο αρχικών. Γίνεται και το αντίθετο, το άθροισμα των μαζών των προϊόντων της αντίδρασης μπορεί να είναι μικρότερο των αρχικών, οπότε μάζα δαπανήθηκε για να παραχθεί κινητική ενέργεια.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η σχέση $E_0 = mc^2$ ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας ηρεμίας, περιλαμβάνει κάθε μορφή ενέργειας που αποτελεί την ενέργεια ηρεμίας, δηλαδή περιλαμβάνει και δυναμική ενέργεια. Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η δυναμική ενέργεια σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ληφθεί μηδέν σε σημείο που η αλληλεπίδραση γίνεται μηδέν. Π.χ. η δυναμική ενέργεια για ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση πρέπει να ληφθεί μηδέν για άπειρη απόσταση μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωμάτων. Επίσης για αρμονικό ταλαντωτή η δυναμική ενέργεια πρέπει να είναι μηδέν όταν η απομάκρυνση είναι μηδέν. Δεν μπορούμε να προσθέτομε αυθαίρετες σταθερές(!) στην δυναμική ενέργεια.

Για να κατανοήσουμε αυτά τα τελευταία, ας φανταστούμε κλειστό δοχείο που μέσα του έχει πάρα πολλά σωματίδια, τα οποία κινούνται και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Το δοχείο είναι ακίνητο, τότε η μάζα ηρεμίας του θα είναι ίση με $m = E_{ολ}/c^2$, όπου $E_{ολ}$ είναι το άθροισμα όλων των μορφών ενέργειας των σωματιδίων. Δηλαδή των σχετικιστικών ενεργειών και δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης των σωματιδίων που περιλαμβάνονται στο δοχείο.

Αν φανταστούμε το δοχείο να “θερμαίνεται”, τότε η μάζα του αυξάνεται, διότι αυξάνεται η ολική ενέργεια των μορίων του με την ανωτέρω έννοια. Το δοχείο θα παρουσιάζει μεγαλύτερη αδράνεια και θα δέχεται και μεγαλύτερη βαρυτική έλξη μέσα σε βαρυτικά πεδία.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι συνήθως οι κινητικές ενέργειες των σωματιδίων αποκτώνται με επιτάχυνσή τους σε ηλεκτρικά πεδία οπότε μετρούνται σε eV, MeV, GeV, TeV κ.λπ. Από την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας με τη βοήθεια των σχέσεων για τη σχετικιστική ενέργεια και ορμή, οδηγούμαστε στον ορισμό αντίστοιχων μονάδων για τη μάζα που είναι eV/c^2, MeV/c^2 κ.λπ. και για την ορμή eV/c, MeV/c κ.λπ. Εύκολα από τα ανωτέρω μπορεί κάποιος να βρει τη σχέση μεταξύ αυτών των μονάδων και των αντίστοιχων του συστήματος *SI* (κυρίως ενδιαφέρουν οι αντιστοιχίες για τη μάζα). Ενώ πολλές φορές λέμε ότι η μάζα ή η ορμή του σωματιδίου τάδε είναι π.χ. 10 τζι-η-βι (10 GeV) καλό είναι να γράφουμε τη μονάδα σωστά, GeV/c^2, GeV/c κ.λπ.

Παράδειγμα 4-32

Θεωρείστε ότι η ηλιακή σταθερά στην περιοχή της Γης είναι 1,4 W/m^2. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε τετραγωνικό μέτρο κάθετα προς τις ηλιακές ακτίνες στην περιοχή της Γης, ο ήλιος στέλνει 1,4 W (1,4 J/s). Βρείτε κατά πόσο μικραίνει η μάζα του ήλιου ανά δευτερόλεπτο, αφού η μάζα του μετατρέπεται σε ενέργεια και ακτινοβολείται. Η απόσταση Ήλιου-Γης να ληφθεί, $1{,}5 \times 10^{11}$ m και 1 kg ισοδυναμεί με 8,988 J.

Απάντηση

Η σφαιρική επιφάνεια με κέντρο τον Ήλιο και ακτίνα την απόσταση της Γης από τον Ήλιο, d, έχει εμβαδόν,

$$\mathrm{A} = 4\pi d^2$$

όπου $d = 1{,}5 \times 10^{11}$ m άρα

$$A = 2{,}827 \times 10^{22}\ \mathrm{m}^2$$

επομένως η ενέργεια ανά δευτερόλεπτο είναι

$$P = 1{,}4 \times 2{,}827 \times 10^{22}\ \mathrm{J/s} = 3{,}958 \times 10^{22}\ \mathrm{J/s}$$

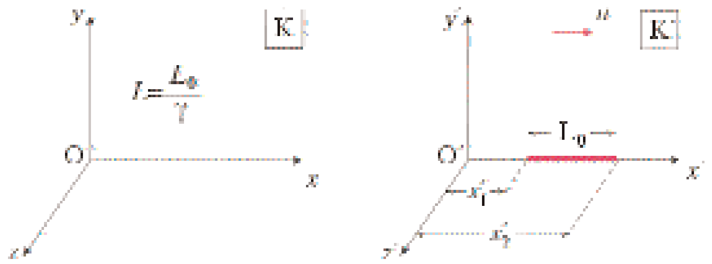
όμως 1 kg ισοδυναμεί με $8{,}988 \times 10^{16}$ J άρα η μείωση της μάζας του ήλιου ανά δευτερόλεπτο είναι

$$\frac{\Delta m|}{\Delta t} = 3{,}958 \times 10^{22}\ /\ 8{,}988 \times 10^{16}\ \mathrm{kg}/s$$

$$= 4{,}4 \times 10^5\ \mathrm{kg/s} = 4{,}4 \times 10^2\ \mathrm{t/s}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΗΚΟΥΣ

Από τους μετασχηματισμούς Lorentz μπορούμε να βρούμε πως σχετίζονται τα μήκη που παρατηρούνται από δύο αδρανειακά συστήματα για δεδομένο αντικειμένο. Ας θεωρήσουμε ότι ένας κανόνας έχει μήκος L_0, όπως μετριέται από ένα σύστημα K', ως προς το οποίο είναι ακίνητος. Αυτό λέγεται ιδιομήκος του κανόνα ή μήκος ηρεμίας ή κανονικό μήκος ή φυσικό μήκος. Ο κανόνας βρίσκεται κατά μήκος του άξονα των x. Το K' κινείται ως προς άλλο αδρανειακό σύστημα K με σταθερή ταχύτητα υ κατά μήκος του άξονα των x (Σχ. 4.123).



Σχήμα 4.123
Το μήκος ηρεμίας του κανόνα είναι L_0 και μετριέται ως προς σύστημα K', στο οποίο ο κανόνας είναι ακίνητος.

Έστω ότι η μία άκρη του κανόνα βρίσκεται στη θέση x_1' και η άλλη στη θέση x_2' ($x_1' < x_2'$) στο κινούμενο σύστημα K'. Αυτό είναι αλήθεια κάθε χρονική στιγμή t'. Το μήκος, λοιπόν, του κανόνα, όπως μετριέται από τον παρατηρητή του K' είναι $L_0 = x_2' - x_1' = \Delta x'$ (η ταυτόχρονη μέτρηση των x_1' και x_2' δεν είναι απαραίτητη, διότι ο παρατηρητής βλέπει τον κανόνα ακίνητο). Για τον ίδιο κανόνα ο παρατηρητής του K, ο οποίος τον βλέπει να κινείται, πρέπει να μετρήσει τις συντεταγμένες των άκρων του (x_2, x_1) την ίδια χρονική στιγμή $\Delta t = 0$ (ταυτόχρονα). Το μήκος που μετράει είναι $L = x_2 - x_1 = \Delta x$. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.109) του μετασχηματισμού Lorentz

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - \upsilon t_1)$$

$$x_2' = \gamma\,(x_2 - \upsilon t_2)$$

βρίσκουμε,

$$x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - x_1) + \gamma\upsilon\,(t_2 - t_1)$$

αφού $t_2 = t_1$ έχουμε

$$L_0 = \gamma L \quad \text{ή}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \qquad (4.122)$$

Παρατηρούμε δηλαδή αυτό που λέγεται συστολή του μήκους. Το L είναι το “φαινόμενο” μήκος από το σύστημα K, ως προς το οποίο ο κανόνας (το αντικείμενο) κινείται με ταχύτητα υ.

Αν ο κανόνας με μήκος ηρεμίας L_0 είναι ακίνητος στο K και παρατηρείται από το K' τότε εύκολα προκύπτει ότι το μήκος του θα φαίνεται από το K' ίσο με

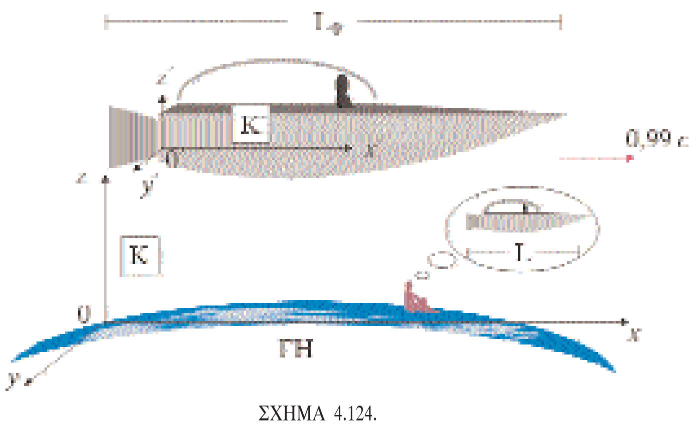
$$\frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Αυτό είναι ευνόητο γιατί υπάρχει συμμετρία στους μετασχηματισμούς Lorentz μεταξύ αδρανειακών συστημάτων. Εδώ το K κινείται ως προς το K' με ταχύτητα $-\upsilon$, ενώ η συστολή μήκους εξαρτάται από το υ^2 ή $(-\upsilon)^2$. Το μήκος ηρεμίας είναι το μέγιστο μήκος ενός αντικειμένου.

Χρειάζεται προσοχή, διότι πολλές φορές λέγεται ότι παίρνουμε ένα στιγμιότυπο του κανόνα καθώς κινείται. Αυτό δεν είναι αληθές με τη συνήθη έννοια του στιγμιότυπου. Όταν φωτογραφίζεται κάποιο κινούμενο σώμα, το φως φτάνει ταυτόχρονα στη φωτογραφική πλάκα, αλλά έχει ξεκινήσει από τα διάφορα σημεία του σώματος διαφορετικές (γενικώς) χρονικές στιγμές. Εδώ, το φως ξεκινά ταυτόχρονα από τα δύο άκρα! Αυτό είναι που οδηγεί στη συστολή του μήκους. Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν πάρει φωτογραφία του κινούμενου σώματος τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα. Οδηγείται σε παραμόρφωση του παρατηρούμενου αντικειμένου και άλλα πολύπλοκα φαινόμενα, όπως στροφή του αντικειμένου κ.λπ. Μια σφαίρα, για παράδειγμα, που φωτογραφίζεται δεν φαίνεται πεπλατυσμένη, αλλά κανονική σφαίρα.

Παράδειγμα 4-33

Ένα μέλος του πληρώματος ενός εχθρικού διαστημοπλοίου, μετράει το μήκος του οχήματος και το βρίσκει 100 m. Το διαστημόπλοιο απογειώνεται και περνάει μπροστά από επίγειο επιστημονικό σταθμό με ταχύτητα 0,99 c. Ποιό είναι το μήκος, που θα μετρήσει ένας επιστήμονας του σταθμού που παρατηρεί το διαστημόπλοιο; (Το αποτέλεσμα να δοθεί με τρία σημαντικά ψηφία).



ΣΧΗΜΑ 4.124.

Απάντηση

Το μέλος του πληρώματος του οχήματος, μετράει το ιδιομήκος $L_0 = 100$ m του διαστημοπλοίου (στο σύστημα Κ΄ ως προς το οποίο ηρεμεί το όχημα) και θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος L που θα μετρήσει ο επιστήμονας του επίγειου σταθμού.

Από την εξίσωση

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

έχουμε

$$L = 100\sqrt{1 - (0{,}99)^2} = 14{,}1 \text{ m}$$

Παράδειγμα 4-34

Διαστημόπλοιο με εξωγήινους κινείται πάνω από επίγειο σταθμό με ταχύτητα 0,800 c. Ένας επιστήμονας που βρίσκεται στο σταθμό μετράει το μήκος του κινούμενου διαστημόπλοιου και το βρίσκει 72 m. Μετά τη προσγείωση του διαστημόπλοιου ο ίδιος επιστήμονας ξαναμετράει το μήκος του ακίνητου πλέον οχήματος. Πόσο μήκος βρίσκει τώρα; (Δεχτείτε ότι το αποτέλεσμα έχει τρία σημαντικά)

Απάντηση

Ο επιστήμονας του σταθμού, μετράει το μήκος του διαστημόπλοιου στο σύστημα Κ της Γης (προφανώς με ταυτόχρονη παρατήρηση των άκρων του διαστημόπλοιου) και το βρίσκει $L = 72$ m. Το μήκος που ζητείται είναι προφανώς το ιδιομήκος του διαστημοπλοίου. Δηλαδή το μήκος του στο σύστημα Κ΄ ως προς το οποίο το όχημα ηρεμεί. ΄Αρα από τη σχέση:

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

έχουμε

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$L_0 = \frac{72}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}800c)^2}{c^2}}} \text{ m} \qquad \text{ή} \qquad L_0 = \frac{72}{\sqrt{1 - (0{,}64)}} \text{ m}$$

$$L_0 = 120 \text{ m}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

΄Εστω ότι σε ένα αδρανειακό σύστημα Κ΄ (π.χ. ένα διαστημόπλοιο) που κινείται ως προς άλλο αδρανειακό σύστημα K (π.χ. τη Γη) με ταχύτητα v (κατά τα γνωστά), συμβαίνουν δύο γεγονότα στην ίδια θέση (x', 0, 0), π.χ. δύο διαδοχικοί κτύποι ενός ρολογιού του διαστημοπλοίου τις χρονικές στιγμές t_1' και t_2'. Προφανώς για τον παρατηρητή του συστήματος K', αυτά απέχουν χρονικό διάστημα $T_0 = t'_2 - t'_1$, τότε για τον παρατηρητή του Κ τα ίδια γεγονότα θα απέχουν χρονικό διάστημα $T = t_2 - t_2$.

Από το μετασχηματισμό Lorentz (4.110) για το χρόνο από το K' στο K, έχουμε

$$t_2 = \gamma\,(t'_2 + x'_2) \qquad \text{και} \qquad t_1 = \gamma\,(t'_1 + \beta x'_1)$$

άρα

$$t_2 - t_1 = \gamma\,(t'_2 - t'_1) + \gamma \frac{v}{c^2}\,(x'_2 - x'_1)$$

όμως $x'_2 - x'_1 = 0$ (ίδια θέση στο K') άρα

$$t_2 - t_1 = \gamma\,(t'_2 - t'_1)$$

οπότε προκύπτει

$$\boxed{T = \gamma\, T_0} \qquad \text{ή}$$

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}} \qquad (4.123)$$

Η σχέση αυτή δίνει τη διαστολή του χρόνου. Δείχνει δηλαδή ότι η χρονική διάρκεια T_0 στο σύστημα K' μεταξύ δύο γεγονότων που συμβαίνουν στο ίδιο σημείο στο K', όταν μετριέται στο σύστημα αναφοράς K (π.χ. της Γης), ως προς το οποίο το K' έχει ταχύτητα v, φαίνεται μεγαλύτερη κατά παράγοντα

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Αυτό σημαίνει ότι το ρολόι του διαστημοπλοίου πηγαίνει πίσω σε σχέση με τα ρολόγια της Γης.

Αν θεωρήσομε ότι ένα ρολόι είναι ακίνητο στο σύστημα K και συγκρίνεται με ρολόγια του K', τότε συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν το ρολόι του K μετρά χρονικό διάστημα (χρόνος ηρεμίας) T_0, στο K' θα βλέπουν χρονικό διάστημα T και πάλι θα ισχύει $T = \gamma T_0$. ΄Ιδια σχέση όπως πριν! ΄Εχομε συμμετρία μεταξύ των δύο αδρανειακών συστημάτων. Μπορούμε να πούμε ότι ο ελάχιστος ρυθμός παρέλευσης του χρόνου συμβαίνει στο σύστημα ηρεμίας του "ρολογιού" που τον μετρά.

Η συμμετρία που αναφέραμε προηγουμένως αναφέρεται ως "παράδοξο των ρολογιών" ή "παράδοξο των διδύμων" και θα επανέλθουμε σε αυτό παρακάτω.

Ο χρόνος που μετρά, κάθε φορά, ο παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς το ρολόι λέγεται **ιδιόχρονος** ή χρόνος ηρεμίας ή πραγματικός χρόνος.

Σχόλια:

Πρέπει να τονιστεί ότι η διαστολή του χρόνου ισχύει για όλες τις φυσικές διεργασίες –βιολογικές, πυρηνικές, ατομικές κ.ά. Φαινόμενα διαστολής του χρόνου έχουν παρατηρηθεί στη διάσπαση βραχύβιων στοιχειωδών σωματιδίων, π.χ. των μιονίων (βλέπε παρακάτω). Σε ταχύτητες της καθημερινής εμπειρίας μας (π.χ. ακόμη και των αεριωθουμένων αεροπλάνων) το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου είναι εξαιρετικά μικρό. Παρ' όλα αυτά, η ανίχνευση τόσο μικρών μεταβολών βρίσκεται μέσα στις ικανότητες των νεοτέρων ατομικών ρολογιών καισίου (βλέπε παρακάτω: Ο Γύρος του Κόσμου με Ατομικά Ρολόγια).

Καλό είναι να τονιστεί ότι για κάθε αντικείμενο ή κάτι που έχει χρονική διάρκεια (π.χ. δημιουργείται και στη συνέχεια καταστρέφεται) αυτό που θεωρούμε ως μήκος (ή διαστάσεις) και αντίστοιχα χρόνο ζωής είναι καλά καθορισμένα και χαρακτηρίζουν το αντικείμενο στο σύστημα ηρεμίας του.

Παράδειγμα 4-35

Φορτισμένα σωματίδια που λέγονται πιόνια π^+ ή π^- παράγονται σε αλληλεπιδράσεις σωματιδίων που συγκρούονται έχοντας πολύ υψηλές κινητικές ενέργειες. Τα φορτισμένα πιόνια είναι ασταθή και καταστρέφονται αφού παραχθούν μετά από χρόνο (μέσος χρόνος ζωής) $2{,}60 \times 10^{-8}$s (μέσος χρόνος ζωής ηρεμίας). Έστω ότι σε πείραμα εγκατεστημένο σε κάποιον επιταχυντή παράγονται πιόνια που έχουν ταχύτητα $\upsilon = 0{,}996\,c$. Πόσο μακρυά θα ταξιδέψουν στο εργαστήριο, κατά μέσον όρο, μέχρι να καταστραφούν; ($c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s) (αποτέλεσμα με τρία σημαντικά)

Απάντηση

Ο μέσος χρόνος ζωής, τ_ε, παρατηρούμενος ως προς το εργαστήριο συνδέεται με τον αντίστοιχο χρόνο ηρεμίας, τ, με τη σχέση

$$\tau_\varepsilon = \gamma\tau \qquad \text{ή}$$

$$\tau_\varepsilon = \frac{2{,}60 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-(0{,}996)^2}}\,\text{s} = 2{,}910 \times 10^{-7}\,\text{s}$$

Επομένως το διάστημα που θα διανύσουν στο εργαστήριο μέχρι να καταστραφούν είναι

$$d = 0{,}996 \times 3{,}00 \times 10^8 \times 2{,}910 \times 10^{-7}\,\text{m} = 87{,}0\,\text{m}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό σχετικιστικής ορμής από το αδρανειακό σύστημα K' στο K και αντίστροφα αξιοποιώντας τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων της Ειδικής Σχετικότητας. Το ίδιο και για την Σχετικιστική Ενέργεια. Αυτό έχει πολλούς υπολογισμούς.

