

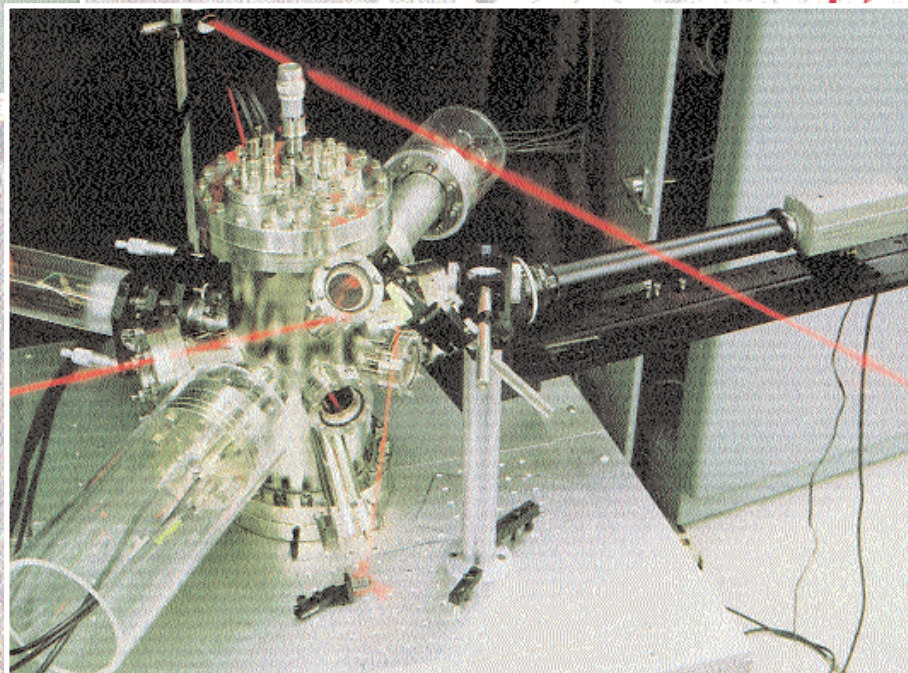
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Φυσική

της

Γ' Λυκείου

Θετικής και Τεχνολογικής
Κατεύθυνσης



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

Το βιβλίο αυτό ολοκληρώθηκε το έτος 2000 στα πλαίσια της ιδέας περί πολλαπλού βιβλίου. Είναι το ένα εκ των τριών εγκριθέντων για τη Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Το μέρος που αφορά στη Φυσική Β Λυκείου τυπώθηκε και μοιράστηκε στα Σχολεία. Στη συνέχεια άλλαξε η άποψη περί πολλαπλού βιβλίου, το θέμα πήγε στις Ελληνικές Καλένδες. Το μέρος που αφορά στη Γ Λυκείου δεν εκτυπώθηκε ποτέ από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Εδώ και καιρό πολλοί συνάδελφοι από τη Μέση εκπαίδευση μας ζητούσαν να τους δώσουμε (κυρίως) το βιβλίο της Γ Λυκείου σε κάποια μορφή. Έτσι αποφασίσαμε να κάνουμε μερικές διορθώσεις και να έχουμε και τους δυο τόμους σε ηλεκτρονική μορφή. Δυστυχώς δεν έχουμε τα αρχικά σχήματα και έτσι η εμφάνιση του βιβλίου δεν είναι αυτή που θα έπρεπε.

Οι διορθώσεις καθώς και το τεχνικό μέρος του εγχειρήματος έγιναν από τον συντονιστή της ομάδας συγγραφής κ. Εμμανουήλ Δρη. Ο εκ των συγγραφέων κ. Αθανάσιος Βελέντζας πρότεινε πολλές από τις διορθώσεις.

Αθήνα, Μάρτιος του 2008

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Φυσική

της Γ' Λυκείου

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Ανδρακάκος Κων/νος
Βελέντζας Αθανάσιος
Γάτσιος Ιωάννης
Διαμαντής Νικόλαος
Δρης Εμμανουήλ
Κρίκος Κων/νος
Πιερράκος Νικόλαος

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

Συγγραφείς:

Ανδρακάκος Κωνσταντίνος	Φυσικός, καθηγ. δευτεροβάθμιας ιδιωτικής εκπαίδευσης
Βελέντζας Αθανάσιος	Φυσικός, καθηγ. δευτεροβάθμιας δημόσιας εκπαίδευσης
Γάτσιος Ιωάννης	Φυσικός, καθηγ. δευτεροβάθμιας δημόσιας εκπαίδευσης
Διαμαντής Νικόλαος	Φυσικός, καθηγ. δευτεροβάθμιας δημόσιας εκπαίδευσης
Δρης Εμμανουήλ	Καθηγητής Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου
Κρίκος Κωνσταντίνος	Δρ φυσικός, σχολικός σύμβουλος
Πιερράκος Νικόλαος	Φυσικός, καθηγ. δευτεροβάθμιας ιδιωτικής εκπαίδευσης

Συντονιστής ομάδας συγγραφής:

Δρης Εμμ.

Καλλιτεχνική επιμέλεια:

Θάνος Κωτσόπουλος

Ηλεκτρονική σελιδοποίηση, μακέτες, σχήματα, γραφήματα, φιλμ, μοντάζ:

Εργαστήρι Γραφικών Τεχνών Θάνου Κωτσόπουλου

Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε την Ομάδα Εργασίας που έφτιαξε το Πρόγραμμα Σπουδών για τη Φυσική, στο οποίο βασίστηκε η συγγραφή του παρόντος βιβλίου. Την Επιτροπή αποτελούσαν οι Χρ. Ραγιαδάκος (πρόεδρος), Δημοσθ. Θάνος, Γρ. Καραγιάννης, Ι. Καρανίκας, Ανδρ. Κώττης, Αικ. Νταϊλιάνη, Αικ. Ντυμένου.

Ευχαριστούμε την Επιτροπή Αξιολόγησης για την πολύ καλή και λεπτομερειακή δουλειά που έκανε και τις σημαντικές υποδείξεις της, οι οποίες βοήθησαν στη βελτίωση αυτού του πονήματος. Την Επιτροπή αποτελούσαν οι Νικ. Αντωνίου (πρόεδρος), Θωμ. Ευθυμιόπουλος, Ιωαν. Αρναουτάκης, Ιωαν. Καρανίκας, Γεωργ. Πρίντζας, Ιωαν. Φωτάκης, Αικ. Κοτρόζου.

Ευχαριστούμε τον Αναπλ. Καθηγητή του Ε. Μ. Πολυτεχνείου Θεμ. Ρασσιά για τα στοιχεία που μας έδωσε για τον Κων. Καραθεοδωρή, τον Αντιπρύτανη του Ε.Μ.Πολυτεχνείου Καθηγητή Ευστρ. Γαλανή για την φωτογραφία του Καραθεοδωρή, τον Δρ Διον. Μαρίνο για τη φωτογραφία του Δημ. Χόνδρου, την τέως Επιμελήτρια του Ε.Μ.Πολυτεχνείου Φυσικό κυρία Κ. Παπαπέτρου για τη φωτογραφία του Αχ. Παπαπέτρου.

Ευχαριστούμε τη Δ.Ε.Η. , την COSMOTE, την Ε.Μ.Υ. και την General. Electric για το φωτογραφικό υλικό που μας διέθεσαν

Στο εξώφυλλο:

Στην αριστερή εικόνα φαίνεται το πρώτο τρανζίστορ που έφτιαξαν οι John Bardeen, William Shockley και Walter Brattain, 1947.

Στη δεξιά εικόνα φαίνεται διάταξη λείζερ για έρευνα που σχετίζεται με τη δυνατότητα κατασκευής κβαντικών υπολογιστών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

3.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Εισαγωγή	3
Ιδανικό κύκλωμα LC	3
Μαθηματικό Συμπλήρωμα	4
Ποσοτική Μελέτη	5
Η Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας	7
Φθίνουσες Μηχανικές Ταλαντώσεις	9
Εξαναγκασμένες Μηχανικές Ταλαντώσεις - Συντονισμός	13
Συντονισμός	14
Φθίνουσες Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις	16
Ποσοτική Μελέτη	16
Εξαναγκασμένες Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις	19
Ποσοτική Μελέτη	19
Συντονισμός	20
Ενεργειακή Αντιστοιχία	21
Εφαρμογές Συντονισμού	22
Περιγραφή ενός αρμονικού μεγέθους με την χρήση περιστρεφόμενου διανύσματος	23
Σύνθεση Απλών Αρμονικών Ταλαντώσεων	24
Σύνθεση Πολλών Αρμονικών Ταλαντώσεων με πολλαπλάσιες συχνότητες. Ανάλυση Fourier	28
Ανακεφαλαίωση	33
Δραστηριότητες	34
Ερωτήσεις	36
Ασκήσεις - Προβλήματα	43

3.2 ΚΥΜΑΤΑ

Εισαγωγή	47
Αρμονικά Κύματα	47
Ισοφασικές Επιφάνειες - Μέτωπα Κύματος	49

Αρχή του Huygens	50
Ανάκλαση και Διάθλαση Κυμάτων	51
Ανάκλαση και Διάθλαση Κύματος διαδιδόμενου σε Χορδή με Ασυνέχεια	51
Ανάκλαση και Διάθλαση ενός Επιπέδου Κύματος	52
Νόμος Ανάκλασης	55
Νόμος Διάθλασης	56
Το Φαινόμενο της Ολικής Ανάκλασης	57
Περίθλαση	58
Επαλληλία και Συμβολή Κυμάτων	58
Επαλληλία Επίπεδων Αρμονικών Κυμάτων σε μια Διάσταση	59
Στάσιμα Κύματα	61
Στάσιμα Κύματα σε Χορδή	61
Στάσιμα Κύματα σε Αέριες Στήλες	65
Συμβολή	66
Το Πείραμα του Young	67
Προσδιορισμός της Θέσης των Κροσσών Συμβολής	68
Παραγωγή Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων	70
Ακτινοβολία	72
Ακτινοβολούμενη Ενέργεια Ηλεκτρικού Διπόλου	73
Λήψη Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων	74
Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα	75
Διάδοση Ραδιοκυμάτων	76
Τηλεπικοινωνίες και Ραδιοκύματα	78
Ανακεφαλαίωση	79
Δραστηριότητες	81
Ερωτήσεις	83
Ασκήσεις - Προβλήματα	88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΜΗΧΑΝΙΚΗ

4.1 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Εισαγωγή	95
Διάφορες Έννοιες	95

Διατήρηση της Έντασης και Εξίσωση Συνέχειας	97
Νόμος της Συνέχειας	97
Νόμος του Bernoulli	99
Θεώρημα του Torricelli	102
Πρακτικές Εφαρμογές του Νόμου του Bernoulli	104
Ιξώδες	107
Δυνάμεις Τριβής σε Σώματα Κινούμενα μέσα σε Ρευστά	109
Δυναμική Άνοση	111
Ανακεφαλαίωση	112
Δραστηριότητες	112
Ερωτήσεις	114
Ασκήσεις - Προβλήματα	118

4.2 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Εισαγωγή	121
Στερεό Σώμα - Κέντρο Μάζας	122
Στερεό Σώμα	122
Κέντρο Μάζας	122
Γωνιακή Ταχύτητα και Επιτάχυνση Στερεού Σώματος που Στρέφεται Γύρω από Σταθερό Άξονα	124
Περιστροφή με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση	126
Κινητική Ενέργεια λόγω Περιστροφής - Ροπή Αδράνειας	127
Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας - Θεώρημα Παράλληλων Αξόνων (ή Θεώρημα Steiner)	129
Απόδειξη του Θεωρήματος του Steiner	131
Κινητική Ενέργεια Στερεού Σώματος (Γενική Περίπτωση) που Εκτελεί Σύνθετη Κίνηση ...	133
Ροπή Δύναμης	136
Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο	136
Ροπή Δύναμης ως προς Άξονα	136
Θεμελιώδης Νόμος της Περιστροφικής Κίνησης Στερεού ή Νόμος του Νεύτωνα για την Περιστροφή Στερεού	139
Μέθοδος Μελέτης του Στερεού Σώματος	140
Ισορροπία Στερεού Σώματος - Κέντρο Βάρους	142

Κέντρο Βάρους	143
Έργο στην Περιστροφική Κίνηση	146
Η Στροφορμή και η Διατήρησή της	147
Στροφορμή Υλικού Σημείου	147
Στροφορμή Στερεού Σώματος περί Άξονα	148
Η Αρχή της Διατήρησης της Στροφορμής	149
Μαθηματικό Συμπλήρωμα: Γενίκευση του Νόμου του Νεύτωνα	159
Ανακεφαλαίωση	157
Δραστηριότητες	158
Ερωτήσεις	159
Ασκήσεις - Προβλήματα	163

4.3 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Εισαγωγή	171
Ελαστική και μη Ελαστική Κρούση δύο Σωμάτων	173
Εφαρμογές Κρούσεων στη μια Διάσταση	175
Επιβράδυνση Νετρονίου	176
Κρούσεις και Διατήρηση της Ενέργειας	179
Εφαρμογή Κρούσεων σε δύο Διαστάσεις	182
Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς	184
Μη Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς	185
Ευθύγραμμη Κίνηση με Σταθερή Διανυσματική Επιτάχυνση	186
Ομαλή Κυκλική Κίνηση	187
Εφαρμογές	188
Οι Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου	189
Μετασχηματισμός Ταχύτητας και Ορμής	189
Μετασχηματισμός Ενέργειας	192
Η Κίνηση του Κέντρου Μάζας, KM , ενός Συστήματος Σωμάτων	193
Σύστημα Αναφοράς Κέντρου Μάζας	194
Κινητική Ενέργεια Συστήματος Σωματίων	195
Εφαρμογή για την Περίπτωση δυο Σωματίων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους -	
Ανηγμένη Μάζα	196

Φαινόμενο Doppler	201
Εφαρμογές του φαινομένου Doppler	205
Ανακεφαλαίωση	207
Δραστηριότητες	208
Ερωτήσεις	210
Ασκήσεις - Προβλήματα	216

4.4 ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή	225
Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς και η Ταχύτητα του Φωτός	226
Αρχή της Νευτώνιας Σχετικότητας	226
Το Πείραμα των Michelson - Morley	229
Μαθηματική Ανάλυση του Πειράματος Michelson - Morley	231
Γεγονός στον Τετραδιάστατο Χωρόχρονο	233
Η Σχετικότητα του Ταυτόχρονου	234
Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz	236
Σχετικιστικοί Μετασχηματισμοί Ταχυτήτων	237
Εφαρμογή: Το Ταυτόχρονο	238
Σχετικιστική Ορμή - Σχετικιστική Ενέργεια	242
Μετασχηματισμός Μήκους	245
Μετασχηματισμός Χρονικού Διαστήματος	247
Μετασχηματισμός Σχετικιστικής Ορμής και Σχετικιστικής Ενέργειας	249
Μετασχηματισμός Ηλεκτρικού και Μαγνητικού Πεδίου	255
Επαλήθευση της Διαστολής του Χρόνου και Συστολής του Μήκους	258
Το Φαινόμενο των Διδύμων	260
Ο Γύρος του Κόσμου με Ατομικά Ρολόγια	262
Στοιχεία Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας	263
Τρία Είδη Μάζας	263
Ελεύθερη Πτώση	263
Αδρανειακές Δυνάμεις και Δυνάμεις Βαρύτητας	264
Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	266
Ιστορικά	270

Ανακεφαλαίωση	273
Δραστηριότητες	274
Ερωτήσεις	275
Ασκήσεις - Προβλήματα	279

4.5 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Εισαγωγή	285
Ακτινοβολία Μέλανος Σώματος	285
Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο	288
Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο - Πειραματικά Δεδομένα	288
Η Υπόθεση Φωτονίων του Einstein	291
Κυματοσωματιδιακός Δυϊσμός του Φωτός - Ενέργεια και Ορμή του Φωτονίου	292
Το Φαινόμενο Compton	295
Ατομικά Φάσματα - Συνθήκες Bohr (Ένθετο)	298
Υλικά Κύματα De Broglie	299
Η Κυματοσυνάρτηση Ψ και η Πυκνότητα Πιθανότητας	301
Εξίσωση Schrödinger	302
Έννοια του Πηγαδιού Δυναμικού	302
Σωματίδιο σε Πηγάδι Δυναμικού σε Άπειρο Βάθος	303
Σωματίδιο σε Πηγάδι Δυναμικού Πεπερασμένου Βάθους	306
Κβαντικό Φαινόμενο Σήραγγας	308
Ορθογώνιο Φράγμα Δυναμικού	308
Εφαρμογές του Φαινομένου Σήραγγας	309
Αρχή Αβεβαιότητας	310
Πιθανότητες (Ένθετο)	314
Ημιαγωγοί (Ένθετο)	315
Χρονικό της Ανακάλυψης της Κβαντομηχανικής	319
Ανακεφαλαίωση	324
Δραστηριότητες	325
Ερωτήσεις	326
Ασκήσεις - Προβλήματα	332

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Ομάδα Συγγραφής αυτού του βιβλίου Φυσικής προσπάθησε να ανταποκριθεί, όσο ήταν δυνατό, στο Πρόγραμμα για τη Φυσική που εκπονήθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Ένα εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι: γιατί πρέπει να μαθαίνουν οι μαθητές Φυσική; Η απάντηση που δίνεται είναι: Η Φυσική Επιστήμη μας βοηθά να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας. Ακόμη, η Φυσική Επιστήμη αντιπροσωπεύει ένα τρόπο οργάνωσης της γνώσης που συνεισφέρει σημαντικά στην πολιτισμική και πνευματική ανάπτυξη της κοινωνίας. Η Φυσική Επιστήμη και η Τεχνολογία συνεισφέρουν στην παραγωγή αγαθών. Πρέπει, επομένως, τα σχολεία να παρέχουν τις βασικές επιστημονικές και τεχνολογικές ιδέες, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ επιστήμης και τεχνολογίας.

Η διδασκαλία της Φυσικής Επιστήμης πρέπει να συνδέεται στενά με τις εφαρμογές της στην καθημερινή ζωή και στη Βιομηχανία. Η Επιστήμη και η Τεχνολογία είναι στενά συνδεδεμένες και η κατανόηση των επιστημονικών εννοιών μπορεί να γίνεται και με τη μελέτη των τεχνολογικών τους εφαρμογών. Η κατανόηση της σχέσης Επιστήμης και Τεχνολογίας πρέπει να είναι στους στόχους του προγράμματος Φυσικής και, γενικότερα, των Φυσικών Επιστημών.

Το βιβλίο αυτό περιέχει τα συγκεκριμένα κεφάλαια της Φυσικής και με την ειδική διάταξη που προτείνει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Το κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει εισαγωγή, κύριο κομμάδι, παραδείγματα λυμένων προβλημάτων, ανακεφαλαίωση, δραστηριότητες, προβλήματα. Περιλαμβάνονται επίσης διάφορα ένθετα για εμπλουτισμό των γνώσεων των μαθητών σχετικά με την ιστορία του θέματος ή με πιο προχωρημένες γνώσεις ή με την σχετική τεχνολογία. Το πρόγραμμα αυτό της Φυσικής περιέχει και εργαστηριακό οδηγό. Έγινε προσπάθεια, ώστε οι δραστηριότητες που αφορούν σε πειράματα αλλά και τα πειράματα, γενικώς, να μπορούν να γίνουν με, όσο το δυνατό, απλά μέσα και χωρίς μεγάλα έξοδα. Έχουν προστεθεί παραρτήματα που σχετίζονται με τις μονάδες του Διεθνούς Συστήματος, σταθερές, σφάλματα, κ.τ.λ. ώστε να έχει ο διδάσκων και ο μαθητής ένα σημείο αναφοράς στα ανωτέρω θέματα.

Πρέπει να τονίσουμε ότι γίνεται κάποια προσπάθεια μερικές φορές, ακόμη και με επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων και προβλημάτων, να βλέπει ο μαθητής τη σχέση της Φυσικής με την Τεχνολογία και τον γύρω κόσμο. Παρ' όλες τις δυσκολίες που παρουσιάζει το εγχείρημα, πρέπει να γίνονται πειράματα από τους διδάσκοντες και τους μαθητές.

Έτσι οι μαθητές αποκτούν “δεξιότητες” με τα όργανα, αλλά και κατανοούν τους νόμους της Φύσης και την Τεχνολογία καλύτερα. Γενικώς, τα πειράματα, αλλά και η αναφορά σε εφαρμογές ή τις επιπτώσεις των βασικών νόμων της Φυσικής (π.χ. Κβαντομηχανικής, Σχετικότητας) την απομυθοποιούν και διώχνουν το φόβο για τη Φυσική, που έχουν πολλοί άνθρωποι μη ειδικοί.

Το μάθημα για να τραβήξει τους μαθητές πρέπει να είναι ενδιαφέρον και όχι τρομερά δύσκολο. Αυτό εξαρτάται από το βιβλίο αλλά και από τον διδάσκοντα. Το βιβλίο και το πρόγραμμα διδασκαλίας πρέπει να είναι το βοήθημα, αλλά ο διδάσκων πρέπει να αυτενεργεί και να βρίσκει τον κατάλληλο τρόπο παρουσίασης για τους συγκεκριμένους μαθητές που έχει κάθε φορά.

Ελπίδα μας είναι να μην αποτελέσει αυτό το βιβλίο, όπως και κάθε άλλο βιβλίο, δόγμα για την Φυσική στη Μέση Εκπαίδευση “Timeo Hominem unius libri”, “Φοβού τον άνθρωπο του ενός βιβλίου” (Θωμάς ο Ακινάτης)*. Στόχος είναι, το βιβλίο αυτό μαζί με άλλα να γίνει βοήθημα αλλά και κέντρισμα για πιο πέρα

* Από τον Πρόλογο της Ελληνικής Έκδοσης του Βιβλίου Φυσικής ΟΗΑΝΙΑΝ, μετάφραση Α. ΦΙΛΙΠΠΑΣ.

αναζητήσεις κυρίως για τους μαθητές. Είναι καλό να δοθεί η ευκαιρία σύντομα, να διορθωθούν ελλείψεις ή υπερβολές του βιβλίου, ώστε να προσαρμοστεί όσο γίνεται στις απαιτήσεις και στο επίπεδο της Μέσης Εκπαίδευσης. Οι συνάδελφοι διδάσκοντες, αλλά και οι μαθητές καλό είναι να υποδείξουν βελτιώσεις που το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και η Ομάδα Συγγραφέων να λάβει υπόψη της. Η βελτίωση και προσαρμογή κάθε βιβλίου πρέπει να είναι μια συνεχής διαδικασία. Παροτρύνουμε τους διδάσκοντες και διδασκόμενους να κάνουν πειράματα. Η Φυσική είναι μελέτη της Φύσης και με τα πειράματα μελετούμε τη φύση με ελεγχόμενο τρόπο.

Προσπαθήσαμε να είμαστε όσο γίνεται σε συμφωνία με την ορολογία του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων (SI) και κάνουμε μια απλή εισαγωγή για τα συστήματα μονάδων και ιδιαίτερα το SI. Όροι που υπάρχουν ακόμη στην Ελληνική Βιβλιογραφία έχουν απονίσει ή εξαλειφθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Υπάρχουν αδυναμίες στην Ελληνική αλλά και στη ξένη ορολογία, οι οποίες όμως θέλουν χρόνο για ν'αλλάξουν. Ο όρος "μάζα ηρεμίας" δεν χρησιμοποιείται στη μοντέρνα βιβλιογραφία σχεδόν καθόλου, όπως και ο όρος διηλεκτρική σταθερά. Η ορολογία δεν είναι σχολαστικισμός, θέλει να πει κάτι. Όταν στα Αγγλικά λένε *resistance* και *reactance* θέλουν να δηλώσουν ότι στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια, ενώ στη δεύτερη περίπτωση απλώς το κύκλωμα αντιδρά, "αντιστέκεται", στη διέλευση ρεύματος χωρίς να γίνεται κατανάλωση ενέργειας. Η ποσότητα ύλης εκφράζεται σε mol (μολ) μορίων, ατόμων, ηλεκτρονίων ή γενικώς διαφόρων δομικών λίθων που το είδος τους πρέπει να αναφέρεται. Στα ελληνικά χρησιμοποιείται, ατυχώς, ο όρος γραμμομόριο που προέρχεται από τον παλιό όρο για μόρια. Θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε τον όρο μολ (στα ελληνικά), αλλά θα είχαμε πρόβλημα στο επίθετο (*molar*) μολικό(;), ίσως θα μπορούσαμε να το πούμε μολίδιο. Χρησιμοποιούμε τον όρο αντιστάτη για τον όρο *resistore*, αλλά και τον επικρατέστερο όρο, στα ελληνικά, αντίσταση. Δεν δίνουμε λύσεις στο πρόβλημα της ορολογίας, απλώς το θέτουμε. Πιστεύουμε ότι πρέπει να δοθεί έμφαση στους αριθμητικούς υπολογισμούς, με κατανόηση της σημασίας των σημαντικών ψηφίων στα αποτελέσματα. Ξανατονίζουμε ότι προσπαθήσαμε να έχουμε παραδείγματα και προβλήματα από τον πραγματικό φυσικό κόσμο, όχι μόνο "φανταστικά" θέματα. Η χρήση ρεαλιστικών προβλημάτων κάνει το μαθητή να καταλάβει συγκεκριμένα φαινόμενα του φυσικού κόσμου και διαδικασίες στις οποίες στηρίζονται διάφορες πραγματικές διατάξεις και κατασκευές που μερικές μπορεί να έχει δει ή χρησιμοποιήσει. Μαθαίνει πώς είναι η φύση όχι πώς θα μπορούσε να είναι. Προσπαθήσαμε, επίσης, να έχουμε ασκήσεις με δεδομένα όχι μόνο του τύπου $u = 5\sqrt{2}/8 \text{ m/s}$, αλλά και του τύπου $u = 3,24 \text{ m/s}$. Η Φύση, δυστυχώς, δεν είναι τόσο "καλή" μαζί μας ώστε να μπορούμε να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς με στρογγυλά αποτελέσματα, ακριβώς. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να κάνουν αριθμητικούς υπολογισμούς με υπολογιστές, με το χέρι ή και κατ' εκτίμηση.

Πρέπει να τονίσουμε ότι γενικώς το πρόβλημα των σφαλμάτων είναι πολύπλοκο και δεν λύνεται με τους απλοϊκούς κανόνες που δίνουμε στα Παραρτήματα για τις περιπτώσεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης. Θα μπορούσαμε να πουμε ότι στα περισσότερα προβλήματα η ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα είναι το πολύ 3 σημαντικά ψηφία.

Ένα άλλο θέμα που τονίζουμε κάπως περισσότερο, από ό,τι γίνεται συνήθως, είναι η Διαστατική Ανάλυση. Είναι ένας σημαντικός τομέας με προχωρημένα μαθηματικά. Εμείς δίνουμε μερικά στοιχεία χρήσιμα στα πλαίσια της Γενικής Φυσικής. Παρ' όλο που προσπαθούμε να είμαστε σύμφωνοι με την πιο νέα ορολογία πολλές φορές αυτό δεν είναι δυνατόν γιατί η νέα ορολογία δεν έχει διαδοθεί αρκετά. Ένα παράδειγμα είναι οι κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Από το 1984 η IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry, Διεθνής Ένωση Καθαρής και Εφαρμοσμένης Χημείας), ενέκρινε και δημοσίευσε την υπόδειξη η οποία υποκινήθηκε από την *Comimission on Thermodynamics* (Επιτροπή για την Θερμοδυναμική), ότι η συμβατική κανονική πίεση για τη Θερμοδυναμική πρέπει να αλλάξει από την παραδοσιακή 1 atm (101,325 kPa) σε 100 kPa (1 bar). Αυτό οδηγεί στο ότι ο γραμμομοριακός όγκος από 22,4 L γίνεται 22,7 L.

Σύμφωνα με το νέο ορισμό η κανονική θερμοκρασία εξακολουθεί να είναι 273,15 K (0 °C), περίπου 273 K.

Η πίεση των 101,325 k Pa τώρα πρέπει να λέγεται κανονική ατμόσφαιρα.

Εμείς ακολουθούμε τον παλιό ορισμό του βάρους. Κανονικά εισέρχεται το σύστημα αναφοράς. Συγκεκριμένα, βάρος είναι η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο σώμα ώστε να ακινητεί ως προς το σύστημα αναφοράς, π.χ. μέσα στον περιστρεφόμενο δορυφόρο το βάρος είναι μηδέν. Στην επιφάνεια της Γης πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και η περιστροφή της Γης. Αυτό από πολλούς λέγεται φαινόμενο βάρος και το πραγματικό βάρος ταυτίζεται με την έλξη της βαρύτητας. Εμείς εδώ, όπως και πολλά βιβλία Γενικής Φυσικής, ακολουθούμε τον ορισμό της ταύτισης του βάρους με τη δύναμη της βαρύτητας.

Μια άλλη περίπτωση είναι ο ορισμός της ηλεκτρικής ροής. Ορίζεται ως το γινόμενο $\Psi = \epsilon_0 EA \cos\phi$, δηλαδή είναι η ροή του μεγέθους $\epsilon_0 \vec{E}$ που λέγεται μετατόπιση. Η ροή του μεγέθους \vec{E} είναι Ψ_E .

Η συνολική ροή, $\Psi_{ολ}$, του $\epsilon_0 \vec{E}$ από την επιφάνεια που περικλείει το φορτίο q είναι απλώς q και όχι q/ϵ_0 που είναι η ροή του \vec{E} . Παρ' όλα αυτά χρησιμοποιούμε τον ορισμό που έχει επικρατήσει στη Γενική Φυσική η οποία μάλιστα θεωρεί μόνο ηλεκτρική ροή του \vec{E} . Το σύμβολο που χρησιμοποιούμε είναι το Φ_E σε

αντιδιαστολή με το Φ που είναι η μαγνητική ροή του μαγνητικού πεδίου \vec{B} .

Τελειώνοντας τονίζουμε ότι, η Φυσική είναι μια βασική επιστήμη που βοηθά τους ασχολούμενους γενικώς με τις Θετικές Επιστήμες και την Τεχνολογία, καθώς και κάθε άνθρωπο να καταλαβαίνει, σε κάποιο βαθμό, τον κόσμο γύρω του και τις συσκευές που τον περιστοιχίζουν. Στο μέλλον η κβαντομηχανική πιθανόν θα παίξει, ακόμη μεγαλύτερο, άμεσο, ρόλο σε νέους κβαντικούς υπολογιστές και νέα ηλεκτρονικά, στην κατανόηση της λειτουργίας του εγκεφάλου και σε πολλά άλλα τεχνολογικά θέματα που ενδιαφέρουν όλους. Γενικώς, η Φυσική εμπλέκεται παντού, από τα φαινόμενα μεγάλης κλίμακας, κατανόηση του σύμπαντος, μέχρι τα φαινόμενα του μικρόκοσμου, κατανόηση των κούρκ και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων.

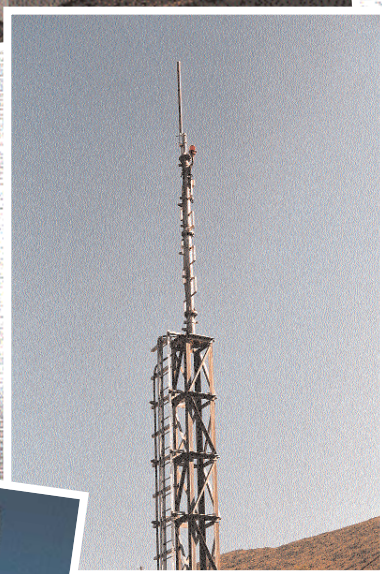
Με την ελπίδα ότι βάζουμε έν μικρό λιθαράκι στην προσπάθεια για καλύτερευση της εκπαίδευσης στη Φυσική παραδίνουμε το παρόν πόνημα στους Έλληνες δασκάλους της Φυσικής και σε εκείνους τους μαθητές με περισσότερο ενδιαφέρον για τη Φυσική.

Για την ομάδα συγγραφής

Ο υπεύθυνος της ομάδας

Εμμ. Δρης

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3



ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΚΥΜΑΤΑ

3.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα σώμα μάζας m το οποίο είναι στερεωμένο στο άκρο ελατηρίου (Σχ. 3.1), όταν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του, εκτελεί ένα είδος περιοδικής κίνησης. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **αρμονική ταλάντωση**, διότι η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου. Το σύστημα “μάζας-ελατήριο” λέμε ότι είναι ένας **απλός αρμονικός ταλαντωτής**. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι η δύναμη είναι συντηρητική και ίση με $-kx$, όπου x η απομάκρυνση και k σταθερά, ανεξάρτητη του πλάτους ταλάντωσης και της ταχύτητας.