Εδώ προτιμούμε να ακολουθήσουμε την ιδέα μετασχηματισμού τετρανυσμάτων και χωρίς να μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες, καταλήγουμε στους μετασχηματισμούς για την ορμή και ενέργεια.

Υπάρχουν μεγέθη που στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας χαρακτηρίζονται από τέσσερεις συνιστώσες, οι οποίες συνιστώσες είναι αντίστοιχες των τεσσάρων συνιστωσών (ct, x, y, z) του χωροχρόνου. Για να έχουν όλες οι συνιστώσες τις ίδιες διαστάσεις γράφουμε αντί t το ct. Αν αυτό το μέγεθος με τις τέσσερεις συνιστώσες, μετασχηματίζεται όπως η τετράδα (ct, x, y, z), τότε λέμε ότι είναι ένα τετράνυσμα. Κάνοντας την αντιστοιχία

$$ct \to \frac{E}{c}, \quad x \to p_x, \quad y \to p_y, \quad z \to p_z$$

μπορεί να δειχτεί ότι το (E/c, p_x, p_y, p_z) είναι τετράνυσμα. Επομένως, αν το K' κινείται ως προς το K με ταχύτητα u κατά μήκος των αξόνων x, x' και αφού οι αντίστοιχοι άξονες μένουν συνεχώς παράλληλοι μεταξύ τους, θα έχομε για τα (E/c, p_x, p_y, p_z) τον ίδιο μετασχηματισμό που έχομε, για τα (ct, x, y, z) δηλαδή τον μετασχηματισμό Lorentz.

$$\begin{aligned} p_x' &= \gamma\left(p_x - \frac{u}{c^2}E\right) \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \\ E' &= \gamma\,(E - up_x) \end{aligned} \qquad \text{Μετασχηματισμοί Lorentz για την ορμή και την ενέργεια από το } K \text{ στο } K' \qquad (4.124)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Προφανώς, κατά τα γνωστά, μπορούμε να πάρουμε και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς από το K' στο K.

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma\left(p_x' + \frac{u}{c^2}E'\right) \\ p_y &= p_y' \\ p_z &= p_z' \\ E &= \gamma\,(E' + up_x') \end{aligned} \qquad \text{Αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz για την ορμή και την ενέργεια από το } K' \text{ στο } K \qquad (4.125)$$

Παρατηρούμε ότι οι εγκάρσιες συνιστώσες ως προς την σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων μένουν ίδιες.

Παράδειγμα 4-36

α) Σε ποιά ταχύτητα η σχετικιστική ορμή ενός πρωτονίου γίνεται διπλάσια, από αυτήν πού θα είχε αν ίσχυε η κλασική μηχανική;
β) Πώς θα άλλαζε το αποτέλεσμά σας αν το σωματίδιο ήταν ηλεκτρόνιο;

Απάντηση

α) Από τα δεδομένα του παραδείγματος έχουμε:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 2mv \quad \text{ή} \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad v = 0{,}866....\ c$$

(οι κουκίδες δηλώνουν άπειρα σημαντικά ψηφία!!!) άρα το σωματίδιο πρέπει να κινείται με ταχύτητα $v \approx 0{,}866\,c$, έτσι ώστε η σχετικιστική ορμή του να είναι διπλάσια της κλασικής ορμής του.

β) Προφανώς δεν θα έχουμε αλλαγή στην ταχύτητα και στην περίπτωση του ηλεκτρονίου, αφού το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της μάζας του σωματιδίου.

Παράδειγμα 4-37

Ηλεκτρόνιο συγκρούεται μετωπικά με πρωτόνιο που κινείται με ταχύτητα 0,70 c, ακριβώς. Αν όλα τα σωματίδια που παράγονται από τη σύγκρουση παραμένουν σε ηρεμία μετά την κρούση ποιά πρέπει να ήταν η ταχύτητα του ηλεκτρονίου; Η μάζα του πρωτονίου είναι 1836 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου. (Δώστε το αποτέλεσμα με 7 σημαντικά ψηφία)

Απάντηση

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής έχουμε

$$\vec{p}_{\text{ολ}} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \vec{p}_{\text{p}} + \vec{p}_{\text{e}} = 0 \qquad \text{ή} \qquad p_{\text{p}} - p_{\text{e}} = 0$$

άρα

ή
$$\frac{m_p v_p}{\sqrt{1-\dfrac{v_p^2}{c^2}}} = \frac{m_e v_e}{\sqrt{1-\dfrac{v_e^2}{c^2}}}$$

ή
$$\frac{(1836)^2(0{,}70)^2 c^2}{1-(0{,}70)^2} = \frac{v_e^2}{1-\dfrac{v_e^2}{c^2}}$$

ή τελικώς

$$v_{\text{e}} = 0{,}9999998\ c$$

Παράδειγμα 4-38

Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται ηλεκτρόνιο για να έχει την ίδια κινητική ενέργεια με πρωτόνιο, που κινείται με ταχύτητα 0,05 c, ακριβώς; Δίνεται ότι $m_{\text{p}}/m_{\text{e}} = 1836$. (Αποτέλεσμα με τρία σημαντικά ψηφία)

Απάντηση

Πρέπει να ισχύει για τις κινητικές ενέργειες

$$K_{\text{p}} = K_{\text{e}}$$

δηλαδή

$$(\gamma_{\text{p}} - 1)\, m_{\text{p}}c^2 = (\gamma_{\text{e}} - 1)\ m_{\text{e}}c^2 \qquad \text{ή}$$

$$(\gamma_{\text{p}} - 1)\, 1836 = \gamma_{\text{e}} - 1 \qquad \text{ή}$$

$$1836\,\gamma_{\text{p}} = \gamma_{\text{e}} + 1835 \qquad (\alpha)$$

Όμως

$$\gamma_{\text{p}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_p^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}05)^2}} = 1{,}001353 \qquad (\beta)$$

Από τις σχέσεις (α) και (β) έχουμε

$$1836 \times 1{,}001353 - 1835 = \gamma_{\text{e}} \qquad \text{ή} \qquad \gamma_{\text{e}} = 3{,}2032 \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_e^2}{c^2}}} = 3{,}2993 \qquad \text{ή} \qquad 1-\frac{\upsilon_e^2}{c^2} = 0{,}097$$

$$\upsilon_e = 0{,}953\ c$$

Σημείωση: Σε περιπτώσεις όπου οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι σχετικά πολύπλοκοι (εδώ υπάρχει η έκφραση $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$) καλό είναι να κρατιούνται στις ενδιάμεσες πράξεις αρκετά σημαντικά ψηφία και να στρογγυλοποιείται κατάλληλα το τελικό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 4-39

α) Να δείξετε ότι, αν ένα σωματίδιο με (σχετικιστική) ενέργεια $E \neq 0$ έχει μάζα μηδέν, τότε κινείται με την ταχύτητα του φωτός.

β) Να δείξετε ότι, αν ένα σωματίδιο με ενέργεια $E \neq 0$ κινείται με την ταχύτητα του φωτός, τότε έχει μάζα μηδέν.

Απάντηση

α) Από τη σχέση

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

έχουμε

$$E\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = mc^2$$

όμως $m = 0$ άρα

$$E\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0$$

όμως $E \neq 0$ άρα

$$\upsilon = c$$

β) Από την ίδια σχέση

$$E\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = mc^2$$

έχουμε για $\upsilon = c$

$$mc^2 = 0$$

άρα

$$m = 0$$

Παρατήρηση: Γνωστά σωματίδια με $m = 0$ και $\upsilon = c$ είναι το φωτόνιο και μέχρι τώρα ήταν και το νετρίνο, τώρα όμως έχουμε ενδείξεις ότι ίσως υπάρχουν νετρίνα με μη μηδενική μάζα.

Παράδειγμα 4-40

Στον επιταχυντή LEP (Large Electron Positron collider, Μεγάλος συγκρουστής Ηλεκτρονίων Ποζιτρονίων), συγκρούονται ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια που έχουν αντίθετες ταχύτητες και ίσες ενέργειες. Υποθέστε ότι σε κάποιες τέτοιες συγκρούσεις στην τελική κατάσταση υπάρχει μόνο ένα σωματίδιο, το Z^0 (ζι-μηδέν), που είναι ένας από τους φορείς των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων. Το Z^o πολύ γρήγορα καταστρέφεται και μετατρέπεται σε άλλα συνήθη σωματίδια. Αν το κάθε ένα σωματίδιο πριν την σύγκρουση είχε ενέργεια 45,5935 GeV, υπολογίστε τη μάζα του Z^0. (Αποτέλεσμα με 5 σημαντικά ψηφία)

Απάντηση

Αφού οι ενέργειες του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου είναι ίσες και οι ταχύτητες αντίθετες, προφανώς οι ορμές τους θα είναι ίσες κατά μέτρο και θα έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, άρα η ολική ορμή πριν την σύγκρουση θα είναι μηδέν. Μετά τη σύγκρουση το μόνο σωματίδιο που υπάρχει είναι αυτό που δημιουργήθηκε κατά την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου, δηλαδή το Z^0. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής, η ορμή του θα είναι μηδέν, άρα θα είναι ακίνητο. Αν η ενέργεια του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου είναι E_e και η ενέργεια του Z^0 είναι E θα έχουμε από τη διατήρηση της ενέργειας,

$$2E_e = E$$

όμως

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

αλλά

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

(αφού το Z^0 είναι ακίνητο, $v = 0$).
Επομένως

$$2E_e = mc^2$$

άρα

$$\boxed{m = \frac{2E_e}{c^2}}$$

Δηλαδή η μάζα του Z^0 είναι

$$m = 2 \times 45{,}5935\ \mathrm{GeV/c^2} = 91{,}187\ \mathrm{GeV/c^2}$$

Αν θυμηθούμε ότι οι μάζες του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου είναι μόνον

$$0{,}511\ \mathrm{MeV/c^2} = 0{,}000511\ \mathrm{GeV/c^2}$$

τότε εδώ έχομε μια τυπική περίπτωση πειράματος Φυσικής Υψηλών Ενεργειών (ΦΥΕ) όπου παράγεται μάζα από ενέργεια.

Παράδειγμα 4-41

Το 1763 βρέθηκε ότι ένα ουράνιο αντικείμενο, κουάσαρ, που βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη εκπέμπει φως που παρατηρήθηκε ότι παρουσιάζει μετατόπιση μήκους κύματος

$$\frac{\lambda_\Pi - \lambda_E}{\lambda_E} = 0{,}37$$

λ_E είναι το μήκος κύματος εκπομπής, όπως μετριέται από παρατηρητή ακίνητο ως προς το κουάσαρ, λ_Π είναι το μήκος κύματος που μετριέται από τη Γη. Οι αντίστοιχες συχνότητες είναι f_E και f_Π.

Να βρεθεί ο λόγος της σχετικής ταχύτητας κουάσαρ - Γης δια της ταχύτητας του φωτός, $\beta = u/c$. (Αποτέλεσμα με τρία σημαντικά ψηφία)

Απάντηση

Το φαινόμενο αυτό είναι το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler. Μπορεί κάποιος να δουλέψει με τους μετασχηματισμούς Lorentz και να βγάλει τους τύπους της σχετικιστικής μετατόπισης Doppler. Το ίδιο μπορεί να γίνει αν ληφθούν υπόψη οι σχέσεις μετασχηματισμού ορμής και ενέργειας και ότι το κάθε φωτόνιο φωτός έχει ενέργεια

$$E_\varphi = hf$$

και ορμή

$$p_\varphi = \frac{hf}{c}$$

Το φωτόνιο στο σύστημα του κουάσαρ έχει ενέργεια E'_φ και ορμή p'_φ, ο κουάσαρ (σύστημα K') κινείται με ταχύτητα u ως προς τη Γη, άρα μετρούμενα ως προς τη Γη (σύστημα K), η ενέργεια του φωτονίου θα είναι E_φ και η ορμή p_φ.

Σύμφωνα με τους νόμους μετασχηματισμού (4.124), που είναι ουσιαστικά οι μετασχηματισμοί Lorentz, έχομε

$$E_\varphi = \gamma\,(E'_\varphi + \beta c p')$$

$$E_\varphi = hf_\Pi, \quad E'_\varphi = hf_E, \quad p' = \frac{hf_E}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

άρα

$$f_\Pi = \gamma\,(f_E + \beta c f_E)$$

ή

$$\boxed{f_\Pi = f_E \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$

Τύπος Σχετικιστικού Φαινομένου Doppler

Αν η γωνία μεταξύ της ταχύτητας του φωτός και της ταχύτητας του τονούμενου συστήματος είναι θ τότε έχομε τον πιο γενικό τύπο

$$f = f\,\gamma\,(1 - \beta\cos\theta)$$

Το β είναι θετικό όταν πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν, και αρνητικό αν απομακρύνονται. Μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε ότι υπάρχει μετατόπιση συχνότητας και όταν ακόμη η σχετική ταχύτητα πηγής - παρατηρητή (u) είναι κάθετη στην ευθεία που ενώνει την πηγή με τον παρατηρητή. Αυτό είναι το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler και δεν απαντά στη κλασική φυσική. Ουσιαστικά, η παρατήρησή του, αποτελεί απόδειξη της διαστολής του χρόνου. Το φαινόμενο μεταβολής της συχνότητας ή μήκους κύματος, όταν η πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται λέγεται ερυθρή μετατόπιση, διότι η συχνότητα παρατήρησης μετατοπίζεται προς μικρότερες συχνότητες (μεγαλύτερα μήκη κύματος).

Γράφομε

$$a = \frac{\lambda_{\Pi} - \lambda_{\mathrm{E}}}{\lambda_{\mathrm{E}}} = 0{,}37$$

προφανώς εύκολα βρίσκομε ότι

$$\lambda_{\Pi} = \lambda_{\mathrm{E}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

άρα

$$a = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - 1$$

τελικώς

$$\beta = -\alpha \frac{\alpha + 2}{1 + (1+\alpha)^2}$$

άρα

$$\beta = -0{,}305$$

Δηλαδή ο κουάσαρ απομακρύνεται από τη γη με ταχύτητα u ίση με 0,305 της ταχύτητας του φωτός.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Κατά τη μετάβαση από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς K στο K', το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς το K, ο χρόνος και οι συντεταγμένες θέσης, χωρόχρονος (και κάθε τετράνυσμα), μετασχηματίζονται με τους μετασχηματισμούς Lorentz με τους τύπους που είδαμε. Κατά την ειδική θεωρία της Σχετικότητας όλοι οι νόμοι της φύσης πρέπει να μένουν οι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Για να συμβεί αυτό πρέπει να βρεθούν οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί και για όλα τα άλλα μεγέθη, εκτός του χρόνου και μήκους.

Είδαμε το μετασχηματισμό ενέργειας και ορμής που επειδή αποτελούν τετράνυσμα μετασχηματίζονται όπως και ο χωρόχρονος. Σε άλλες περιπτώσεις το είδος των φυσικών μεγεθών μπορεί να είναι διαφορετικό οπότε οι μετασχηματισμοί Lorentz για τα μεγέθη έχουν πιο πολύπλοκη μορφή.

Τα πεδία $\vec{E}, \vec{B}$ λαμβάνονται ως μια οντότητα με πολλές συνιστώσες (τανυστικό μέγεθος). Δίνομε τις σχέσεις μετασχηματισμού χωρίς αιτιολόγηση, για την γνωστή περίπτωση συστημάτων K, K' σε κανονική διάταξη.

Οι μετασχηματισμοί δεν είναι οι γενικότεροι αλλά είναι ειδικοί μετασχηματισμοί για αυτή τη περίπτωση.

Έχομε

$$\begin{aligned}
E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\
E'_y &= \gamma\,(E_y - uB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right) \\
E'_z &= \gamma\,(E_z + uB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{u}{c^2}E_y\right)
\end{aligned} \tag{4.126}$$

ή ο αντίστροφος μετασχηματισμός από K' στο K,

$$
\begin{aligned}
&E_x = E_x' &&B_x = B_x' \\
&E_y = \gamma\,(E_y' + uB_z') &&B_y = \gamma\left(B_y' - \frac{u}{c^2}E_z'\right) \\
&E_z = \gamma\,(E_z' - uB_y') &&B_z = \gamma\left(B_z' + \frac{u}{c^2}E_y'\right)
\end{aligned}
\qquad (4.127)
$$

Οι τύποι μετασχηματισμού είναι ανεξάρτητοι του τρόπου δημιουργίας των πεδίων.
Αμέσως βλέπομε ότι τα πεδία συσχετίζονται.

Αυτό σημαίνει ότι ενώ σε κάποιο σύστημα αναφοράς μπορεί να υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο, σε κάποιο άλλο μπορεί να υπάρχουν και τα δύο.

Παράδειγμα 4-42

Υποθέστε ότι η ταχύτητα u του συστήματος K' ως προς το K είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας c και η $\vec{u}$ είναι κατά μήκος του Ox και οι αντίστοιχοι άξονες παράλληλοι μεταξύ τους.

α) Γράψτε για αυτή τη περίπτωση τους τύπους μετασχηματιμού των πεδίων $\vec{E}, \vec{B}$ θεωρώντας ότι το $\gamma \approx 1$, οπότε κάνετε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς β (παραλείπονται όροι με β^2, β^3 κ.λπ.).

β) Βρείτε τη δύναμη στο σύστημα K που ασκείται σε σωμάτιο με φορτίο q, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς το K, σε χώρο όπου υπάρχει μόνο μαγνητικό πεδίο Β ως προς το K ενώ $\vec{E} = 0$. Κάντε το ίδιο για το σύστημα ηρεμίας του σωματίου K'.

Υποθέστε ότι ισχύει η προσέγγιση του α.

Απάντηση

α) Αν $u << c$ παίρνοντας $\gamma \approx 1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&E_x' = E_x &&B_x' = B_x \\
&E_y' = E_y - uB_z &&B_y' = B_y + \frac{u}{c^2}E_z \\
&E_z' = E_z + uB_y &&B_z' = B_z - \frac{u}{c^2}E_y
\end{aligned}
$$

Βάζοντας όπου u το $-u$ βρίσκομε τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

β) Στο K το σωμάτιο υφίσταται μόνο μαγνητική δύναμη,

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Στο K' υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'$ που στην προσέγγιση που αναφέραμε είναι ίσο με το $\vec{B}$.

Υπάρχει ακόμη και ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}'$. Γιαυτό το πεδίο βρίσκομε (αφού $E_x = E_y = E_z = 0$)

$$E_x' = 0, \qquad E_y' = -uB_z, \qquad E_z' = uB_y$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφούν ως εξωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\vec{E}' = (\vec{u} \times \vec{B})$$

Αυτό μπορείτε να το καταλάβετε γράφοντας το $\vec{B}$ ως

$$\vec{B} = \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z B_z$$

και το $\vec{u}$ ως $\vec{u} = \vec{e}_x u$, οπότε θα δείτε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u} \times \vec{B}$ έχει συνιστώσες $(0,\ -uB_z,\ uB_y)$. Τα $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ είναι μοναδιαία διανύσματα.

Αφού το σωμάτιο έχει ταχύτητα μηδέν ως προς το K' θα δέχεται μόνο ηλεκτρική δύναμη, άρα

$$\vec{F} = q\vec{E}' = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Δηλαδή, στην προσέγγιση αυτή των μικρών ταχυτήτων βρίσκομε ότι οι δύο δυνάμεις είναι ίσες $\vec{F}' = \vec{F}$, αλλά η ερμηνεία του παρατηρητή του συστήματος K είναι ότι ασκείται μια ηλεκτρική δύναμη στο σωμάτιο ενώ του παρατηρητή του K' είναι ότι ασκείται μαγνητική δύναμη.

Παράδειγμα 4-43

Σωμάτιο με φορτίο q κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς αδρανειακό σύστημα K κατά μήκος του άξονα των x. Υποθέστε ότι η ταχύτητα u είναι αρκετά μικρή και ισχύει $\gamma \approx 1$. Φανταστείτε σύστημα K' στην κανονική διάταξη ως προς το K, το οποίο κινείται με το σωμάτιο με ταχύτητα $\vec{u}$. Δεχτείτε ότι το σωμάτιο είναι στην αρχή των αξόνων του K', στη θέση O'. Βρείτε τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ στο σημείο $(0,\ y' = r',\ 0)$ του K', όπως φαίνονται από το K.

Περιορισμός: Υποθέστε ότι ξέρετε μόνο το πεδίο $\vec{E}'$ από το νόμο του Coulomb για ακίνητα φορτία στο K'. Εκφράστε τους μετασχηματισμούς πεδίων από το K' στο K.

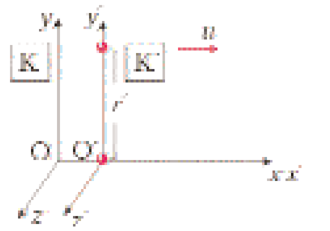
Απάντηση

Στο σύστημα K' έχομε για το πεδίο $\vec{B}'$ στη θέση $(0,\ r',\ 0)$, $\vec{B}' = 0$ και για το $\vec{E}'$ έχουμε

$$E_x' = 0, \qquad E_y' = E', \qquad E_z' = 0$$

προφανώς

$$E_y' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}$$



ΣΧΗΜΑ 4.125

Τα πεδία στο K θα είναι

$$E_x = E_x' = 0 \qquad\qquad B_x = B_x' = 0$$

$$E_y = E_y' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad\qquad B_y = B_y' - \frac{u}{c^2}E_z' = 0$$

$$E_z = E_z' = 0 \qquad\qquad B_z = B_z' + \frac{u}{c^2}E_y' =$$

$$= \frac{u}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{uq}{r^2}$$

Θέσαμε $r' = r$, διότι η κίνηση γίνεται κάθετα προς τον άξονα Oy, άρα δεν μεταβάλλεται το αντίστοιχο μήκος με το μετασχηματισμό Lorentz. Επίσης λάβαμε υπόψη ότι

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

Έχομε επομένως

$$\vec{E} = E_y \, \vec{e}_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = B_z \, \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{e}_z$$

Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά βγάλαμε το νόμο Biot-Savart για το πεδίο B που δημιουργείται από κινούμενο φορτίο q με ταχύτητα u, $(u << c)$.

Ο νόμος Biot-Savart που ξέρουμε για κινούμενο φορτίο είναι

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{u \sin\theta}{r^2}$$

εδώ $\sin\theta = 1$.

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΟΛΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Μια ωραία επαλήθευση της διαστολής του χρόνου και της συστολής του μήκους έχουμε κατά την διάσπαση των ασταθών σωματιδίων που λέγονται **μιόνια.** Τα μιόνια παράγονται από τη διάσπαση πιονίων που δημιουργούνται κατά την αλληλεπίδραση των πρωτονίων της πρωτογενούς κοσμικής ακτινοβολίας, που έρχονται από το διάστημα, με τα μόρια του αέρα στα ανώτερα στρώματα της γήινης ατμόσφαιρας. Τα μιόνια αυτά έχουν φορτίο θετικό ή αρνητικό, ίσο κατά απόλυτη τιμή με το θεμελιώδες ηλεκτρικό φορτίο e και έχουν μάζα 207 φορές τη μάζα των ηλεκτρονίων. Τα μιόνια έχουν (μέσο) χρόνο ζωής, ως προς σύστημα αναφοράς στο οποίο είναι ακίνητα, (ή σχεδόν ακίνητα), $\tau_0 \approx 2{,}2 \times 10^{-6}$ s. Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα μιόνια που παράγονται στην ανώτατη ατμόσφαιρα κινούνται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}99994\,c$ (από πειράματα γνωρίζουμε ότι αυτό είναι σωστό και η ενέργεια των μιονίων είναι τότε 10 GeV), άρα, κλασικά, θα έπρεπε να διανύσουν αποστάσεις: $L = \upsilon\tau_0$ δηλαδή

$$L = 0{,}99994\,c \times 2{,}2 \times 10^{-6} \approx 660 \text{ m}$$

προτού καταστραφούν. Επομένως, δεν πρέπει να φτάνουν στην επιφάνεια της γης, που απέχει δεκάδες χιλιόμετρα από τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας όπου έχουν παραχθεί τα μιόνια. Γνωρίζουμε όμως από πειράματα, ότι ένας μεγάλος αριθμός μιονίων φτάνει στην επιφάνεια της Γης. Το παράδοξο αυτό φαινόμενο ερμηνεύεται αν λάβουμε υπόψη μας τα συμπεράσματα της θεωρίας της σχετικότητας για τη διαστολή του χρόνου ή τη συστολή του μήκους. Θα εξετάσουμε το φαινόμενο πρώτα με τη διαστολή του χρόνου.

Ο χρόνος ζωής του κινούμενου μιονίου τ, παρατηρούμενος από τη γη (σύστημα K) θα συνδέεται με τον χρόνο ζωής του, τ_0, ως προς σύστημα K', που κινείται μαζί του (σύστημα ηρεμίας) με τη γνωστή σχέση

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

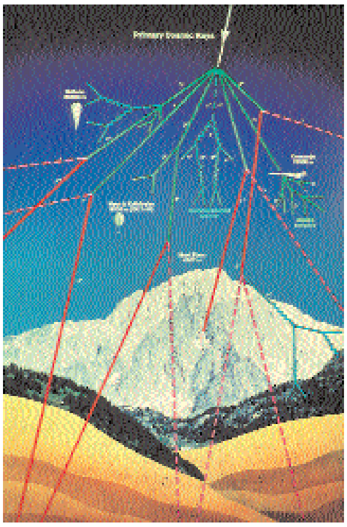


PHOTO CERN

Κοσμικό σωματίδιο (κοσμική ακτίνα) πολύ μεγάλης ενέργειας αντιδρά κατά την είσοδό του στην ατμόσφαιρα με σωματίδιο της ατμόσφαιρας και ακολουθεί καταιγισμός παραγωγής διαφόρων σωματιδίων.

δηλαδή

$$\tau = \frac{2{,}2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-(0{,}99994)^2}}\,\mathrm{s} = 200 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

Άρα διανύουν αποστάσεις ως προς τη Γη,

$$L = 0{,}99994 \times c \times \tau \approx 3{,}00 \times 10^8 \times 200 \times 10^{-6}\ \mathrm{m} \approx 60\ \mathrm{km}$$

Έτσι, πολλά μιόνια φτάνουν στην επιφάνεια της Γης, η οποία απέχει απόσταση μερικών δεκάδων χιλιομέτρων από το σημείο δημιουργίας τους (10 με 60 km).

Το πηλίκο του μήκους που διανύει το μιόνιο πλησιάζοντας την επιφάνεια της Γης στον "φαινόμενο" χρόνο ζωής του δια του ύψους h όπου δημιουργήθηκε, θα είναι

$$\frac{\tau_0 \beta c}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)h} \approx 1$$

ή το πηλίκον του φαινομένου χρόνου που κινείται μέχρι να καταστραφεί

$$\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

δια του χρόνου μέχρι να φτάσει στη Γη $\dfrac{h}{\beta c}$ είναι

$$\frac{\tau_0 \beta c}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)h}$$

δηλαδή το ίδιο όπως πριν. Κλασικά θα είχαμε για το πηλίκον των δύο χρόνων, $\dfrac{\tau_0 \upsilon}{h} \ll 1$. Το ότι το πηλίκο που βρίσκουμε σχετικιστικά είναι κοντά

στη μονάδα σημαίνει ότι πολλά μιόνια φτάνουν στην επιφάνεια της Γης.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο με τη βοήθεια της συστολής του μήκους. Έστω ότι το ύψος από την επιφάνεια της Γης όπου δημιουργείται το μιόνιο είναι h, μετρούμενο από το σύστημα της Γης. Ως προς το σύστημα του μιονίου η Γη κινείται με ταχύτητα μέτρου υ (θεωρούμε $\upsilon > 0$). Το ύψος h φαίνεται από αυτό το σύστημα μικρότερο, h', δηλαδή

$$h' = h\sqrt{1-\beta^2}$$

(συστολή του μήκους). Όμως, η Γη πλησιάζει με ταχύτητα μέτρου υ το μιόνιο, άρα σε χρόνο ίσο με τ_0 πλησιάζει κατά $\upsilon\tau_0 = \beta c \tau_0$, δηλαδή το ποσοστό του h' κατά το οποίο πλησιάζει είναι

$$\frac{\beta c \tau_0}{h'} = \frac{\beta c \tau_0}{h\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}\,\frac{\beta c}{h}$$

δηλαδή, το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε με την προηγούμενη διαδικασία. Ανάλογα, μπορεί να πει κανείς για το πηλίκο του χρόνου ζωής, τ_0, δια του χρόνου που διανύει τη "φαινόμενη" απόσταση h'.

Μια άμεση επαλήθευση του φαινομένου της διαστολής του χρόνου, είχαμε με γήινο πείραμα που έγινε το 1976 στο CERN (Ευρωπαϊκό Εργαστήριο

Φυσικής Σωματιδίων) που εδρεύει έξω από τη Γενεύη της Ελβετίας και εκτείνεται στην Ελβετία και στην Γαλλία. Αποθήκευσαν μιόνια σε ένα δακτύλιο υψηλού κενού, αφού τα επιτάχυναν μέχρι να φτάσουν ταχύτητα 0,9994 c. Οι επιστήμονες μετρώντας τη διάσπαση των μιονίων, βρήκαν τον χρόνο ζωής τους. Βρήκαν ότι τα μιόνια που κινούνται μέσα στον δακτύλιο με την παραπάνω ταχύτητα είχαν χρόνο ζωής 30 φορές μεγαλύτερο από το χρόνο ζωής των ακίνητων μιονίων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με την ειδική θεωρία της σχετικότητας με σφάλμα της τάξης του 2 στα 1000. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα πειραματικής δουλειάς σε εργαστήριο Φυσικής Υψηλών Ενεργειών.

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΩΝ ΔΙΔΥΜΩΝ

Ενα ενδιαφέρον αποτέλεσμα του φαινομένου της διαστολής του χρόνου οδηγεί στο φαινόμενο των διδύμων που κακώς αναφέρεται ως “παράδοξο των διδύμων” ή “παράδοξο των ρολογιών”.

Δύο πανομοιότυπα δίδυμα αδέλφια (μονοωϊκά) ο Σταμάτης και ο Γρηγόρης, γιορτάζουν την τριακοστή επέτειο των γενεθλίων τους στη Γη. Αμέσως μετά, ο Γρηγόρης επιβιβάζεται σ’ ένα διαστημόπλοιο, που μπορεί να επιταχυνθεί γρήγορα σε ταχύτητα $v = 0{,}99\,c$, και πάει στον αστερισμό του Κενταύρου, που βρίσκεται σε απόσταση 4 ετών φωτός από τη Γη. Αφού φτάσει εκεί, κάνει γρήγορα στροφή και επιστρέφει στη Γη με την ίδιαν κατά μέτρο ταχύτητα. Σύμφωνα με τα ρολόγια της Γης, το ταξίδι κράτησε

$$\Delta t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \cdot 4 \cdot c}{0{,}99\,c} \approx 8 \text{ χρόνια}$$

οπότε ο Σταμάτης, που έμεινε στη Γη, θα έχει ηλικία 38 χρονών όταν τα δίδυμα αδέλφια συναντηθούν ξανά. Ο Γρηγόρης όμως έχει “ωφεληθεί” από την διαστολή του χρόνου, επειδή, ως προς το σύστημα αναφοράς της Γης, τα ρολόγια του διαστημοπλοίου πάνε πίσω με συντελεστή

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - 0{,}99^2} \approx 0{,}14$$

Άρα τα 8 χρόνια που κράτησε το ταξίδι σύμφωνα με τα ρολόγια της Γης, αντιστοιχούν σε $8 \times 0{,}14 \approx 1$ χρόνο μόνο, σύμφωνα με τα ρολόγια του διαστημοπλοίου, άρα ο Γρηγόρης κατά την επιστροφή του θα είναι 31 χρονών μόνο. Πού βρίσκεται το παράδοξο σε όλα αυτά;

Σύμφωνα με μια κακή εφαρμογή της αρχής της σχετικότητας, θα έπρεπε και ο Γρηγόρης να αισθάνεται ότι παραμένει αυτός ακίνητος και ο αδελφός του, μαζί με τη Γη, απομακρύνονται με αντίθετη ταχύτητα και κατόπιν επιστρέφουν, συνεπώς τα ρολόγια της Γης πάνε πίσω, γεγονός που σημαίνει ότι ο Σταμάτης θα είναι νεώτερος από τον Γρηγόρη.

Η άρση αυτού του παραδόξου, επιτυγχάνεται από το γεγονός, ότι το φαινόμενο δεν είναι συμμετρικό. Πράγματι ο Γρηγόρης κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του υπέστη επιταχύνσεις και επιβραδύνσεις και επομένως βρισκόταν σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο διαστολής του χρόνου αντίστροφα από πριν, μεταξύ συστήματος Γης και συστήματος του διαστημοπλοίου. Το παράδοξο λοιπόν προκύπτει από την εσφαλμένη χρήση αυτού του τύπου. Από την άλλη πλευρά, ο Σταμάτης, που έμεινε στη Γη, βρισκόταν σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (κατά προσέγγιση) και ως εκ τούτου σωστά υπολογίζει τη διαστολή του χρόνου.

Πρέπει να διευκρινίσουμε ότι, η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δέχεται ότι ακόμη και για ρολόγια (ή σωματίδια) που επιταχύνονται, έχει νόημα ο ιδιοχρόνος ή χρόνος ηρεμίας T. Αυτός είναι ανεξάρτητος της κινητικής κατάστασης του ρολογιού. Φανταζόμαστε ότι χωρίζομε το πεπερασμένο χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2, που μετριέται από κάποιο αδρανειακό σύστημα, σε πολύ μικρά διαστήματα $\Delta t_{\rm i}$. Σε κάθε τέτοιο χρονικό διάστημα η ταχύτητα του, γενικώς, επιταχυνόμενου ρολογιού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, $v_{\rm i}$. Το στοιχειώδες χρονικό διάστημα $\Delta T_{\rm i}$ (ηρεμίας) κάθε χρονική στιγμή δίνεται από

$$\Delta T_{\rm i} = \sqrt{1 - \frac{v_{\rm i}^2}{c^2}}\,\Delta t_{\rm i}$$

και ο συνολικός χρόνος ηρεμίας είναι

$$T = \sum_{\rm i} \sqrt{1 - \frac{v_{\rm i}^2}{c^2}}\;\Delta t_{\rm i}$$

Ανάλογο ισχύει για το μήκος, όπου αν έχουμε κίνηση με επιτάχυνση μπορούμε να γράψουμε κάθε χρονική στιγμή ότι το μήκος ηρεμίας, ΔL_0, είναι

$$\Delta L_0 = \frac{\Delta L_{\rm i}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_{\rm i}^2}{c^2}}}$$

όπου $\Delta L_{\rm i}$ είναι το μήκος που μετριέται από αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο το στοιχειώδες κομμάτι κινείται με στιγμιαία ταχύτητα $v_{\rm i}$. Η $\vec{v}_{\rm i}$ έχει την διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή βρίσκεται κατά μήκος του $\Delta L_{\rm i}$. Για πεπερασμένη ευθύγραμμη ράβδο που κινείται σε ευθεία με μεταβλητή ταχύτητα έχουμε κάθε στιγμή,

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Τα v ή $v_{\rm i}$ είναι οι ταχύτητες του επιταχυνόμενου (μη αδρανειακού) συστήματος K' ως προς το αδρανειακό K. Τα $\Delta t_{\rm i}$, $\Delta L_{\rm i}$, L είναι τα "φαινόμενα" μεγέθη ως προς το K. Εδώ δεν έχουμε συμμετρία μεταξύ των δύο συστημάτων. Δεν μπορούμε δηλαδή να αντιστρέψομε το ρόλο των δύο συστημάτων και να θεωρήσομε τα μεγέθη ηρεμίας ως προς το K και από αυτά να βρούμε πως θα φαίνονται από το μη αδρανειακό σύστημα K'. Αυτό είναι θέμα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Τα ανωτέρω αναφέρονται ως Υπόθεση Μήκους και Ρολογιού της Ειδικής Σχετικότητας.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz μπορούν να εφαρμόζονται συμμετρικά μόνον όταν τα συστήματα είναι και τα δύο αδρανειακά. Ο χρόνος ηρεμίας και το μήκος ηρεμίας είναι χαρακτηριστικά του σώματος ανεξάρτητα της κίνησής του, δηλαδή ανεξάρτητα από την επιτάχυνσή του. Στο σύστημα ηρεμίας ανεξάρτητα αν είναι αδρανειακό ή όχι ο χρόνος εξελίσσεται με πιο αργό ρυθμό (το ρολόι πάει πίσω) σε σχέση με το χρόνο σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επομένως, όταν επιστρέφει ο επιταχυνόμενος δίδυμος στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς της Γης θα φαίνεται νεώτερος! Ο χρόνος ηρεμίας όμως της συνολικής του ζωής (χρόνος μεταξύ γέννησης και θανάτου) θα είναι αυτός που είναι και για τον δίδυμο αδελφό του (γιαυτό θεωρήθηκαν δίδυμοι, ώστε να είναι βιολογικά ίδιοι). Τελικώς, δεν θα αισθάνεται ότι έζησε περισσότερο! Πού τέτοια τύχη! Και οι δύο θα αισθάνονται (πεθαίνοντας), ότι έζησαν το ίδιο.

Το μήκος ηρεμίας είναι το μέγιστο στο σύστημα ηρεμίας ανεξάρτητα αν αυτό είναι αδρανειακό ή όχι.

Στο επόμενο εδάφιο περιγράφουμε ένα πείραμα που αποτελεί άμεση πειραματική επαλήθευση της διαστολής του χρόνου με αληθινά ρολόγια και επίσης δείχνει ότι δεν υπάρχει "παράδοξο ρολογιών" ή διδύμων.

Ο ΓΥΡΟΣ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ ΜΕ ΑΤΟΜΙΚΑ ΡΟΛΟΓΙΑ

Σε ταχύτητες της καθημερινής μας εμπειρίας, το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου είναι εξαιρετικά μικρό, της τάξης των ns, (10^{-9} s). Παρ' όλα αυτά, η ανίχνευση τόσο μικρών μεταβολών βρίσκεται μέσα στις ικανότητες των σύγχρονων ατομικών ρολογιών καισίου.

Σε πειράματα που έγιναν το 1971, οι επιστήμονες του National Bureau of Standards, Hafele και Keating, έπαιρναν μαζί τους ατομικά ρολόγια καισίου μέσα σε επιβατικά αεριωθούμενα αεροπλάνα, τα οποία εκτελούσαν τις κανονικές τους πτήσεις κάνοντας τον κύκλο της Γης δύο φορές. Τη μια φορά, κινούμενα προς τη Δύση και την άλλη προς την Ανατολή. Τα ρολόγια τα σύγκριναν με άλλα πανομοιότυπά τους, που παρέμεναν στο έδαφος. Για να γίνει η σύγκριση αυτή έλαβαν υπόψη τις επιταχύνσεις των αεροπλάνων (σύμφωνα με την υπόθεση των ρολογιών) και ότι τα ιπτάμενα ρολόγια βρίσκονται σε περιοχές μικρότερης έντασης βαρύτητας σε σχέση με τα ρολόγια του εδάφους. (Γενική Θεωρία της Σχετικότητας).

Τα αποτελέσματα του πειράματος, όπως αναφέρουν στη σχετική εργασία είναι ότι, "... τα ιπτάμενα ρολόγια συγκρινόμενα προς εκείνα που έμειναν στη Γη, έχασαν $(59 \pm 10) \times 10^{-9}$ s κατά το ταξίδι προς ανατολάς και κέρδισαν $(273 \pm 7) \times 10^{-9}$ s κατά τη διάρκεια του ταξιδιού προς δυσμάς...".