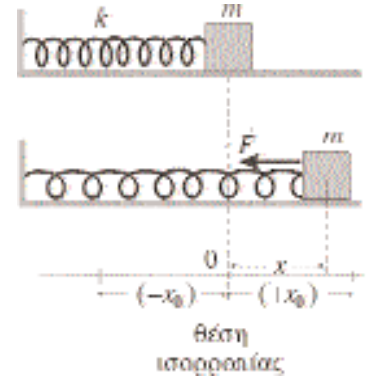
Η μεγάλη σπουδαιότητα της μελέτης του αρμονικού ταλαντωτή συνίσταται στο ότι για μεγάλο πλήθος φυσικών φαινομένων αποτελεί ακριβές ή προσεγγιστικό πρότυπο. Η πλέον συνηθισμένη περίπτωση απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι αυτή κατά την οποία ένα σώμα εκτρέπεται ελαφρώς από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Σαν παράδειγμα, αναφέρουμε την κίνηση δορυφόρου γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 (Σχ. 3.2). Αν ο δορυφόρος εκτραπεί κατά $\Delta r = r - r_0$, όπου r η απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Γης και r_0 η ακτίνα της ευσταθούς κυκλικής τροχιάς, τότε η κίνησή του είναι απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την κυκλική τροχιά.

Αρμονικές ταλαντώσεις επίσης έχουμε σε ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο από πυκνωτή C και πηνίο L , που ονομάζονται **ηλεκτρικές ταλαντώσεις**. Η μελέτη του κυκλώματος L, C γίνεται ακολούθως

ΙΔΑΝΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ LC

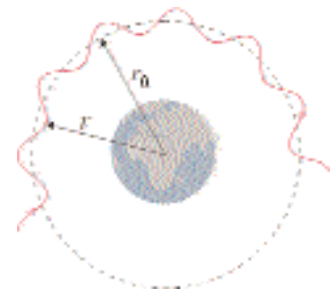
Θεωρούμε κύκλωμα το οποίο αποτελείται από ένα ιδανικό πυκνωτή χωρητικότητας C , ένα ιδανικό (με μηδενική ωμική αντίσταση) πηνίο αυτεπαγωγής L και ένα διακόπτη συνδεδεμένα σε σειρά. Η συνολική ωμική αντίσταση των αγωγών είναι αμελητέα και λαμβάνεται ίση με μηδέν. Έστω ότι, όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με αρχική τιμή φορτίου Q_m .

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε το διακόπτη (Σχ. 3.3), οπότε αρχίζει να κυκλοφορεί ρεύμα στο κύκλωμα, λόγω της εκφόρτισης του πυκνωτή. Το ρεύμα αυξάνεται σταδιακά διότι το πηνίο αντιστέκεται στην απότομη αύξησή του, λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής. Η αύξηση του ρεύματος συνεχίζεται μέχρις ότου ο πυκνωτής εκφορτιστεί πλήρως, οπότε και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του I_m . Ακολούθως το ρεύμα μειώνεται πάλι σταδιακά και όχι απότομα, διότι συντηρείται λόγω αυτεπαγωγής, ενώ συγχρόνως ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται με αντίθετη πολικότητα από την αρχική. Όταν το ρεύμα μηδενιστεί ο πυκνωτής έχει φορτιστεί πλήρως αποκτώντας φορτίο Q_m . Στη συνέχεια ακολουθεί το ίδιο φαινόμενο με αντίθετη φορά του ρεύματος έως ότου το κύκλωμα επανέλθει στην αρχική κατάσταση που βρισκόταν την χρονική στιγμή $t = 0$. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται διαρκώς. Αυτό το περιοδικό φαινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ταλάντωση**.



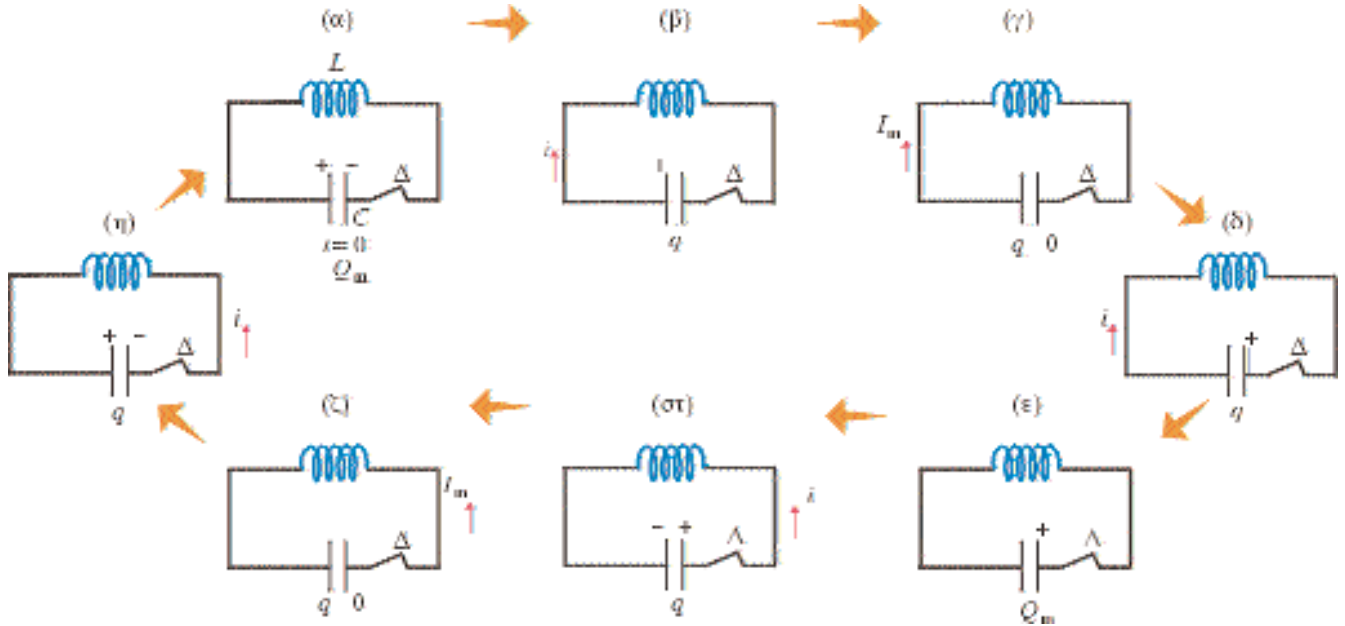
ΣΧΗΜΑ 3.1

Το σύστημα μάζας ιδανικού ελατηρίου αποτελεί απλό αρμονικό ταλαντωτή.



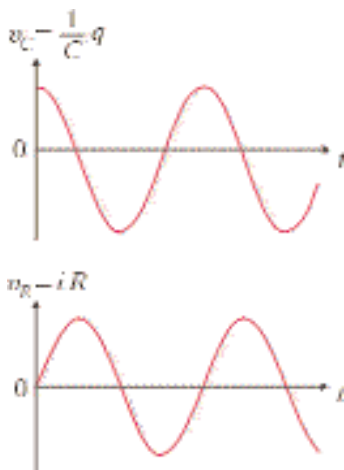
ΣΧΗΜΑ 3.2

Μικρή εκτροπή δορυφόρου από την κυκλική τροχιά οδηγεί σε ταλάντωση.



ΣΧΗΜΑ 3.3

Ηλεκτρικό κύκλωμα L, C εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις.



ΣΧΗΜΑ 3.4

Η μορφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή και της αντίστασης R που παρατηρούνται με παλμογράφο.

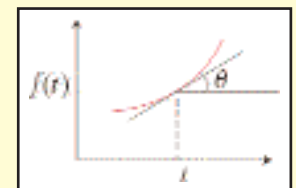
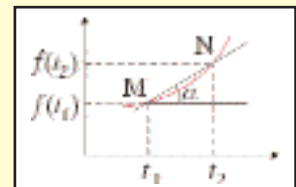
Μπορούμε να παρατηρήσουμε πειραματικά τις μεταβολές του φορτίου q του πυκνωτή και του ρεύματος i με την βοήθεια παλμογράφου. Παρατηρούμε στον παλμογράφο την τάση του πυκνωτή v_C , η οποία είναι ανάλογη του q , δηλαδή $v_C = \frac{1}{C} q$. Για την μελέτη του ρεύματος i τοποθετούμε στο κύκλωμα αντιστάτη με πολύ μικρή αντίσταση R και από την μορφή της τάσεως v_R στα άκρα του έχουμε την αντίστοιχη μορφή του ρεύματος $i = \frac{v_R}{R}$. Τα αποτελέσματα είναι αυτά του σχήματος 3.4.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Έστω μια συνάρτηση $f(t)$, τότε για μεταβολή της μεταβλητής t κατά $\Delta t = t_2 - t_1$, η αντίστοιχη μεταβολή της συνάρτησης $f(t)$ είναι $\Delta f = f(t_2) - f(t_1)$. Καλούμε μέσο ρυθμό μεταβολής της $f(t)$ στο διάστημα (t_1, t_2) την ποσότητα,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Γεωμετρικά έχουμε ότι $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ είναι η κλίση (βαθμίδα) της ευθείας MN με τον άξονα των t , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η παράγωγος $f'(t) = \frac{df}{dt}$ της συνάρτησης $f(t)$ είναι το όριο του

ρυθμού μεταβολής $\frac{\Delta f}{\Delta t}$, όταν το Δt τείνει στο μηδέν.

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Το $f'(t) = \frac{df}{dt}$ είναι η κλίση, ως προς τον άξονα των t , της εφα-

πτομένης ευθείας στο γράφημα της $f(t)$.

Με βάση τον ορισμό της παραγώγου μπορούμε σε μια περιοχή του t για μικρές μεταβολές Δt να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την μεταβολή Δf με την σχέση.

$$\Delta f \approx f'(t) \Delta t \quad \text{όταν} \quad |\Delta t| \ll 1$$

Με τη βοήθεια του ορισμού υπολογίζονται οι παράγωγοι διαφόρων συναρτήσεων. Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουμε:

$$\frac{d \sin(\omega t + \varphi)}{dt} = \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και}$$

$$\frac{d \cos(\omega t + \varphi)}{dt} = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Το σώμα μάζας m το οποίο είναι στερεωμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k του σχήματος 3.1, όταν εκτραπεί κατά x από τη θέση ισορροπίας του δέχεται δύναμη επαναφοράς από το ελατήριο $F = -kx$.

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

οπότε

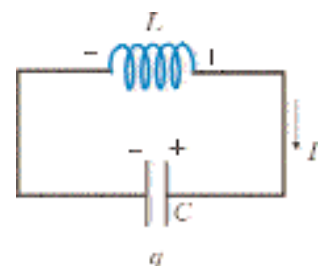
$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (3.1)$$

Στο κύκλωμα LC του σχήματος 3.5, η τάση στα άκρα του πυκνωτή v_C (πτώση τάσης στον πυκνωτή) είναι ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πηνίο, δηλαδή $v_C = \mathcal{E}_L$.

Λόγω των

$$v_C = \frac{q}{C} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt},$$

έχουμε



ΣΧΗΜΑ 3.5

Ιδανικό κύκλωμα LC

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} \quad \text{ή}$$

$$L \frac{di}{dt} = -\frac{1}{C}q \tag{3.2}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (3.1) και (3.2) είναι ανάλογες σύμφωνα με την αντιστοίχιση των παρακάτω φυσικών μεγεθών.

$$\left\{ \begin{array}{l} q \leftrightarrow x \\ L \leftrightarrow m \\ \frac{1}{C} \leftrightarrow k \\ i \leftrightarrow v \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

Η λύση της εξίσωσης (3.1) οδηγεί σε αρμονικές κινήσεις της μορφής

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \text{όπου} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Επομένως, κατ' αντιστοιχία, με τη βοήθεια των σχέσεων (3.3) έχουμε

$$q = Q_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{3.4}$$

όπου q : η στιγμιαία τιμή του φορτίου του πυκνωτή

Q_m : η μέγιστη τιμή του φορτίου

ω : η κυκλική συχνότητα

και φ_0 : η αρχική φάση, η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παραγωγίζοντας την (3.4) έχουμε

$$i = \frac{dq}{dt} = -Q_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή}$$

$$i = -I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{3.5}$$

όπου

$$I_m = Q_m \omega \quad \text{ή} \quad I_m = Q_m \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{3.6}$$

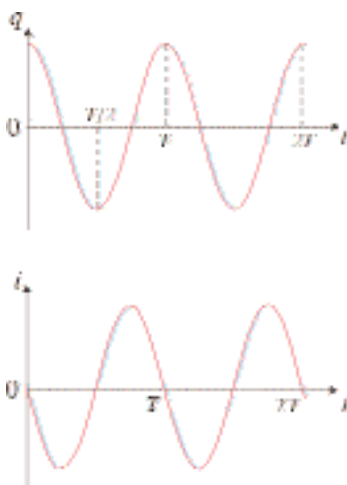
Εάν θεωρήσουμε για απλούστευση ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ κατά την οποία κλείνουμε το διακόπτη, ο πυκνωτής έχει φορτίο Q_m τότε $\varphi_0 = 0$ και οι (3.4) και (3.5) παίρνουν τη μορφή

$$q = Q_m \cos \omega t$$

$$i = -I_m \sin \omega t \tag{3.7}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των ποσοτήτων q και i , συναρτήσεως του χρόνου, φαίνονται στο σχήμα 3.6.

Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι $T = \frac{2\pi}{\omega}$, άρα



ΣΧΗΜΑ 3.6

Γραφικές παραστάσεις των ποσοτήτων q και i σε ιδανικό κύκλωμα

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (3.8)$$

Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Για το ταλαντούμενο σύστημα σώματος ελατηρίου η δυναμική και η κινητική ενέργεια είναι αντίστοιχα

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{και} \quad K = \frac{1}{2} m v^2$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.3) οι αντίστοιχες ποσότητες των U και K για το κύκλωμα LC είναι

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2, \text{ η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και}$$

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2, \text{ η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.}$$

Αντικαθιστώντας τα q, i από τις σχέσεις (3.7) έχουμε

$$\left. \begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q_m^2 \cos^2 \omega t \\ U_B &= \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι

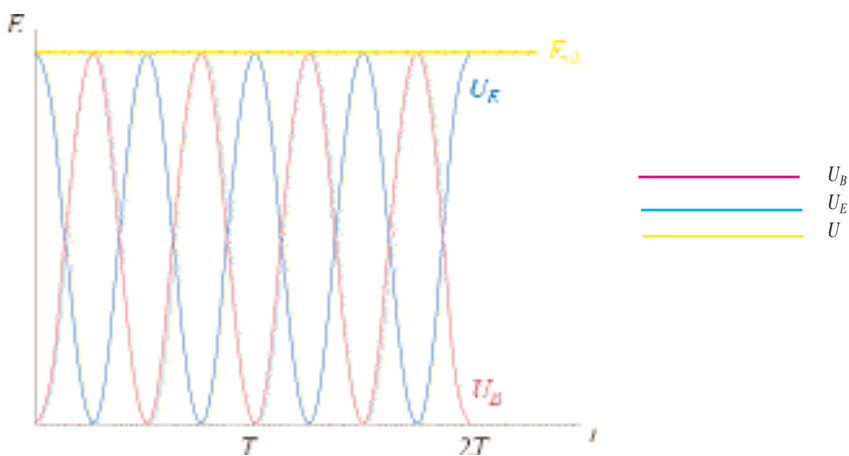
$$U = U_E + U_B \quad \text{ή}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

Με την βοήθεια των (3.9) και (3.6) έχουμε

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \quad (3.10)$$

Άρα η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ποσότητα σταθερή με το χρόνο, συμπεράσμα αναμενόμενο με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας (σχ. 3.7).



ΣΧΗΜΑ 3.7

Γραφικές παραστάσεις ενεργειών.

Παράδειγμα 3-1

Σε ιδανικό κύκλωμα, το οποίο εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 10 \mu\text{F}$ και το πηνίο παρουσιάζει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0,10 \text{ H}$. Αν ο πυκνωτής έχει αρχικά φορτιστεί από πηγή με $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ και θεωρήσουμε ως αρχή των χρόνων τη στιγμή κατά την οποία ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, να βρείτε: α) Τις εκφράσεις του ρεύματος και του φορτίου συναρτήσει του χρόνου, β) Την χρονική στιγμή η ενέργεια είναι για πρώτη φορά μοιρασμένη εξ ίσου σε ηλεκτρική και μαγνητική;

Απάντηση

α) Επειδή ο πυκνωτής φορτίστηκε σε $v = 100 \text{ V}$ έχει αρχικό φορτίο

$$Q_m = Cv \text{ ή } Q_m = 10 \times 10^{-6} \times 10^2 \text{ C ή } Q_m = 1,0 \times 10^{-3} \text{ C}$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,10 \times 10 \times 10^{-6}}} \text{ rad/s άρα } \omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

Επομένως η μέγιστη τιμή του ρεύματος είναι

$$I_m = \omega Q_m \text{ ή } I_m = 1,0 \times 10^3 \times 10^{-3} \text{ A ή } I_m = 1,0 \text{ A}$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις είναι, σύμφωνα με τις εκφράσεις (3.7)

$$q = 10^{-3} \cos(10^3 t), \text{ (} q \text{ σε C, } t \text{ σε s)}$$

$$i = -1 \sin(10^3 t), \text{ (} i \text{ σε A, } t \text{ σε s)}$$

β) Θέλουμε $U_B = U_E$, είναι $U_B + U_E = U$ άρα $2U_B = U$

$$\text{Συνεπώς } 2 \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \text{ ή } i = \pm \frac{I_m \sqrt{2}}{2}$$

Κάνοντας την αναπαράσταση του μεγέθους $i = -I_m \sin \omega t = 1 \sin(\omega t + \pi)$ με στρεφόμενο διάνυσμα (φάσορας), παρατηρούμε ότι η λύση που ζητάμε παρίσταται με τη θέση A του στρεφόμενου διανύσματος (Σχ. 3.8). Είναι

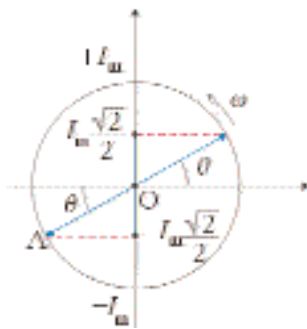
$$\sin \theta = \frac{\left| -I_m \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{I_m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως,

$$\omega t_1 = \theta \text{ ή } t_1 = \frac{\theta}{\omega} \text{ ή } t_1 = \frac{\pi/4}{10^3} \text{ s ή } t = \frac{\pi}{4} \times 10^{-3} \text{ s} = 7,9 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Παράδειγμα 3-2

Για ένα ταλαντούμενο σύστημα LC , να βρείτε την έκφραση του ρεύματος σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή. Κατόπιν να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης σε άξονες $i-q$.



ΣΧΗΜΑ 3.8

Απάντηση

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το κύκλωμα έχουμε ότι

$$U_E + U_B = E \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q_m^2 \quad \text{ή}$$

$$i^2 = \frac{1}{LC} (Q_m^2 - q^2), \quad \text{όμως} \quad \frac{1}{LC} = \omega^2 \quad \text{άρα}$$

$$i^2 = \omega^2 (Q_m^2 - q^2) \quad \text{ή} \quad i = \pm \omega \sqrt{Q_m^2 - q^2}$$

Επίσης από την έκφραση $i^2 = \omega^2 (Q_m^2 - q^2)$ έχουμε

$$i^2 = \omega^2 Q_m^2 - \omega^2 q^2 \quad \text{ή}$$

$$i^2 + \omega^2 q^2 = \omega^2 Q_m^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{i^2}{\omega^2 Q_m^2} + \frac{\omega^2 q^2}{\omega^2 Q_m^2} = \frac{\omega^2 Q_m^2}{\omega^2 Q_m^2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{i^2}{I_m^2} + \frac{q^2}{Q_m^2} = 1$$

Η τελευταία σχέση προσπάνει έλλειψη με τον ένα ημιάξονα Q_m και τον άλλο I_m . Άρα η γραφική παράσταση είναι αυτή του σχήματος 3.9.

Σε ποιά περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση είναι κύκλος;

Η απάντηση είναι σε όλες τις περιπτώσεις και σε καμιά, διότι τα μεγέθη i και q δεν έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Επομένως μπορούμε πάντα να παίρνουμε την μονάδα των αξόνων q και i , ώστε γεωμετρικά τα μήκη Q_m και I_m να είναι ίσα και μ' αυτό τον τρόπο να προκύπτει κύκλος.



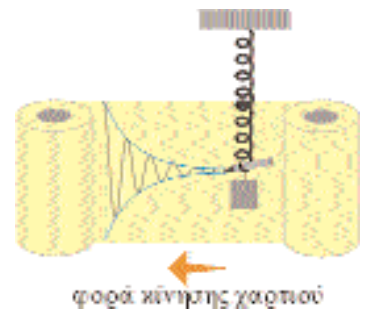
ΣΧΗΜΑ 3.9

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Η κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή περιγράφεται με μια αρμονική συνάρτηση του χρόνου, στην οποία το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό. Παρατηρώντας ένα πραγματικό σύστημα που ταλαντώνεται, βλέπουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται βαθμιαία με το χρόνο μέχρι που μηδενίζεται.

Αυτές οι ταλαντώσεις, στις οποίες το πλάτος μειώνεται με το χρόνο, ονομάζονται φθίνουσες ταλαντώσεις.

Για να μελετήσουμε τον τρόπο μείωσης του πλάτους μιας ταλάντωσης, εκτελούμε το πείραμα του σχήματος 3.10. Θέτοντας σε ταλάντωση το σύστημα “σώμα-ελατήριο”, καταγράφεται σε ένα κινούμενο με σταθερή ταχύτητα χαρτί η θέση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, με τη βοήθεια μιας ακίδας η οποία είναι στερεωμένη στο σώμα. Παρατηρούμε μείωση του πλάτους λόγω απώλειας ενέργειας της ταλάντωσης, οι οποίες οφείλονται στις μη διατηρητικές δυνάμεις (δυνάμεις τριβής), που εμφανίζονται στο σώμα λόγω



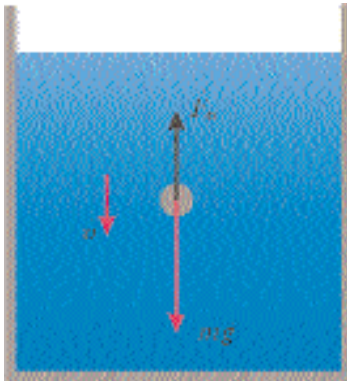
ΣΧΗΜΑ 3.10

Μελέτη φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης.

αντίστασης του αέρα και στη μη ιδανικότητα του ελατηρίου. Και στις δύο περιπτώσεις η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή μετατρέπεται σε θερμοδυναμική (εσωτερική) ενέργεια, αυξάνεται δηλαδή η εσωτερική ενέργεια του ελατηρίου καθώς και του σώματος και του αέρα.

Αγνοούμε τις απώλειες στο ελατήριο και θεωρούμε την αντίσταση από τον αέρα ανάλογη της ταχύτητας v . Η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση τότε, είναι

$$F_{\alpha} = -bv \tag{3.11}$$



ΣΧΗΜΑ 3.11

Κατά την κίνηση σφαίρας σε υγρό η δύναμη που αντιστέκεται είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος.

Η τελευταία σχέση απορρέει από την μελέτη της κίνησης ενός στερεού σ'ένα ρευστό, και όπως θα δούμε σε αντίστοιχο κεφάλαιο παρακάτω, είναι μια καλή προσέγγιση όταν οι ταχύτητες είναι μικρές. Το b εξαρτάται από το ιξώδες του ρευστού (στην συγκεκριμένη περίπτωση τον αέρα) και από το σχήμα του σώματος που κινείται. Είναι μια θετική ποσότητα και ονομάζεται συντελεστής απόσβεσης.

Επομένως για τον ταλαντωτή μας έχουμε

$$F_{ολ} = F + F_{\alpha}$$

όμως

$$F = -kx$$

και

$$F_{\alpha} = -bv$$

οπότε

$$F_{ολ} = -kx - bv$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$ma = F_{ολ}$$

άρα

$$ma = -kx - bv \tag{3.12}$$

Η κίνηση που προκύπτει είναι ταλάντωση, της οποίας το πλάτος μειώνεται με το χρόνο. Από τη λύση της (3.12) παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} x &= A e^{-\lambda t} \cos(\omega' t + \varphi) \\ \lambda &= \frac{b}{2m} \\ \omega' &= \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \end{aligned} \right\} \tag{3.13}$$



ΣΧΗΜΑ 3.12

Για μικρές ταχύτητες πτώσης η δύναμη που δέχεται από τον αέρα το αλεξίπτωτο είναι ανάλογη της ταχύτητάς του.

όπου ω' η κυκλική συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης,

και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η **κυκλική ιδιοσυχνότητα** ή φυσική συχνότητα του

συστήματος και είναι η **κυκλική συχνότητα**, με την οποία θα εκτελούσε ταλάντωση το σύστημα, αν δεν υπήρχαν τριβές.

Η ποσότητα A είναι το **αρχικό πλάτος** της ταλάντωσης. Δηλαδή, αν ο ταλαντωτής είχε αρχική ενέργεια $U_{αφ}$, το A προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{2}k A^2 = U_{αφ} \tag{3.14}$$

Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t = nT$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$ δίνεται από τη σχέση

$$A_t = A e^{-\lambda t} \tag{3.15}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της απομακρύνσεως x , συναρτήσει του χρόνου t , για διάφορες τιμές του b ($b_1 < b_2 < b_3 < b_4$) προκύπτουν με τη βοήθεια της (3.13) και είναι αυτές του σχήματος 3.13.

Από τις σχέσεις (3.13) εξάγονται τα εξής συμπεράσματα.

α) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο ($a_t = A e^{-\lambda t}$). Το πόσο γρήγορα μειώνεται εξαρτάται από τη σταθερά b . Για μεγαλύτερες τιμές της b η απόσβεση γίνεται ταχύτερα.

β) Η περίοδος

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

εξαρτάται από τη σταθερά b και μάλιστα, όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά b , τόσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος. Αυστηρώς μαθηματικά η $x(t)$ δεν είναι περιοδική συνάρτηση [$x(t+T) \neq x(t)$ γενικά], όμως θεωρούμε ότι η περιοδικότητα προκύπτει από τον αρμονικό όρο $\cos(\omega't + \varphi)$ και ότι το πλάτος απλώς μειώνεται με το χρόνο. Η κίνηση ονομάζεται **ψευδοπεριοδική** και το T' ονομάζεται **ψευδοπερίοδος**. Αυτά έχουν νόημα, αν η απόσβεση δεν είναι πολύ μεγάλη.

γ) Αν έχουμε

$$\omega^2 < \frac{b^2}{4m^2}$$

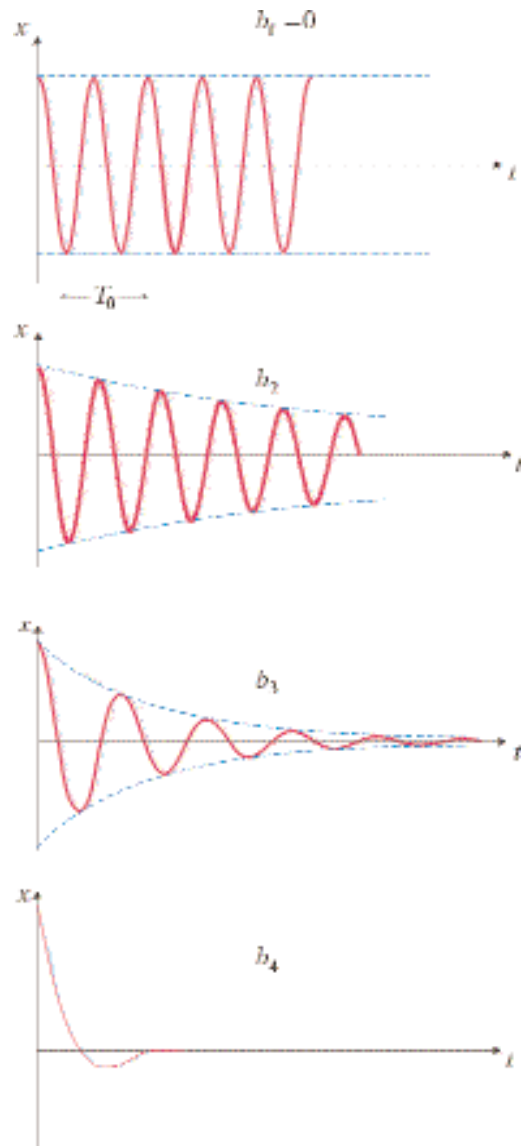
τότε η ω' δεν έχει πραγματικές τιμές και η κίνηση, όπως αποδεικνύεται, είναι μη περιοδική. Σ' αυτή τη περίπτωση, αν το σώμα αφηθεί από μια αρχική απομάκρυνση, βαθμιαία φθάνει στην ισορροπία χωρίς να την προσπεράσει (αν δεν έχει αρχική ταχύτητα) ή θα την προσπεράσει το πολύ μια μόνο φορά (αν έχει κατάλληλη αρχική ταχύτητα).

Παράδειγμα 3-3

Για μια σφαίρα, ακτίνας $R \approx \pi$ cm, ο συντελεστής απόσβεσης b , για την κίνησή της σε νερό θερμοκρασίας 20 °C, είναι

$$b = 6,0 \times 10^{-4} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$$

Βυθίζουμε εξ ολοκλήρου σε νερό μια συμπαγή σφαίρα από αλουμίνιο ακτίνας π cm, η οποία ταυτόχρονα είναι κρεμασμένη από την άκρη ελατηρίου σταθεράς $k = 36 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Εκτρέπουμε από την θέση ισορροπίας



ΣΧΗΜΑ 3.13

Γραφική παράσταση της $x(t)$ για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης b ($b_1 < b_2 < b_3 < b_4$).

τη σφαίρα κατακόρυφα κατά 0,20 m και την αφήνουμε να ταλαντωθεί. Η σφαίρα ταλαντώνεται, ενώ διαρκώς βρίσκεται μέσα στο νερό.

α) Δώστε την έκφραση της απομάκρυνσης με το χρόνο.

β) Πόσος χρόνος θα παρέλθει, μέχρι που η σφαίρα θα έχει το μισό πλάτος από το αρχικό, και πόση θερμοδυναμική ενέργεια παράγεται μέχρι τότε;

Η πυκνότητα του αλουμινίου είναι $d = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ και η επιτάχυνση της

βαρύτητας να ληφθεί $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

α) Ο όγκος της σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Επίσης $d = \frac{m}{V}$ ή $m = dV$

Άρα $m = d \frac{4}{3} \pi R^3$ ή

$$m = \left(2,7 \times \frac{4}{3} \pi \times \pi^3 \right) \text{g} \quad \text{ή}$$

$$m = 3,6 \times 10^2 \text{g} \quad \text{ή} \quad m = 0,36 \text{ kg}$$

Επομένως $\lambda = \frac{b}{2m} = \frac{6 \times 10^{-4}}{2 \times 0,36} \text{ s}^{-1}$ ή

$$\lambda = \frac{1}{1200} \text{ s}^{-1}$$

Επίσης $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36}{0,36}} \text{ rad / s}$ ή

$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

Άρα $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ ή

$$\omega' = \sqrt{10^2 - \frac{1}{1,44 \times 10^6}} \text{ rad / s}$$

δηλαδή $\omega' \approx 10 \text{ rad/s}$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.13) έχουμε

$$x = 0,2e^{-\frac{t}{1200}} \cos 10t \quad (x \text{ σε m, } t \text{ σε s})$$

Η αρχική φάση είναι $\varphi = 0$, διότι για χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x = 0,2 \text{ m}$, άρα $\cos \varphi = 1$

β) Το πλάτος είναι $A_t = 0,2 \times e^{-\frac{t}{1200}}$. Για $A_t = 0,10$ έχουμε

$$0,10 = 0,2 \times e^{-\frac{t}{1200}} \quad \text{ή}$$

$$\frac{t}{1200} = \ln 2 \quad \text{ή}$$

$$t = 1200 \times \ln 2 \text{ s} \quad \text{ή}$$

$$t \approx 830 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t \approx 14 \text{ min}$$

Η θερμοδυναμική ενέργεια που παράγεται είναι

$$U = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

Άρα

$$U = \left(\frac{1}{2} \times 36 \times 0,2^2 - \frac{1}{2} \times 36 \times 0,1^2 \right) \text{ J} \quad \text{ή}$$

$$U = 0,54 \text{ J}$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Μέχρι τώρα έχουμε αναφέρει τις αμειώτες ελεύθερες ή φυσικές ταλαντώσεις, καθώς και τις φθίνουσες. Μια άλλη κατηγορία ταλαντώσεων είναι οι **εξαναγκασμένες**.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις είναι αυτές κατά τις οποίες το ταλαντούμενο σύστημα δέχεται την επίδραση μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης, η οποία προσφέρει ενέργεια στο σύστημα έτσι, ώστε να αναπληρώνονται οι ενεργειακές του απώλειες και συνεπώς αυτό να εκτελεί ταλαντώσεις σταθερού πλάτους (αμειώτες).

Παραδείγματα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων πολύπλοκων συστημάτων είναι η ταλάντωση μιας γέφυρας υπό την επίδραση του συντονισμένου βήματος στρατιωτών, η κίνηση της κούνιας που δέχεται περιοδικές ωθήσεις, η λειτουργία μιας κεραίας, που λαμβάνει ηλεκτρομαγνητικά κύματα κ.ά. Επίσης φαινόμενα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων έχουμε στην ακουστική και στην πυρηνική φυσική.

Η δύναμη στην εξαναγκασμένη ταλάντωση μπορεί να έχει διάφορες περιοδικές μορφές. Μια απλή περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία η δύναμη είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή

$$F = F_m \cos \omega_d t \quad (3.14)^*$$

* Χρησιμοποιούμε την έκφραση αυτή για την δύναμη, διότι οποιαδήποτε περιοδική δύναμη μπορεί να γραφεί ως άθροισμα αρμονικών συναρτήσεων (ανάλυση Fourier).

Τότε η συνισταμένη δύναμη είναι $F_{ολ} = -kx - bv + F_m \cos \omega_d t$. Άρα από το 2ο νόμο του Νεύτωνα $F_{ολ} = m \cdot a$ προκύπτει

$$ma = -kx - bv + F_m \cos \omega_d t \tag{3.15}$$

Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι μετά από αρκετό χρόνο, από τότε που άρχισε να δρα η εξωτερική δύναμη και ανεξάρτητα από τις αρχικές του συνθήκες, το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους και συχνότητας ίσης με αυτή της εξωτερικής δύναμης (μόνιμο φαινόμενο). Η λύση της εξίσωσης (3.15) είναι

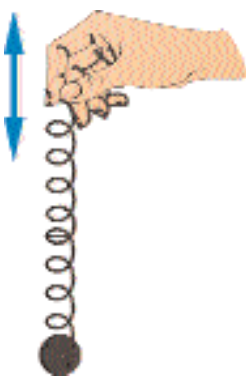
$$\left. \begin{aligned} &x = A \sin (\omega_d t - a) \\ \text{όπου } &A = \frac{1}{\omega_d} \frac{F_m}{\sqrt{b^2 + \left(m \omega_d - \frac{k}{\omega_d}\right)^2}} \\ &\text{και } \tan a = \frac{m \omega_d - \frac{k}{\omega_d}}{b} \end{aligned} \right\} \tag{3.16}$$

όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Η συχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος ισούται με τη συχνότητα του διεγέρτη, δηλαδή τη συχνότητα του παράγοντα που ασκεί την περιοδική εξωτερική δύναμη.

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

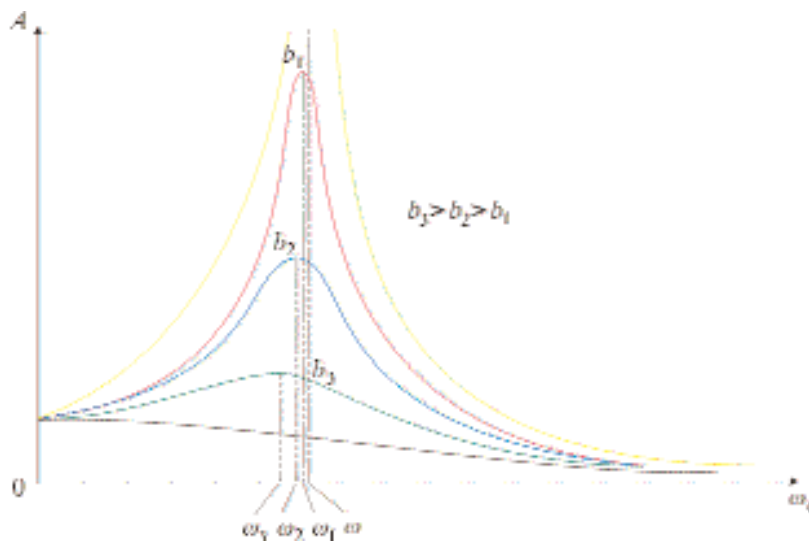
Κινώντας το χέρι μας περιοδικά σε κατακόρυφη τροχιά, ασκείται στο σώμα του σχήματος 3.13(α) περιοδική δύναμη και το σύστημα “ελατήριο- μάζα” εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Επαναλαμβάνοντας το πείραμα, για διάφορες τιμές της συχνότητας του χεριού μας, διαπιστώνουμε ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι διαφορετικό και μάλιστα μεγαλώνει καθώς η συχνότητα του χεριού μας πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα του συστήματος “ελατήριο-μάζα”, είτε από μεγαλύτερες, είτε από μικρότερες τιμές συχνοτήτων. Όταν η συχνότητα του χεριού μας γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος “ελατήριο-μάζα”, το πλάτος γίνεται μέγιστο και λέμε ότι έχουμε κατάσταση συντονισμού. Το φαινόμενο αυτό έχει εφαρμογές σε όλες τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (μηχανικές, ηλεκτρικές, πυρηνικές κ.λπ.) και η σημασία του είναι τεράστια.

Με τη βοήθεια της σχέσεως (3.16) μπορούμε να περιγράψουμε το συντονισμό. Στο σχήμα 3.14 έχουμε τη γραφική παράσταση του πλάτους A της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας του διεγέρτη ω_d , για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης b . Αυτή η γραφική παράσταση ονομάζεται **καμπύλη συντονισμού**. Παρατηρούμε ότι το πλάτος, για μια συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς b , γίνεται μέγιστο σε μια συχνότητα πλησίον της κυκλικής ιδιοσυχνότητας ω . Καθώς η σταθερά b μικραίνει, το μέγιστο πλάτος μεγαλώνει και η συχνότητα, για την οποία συμβαίνει η μεγιστοποίηση, προσεγγίζει την ω . Από το σχήμα 3.14 βλέπουμε ότι για $b_3 > b_2 > b_1$ έχουμε $A_{3\max} < A_{2\max} < A_{1\max}$ και $\omega_3 < \omega_2 < \omega_1 < \omega$, όπου $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ οι συχνότητες μεγιστοποίησης του πλάτους.



ΣΧΗΜΑ 3.13(α)

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις του συστήματος ελατηρίου-μάζας.



ΣΧΗΜΑ 3.14

Καμπύλη συντονισμού.

Η κατάσταση κατά την οποία η συχνότητα του διεγέρτη έχει τέτοια τιμή ώστε να προκαλείται ταλάντωση με μέγιστο πλάτος λέγεται **συντονισμός**

(πλάτους). Για την συχνότητα συντονισμού πλάτους ισχύει $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$

Η ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος δίνεται από τη σχέση $v = \frac{dx}{dt}$

Παραγωγίζοντας την $x(t)$, ως προς t , από την (3.16), έχουμε

$$v = \omega_d A \cos(\omega_d t - a) \quad \text{ή} \quad (3.17)$$

$$v = v_0 \cos(\omega_d t - a)$$

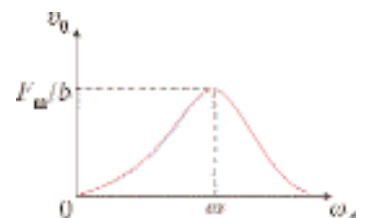
όπου
$$v_0 = \omega_d A = \frac{F_m}{\sqrt{b^2 + \left(m \omega_d - \frac{k}{\omega_d}\right)^2}} \quad (3.18)$$

Εφόσον $v = v_0 \cos(\omega_d t - a)$ και $F = F_m \cos \omega_d t$, η a ισούται με τη διαφορά φάσης μεταξύ ταχύτητας και εξωτερικής δύναμης.

Η γραφική παράσταση του πλάτους της ταχύτητας v_0 συναρτήσει της ω_d , όπως προκύπτει από την (3.18) δίνεται από το διάγραμμα του σχήματος 3.15. Παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταχύτητας γίνεται μέγιστο όταν γίνει ελάχιστος ο παρανομαστής στη σχέση (3.18), δηλαδή

$$\left(m \omega_d - \frac{k}{\omega_d}\right)^2 = 0 \quad \text{ή}$$

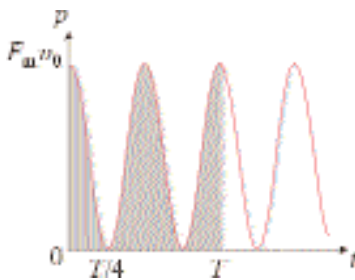
$$m \omega_d = \frac{k}{\omega_d} \quad \text{ή} \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή}$$



ΣΧΗΜΑ 3.15

Γραφική παράσταση του πλάτους της ταχύτητας με την ω_d του εξωτερικού αιτίου στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

$$\omega_d = \omega \text{ (Συνθήκη συντονισμού)} \tag{3.19}$$



ΣΧΗΜΑ 3.16

Το γραμμωσιασμένο εμβαδόν ισούται με την ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα σε χρόνο T

Από τη σχέση (3.16) η $\tan \alpha$, στην περίπτωση συντονισμού γίνεται, $\tan \alpha = 0$ ή $\alpha = 0$, δηλαδή η εξωτερική δύναμη βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ισχύς $P = Fv$ ή $P = F_m v_0 \cos^2 \omega_d t$ να είναι θετική σε όλη τη διάρκεια μιας περιόδου (σχήμα 3.16) και ταυτόχρονα να μεταφέρεται η μέγιστη ενέργεια από τον διεγέρτη στο ταλαντούμενο σύστημα ανά περίοδο.

Η κατάσταση, κατά την οποία η συχνότητα του διεγέρτη ισούται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος (φυσική συχνότητα), ονομάζεται **κατάσταση συντονισμού** (ταχύτητας ή ενέργειας), και τότε συμβαίνουν τα εξής: α) Το πλάτος της ταχύτητας είναι μέγιστο και β) έχουμε το μέγιστο μέσο ρυθμό απορρόφησης ενέργειας του ταλαντούμενου συστήματος από το διεγέρτη.

Παράδειγμα 3-4

Από ένα νήμα κρεμάμε μια σφαίρα m . Δένουμε την σφαίρα με ένα χαλαρό λαστιχάκι του οποίου η άλλη άκρη είναι δεμένη σε ένα δίσκο πικ-απ 45 στροφών. Να βρείτε το μήκος που πρέπει να έχει το νήμα ώστε να παρατηρείται συντονισμός (πλάτους). Η επιτάχυνση της βαρύτητας να ληφθεί ίση με 10 m/s^2 .

Απάντηση

Το εκκρεμές εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, οπότε για να έχουμε συντονισμό πρέπει

$$\omega = \omega_d$$

Είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{άρα} \quad \ell = \frac{g}{\omega_d^2} \quad \text{και}$$

$$\omega_d = 2\pi f = 2\pi \times \frac{45}{60} \text{ rad / s} \quad \text{ή}$$

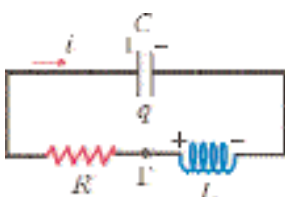
$$\omega_d = 4,71 \text{ rad / s}$$

Άρα

$$\ell = \frac{10}{4,71^2} \text{ m} \quad \text{ή} \quad \ell = 0,45 \text{ m}$$

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Προηγουμένως είδαμε την ιδανική περίπτωση κυκλώματος LC κατά την οποία η ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι μηδέν. Στην πραγματικότητα όμως, το κύκλωμα παρουσιάζει ωμική αντίσταση R , οπότε έχουμε απώλειες ενέργειας λόγω φαινομένου Joule. Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί και οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι φθίνουσες.



ΣΧΗΜΑ 3.18

Μη ιδανικό κύκλωμα LC .

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Για το κύκλωμα του σχήματος 3.18 έχουμε

$$\varepsilon_L = iR + \frac{q}{C} \quad (3.20)$$

Είναι $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$, άρα $-L \frac{di}{dt} = iR + \frac{q}{C}$ ή

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}q = 0 \quad (3.21)$$

Η εξίσωση (3.21) είναι ανάλογη με την (3.12), λόγω της αντιστοιχίας μηχανικών και ηλεκτρικών μεγεθών

$$\left(\begin{array}{l} L \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow b \\ \frac{1}{C} \leftrightarrow k \\ q \leftrightarrow x \\ i \leftrightarrow v \end{array} \right)$$

Οπότε η λύση είναι σε αντιστοιχία με την (3.13)

όπου

$$\left. \begin{array}{l} q = Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega't + \varphi) \\ \omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ η κυκλική ιδιοσυχνότητα} \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

Οι φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις μπορούν να παρατηρηθούν σε παλμογράφο, μετρώντας την τάση στα άκρα της αντίστασης (σχ. 3.19).

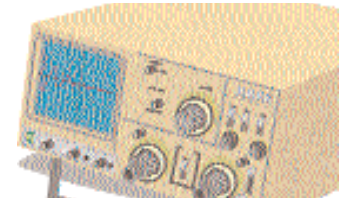
Τα συμπεράσματα είναι αντίστοιχα με αυτά των μηχανικών ταλαντώσεων δηλαδή.

α) Το (ψευδο)πλάτος $Q_m(t) = Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}}$ μειώνεται εκθετικά με το χρόνο

β) Η (ψευδο)περίοδος εξαρτάται από την αντίσταση R και είναι

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

και γ) Για $\omega^2 < \frac{R^2}{4L^2}$ έχουμε μη (ψευδό)περιοδικό φαινόμενο.



ΣΧΗΜΑ 3.19

Παρατηρούμε σε παλμογράφο τις φθίνουσες ηλεκτρ. ταλαντώσεις μετρώντας την τάση v_R στα άκρα της αντίστασης R .

Παράδειγμα 3-5

Για ένα μη ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων έχουμε τις τιμές $L = 5,0 \text{ mH}$ και $C = 2,0 \text{ }\mu\text{F}$. Η συνολική ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι $R = 1,0 \text{ }\Omega$. Να υπολογίσετε τη συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης και να προσδιορίσετε το χρόνο μέσα στον οποίο υποδιπλασιάζεται το πλάτος των ταλαντώσεων.

Απάντηση

Έχουμε

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Είναι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^{-3} \text{ H} \cdot 2,0 \times 10^{-6} \text{ F}}} \quad \text{ή}$$

$$\omega = 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επομένως

$$\omega' = \sqrt{10^8 - \frac{1^2}{4 \times (5 \times 10^{-3})^2}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ή}$$

$$\omega' = \sqrt{10^8 - 10^4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ή}$$

$$\omega' = 10^4 \sqrt{1 - \frac{1}{10^4}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ή}$$

$$\omega' = 10^4 \times 0,999 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\text{ή Hz})$$

Άρα

$$\omega' \approx 1,0 \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{και}$$

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{10^4}{2\pi} \text{ Hz} = 1600 \text{ Hz}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά της κυκλικής συχνότητας από την κυκλική ιδιοσυχνότητα είναι μηδαμινή. Για το πλάτος έχουμε

$$Q_m(t) = Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

Θέλουμε

$$Q_m(t) = \frac{Q_m}{2}$$

άρα

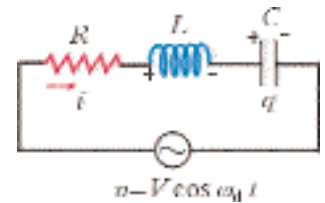
$$Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}} = \frac{Q_m}{2} \quad \text{ή}$$

$$e^{-\frac{Rt}{2L}} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{Rt}{2L} = \ln 2 \quad \text{ή}$$

$$t = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3}}{1} \ln 2 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t = 0,0069 \text{ s}$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Όπως στις μηχανικές ταλαντώσεις με τριβές, προσφέρουμε ενέργεια για την συντήρησή τους, παρόμοια και στις φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, προσφέρουμε περιοδικά ενέργεια, μέσω πηγής εναλλασόμενου ρεύματος, (Σχ. 3.20) ώστε η ταλάντωση που προκύπτει να είναι αμείωτη. Στην περίπτωση αυτή η ηλεκτρική ταλάντωση λέγεται εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση.



ΣΧΗΜΑ 3.20

Κύκλωμα RLC εκτελεί εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Από το κύκλωμα του σχήματος 3.20 έχουμε

$$\left. \begin{aligned} v &= v_R + v_L + v_C \\ \text{όπου } v &= V_m \cos \omega_d t \\ v_R &= iR \\ v_L &= L \frac{di}{dt} \\ v_C &= \frac{q}{C} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Επομένως

$$V_m \cos \omega_d t = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{ή}$$

$$L \frac{di}{dt} = -\frac{q}{C} - iR + V_m \cos \omega_d t \quad (3.24)$$

Η (3.24) είναι ανάλογη με την (3.15), λόγω των γνωστών αντιστοιχιών, οπότε η λύση της είναι

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= Q_m \sin(\omega_d t - \alpha) \\ \text{όπου } Q_m &= \frac{1}{\omega_d} \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}\right)^2}} \\ \text{και } \tan \alpha &= \frac{L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}}{R} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Παραγωγίζοντας την $q(t)$ ως προς t , από την (3.25) έχουμε

$$i = \omega_d Q_m \cos(\omega_d t - a) \quad (3.26)$$

Η ποσότητα $\omega_d Q_m$ είναι το πλάτος του ρεύματος I_m , άρα

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}\right)^2}} \quad (3.27)$$

Επίσης από την (3.23) και (3.27) έχουμε

$$\left. \begin{aligned} v_R &= I_m R \cos(\omega_d t - a) \text{ ή } v_R = V_R \cos(\omega_d t - a) \\ \text{όπου } V_R &= I_m R \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Ακόμη

$$\left. \begin{aligned} v_L &= L \frac{di}{dt} = L \omega_d I_m (-\sin(\omega_d t - a)) \text{ ή} \\ v_L &= V_L \cos\left(\omega_d t - a + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_L &= I_m L \omega_d \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

Έχουμε επίσης

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \frac{q}{C} = \frac{I_m}{\omega_d C} \sin(\omega_d t - a) \\ v_c &= V_C \cos\left(\omega_d t - a - \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{όπου } V_C &= \frac{I_m}{\omega_d C} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

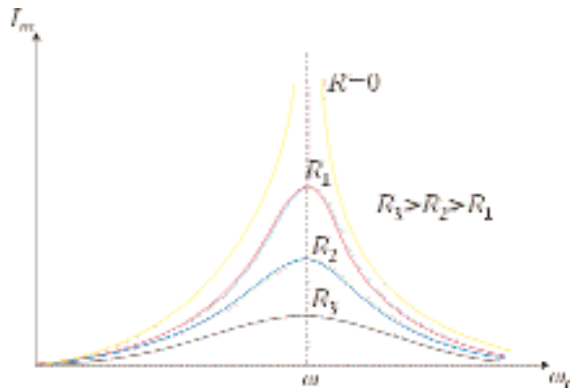
Εδώ χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

Το πιο πάνω κύκλωμα έχει μελετηθεί και στο κεφάλαιο του ηλεκτρομαγνητισμού

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Όπως στις μηχανικές ταλαντώσεις έτσι και στις εξαναγκασμένες ηλεκτρομαγνητικές παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού. Από την σχέση (3.27) έχουμε ότι το πλάτος του ρεύματος είναι

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}\right)^2}}$$



ΣΧΗΜΑ 3.21

Καμπύλη συντονισμού σε ηλεκτρικό κύκλωμα, για διάφορες τιμές της αντίστασης R.

Εάν διατηρήσουμε το πλάτος της τάσεως της πηγής V_m σταθερό, τότε η γραφική παράσταση του πλάτους I_m , συναρτήσει της ω_d για διάφορες τιμές της ωμικής αντίστασης R , είναι αυτή του σχήματος (3.21). Η μέγιστη τιμή του πλάτους πραγματοποιείται όταν

$$L \omega_d - \frac{1}{C \omega_d} = 0 \quad \text{ή} \quad \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ή}$$

$$\omega_d = \omega \quad (\text{συνθήκη συντονισμού}) \quad (3.31)$$

όπου ω , η **κυκλική ιδιοσυχνότητα** του κυκλώματος

Η μέγιστη τιμή του πλάτους είναι

$$I_m = \frac{V_m}{R}$$

με

$$\tan \alpha = 0$$

Τα μεγέθη i και v είναι τότε σε φάση. Η στιγμιαία ισχύς που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα είναι

$$P = v i = V_m I_m \cos^2 \omega_d t$$

πάντα θετική και επομένως έχουμε το μέγιστο μέσο ρυθμό προσφοράς ενέργειας από την πηγή στο κύκλωμα. Η κατάσταση αυτή είναι μια κατάσταση συντονισμού ενέργειας.

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ

Κατά τη μελέτη του κυκλώματος RLC στο αντίστοιχο κεφάλαιο του ηλεκτρομαγνητισμού, έχει δοθεί ο τύπος για τη μέση καταναλισκόμενη ισχύ

$$\bar{P} = I_r^2 R$$

όπου

$$I_r = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Κατ' αντιστοιχία η μέση καταναλισκόμενη ισχύς στο μηχανικό ταλαντωτή είναι

$$\bar{P} = \frac{v_0^2}{2} b \quad (3.32)$$

Όλη η πιο πάνω ισχύς μετατρέπεται σε θερμοδυναμική και μεταβαίνει στο περιβάλλον με μορφή θερμικής ισχύος.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

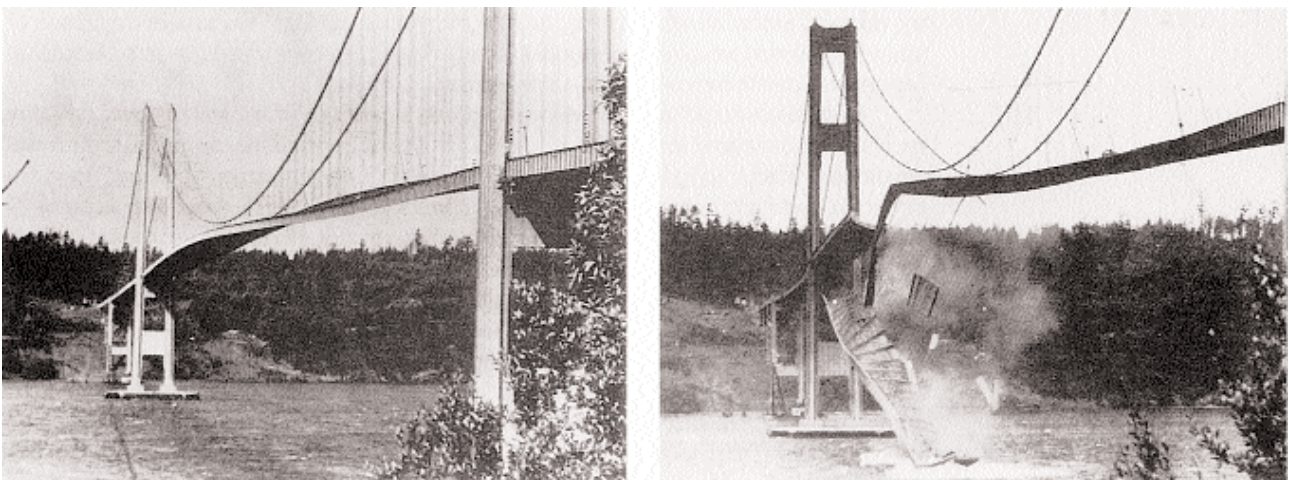
Θα αναφερθούν τώρα μερικές από τις εφαρμογές του συντονισμού

α) Όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διέρχεται από ένα αέριο, τα ηλεκτρόνια του αερίου εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την επίδραση του περιοδικά μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου. Τα μόρια έχουν ορισμένες φυσικές συχνότητες ταλάντωσης, και όταν η συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ταυτιστεί με τις συχνότητες αυτές, έχουμε τη μέγιστη απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από το αέριο. Μπορούμε να μετρήσουμε τις συχνότητες μέγιστης απορρόφησης ακτινοβολίας και να πάρουμε το φασμα ταλαντώσεων του μορίου του συγκεκριμένου αερίου.

β) Ένας ραδιοφωνικός δέκτης δέχεται πολλά σήματα διαφόρων συχνοτήτων. Προσπαθώντας να “πιάσουμε” έναν συγκεκριμένο σταθμό, μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή του κυκλώματος συντονισμού στην είσοδο του δέκτη, ώστε να μεταβάλλεται η ιδιοσυχνότητά του. Όταν η ιδιοσυχνότητα αυτού του κυκλώματος συντονισμού του δέκτη γίνει ίση με τη συχνότητα του συγκεκριμένου σταθμού έχουμε συντονισμό και συνεπώς ακούμε μόνο αυτό το σταθμό.

γ) Στις μηχανικές κατασκευές, γέφυρες, κτίρια κλπ., οι κατασκευαστές φροντίζουν, ώστε οι φυσικές συχνότητες των κατασκευών να απέχουν πολύ από τις συχνότητες διέγερσης, που προκαλούν οι πνέοντες άνεμοι της περιοχής. Μ' αυτό το τρόπο αποφεύγονται οι καταστάσεις συντονισμού που μπορούν να αποβούν μοιραίες. Παράδειγμα είναι η γέφυρα του Tacoma Narrows στο Puget Sound, Washington (σχήμα 3.22), η οποία το 1940, τέσσερις μήνες μετά την παράδοση στην κυκλοφορία, έπεσε. Αιτία ήταν ένας δυνατός άνεμος που προκάλεσε μια περιοδική δύναμη, η οποία συντονίστηκε με τη φυσική συχνότητα της γέφυρας. Αποτέλεσμα ήταν η διαρκής αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης της γέφυρας, μέχρι που έπεσε.

δ) Όταν κουνάμε ένα παιδί σε μια κούνια, η ώθηση που δίνουμε, είναι περιοδική με περίοδο ίδια με αυτή της κούνιας, ώστε να έχουμε συντονισμό και να πετυχαίνουμε σταθερό και μεγάλο πλάτος ταλάντωσης.



ΕΙΚΟΝΑ 3.22

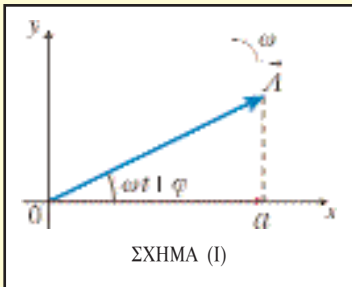
Η γέφυρα Tacoma - Narrows να εκτελεί ταλαντώσεις λόγω ισχυρού ανέμου.

"ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΝΟΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ"

Έστω ένα μέγεθος που μεταβάλλεται συνημιτονοειδώς με το χρόνο, δηλαδή

$$a = A \cos (\omega t + \varphi)$$

Θεωρούμε ένα διάνυσμα \vec{A} με αρχή την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος, που περιστρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα ω (σχ. I). Η προβολή στον οριζόντιο άξονα Ox μας δίνει τη στιγμιαία τιμή a , διότι

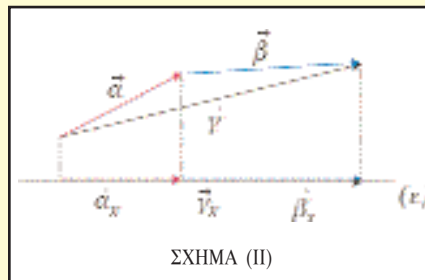


$$\cos (\omega t + \varphi) = \frac{a}{A} \quad \text{ή}$$

$$a = A \cos (\omega t + \varphi)$$

Θεώρημα των προβολών: Εάν έχουμε δύο ή περισσότερα διανύσματα, τότε το άθροισμα των προβολών των διανυσμάτων σε μια τυχαία ευθεία ισούται με την προβολή του αθροίσματος των διανυσμάτων (σχ. II). Δηλαδή

αν $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ τότε $\gamma_x = \alpha_x + \beta_x$ όπου γ_x , α_x και β_x οι βαθμωτές προβολές των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντιστοίχως. Το ίδιο ισχύει για τις διανυσματικές προβολές.



Έστω ότι έχουμε δύο μεγέθη a και β που μεταβάλλονται συνημιτονοειδώς με το χρόνο,

$$a = A \cos \omega t \quad \text{και} \quad \beta = B \cos (\omega t + \varphi)$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\gamma = a + \beta \quad \text{δηλαδή} \quad \gamma = A \cos \omega t + B \cos (\omega t + \varphi)$$

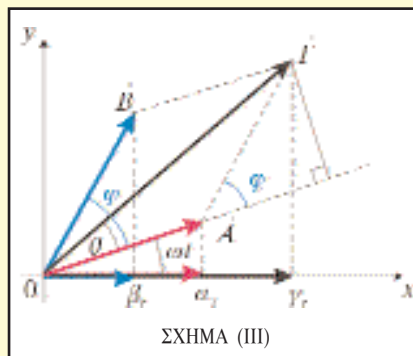
Θεωρούμε την περιγραφή των ποσοτήτων a , β με τη βοήθεια των περιστρεφόμενων διανυσμάτων (Σχ. III). Στηριζόμενοι στο θεώρημα των προβολών έχουμε

$$\gamma = \Gamma \cos (\omega t + \theta)$$

όπου $\vec{\Gamma} = \vec{A} + \vec{B}$

Άρα $\Gamma = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \varphi}$

και $\tan \theta = \frac{B \sin \varphi}{A + B \cos \varphi}$



ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΠΛΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Α) ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ

α) Ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές κινήσεις ίδιας συχνότητας,

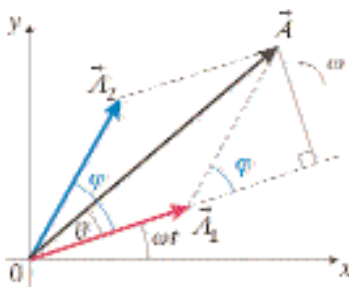
$$x_1 = A_1 \cos \omega t \quad \text{και} \quad x_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi)$$

Η συνισταμένη κίνηση του σώματος θα περιγραφεί από τη σχέση

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{ή}$$

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos (\omega t + \varphi)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος 3.23 (δες αντίστοιχο μαθηματικό συμπλήρωμα) έχουμε



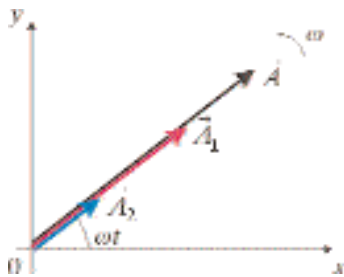
ΣΧΗΜΑ 3.23

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos (\omega t + \theta) \\ \text{όπου } A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi} \\ \text{και } \tan \theta &= \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

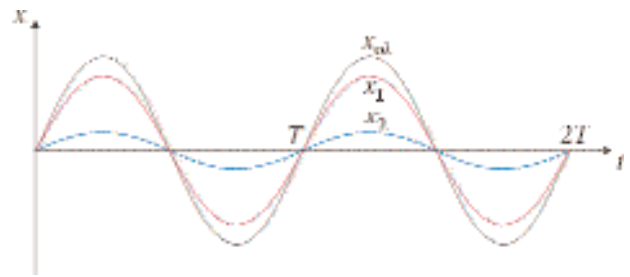
Ειδικές περιπτώσεις

i) Αν $\varphi = 0$, τότε από την (3.33) έχουμε

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{και} \quad \tan \theta = 0 \quad \text{ή} \quad \theta = 0 \quad (\text{σχήμα 3.24α})$$



ΣΧΗΜΑ 3.24α



ΣΧΗΜΑ 3.24β

Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας φάσης και ίδιας συχνότητας.

Δηλαδή αν

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \quad \text{και} \quad x_2 = A_2 \cos \omega t$$

προκύπτει

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2) \cos \omega t$$

ii) Αν $\varphi = \pi$, τότε $A = |A_1 - A_2|$

και

$$\tan \theta = 0$$

$$\text{ή} \quad \theta = 0, \quad \text{όταν} \quad A_1 > A_2$$

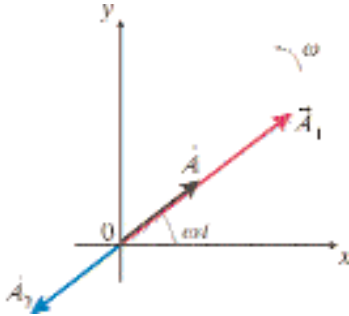
$$\text{ή} \quad \theta = \pi, \quad \text{όταν} \quad A_1 < A_2$$

Δηλαδή έχουμε

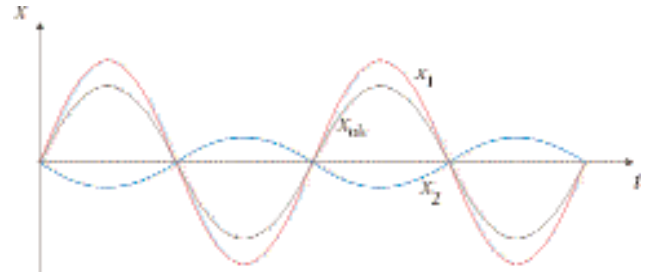
$$x = (A_1 - A_2) \cos \omega t \quad \text{αν } A_1 > A_2 \quad \text{ή}$$

$$x = (A_2 - A_1) \cos(\omega t + \pi) \quad \text{αν } A_1 < A_2$$

Σχήματα 3.25α και 3.25β



ΣΧΗΜΑ 3.25α



ΣΧΗΜΑ 3.25β

Σύνθεση ταλαντώσεων με διαφορά φάσης π.