Ουσιαστικά το πείραμα έδωσε την απάντηση που περιμέναμε σύμφωνα με όσα είπαμε στο προηγούμενο εδάφιο για το φαινόμενο των διδύμων, έδειξε ότι δεν υπάρχει παράδοξο. Έδειξε, δηλαδή, τη διαστολή του χρόνου και ότι υπάρχει ασυμμετρία αν το ένα από τα δύο συστήματα δεν είναι αδρανειακό. Φυσικά μέτρησε άμεσα, με πραγματικά ρολόγια, τη διαστολή του χρόνου.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΤΡΙΑ ΕΙΔΗ ΜΑΖΑΣ

Μέσα στα πλαίσια της μηχανικής του Νεύτωνα, μια δύναμη $\vec{F}$ επιταχύνει ένα σωμάτιο με επιτάχυνση που δίνεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής

$$\vec{F} = m_\alpha \vec{\alpha}$$

Η μάζα m_α λέγεται αδρανειακή μάζα και είναι χαρακτηριστική σταθερά του σώματος που επιταχύνεται. Η δύναμη που ασκεί η βαρύτητα (π.χ. η Γη) πάνω στο ίδιο σωμάτιο ισούται με:

$$\vec{B} = m_{\pi\beta} \cdot \vec{g} \qquad (4.128)$$

Όπου, $\vec{g}$ είναι η ένταση του πεδίου βαρύτητας και $m_{\pi\beta}$ είναι η παθητική βαρυτική μάζα του σωματίου που και αυτή η φυσική ποσότητα είναι μία σταθερά που χαρακτηρίζει το σωμάτιο. Το ίδιο σωμάτιο δημιουργεί γύρω του βαρυτικό πεδίο έντασης

$$G\frac{m_{\varepsilon\beta}}{r^2}$$

όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, r η απόσταση από το σωμάτιο και $m_{\varepsilon\beta}$ η ενεργητική βαρυτική μάζα, μία άλλη σταθερά που χαρακτηρίζει το σωμάτιο. Είναι ευνόητο ότι, αφού ισχύει η αρχή δράσης αντίδρασης θα έχουμε

$$G\frac{m_{1\pi\beta}\; m_{2\varepsilon\beta}}{r_{12}^2} = G\frac{m_{2\pi\beta}\; m_{1\varepsilon\beta}}{r_{21}^2} \qquad (4.129)$$

Αν πάρουμε ως μονάδα μέτρησης της παθητικής βαρυτικής μάζας την $m_{1\pi\beta}$ και την $m_{1\varepsilon\beta}$ ως μονάδα της ενεργητικής βαρυτικής μάζας, τότε αφού $r_{12} = r_{21}$ έπεται ότι, $m_{2\varepsilon\beta} = m_{2\pi\beta}$ και προφανώς για κάθε μάζα θα έχουμε $m_{\varepsilon\beta} = m_{\pi\beta} = m_\beta$. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι υπάρχει μόνο μια βαρυτική μάζα m_β, που υπεισέρχεται στα φαινόμενα των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων. Άρα καταλήξαμε σε δύο είδη μάζας την αδρανειακή, που σχετίζεται με την επιτάχυνση, που αποκτά κάποιο σωμάτιο υπό την επίδραση οποιασδήποτε μορφής δύναμης και τη βαρυτική μάζα, που σχετίζεται με τη βαρυτική αλληλεπίδραση.

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Αν ένα σώμα “πέφτει”, δηλαδή κινείται μόνο, υπό την επίδραση της βαρύτητας, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι, $m_\alpha \vec{\alpha}_\beta = m_{\pi\beta}\vec{g}$ όπου $\vec{\alpha}_\beta$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.Έχουμε επομένως

$$\vec{a}_\beta = \frac{m_{\pi\beta}}{m_\alpha}\vec{g} \qquad (4.130)$$

Από τα χρόνια του Γαλιλαίου ήταν γνωστό (με την ακρίβεια των μετρήσεων της εποχής εκείνης) ότι η επιτάχυνση που οφείλεται στη βαρύτητα είναι ανεξάρτητη από το σώμα που έλκεται. Αυτό σημαίνει ότι το πηλίκο $m_{\pi\beta}/m_\alpha$

Αχιλλέας Παπαπέτρου

Γεννήθηκε στην Ηράκλεια Σερρών το 1907 και πέθανε στο Παρίσι το 1997. Σπούδασε Μηχανολόγος-Ηλεκτρολόγος στο ΕΜΠολυτεχνείο και μετά έκανε Διδακτορικό στο Πανεπιστήμιο της Στουτγκάρδης, στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. ‘Εγινε Καθηγητής Φυσικής στο ΕΜΠολυτεχνείο το 1940. Συμμετείχε κατά τη διάρκεια της κατοχής στην Εθνική Αντίσταση. Για λόγους σχετικούς με τις πολιτικές του απόψεις εκδιώθηκε από τη θέση του το 1945. Το 1946 ο Erwin Schroedinger τον πήρε στο Ινστιτούτο Προχωρημένων Ερευνών του Δουβλίνου. Το 1948 πήγε στο Πανεπιστήμιο του Manchester όπου άρχισε να εργάζεται σε θέματα της Γενικής Σχετικότητας. Το 1952 πήγε στο Ανατολικό Βερολίνο όπου οργάνωσε ερευνητική ομάδα με αντικείμενο τη Θεωρία της Σχετικότητας. Πήγε στο Παρίσι το 1962 και εργάστηκε μέχρι το θάνατό του ως Ερευνητής στο Εθνικό Κέντρο Επιστημονικών Ερευνών (CNRS). Το 1975 έγινε και Διευθυντής του Εργαστηρίου Θεωρητικής Φυσικής στο Ινστιτούτο Henri Poincaré. Οι εργασίες του είναι πολλές και οι κυριότερες σχετίζονται με τη Γενική Σχετικότητα. Ασχολήθηκε με τις εξισώσεις κίνησης στη Γενική Σχετικότητα, κίνηση δοκιμαστικών σωματιδίων με σπιν και κρουστικά βαρυτικά και ελαστικά κύματα και αξιοποίησή τους σε ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων. Έχει γράψει δυο πολύ γνωστα βιβλία, “Ειδική Σχετικότητα” (Γερμανικά, 1967) και “Μαθήματα Γενικής Σχετικότητας” (Αγγλικά, 1974). Ήταν εξαιρετικός στην απλοποίηση δύσκολων εννοιών και πολύ καλός με τους νέους συνεργάτες του και μαθητές του.

είναι το ίδιο για όλα τα σώματα. Στην πράξη, αυτό που έχει γίνει είναι ότι, ορίζουμε τις μονάδες των μαζών έτσι που το πηλίκο αυτό να είναι ο καθαρός αριθμός 1, άρα $m_{\pi\beta} = m_\alpha$ και αφού $m_{\pi\beta} = m_{\varepsilon\beta} = m_\beta$ προφανώς έχουμε μια μόνο μάζα m που είναι η μάζα του σώματος.

Η ισότητα βαρυτικής και αδρανειακής μάζας αποτελεί μια διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας.

Η αρχή της ισοδυναμίας διατυπώνεται και ως εξής:

Η κίνηση σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση σε πεδίο βαρύτητας (χωρίς άλλου είδους δύναμη) είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του.

Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι δεν ισχύει κάτι τέτοιο για σώματα που κινούνται υπό την επίδραση άλλων δυνάμεων, όπως π.χ. οι ηλεκτρικές. Πράγματι

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

το πηλίκον q/m δεν είναι το ίδιο για όλα τα σώματα, π.χ για ουδέτερα σώματα είναι μηδέν, άρα δεν αποκτούν την ίδια επιτάχυνση όλα τα σώματα μέσα στο ίδιο ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$.

ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Ξέρουμε ήδη ότι, οι νόμοι κίνησης του Νεύτωνα (1ος και 2ος) δεν ισχύουν για μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Μπορούμε όμως να δώσουμε μια τυπικά όμοια μορφή με αυτή των αδρανειακών συστημάτων στους νόμους κίνησης ως προς μή αδρανειακά συστήματα, αν εισαγάγουμε τις λεγόμενες αδρανειακές δυνάμεις.

Αν υποθέσουμε ότι περιοριζόμαστε σε σύστημα μη αδρανειακό, που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση ως προς αδρανειακό σύστημα, τότε η λεγόμενη “απόλυτη” επιτάχυνση $\vec{a}_\alpha$ (ως προς το αδρανειακό σύστημα) $\vec{a}_\alpha = \vec{a}_\sigma + \vec{a}_{\varepsilon\alpha}$, όπου $\vec{a}_\sigma$ είναι η λεγόμενη “σχετική” επιτάχυνση (επιτάχυνση ως προς το μη αδρανειακό σύστημα) και $\vec{a}_{\varepsilon\alpha}$ η επιτάχυνση του μη αδρανειακού συστήματος (επιταχυνόμενο σύστημα) ως προς το αδρανειακό.

Ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα ως προς το αδρανειακό σύστημα, οπότε αν σε κάποιο σωμάτιο μάζας m δρα η πραγματική δύναμη $\vec{F}$ τότε,

$$m\vec{a}_\alpha = \vec{F} \quad \text{ή}$$

$$m\,(\vec{a}_\sigma + \vec{a}_{\varepsilon\alpha}) = \vec{F} \tag{4.131}$$

άρα

$$m\vec{a}_\sigma = \vec{F} - m\vec{a}_{\varepsilon\alpha}$$

Δηλαδή η κίνηση ως προς το μη αδρανειακό σύστημα που καθορίζεται από τη σχετική επιτάχυνση $\vec{a}_\sigma$ μπορούμε να πούμε ότι οφείλεται στην πραγματική δύναμη $\vec{F}$ (που ασκείται από κάποιο άλλο σώμα) και στη ψευδοδύναμη (αδρανειακή δύναμη ή δύναμη D’ Alembert) $-m\vec{a}_{\varepsilon\alpha}$ που οφείλεται στην επιτάχυνση του μη αδρανειακού συστήματος ως προς το αδρανειακό και δεν ασκείται από κανένα άλλο σώμα.

Ανάλογα ισχύουν αν δεχτούμε ότι ένα σωμάτιο βρίσκεται πάνω σε στρεφόμενο σύστημα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και συμπαρασύρεται με αυτό (δεν έχει σχετική ταχύτητα). Τότε η αδρανειακή δύναμη έχει τιμή $m\omega^2 r$ και κατευθύνεται προς τα έξω γι’ αυτό λέγεται και φυγόκεντρος. Αυτές οι ψευδοδυνάμεις είναι ανάλογες της μάζας του σωματίου. Αυτό είναι ανάλογο με το τι συμβαίνει με τις βαρυτικές δυνάμεις. Η κίνηση επομένως σώματος ως προς μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, υπό την επίδραση μόνο αδρανειακών δυνάμεων, είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του. Αυτό το ίδιο ισχύει και για την ελεύθερη πτώση σωμάτων μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Ξεκινώντας από αυτό, ο Αϊνστάιν διατύπωσε την αρχή της ισοδυναμίας ως εξής:

Το αποτέλεσμα ομογενούς βαρυτικού πεδίου είναι ισοδύναμο με αυτό που παρατηρείται σε σύστημα αναφοράς, που επιταχύνεται ομοιόμορφα σε κατεύθυνση αντίθετη αυτής του βαρυτικού πεδίου και βρίσκεται σε χώρο εκτός πεδίου.

Δεν είναι δυνατόν δηλαδή , σε περιοχές αρκετά μικρές (τοπικά), όπου το βαρυτικό πεδίο είναι περίπου ομογενές, να ξεχωρίσουμε τις βαρυτικές από τις αδρανειακές δυνάμεις. Υπάρχει βέβαια διαφορά σε μεγάλη έκταση (όχι τοπικά), διότι το βαρυτικό πεδίο μικραίνει όσο μεγαλώνει η απόσταση από το σώμα που το προκαλεί, σε αντίθεση με τις αδρανειακές δυνάμεις που μπορεί να υπάρχουν και στο άπειρο και μάλιστα να απειρίζονται (π.χ. φυγόκεντρες δυνάμεις).

Παράδειγμα 4-44

Άνθρωπος βρίσκεται μέσα σε ένα κουτί (π.χ. ανελκυστήρας), το οποίο πέφτει ελεύθερα μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης, με επιτάχυνση $\vec{g}$. Να γίνει περιγραφή των φαινομένων ως προς το επιταχυνόμενο σύστημα του ανελκυστήρα κίνησης σωμάτων.

Απάντηση

Το επιταχυνόμενο σύστημα μέσα στο πεδίο βαρύτητας είναι σαν αδρανειακό σύστημα. Αυτό οφείλεται στο ότι, σύμφωνα με την αρχή ισοδυναμίας του Αϊνστάιν, η “αδρανειακή” ένταση πεδίου $-\vec{g}$ “εξουδετερώνει” την πραγματική ένταση του βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$, και τα σώματα είναι σαν να μην υφίστανται δυνάμεις μέσα στον ανελκυστήρα. Αν ασκηθεί σε κάποιο σώμα, πραγματική δύναμη $\vec{F}$ τότε θα ισχύει για το επιταχυνόμενο αυτό σύστημα, $\vec{F} = m\vec{a}_\sigma$, (όπου $\vec{a}_\sigma$ η σχετική επιτάχυνση ως προς το σύστημα του ανελκυστήρα. Αν δεν ασκείται δύναμη τότε το σώμα θα είναι ακίνητο ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον ανελκυστήρα. Όλα αυτά ισχύουν εφόσον οι διαστάσεις του ανελκυστήρα είναι αρκούντως μικρές, ώστε το «πραγματικό» πεδίο (βαρύτητας) να είναι παντού ίδιο (ομογενές πεδίο). Ανάλογα ισχύουν για αστροναύτες, που βρίσκονται σε διαστημόπλοιο (οι διαστάσεις του είναι μικρές) που περιφέρεται γύρω από τη Γη. Είναι εντυπωσιακά τα πειράματα που κάνουν και έχουν παρουσιαστεί στην τηλεόραση, όπου είναι σαν να “πετούν” οι ίδιοι μέσα στο διαστημόπλοιο και “πετάει” και ότι αντικείμενο αφήσουν!

Παράδειγμα 4-45

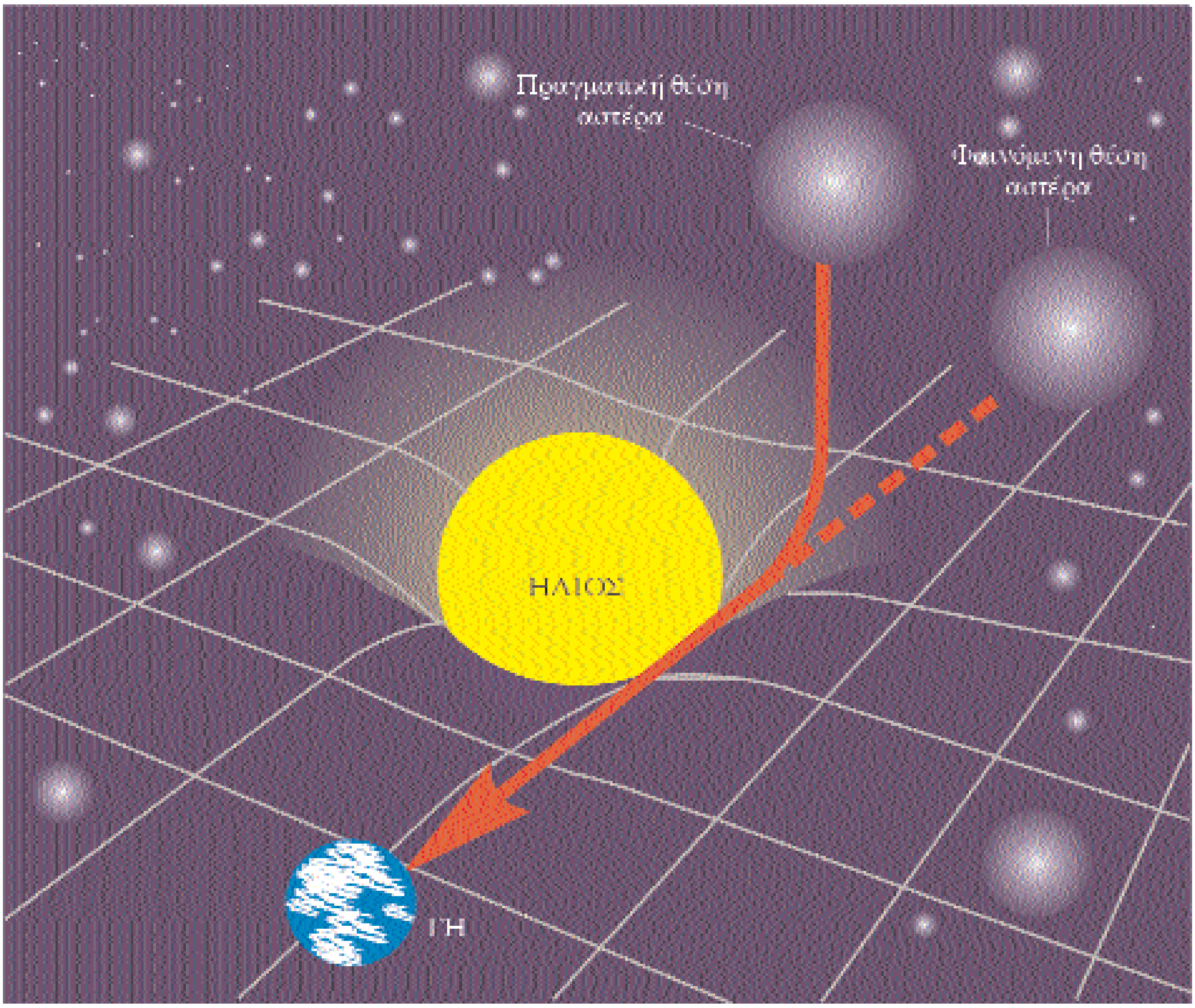
Φανταστείτε διαστημόπλοιο που βρίσκεται πολύ μακριά από ουράνια σώματα, ώστε οι (πραγματικές) βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται στην περιοχή εκείνη, να είναι πρακτικά μηδέν. Τί πρέπει να συμβεί ώστε οι αστροναύτες να αισθάνονται όπως στην επιφάνεια της Γης;

Απάντηση

Είναι αυτονόητο ότι, αν το διαστημόπλοιο κινείται με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης ($\approx 10\,\mathrm{m/s^2}$) με τη βοήθεια πυραύλων (με κατεύθυνση κάθετα από το “δάπεδο” του διαστημόπλοιου προς τα "έξω" του δαπέδου), τότε οι αστροναύτες θα νιώθουν σαν να βρίσκονται μέσα στο πεδίο βαρύτητας της επιφάνειας της Γης. Δηλαδή θα περπατούν κανονικά στο "δάπεδο" του διαστημόπλοιου και όταν αφήνουν αντικείμενα, αυτά θα πέφτουν με επιτάχυνση $10\,m/s^2$ προς το δάπεδο.

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας βασίστηκε στην αδυναμία των τότε θεωριών να εξηγήσουν την ισότητα "μάζας αδράνειας" και "μάζας βαρύτητας". Επίσης, στην επιθυμία να περιγραφούν οι νόμοι της φύσης ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς ανεξάρτητα αν αυτό είναι αδρανειακό ή μη αδρανειακό και στο να γραφούν οι νόμοι της φύσης κατά τρόπο αναλλοίωτο ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς. Δεν μπορούμε να αναπτύξουμε εδώ την Γενική Σχετικότητα, απλά αναφέρουμε ότι όσον αφορά στη βαρύτητα αυτή προκύπτει στη Γενική Θεωρία ως αποτέλεσμα της "καμπύλωσης" του χωροχρόνου. Το σχήμα 4.126 είναι μία



ΣΧΗΜΑ 4.126

Μια δισδιάστατη αναπαράσταση ενός καμπύλου χώρου. Το φως ενός μακρυνού αστέρα (συνεχής γραμμή) ακολουθεί την παραμορφωμένη επιφάνεια για να φτάσει στη Γη. Η διακοπτόμενη γραμμή δείχνει την κατεύθυνση από την οποία φαίνεται σαν να προέρχεται το φως. Ανάλογη καμπύλη τροχιά ακολουθεί και σωμάτιο με μάζα.