Παράδειγμα 3-6

Ένα σωματίο εκτελεί συγχρόνως τις ταλαντώσεις $x_1 = 3 \cos 3t$ και $x_2 = 3 \cos \left(3t + \frac{\pi}{2} \right)$ (x_1, x_2 σε m, t σε s). Ποιά είναι η συνισταμένη κίνηση.

Απάντηση

Είναι

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \theta)$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{ή}$$

$$A = 3\sqrt{2} \quad (\text{σχήμα 3.26})$$

Επίσης

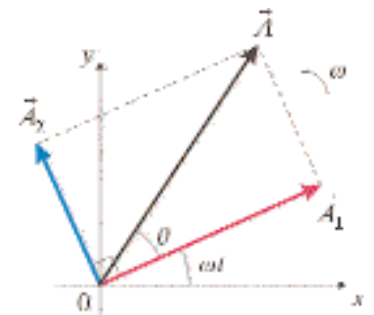
$$\tan \theta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{3} = 1$$

Άρα

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως είναι

$$x = 3\sqrt{2} \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) \quad [x \text{ σε m, } t \text{ σε s}]$$



ΣΧΗΜΑ 3.26

Παράδειγμα 3-7

Ένα σώμα εκτελεί συγχρόνως τις ταλαντώσεις $x_1 = 5 \cos 100t$ και $x_2 = 5 \sin \left(100t - \frac{\pi}{6} \right)$ [S.I.]. Να βρείτε τη συνισταμένη κίνηση του σώματος.

Απάντηση

Είναι

$$x_2 = 5 \sin \left(100t - \frac{\pi}{6} \right) = 5 \cos \left(100t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή}$$

$$x_2 = 5 \cos \left(100t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad [x_2 \text{ σε m, } t \text{ σε s}]$$

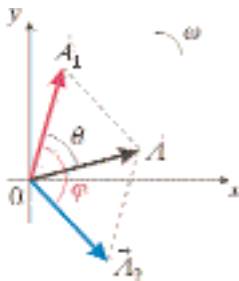
Άρα οι δύο ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ με το A_1 να προηγείται. Επομένως είναι $A_1 = 5 \text{ m}$, $A_2 = 5 \text{ m}$ και $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Άρα

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5 + \left(\frac{1}{2}\right)} \text{ m} = 5 \text{ m}$$

(δες Σχ. 3.27)

Επειδή το παραλληλόγραφο είναι ρόμβος έχουμε $\theta = \frac{\pi}{3}$. Συνεπώς

$$x = 5 \cos \left(100t - \frac{\pi}{3} \right)$$



ΣΧΗΜΑ 3.27

β) Σύνθεση ταλαντώσεων διαφορετικής συχνότητας

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση σύνθεσης δύο ταλαντώσεων κατά την οποία τα δύο πλάτη είναι ίσα δηλ. $A_1 = A_2 = A$ και οι συχνότητες f_1 και f_2 διαφέρουν ελάχιστα. Δηλαδή $f_1 \approx f_2$ όμως $f_1 \neq f_2$. Τότε έχουμε

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad \text{ή}$$

$$x = 2A \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \quad \text{ή}$$

$$x = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t \cos \omega_{\text{av}} t \quad (3.34)$$

όπου η κυκλική συχνότητα

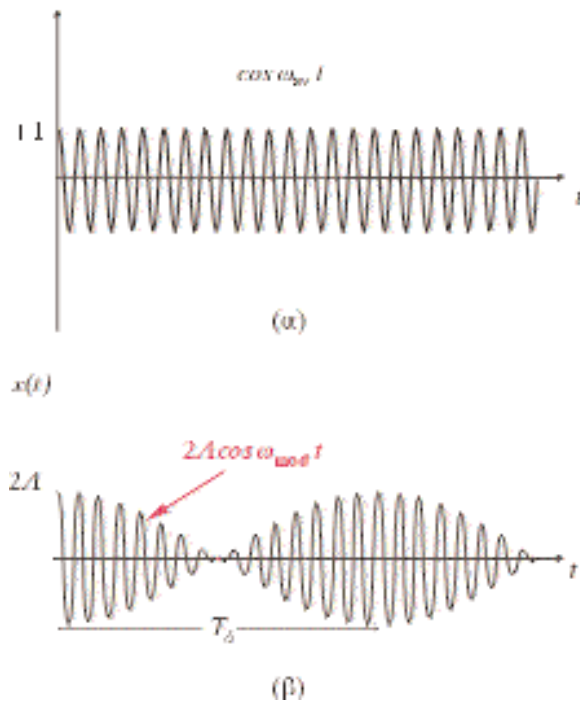
$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (\omega_1 > \omega_2)$$

λέγεται **συχνότητα διαμόρφωσης** και η συχνότητα

$$\omega_{\text{av}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$$

είναι η **συχνότητα της ταλάντωσης**.

Η ποσότητα $A_t = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t$ λέγεται διαμορφωμένο πλάτος. Η γραφική παράσταση του $x(t)$, συναρτήσει του t , πραγματοποιείται αν κάνουμε ξεχωριστά τα γραφήματα του A_t και του $\cos \omega_{\text{av}} t$ και στη συνέχεια σχεδιάσουμε το γινόμενό τους.



ΣΧΗΜΑ 3.28

Το διακρότημα ως γινόμενο δύο ταλαντώσεων.

Μελετώντας το σχήμα 3.28(β) παρατηρούμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή η κίνηση μοιάζει με ταλάντωση κυκλικής συχνότητας ω_{av} , της οποίας το πλάτος είναι το A_t αυτής της χρονικής στιγμής. Το αποτέλεσμα αυτής της σύνθεσης ονομάζεται διακρότημα και χαρακτηρίζεται από τη μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης μεταξύ των τιμών 0 και $2A$. Με τη βοήθεια του σχήματος 3.28 υπολογίζεται η περίοδος του διακροτήματος ως εξής

$$T_\delta \omega_{mod} = \pi \quad \text{ή} \quad T_\delta \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \pi \quad \text{ή}$$

$$T_\delta = \frac{1}{f_1 - f_2} \tag{3.35}$$

Η συχνότητα του διακροτήματος είναι

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} \quad \text{ή}$$

$$f_\delta = f_1 - f_2 \tag{3.36}$$

Στην περίπτωση που $f_1 < f_2$ η περίοδος και συχνότητα είναι

$$T_\delta = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

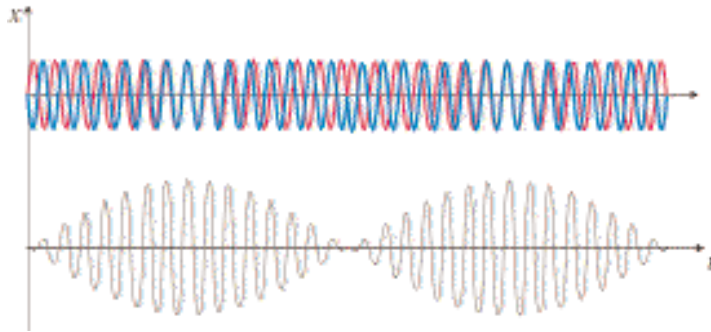
και

$$f_\delta = f_2 - f_1$$

αντίστοιχα.

Παραδείγματα διακροτημάτων

Διακροτήματα παρατηρούνται στην περίπτωση κατά την οποία, δύο διαπασών με συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο, ταλαντώνονται συγχρόνως. Η διαταραχή του τυμπάνου του αυτιού είναι η συνισταμένη των διαταραχών που προκαλούν τα δύο διαπασών (Σχ. 3.29).



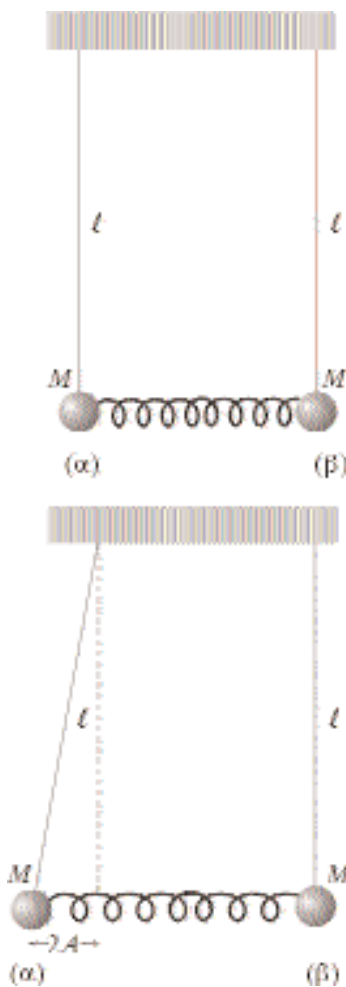
ΣΧΗΜΑ 3.29

Η κίνηση που προκύπτει από τη σύνθεση των ταλαντώσεων δύο διαπασών, που οι συχνότητές τους διαφέρουν ελάχιστα.

Επίσης παράδειγμα διακροτήματος αποτελεί και η κίνηση δύο συζευγμένων εκκρεμών (Σχ. 3.30). Αν απομακρύνουμε το εκκρεμές (α) κατά απόσταση $2A$, κρατώντας σταθερό το εκκρεμές (β) και κατόπιν τα αφήσουμε ελεύθερα, θα παρατηρήσουμε τα εξής: Το εκκρεμές (α) ταλαντώνεται, ενώ το πλάτος του μειώνεται και συγχρόνως το εκκρεμές (β) ταλαντώνεται, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης του μεγαλώνει, έως ότου το πλάτος του (α) σχεδόν μηδενίζεται, ενώ του (β) γίνεται μέγιστο. Κατόπιν αρχίζει να μειώνεται το πλάτος του (β), ενώ του (α) να αυξάνεται κ.ο.κ. Αυτό συμβαίνει, διότι, όπως αποδεικνύεται σ' αυτή την περίπτωση, τα εκκρεμή εκτελούν συγχρόνως δύο ταλαντώσεις με συχνότητες

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{M}}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, ℓ το μήκος κάθε εκκρεμούς, k η σταθερά του ελατηρίου σύζευξης και M η μάζα κάθε σφαιριδίου των εκκρεμών. Το πλάτος ταλάντωσης του κάθε εκκρεμούς είναι διαμορφωμένο. Το φαινόμενο του διακροτήματος σ' αυτή την περίπτωση είναι πιο έντονο όταν οι μάζες M είναι μεγάλες και το ελατήριο χαλαρό, δηλ. με μικρό k , διότι τότε $\omega_1 \approx \omega_2$.



ΣΧΗΜΑ 3.30

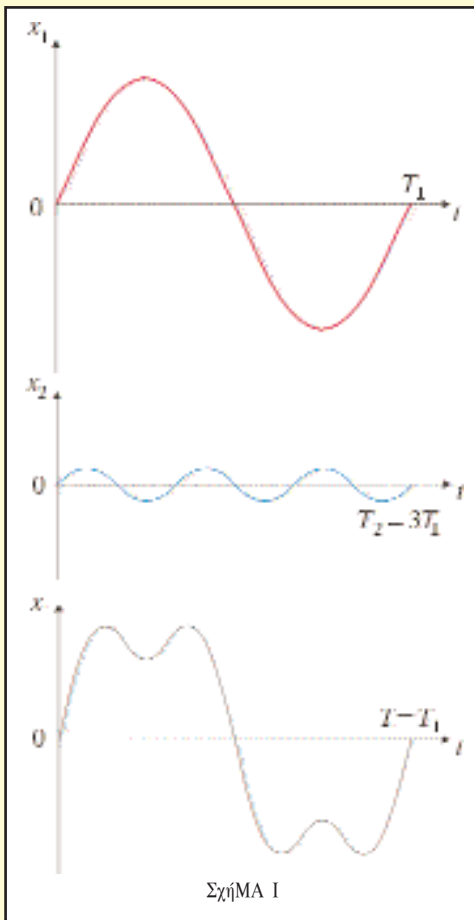
Συζευγμένα εκκρεμή.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ. ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί συγχρόνως δύο ταλαντώσεις της μορφής $x_1 = A \sin \omega_1 t$ και $x_2 = B \sin \omega_2 t$, για τις οποίες ισχύει $\omega_2 = 2\omega_1$. Τότε η απομάκρυνσή του είναι

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{ή} \quad x = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$$

Από το σχήμα I, όπου παρίστανται τα x_1, x_2 καθώς και η συνιστασμένη κίνηση, παρατηρούμε (μπορεί να αποδειχθεί και μαθηματικά) ότι η



συνισταμένη κίνηση είναι μια περιοδική κίνηση με περίοδο

$$T = T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

αυτή της x_1 , χωρίς να είναι αρμονική.

Ακόμη αν αντί για δύο ταλαντώσεις έχουμε να συνθέσουμε περισσότερες με κυκλικές συχνότητες $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 2\omega_0$, $\omega_3 = 3\omega_0, \dots$ δηλαδή πολλαπλάσιες μιας ω_0 (θεμελειώδους), τότε το αποτέλεσμα είναι πάλι μια περιοδική κίνηση με περίοδο

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Το 1822 ο J. Fourier εισήγαγε μια διαδικασία, η οποία έμελε να γίνει συνωνυμη του, την ανάλυση Fourier, κατά την οποία: κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με περίοδο T_0 ,

μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα αρμονικών συναρτήσεων, των οποίων οι συχνότητες είναι πολλαπλάσιες μιας πρώτης συχνότητας f_0 ,

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (\text{αντίστοιχα } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0})$$

Δηλαδή, αν $f(t + T_0) = f(t)$ για κάθε t τότε

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + A_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3) + \dots$$

όπου $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$, $\omega_2 = 2\omega_0$, $\omega_3 = 3\omega_0$

Τα μεγέθη $A_0, A_1, A_2, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ εξαρτώνται από τη μορφή της συνάρτησης $f(t)$.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos a$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση στην πιο συνηθισμένη μορφή, η οποία είναι

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + \dots + b_1 \cos \omega_1 t + b_2 \cos \omega_2 t + \dots$$

Οι συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ υπολογίζονται με την βοήθεια ανώτερων μαθηματικών. Το πιο πάνω άθροισμα αποτελεί μια τριγωνομετρική σειρά γνωστή ως σειρά Fourier.

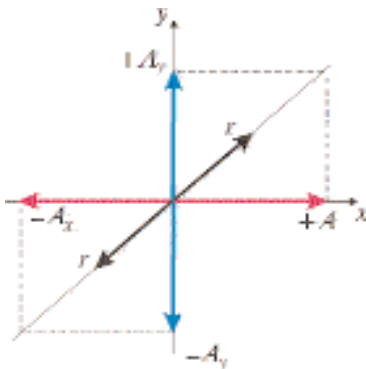
Με την ανάλυση Fourier εξηγείται η διαφορετική χροιά των ήχων, οι οποίοι παράγονται από διάφορα μουσικά όργανα. Για παράδειγμα, η νότα ΣΟΛ και για το πιάνο και για την κιθάρα είναι ένας περιοδικός ήχος με την ίδια συχνότητα, άρα, είναι επαλληλία αρμονικών με ίδιες συχνότητες πολλαπλάσιες της ίδιας θεμελιώδους, χαρακτηριστικής της νότας ΣΟΛ. Κατά την ανάλυση Fourier όμως έχουμε ότι οι συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ είναι διαφορετικοί από όργανο σε όργανο. Επομένως, η συνεισφορά στην ένταση του ήχου, για κάθε συχνότητα διαφέρει, από όργανο σε όργανο και έτσι προκύπτει η διαφορετική χροιά.

Β) ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΜΕ ΚΑΘΕΤΕΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ.

Έστω ένα σώμα εκτελεί συγχρόνως δύο ανεξάρτητες ταλαντώσεις, μία στον άξονα $y'y$ και μία στον άξονα xx' σύμφωνα με τις σχέσεις

$$x = A_x \cos \omega_1 t \quad \text{και} \quad y = A_y \cos (\omega_2 t + \delta)$$

Το αποτέλεσμα της σύνθεσης είναι κίνηση στο επίπεδο xy , η οποία εξαρτάται από τα πλάτη A_x, A_y , τις κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 , καθώς και από τη διαφορά φάσης δ των δύο ταλαντώσεων. Παρακάτω εξετάζουμε διάφορες περιπτώσεις τέτοιων συνθέσεων.



ΣΧΗΜΑ 3.31

Σύνθεση δύο καθέτων ταλαντώσεων ίδιου πλάτους και συχνότητας, χωρίς διαφορά φάσης.

α) Ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

i) Όταν $\delta = 0$ τότε έχουμε

$$x = A_x \cos \omega t \quad , \quad y = A_y \cos \omega t$$

διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση τροχιάς

$$\frac{x}{y} = \frac{A_x}{A_y} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{ή} \quad y = \lambda x$$

Επομένως η κίνηση είναι ευθύγραμμη. Ακόμη για το διάνυσμα θέσης \vec{r} έχουμε (Σχ. 3.31)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ή} \quad r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos \omega t \quad \text{ή} \quad r = r_0 \cos \omega t$$

όπου

$$r_0 = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Άρα σ' αυτή την περίπτωση η συνισταμένη κίνηση είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) Όταν $\delta = \frac{\pi}{2}$, έχουμε

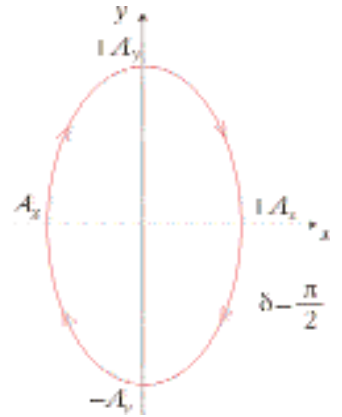
$$\left. \begin{aligned} x &= A_x \cos \omega t \\ y &= A_y \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή} \quad y = -A_y \sin \omega t \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } \sin^2 \omega t &= \frac{x^2}{A_x^2} \\ \text{και } \cos^2 \omega t &= \frac{y^2}{A_y^2} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1 \tag{3.37}$$

Η σχέση (3.37) περιγράφει εν γένει έλλειψη. Επομένως σ' αυτή την περίπτωση η τροχιά του σώματος είναι έλλειψη με τους δύο άξονες της $2A_x$ και $2A_y$ αντίστοιχα. (Βλέπε σχήμα 3.32)



ΣΧΗΜΑ 3.32

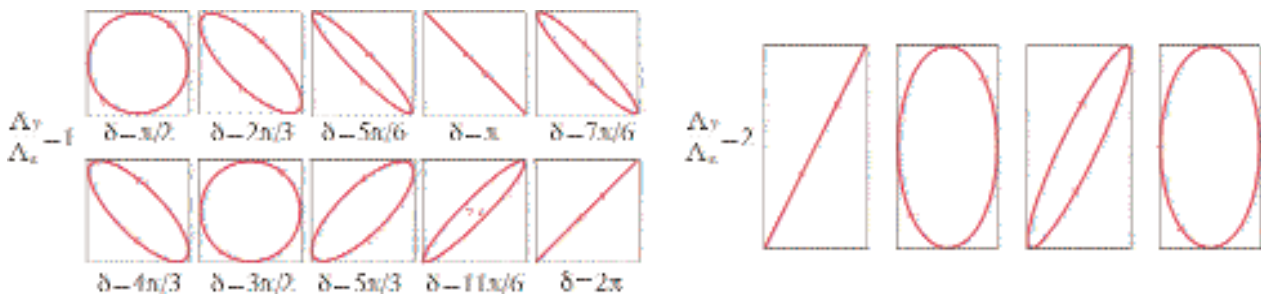
Σύνθεση δύο καθέτων ταλαντώσεων ίδιου πλάτους και συχνότητας, με διαφορά φάσης $\pi/2$.

iii) Όταν η διαφορά φάσης είναι $\delta = \frac{3\pi}{2}$, τότε όμοια αποδεικνύεται ότι η εξίσωση τροχιάς είναι έλλειψη.

Στο σχήμα 3.33 δίνονται τα σχήματα των τροχιών που προκύπτουν για τις περιπτώσεις του λόγου των πλάτους

$$\frac{A_y}{A_x} = 1 \quad \frac{A_y}{A_x} = 2$$

και για διάφορες τιμές της διαφοράς φάσης δ



ΣΧΗΜΑ 3.33

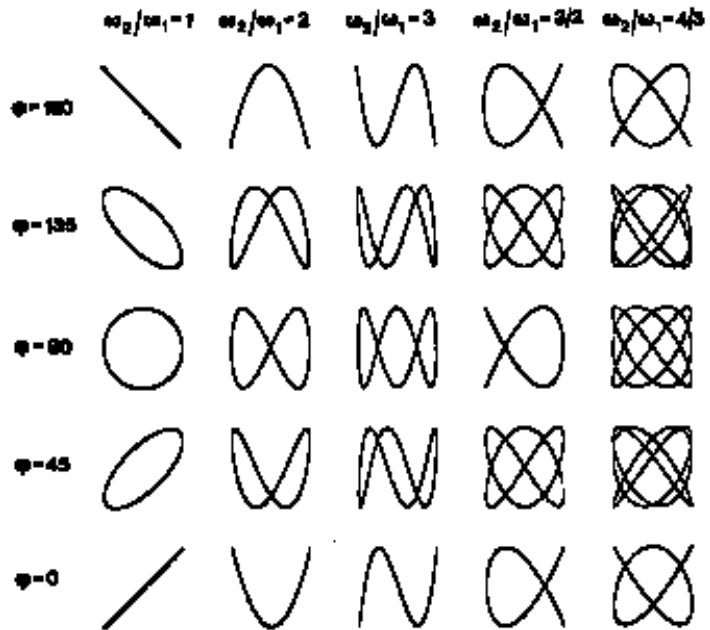
Τροχιές που προκύπτουν από τη σύνθεση καθέτων ταλαντώσεων.

β) Κάθετες μεταξύ τους ταλαντώσεις με διαφορετικές συχνότητες.

Σ' αυτή την περίπτωση με την σύνθεση των ταλαντώσεων προκύπτουν τροχιές, οι οποίες δεν είναι πλέον ελλείψεις και ονομάζονται καμπύλες Lissajous. Το όνομά τους οφείλεται στον Jules Antoine Lissajous, ο οποίος πρώτος τις μελέτησε και τις παρουσίασε το 1857. Για διάφορες τιμές του λόγου ω_1/ω_2 στην απλή περίπτωση κατά την οποία ισχύει $A_x=A_y$, καθώς και για διάφορες τιμές της διαφοράς φάσης δ , έχουμε τις μορφές του σχήματος 3.34.

Παρατήρηση:

Αποδεικνύεται ότι, όταν ο λογος ω_1/ω_2 είναι ρητός ισχύει, ότι εφόσον οι τροχιές που προκύπτουν για διάφορες τιμές του δ είναι κλειστές, τότε το σώμα συνεχίζει να κινείται στην τροχιά διαρκώς με σταθερή φορά διαγραφής.



ΣΧΗΜΑ 3.34

Σχήματα ή καμπύλες Lissajous από τη σύνθεση καθέτων ταλαντώσεων ίδιου πλάτους.

Αν οι τροχιές δεν είναι κλειστές, τότε διαγράφει την τροχιά κατά μία φορά, φτάνει στο άκρο της τροχιάς και κατόπιν την διαγράφει κατά την αντίθετη κατεύθυνση κ.ο.κ. Από το σχήμα 3.34 μπορούμε να κατανοήσουμε ότι οι καμπύλες που δεν αποτελούν βρόχους (δεν “κλείνουν”) είναι εκφυλισμένες κάποιων που κλείνουν.

Στην περίπτωση όμως που ο λόγος $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ είναι άρρητος π.χ. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{3}$,

τότε το σώμα διαγράφει μια κίνηση, κατά την οποία "σαρώνει" το ορθογώνιο πλευρών $2A_x$ και $2A_y$, χωρίς να διέρχεται ποτέ από το ίδιο σημείο με την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο διεύθυνση και φορά. Πειραματικά τα σχήματα Lissajous μπορούν να επιδειχθούν με παλμογράφο, όταν τα ηλεκτρόνια εκτρέπονται από δύο κάθετα ηλεκτρικά πεδία, τα οποία μεταβάλλονται αρμονικά.

Μεταβάλλοντας τις συχνότητες και τα πλάτη των ηλεκτρικών πεδίων, μπορούμε εύκολα να πραγματοποιήσουμε τα σχήματα 3.34.

Τα σχήματα Lissajous έχουν εφαρμογή στην ηλεκτρονική και συγκεκριμένα στη μέτρηση άγνωστης συχνότητας. Τοποθετούμε στον ένα άξονα την άγνωστη συχνότητα και στον άλλο μια πηγή μεταβλητής, αλλά γνωστής κάθε φορά συχνότητας. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα της πηγής εμφανίζονται στον παλμογράφο διάφορα σχήματα Lissajous. Από την μορφή των σχημάτων και τη συγκεκριμένη συχνότητα της πηγής, υπολογίζουμε την άγνωστη συχνότητα. Οι μετρήσεις με αυτόν τον τρόπο είναι μεγάλης ακρίβειας.

Α Ν Α Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ω Σ Η

□ Ένα ιδανικό κύκλωμα LC εκτελεί αμείωτες ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις και οι εκφράσεις των ποσοτήτων φορτίου και ρεύματος με το χρόνο είναι

$$q = Q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$i = -I_m \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ όπου } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Η ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια δίνονται από τις σχέσεις

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

□ Κατά τις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις πέραν της δύναμης επαναφοράς $F = -kx$ υπάρχει και δύναμη αντίστασης $F_a = -bv$ και η κίνηση που προκύπτει είναι

$$x = A e^{-\lambda t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{b}{2m}, \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\text{και } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

□ Όταν σε ταλαντούμενο μηχανικό σύστημα δρα περιοδική εξωτερική δύναμη της μορφής $F = F_m \cos \omega_d t$, προκύπτει αμείωτη ταλάντωση της οποίας η απομάκρυνση και ταχύτητα δίνονται από τις σχέσεις

$$x = A \sin(\omega_d t - \alpha) \quad v = v_0 \cos(\omega_d t - \alpha)$$

όπου,

$$A = \frac{F_m}{\omega_d \sqrt{b^2 + \left(m\omega_d - \frac{k}{\omega_d}\right)^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{m\omega_d - \frac{k}{\omega_d}}{b}$$

$$\text{και } v_0 = \omega_d A$$

Αν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα, ω του συστήματος, ο ρυθμός παροχής ενέργειας στο ταλαντούμενο σύστημα γίνεται μέγιστος και το πλάτος της ταχύτητας γίνεται μέγιστο, οπότε έχουμε κατάσταση συντονισμού (ταχύτητας, ισχύος) $\omega_d = \omega$, συνθήκη συντονισμού.

□ Το κύκλωμα LC που έχει και ωμική αντίσταση R εκτελεί φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις και ισχύουν

$$q = Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega' t + \varphi) \quad \text{όπου}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$$

□ Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις προκύπτουν όταν στο κύκλωμα RLC συνδεθεί πηγή εναλλασσόμενης τάσης $v = V \cos \omega_d t$. Τα q και i δίνονται από τις σχέσεις

$$q(t) = Q_m \sin(\omega_d t - \alpha)$$

$$\text{όπου } Q_m = \frac{1}{\omega_d} \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}\right)^2}}$$

$$\text{και } \tan \alpha = \frac{L\omega_d - \frac{1}{C\omega_d}}{R}$$

$$i = I_m \cos(\omega_d t - \alpha)$$

όπου $I_m = \omega_d Q_m$. Κατά το συντονισμό ισχύει

$$\omega_d = \omega, \quad \text{όπου } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

□ Η αντιστοιχία των μεγεθών των μηχανικών και ηλεκτρικών ταλαντώσεων

είναι η παρακάτω

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow q & m &\leftrightarrow L \\ v &\leftrightarrow i & b &\leftrightarrow R \\ k &\leftrightarrow \frac{1}{C} & F_m &\leftrightarrow V_m \end{aligned}$$

Επίσης γνωρίζοντας ότι η μέση καταναλισκόμενη ισχύς σε κύκλωμα RLC

είναι

$$P = I_r^2 R$$

βρίσκουμε κατ' αντιστοιχία ότι στον μηχανικό ταλαντωτή είναι $\vec{p} = v_r^2 b$, όπου

$$v_r = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ

1. ΤΑ ΕΚΚΡΕΜΗ ΤΟΥ BARTON

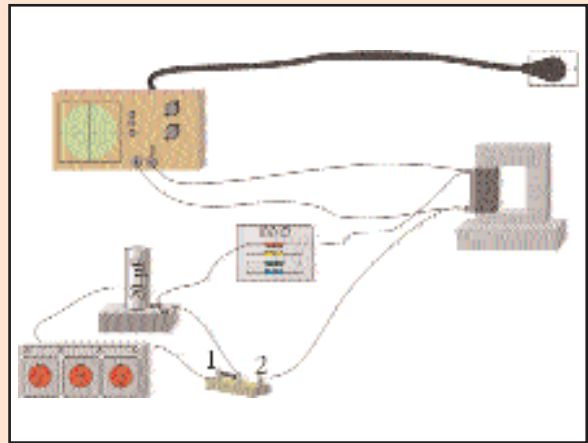
Από ένα τεντωμένο σχοινί να κρεμάσετε περίπου 8 εκκρεμή με διαφορετικά σταθερά μήκη, κλιμακούμενα από 0,25 m έως 0,75 m. Το τελευταίο, με πολύ μεγαλύτερη μάζα, το μήκος του θα μπορεί να μεταβάλλεται. Θέτοντας σε ταλάντωση το τελευταίο εκκρεμές, τα υπόλοιπα εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις συχνότητας ίσης με αυτή του τελευταίου. Μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης έχει αυτό το οποίο έχει ίδιο μήκος με το τελευταίο. Επίσης, αν το τελευταίο έχει μήκος περίπου 0,50 m θα δούμε το πλάτος των ταλαντώσεων, ξεκινώντας από το πιο κοντό εκκρεμές, να αυξάνεται μέχρι τα μεσαία εκκρεμή και μετά να μειώνεται μέχρι το πιο μακρύ.

2. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΦΘΙΝΟΥΣΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΤΟΝ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟ



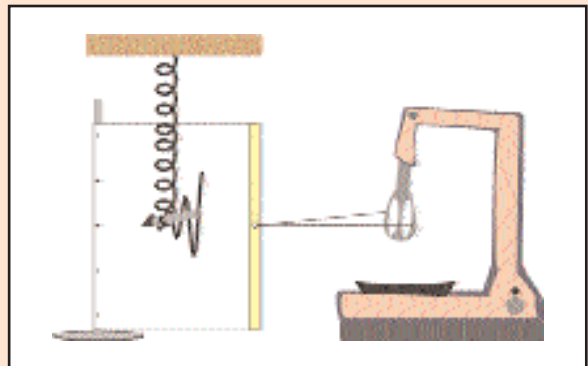
Πραγματοποιούμε το κύκλωμα του σχήματος. Τοποθετούμε αρχικά το διακόπτη

στη θέση 1 και μετά στη θέση 2. Στον παλμογράφο εμφανίζεται η μορφή της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης.



3. ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

Περνούμε ένα ρολό λευκού ανθεκτικού χαρτιού από μια κατακόρυφη ακλόνητη ράβδο. Κολλάμε στην άκρη του χαρτιού μια λωρίδα χοντρού χαρτιού και την δένουμε

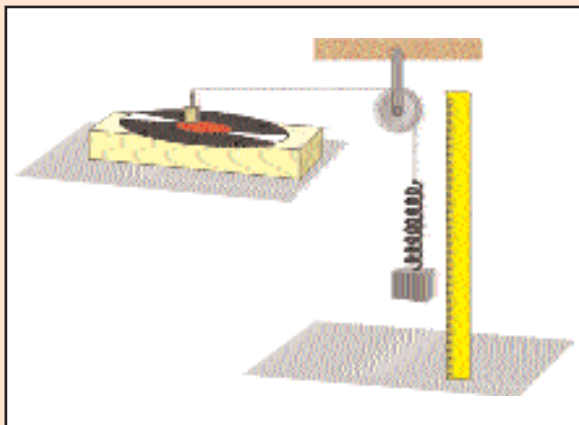


μέσω ενός σχοινιού με τον περιστρεφόμενο

άξονα ενός μίξερ. Μπροστά από το χαρτί τοποθετούμε ένα ελατήριο στο οποίο κρεμάμε ένα σώμα. Στο σώμα στερεώνουμε ένα μαρκαδόρο, ώστε η μύτη του να ακουμπά στο χαρτί. Θέτουμε το μίξερ σε λειτουργία και το σύστημα ελατήριο-σώμα σε ταλάντωση. Στο χαρτί καταγράφεται η φθίνουσα ταλάντωση του ελατηρίου (χρησιμοποιείτε μακρύ σχοινί, λεπτό και ανθεκτικό).

4. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Στο δίσκο πικ-απ στερεώστε ένα κουτί και στο κουτί ένα μολύβι. Περάστε μια πολύ χαλαρή θηλιά στο μολύβι και συνδέστε το σχοινί μέσω τροχαλίας με ένα σύστημα ελατήριο-σώμα. Βάλτε το δίσκο να γυρίζει 45 στροφές/λεπτό και καταγράψτε τα πλάτη των ταλαντώσεων του ελατηρίου μ' ένα χάρακα που είναι τοποθετημένος κατακόρυφα δίπλα στο σώμα. Επαναλάβετε δένοντας κατάλληλα το σχοινί, ώστε το ελατήριο να έχει άλλο πλήθος σπειρών (με αυτόν τον τρόπο να μεταβάλλεται η



σταθερά k του ελατηρίου), και παρατηρήστε τις αντίστοιχες μεταβολές του πλάτους.

(Παρατήρηση: Η σταθερά k μεταβάλλεται

ως εξής $k = \frac{\ell_0}{\ell} k_0$ όπου το ℓ_0, k_0 οι αρχι-

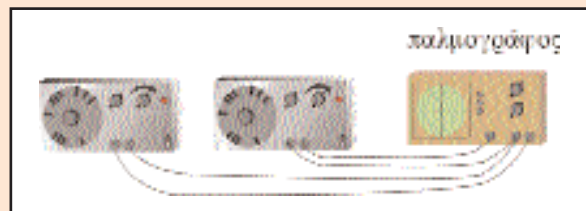
κές τιμές και ℓ το νέο φυσικό μήκος. Επίσης

φροντίστε $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{m}} < 45$ στροφές / λεπτό .

Σχεδιάστε την καμπύλη συντονισμού που προκύπτει.)

5. ΣΧΗΜΑΤΑ LISSAJOUS

Πραγματοποιήστε το κύκλωμα του σχήματος. Η μια γεννήτρια ρυθμίζεται, ώστε να παράγει αρμονική κυματομορφή συχνότητας περίπου 400 Hz και η άλλη περίπου 200 Hz. Η μια κυματομορφή εφαρμόζεται σε είσοδο του παλμογράφου που δίνει οριζόντια απόκλιση στο φωτεινό ίχνος, και η άλλη στην είσοδο της κατακόρυφης απόκλισης. Μεταβάλλουμε αργά την συχνότητα της πρώτης γεννήτριας, ώστε να δούμε σταθερά σχήματα Lissajous. Αλλάξτε τις συχνότητες, ώστε να είναι σε σχέση 1:3, 2:3, 3:4 κλπ. και παρατηρήστε τα διάφορα σχήματα.



6. ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑΤΑ

Από δύο νήματα ίδιου μήκους κρεμάστε δύο όμοια αντικείμενα π.χ. κουτιά κονσέρβας γεμάτα άμμο, και συνδέστε τα μεταξύ τους μ' ένα ασθενές ελατήριο σύζευξης (π.χ. ένα λαστιχάκι). Αν θέσουμε σε ταλάντωση τα εκκρεμή, αποδεικνύεται ότι η κίνηση του καθενός είναι η συνισταμένη δύο ταλαντώσεων με

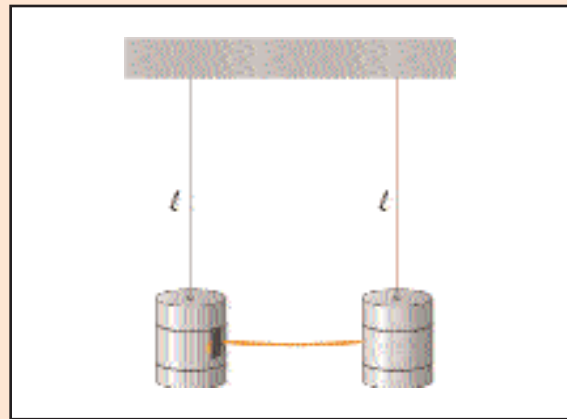
$$\text{συχνότητες } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\text{και } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{M}} \text{ , όπου } g \text{ η επιτάχυνση}$$

της βαρύτητας ℓ το μήκος του σχοινοῦ, k η σταθερά του ελατηρίου σύζευξης και M η μάζα του κάθε κουτιού. Αν η σύζευξη είναι

πολύ ασθενής, $\frac{2k}{M} \ll \frac{g}{l}$, θα δούμε

εμφανώς διακροτήματα. Το πλάτος της ταλάντωσης του ενός κουτιού μικραίνει μέχρι μηδενισμού και ύστερα αυξάνει μέχρι μια μέγιστη τιμή κ.ο.κ. Αντίστοιχα το πλάτος του άλλου κουτιού αυξάνεται και μετά μικραίνει κ.ο.κ. Υπολογίστε τη σταθερά k με αυτόν τον τρόπο και συγκρίνετέ την με την τιμή που θα βρείτε, από το νόμο του Hooke αναρτώντας σώμα μικρής γνωστής μάζας.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Να αναφέρετε παραδείγματα περιοδικών κινήσεων προσδιορίζοντας τα όρια, στα οποία αυτές προσεγγίζουν την αρμονική ταλάντωση.

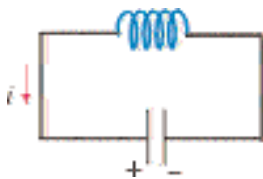
2

Αντιστοιχίστε τα μεγέθη του ταλαντούμενου ιδανικού κυκλώματος LC με αυτά του ταλαντούμενου συστήματος “σώμα-ελατήριο”.

L, C, q, i, U_E, U_B, t
 x, t, v, U, K, m, k

3

Στο ιδανικό κύκλωμα LC κάποια χρονική στιγμή η πολικότητα του πυκνωτή και η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος είναι αυτή του σχήματος. Εκείνη τη στιγμή συμβαίνει μετατροπή ενέργειας:



- (α) Μαγνητικής σε ηλεκτρική
- (β) Ηλεκτρικής σε μαγνητική
- (γ) Ηλεκτρικής και μαγνητικής σε θερμοδυναμική ενέργεια. Ποιά είναι η σωστή απάντηση;

4

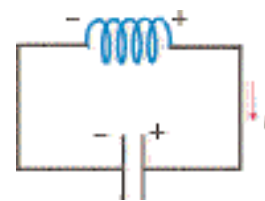
Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:
 “Σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC , τη χρονική στιγμή $t = 0$, κατά την οποία ο πυκνωτής είναι πλήρως

φορτισμένος, κλείνουμε το κύκλωμα. Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται και το ρεύμα αυξάνει σταδιακά λόγω του φαινομένου (α) Συγχρόνως έχουμε μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε (β) Όταν το φορτίο μηδενιστεί το ρεύμα γίνεται (γ) Κατόπιν το ρεύμα μειώνεται και έχουμε μετατροπή (δ) σε (ε)”.

5

Στο ιδανικό κύκλωμα LC τη στιγμή που το ρεύμα και η πολικότητα του πυκνωτή είναι όπως στο σχήμα, έχουμε ότι:

(α) Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι

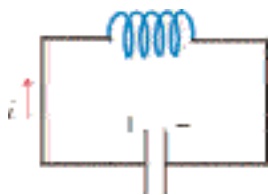


- (α) μεγαλύτερη από την τάση στα άκρα του πυκνωτή, επειδή ο πυκνωτής φορτίζεται.
- (β) Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι μεγαλύτερη από την τάση στα άκρα του πυκνωτή, γι αυτό το λόγο το ρεύμα έχει τη σχεδιασθείσα φορά.
- (γ) Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με την τάση στα άκρα του πυκνωτή διότι έχουν ίδια άκρα.
- (δ) Ο ρυθμός αύξησης του φορτίου του πυκνωτή είναι ίσος με το ρεύμα I_m .

Χαρακτηρίστε σωστές ή λάθος τις πιο πάνω προτάσεις.

6

Κάποια χρονική στιγμή η πολικότητα του πυκνωτή και η φορά του ρεύματος είναι όπως στο σχήμα για

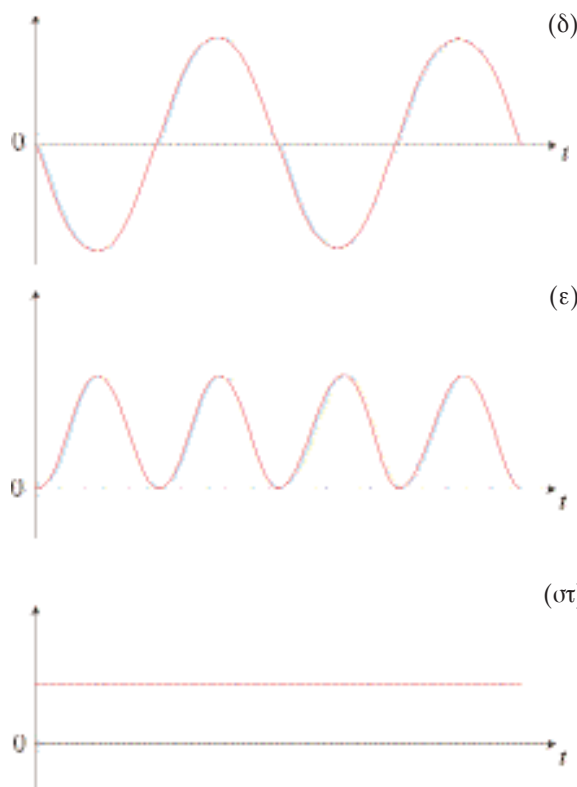
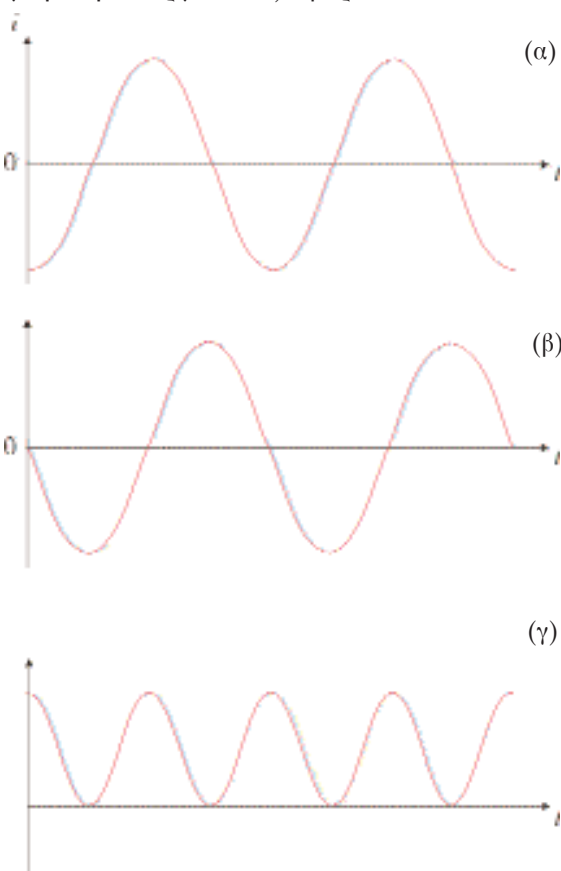


ένα ιδανικό κύκλωμα LC . Ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές;

- (α) Η τιμή του ρεύματος αυξάνεται και η τιμή του φορτίου του πυκνωτή αυξάνεται
- (β) Η τιμή του ρεύματος μειώνεται και η ηλεκτρική ενέργεια αυξάνεται.
- (γ) Η τιμή του ρεύματος αυξάνεται, η μαγνητική ενέργεια αυξάνεται και η τιμή του ηλεκτρικού φορτίου μειώνεται.
- (δ) Η μαγνητική ενέργεια αυξάνεται και η ηλεκτρική ενέργεια μειώνεται.

7

Η γραφική παράσταση του ρεύματος σ' ένα ιδανικό κύκλωμα LC είναι η (α) του σχήματος. Σε ποιές γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν οι ποσότητες, i) μαγνητική ενέργεια, ii) φορτίο του πυκνωτή, iii)



ηλεκτρική ενέργεια, iv) επαγωγική τάση του πηνίου και v) ολική ενέργεια του κυκλώματος.

8

Εάν επιμηκύνουμε το σωληνοειδές ενός κυκλώματος LC κρατώντας τις συνολικές σπειρές ίδιες, πώς πρέπει να μεταβληθεί η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, ώστε η περίοδος του κυκλώματος να παραμείνει ίδια;

9

Σε ταλαντούμενο ιδανικό κύκλωμα LC , όταν εκφορτίζεται ο πυκνωτής έχουμε:

- (α) Αύξηση του ρεύματος και αύξηση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.
- (β) Αύξηση του μαγνητικού πεδίου του πηνίου και μείωση της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή.
- (γ) Αύξηση του φορτίου και μείωση του ρεύματος.
- (δ) Μείωση του ρεύματος και αύξηση της ηλεκτρικής ενέργειας.

10

Θεωρώντας ως αρχή των χρόνων $t = 0$, τη στιγμή κατά την οποία το ρεύμα έχει τη μέγιστη τιμή $i = I$, να προσδιορίσετε τη μορφή των συναρτήσεων του φορτίου και του ρεύματος με το χρόνο.

11

Ένα ιδανικό κύκλωμα LC έχει περίοδο T . Συνδέομε με τον πυκνωτή, άλλο όμοιο του ως εξής:

i) Σε σειρά

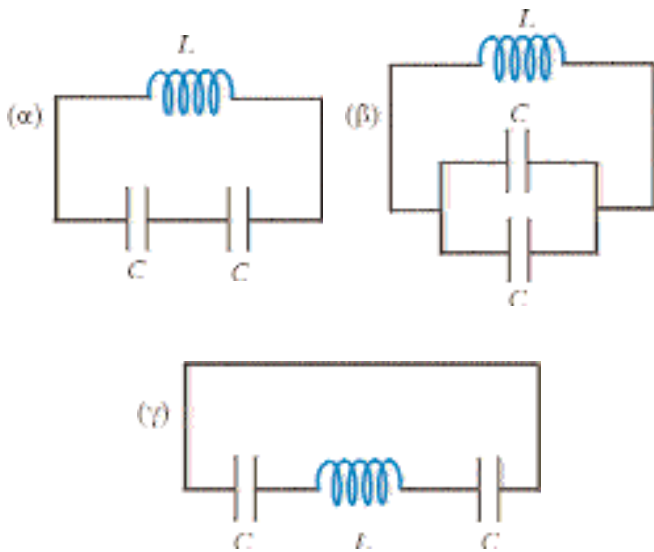
ii) Παράλληλα

Σε κάθε περίπτωση ποιά είναι η τιμή της περιόδου του νέου κυκλώματος;

- (α) $2T$, (β) $T/2$, (γ) $T\sqrt{2}$, (δ) $T/\sqrt{2}$

12

Το κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων LC , είναι αντίστοιχο με το σύστημα, μάζας m και ελατηρίου



σταθεράς k . Να κατασκευάσετε τα συστήματα μηχανικών ταλαντώσεων που αντιστοιχούν στα παρακάτω κυκλώματα.

13

Το μηχανικό σύστημα δύο ομοίων συζευγμένων εκκρεμών είναι αυτό του σχήματος. Η σύζευξη



πετυχαίνεται με τη χρήση μικρής μάζας m' , όπου $m' \ll m$. Μπορείτε να φανταστείτε ένα αντίστοιχο

με αυτό ηλεκτρικό σύστημα; Εξετάστε ποιοτικά τις ηλεκτρικές ταλαντώσεις του συστήματος.

14

Γιατί τη στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν στο κύκλωμα LC , το κύκλωμα δεν σταματάει να ταλαντώνεται;

15

Διαθέτουμε ένα πηνίο και δύο πυκνωτές. Με ποιά συνδεσμολογία πετυχαίνουμε τη μεγαλύτερη συχνότητα ταλαντώσεων και με ποιά τη μικρότερη;

16

Στην περίπτωση κατά την οποία πλησιάσουμε μέχρι να ακουμπήσουν τους οπλισμούς του πυκνωτή ιδανικού κυκλώματος LC προκύπτει το κύκλωμα L . Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ρεύμα έχει μια τιμή i για το δεύτερο κύκλωμα, αποδείξτε στα πλαίσια του κυκλώματος LC ότι η τιμή του ρεύματος θα παραμείνει σταθερή.

(Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι η εξαφάνιση του πυκνωτή ισοδυναμεί με απειριοσμό της χωρητικότητας του)

17

Στο πείραμα που περιγράφεται στο σχήμα 3.10, πώς θα υπολογίσουμε την περίοδο της ταλάντωσης αν γνωρίζουμε την ταχύτητα με την οποία κινείται το χαρτί;

18

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Θέτοντας ένα κατακόρυφο σύστημα σώμα-ελατήριο σε ταλάντωση με κάποιο αρχικό πλάτος, παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης (α) με το χρόνο, διότι έχουμε (β) λόγω της (γ) του σώματος με τον αέρα και επειδή το ελατήριο είναι (δ)”

19

Το στιγμιαίο πλάτος μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης

- (α) μειώνεται ανάλογα με το χρόνο
- (β) μειώνεται εκθετικά με το χρόνο
- (γ) μειώνεται κάθε φορά που το ταλαντούμενο σώμα φθάνει στην ακραία θέση
- (δ) μένει σταθερό με το χρόνο

20

Ένα μεταλλικό σωματίο μάζας m είναι κρεμασμένο από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k . Εκτελούμε δύο διαφορετικά πειράματα κατά τα οποία θέτουμε σε ταλάντωση το σωματίο, στην μια περίπτωση στον

αέρα και στην άλλη εξ' ολοκλήρου βυθισμένο σε νερό. Αν και στις δύο περιπτώσεις το αρχικό πλάτος είναι ίδιο, σε ποιά περίπτωση θα διαρκέσει περισσότερο η ταλάντωση και γιατί; Θεωρούμε ότι η ταλάντωση πρακτικά σταματάει όταν το πλάτος γίνει περίπου 7/1000 του αρχικού.

21

Για ένα ταλαντωτή ισχύει $\lambda \ll \omega_0$, με $\lambda = \frac{b}{2m}$,

όπου b η σταθερά απόσβεσης και $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ η

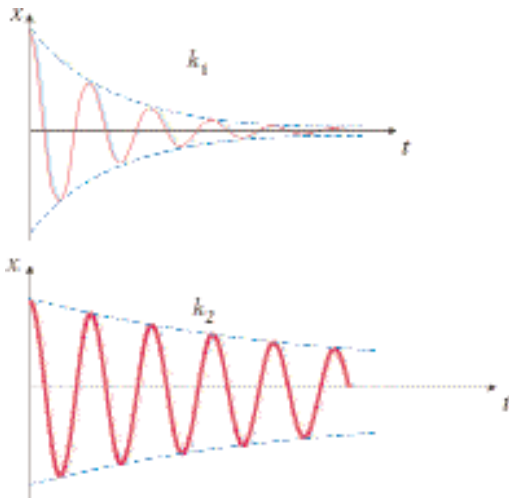
ιδιοσυχνότητα. Η ενέργειά του δίνεται προσεγγιστικά

από τη σχέση $E = \frac{1}{2}k A_t^2$, όπου A_t το στιγ-

μιαίο πλάτος. Να βρείτε την έκφραση της ενέργειας με το χρόνο στην περίπτωση αυτή και να σχεδιάσετε ποιοτικά τη γραφική παράσταση $E - t$.

22

Κρεμάμε διαδοχικά ένα σώμα από δύο κατακόρυφα ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Εκτρέπουμε



το σώμα και στις δύο περιπτώσεις με την αυτή αρχική απομάκρυνση και το αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα. Οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης με το χρόνο είναι αυτές του σχήματος.

- (α) Ποιά σταθερά είναι μεγαλύτερη η k_1 ή η k_2 ;
- (β) Για τον ίδιο χρόνο t ποιά ταλάντωση έχει μεγαλύτερο στιγμιαίο πλάτος; Αιτιολογείτε τις απαντήσεις σας.

23

Πού οφείλεται κατά την γνώμη σας ο μηδενισμός του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης, κα-

θώς η συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης γίνεται πολύ μεγάλη; (Φυσική εξήγηση).

24

Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός μηχανικού συστήματος

- (α) εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης
 - (β) είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος
 - (γ) είναι ίση με τη συχνότητα του εξωτερικού αιτίου
 - (δ) εξαρτάται από όλα τα προηγούμενα
- Ποια είναι η σωστή απάντηση;

25

Για την εξαναγκασμένη μηχανική ταλάντωση στο μόνιμο φαινόμενο ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

- (α) Το πλάτος της ταλάντωσης μικραίνει αν αυξήσουμε την συχνότητα του διεγέρτη
- (β) Δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας από τον διεγέρτη στο ταλαντούμενο σύστημα, επειδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι σταθερό
- (γ) Έχουμε διαρκώς μετατροπή μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης σε θερμοδυναμική, λόγω τριβών
- (δ) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ανάλογο του πλάτους της περιοδικής εξωτερικής δύναμης

26

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Συντονισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο η (α) του διεγέρτη ισούται με την (β) του συστήματος. Έχουμε τον (γ) προσφοράς ενέργειας από τον (δ) στο (ε) και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται (στ)”

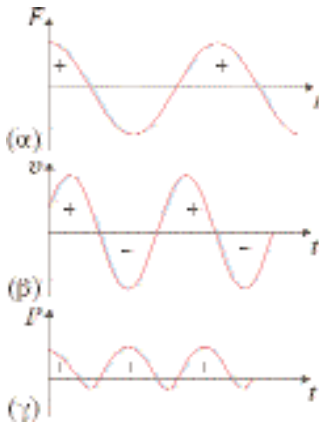
27

Τα εκκρεμή του σχήματος είναι συζευγμένα μέσω του σχοινιού AB. Τίθεται σε ταλάντωση το εκκρεμές P οπότε αρχίζουν να ταλαντώνονται και όλα τα άλλα. Ποιά από τα υπόλοιπα εκκρεμή ταλαντώνεται με μεγαλύτερο πλάτος και γιατί;



28

Στην περίπτωση κατά την οποία δεν έχουμε συντονισμό κατά την επίδραση εξωτερικής δύναμης $F = F_0 \cos \omega t$ σ' ένα ταλαντωτή, η ταχύτητα παρουσιάζει διαφορά φάσης α με την εξωτερική δύναμη και δίνεται από τη σχέση $v = v_{\max} \cos(\omega t - \alpha)$. Η γραφική παράσταση της ισχύος της εξωτερικής



δύναμης $P = Fv$ είναι αυτή του σχήματος (γ). Τι εκφράζουν τα αρνητικά και θετικά χωρία του σχήματος και τι η διαφορά τους;

29

Δύο πανομοιότυποι ταλαντωτές με απόσβεση τίθενται σε ταλάντωση με αρχικά πλάτη A_{01} και A_{02} αντίστοιχα, όπου $A_{01} > A_{02}$. Αν στους δύο ταλαντωτές δρουν ίδιες εξωτερικές δυνάμεις $F_1 = F_2 = F_0 \cos \omega t$ μετά από αρκετό χρόνο το πλάτος του πρώτου ταλαντωτή θα εξακολουθήσει να είναι μεγαλύτερο από αυτό του δεύτερου ή όχι;

30

Προσπαθώντας να συντονίσουμε ένα ταλαντούμενο μηχανικό σύστημα, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται. Είναι η συχνότητα αυτή μικρότερη ή μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

31

Ένα σωματίο είναι κρεμασμένο από κατακόρυφο ελατήριο. Το σωματίο βυθίζεται σε υγρό, όπου η σταθερά απόσβεσης είναι b_1 και εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την επίδραση αρμονικά μεταβαλλόμενης εξωτερικής δύναμης. Στο συντονισμό η ταλάντωση έχει πλάτος A_1 . Αν βυθίσουμε το σωματίο σε άλλο υγρό όπου η σταθερά απόσβεσης έχει τιμή $b_2 = 2b_1$ και το πλάτος της

εξωτερικής δύναμης παραμένει σταθερό, ποιά θα είναι το νέο πλάτος της ταλάντωσης στο συντονισμό.

- (α) $A_2 = A_1$,
- (β) $A_2 = 2A_1$,
- (γ) $A_2 = A_1/2$,
- (δ) $A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$

Η συχνότητα συντονισμού είναι διαφορετική στις δύο περιπτώσεις ή όχι;

32

Ένας ταλαντωτής ελατήριο-σώμα, όπου το σώμα έχει μάζα m και το ελατήριο σταθερά k , εκτελεί ταλαντώσεις στον αέρα, ($b_a \approx 0$), πλάτους A . Βυθίζουμε το σώμα σε υγρό που η σταθερά απόσβεσης είναι b . Με απλούς συλλογισμούς υπολογίστε την εξωτερική δύναμη F , που πρέπει να δρα, ώστε ο ταλαντωτής να εκτελεί μετά την παρέλευση αρκετού χρόνου ώστε το φαινόμενο να γίνει μόνιμο ταλάντωση ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας με αυτή που εκτελούσε στον αέρα.

33

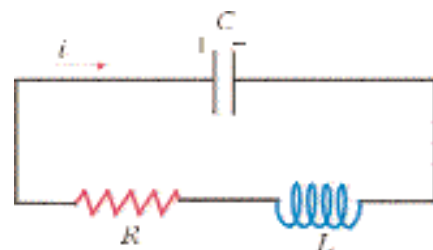
Εάν σ' ένα μη ιδανικό ηλεκτρικό κύκλωμα RLC προσθέσουμε μια αντίσταση R' παράλληλα με την R . Με την προϋπόθεση ότι το αρχικό φορτίο του πυκνωτή είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις, οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις στη δεύτερη περίπτωση θα μειωθούν μέχρι δεδομένο πλάτος σε χρόνο

- (α) μεγαλύτερο,
- (β) μικρότερο
- (γ) ίδιο

με την αρχική περίπτωση; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

34

Για το κύκλωμα RLC , την χρονική στιγμή t , που η πολικότητα του πυκνωτή και η φορά του ρεύματος είναι αυτές του σχήματος, να γράψετε τη μαθηματική



σχέση του ενεργειακού ισοζυγίου (διατήρηση της ισχύος) και να εξηγήσετε το περιεχόμενο της σχέσης.

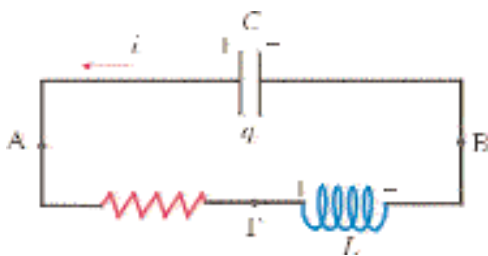
35

Αν σε κύκλωμα RLC , που εκτελεί φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, η αρχική φόρτιση γίνει από διπλάσια τάση, ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό και ποιο λάθος;

- (α) Η ταλάντωση θα διαρκέσει (με την έννοια ότι το πλάτος γίνεται περίπου $7/1000$ του αρχικού) περισσότερο
- (β) Ο μέσος ρυθμός παραγωγής θερμότητας θα είναι μεγαλύτερος
- (γ) Η ολική ενέργεια Joule, που θα παραχθεί στην αντίσταση μέχρι να σταματήσουν οι ταλαντώσεις, θα είναι τετραπλάσιος

36

Στο κύκλωμα του σχήματος έχουμε:



- (α) Μετατροπή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου
 - (β) Μετατροπή ενέργειας μαγνητικού πεδίου σε ηλεκτρικού πεδίου και θερμότητα
 - (γ) Μετατροπή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου και θερμότητα
- Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή;

37

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Κατά τις φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις έχουμε μετατροπή της (α) ενέργειας σε μαγνητική και αντιστρόφως. Όμως στη διάρκεια του φαινομένου ποσότητα των ενεργειών μετατρέπεται σε (β) πάνω στην αντίσταση R λόγω (γ)”.

38

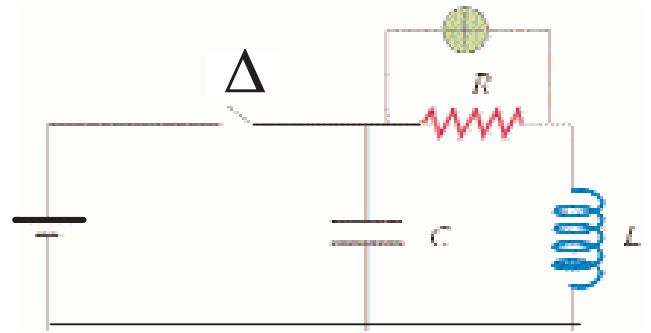
Προσδιορίστε την αντίστοιχη ποσότητα της τάσης, V_R , στα άκρα της ωμικής αντίστασης ηλεκτρικού κυκλώματος RLC στον μηχανικό ταλαντωτή με απόσβεση.

39

Σε αντιστοιχία με την ερώτηση 34 γράψτε τη μαθηματική σχέση του ενεργειακού ισοζυγίου (διατήρηση της ισχύος) και εξηγήστε το περιεχόμενό της για μηχανικό σύστημα ταλάντωσης με απόσβεση.

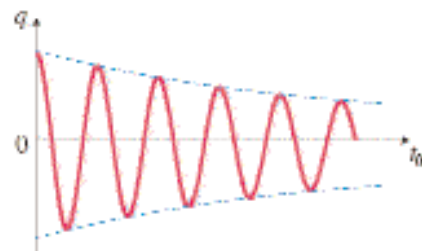
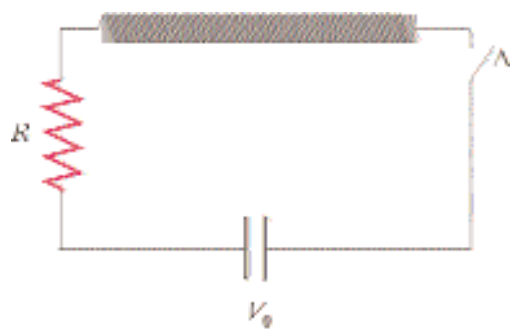
40

Στο κύκλωμα του σχήματος ανοίγουμε και κλείνουμε το διακόπτη με αργό ρυθμό και η τάση στην αντίσταση



R καταγράφεται σε παλμογράφο. Βρείτε τη μορφή που παρατηρείται στον παλμογράφο, και εξηγήστε την.

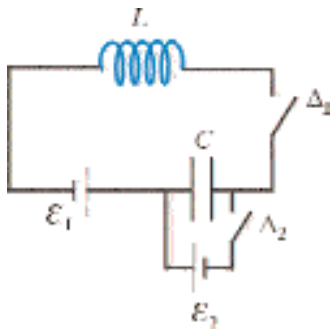
41



Κύκλωμα RLC εκτελεί φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια εισάγουμε στο πηνίο ένα υλικό με (μαγνητική) διαπερατότητα $\mu = 100$. Φορτίζουμε τον πυκνωτή σε αρχική τάση ίση με την προηγούμενη και κλείνοντας το διακόπτη παράγονται ξανά φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Σχεδιάστε ποιοτικά τη συνάρτηση $q-t$. Οι ταλαντώσεις θα διαρκέσουν περισσότερο ή λιγότερο χρόνο σε σχέση με τις προηγούμενες; Περιγράψτε αντίστοιχο μηχανικό σύστημα. Θεωρείστε τις απώλειες στο υλικό του πυρήνα αμελητέες. Θεωρούμε ότι η ταλάντωση παύει όταν το πλάτος γίνει ίσο περίπου με τα $7/1000$ του αρχικού.

42

Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$. Αρχικά ο διακόπτης Δ_1 είναι ανοικτός και ο Δ_2 κλειστός. Διαδοχικά ανοίγουμε το Δ_2 και κλείνουμε τον Δ_1 . Θα εκτελέσει ταλαντώσεις το σύστημα LC ; Σκεφτείτε



αντίστοιχο μηχανικό σύστημα ώστε να μπορέσετε να προσδιορίσετε κατ' αντιστοιχία τη συχνότητα της ταλάντωσης.

43

Αντιστοιχίστε τις προτάσεις που αφορούν μηχανικές ταλαντώσεις με αυτές που αφορούν τις ηλεκτρικές ταλαντώσεις:

- | | |
|--|--|
| <u>Μηχανικές ταλαντώσεις</u> | <u>Ηλεκτρικές ταλαντώσεις</u> |
| (α) Βαρύτερο σώμα | 1) Μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. |
| (β) Ελατήριο ίδιου υλικού με μεγαλύτερο φυσικό μήκος | 2) Σωληνοειδές, ίδιου μήκους και διατομής, με περισσότερες σπείρες |
| γ) Μεγαλύτερη αρχική επιμήκυνση | 3) Σύρματα ίδιου υλικού, ίδιου μήκους και μικρότερου πάχους |
| δ) Ταλάντωση σε πυκνότερο ρευστό | 4) Μεγαλύτερη τιμή της αρχικής τάσης φόρτισης του πυκνωτή |

44

Η ενέργεια που προσφέρεται σε μια περίοδο απ' τη πηγή εναλλασσόμενης τάσης στο κύκλωμα RLC μετατρέπεται:

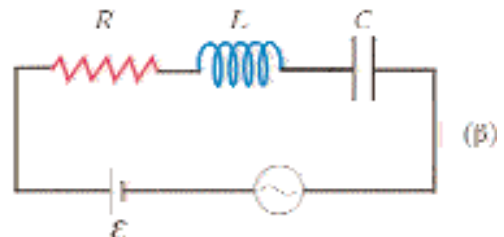
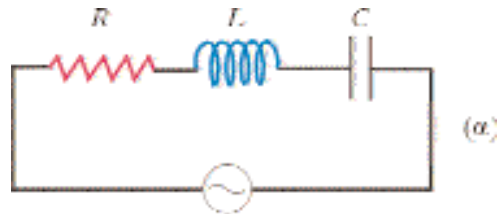
- (α) Σε ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή C
 - (β) Σε μαγνητική ενέργεια του πηνίου L
 - (γ) Σε θερμοδυναμική ενέργεια στην ωμική αντίσταση R
 - (δ) Και στις τρεις προηγούμενες μορφές
- Ποιά είναι η σωστή απάντηση;

45

Σ' ένα κύκλωμα RLC, το οποίο τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενη τάσης, αυξάνοντας ελαφρώς τη συχνότητα της πηγής παρατηρούμε ότι το πλάτος του ρεύματος αυξάνεται. Ποιό μέγεθος προηγείται η τάση πηγής ή το ρεύμα; Εξηγήστε με φυσικούς συλλογισμούς το μηδενισμό του πλάτους του ρεύματος που διαρρέει κύκλωμα RLC, όταν η συχνότητα της πηγής τροφοδοσίας γίνεται πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή.

46

Κύκλωμα RLC τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση της μορφής $v = V \cos \omega t$. Εάν παρεμβάλουμε σε σειρά στο κύκλωμα (σχήμα β) πηγή συνεχούς τάσης E, ποιά από τα παρακάτω θα συμβούν στο μόνιμο φαινόμενο;



- (α) Το πλάτος του ρεύματος θα παραμείνει ίδιο καθώς και η συχνότητά του.
- (β) Το ρεύμα θα μεταβληθεί διότι θα είναι το συνισταμένο που οφείλεται στην εναλλασσόμενη τάση και στη συνεχή.
- (γ) Το φορτίο του πυκνωτή θα μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο.
- (δ) Το ρεύμα i θα μεταβάλλεται όπως και προηγουμένως ενώ το φορτίο q θα μεταβάλλεται με το ίδιο πλάτος, γύρω από τη τιμή $q_a = CE$. Δηλαδή θα είναι:

$$q = CE + q_0 \cos(\omega t - \phi)$$

ε) Η συνολική ενέργεια που παρέχει σε μια περίοδο η πηγή συνεχούς τάσης είναι μηδέν.

47

Δίνεται ένα αρμονικό μέγεθος $a = -A \cos \omega t$ και ένα αρμονικό μέγεθος $\beta = B \cos \omega t$. Ποιά είναι η διαφορά φάσης τους;

- (α) 0,
 - (β) $\pi/2$,
 - (γ) $\pi/3$,
 - (δ) π ;
- Δίνεται ότι $A > 0$ και $B > 0$

48

Τα αρμονικά μεγέθη a και β δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $a = A \cos \omega t$ και $\beta = B \sin \omega t$. Ποιά είναι η διαφορά φάσης τους; (A, B θετικά).

- (α) 0,
- (β) $\pi/2$,
- (γ) $3\pi/2$
- (δ) π

49

Κατά τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων με ίδιο πλάτος και κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 ίδιας διεύθυνσης, η κυκλική συχνότητα (διαμόρφωσης) που προκύπτει δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές;

50

- α) Είναι το διακροτήμα περιοδική κίνηση; Αν ναι ποιά είναι η περίοδος του;
- β) Κατά το διακροτήμα ποιά είναι η συχνότητα της ταλάντωσης;

51

Αποδείξτε ότι το σωματίδιο που εκτελεί την σύνθετη κίνηση του σχήματος 3.32 κινείται σύμφωνα με τους δείκτες του ορολογιού. (Υπόδειξη: αποδείξτε ότι στη θέση $(A_x, 0)$ το σωματίδιο έχει $v_y < 0$).

52

Γιατί η νότα Λα, ενώ έχει ίδια συχνότητα για το μπουζούκι και για την κιθάρα, η χροιά είναι διαφορετική για κάθε όργανο;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

Για ένα ιδανικό κύκλωμα LC οι τιμές της αυτεπαγωγής και της χωρητικότητας είναι αντίστοιχα $L = 10 \text{ mH}$ και $C = 1,0 \text{ pF}$. α) Να βρείτε τη συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος, β) Ποιά τιμή πρέπει να έχει η χωρητικότητα πρόσθετου πυκνωτή και με ποιό τρόπο πρέπει να συνδεθεί στο κύκλωμα ο πυκνωτής αυτός ώστε η περίοδος του νέου κυκλώματος να είναι διπλάσια της περιόδου του προηγούμενου κυκλώματος.

2

Διαθέτουμε πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 2,0 \text{ mH}$ και δύο πυκνωτές με χωρητικότητες $C_1 = 30 \text{ }\mu\text{F}$ και $C_2 = 60 \text{ }\mu\text{F}$ αντίστοιχα. Να βρείτε όλες τις δυνατές συχνότητες που μπορούν να παραχθούν σχηματίζοντας ηλεκτρικά κυκλώματα με τα πιο πάνω στοιχεία.

3

Πυκνωτής φορτίζεται με αρχικό φορτίο $q_0 = 2,0 \text{ }\mu\text{Cb}$, έχοντας αρχική ενέργεια $U = 2,0 \text{ }\mu\text{J}$. Κατόπιν συνδέεται με πηνίο οπότε παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι $1,0 \text{ mA}$. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή και η αυτεπαγωγή L του πηνίου.

4

Για δύο διαδοχικά εξίσου μοιράσματα της ενέργειας σε μαγνητική και ηλεκτρική ενός κυκλώματος LC

περνά χρόνος $\Delta t = \pi \times 10^{-4} \text{ s}$. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή του κυκλώματος όταν ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι $L = 10 \text{ mH}$.

5

Σε κύκλωμα LC παράγονται ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο $Q = 2 \text{ }\mu\text{C}$. Αν μετά χρόνο $\Delta t = \frac{\pi}{3} \times 10^{-4} \text{ s}$ το φορτίο του πυκνωτή γίνεται για

πρώτη φορά $q = \frac{Q\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η μαγνητική ενέργεια του πηνίου εκείνη τη στιγμή. Η χωρητικότητα του πυκνωτή του κυκλώματος είναι $C = 2 \text{ nF}$.

6

Ο πυκνωτής ιδανικού κυκλώματος LC είναι φορτισμένος αρχικά από τάση $V = 300 \text{ V}$. Τα στοιχεία του κυκλώματος έχουν τιμές $L = 20 \text{ mH}$ και $C = 2,0 \text{ }\mu\text{F}$. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται να υποτετραπλασιαστεί η αρχική ενέργεια του πυκνωτή. Επίσης τη στιγμή που έχει υποτετραπλασιαστεί η ενέργεια του πυκνωτή να υπολογισθούν:

- (α) Η τιμή του ρεύματος
- (β) Η μαγνητική ενέργεια του πηνίου
- (γ) Ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος di/dt .

7

Να βρείτε τις εκφράσεις της μαγνητικής ενέργειας

του πηνίου και της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή, συναρτήσει του φορτίου q του πυκνωτή. Κατόπιν να κάνετε τα διαγράμματα $U_{\eta\lambda} - q$ και $U_{\mu\alpha\gamma} - q$.

8

Ένα ιδανικό κύκλωμα LC με $L = 2,0$ mH και $C = 20$ nF την χρονική στιγμή $t = 0$, έχει πλήρως φορτισμένο τον πυκνωτή με φορτίο $Q = 2,0$ μ Cb. Να υπολογισθεί ο μέγιστος ρυθμός αποθήκευσης μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο καθώς και ο χρόνος t που θα συμβεί αυτό για πρώτη φορά.

9

Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από πηνίο αυτεπαγωγής L και πυκνωτή σταθερής χωρητικότητας C . Παράλληλα προς τον πυκνωτή του κυκλώματος συνδέεται άλλος μεταβλητός πυκνωτής. Για τις τιμές $C_1 = 3$ nF και $C_2 = 8$ nF του μεταβλητού πυκνωτή, οι συχνότητες των ηλεκτρικών ταλαντώσεων

είναι $f_1 = 25$ kHz και $f_2 = \frac{50}{3}$ kHz αντί-

στοιχα. Να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου και η χωρητικότητα του πυκνωτή του κυκλώματος. Θεωρείστε ότι $\pi^2 = 10$

10

Διαθέτουμε δύο πυκνωτές και ένα πηνίο. Τα δύο κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων LC που προκύπτουν συνδέοντας τη μια φορά τους πυκνωτές παράλληλα και την άλλη σε σειρά, έχουν περιόδους $T_1 = 5\pi \times 10^{-6}$ s και $T_2 = 2\pi \times 10^{-6}$ s αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή καθώς και η αυτεπαγωγή του πηνίου, αν γνωρίζουμε ότι οι χωρητικότητες των πυκνωτών C_1 και C_2 συνδέονται με τη σχέση $C_1 C_2 = 10^{-8}$ F².

11

Να υπολογίσετε το χρόνο μέσα στο οποίο το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης, ενός σώματος μάζας m που είναι κρεμασμένο από ελατήριο σταθεράς k , θα υποδιπλασιαστεί. Δίνεται επίσης η σταθερά απόσβεσης b .

12

Στην περίπτωση ταλαντωτή με απόσβεση, η ποσότητα

$$\tau = \frac{1}{2\lambda}$$

ονομάζεται χρόνος χαλάρωσης.

α) Αποδείξτε ότι η ποσότητα τ έχει διαστάσεις χρόνου. β) Υπολογίστε το ποσοστό μεταβολής του

πλάτους σε χρόνο ίσο με το χρόνο χαλάρωσης.

13

Η σταθερά επαναφοράς ενός ταλαντωτή είναι

$$k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

και η μάζα του ταλαντούμενου σώματος

$$m = 0,10 \text{ kg. Το σώμα βυθίζεται σε υγρό, όπου η σταθερά απόσβεσης είναι } b = 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας ταλάντωσης σε σχέση με την ιδιοσυχνότητα.

14

Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται σε χρόνο $\Delta t = 7,0$ s. Πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε το πλάτος να γίνει οκτώ φορές μικρότερο;

15

Για τον υπολογισμό της σταθεράς απόσβεσης b , εκτελούμε το πείραμα του σχήματος 3.10 δύο φορές. Την πρώτη φορά κρεμάμε το σώμα από ελατήριο σταθεράς k και την άλλη από δύο όμοια ελατήρια σταθεράς k το καθένα τα οποία συνδέονται παράλληλα. Από τα δύο πειράματα μετράμε τις αποστάσεις d_1 και d_2 μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων και υπολογίζουμε το λόγο

$$\beta = \frac{d_1}{d_2}. \text{ Να απο-}$$

δείξετε ότι η σταθερά απόσβεσης δίνεται από τη σχέση

$$b = \sqrt{\frac{4km(\beta^2 - 2)}{\beta^2 - 1}}$$

16

Η σταθερά k ενός αρμονικού ταλαντωτή ισούται με 100 N/m και η μάζα m του σωματιδίου είναι 4,0 kg. Το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση, υπό την επίδραση αρμονικά μεταβαλλόμενης εξωτερικής δύναμης. Στην κατάσταση συντονισμού το πλάτος της ταλάντωσης είναι σχεδόν μέγιστο και έχει την τιμή 0,80 m. Αν η σταθερά απόσβεσης είναι $b = 0,40$ kg/s να προσδιορίσετε: α) Την έκφραση της εξωτερικής δύναμης με το χρόνο. β) Το πλάτος της ταλάντωσης καθώς και τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας όταν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης γίνει ίση με το 1/5 της ιδιοσυχνότητας του συστήματος. Τι παρατηρείτε;

17

Αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένες αρμονικές ταλαντώσεις υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης της μορφής $F = 2\sqrt{2} \cos 8t$ (S.I.).

Αν η σταθερά επαναφοράς είναι $k = 56 \text{ N/m}$, η μάζα του σωματίου του ταλαντωτή $m = 1,0 \text{ kg}$ και η σταθερά απόσβεσης $b = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, να βρείτε:

- (α) Την συνάρτηση της απομάκρυνσης με το χρόνο
- (β) Την ενέργεια που μεταφέρεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη σε μια περίοδο
- (γ) Την μέγιστη τιμή της ταχύτητας καθώς και τον μέσο ρυθμό παραγωγής θερμοδυναμικής ενέργειας στο συντονισμό.

18

Για αρμονικό ταλαντωτή που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, η διαφορά φάσης ταχύτητας και εξωτερικής δύναμης είναι $\pi/4$. Να υπολογισθεί η μέση ισχύ που παράγει η εξωτερική δύναμη, εάν στο συντονισμό έχει την τιμή 20 watt.

19

Για δύο διαφορετικές τιμές της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης $f_1 = 9,0 \text{ Hz}$ και $f_2 = 4,0 \text{ Hz}$ σε ένα σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, η μέση ισχύς της εξωτερικής δύναμης είναι η ίδια. Να υπολογιστεί η ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

20

Σ' ένα ιδανικό κύκλωμα LC ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 19 \mu\text{F}$ και το πηνίο αυτεπαγωγής $L = 2,5 \text{ mH}$. Ποία η αντίσταση που πρέπει να συνδέσουμε στο κύκλωμα σε σειρά με τα στοιχεία L και C ώστε η συχνότητα των φθίνουσών ταλαντώσεων που προκύπτουν να είναι τα 9/10 της ιδιοσυχνότητας του κυκλώματος;

21

Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 8,0 \mu\text{F}$ φορτίζεται με τάση $V = 320 \text{ V}$ και κατόπιν συνδέεται μέσω διακόπτη με πηνίο το οποίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 5,0 \text{ mH}$ και ωμική αντίσταση $R = 0,30 \Omega$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε το διακόπτη και στο κύκλωμα παράγονται φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Να γράψετε την έκφραση του φορτίου του πυκνωτή με το χρόνο.

22

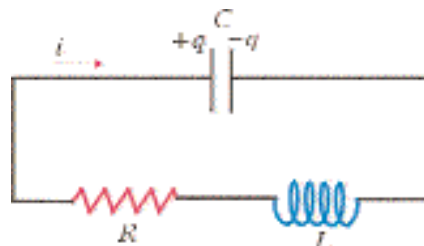
Σε ένα μη ιδανικό κύκλωμα RLC , που εκτελεί φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους του φορτίου είναι $25 \ln 2 \mu\text{s}$, ενώ η κυκλική ιδιοσυχνότητα του είναι

$\omega_0 = 5,0 \times 10^4 \text{ rad/s}$. Να υπολογισθεί η συχνότητα των φθίνουσων ταλαντώσεων.

23

Κάποια χρονική στιγμή στο ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι 200 V ενώ το ρεύμα έχει τιμή $i = 2,0 \text{ A}$. Αν η αντίσταση του κυκλώματος είναι $R = 5,0 \Omega$ και ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου $L = 2,0 \text{ mH}$, να βρείτε:

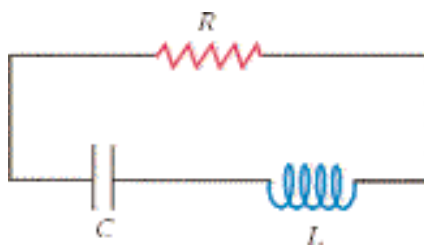
- α) Το ρυθμό μεταβολής του ρεύματος εκείνη τη στιγμή, β) το ρυθμό αποταμίευσης ενέργειας στον



πυκνωτή και γ) το ρυθμό απώλειας μαγνητικής ενέργειας του πηνίου.

24

Στο μη ιδανικό ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος η συχνότητα των φθίνουσών ταλαντώσεων είναι $\sqrt{33} \times 10^5 \text{ Hz}$. Αν σε σειρά με την R συνδέσουμε αντίσταση $R' = R$, πόση θα είναι η νέα συχνότητα



των φθίνουσων ταλαντώσεων; Δίνεται η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος $f_0 = 6 \times 10^5 \text{ Hz}$.

25

Ένα σώμα εκτελεί συγχρόνως δύο ταλαντώσεις

$$x_1 = 3 \sin 10t \text{ και } x_2 = 4 \cos 10t$$

Ποια είναι η συνισταμένη κίνηση;

26

Ένα σώμα εκτελεί συγχρόνως δύο κάθετες μεταξύ τους ταλαντώσεις

$$x = 3 \sin 10t \text{ και } y = 3 \cos 10t$$

Να βρεθεί η τροχιά του σώματος, καθώς και η φορά που διαγράφεται αυτή.



Κεραία (εκπομπής) ραδιοφωνικού σταθμού.

3.2 ΚΥΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όταν κάποιος μιλάει τον ακούμε, ενώ βρισκόμαστε σε κάποια απόσταση από αυτόν. Μια λάμπα που ανάβει γίνεται αντιληπτή από μακρινή απόσταση. Ακόμη, ρίχνοντας ένα πετραδάκι σε μια ήρεμη επιφάνεια νερού, δημιουργείται διαταραχή που φτάνει σε άλλα σημεία της επιφάνειας. Όλα τα παραπάνω φαινόμενα είναι φυσικές διαδικασίες, όπου οι διαταραχές που δημιουργούνται σε κάποιο σημείο, διαδίδονται στο χώρο και γίνονται αντιληπτές σε κάποιο άλλο σημείο. Ο μηχανισμός διάδοσης της διαταραχής λέγεται κύμα και η αιτία που προκαλεί την αρχική διαταραχή λέγεται πηγή ή εστία του κύματος.

Τα κύματα που διαδίδονται σε κάποιο υλικό μέσο λόγω αλληλεπίδρασης των μορίων του μέσου, λέγονται μηχανικά κύματα. Κατά τη διάδοση ενός μηχανικού κύματος συμβαίνει μεταφορά ενέργειας και όχι μεταφορά μάζας του φορέα, στον οποίο διαδίδεται το κύμα.

Τα κύματα μπορεί να διαδίδονται σε μονοδιάστατο μέσο, όπως μια χορδή, ή σε επιφάνεια που είναι δισδιάστατο μέσο (επιφανειακά κύματα) π.χ. επιφάνεια τυμπάνου, ή σε τρισδιάστατο μέσο, όπως τα ηχητικά κύματα στον αέρα (αυτά ανήκουν στο είδος των κυμάτων τα οποία ονομάζονται σφαιρικά).

Ανάλογα με τον τρόπο που μετατοπίζονται τα σωματίδια του μέσου κατά τη διάδοση του κύματος, τα κύματα χωρίζονται σε: α) **Εγκάρσια**, όταν η μετατόπιση (ή η διαταραχή) είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος π.χ. στην τεντωμένη χορδή. β) **Διαμήκη** όταν η μετατόπιση (ή η διαταραχή) είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης π.χ. ηχητικά κύματα στον αέρα και γ) **Μικτά**, όταν συνυπάρχουν και οι δύο τρόποι, όπως τα κύματα στην επιφάνεια του νερού.

Ο τομέας της Φυσικής που ασχολείται με τα κυματικά φαινόμενα λέγεται Κυματική. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα φαινόμενα ανάκλασης, διάθλασης και συμβολής των κυμάτων. Επίσης, με την παραγωγή και λήψη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

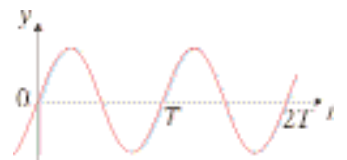
ΑΡΜΟΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αρμονικά κύματα (λέγονται και ημιτονικά). Είναι τα κύματα στα οποία η διαταραχή ενός μεγέθους είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου (για κάθε δεδομένη θέση) ή της θέσης (για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή) ή και των δύο. Για μονοδιάστατο (οδεύον) αρμονικό κύμα, που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x , η διαταραχή $y(x, t)$ περιγράφεται από τη σχέση

$$y(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{ή γενικότερα,} \quad y(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (3.38)$$

Όπου $(\omega t - kx + \varphi)$ είναι η φάση του κύματος και φ η λεγόμενη αρχική φάση, δηλαδή η φάση στη θέση $x=0$ για $t=0$ (Συνήθως η αρχική φάση ανάγεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$, δηλαδή $0 \leq \varphi < 2\pi$).



ΣΧΗΜΑ 3.35

Κάθε στοιχειώδες τμήμα του ελαστικού μέσου κατά τη διάδοση αρμονικού κύματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Οι συναρτήσεις (3.38) περιγράφουν κύματα διαδιδόμενα προς τη φορά του άξονα x . Η αντίστοιχη συνάρτηση αρμονικών κυμάτων τα οποία διαδίδονται προς την αντίθετη κατεύθυνση είναι

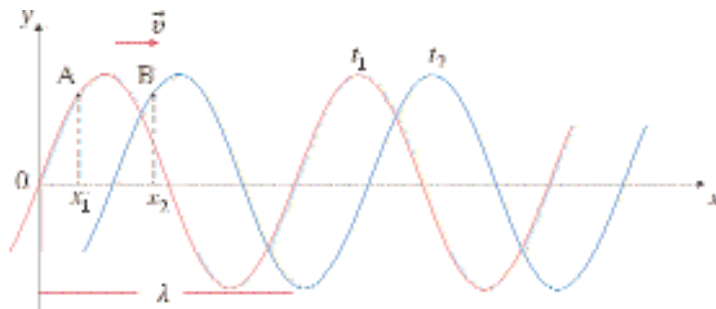
$$y(x, t) = A_0 \sin(\omega t + kx) \tag{3.39}$$

Η ποσότητα k λέγεται κυκλικός (ή γωνιακός) κυματαριθμός ή **κυκλική (γωνιακή) επαναληψιμότητα**. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιείται και ο όρος συντελεστής διάδοσης και είναι

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.40}$$

Το μέγεθος λ είναι το μήκος κύματος και ισούται με την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων που βρίσκονται σε φάση.

Η ποσότητα ω λέγεται **κυκλική ή γωνιακή συχνότητα** και είναι $\omega = 2\pi f$ (f (ή ν) είναι η συχνότητα, με την οποία εκτελούν ταλάντωση τα σωματίδια του μέσου και ονομάζεται συχνότητα του κύματος).



ΣΧΗΜΑ 3.36

Δύο στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος τις στιγμές t_1 και t_2 ($t_1 > t_2$). Τα σημεία A και B έχουν ίδια φάση.

Στο σχήμα 3.36, το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα v . Τα σημεία A και B έχουν την ίδια φάση, επομένως

$$\begin{aligned} \omega t_1 - kx_1 + \varphi &= \omega t_2 - kx_2 + \varphi && \text{ή} \\ \omega(t_2 - t_1) &= k(x_2 - x_1) && \text{ή} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

Άρα
$$v = \frac{\omega}{k} \tag{ή}$$

$$v = \lambda f \tag{3.41}$$

Γενικά η ταχύτητα του κύματος σε ένα μέσο δίνεται από σχέση της μορφής $v = \sqrt{A/B}$, όπου A ένα μέγεθος που σχετίζεται με την ελαστικότητα του μέσου και B ένα μέγεθος που εξαρτάται από τη μάζα. Στη χορδή π.χ. τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{3.42}$$

όπου F η τείνουσα δύναμη, (μηχανική τάση της χορδής) και μ η γραμμική πυκνότητα της χορδής (μάζα ανά μονάδα μήκους).

Μελετούμε ιδιαίτερα τα αρμονικά κύματα, διότι σε πολλές φυσικές διαδικασίες η μορφή των κυμάτων προσεγγίζει ικανοποιητικά την αρμονική (π.χ. ραδιοφωνικά κύματα). Επίσης κάθε περιοδική διαταραχή $y(x,t)$ με ανάλυση Fourier γράφεται ως άθροισμα (επαλληλία) αρμονικών κυμάτων.

Εκτός από τα μηχανικά κύματα, που για να διαδοθούν χρειάζονται κάποιο μέσο, δηλαδή υπάρχει σύζευξη μεταξύ των σωματιών του μέσου, υπάρχουν και άλλα είδη κυμάτων. Είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ίσως τα βαρυτικά, τα κύματα της κβαντικής φυσικής (περιγράφουν σωματίδια και λέγονται υλικά κύματα). Αυτά δεν διαδίδονται μέσα σε κάποιο μέσο με τις παραπάνω ιδιότητες. Τα κύματα αυτά διαδίδονται ουσιαστικά στο κενό.

Παράδειγμα 3-8

Το ομογενές σύρμα του σχήματος έχει μάζα $m = 2,0 \text{ kg}$ και μήκος $L = 10 \text{ m}$. Αν το σώμα που κρέμεται έχει βάρος 800 N , υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται ένας παλμός να διατρέξει όλο το σύρμα.

Απάντηση

Η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής είναι

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

Συνεπώς ο χρόνος, για να φτάσει ο παλμός από την μια άκρη στην άλλη, είναι

$$\Delta t = \frac{L}{v} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \sqrt{\frac{mL}{F}}$$

Η τείνουσα δύναμη F είναι ίση με το βάρος του σώματος που κρέμεται. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2,0 \times 10}{800}} \text{ s} \quad \text{ή} \quad \Delta t \approx 0,16 \text{ s}$$

ΙΣΟΦΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ - ΜΕΤΩΠΑ ΚΥΜΑΤΟΣ

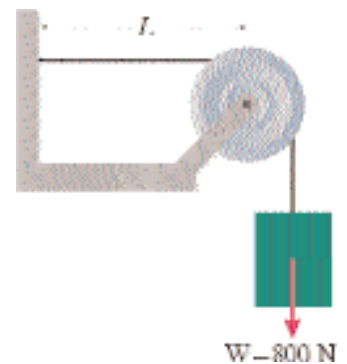
Έστω αρμονικό, ως προς το χρόνο, σφαιρικό κύμα το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr)$$

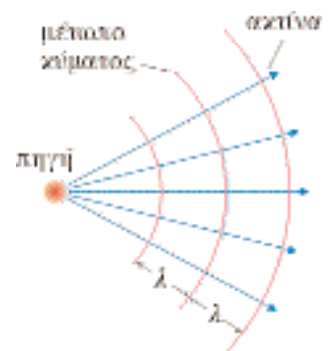
όπου A σταθερά και r η απόσταση από το σημείο που βρίσκεται η πηγή του κύματος.

Ισοφασική επιφάνεια ή μέτωπο κύματος, είναι κάθε συνεχής επιφάνεια, πάνω στην οποία η φάση είναι η ίδια. Στην περίπτωση σφαιρικού κύματος έχουμε για την φάση την σχέση $\omega t - kr = \text{σταθερό}$. Άρα, κάθε χρονική στιγμή t είναι $r = \text{σταθ}$. Επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι ισοφασικές επιφάνειες είναι ομόκεντρες σφαίρες με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων, όπου βρίσκεται και η πηγή των κυμάτων. Συνηθίζουμε να σχεδιάζουμε τις ισοφασικές επιφάνειες σε αποστάσεις ενός μήκους κύματος μεταξύ τους (Σχ. 3.38).

Κάθε συνεχής γραμμή, η οποία είναι κάθετη στις ισοφασικές επιφάνειες, είναι ακτίνα του κύματος και δηλώνει τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στην περίπτωση των ανωτέρω σφαιρικών κυμάτων, οι ακτίνες του κύματος είναι ημιευθείες, που ξεκινούν από την αρχή των συντεταγμένων. Στα

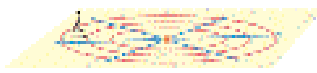


ΣΧΗΜΑ 3.37



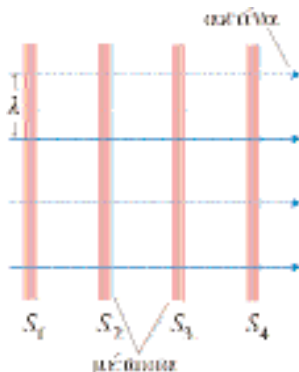
ΣΧΗΜΑ 3.38

Σφαιρικά κύματα.



ΣΧΗΜΑ 3.39

Επιφανειακά κύματα.



ΣΧΗΜΑ 3.40

Επίπεδα κύματα. Οι ακτίνες είναι παράλληλες μεταξύ τους και οι ισοφασικές επιφάνειες S_1, S_2, \dots παράλληλα επίπεδα.

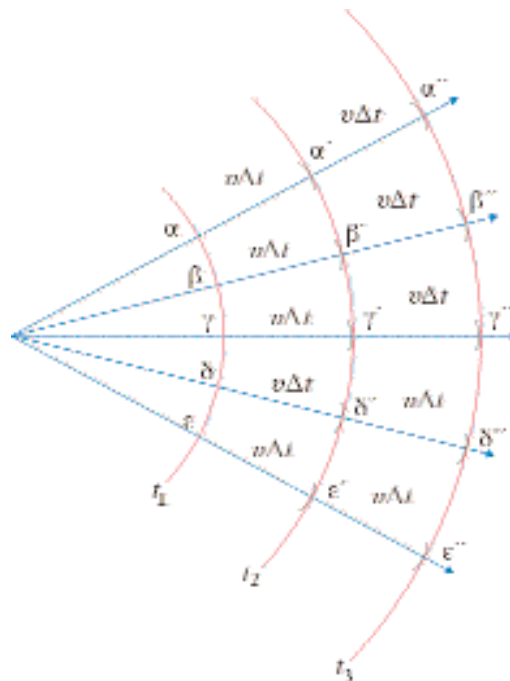
επιφανειακά κύματα που διαδίδονται από ένα σημείο της επιφάνειας, οι ακτίνες είναι οι ευθείες που ξεκινούν από την πηγή και τα μέτωπα είναι ομόκεντροι κύκλοι (Σχ. 3.39).

Τα κύματα, των οποίων οι ακτίνες είναι παράλληλες ευθείες, και οι ισοφασικές επιφάνειες παράλληλα επίπεδα (Σχ. 3.40), λέγονται **επίπεδα κύματα**. Μια καλή προσέγγιση των επιπέδων κυμάτων είναι τα σφαιρικά κύματα σε μια περιοχή αρκετά μακριά απ' την πηγή τους, π.χ. το φως του ήλιου που φτάνει στη Γη.

ΑΡΧΗ ΤΟΥ HUYGENS

Ο Huygens, υποστηρικτής της κυματικής θεωρίας του φωτός, θέλοντας να συμβιβάσει την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός και τους νόμους ανάκλασης και διάθλασης, επινόησε για τη διάδοση των κυμάτων την αρχή που φέρει το όνομά του. Σύμφωνα με μια διατύπωση της αρχής του Huygens, “κάθε σημείο μετώπου κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή δευτερευόντων κυμάτων που διαδίδονται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος”.

Έστω ότι το μέτωπο ενός κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι το S_1 (Σχ. 3.41). Όλα τα σημεία της επιφάνειας S_1 γίνονται δευτερογενείς πηγές



ΣΧΗΜΑ 3.41

Γεωμετρική περιγραφή της διάδοσης ενός μετώπου κύματος με τη βοήθεια της αρχής του Huygens.

Η αρχή του Huygens

Διατυπώθηκε για τα ελαστικά κύματα, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε κύμα. Το πρόβλημα με τον Huygens ήταν ότι “έκοβε” αυθαίρετα τα διαδιδόμενα προς τα πίσω κύματα, ώστε να εξηγήσει τη διάθλαση και την ανάκλαση όχι, όμως και κυματικά φαινόμενα όπως αυτό της περίθλασης. Εκατό χρόνια μετά έγινε η αιτιολόγηση της αρχής Huygens με την ανάπτυξη του ηλεκτρομαγνητισμού και της θεωρίας του Fresnel.

κυμάτων. Τη χρονική στιγμή t_2 το νέο μέτωπο S_2 είναι η επιφάνεια (περιβάλλουσα), η οποία εφάπτεται σε όλα τα επιμέρους δευτερογενή σφαιρικά μέτωπα ίδιας ακτίνας $v(t_2 - t_1)$. Τότε όλα τα σημεία $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ (τα οποία έχουν την ίδια φάση) της επιφάνειας S_2 γίνονται δευτερογενείς πηγές κυματιδίων, οπότε τη χρονική στιγμή t_3 το μέτωπο θα είναι η επιφάνεια S_3 , η οποία εφάπτεται σε όλα τα επιμέρους σφαιρικά μέτωπα ίδιας ακτίνας $v(t_3 - t_2)$ κ.ο.κ. Τα σημεία $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ και τα σημεία $\alpha', \beta', \gamma', \dots$, λέγονται **αντίστοιχα σημεία**.