"αναπαράσταση" του φαινομένου αυτού.

Έχουμε δηλαδή χωροχρόνο που δεν είναι Ευκλείδιος, δεν είναι επίπεδος, αλλά καμπύλος. Η κίνηση εξαρτάται από την παραμόρφωση του χωρόχρονου.

Κατά προσέγγιση, αν ένα ακίνητο υλικό σημείο μεγάλης μάζας δημιουργεί βαρυτικό πεδίο μέσα στο οποίο κινείται άλλο υλικό σημείο που έχει σχετικιστική ενέργεια πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας του ακίνητου υλικού σημείου, τότε είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ο γνωστός δεύτερος νόμος του Νεύτωνα που συνδέει τη δύναμη με το ρυθμό μεταβολής της σχετικιστικής ορμής*. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση για τη δύναμη που ασκεί το πολύ μεγάλο σωμάτιο μάζας M, στο άλλο σωμάτιο μάζας m είναι

$$\vec{F} = -\frac{GM\,\dfrac{E}{c^2}\left[\vec{e}_r\,(1+\beta^2) - \vec{\beta}\,(\vec{\beta}\cdot\vec{e}_r)\right]}{r^2} \tag{4.132}$$

r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σωματίων, $\vec{e}_r$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία των δύο σωματίων από τη μεγάλη μάζα προς την μικρή μάζα.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \textit{και} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

Βλέπουμε ότι η $\vec{F}$ δεν έχει τη διεύθυνση της $\vec{e}_r$ και ότι στη σχέση δεν υπεισέρχεται απλώς η (σχετιστική) ενέργεια E του σωματίου μάζας (ηρεμίας) m, αλλά και η ταχύτητα, ή μπορεί να μπει η σχετιστική ορμή αφού

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}\,c}{E}$$

Δεν μπορεί επομένως να λέμε, γενικώς, ότι η ενέργεια E υφίσταται δύναμη που αντιστοιχεί σε μάζα ίση με

$$\frac{E}{c^2}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι αν το $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{e}_r$ τότε η δύναμη έχει τον παράγοντα $\dfrac{E}{c^2}$, αν το $\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{e}_r$ τότε, η δύναμη έχει τον παράγοντα $\dfrac{E}{c^2}\left(1+\beta^2\right)$. Σαν να έχουμε δηλαδή δύο διαφορετικές μάζες! Αν είχαμε φωτόνιο ($\beta = 1$) τότε η μία "μάζα" θα ήταν διπλάσια της άλλης. Αυτό είναι μία από τις αιτίες που αποφεύγουμε τους όρους μάζα ηρεμίας και σχετιστική μάζα.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας προβλέπει διάφορα φαινόμενα που έχουν επαληθευτεί. Ένα από αυτά είναι η καμπύλωση του φωτός από τη βαρύτητα. Ένα άλλο είναι η μεταβολή της συχνότητας του φωτός ανάλογα με το βαρυτικό πεδίο στο οποίο βρίσκεται. Αυτό λέγεται συνήθως βαρυτική ερυθρή μετατόπιση παρόλο που θεωρητικά η μετατόπιση μπορεί να είναι και προς το γαλάζιο. Άλλη πρόβλεψη είναι η μετάπτωση του περιηλίου του πλανήτη Ερμή, ο οποίος έχει τροχιά με τη μεγαλύτερη εκκεντρότητα από τους άλλους πλανήτες και αυτό, κάνει αυτό το φαινόμενο έντονο και μπορεί να παρατηρηθεί. Άλλο φαινόμενο είναι η χρονική καθυστέρηση ηλεκτρομαγνητικών

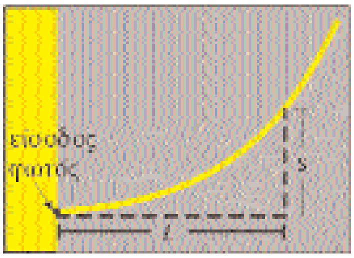
* Lev B. Okun PHYSICS TODAY June 1989, pages 31-36.

κυμάτων που διέρχονται μέσα από πεδίο βαρύτητας, που αποδίδεται στην μείωση της ταχύτητας του φωτός όταν διέρχεται μέσα από βαρυτικά πεδία.

Αυτά όλα έχουν επαληθευτεί. Επίσης προβλέπεται η ύπαρξη Μαύρων Οπών και υπάρχουν αστρονομικές ενδείξεις για αυτό. Ακόμη προβλέπεται η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων και έχουμε αστρονομικές ενδείξεις για την ύπαρξή τους.

Παράδειγμα 4-46

Καμπύλωση του φωτός από τη βαρύτητα. Η Γενική θεωρία προβλέπει κάτι τέτοιο αφού τα φωτόνια είναι μεν σωματίδια χωρίς μάζα αλλά με ενέργεια και ορμή και η κίνησή τους περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.126. Κατάλληλη εφαρμογή της σχέσης για τη δύναμη στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας για ασθενή πεδία δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Μπορεί κάποιος να κατανοήσει το αποτέλεσμα μόνο ποιοτικά αν εφαρμόσει την αρχή της ισοδυναμίας για ομογενές βαρυτικό πεδίο. Θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα του ανελκυστήρα (Σχ. 4.127) που πέφτει ελεύθερα, για να μελετήσουμε την επίδραση της βαρύτητας στο φως.



Σχήμα 4.127

Ανελκυστήρας που πέφτει με επιτάχυνση g προς τα κάτω μέσα στο πεδίο βαρύτητας και δέσμη φωτός.

Σε ένα τοίχωμα της καμπίνας του ανελκυστήρα έχουμε ανοίξει μία μικρή τρύπα για να μπορεί να περνά μια λεπτή φωτεινή δέσμη και έχουμε επινοήσει κατάλληλη διάταξη, έτσι που η δέσμη να κάνει να φωσφορίζουν τα σημεία από τα οποία περνά πάνω σε πέτασμα κάθετο προς το τοίχωμα αυτό. Το πέτασμα είναι κατακόρυφο. Τη στιγμή που αρχίζει η πτώση του ανελκυστήρα μία φωτεινή δέσμη εισέρχεται στην καμπίνα. Το φως καμπυλώνεται προς τα πάνω ακολουθώντας παραβολική τροχιά. Αυτό οφείλεται στο εξής: Εφόσον το φως κινείται με (οριζόντια) ταχύτητα c θα διανύσει οριζόνια απόσταση ℓ σε χρόνο ℓ/c τότε όμως ο ανελκυστήρας θα έχει πέσει κατά

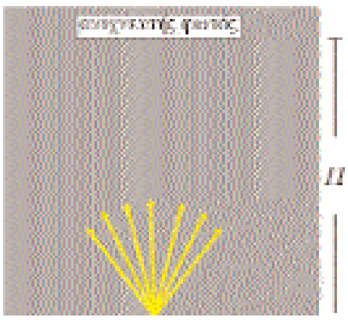
$$S = \frac{1}{2} g \left(\frac{\ell}{c}\right)^2$$

Τι θα συμβεί αν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος μέσα σε πεδίο βαρύτητας;

Απάντηση

Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, αν ο ανελκυστήρας ήταν ακίνητος μέσα στο ίδιο πεδίο βαρύτητας αυτό είναι ισοδύναμο με την προηγούμενη περίπτωση της ελεύθερης πτώσης, άρα το φως πρέπει να καμπυλώνεται όπως και πριν. Παρόλο που η γενική σχετικότητα δίνει λίγο διαφορετικό αποτέλεσμα, για λόγους που δεν μπορούμε να εξηγήσουμε απλοϊκά, το απλό αποτέλεσμα είναι προς τη σωστή κατεύθυνση.

Παράδειγμα 4-47



Σχήμα 4.128

Φως της πηγής ανιχνεύεται από τον ανιχνευτή φωτός. Το σύστημα επιταχύνεται προς τα πάνω. Η συχνότητα κατά την ανίχνευση είναι διαφορετική από αυτήν κατά την εκπομπή ένεκα του φαινομένου Doppler.

Ερυθρή μετατόπιση ένεκα βαρύτητας. Ας φανταστούμε ότι έχουμε ένα κουτί όπως στο σχήμα 4.128 εκτός πεδίου βαρύτητας. Στο δάπεδο υπάρχει μία μονοχρωματική πηγή φωτός και ακριβώς από πάνω ένας ανιχνευτής φωτός. Έστω ότι η πηγή έχει ταχύτητα μηδέν τη στιγμή που εκπέμπεται φως και ότι το κουτί επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση $\vec{a}$. Το χρονικό διάστημα για να φτάσει στον ανιχνευτή το φως είναι περίπου H/c, αν η ταχύτητα του κουτιού είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη c. Η ταχύτητα του ανιχνευτή τη στιγμή αφίξεως του φωτός είναι (κατά μέτρο)

$$\upsilon = at = a\frac{H}{c}$$

Αφού ο ανιχνευτής απομακρύνεται έχουμε φαινόμενο Doppler και "μετατόπιση" προς το "ερυθρό", δηλαδή προς μεγαλύτερα μήκη κύματος. Εφαρμόζομε για $\upsilon << c$ τον τύπο για το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler και βρίσκουμε (έχουμε μικρές μεταβολές):

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\upsilon}{c} = \frac{\alpha H}{c^2}$$

Τί θα συμβεί αν το κουτί είναι ακίνητο μέσα σε πεδίο βαρύτητας;

<u>Απάντηση</u>

Η αρχή της ισοδυναμίας λέει ότι το ίδιο θα συμβεί αν αντί να έχουμε επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ το κουτί βρίσκεται ακίνητο μέσα σε πεδίο βαρυτικής έντασης $\vec{g} = -\vec{\alpha}$, οπότε οι τύποι που γράψαμε ισχύουν αν στη θέση της επιτάχυνσης α βάλουμε την ένταση του ομογενούς βαρυτικού πεδίου g. Αν εναλλαχθεί η θέση ανιχνευτή - πηγής τότε έχουμε μετατόπιση προς μεγαλύτερη συχνότητα. Η γενικότερη σχέση έχει μέσα τη μεταβολή του δυναμικού του πεδίου βαρύτητας μεταξύ πηγής και ανιχνευτή και γράφεται

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta \Phi}{c^2}$$

όπου $\Delta\Phi = \Phi_{\text{πηγής}} - \Phi_{\text{ανιχνευτή}}$.

Στην περίπτωσή μας $\Delta\Phi = gH$. Η γενική σχετικότητα προβλέπει το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι ο χρόνος φαίνεται να περνά με γρηγορότερο ρυθμό σε περιοχές υψηλού βαρυτικού δυναμικού σε σχέση με περιοχές χαμηλότερου δυναμικού.

Παράδειγμα 4-48

Η ύπαρξη μαύρων οπών

Η ύπαρξη μαύρων οπών μπορεί να κατανοηθεί ποιοτικά αν σκεφθεί κάποιος ότι ένα σώμα ανεξάρτητα της μάζας του, για να ξεφύγει της βαρυτικής έλξης ενός ουράνιου σώματος χρειάζεται ορισμένη ταχύτητα διαφυγής. Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα διαφυγής πλησιάζει την έσχατη ταχύτητα που είναι ή ταχύτητα του φωτός, c, τότε είναι σαν να λέμε ότι κανένα σώμα, ούτε το φως δεν μπορεί να ξεφύγει, άρα το ουράνιο σώμα δεν "θα φαίνεται" θα είναι μια μαύρη τρύπα. Το αποτέλεσμα της Γενικής Θεωρίας δίνει ότι αυτό συμβαίνει αν η ακτίνα του σώματος είναι μικρότερη ή ίση από την κρίσιμη ακτίνα

$$R_c = \frac{2GM}{c^2}$$

Δείξτε ότι ο τύπος αυτός είναι ο ίδιος με τον τύπο που βγαίνει από την Κλασική Μηχανική με την προϋπόθεση (λάθος!) ότι η κινητική ενέργεια είναι $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ ακόμη και όταν $\upsilon = c$!

<u>Απάντηση</u>

$$\frac{1}{2}mc^2 = G\frac{Mm}{R_c}$$

άρα
$$R_c = \frac{2GM}{c^2}$$

ΙΣΤΟΡΙΚΑ

Στα τέλη του 19ου αιώνα ο Maxwell ενοποίησε τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό σε μια ενιαία θεωρία, τον Ηλεκτρομαγνητισμό. Ο ηλεκτρομαγνητισμός πρόβλεψε την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Είχε διαπιστωθεί από πολύ παλιά ότι το φως παρουσιάζει κυματικές ιδιότητες. Με τον Maxwell έγινε σαφές ότι είναι είδος ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Με τις αντιλήψεις της εποχής, τα κύματα διαδίδονται μέσα σε ελαστικά μέσα, άρα έπρεπε να υπάρχει κάποιο ελαστικό μέσο, το οποίο να είναι ο φορέας των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων άρα και του φωτός. Το μέσον αυτό ονομάστηκε αιθέρας που εθεωρείτο ότι έχει περίεργες ιδιότητες. Γέμιζε τα πάντα, χωρίς να εμποδίζει την κίνηση των σωμάτων τα οποία διαπερνούσε. Ο αιθέρας υπήρχε παντού ακόμα και μέσα στα σώματα. Υπήρξε το ερώτημα αν ο αιθέρας παρασύρεται από τα σώματα, όπως από τη Γη, ή είναι ακίνητος και αποτελεί το απόλυτο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Από πειράματα της απόκλισης του φωτός κοντυνών άστρων σχετικά με το μακρινό υπόβαθρο άστρων, φάνηκε ότι ο αιθέρας δεν παρασυρόταν από τη Γη αλλά ήταν ακίνητος. Έτσι τέθηκε το πρόβλημα να διαπιστωθεί με πειράματα η κίνηση της Γης ως προς τον αιθέρα. Η ταχύτητα της Γης στην περιφορά της περί τον Ήλιο είναι περίπου 30 km/h δηλαδή 3×10^{-8} της ταχύτητας του φωτός. Το πείραμα έπρεπε να ανιχνεύσει διαφορά στην ταχύτητα διάδοσής του φωτός, ως προς τη Γη, αν η διεύθυνσή του ήταν κάθετη στην ταχύτητα της Γης ή παράλληλη με αυτήν. Δηλαδή ήθελαν να δουν το αποτέλεσμα πρόσθεσης ταχυτήτων της κλασικής φυσικής (μετασχηματισμός Γαλιλαίου). Το πείραμα ήταν δύσκολο διότι έπρεπε να ανιχνεύσει μεταβολές ταχύτητας 1 προς 100 εκατομμύρια. Το 1881 ο Albert A. Michelson επινόησε ένα τέτοιο πείραμα και τελειοποίησε τις μετρήσεις τόσο που σε μερικά χρόνια (μαζί με τον E.W. Morley) να επιτύχει την απαιτούμενη ακρίβεια. Διαπίστωσε ότι η ταχύτητα του φωτός ήταν ανεξάρτητη της κίνησης της Γης. Ο Αϊνστάιν διατύπωσε τη θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας λίγο μετά από αυτό το πείραμα. Αυτή περιείχε νέες ιδέες για τον χρόνο και τον χώρο που ήταν συμβιβαστές με τη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ο ίδιος ο Michelson ποτέ δεν πίστεψε στην ειδική θεωρία της σχετικότητας! Οι σωστοί μετασχηματισμοί από ένα αδρανειακό σύστημα σε άλλο είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz που ισχύουν για τον ηλεκτρομαγνητισμό και τη μηχανική και για όλους τους νόμους της φύσης. Η μηχανική τροποποιήθηκε ώστε να ακολουθεί τους μετασχηματισμούς Lorentz. Οι συνέπειες ήταν πολλές, προβλέφτηκε η ισοδυναμία μάζας (ηρεμίας) και ενέργειας. Αυτό επιβεβαιώνεται κάθε μέρα στα εργαστήρια Φυσικής Σωματιδίων, όπου παράγονται σωματίδια από ενέργεια, και ενέργεια από σωματίδια, σε ρυθμούς ρουτίνας. Φυσικά σε όλους είναι γνωστή η χρήση της πυρηνικής ενέργειας (που οφείλεται στη μετατροπή μάζας σε ενέργεια) για παραγωγή ηλεκτρισμού. Η ειδική σχετικότητα προβλέπει διαστολή του χρόνου. Η διαπίστωση αυτή έχει γίνει με πειράματα ακριβείας (1971) με ρολόγια που ταξίδευαν μέσα σε αεροπλάνα. Το γεγονός όμως διαπιστώνεται καθημερινά στα

Εργαστήρια Φυσικής Σωματιδίων Υψηλών Ενεργειών. Αν ένα σωματίδιο, που έχει ορισμένο μέσο χρόνο ζωής, όταν είναι σχεδόν ακίνητο, επιταχυνθεί ώστε να αποκτήσει ταχύτητα συγκρίσιμη με αυτή του φωτός, τότε ο χρόνος ζωής του φαίνεται πολύ μεγαλύτερος. Σε αυτό οφείλεται το γεγονός ότι, μιόνια που παράγονται από αλληλεπιδράσεις σωματιδίων (που προέρχονται από το διάστημα) με μόρια του αέρα στα ανώτατα στρώματα της ατμόσφαιρας και έχουν μέσο χρόνο ζωής (όταν είναι ακίνητα, χρόνος ηρεμίας) περίπου 2 μικροδευτερόλεπτα, μπορούν και φτάνουν μέχρι την επιφάνεια της γης γιατί όταν παραχθούν έχουν μεγάλες ταχύτητες και έτσι ο χρόνος ζωής τους φαίνεται πολύ μεγαλύτερος. Αυτά προκαλούν βραδείες μεταλάξεις σε έμβια όντα και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το ανθρώπινο είδος θα είχε, ίσως, εξελιχθεί αλλιώτικα αν δεν ίσχυε η Ειδική Σχετικότητα. Αξίζει να πούμε ότι ο Αϊνστάιν δημοσίευσε στο ίδιο περιοδικό (Annalen der Physik) στο ίδιο τεύχος [4] 17 (1905) στις σελίδες 891, 549 και 132, αντίστοιχα, τρία κορυφαία άρθρα. Το πρώτο ήταν για την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, το δεύτερο ήταν για την εξήγηση της κίνησης Brown (σχετίζεται με την ατομική δομή της ύλης) και το τρίτο ήταν για την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου που σχετίζεται με τις βάσεις της κβαντικής φυσικής. Ο Αϊνστάιν πήρε το Nobel αργότερα (1921) για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η Ειδική Σχετικότητα ήταν πολύ ριζοσπαστική για να γίνει αποδεκτή παγκοσμίως από την επιστημονική κοινότητα τόσο γρήγορα!

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ήρθε αργότερα (1916). Η θεωρία του Νεύτωνα για τη βαρύτητα φαίνονταν μη ικανοποιητική ακόμη και στον ίδιο τον Νεύτωνα. Η βαρυτική αλληλεπίδραση διαδίδονταν ακαριαία. Επίσης χρειάζονταν ειδικά συστήματα αναφοράς και για την κλασική μηχανική (όπως αργότερα και για την ειδική σχετικότητα). Ο Αϊνστάιν θεώρησε ότι έπρεπε οι νόμοι της φύσης να μπορούν να γραφούν, έτσι που να ισχύουν για κάθε σύστημα αναφοράς, όχι μόνο για αδρανειακά συστήματα. Η γνώση της ισότητας αδρανούς και βαρυτικής μάζας και άλλα δεδομένα, οδήγησαν στη Γενική Σχετικότητα που είναι ακόμη πιο δυσκολονόητη από την Ειδική Σχετικότητα. Ο χωροχρόνος παραμορφώνεται (καμπυλώνεται) από την ύπαρξη μαζών. Υπήρξαν πολλές προβλέψεις της θεωρίας που άργησαν να επαληθευτούν, διότι οι αποκλίσεις που προέβλεπε από τις μέχρι τότε θεωρίες ήταν πολύ μικρές. Χρειάστηκε η ανάπτυξη της τεχνολογίας για να γίνουν ακριβή πειράματα που επιβεβαίωσαν πολλές προβλέψεις. Αναφέρουμε ότι ο Γαλιλαίος παρατήρησε πρώτος ότι η αδρανής και βαρυτική μάζα πρέπει να είναι ίδιες, αφού η περίοδος του εκκρεμούς δεν εξαρτάται από τη μάζα του.