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Αν κύμα που διαδίδεται σε ένα μέσο συναντήσει ασυνέχεια, δηλαδή δεύτερο μέσον με διαφορετικές ιδιότητες από το πρώτο, διαχωρίζεται γενικά σε δύο κύματα. Το ένα ανακλάται και διαδίδεται στο πρώτο μέσο, και ονομάζεται **ανακλώμενο κύμα**, ενώ το άλλο διαδίδεται στο δεύτερο μέσο και λέγεται **διαθλώμενο κύμα**. (Σε ειδικές συνθήκες ένα από τα δύο κύματα μπορεί να μην υπάρχει).

Θα μελετήσουμε παρακάτω δύο περιπτώσεις ανάκλασης και διάθλασης, αυτή ενός κύματος σε χορδή με ασυνέχεια και αυτή ενός επιπέδου κύματος σε δύο διαφορετικά μέσα που διαχωρίζονται από επίπεδη επιφάνεια.

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΔΙΑΔΙΔΟΜΕΝΟΥ ΣΕ ΧΟΡΔΗ ΜΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ

Η χορδή του σχήματος 3.42 παρουσιάζει ασυνέχεια, δηλαδή η γραμμική πυκνότητά της μέχρι κάποιο σημείο είναι μ_1 και απότομα γίνεται μ_2 με $\mu_1 \neq \mu_2$. Όταν παλμός οδεύει από την περιοχή γραμμικής πυκνότητας μ_1 προς την περιοχή γραμμικής πυκνότητας μ_2 στην ασυνέχεια συμβαίνουν τα εξής:

α) Αν $\mu_1 > \mu_2$, έχουμε ανακλώμενο παλμό σε φάση και μικρότερου ύψους από τον προσπίπτοντα. Ο διαθλώμενος παλμός είναι σε φάση και μεγαλύτερου ύψους από τον προσπίπτοντα (Σχ. 3.43).

β) Αν $\mu_1 < \mu_2$, ο ανακλώμενος παλμός είναι ανεστραμμένος με μικρότερο ύψος και ο διαθλώμενος είναι σε φάση και μικρότερου ύψους από τον προσπίπτοντα (Σχ. 3.44).

γ) Αν το ένα άκρο της χορδής είναι ακλόνητο, δηλαδή είναι σαν ασυνέχεια με $\mu_2 \rightarrow \infty$, δεν υπάρχει διαθλώμενος παλμός.

Ο προσπίπτων παλμός, όταν φτάσει στο πακτωμένο άκρο, ασκεί δύναμη σ' αυτό, οπότε λόγω του 3^{ου} Νόμου του Νεύτωνα και το ακλόνητο άκρο ασκεί αντίθετη δύναμη (ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς) στη χορδή, με αποτέλεσμα να αναστραφεί ο παλμός. Λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας ο ανακλώμενος παλμός είναι ανεστραμμένος και έχει την ίδια μορφή με τον προσπίπτοντα (Σχ. 3.45). Αυτό μπορεί ναδειχθεί και ποσοτικά. Θεωρώντας το ακλόνητο σημείο, ως αρχή του άξονα x δηλαδή $x = 0$, τα δύο αρμονικά κύματα, προσπίπτον και ανακλώμενο, περιγράφονται αντίστοιχα από τη σχέση

$$y_1 = A_0 \sin(\omega t - kx) \quad (\text{οδεύει κατά τη θετική φορά του άξονα } x)$$

και $y_2 = A_0' \sin(\omega t + kx) \quad (\text{οδεύει κατά την αρνητική φορά του άξονα } x)$

Σε κάθε χρονική στιγμή στη θέση $x = 0$, έχουμε $y_1 + y_2 = 0$, άρα

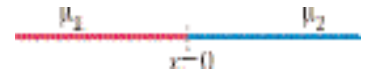
$$A_0 \sin \omega t = -A_0' \sin \omega t,$$

οπότε

$$A_0 \sin \omega t = A_0' \sin(\omega t + \pi)$$

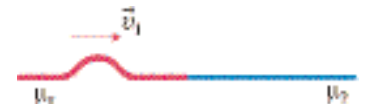
δηλαδή τα δύο κύματα έχουν διαφορά φάσης π και ίδιο πλάτος.

δ) Στην περίπτωση, κατά την οποία το ένα άκρο της χορδής είναι ελεύθερο, ο ανακλώμενος παλμός έχει την ίδια μορφή και είναι σε φάση με τον προσπίπτοντα. Στο σχήμα 3.46 έχουμε δέσει τη χορδή με ένα δακτυλίδι αμελητέας μάζας, που μπορεί και κινείται πάνω-κάτω στην ακλόνητη κατακόρυφη ράβδο χωρίς τριβές. Όταν φθάσει ο παλμός στην



ΣΧΗΜΑ 3.42

Η χορδή παρουσιάζει ασυνέχεια.



ΣΧΗΜΑ 3.43

Ανάκλαση σε αραιότερο μέσο ($\mu_1 > \mu_2$).



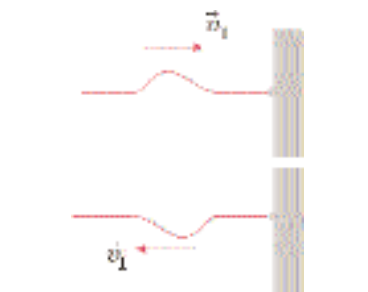
ΣΧΗΜΑ 3.44

Ανάκλαση σε πυκνότερο μέσο ($\mu_1 < \mu_2$).



ΣΧΗΜΑ 3.45

Ανάκλαση σε πακτωμένο άκρο.



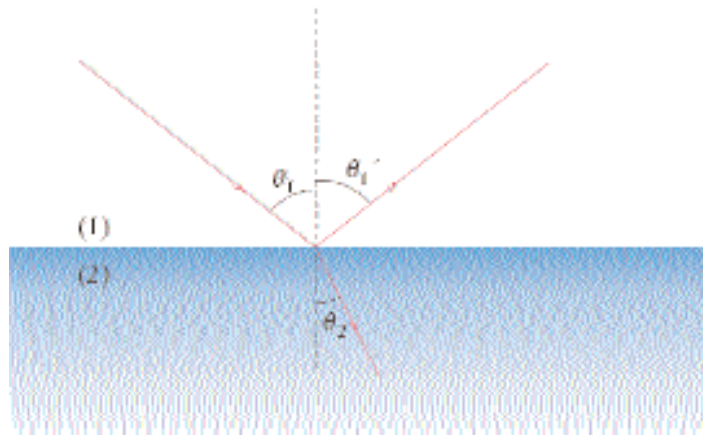
ΣΧΗΜΑ 3.46

Ανάκλαση σε ελεύθερο άκρο.

άκρη της χορδής, το δακτυλίδι κινείται αρχικά προς τα πάνω και κατόπιν προς τα κάτω, παράγοντας τον ανακλώμενο παλμό.

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Όταν επίπεδο κύμα κινείται σε ένα μέσο (μέσο 1), και συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια του μέσου (1) και ενός άλλου μέσου (μέσο 2), τότε διαχωρίζεται σε δύο κύματα, το ανακλώμενο και το διαθλώμενο. Έστω θ_1 , θ_1' και θ_2 οι γωνίες που σχηματίζουν η προσπίπτουσα, η ανακλώμενη και η διαθλώμενη ακτίνα (Σχ. 3.47) του κύματος αντίστοιχα,



ΣΧΗΜΑ 3.47

Ανάκλαση και διάθλαση ακτίνας που προσπίπτει σε διαχωριστική επιφάνεια.

με την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης. Οι νόμοι που διέπουν την ανάκλαση και τη διάθλαση είναι οι εξής:

Νόμος της ανάκλασης: Η γωνία ανάκλασης είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης δηλαδή

$$\theta_1 = \theta_1' \quad (3.43)$$

Νόμος της διάθλασης: Το ημίτονο του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης ισούται με το σχετικό δείκτη διάθλασης n_{21} του μέσου (2) προς το μέσο (1), δηλαδή

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21} \quad (3.44)$$

όπου $n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$, και v_1 , v_2 οι ταχύτητες διάδοσης του κύματος στα μέσα (1)

και (2) αντίστοιχα. Ο νόμος της διάθλασης λέγεται και **νόμος του Snell**.

Οι τρεις ακτίνες, προσπίπτουσα, ανακλώμενη και διαθλώμενη, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, αυτό που σχηματίζεται από την προσπίπτουσα ακτίνα και την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια, στο σημείο που η ακτίνα συναντά την επιφάνεια.

Οι παραπάνω νόμοι ισχύουν και για άλλου είδους κύματα και είναι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής. Η πειραματική επαλήθευση των νόμων στο επίπεδο της οπτικής είναι εύκολη.

Οι νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης εξηγούνται με τη βοήθεια της αρχής του Huygens. Ένας άλλος τρόπος εξήγησης, τον οποίο δεν θα αναπτύξουμε, είναι η αρχή των Ήρωνα-Fermat σύμφωνα με την οποία ο απαιτούμενος χρόνος από το σημείο εκκίνησης της ακτίνας, μέχρι ενός άλλου σημείου που θα φτάσει μετά την ανάκλαση ή διάθλαση, παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο.

Απόλυτος δείκτης διάθλασης οπτικού μέσου, ορίζεται το πηλίκο της ταχύτητας c του φωτός στο κενό, προς την ταχύτητα v του φωτός στο μέσο, $n = \frac{c}{v}$. Ο σχετικός δείκτης διάθλασης του μέσου (2), ως προς το μέσο (1),

$$\text{δίνεται από την σχέση } n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

Πίνακας. Δείκτης Διάθλασης για την κίτρινη γραμμή του Νατρίου ($\lambda_0 = 589 \text{ nm}$)

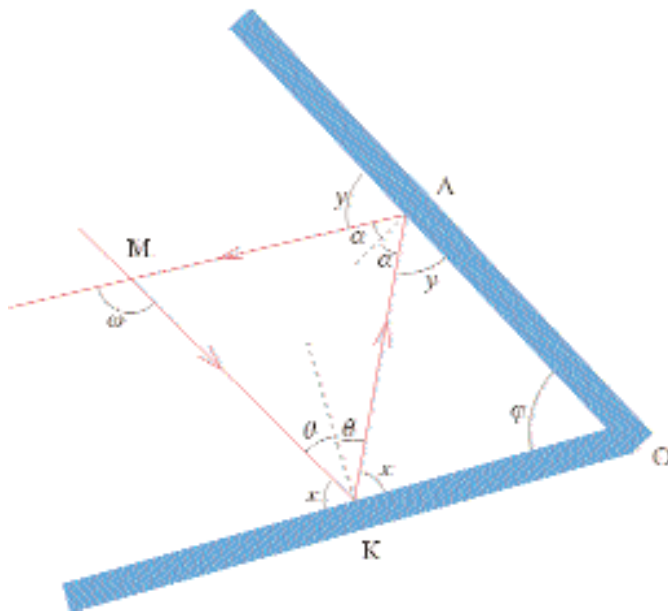
Στερεά	
Πάγος	1,309
Ορυκτό άλας	1,544
Αδάμας	2,417
Ύαλοι (τυπικές τιμές)	1,52 - 1,80
Υγρά σε θεσμ. 20°C	
Μεθανόλη	1,329
Νερό	1,333
Αιθανόλη	1,36
Γλυκερίνη	1,473
Βενζόλιο	1,501

Παράδειγμα 3-9

Δύο επίπεδα κάτοπτρα σχηματίζουν γωνία φ . Να αποδειχθεί ότι η εκτροπή της (διαδοχικά από μια φορά) ανακλώμενης ακτίνας στα δύο κάτοπτρα είναι 2φ .

Απάντηση

Έστω θ η γωνία πρόσπτωσης στο ένα κάτοπτρο και α στο άλλο. Από το τρίγωνο ΚΛΜ είναι



ΣΧΗΜΑ 3.48

$$\omega = 2\alpha + 2\theta \text{ (ως εξωτερική του τριγώνου)}$$

Όμως

$$2\alpha + 2\theta = 180 - 2y + 180 - 2x = 360 - 2(x + y)$$

Από το τρίγωνο ΟΛΚ είναι

$$x + y = 180^\circ - \varphi$$

Άρα

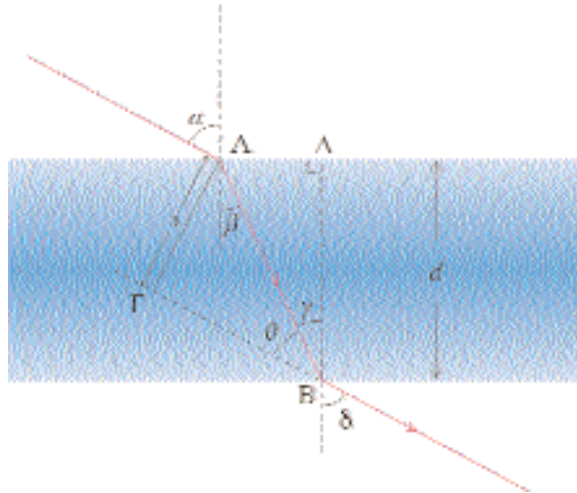
$$\omega = 360 - 2(180^\circ - \varphi) \quad \text{ή} \quad \omega = 2\varphi.$$

Παράδειγμα 3-10

Φωτεινή ακτίνα προσπίπτει υπό γωνία α σε γυάλινη πλάκα (με πλευρές παράλληλες) πάχους d . Να αποδειχθεί ότι η εξερχόμενη ακτίνα από το γυαλί είναι παράλληλη με την προσπίπτουσα και να υπολογιστεί η μεταξύ τους απόσταση s . Δίνονται οι δείκτες διάθλασης για τον αέρα n_1 και για το γυαλί n_2 .

Απάντηση

Για τη διάθλαση στο σημείο Α ισχύει



ΣΧΗΜΑ 3.49

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Για τη διάθλαση στο B έχουμε

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

Άρα

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}$$

Όμως $\beta = \gamma$, ως εντός εναλλάξ, άρα, $\sin \alpha = \sin \delta$ και επομένως, $\alpha = \delta$. Επειδή οι γωνίες α, δ είναι ίσες και τις έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες θα έχουν παράλληλες και τις άλλες δύο, συνεπώς η προσπίπτουσα και εξερχόμενη ακτίνα είναι παράλληλες.

Από το τρίγωνο ΑΓΒ υπολογίζουμε την απόσταση s

$$s = AB \sin \theta = AB \sin (\delta - \gamma) \quad \text{ή} \quad s = AB \sin (\alpha - \beta)$$

Επίσης από το τρίγωνο ΑΔΒ υπολογίζουμε το AB

$$AB = \frac{d}{\cos \gamma} = \frac{d}{\cos \beta}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$s = \frac{d}{\cos \beta} [\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta] \quad \text{ή}$$

$$s = d \left[\sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right]$$

Είναι

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha}$$

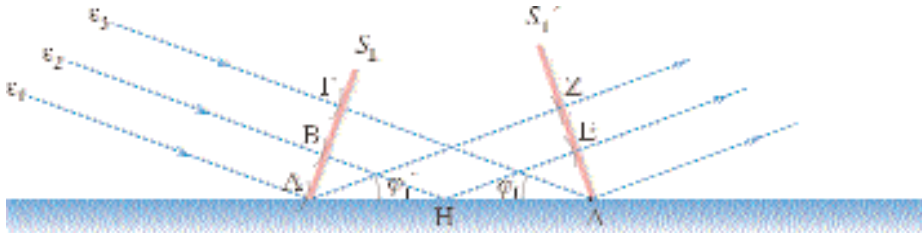
Άρα

$$s = d \sin \alpha \left[1 - \frac{\cos \alpha \frac{n_1}{n_2}}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha}} \right] \quad \text{ή}$$

$$s = d \sin \alpha \left[1 - \frac{n_1 \cos \alpha}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} \right]$$

ΝΟΜΟΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

Θεωρούμε τις παράλληλες και ισοπέχουσες ακτίνες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 του επίπεδου κύματος του σχήματος 3.50, οι οποίες προσπίπτουν στη διαχωριστική επιφάνεια



ΣΧΗΜΑ 3.50

Ανάκλαση επίπεδων κυμάτων.

των δύο μέσων. Όταν το κύμα φτάνει στη θέση A, η S_1 είναι η ισοφασική επιφάνεια του. Για να διατρεξίσει το κύμα την απόσταση $\Gamma\Delta$, χρειάζεται χρόνο

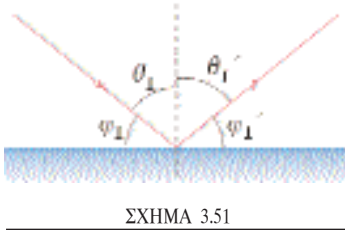
$$\Delta t = \frac{\Gamma\Delta}{v_1}, \text{ όπου } v_1 \text{ η ταχύτητα του κύματος. Κατά το χρονικό}$$

διάστημα Δt , η δευτερεύουσα πηγή στο A έχει δημιουργήσει ένα μέτωπο σχήματος ημικυκλίου και ακτίνες $AZ = v \Delta t = \Gamma\Delta$ και η δευτερεύουσα πηγή H μέτωπο ακτίνας

$$HE = v_1 \Delta t' = v_1 \left(\Delta t - \frac{BH}{v_1} \right)$$

Όμως

$$BH = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{και συνεπώς}$$



ΣΧΗΜΑ 3.51

$$HE = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AZ}{2}$$

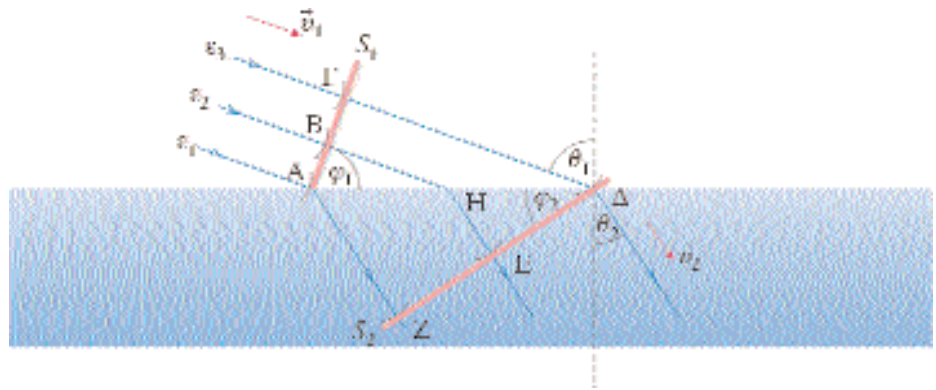
Η περιβάλλουσα των νέων μετώπων είναι τώρα η S_1' . Τα τρίγωνα $\Lambda\Delta\Gamma$ και $\Delta\Lambda Z$ είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά ίσες. Άρα $\varphi_1 = \varphi_1'$. Επομένως, και $\theta_1 = \theta_1'$ ως συμπληρωματικές των ίσων φ_1 και φ_1' (Σχ. 3.51).

ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

Για το διαθλώμενο κύμα (Σχ. 3.52) στο χρόνο $\Delta t = \frac{\Gamma\Delta}{v_1}$, όπου το κύμα φτάνει από το Γ στο Δ , το μέτωπο του κύματος από την πηγή A έχει ακτίνα

$$AZ = v_2 \Delta t = \frac{v_1}{v_2} \Gamma\Delta$$

και το μέτωπο της πηγής H ,



ΣΧΗΜΑ 3.52

Διάθλαση επίπεδων κυμάτων κατά τη μετάβασή τους από αραιότερο σε πυκνότερο μέσο.

$$HE = v_2 \left(\Delta t - \frac{BH}{v_1} \right) = v_2 \left(\frac{1}{v_1} \Gamma\Delta - \frac{\Gamma\Delta}{2v_1} \right) = \frac{v_2}{v_1} \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \eta$$

$$HE = \frac{AZ}{2}$$

Η ισοφασική επιφάνεια είναι η περιβάλλουσα S_2 (το μέτωπο της πηγής Δ έχει ακτίνα μηδέν). Από τα τρίγωνα $\Lambda\Gamma\Delta$ και $\Lambda\Delta Z$ έχουμε

$$\sin \varphi_1 = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda\Delta}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{AZ}{\Lambda\Delta}$$

Άρα

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{\Gamma\Delta}{AZ} = \frac{\Gamma\Delta}{\frac{v_1}{v_2} \Gamma\Delta} \quad \eta \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

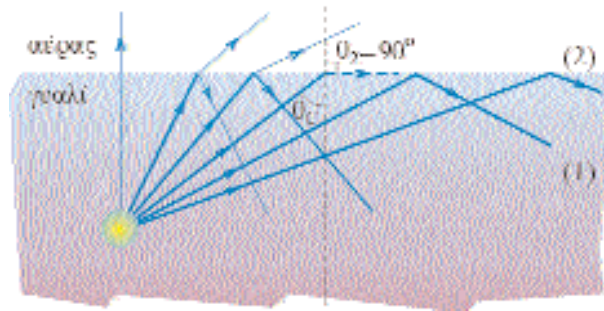
Είναι $\varphi_1 = \theta_1$ και $\varphi_2 = \theta_2$, επειδή έχουν αντίστοιχα κάθετες πλευρές.

Επομένως

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΟΛΙΚΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

Όταν κύμα διαδίδεται σε μέσο (1) και συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια με το μέσο (2) (Σχ. 3.53), στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης είναι μεγαλύτερη



ΣΧΗΜΑ 3.53

Ολική ανάκλαση σε διαχωριστική επιφάνεια γυαλί - αέρας.

από αυτή του μέσου (1) ($v_2 > v_1$), υπάρχει μια οριακή (ή οριική) γωνία πρόσπτωσης θ_c , για την οποία η γωνία διάθλασης τείνει στην $\theta_2 = 90^\circ$. Για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της θ_c , δεν υπάρχει πλέον διαθλώμενο κύμα παρά μόνο ανακλώμενο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ολική ανάκλαση ή ολική εσωτερική ανάκλαση.

Η οριακή γωνία θ_c υπολογίζεται θέτοντας στο νόμο της διάθλασης $\theta_2 = 90^\circ$. Είναι

$$\frac{\sin \theta_c}{\sin 90^\circ} = n_{21} \quad \text{ή} \quad \sin \theta_c = \frac{v_1}{v_2} \quad (3.45)$$

Στο σχήμα 3.53 παρατηρούμε το φαινόμενο ολικής ανάκλασης, καθώς μια φωτεινή ακτίνα μεταβαίνει από το γυαλί (μέσο 1) στον αέρα (μέσο 2). Σύμφωνα με την **αρχή της αντίστροφης πορείας** του φωτός, αν η ακτίνα κατευθύνεται από το μέσο (2) προς το μέσο (1) και η γωνία πρόσπτωσης τείνει οριακά στις 90° , τότε η γωνία διάθλασης θα τείνει οριακά στη θ_c .

Εφαρμογή του φαινομένου ολικής ανάκλασης έχουμε στις οπτικές ίνες. Είναι ίνες γυαλιού ή πλαστικών, όπου το φως, λόγω ολικής ανάκλασης, διαδίδεται όπως στο (Σχ. 3.54). Μ' αυτό το τρόπο παρατηρούμε αντικείμενα, τα οποία δεν είναι απ' ευθείας ορατά. Για παράδειγμα, οι γιατροί μπορούν με κατάλληλα τοποθετημένες ίνες (δέσμη ιών) να δουν το στομάχι ασθενούς.



ΣΧΗΜΑ 3.54

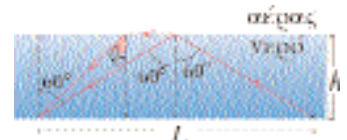
Κυματοδηγός (Εφαρμογή φαινομένου ολικής ανάκλασης).

Παράδειγμα 3-11

Υπολογίστε την οριακή γωνία θ_c (για ολική ανάκλαση), για τη διαχωριστική επιφάνεια νερού - αέρα, δεδομένου ότι ο (απόλυτος) δείκτης διαθλάσης του νερού είναι $n_1 \approx 1,33$ και του αέρα $n_2 \approx 1,00$. Αν βρισκόμαστε στον οριζόντιο πυθμένα βάθους $h = 5,20$ m κοιτάζοντας προς τα έξω υπό γωνία 60° ως προς την κατακόρυφο, τι βλέπουμε;

Απάντηση

Η οριακή γωνία θ_c υπολογίζεται από τη σχέση



ΣΧΗΜΑ 3.55



ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΟΝΔΡΟΣ

Ο Δημήτρης Χόνδρος γεννήθηκε στις Σέρρες το 1882 και πέθανε στην Αθήνα το 1962. Σπούδασε Φυσική στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Έκανε μεταπτυχιακές σπουδές στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου και πήρε το Διδακτορικό του υπό την καθοδήγηση του A. Sommerfeld. Το θέμα της διατριβής του είναι, "Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε Σύματα" (1909). Το 1910 με τον P. Debye δημοσιεύουν εργασία σχετική με τη διάδοση κυμάτων σε μη αγώγιμα "σύματα", κυματοδηγοί. Οι δύο εργασίες είναι κλασικές και σε αυτές στηρίζονται πλήθος μεταγενέστερων εργασιών άλλων ερευνητών που σχετίζονται με τη διάδοση κυμάτων και ιδιαίτερα σε κυματοδηγούς και γραμμές μεταφοράς.

Σήμερα, ιδιαίτερα με την εξάπλωση των οπτικών ινών οι εργασίες του αποτελούν τα θεωρητικά θεμέλια αυτής της εξέλιξης.

Επέστρεψε στην Ελλάδα και έγινε Καθηγητής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών το 1912. Τη διδασκαλία του παρακολουθούσαν πλήθος κόσμου που δεν είχαν σχέση με τη Φυσική διότι ήταν διανοημένη με φιλοσοφικές προεκτάσεις.

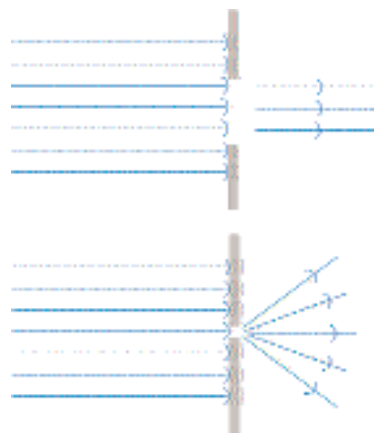
$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1,33} \quad \text{ή}$$

$$\sin \theta_c = 0,752 \quad \text{ή} \quad \theta_c \approx 48,8$$

Αν κοιτάζουμε υπό γωνία 60°, βλέπουμε το σημείο του πυθμένα που απέχει από εμάς απόσταση $L = 2h \tan 60^\circ$, λόγω της ολικής ανάκλασης που υφίσταται μια ακτίνα που φεύγει από εκεί.

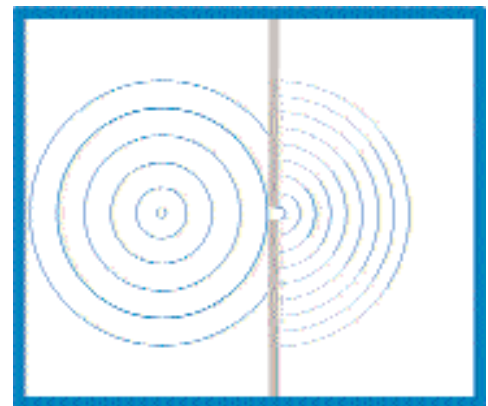
ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

Προσπαθώντας να δημιουργήσουμε όσο το δυνατόν λεπτότερη φωτεινή δέσμη, παρεμβάλουμε σε επίπεδη δέσμη φωτός διαδοχικά διαφράγματα με όσο το δυνατόν μικρότερη οπή. Παρατηρούμε ότι, καθώς οι διαστάσεις της οπής γίνονται της τάξεως του μήκους κύματος του φωτός, το φως δεν διαδίδεται ευθύγραμμα, αλλά απλώνεται στον χώρο που αναμένεται σκιά (Σχ. 3.56). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται περίθλαση του φωτός και



ΣΧΗΜΑ 3.56

Καθώς μικραίνει η σχισμή στο διάφραγμα τόσο εντονότερο είναι το φαινόμενο περίθλασης



ΣΧΗΜΑ 3.57

Περίθλαση κύματος από μικρή οπή

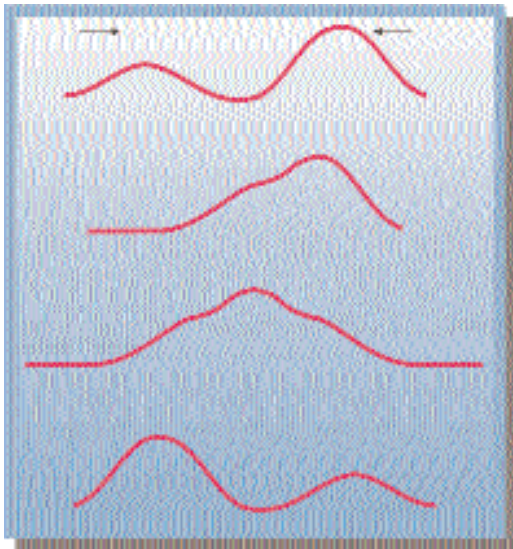
εξηγείται εύκολα με την αρχή του Huygens. Τα σημεία της οπής γίνονται νέες πηγές κυμάτων. Η συμβολή αυτών, όταν η οπή είναι σχετικά μικρή, οδηγεί στην απόκλιση από την ευθύγραμμη διάδοση, γεγονός που δεν συμβαίνει για μεγάλες οπές.

Το φαινόμενο της περίθλασης παρατηρείται και στα μηχανικά κύματα. Στο σχήμα 3.57 παρατηρούμε την περίθλαση υδάτινων κυμάτων, όταν στην διάδοσή τους παρεμβάλουμε διάφραγμα με σχισμή διαστάσεων της τάξης του μήκους των υδατίνων κυμάτων. Η δυνατότητα να ακούμε κάποιον να μιλάει μέσα από το σπίτι, ενώ βρισκόμαστε δίπλα από το ανοικτό παράθυρο και δεν τον βλέπουμε, οφείλεται στην περίθλαση των ηχητικών κυμάτων.

Φαινόμενα περιθλάσης παρατηρούνται επίσης, όταν παρεμβάλλονται κατά τη διάδοση ενός κύματος αντικείμενα που έχουν διαστάσεις της τάξης του μήκους κύματος. Ακόμη εμφανίζονται φαινόμενα περίθλασης στη σκιά των άκρων λεπτών πλακιδίων όπως π.χ. της κόψης ξυραφιού.

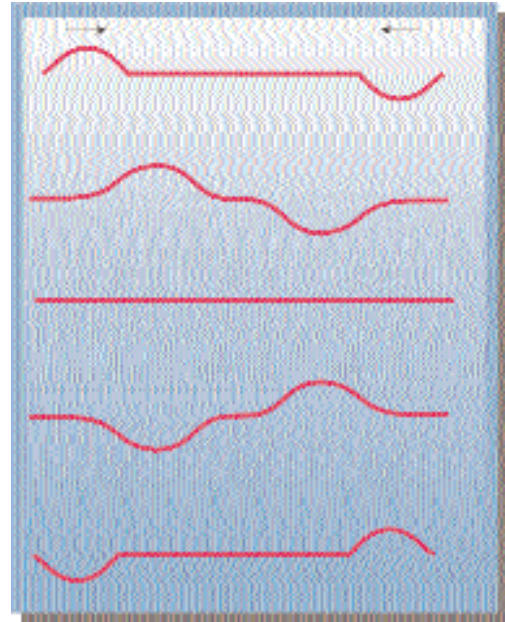
ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όταν δύο παλμοί που διαδίδονται σε τεντωμένο νήμα συναντηθούν, τότε ο παλμός που προκύπτει είναι το άθροισμα των δύο αρχικών παλμών (Σχ. 3.58, 3.59). Μετά την αλληλοκάλυψη οι δύο παλμοί συνεχίζουν τη διάδοσή τους



ΣΧΗΜΑ 3.58

Υπέρθωση δύο αντίθετα διαδεδομένων παλμών με ίδιες φορές απομακρύνσεων.



ΣΧΗΜΑ 3.59

Υπέρθωση δύο αντίθετα διαδεδομένων παλμών με αντίθετες φορές απομακρύνσης.

αμετάβλητοι. Ο ένας παλμός δηλαδή περνάει μέσα από τον άλλο χωρίς να υποστεί καμιά αλλοίωση.

Το φαινόμενο αυτό είναι η αρχή της επαλληλίας (ή υπερθέσης) σύμφωνα με την οποία: Όταν δύο ή περισσότερα κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσο τότε η συνολική διαταραχή ισούται με το άθροισμα των επιμέρους διαταραχών. Δηλαδή, αν σ' ένα μέσο διαδίδονται δύο διαταραχές

$$y_1(x, t) \quad \text{και} \quad y_2(x, t),$$

τότε η συνολική διαταραχή είναι

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Το αποτέλεσμα της επαλληλίας των κυμάτων ονομάζεται **συμβολή**.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η αρχή της επαλληλίας ισχύει γενικά για τα κύματα και όχι μόνο για τα μηχανικά κύματα. Το διαδιδόμενο μέγεθος δεν είναι κατ' ανάγκη μηχανική διαταραχή, αλλά μπορεί να είναι διαταραχή άλλου είδους, όπως π.χ. ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ή, στην κβαντομηχανική, υλικό κύμα (κυματοσυνάρτηση).