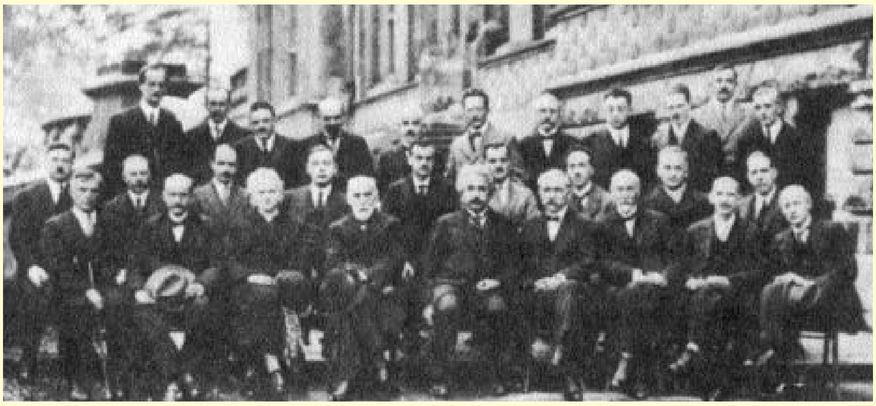
Άλλα πειράματα που έδειξαν την ισοδυναμία των μαζών αυτών ήταν του R. von Eötvös, (πειράματα στο διάστημα, 1890 - 1920), με ακρίβεια $1{:}3 \times 10^8$. Αργότερα οι P. G. Roll, R. Krotkov, και R.H. Dicke έφτασαν σε ακρίβεια $1{:}10^{11}$.

Η πρώτη πετυχημένη παρατήρηση της ερυθρής μετατόπισης που προβλέπει η Γενική Σχετικότητα, έγινε το 1960 από τους Pound και Rebka. Από το 1801 πριν η κυματική θεωρία των Young & Fresnel κυριαρχήσει της σωματιδιακής θεωρίας για το φως, ο Γερμανός μαθηματικός Johann Georg von Soldner υπολόγισε την τροχιά "σωματιδίου" του φωτός που περνά στην περιφέρεια του ήλιου. Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που προέβλεψε ο Αϊνστάιν το 1911 με απλοϊκή χρήση της αρχής της ισοδυναμίας.

Αργότερα ο Αϊνστάιν με χρήση της Γενικής Σχετικότητας έδωσε το σωστό αποτέλεσμα. Η απόκλιση αυτή του φωτός προβλέπεται ότι είναι 1,74 δεύτερα λεπτά της μοίρας, πάρα πολύ μικρή! Μόλις το 1919 κατάφεραν να μετρήσουν την απόκλιση αυτή κατά την ολική έκλειψη του ηλίου (Μάιος 29, 1919). Οι ερευνητές ήταν οι F.W. Dyson, A.S. Eddington και C. Davidson που βρήκαν αποτελέσματα πολύ κοντά στην πρόβλεψη. Την μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή την είχε παρατηρήσει ο V.S. Leverier από το 1859. Μετά από κατάλληλες διορθώσεις το αποτέλεσμα (43 δεύτερα λεπτά της μοίρας ανά αιώνα) συμφωνεί με τη Γενική Θεωρία. Το 1976 με το διαστημόπλοιο Viking, που πάτησε στον Άρη, επιβεβαιώθηκε η καθυστέρηση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ένεκα βαρύτητας που αποδίδεται στη μείωση της ταχύτητας του φωτός το οποίο διέρχεται μέσα από βαρυτικά πεδία.

Οι J.R. Oppenheiner και S. Snyder ανάφεραν τη δυνατότητα ύπαρξης μαύρων οπών το 1939. Η ύπαρξή τους εικάζεται από τα βαρυτικά φαινόμενα που προκαλούν, π.χ., στην κίνηση των αστέρων.

Μία άλλη πρόβλεψη της Γενικής Σχετικότητας είναι η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων. Δεν έχουν επιβεβαιωθεί, παρόλες τις προσπάθειες ερευνητών όπως του J.Weber (από το 1960). Υπάρχουν όμως ενδείξεις παραγωγής τους στον διπλό πάλσαρ PSR 1913+16, που αποτελείται από δύο πολύ μεγάλης πυκνότητας αντικείμενα. Αυτά τα αντικείμενα κινούνται κυκλικά πολύ γρήγορα, άρα έχουν τεράστιες επιταχύνσεις. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εκπομπή βαρυτικών κυμάτων και άρα σε απώλεια ενέργειας, που εκδηλώνεται με αύξηση της γωνιακής τους ταχύτητας. Το 1988 δημοσιεύτηκε μια εργασία που δείχνει ότι αυξάνεται η γωνιακή τους ταχύτητα και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ανωτέρω σύστημα ίσως εκπέμπει βαρυτικά κύματα και χάνει ενέργεια.



Οι αρχιτέκτονες της μοντέρνας φυσικής, οι οποίοι έλαβαν μέρος στο 5ο Διεθνές Συνέδριο Φυσικής το 1927 στο Ινστιτούτο Solvay των Βρυξελλών. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται δεκαπέντε επιστήμονες με βραβείο Νόμπελ στη φυσική και τρεις στη χημεία.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

❑ Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας θεωρεί ότι ο χρόνος και ο χώρος δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες. Η σύνδεσή τους φαίνεται στις σχέσεις μετασχηματισμού του Lorentz.

❑ Οι σχέσεις μετασχηματισμού του Lorentz για το χώρο και το χρόνο είναι

$$x' = \gamma\,(x - ut)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}\right)$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\beta = \frac{u}{c}$$

Τα x', y', z' και τα x, y, z, t είναι οι συντεταγμένες του χωρόχρονου που προσδιορίζουν κάποιο γεγονός στα αδρανειακά συστήματα K' και K αντίστοιχα. Το σύστημα K' κινείται με ταχύτητα u ως προς το K κατά μήκος του άξονα των x.

❑ Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα.

❑ Η σχετικιστική ορμή ενός σωματίου δίνεται από τη σχέση

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

❑ Η σχετικιστική ενέργειά του από τη σχέση

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = m\gamma c^2$$

$E_0 = mc^2$ είναι η ενέργεια ηρεμίας του σωματίου.

❑ Η ταχύτητα του φωτός είναι η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει ένα σώμα.

Η ταχύτητα του φωτός εμφανίζεται ως ο συντελεστής που κάνει τις διαστάσεις των μεγεθών, όπως ο χρόνος και το μήκος να μπορούν να συνδεθούν και να αποτελούν ένα είδος τετρανύσματος (ct, x, y, z). Το ίδιο συμβαίνει για την ορμή και την ενέργεια

$$\left(\frac{E}{c},\, p_x,\, p_y,\, p_z\right)$$

Επίσης η μάζα ισοδυναμεί με την ενέργεια ηρεμίας με συντελεστή (πολλαπλασιαστή) το c^2,

$$E_0 = mc^2$$

❑ Η ειδική θεωρία της σχετικότητας οδηγεί σε διαστολή του χρόνου $T = \gamma T_0$, και συστολή του μήκους, $L = L_0/\gamma$, που διαπιστώνονται καθημερινά, κυρίως στα Εργαστήρια Φυσικής Υψηλών Ενεργειών (Στοιχειωδών Σωματιδίων).

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

❑ Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι στην ουσία μία θεωρία της βαρύτητας. Σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο, τα αποτελέσματα της Γενικής Θεωρίας μπορούν να εξαχθούν, τουλάχιστον ποιοτικά, με απλοϊκή εφαρμογή της αρχής της ισοδυναμίας που λέει ότι:

Η επίδραση ομογενούς βαρυτικού πεδίου είναι ισοδύναμη με αυτό ενός συστήματος αναφοράς με ομοιόμορφη επιτάχυνση σε κατεύθυνση αντίθετη αυτής του βαρυτικού πεδίου.

Η Γενική Σχετικότητα οδηγεί σε βαρυτική διαστολή του χρόνου και πράγμα που δεν σχολιάσαμε, σε συστολή του μήκους.

❑ Στη Γενική Θεωρία το βαρυτικό πεδίο περιγράφεται με «καμπύλωση» του χωρόχρονου.

❑ Μεταξύ των προβλέψεων της Γενικής Θεωρίας είναι:

1. Η απόκλιση του φωτός μέσα σε βαρυτικό πεδίο.
2. Η βαρυτική “ερυθρή μετατόπιση” του φωτός.
3. Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή.
4. Η χρονική καθυστέρηση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διέρχονται από βαρυτικό πεδίο.
5. Η ύπαρξη μαύρων οπών.
6. Η ακτινοβολία βαρυτικών κυμάτων.

Οι προβλέψεις 1 μέχρι 4 έχουν επιβεβαιωθεί με άμεση πειραματική παρατήρηση, για τα 5 και 6 υπάρχουν αστρονομικές ενδείξεις.

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ

1. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Υποθέστε ότι ένα διαστημόπλοιο είναι κατασκευασμένο από υλικό που η αδρανειακή του μάζα είναι ίση με τη βαρυτική. Το διαστημόπλοιο γυρίζει γύρω από τη Γη. Υποθέστε ότι οι αστροναύτες έχουν βαρυτική μάζα μικρότερη της αδράνειακής και ότι μερικά αντικείμενα που χρησιμοποιούν έχουν βαρυτική μάζα μεγαλύτερη της αδρανειακής. Περιγράψτε την κατάσταση μέσα στο διαστημόπλοιο. Υποθέστε ότι οι σχέσεις μαζών (πηλίκα μαζών) είναι ίδια για την κάθε μια περίπτωση αντικειμένων.

2. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο μυθιστόρημα “Από τη Γη στη Σελήνη” αναφέρεται ότι ο σκύλος που ήταν μέσα στο βλήμα που είχε εκτοξευθεί από τη Γη με κανόνι, για να φτάσει στο φεγγάρι, πεθαίνει και τον βγάζουν έξω από το διαστημόπλοιο. Ο Ιούλιος Βερν λέει ότι ο σκύλος ακολουθεί το βλήμα στην πορεία του και οι επιβάτες τον παρακολουθούν από το παράθυρο. Οι επιβάτες περπατούν στο δάπεδο του βλήματος, ώσπου φτάνουν στο σημείο, που η ένταση της βαρύτητας που οφείλεται στη Γη και η ένταση της βαρύτητας που οφείλεται στο φεγγάρι γίνονται ίσες και μετά υπερισχύει η δεύτερη. Ο συγγραφέας λέει τότε ότι οι επιβάτες προς στιγμή αιωρούνται μέσα στο διαστημόπλοιο και ύστερα πέφτουν στο ταβάνι (προς τη μύτη) του βλήματος. Ο σκύλος απ΄ έξω εξακολουθεί να κινείται πλάι πλάι με το βλήμα. Τί είναι σωστό και τί λάθος στην αφήγηση;

3. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σκεφθείτε τις συνέπειες της ειδικής σχετικότητας και του πεπερασμένου της ταχύτητας του φωτός. ΄Εστω

$$c = 3{,}0 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$$

Πόσο μακρυά μπορεί να εξερευνηθεί το διάστημα; Λάβετε υπόψη ότι ο χρόνος του επιταχυνόμενου αδελφού, στους διδύμους, περνά πιο αργά από τον χρόνο του αδελφού του που έμεινε στη Γη. Υπάρχει όριο απόστασης από τη Γη όπου μπορεί να φτάσει η εξερεύνηση του σύμπαντος από την ανθρωπότητα; Κάντε διάφορες σκέψεις πάνω στο θέμα υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν τεχνολογικές δυσκολίες για το πόσο μεγάλη ταχύτητα μπορεί να επιτύχει ο άνθρωπος με τους πυραύλους του μέλλοντος. Δεχτείτε ότι ο άνθρωπος ζει 100 χρόνια.

4. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Υποθέστε ότι ζείτε σε μια πόλη στην οποία η ταχύτητα του φωτός είναι πολύ μικρή, περίπου $30\,\mathrm{km/h}$. Σχολιάστε τα παράξενα φαινόμενα, που θα παρατηρούσατε, κάτω από τις συνθήκες αυτές στην καθημερινή σας ζωή στην παράξενη αυτή πόλη.

5. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

΄Ενας φίλος σας βρίσκεται στην ταράτσα ενός πολύ ψηλού ουρανοξύστη. Αν του στείλετε μια δέσμη μονοχρωματικού φωτός από το δρόμο που βρίσκεστε, θα έχει ακριβώς το ίδιο χρώμα με εκείνο που του στείλατε; Εξηγήστε το.

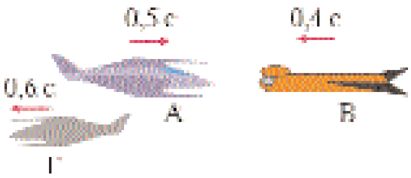
6. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Λένε ότι όταν ο Αϊνστάιν ήταν έφηβος αναρωτιόταν για το εξής: ΄Ενας δρομέας κρατάει με τεντωμένο το βραχίονά του ένα καθρέφτη μπροστά στο πρόσωπό του. Μπορεί να δει τον εαυτό του στον καθρέφτη εάν τρέχει με ταχύτητα σχεδόν ίση με την ταχύτητα του φωτός; Κάντε διάφορες σκέψεις στο ερώτημα, τόσο με τη βοήθεια της θεωρίας του αιθέρα όσο και με τη θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Στο σχήμα φαίνεται πως κινούνται τρία διαστημικά οχήματα. Όλες οι ταχύτητες των οχημάτων είναι μετρημένες από το ίδιο σύστημα αναφοράς.



Από το όχημα (Α) εκπέμπεται ένας παλμός λέιζερ (Laser). Τη μεγαλύτερη ταχύτητα για τον παλμό καταγράφει

(α) ο πιλότος του οχήματος (Α)
(β) ο πιλότος του οχήματος (Β)
(γ) ο πιλότος του οχήματος (Γ)
(δ) και οι τρεις πιλότοι καταγράφουν την ίδια ταχύτητα για τον παλμό

2

Θεωρήστε ότι ένα φύλλο, από το βιβλίο που διαβάζετε κινείται ως προς εσάς οριζόντια με ταχύτητα παραπλήσια της ταχύτητας του φωτός και κάντε τις αντιστοιχίες μεταξύ των στοιχείων της αριστερά στήλης, που περιέχει τις ιδιότητες του φύλλου και των στοιχείων της δεξιάς στήλης.

1. Το πάχος του φύλλου	α. Αναλλοίωτη(-το)
2. Η μάζα του χαρτιού του φύλλου	β. Αλλάζει
3. Ο όγκος του χαρτιού	
4. Ο αριθμός των ατόμων του χαρτιού	
5. Το μήκος του φύλλου	
6. Η ταχύτητα του φωτός, που ανακλάται από το φύλλο	
7. Η χημική σύνθεση του χαρτιού	

3

Αν βρισκόσαστε σε διαστημόπλοιο και ταξιδεύατε μακριά από τη Γη με ταχύτητα παραπλήσια της ταχύτητας του φωτός, θα αντιλαμβανόσαστε ότι ταξιδεύετε με τόση μεγάλη ταχύτητα

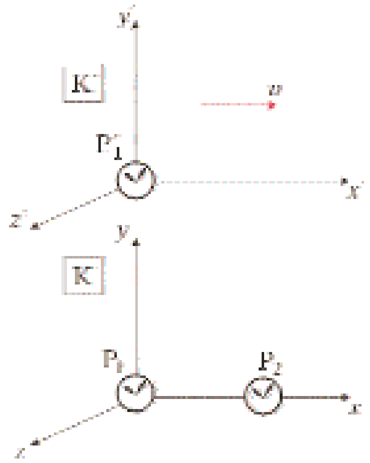
(α) από την αύξηση της μάζας σας
(β) από τη μεταβολή που θα παρατηρούσατε στο σφυγμό σας
(γ) από τη συστολή, που θα παρατηρούσατε στο ύψος σας
(δ) από όλους τους παραπάνω παράγοντες
(ε) από κανέναν από αυτούς τους παράγοντες

4

Στη σχετικότητα χρησιμοποιούμε συνήθως νοητικά πειράματα (gedanken experimente) για να αντιληφθούμε τις αλλαγές που πρέπει να επιφέρουμε στις έννοιες του χώρου και του χρόνου, ώστε η ταχύτητα του φωτός να γίνει απόλυτη. Ίσως να έχει δημιουργηθεί η εντύπωση ότι μόνο τέτοια πειράματα μπορούμε να κάνουμε. Είναι αυτή η εντύπωση σωστή ή όχι; Αν όχι μπορείτε να περιγράψετε δύο πειράματα μη νοητικά;

5

Στο σχήμα φαίνονται δύο ρολόγια P_1 και P_2 σε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς K, συγχρονισμένα στο σύστημα αυτό. Ένα άλλο ρολόι, το P_1', είναι ακίνητο



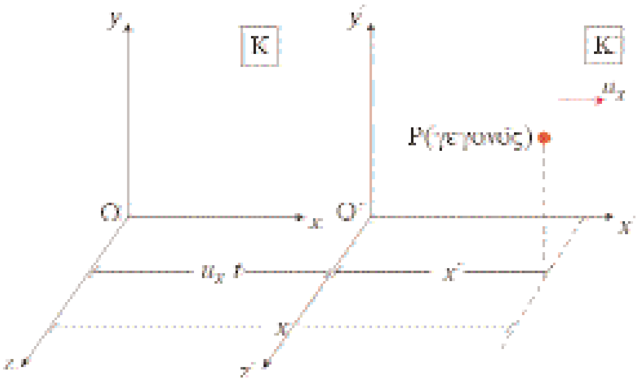
στο σύστημα K', που κινείται (κατά τα γνωστά) με ταχύτητα υ. Τα ρολόγια P_1 και P_1' δείχνουν μηδέν, τη στιγμή που διασταυρώνονται. Τη στιγμή που διασταυρώνονται τα P_1' και P_2, τη μικρότερη ένδειξη την έχει

(α) το ρολόι P_1'
(β) το ρολόι P_2
(γ) και τα δύο έχουν την ίδια ένδειξη

Ποιό ρολόι δείχνει τη σωστή ένδειξη;

6

Στο σχήμα θεωρούμε έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς K', που παρατηρεί δύο γεγονότα, που συμβαίνουν στην ίδια θέση (P), αλλά όχι ταυτόχρονα.



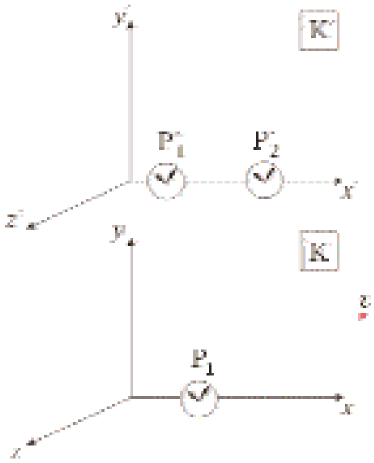
(α) Μπορεί ένας άλλος παρατηρητής, στο σύστημα αναφοράς K, να εκτιμά ότι τα γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση;

(β) Αν δύο γεγονότα συμβούν ταυτόχρονα στην ίδια θέση για έναν παρατηρητή, αυτό σημαίνει ότι θα συμβούν ταυτόχρονα και για όλους τους άλλους παρατηρητές;

(γ) Θα συμβούν στην ίδια θέση και για τους υπόλοιπους παρατηρητές;

7

Στο σχήμα φαίνονται δύο ρολόγια P_1' και P_2' ακίνητα, στο ακίνητο σύστημα αναφοράς K', συγχρονισμένα



στο σύστημα αυτό. Ένα άλλο ρολόι, το P_1, είναι ακίνητο στο κινούμενο (κατά τα γνωστά) με ταχύτητα $\vec{v}$ σύστημα αναφοράς K. Όταν τα ρολόγια P_1' και P_1 διασταυρώνονται δείχνουν μηδέν. Τη στιγμή που διασταυρώνονται τα P_1 και P_2', τότε τη μικρότερη ένδειξη την έχει

(α) το ρολόι P_2'

(β) το ρολόι P_1

(γ) και τα δύο έχουν την ίδια ένδειξη

Ποιο μετράει τον ιδιόχρονο;

8

Υποθέστε ότι βρίσκεστε μέσα σε ένα διαστημόπλοιο πολύ μεγάλου μήκους. Ένα διαστημόπλοιο με εξωγήινους κινείται σε σχέση με εσάς με ταχύτητα παραπλήσια του φωτός και σε αντίθετη κατεύθυνση ή ίσως εσείς κινείστε σε σχέση με αυτό (εξ άλλου δεν υπάρχει κανένας τρόπος να βρείτε τι από τα δύο συμβαίνει). Όταν το διαστημόπλοιο των εξωγήινων περνά δίπλα σας βλέπετε ότι το ρύγχος του βρίσκεται στην πίσω άκρη του δικού σας τη στιγμή που η ουρά του βρίσκεται στην μπροστινή άκρη του δικού σας, (σύμφωνα με το χρονόμετρό σας). Τα δύο διαστημόπλοια έχουν

(α) το ίδιο μήκος

(β) το δικό σας είναι μακρύτερο από των εξωγήινων

(γ) το δικό σας είναι κοντύτερο από των εξωγήινων

9

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση οι εξωγήινοι διαπιστώνουν οι ίδιοι με τις μετρήσεις τους ότι το διαστημόπλοιό τους

(α) έχει ίσο μήκος με το δικό σας

(β) είναι μακρύτερο από το δικό σας

(γ) είναι κοντύτερο από το δικό σας

10

Αναφερόμενοι στην ερώτηση (11) υποθέστε ότι οι κυβερνήτης σας, που κάθεται στο ρύγχος του διαστημόπλοιού σας, μετρά το χρόνο, που χρειάζεται το σκάφος των εξωγήινων να περάσει δίπλα του. Ομοίως, ο εξωγήινος κυβερνήτης, καθισμένος στο ρύγχος του δικού του διαστημόπλοιου μετρά το χρόνο που χρειάζεται να περάσει από δίπλα του το δικό σας σκάφος, τότε

(α) οι δύο κυβερνήτες υπολογίζουν ίσους χρόνους

(β) ο εξωγήινος κυβερνήτης θα μετρήσει περισσότερο χρόνο

(γ) ο δικός σας κυβερνήτης θα μετρήσει περισσότερο χρόνο

11

Ενώ παρατηρείτε ένα διαστημόπλοιο να κινείται στο διάστημα με ταχύτητα 0,5 c θα διαπιστώσετε ότι το ρολόι του "τρέχει" με ρυθμό που είναι

(α) κανονικός (ρυθμός ηρεμίας)

(β) τέτοιος ώστε το ρολόι να "τρέχει" ανάποδα

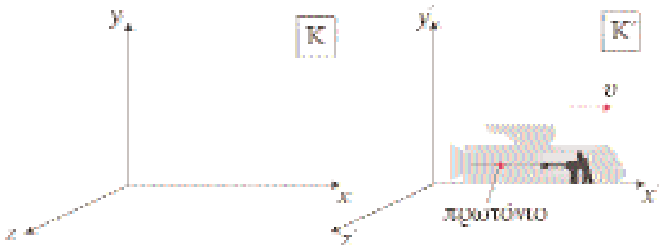
(γ) μικρότερος από το μισό του κανονικού

(δ) μισός από τον κανονικό

(ε) μικρότερος μεν, αλλά μεγαλύτερος από το μισό του κανονικού

12

Στο σχήμα φαίνεται ένα διαστημόπλοιο με έναν επιβάτη, στο σύστημα αναφοράς K', που μας προσπερνά (σύστημα αναφοράς K) με ταχύτητα υ. Ένα πρωτόνιο βάλετε από τον επιβάτη με ταχύτητα παραπλήσια του φωτός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



(α) Η χωρική απόσταση $\Delta x'$ μεταξύ του σημείου εκτόξευσης του πρωτονίου και του σημείου που συγκρούστηκε αυτό στο άκρο του διαστημοπλοίου είναι θετική ή αρνητική ποσότητα

(β) Η χρονική απόσταση $\Delta t'$ μεταξύ των παραπάνω γεγονότων είναι θετική ή αρνητική ποσότητα;

13

Μια αμαξοστοιχία έχει μήκος 90 m όταν είναι ακίνητη. Μια σήραγγα σε ηρεμία έχει μήκος 80 m. Αν το τρένο κινείται με ταχύτητα παραπλήσια της ταχύτητας του φωτός θα μπορούσε να χωρέσει στη σήραγγα αρκεί να το παρατηρήσουμε από το σύστημα αναφοράς

(α) της σήραγγας

(β) του κινούμενου τρένου

(γ) και των δύο

(δ) κανενός από τα δύο

14

Ένας αστροναύτης απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα παραπλήσια της ταχύτητας του φωτός. Ένας γιατρός που είχε μετρήσει τους σφυγμούς του ανά λεπτό και το ύψος του, λίγο πριν απογειωθεί, κάνει τις ίδιες μετρήσεις και τώρα, που ο αστροναύτης ταξιδεύει, οπότε παρατηρεί ότι ο αστροναύτης έχει

(α) μικρότερο ύψος και περισσότερους σφυγμούς

(β) μεγαλύτερο ύψος και λιγότερους σφυγμούς

(γ) το ίδιο ύψος και τους ίδιους σφυγμούς

(δ) μικρότερο ύψος καί λιγότερους σφυγμούς

(ε) μεγαλύτερο ύψος και περισσότερους σφυγμούς

15

Είναι δυνατόν ένα παιδί να είναι βιολογικά μεγαλύτερο από τους γονείς του; Αν η απάντησή σας είναι καταφατική, πώς είναι δυνατόν να συμβεί αυτό;

16

Ο Γρηγόρης φεύγει από την Αθήνα για ένα διαπλανητικό ταξίδι με διαστημόπλοιο και προορισμό τον Άρη. Ο Σταμάτης έμεινε στη Γη. Η ταχύτητα του διαστημοπλοίου, ως προς τη Γη είναι $0{,}50\,c$. Αν μετρήσουν τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού, ποιός μετρά το σωστό χρόνο:

(α) ο Σταμάτης;

(β) ο Γρηγόρης;

(γ) και οι δύο;

(δ) κανένας;

Στο δρόμο ο Γρηγόρης εκπέμπει ένα παλμό φωτός προς τον Άρη. Μετρούν και οι δύο το χρόνο που χρειάζεται για να πάει ο παλμός στον Άρη. Ποιός μετρά το σωστό χρόνο;

17

Όταν τα διαπλανητικά ταξίδια άρχισαν να γίνονται ρουτίνα, μια νέα αεροπορική εταιρεία έστειλε μερικούς αστροναύτες σε ένα μεγάλο (για τα γήινα ρολόγια) διαπλανητικό ταξίδι με ταχύτητα παραπλήσια του φωτός και συμφώνησαν ότι ο μισθός τους θα καθορίζεται από τις ώρες πτήσης τους. Όταν επέστρεψαν στη Γη πέρασαν από το λογιστήριο της εταιρείας και είδαν το μισθό τους. Πώς νομίζετε ότι αντέδρασαν;

18

Ένας αστροναύτης 20 χρονών την ημέρα των γενεθλίων του ξεκινά για ταξίδι προς το Σείριο, που απέχει 8 έτη φωτός από τη Γη με ταχύτητα $0{,}8\,c$ και επιστρέφει αμέσως με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα στη Γη. Την ημέρα της αναχώρησης γιορτάζει επίσης τα γενέθλιά του ο μικρότερος αδελφός του που είναι 12 χρονών. Όταν επιστρέφει στη Γη είναι

(α) συνομήλικος με τον αδελφό του

(β) μικρότερος από αυτόν

(γ) μεγαλύτερος από αυτόν

19

Ένας χάρακας με μήκος ηρεμίας 1 m και μάζα (ηρεμίας) 1 kg σας προσπερνά με ταχύτητα παραπλήσια της ταχύτητας του φωτός, μετράτε τη μάζα του και τη βρίσκεται 2 kg και το μήκος του 1m. Ποιά είναι η διεύθυνση της κίνησής του; Η ταχύτητα κίνησής του είναι

(α) $0{,}5\,c$ (β) $2\,c$ (γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ (δ) $\frac{3c}{4}$ (ε) $\frac{c}{4}$

20

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση, αν ο χάρακας κινείται τώρα κατά τη διεύθυνση του μήκους του με την ταχύτητα που υπολογίσατε πριν, το μήκος, που μετράτε εσείς είναι

(α) 2 m (β) 0,5 m (γ) 0,25 m (δ) 0,75 m

21

Παρατηρείτε ένα διαστημόπλοιο που κινείται μακριά σας με ταχύτητα 0,5 c. το διαστημόπλοιο εκτοξεύει πύραυλο κατευθείαν προς τα εμπρός με ταχύτητα 0,5 c ως προς το διαστημόπλοιο. Η ταχύτητα του πυραύλου ως προς εσάς είναι

(α) μηδέν
(β) ίση με την ταχύτητα του φωτός c
(γ) ίση με 0,8 c
(δ) ίση με 1,33 c

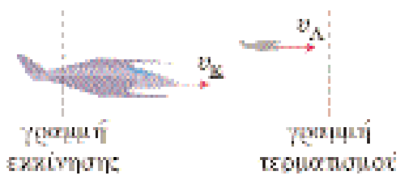
22

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ερώτηση υποθέστε (ιδεατά) ότι οι ταχύτητες ήταν c αντί 0,5c. Τότε η ταχύτητα του πυραύλου ως προς εσάς είναι

(α) c (β) $c/2$ (γ) 0 (δ) 2 c

23

Στο σχήμα φαίνεται ένα, από τέσσερα, αστρικά καταδρομικά σε αγώνα δρόμου. Κάθε καταδρομικό



καθώς περνά τη γραμμή εκκίνησης εκτοξεύει ένα μικρό αεροσκάφος που κινείται προς τη γραμμή τερματισμού. Εσείς παρατηρείται την κούρσα ακίνητος, σε σχέση με τις γραμμές εκκίνησης και τερματισμού. Οι ταχύτητες υ_k των καταδρομικών, σχετικά με εσάς, και οι ταχύτητες υ_A των αεροσκαφών, σχετικά με τα καταδρομικά είναι του πρώτου: 0,70 c και 0,40 c, του δεύτερου: 0,40 c και 0,70 c, του τρίτου: 0,20 c, 0,90 c και του τέταρτου: 0,50 c και 0,60 c.

(α) Χωρίς να γράψετε υπολογισμούς, κατατάξτε τις ταχύτητες των αεροσκαφών σχετικά με εσάς, ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη.
(β) Χωρίς να γράψετε υπολογισμούς, κατατάξτε τα αεροσκάφη, σύμφωνα με τις αποστάσεις των πιλότων τους, μετρούμενες από τη γραμμή εκκίνησης μέχρι τη γραμμή τερματισμού, ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη.

24

Στο σχήμα φαίνονται δύο διαστημικά οχήματα Α και Β που κινούνται στην ίδια ευθεία. Οι ταχύτητες είναι μετρημένες στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Η ταχύτητα του (Α) σχετικά με την ταχύτητα του (Β) είναι

(α) μεγαλύτερη από 0,7 c
(β) μικρότερη από 0,7 c
(γ) ίση με 0,7 c

25

Κάντε τις αντιστοιχίες μεταξύ των μεγεθών της αριστερά στήλης και των μονάδων της δεξιά στήλης

1. Μάζα σωματιδίου	α. 1 eV
2. Ορμή σωματιδίου	β. 1 eV/c
3. Ενέργεια σωματιδίου	γ. 1 eV/c^2
4. Επιτάχυνση σωματιδίου	

26

Φανταστείτε ένα σούπερ τρόλεϊ που τροφοδοτείται από το ηλεκτρικό δίκτυο και μια σούπερ ηλεκτροκίνητη μοτοσυκλέτα, που μόνη πηγή τροφοδοσίας της είναι οι σούπερ ηλεκτρικές μπαταρίες της. Τα δύο οχήματα κινούνται με ταχύτητα παραπλήσια της ταχύτητας του φωτός. Μετρώντας τη μάζα των δύο οχημάτων από το ακίνητο σύστημα αναφοράς της Γης βρίσκετε ότι έχει αυξηθεί η μάζα

(α) και των δύο οχημάτων
(β) κανενός από τα δύο οχήματα
(γ) του τρόλεϊ
(δ) της μοτοσυκλέτας

27

Η ενέργεια ηρεμίας και η ολική ενέργεια αντίστοιχα, τριών σωματιδίων εκπεφρασμένα συναρτήσει μιας ποσότητας Α είναι: 1) Α, 2Α, 2) Α, 3Α, 3) 3Α, 4Α. Χωρίς να γράψετε υπολογισμούς, κατατάξτε τα σωματίδια με βάση

(α) τη μάζα τους
(β) την κινητική τους ενέργεια
(γ) τον συντελεστή τους γ και
(δ) την ταχύτητά τους, ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη

28

Γιατί ο Ερμής είναι ο καταλληλότερος πλανήτης για να μας αποδείξει τη σχέση της βαρύτητας με το χώρο;

29

Γιατί είναι απαραίτητο να βρίσκεται σε ολική έκλειψη ο Ήλιος, όταν μετράμε την απόκλιση του φωτός ενός άστρου, που βρίσκεται κοντά του; Ένα τέτοιο άστρο φαίνεται να έχει μετακινηθεί
(α) προς το μέρος του Ήλιου;
(β) μακριά από τον Ήλιο;

30

Γιατί μεταβάλλεται η βαρυτική έλξη μεταξύ Ήλιου και Ερμή; Θα μεταβαλλόταν, αν η τροχιά του Ερμή ήταν κυκλική;

31

Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις, που αναφέρονται στην ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι σωστή;
(α) Το φως έχει πάντα σταθερή ταχύτητα στο κενό.
(β) Το φως δεν έχει πάντοτε σταθερή ταχύτητα, αλλά σε μερικές περιοχές του χώρου είναι μικρότερη απ' ότι σε άλλες.

32

Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;
(α) Σε μερικές περιοχές του σύμπαντος, παρόλο που βρίσκονταν σε ηρεμία σε σχέση με εμάς, ο χρόνος κυλάει πιο αργά από ότι σε μας.
(β) Δεν υπάρχουν περιοχές του σύμπαντος στις οποίες ο χρόνος να κυλάει πιο αργά απ' ότι σε μας.

33

Αν ο Ήλιος συρρικνωνόταν ξαφνικά, με κάποιο τρόπο, σε μαύρη οπή, η τροχιακή ταχύτητα της Γης
(α) θα αυξηθεί
(β) θα μειωθεί
(γ) θα παραμείνει η ίδια

34

Σύμφωνα με τη θεωρία του Αϊνστάιν για τη βαρύτητα, ένας μακρινός παρατηρητής που παρατηρεί το φως να περνά κοντά από σώμα πολύ μεγάλης μάζας, θα διαπιστώσει ότι η ταχύτητα του φωτός
(α) αυξάνεται
(β) μειώνεται
(γ) δεν παθαίνει απολύτως καμιά μεταβολή

35

Υποθέστε ότι δύο αδελφές εργάζονται στην ίδια υπηρεσία, η μια στα γραφεία του ισογείου ενός ουρανοξύστη πολύ μεγάλου ύψους, και η άλλη στα γραφεία του τελευταίου ορόφου του ίδιου ουρανοξύστη.
(α) Πιο γρήγορα μεγαλώνει αυτή που εργάζεται στα γραφεία του τελευταίου ορόφου.
(β) Πιο γρήγορα μεγαλώνει αυτή που εργάζεται στα γραφείου του ισογείου;
(γ) Το ίδιο μεγαλώνουν και οι δύο αδελφές.

36

Υποθέστε ότι δύο υπάλληλοι εργάζονται ο ένας στο ισόγειο του κτιρίου και ο άλλος σε ένα υπόγειο, που βρίσκεται σε μεγάλο βάθος.
(α) Πιο γρήγορα μεγαλώνει αυτός που εργάζεται στο ισόγειο του κτιρίου;
(β) Το ίδιο μεγαλώνουν και οι δύο υπάλληλοι;
(γ) Πιο γρήγορα μεγαλώνει αυτός που εργάζεται στο υπόγειο του κτιρίου;

37

Ένα ρολόι που βρίσκεται στον Ισημερινό της Γης, σε σχέση με ένα όμοιο ρολόι, που βρίσκεται στον έναν από τους πόλους της
(α) θα πηγαίνει λίγο πιο μπροστά
(β) θα πηγαίνει λίγο πιο πίσω
(γ) θα δείχνουν ακριβώς την ίδια ώρα

38

Υποθέστε ότι παρατηρούμε φως που εκπέμπεται από τη Σελήνη. Θα περιμένατε να δούμε
(α) μετατόπιση προς το ερυθρό
(β) καμιά μετατόπιση
(γ) μετατόπιση προς το μπλε

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

Δύο οχήματα Α και Β του αστρικού στόλου σημεία ξεκινούν από δύο σημεία και κινούνται σε παράλληλες ευθείες με αμοιβαία απόσταση d. Ο πιλότος του Α οχήματος επιτρέπει στον πιλότο του Β οχήματος να ξεκινήσει νωρίτερα κατά ένα χρονικό διάστημα Δt_0 (ως προς το Α). Να προσδιοριστεί το αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η εκκίνηση των δύο οχημάτων είναι ταυτόχρονη.

2

Ένα διαστημόπλοιο με μήκος ηρεμίας 130 m προσπερνά έναν διαστημικό σταθμό με ταχύτητα 0,740 c.
(α) Ποιό είναι το μήκος του διαστημοπλοίου όπως το μετρά ο σταθμός;
(β) Ποιό χρονικό διάστημα καταγράφει το ρολόι

του σταθμού, από τη στιγμή που εμφανίστηκε το μπροστά μέρος του διαστημόπλοιου μέχρι να περάσει όλο το διαστημόπλοιο;

3

Ένας παρατηρητής σε σύστημα αναφοράς K, βλέπει μια έντονη λάμψη φωτός 1200 m μακρυά από τη θέση του και μια ασθενή λάμψη φωτός 720 m πιο κοντά, στην ίδια ευθεία με την έντονη λάμψη. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο λάμψεων, όπως μετριέται από αυτόν, είναι 5×10^{-6} s με πρώτη την έντονη λάμψη.

(α) Ποιά η σχετική ταχύτητα ενός άλλου παρατηρητή, σε σύστημα K', που καταγράφει τις δύο λάμψεις να συμβαίνουν στην ίδια θέση;
(β) Ποιά λάμψη συμβαίνει πρώτη στο σύστημα K';
(γ) Ποιό το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο λάμψεων καταγράφει ο K';

4

Ένας παρατηρητής, σε σύστημα Κ, καταγράφει ένα γεγονός με τις συντεταγμένες του χωρόχρονου $x = 100$ km και $t = 100\times10^{-6}$ s. Ποιές οι χωροχρονικές συντεταγμένες αυτού του γεγονότος, όπως καταγράφονται από παρατηρητή σε σύστημα K', που κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα 0,950 c σχετικά με το σύστημα K (κατά τα γνωστά). Υποθέστε ότι την $t' = t = 0$ είναι $x' = x = 0$.

5

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς K' κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}60\,c$ σε σχέση με άλλο σύστημα Κ. Υποθέστε ότι τη $t' = t = 0$, $x' = x = 0$, δύο γεγονότα καταγράφονται στο K. Το γεγονός 1 συμβαίνει την $t = 0$ στη θέση $x = 0$ και το γεγονός 2 στη θέση $x = 3$ km την $t = 4\times10^{-6}$ s. Ποιές χρονικές στιγμές καταγράφει ο παρατηρητής του συστήματος K' για τα ίδια γεγονότα;

6

Δύο ατομικά ρολόγια καισίου έχουν συγχρονιστεί απολύτως. Το ένα παραμένει στη Γη, ενώ το άλλο τοποθετείται σε ένα υπερηχητικό αεροπλάνο, που ταξιδεύει με μέση ταχύτητα 1440 km/h και μετά από ταξίδι 5,00 ωρών (σύμφωνα με το γήινο ρολόι) επιστρέφει.

(α) Πόσο θα διαφέρουν οι ενδείξεις των δύο ρολογιών;
(β) Ποιό ρολόι θα δείχνει τη μικρότερη διάρκεια πτήσης;

[Επειδή $\upsilon/c << 1$ χρησιμοποιήστε τον προσεγγιστικό τύπο $(1+x)^n \approx 1+nx$]

7

Το 1961 ο κοσμοναύτης G.S. Titov διέγραφε κύκλους γύρω από τη Γη επί 25,00 ώρες με ταχύτητα 7,8 km/s.

(α) Πόσος ήταν ο συντελεστής διαστολής χρόνου του ρολογιού του ως προς τα ρολόγια της Γης;
(β) Πόσα δευτερόλεπτα έμεινε πίσω το ρολόι του, κατά τη διάρκεια της διαδρομής;

8

Το φως για να φθάσει στη γη απο τα πιο μακρυνά άστρα του γαλαξία μας θέλει 10^5 έτη φωτός. Θα μπορούσε ένας άνθρωπος που ξεκινά από τη Γη σε ηλικία 15 ετών να φθάσει εκεί όταν γίνει 65 ετών; (Δίνεται ότι: $(1+x)^n \approx 1+nx$)

9

Ένα διαστημικό όχημα κατευθύνεται προς τη Σελήνη με ταχύτητα $0{,}8c$ (ως προς τη Γη).

(α) Πόσο διαρκεί το ταξίδι Γη - Σελήνη σύμφωνα με παρατηρητή της γης;
(β) Ποιά η απόσταση Γης - Σελήνης σύμφωνα με τον πιλότο του οχήματος;
(γ) Πόσο διαρκεί το ταξίδι για τον πιλότο;

Δίδεται απόσταση Γης - Σελήνης $3{,}84\times10^8$ m.

10

Διαστημόπλοιο (παράλληλο στον άξονα x') ενός συστήματος K', κινείται με ταχύτητα $\upsilon'_x = 0{,}1\,c$ ως προς το K' και έχει σε αυτό μήκος $L' = 110$ m. Αν το σύστημα K' κινείται με ταχύτητα u_x ως προς άλλο σύστημα K (κατά τα γνωστά) ως προς το οποίο το διαστημόπλοιο έχει μήκος $L = 100$ m, να υπολογίσετε

(α) την ταχύτητα του διαστημόπλοιου ως προς το K
(β) την ταχύτητα u
(γ) το μήκος του διαστημόπλοιου στο σύστημα, στο οποίο είναι ακίνητο

11

Τα πιόνια (π) παράγονται κατά τον βομβαρδισμό κατάλληλων στόχων με υψηλής ενέργειας πρωτόνια και εγκαταλείπουν το στόχο με ταχύτητα 0,991 c. Αν ο χρόνος ημίσειας ζωής των πιονίων στο σύστημά τους είναι $1{,}77\times10^{-8}$ s. Να βρεθεί σε πόση απόσταση από το στόχο ο αριθμός αυτών έχει πέσει στο μισό του αρχικού.

12

Ένα μ - μεσόνιο που κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}99$ c στο σύστημα του εργαστηρίου διάνυσε απόσταση 3,0 km από τη στιγμή της γέννησής του μέχρι να διασπαστεί. Να υπολογιστεί

(α) ο χρόνος ζωής του μ-μεσονίου (δηλαδή το χρόνο από τη γέννηση μέχρι τη διάσπασή του, σε σύστημα στο οποίο ηρεμεί)
(β) η απόσταση που "βλέπει" το μεσόνιο ότι διάνυσε

13

Από τη στιγμή της δημιουργίας, στο εργαστήριο ενός μεσονίου π^+ (πιόνιο) πρέπει να διανύσει έναν αερόκενο σωλήνα μήκους 3,0 km για να φτάσει στην πειραματική συσκευή ανίχνευσής του. Το μεσόνιο π^+ έχει διάρκεια ζωής $2{,}6\times 10^{-8}$ s (στο σύστημα ηρεμίας του)
(α) Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται στο σωματίδιο αυτό, ώστε να προλάβουμε να το ανιχνεύσουμε προτού διασπαστεί;
(β) Αν η ενέργεια ηρεμίας του είναι 139,6 MeV, πόση είναι η ολική του ενέργεια, όταν κινείται με την ταχύτητα, που βρήκατε στο ερώτημα (α);

14

Ο χρόνος ζωής ενός μιονίου στο σύστημα ηρεμίας του είναι $2{,}2\times 10^{-6}$ s. Ο αντίστοιχος χρόνος ζωής ενός μιονίου, που παράγεται από μια έκρηξη κοσμικής ακτινοβολίας, μετρούμενος από τη Γη είναι 16×10^{-6} s. Ποιά η ταχύτητα των μιονίων της κοσμικής ακτινοβολίας σε σχέση με τη Γη;

15

Ένα πιόνιο παράγεται στα υψηλά στρώματα της ατμόσφαιρας της Γης, όταν ένα σωματίδιο κοσμικής ακτινοβολίας, υψηλής ενέργειας συγκρουστεί με έναν πυρήνα ατόμου. Το πιόνιο κατέρχεται προς τη Γη με ταχύτητα 0,99 c ως προς το σύστημα ηρεμίας του. Τα πιόνια εμφανίζουν χρόνο ζωής 26×10^{-6} s. Πόση απόσταση θα διανύσει το πιόνιο ως προς τη Γη μέχρι να διασπαστεί;

16

Κατά τη διάρκεια ενός αστρικού πολέμου ένα μαχητικό και ένα καταδρομικό του αστρικού στόλου κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Η ταχύτητα του μαχητικού ως προς τη γη είναι 0,800c και η ταχύτητα του ενός οχήματος όπως μετριέται από το άλλο είναι 0,900c. Ποιά είναι η ταχύτητα του καταδρομικού ως προς τη γη;

17

Ένα σωματίδιο της κοσμικής ακτινοβολίας πλησιάζει τη Γη κατά μήκος του άξονα βορρά - νότου με ταχύτητα 0,80 c κοντά στον βόρειο γεωγραφικό πόλο. Ένα άλλο σωματίδιο πλησιάζει τη Γη, κατά μήκος του ίδιου άξονα με ταχύτητα 0,60 c κοντά στο νότιο πόλο. Ποιά η σχετική ταχύτητα προσέγγισης του ενός ως προς το άλλο, όπως μετριέται από το δεύτερο σωματίδιο;

18

Ένα εχθρικό διαστημόπλοιο που κινείται προς τη Γη εκτοξεύει ένα πύραυλο προς τη Γη με ταχύτητα 0,840c ως προς το διαστημόπλοιο. Ένας παρατηρητής από επίγειο σταθμό διαπιστώνει ότι ο πύραυλος πλησιάζει με ταχύτητα 0,360c. Με πόση ταχύτητα εκτιμά ο επίγειος παρατηρητής ότι κινείται το διαστημόπλοιο; Για τον ίδιο παρατηρητή, το διαστημόπλοιο πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη Γη;

19

Ραδιενεργός πυρήνας κινείται με σταθερή ταχύτητα 0,1 c ως προς το σύστημα του εργαστηρίου κατα τη διεύθυνση του άξονα x και εκπέμπει ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα με ταχύτητα 0,8 c ως προς τον πυρήνα. Ποιά η ταχύτητα του ηλεκτρονίου ως προς το σύστημα του εργαστηρίου αν σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του πυρήνα το ηλεκτρόνιο εκπέμπεται: α) κατά τη φορά κίνησης και β) κατά την αντίθετη φορά προς τη φορά κίνησης του πυρήνα.

20

Από μετρήσεις της μετατόπισης προς το ερυθρό του εκπεμπόμενου φωτός από τα κουασάρ, βρέθηκε ότι ένα κουασάρ (quasi - stellar - source) Q_1 απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα 0,800 c και ένα άλλο κουασάρ Q_2, που βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το Q_1, απομακρύνεται με ταχύτητα 0,400c. Πόση ταχύτητα μετρά, για το Q_2 ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο Q_1.

21

Ποιά η ταχύτητα ενός σωματιδίου του οποίου
(α) η κινητική ενέργεια είναι ίση με το διπλάσιο της ενέργειας ηρεμίας του και
(β) η ολική ενέργεια είναι διπλάσια από την ενέργεια ηρεμίας του

22

Υπολογίστε την ταχύτητα ενός σωματιδίου του οποίου η κινητική ενέργεια είναι ίση με:
(α) την ενέργεια ηρεμίας του και
(β) το πενταπλάσιο της ενέργειας ηρεμίας του.

23

Στο γραμμικό επιταχυντή του Stanford, που έχει μήκος

3 km, τα ηλεκτρόνια αποκτούν ενέργεια 20 GeV.
(α) Ποιά η ταχύτητα των ηλεκτρονίων;
(β) Πόσο μήκος φαίνεται να έχει ο επιταχυντής σε ένα ηλεκτρόνιο;
Δίνεται η μάζα του ηλεκτρονίου 0,511 MeV/c^2.

24

Ένα πρωτόνιο επιταχύνθηκε στο σύγχροτρο του εργαστηρίου Fermi και απέκτησε κινητική ενέργεια 500 GeV. Υπολογίστε
(α) το συντελεστή γ
(β) το λόγο υ/c
(γ) Αν το πρωτόνιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, ακτίνας 750 m, ποιά η μαγνητική επαγωγή του πεδίου; Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου 938,3 MeV.

25

Ένα πρωτόνιο κινείται με ταχύτητα 0,95c. Υπολογίστε:
(α) την ενέργεια ηρεμίας,
(β) την ολική ενέργεια και
(γ) την κινητική ενέργεια του πρωτονίου.

26

Ένα ηλεκτρόνιο κινείται έτσι ώστε να μπορεί να κάνει μια περιστροφή γύρω από τη Γη, στον Ισημερινό σε χρόνο 1,00 s.
(α) Ποιά η ταχύτητα του e^-, σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός;
(β) Ποιά η κινητική του ενέργεια;
(γ) Ποιό ποσοστό λάθους κάνουμε αν χρησιμοποιήσουμε τους κλασικούς υπολογισμούς;

27

Ένα πρωτόνιο με μάζα (ηρεμίας) 938,28 MeV/c^2 κινείται
(α) με ταχύτητα 0,5c και
(β) με ταχύτητα 0,99c.
Ποιά η κινητική ενέργεια του πρωτονίου σύμφωνα με την κλασική και την σχετικιστική φυσική για τις δύο περιπτώσεις;

28

Ένα σωματίδιο έχει μάζα $3{,}32\times10^{-27}$ kg και ορμή $9{,}65\times10^{-19}$ kg·m/s.
(α) Πόση είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου;
(β) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου;
(γ) Πόσος είναι ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς την ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου;

29

Τα κουασάρ πιθανόν να είναι λαμπροί πυρήνες πολύ μακρινών γαλαξιών, τους οποίους βλέπουμε τώρα όπως ήταν νέοι. Ένα τυπικό κουασάρ εκπέμπει ενέργεια με ισχύ 10^{41} W.
Με ποια συχνότητα μειώνεται η μάζα του κουασάρ για να δώσει αυτή την ενέργεια;

30

Ο χρόνος ζωής ενός μιονίου στο σύστημα ηρεμίας του είναι $2{,}20\times10^{-6}$ s
(α) Πόση είναι η ταχύτητα του μιονίου ως προς τη Γη;
(β) Πόση η κινητική του ενέργεια και
(γ) Πόση η ορμή του ως προς τη Γη;
Η μάζα του μιονίου είναι 207 φορές τη μάζα του ηλεκτρονίου.

31

Υπολογίστε τη μάζα ενός σωματιδίου (εκπεφρασμένη σε μάζες ηλεκτρονίου), που έχει κινητική ενέργεια 55,0 MeV και ορμή 121 MeV/c. Ποιό είναι το σωματίδιο;

32

Θεωρήστε ότι όλα τα παρακάτω σωματίδια κινούνται στο διάστημα.(α) φωτόνιο 2,0 eV, (β) ηλεκτρόνιο 0,40 MeV και (γ) 10,0 MeV.
(1) Ποιό κινείται γρηγορότερα;
(2) Ποιό είναι το αργότερο;
(3) Ποιό έχει τη μεγαλύτερη ορμή;
(4) Ποιό έχει τη μικρότερη ορμή;

33

Ένα σωματίδιο έχει κινητική ενέργεια 10,0 MeV. Υπολογίστε (α) το λόγο υ/c και (β) το συντελεστή Lorentz γ, αν το σωμάτιο είναι: 1) ηλεκτρόνιο, 2) πρωτόνιο και 3) σωμάτιο α.

34

Ένα σωματίδιο έχει ταχύτητα 0,990 cm προς το σύστημα του εργαστηρίου. Ποιά η κινητική, η ολική ενέργεια του σωματιδίου και η ορμή του, αν το σωμάτιο είναι α) πρωτόνιο, β) ηλεκτρόνιο;

35

(α) Χρησιμοποιώντας την σχέση ενέργειας ορμής της Ειδικής Σχετικότητας να εκφράσετε την ορμή ενός φωτονίου ως συνάρτηση της συχνότητάς του.
(β) Να δειχθεί ότι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να απορροφήσει εντελώς ένα φωτόνιο.

36

Όπως έχουμε αποδείξει ένα σωματίδιο φορτίου q και μάζας m, όταν εκτοξευθεί με ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής B, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας

$$r = \frac{mv}{|q|B}$$

με περίοδο

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

που είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας του σωματιδίου και της ακτίνας της τροχιάς. Αυτά ισχύουν μόνο αν $v << c$. Για σωματίδια όμως, που κινούνται με ταχύτητες παραπλήσιες της ταχύτητας του φωτός, δεν ξέρετε αν οι τύποι αυτοί ισχύουν. Υπολογίστε την ακτίνα και την περίοδο της κυκλικής τροχιάς ενός ηλεκτρονίου 10,0 MeV, που κινείται με ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B = 2{,}20\ T$ χρησιμοποιώντας: (α) κλασικούς τύπους και (β) σχετικιστικούς. Είναι το αποτέλεσμα για την περίοδο ανεξάρτητο της ταχύτητας του σωματιδίου;

37

Δείξτε ότι η σχέση

$$F = -\frac{GM\left(\frac{E}{c^2}\right)\left[\vec{e}_r\left(1+\beta^2\right) - \vec{\beta}\,(\vec{\beta}\cdot\vec{e}_r)\right]}{r^2}$$

για $\vec{\beta} \to 0$ οδηγεί στο γνωστό νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα.

38

(α) Ο πύργος του Eiffel στο Παρίσι έχει ύψος 300m. Πόση είναι η ερυθρή μετατόπιση μεταξύ βάσης και κορυφής του πύργου;

(β) Πόση είναι για το Everest; (υψομετρική διαφορά περίπου 8000 m)

39

Η σωστή τιμή για τη γωνιακή εκτροπή του φωτός που ξεκινά από μεγάλη απόσταση από ουράνιο σώμα ακτίνας R και μάζας M και περνά πολύ κοντά από την επιφάνειά του, ενώ στη συνέχεια φθάνει σε μεγάλη απόσταση από αυτό, δίνεται από τη σχέση,

$$\Delta\varphi = \frac{2\,GM}{R\,c^2}$$

Βρείτε την εκτροπή για την περίπτωση του Ήλιου. $M_H = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg, $R_H = 7{,}0 \times 10^{8}$ m, $G = 6{,}7 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

40

Υπολογίστε πόση πρέπει να γίνει (αφού συρρικνωθεί) η ακτίνα του Ήλιου για να μετατραπεί σε μαύρη τρύπα (οπή); Η πυρηνική πυκνότητα είναι $2{,}3 \times 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$. Τί ποσοστό αυτής πρέπει να γίνει η πυκνότητα του ήλιου όταν αυτός γίνει μαύρη τρύπα;

41

Ατομικό ρολόι βρίσκεται σε αεροπλάνο που πετά σε ύψος 12 000 m. Το αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα 850 km/h. Συγκρίνετε τη συμβολή στη «διαστολή» του χρόνου που οφείλεται στην ειδική σχετικότητα και στη γενική σχετικότητα σε σχέση με ρολόι που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης (στο ύψος της επιφάνειας της θάλασσας).

$c = 3{,}0 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}, \quad g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

NASA: Η εκτόξευση Διαστημικού Λεωφορείου (Space Shuttle)

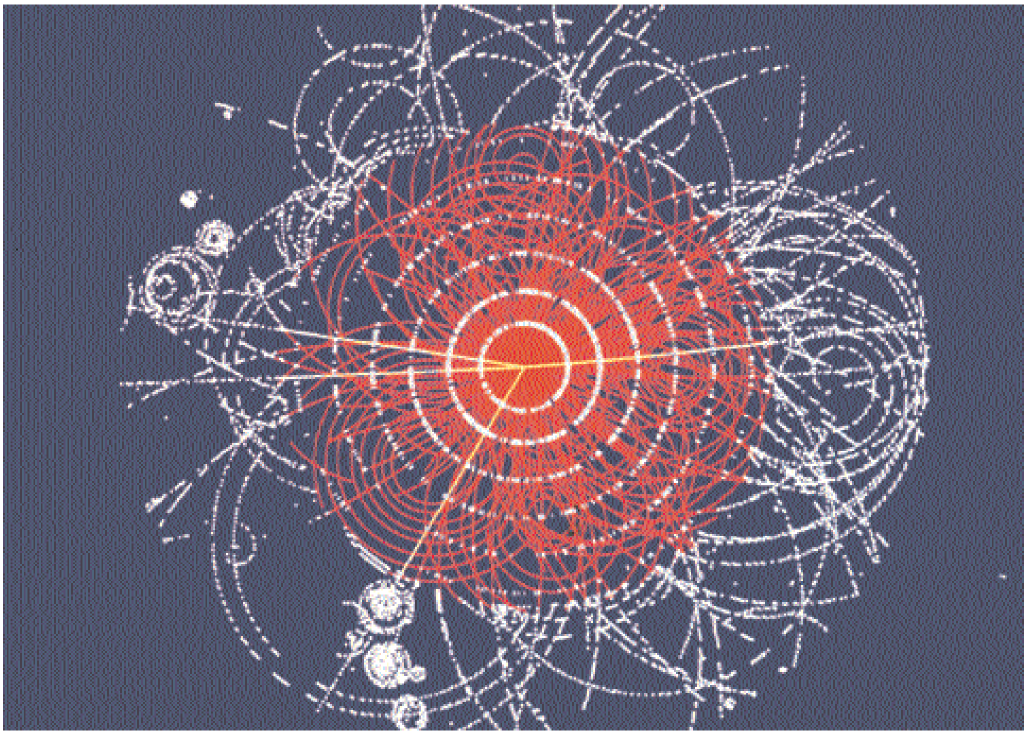


PHOTO CERN
Προσομοίωση παραγωγής σωματιδίων στο πείραμα ATLAS στο CERN.
Δημιουργείται και ένα σωματίδιο higgs (χιγγς) που διασπάται σε 4 μιόνια.
Το χιγγς δεν έχει ακόμη παρατηρηθεί.