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Έστω ότι σε ένα μέσο διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας, προς την ίδια κατεύθυνση. Οι αντίστοιχες διαταραχές είναι

$$y_1 = A_0 \sin(\omega t - kx),$$

$$y_2 = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η συνολική διαταραχή είναι

$$y = y_1 + y_2 = A_0 \sin(\omega t - kx) + A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

παίρνουμε

$$y = 2A_0 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2} \right) \tag{3.46}$$

Παρατηρούμε ότι η συνολική διαταραχή είναι αρμονικό κύμα, του οποίου το πλάτος είναι

$$A = 2A_0 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| \tag{3.47}$$

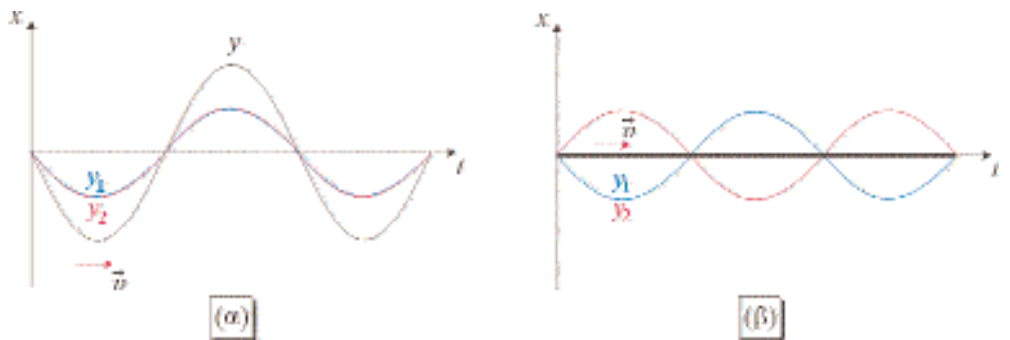
Εάν είναι $\cos \frac{\varphi}{2} = \pm 1$ ή $\varphi = 2n\pi$,

όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ το πλάτος της συνολικής διαταραχής είναι $A = 2A_0$. Τότε τα δύο κύματα βρίσκονται σε φάση και συμβάλουν ενισχυτικά.

Στην περίπτωση που είναι

$$\cos \frac{\varphi}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi = (2n + 1)\pi$$

όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ είναι $A = 0$. Τα κύματα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης και συμβάλουν ακυρωτικά (Σχ. 3.60).



ΣΧΗΜΑ 3.60

(α) Επαλληλία κυμάτων τα οποία βρίσκονται σε φάση, (π.χ. $\varphi = 0$) (β) Επαλληλία κυμάτων τα οποία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης (π.χ. $\varphi = \pi$).

Παράδειγμα 3-12

Σε μια χορδή οδεύουν συγχρόνως δύο κύματα.

$$y_1 = 5 \sin (4x - 2t)$$

$$y_2 = 5 \cos \left(2t - 4x + \frac{\pi}{6} \right)$$

(y_1, y_2, x σε cm, t σε s)

Να βρεθεί η συνολική “διαταραχή”.

Απάντηση

Η συνολική διαταραχή είναι

$$y = y_1 + y_2$$

Όμως

$$y_2 = 5 \cos \left(2t - 4x + \frac{\pi}{6} \right) = 5 \sin \left[\frac{\pi}{2} - 2t + 4x - \frac{\pi}{6} \right] \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 5 \sin \left(4x - 2t + \frac{\pi}{3} \right)$$

Άρα

$$y = 5 \sin (4x - 2t) + 5 \sin \left(4x - 2t + \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{ή}$$

$$y = 10 \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(4x - 2t + \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ή}$$

$$y = 5\sqrt{3} \sin \left(4x - 2t + \frac{\pi}{6} \right) \quad [y, x \text{ σε cm, } t \text{ σε s}]$$

Συνεπώς, η συνολική διαταραχή είναι κύμα πλάτους $5\sqrt{3} \text{ cm} \approx 8,66 \text{ cm}$ και οδεύει προς τη θετική φορά του άξονα x .

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

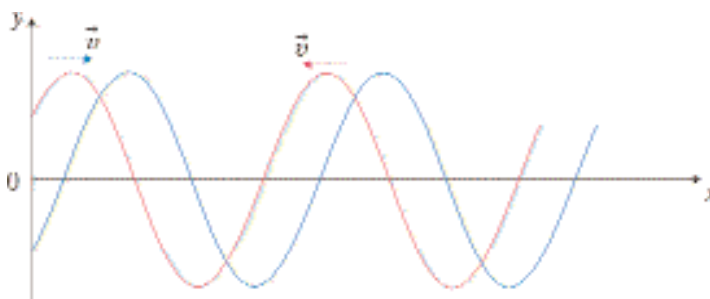
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το φαινόμενο της επαλληλίας δύο αρμονικών οδεύοντων κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Από τη συμβολή αυτών των κυμάτων προκύπτει συνιστάμενο κύμα που λέγεται **στάσιμο κύμα**. Κατά την ανάλυσή μας, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας.

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΧΟΡΔΗ

Ας υποθέσουμε ότι μια χορδή είναι ακλόνητα στερεωμένη στο ένα άκρο της ($x = 0$) και επεκτείνεται δεξιά της θέσης αυτής μέχρι το άπειρο, όπως στο σχήμα 3.61. Αν ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, η διαταραχή του είναι

$$y_1 = A_0 \sin(\omega t + kx)$$



ΣΧΗΜΑ 3.61

- Αρμονικό κύμα διαδιδόμενο προς τα αριστερά προσπίπτει στο ακλόνητο άκρο
- Το ανακλώμενο αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά

Το ανακλώμενο, στη θέση $x = 0$, κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά και όπως έχουμε δει, είναι

$$y_2 = -A_0 \sin(\omega t - kx)$$

Η συνισταμένη διαταραχή (επαλληλία) είναι

$$y = y_1 + y_2 = A_0 [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)]$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

έχουμε

$$y = 2A_0 \sin kx \cos \omega t \tag{3.48}$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι μια οδεύουσα διαταραχή, άρα δεν είναι κύμα με τη συνήθη έννοια. Ονομάζεται, καταχρηστικώς, στάσιμο κύμα. Είναι αρμονική ταλάντωση με διαφορετικό πλάτος σε κάθε σημείο, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$A(x) = 2A_0 |\sin kx| \tag{3.49}$$

Τα σημεία x_κ για τα οποία ισχύει

$$\sin kx_\kappa = \pm 1 \quad \text{ή} \quad kx_\kappa = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή}$$

$$x_\kappa = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \tag{3.50}$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$

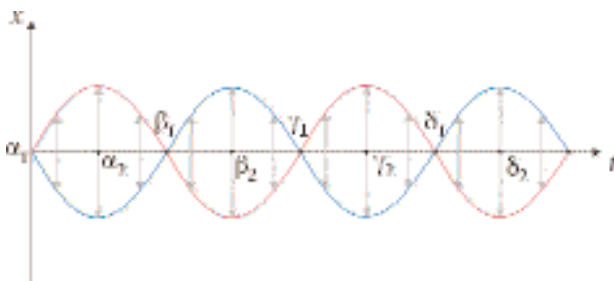
εκτελούν ταλαντώσεις με μέγιστο πλάτος $2A_0$ και ονομάζονται **κοιλίες** ή **αντιδεσμοί**.

Τα σημεία x_δ , για τα οποία ισχύει

$$\sin kx_\delta = 0 \quad \text{ή} \quad kx_\delta = n\pi \quad \text{ή}$$

$$x_\delta = n \frac{\lambda}{2} \tag{3.51}$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$



ΣΧΗΜΑ 3.62

Στα σημεία $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$ η ταλάντωση γίνεται με μέγιστο πλάτος και έχουμε κοιλίες. Στα σημεία $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ η ταλάντωση έχει διαρκώς πλάτος μηδέν και έχουμε δεσμούς.

εκτελούν ταλαντώσεις με πλάτος μηδέν, είναι δηλαδή διαρκώς ακίνητα και έχουμε δεσμούς (Σχ. 3.62). Τα σημεία αριστερά και δεξιά από τους ενδιάμεσους δεσμούς κινούνται με αντίθετες φάσεις.

Αν μια χορδή, η οποία είναι ακλόνητα στερεωμένη και στα δύο άκρα της $x = 0, x = L$ διαταραχθεί και αφεθεί ελεύθερη να ταλαντώνεται, τότε παράγονται σ' αυτή στάσιμα κύματα (Σχ. 3.63-64). Στην περίπτωση αυτή, εκτός από τη συνθήκη $y = 0$ στη θέση $x = 0$, έχουμε και τη συνθήκη $y = 0$ στη θέση $x = L$. Από τη σχέση (3.48) προκύπτει,

$$2A_0 \sin kL \cos \omega t = 0 \quad \text{ή} \quad \sin kL = 0 \quad \text{ή} \quad kL = n\pi$$

Άρα

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi$$

επομένως,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{3.52}$$

όπου $n = 1, 2, \dots$

Παρατηρούμε ότι τα μήκη κύματος που διαδίδονται, είναι συγκεκριμένα και δίνονται από τη σχέση (3.52). Οι αντίστοιχες συχνότητες ταλάντωσης της χορδής είναι

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

(ιδιοσυχνότητες) και με τη βοήθεια της σχέσης

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

έχουμε

$$f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.53}$$

όπου L : το μήκος της χορδής
 F : η τείνουσα δύναμη (μηχανική τάση της χορδής)
 μ : η γραμμική πυκνότητα μάζας της χορδής

Συνεπώς οι συχνότητες της χορδής που παράγονται κατά την ελεύθερη ταλάντωση της χορδής, είναι πολλαπλάσιες της συχνότητας

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{3.54}$$

η οποία ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα ή πρώτη αρμονική. Γενικά η συχνότητα f_n λέγεται n -οστή αρμονική. Στην πραγματικότητα, κατά την ελεύθερη ταλάντωση η χορδή εκτελεί κινήσεις, οι οποίες είναι επαλληλία των διαφόρων αρμονικών (Σχ. 3.65).

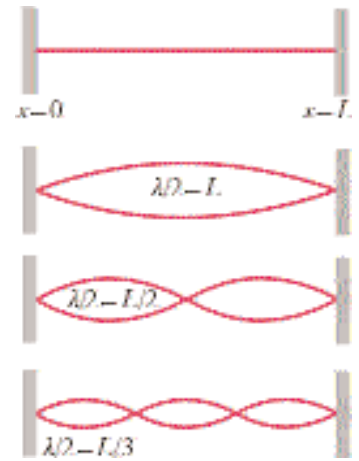
Στην περίπτωση, κατά την οποία χορδή είναι ακλόνητη στο ένα άκρο της και το άλλο εξαναγκάζεται να εκτελεί ταλάντωση, υπό την επίδραση μιας αρμονικά μεταβαλλόμενης δύναμης (Σχ. 3.66), παρατηρούμε τα εξής:

α) Εμφάνιση στασίμων κυμάτων, μετά το χρονικό διάστημα που απαιτείται, ώστε η διαταραχή να διαδοθεί κατά μήκος της χορδής, να ανακλαστεί και να επιστρέψει στο αρχικό σημείο.

β) Η συχνότητα f , με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία της χορδής, είναι αυτή της διεγείρουσας δύναμης.

γ) Θεωρώντας ότι το ακλόνητο άκρο είναι στη θέση $x = 0$, οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις $x_\delta = n \frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ όπου $\lambda = \frac{v}{f}$

δ) Το πλάτος των κοιλιών μεγαλώνει, όσο η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης πλησιάζει μία από τις ιδιοσυχνότητες, που αντιστοιχούν στην



ΣΧΗΜΑ 3.63-64

Στάσιμα κύματα σε χορδή με τα δύο άκρα ακλόνητα.



ΣΧΗΜΑ 3.65

Διάφορα στιγμιότυπα της κίνησης χορδής που πάλλεται ταυτόχρονα με την πρώτη και δεύτερη αρμονική.



ΣΧΗΜΑ 3.66

Στάσιμα κύματα σε χορδή με διέγερση του ενός άκρου.

περίπτωση κατά την οποία η χορδή ήταν ακλόνητη και στα δυο της άκρα. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού. Στους συντονισμούς τα πλάτη στις κοιλίες γίνονται θεωρητικά άπειρα, αλλά λόγω τριβών, απλώς αποκτούν μια μέγιστη τιμή.

Οι τρόποι ελεύθερης αρμονικής ταλάντωσης των χορδών λέγονται και κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

Παράδειγμα 3-13

Μια χορδή μήκους $L = 1,00 \text{ m}$ που είναι στερεωμένη και στα δύο της άκρα, ταλαντώνεται σύμφωνα με την σχέση

$$y = 4,00 \sin(5\pi x) \cos(1250\pi t) \quad (x \text{ σε m, } y \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

Αν η μάζα της χορδής είναι $m = 0,01 \text{ kg}$ (ακριβώς) να υπολογισθούν:

- Η τάξη της ιδιοσυχνότητας με την οποία πάλλεται η χορδή.
- Η τείνουσα δύναμη
- Να περιγραφούν τα δύο κύματα που οδεύουν αντίθετα και αφού συμβάλλουν δίνουν το πιο πάνω στάσιμο κύμα.

Απάντηση

- α) Η δοσμένη σχέση έχει τη μορφή

$$y = 2A_0 \sin kx \cos \omega t$$

Επίσης

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{2L}{n}} \quad \text{ή} \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

και

$$\omega = 2\pi f \quad \text{ή}$$

$$\omega = 2\pi \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Άρα

$$y = 2A_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}t\right)$$

Επομένως είναι

$$2A_0 = 4,00 \text{ cm} \quad \text{ή} \quad A_0 = 2,00 \text{ cm}$$

και

$$\frac{n\pi}{L}x = 5\pi x \quad \text{ή} \quad n = 5$$

Συνεπώς πάλλεται με την 5η αρμονική.

- β) Επίσης είναι

$$\frac{5\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} t = 1250\pi t \quad \text{ή} \quad 5 \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{\mu}} = 1250 \quad \text{ή}$$

$$\frac{\sqrt{F}}{0,1} = 250 \quad \text{ή} \quad F = 625 \text{ N}$$

- γ) Τα κύματα που συμβάλλουν είναι τα
 $y_1 = A_0 \sin(\omega t + kx)$ δηλαδή $y_1 = 2,00 \sin(1250 \pi t + 5 \pi x)$
 $y_2 = -A_0 \sin(\omega t - kx)$ δηλαδή $y_2 = -2,00 \sin(1250 \pi t - 5 \pi x)$

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΑΕΡΙΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Τα διαμήκη κύματα, όπως και τα εγκάρσια, δίνουν και αυτά στάσιμα κύματα. Θα εξετάσουμε παρακάτω τα στάσιμα ηχητικά κύματα που παράγονται στις διάφορες μορφές ηχητικών σωληνών.

α) **Ηχητικός σωλήνας με τα δύο άκρα ανοικτά.** Στην περίπτωση αυτή τα δύο άκρα είναι κατά μεγάλη προσέγγιση κοιλίες, διότι εκεί τα σωματίδια είναι σχεδόν ελεύθερα να κινηθούν. Η μορφή των στασίμων κυμάτων είναι αυτή του σχήματος 3.67. Συνεπώς ισχύει

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{L}{n} \quad \text{δηλαδή}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2L \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες είναι

$$f_n = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.56)$$

όπου v η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα και L το μήκος του σωλήνα.

Οι αρμονικές είναι πολλαπλάσιες της $f_1 = \frac{v}{2L}$ η οποία λέγεται θεμελιώδης ή πρώτη αρμονική.

β) **Ηχητικός σωλήνας με το ένα άκρο κλειστό και το άλλο ανοικτό:** Το κλειστό άκρο είναι δεσμός και το ανοικτό κοιλία. Η μορφή των στασίμων κυμάτων είναι αυτή του σχήματος 3.68. Συνεπώς έχουμε

$$\frac{\lambda_{2n+1}}{4} = \frac{L}{2n+1} \quad \text{ή}$$

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4L}{2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

και οι αντίστοιχες συχνότητες

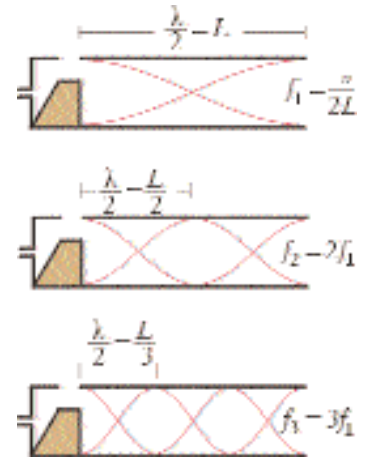
$$f_{2n+1} = \frac{v}{\lambda_{2n+1}} \quad \text{ή}$$

$$f_{2n+1} = (2n+1) \frac{v}{4L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

όπου v η ταχύτητα του ήχου στον αέρα και L το μήκος του ηχητικού σωλήνα.

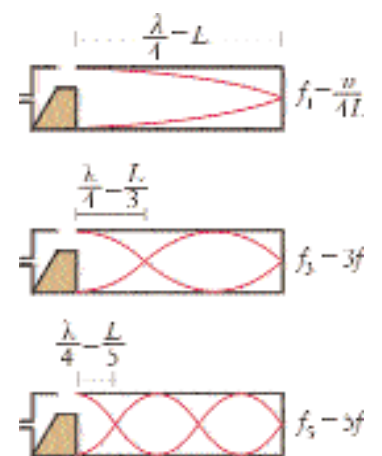
Η θεμελιώδης αρμονική είναι

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$



ΣΧΗΜΑ 3.67

Στάσιμα κύματα σε ηχητικό σωλήνα με τα δύο άκρα ανοικτά.



ΣΧΗΜΑ 3.68

Στάσιμα κύματα σε σωλήνα με το ένα άκρο κλειστό.

οι παραγόμενες αρμονικές είναι μόνο αυτές περιττής τάξεως, δηλαδή

$$f_3 = 3f_1, \quad f_5 = 5f_1, \quad f_7 = 7f_1, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Στην πράξη η κίνηση της αέριας μάζας των ηχητικών σωλήνων είναι επαλληλία ταλαντώσεων με τις ιδιοσυχνότητες που αναφέραμε πιο πάνω. Αυτοί οι τρόποι ταλάντωσης λέγονται επίσης κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

Παράδειγμα 3-14

Ηχητικός σωλήνας έχει μήκος $L = 0,75 \text{ m}$. Υπολογίστε τις συχνότητες των τριών πρώτων αρμονικών στην περίπτωση, όπου:

- α) Ο σωλήνας είναι ανοιχτός και στα δύο άκρα.
- β) Ο σωλήνας είναι ανοικτός μόνο στο ένα άκρο.

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι

$$v \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Απάντηση

α) Όταν ο σωλήνας είναι ανοιχτός και στα δύο άκρα, οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από τη σχέση

$$f_n = n \frac{v}{2L}$$

Αντικαθιστώντας $n = 1, n = 2$ και $n = 3$ έχουμε

$$f_1 = 227 \text{ Hz}, \quad f_2 = 453 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_3 = 680 \text{ Hz}$$

β) Όταν είναι κλειστός στο ένα άκρο, ισχύει

$$f_{2n+1} = (2n + 1) \frac{v}{4L}$$

Αντικαθιστώντας $n = 1, n = 2$ και $n = 3$ έχουμε

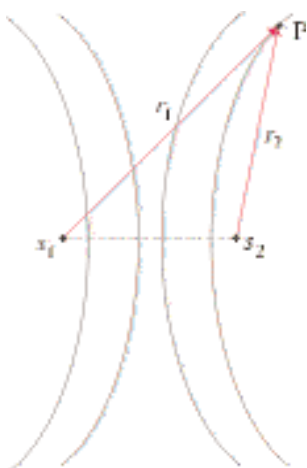
$$f_1 = 113 \text{ Hz}, \quad f_3 = 340 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_5 = 567 \text{ Hz}$$

ΣΥΜΒΟΛΗ

Όπως έχουμε αναφέρει, το αποτέλεσμα της επαλληλίας στο χώρο δύο ξεχωριστών κυμάτων ονομάζεται συμβολή.

Θεωρούμε δύο σύμφωνες πηγές σφαιρικών κυμάτων, την S_1 και S_2 του σχήματος 3.69. Δύο πηγές είναι σύμφωνες, όταν η διαφορά φάσης των διαταραχών τους στις πηγές ή σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, είναι σταθερή με το χρόνο. Για παράδειγμα, οι φάσεις των διαταραχών που φτάνουν από τις πηγές S_1 και S_2 , στο σημείο P του σχήματος είναι $(\omega_1 t - kr_1 + \varphi_1)$ και $(\omega_2 t - kr_2 + \varphi_2)$ αντίστοιχα. Για να είναι η διαφορά τους σταθερή με το χρόνο, πρέπει $\omega_1 = \omega_2$ και συνεπώς $f_1 = f_2$, δηλαδή οι σύμφωνες πηγές έχουν ίδια συχνότητα.

Θα μελετήσουμε (περιοριζόμενοι στο επίπεδο) τη συμβολή των κυμάτων στο σημείο P, θεωρώντας τις αποστάσεις r_1 και r_2 πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος και την απόσταση μεταξύ των πηγών. Επίσης, για απλούστευση, θα θεωρήσουμε τις αρχικές φάσεις των πηγών μηδενικές και τα πλάτη ταλάντωσης στο σημείο P, όπως και στις πηγές, ίσα. Με αυτές τις προϋποθέσεις οι διαταραχές που φτάνουν στο σημείο P από τις πηγές S_1 και S_2 , είναι αντίστοιχα



ΣΧΗΜΑ 3.69

$$y_1 = A_0 \sin(\omega t - kr_1)$$

$$y_2 = A_0 \sin(\omega t - kr_2)$$

Η συνολική διαταραχή είναι

$$y = y_1 + y_2 \quad \text{ή}$$

$$y = 2A_0 \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} \sin \left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} \right) \quad (3.59)$$

Όταν

$$\cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} = \pm 1 \quad \text{ή} \quad \frac{k(r_2 - r_1)}{2} = n\pi$$

δηλαδή

$$r_2 - r_1 = n\lambda, \quad \text{με} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.60)$$

η συμβολή είναι ενισχυτική και το πλάτος της διαταραχής $2A_0$.

Όταν

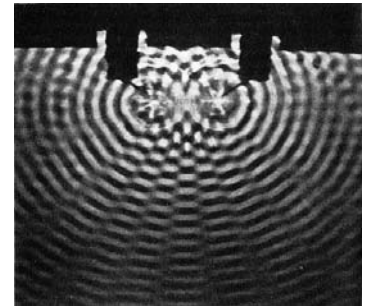
$$\cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{k(r_2 - r_1)}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

άρα

$$r_2 - r_1 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.61)$$

η συμβολή είναι καταστρεπτική (ακυρωτική) και στα σημεία αυτά η διαταραχή είναι διαρκώς μηδέν.

Οι σχηματισμοί στο χώρο, ένεκα ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής, αποτελούν τους κροσσούς συμβολής. Η σχέση $r_1 - r_2 = \text{σταθ.}$ περιγράφει μια υπερβολή στο επίπεδο και συνεπώς, οι κροσσοί συμβολής βρίσκονται πάνω σε υπερβολές. Στο σχήμα 3.70 φαίνονται οι κροσσοί συμβολής (υπερβολές) κατά τη συμβολή των κυμάτων δύο σύγχρονων πηγών στη λεκάνη κυμάνσεων.



ΣΧΗΜΑ 3.70

Κροσσοί συμβολής στη λεκάνη κυμάνσεων.

ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ YOUNG

Λόγω της κυματικής φύσης του φωτός, δύο φωτεινές πηγές μπορούν να δώσουν φαινόμενα συμβολής. Στην περίπτωση όμως δύο λαμπτήρων, μια συγκεκριμένη εικόνα συμβολής διαρκεί περίπου 10^{-8} s, που είναι ο τυπικός χρόνος μετάβασης των ηλεκτρονίων από μία κβαντική στάθμη σε άλλη.

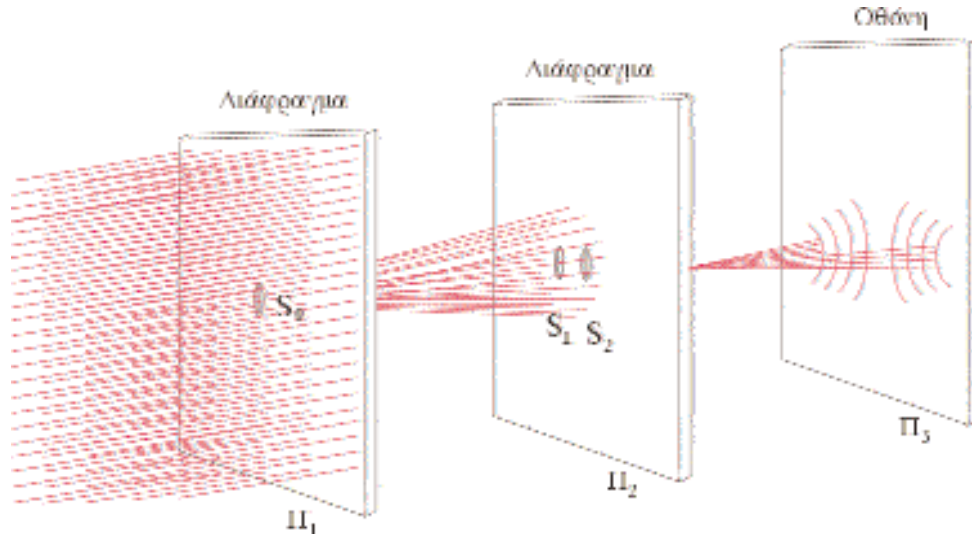
Συγκεκριμένα, από τα άτομα σε κάθε τέτοια μετάβαση εκπέμπεται, κατά τυχαίο τρόπο, ένα “κυματοπακέτο” (φωτόνιο).

Επειδή τα κυματοπακέτα εκπέμπονται κατά τυχαίο τρόπο και έχουν τυχαίες φάσεις, όταν συμβάλλουν, το κάθε ζευγάρι δίνει διαφορετικούς σχηματισμούς συμβολής. Έτσι, κατά μέσο όρο, δεν βλέπουμε μόνιμο φαινόμενο, δεν βλέπουμε σταθερούς κροσσούς συμβολής.

Για να έχουμε στατική συμβολή, δηλαδή κροσσούς σε σταθερές θέσεις, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σύμφωνες πηγές.

Ο Thomas Young, το 1801, ήταν ο πρώτος που επέδειξε φαινόμενα συμβολής και θεμελίωσε την κυματική φύση του φωτός. Δημιούργησε σύμφωνες πηγές

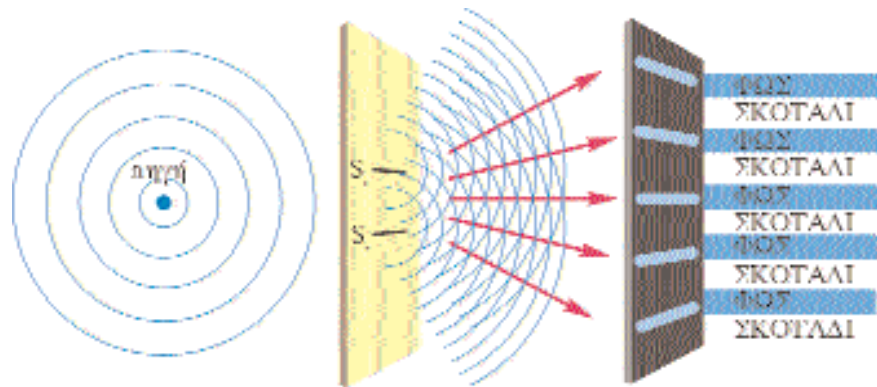
με τη διάταξη του σχήματος 3.71. Μονοχρωματική φωτεινή ακτινοβολία πέφτει στο διάφραγμα Π_1 και η μικρή οπή S_0 γίνεται δευτερογενής πηγή κυματιδίων. Το μέτωπο κύματος της πηγής S_0 φτάνει συγχρόνως στις οπές S_1



ΣΧΗΜΑ 3.71

Διάταξη του Young για την παραγωγή του ομώνυμου πειράματος.

και S_2 του διαφράγματος Π_2 , οπότε αυτές γίνονται νέες πηγές με ίδια συχνότητα και διαφορά φάσης μηδέν ή σταθερή. Συνεπώς οι πηγές S_1 και S_2 είναι σύμφωνες και τα φωτεινά τους κύματα που φτάνουν στην οθόνη Π_3 , συμβάλλουν και δίνουν στατική συμβολή, δημιουργώντας κροσούς ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής σε σταθερές θέσεις (Σχ. 3.72).



ΣΧΗΜΑ 3.72

Σχηματική παράσταση του πειράματος του Young.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΤΩΝ ΚΡΟΣΣΩΝ ΣΥΜΒΟΛΗΣ

Στο σχήμα 3.73 η οθόνη Π_3 απέχει απόσταση D από τις δύο πηγές S_1 και S_2 και ισχύει $D \gg a$, όπου a η απόσταση μεταξύ των πηγών. Επίσης ζητάμε το αποτέλεσμα της συμβολής σε αποστάσεις $x \ll D$

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις οι ακτίνες r_1 και r_2 είναι σχεδόν παράλληλες και επομένως η διαφορά τους είναι

$$r_2 - r_1 = S_2B$$

Από το τρίγωνο S_2BS_1 είναι $S_2B = a \sin \theta$, άρα,

$$r_2 - r_1 = a \sin \theta \tag{α}$$

Επειδή είναι $x \ll D$ ισχύει $r \approx D$ και από το τρίγωνο MOP , έχουμε

$$\sin \theta' = \frac{x}{r} \approx \frac{x}{D} \tag{β}$$

Επίσης ισχύει $\theta \approx \theta'$, επειδή έχουν κάθετες πλευρές, αφού η r είναι περίπου παράλληλη με την r_2 . Άρα από (α) και (β) έχουμε

$$r_2 - r_1 = a \frac{x}{D} \quad \text{ή} \quad x = \frac{D}{a} (r_2 - r_1)$$

Όπως έχουμε δει, για να είναι ενισχυτική η συμβολή, πρέπει $r_2 - r_1 = n\lambda$, επομένως, τα σημεία ενισχυτικής συμβολής (με αρχή το O) ορίζονται από τη σχέση

$$x_{\max} = \frac{D}{a} n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.62}$$

Όταν είναι

$$r_2 - r_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

έχουμε καταστρεπτική συμβολή και συνεπώς, οι θέσεις των κροσσών καταστρεπτικής συμβολής είναι

$$x_{\min} = \frac{D}{a} \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.63}$$

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κροσσών ενισχυτικής ή καταστρεπτικής συμβολής είναι

$$\Delta x = \frac{D}{a} \lambda$$

και επομένως

$$\lambda = \frac{a}{D} \Delta x \tag{3.64}$$

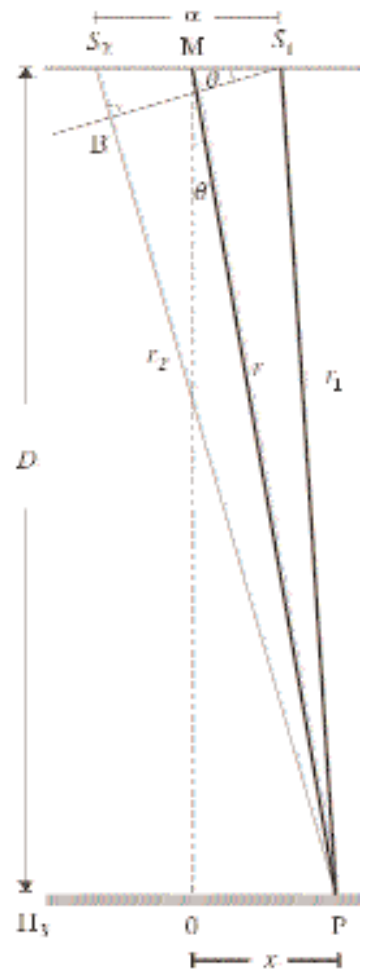
Μετρώντας σ' ένα πείραμα όμοιο με του Young την απόσταση Δx με γνωστές τις αποστάσεις a και D , υπολογίζουμε το μήκος κύματος λ . Με το πείραμα του Young μετρήθηκε για πρώτη φορά μήκος κύματος του φωτός.

Παρατήρηση:

Στο πείραμα του Young παρατηρούμε την ένταση της ακτινοβολίας και όχι απευθείας το πλάτος του κύματος. Όμως ισχύει $I \propto A^2$ και επομένως, μεγιστοποιήσεις ή μηδενισμοί της έντασης I σημαίνουν αντίστοιχα όμοιες μεταβολές και για το πλάτος.

Παράδειγμα 3-15

Κατά την εκτέλεση του πειράματος του Young χρησιμοποιούμε ακτινοβολία από ατμούς νατρίου. Οι οπές S_1 και S_2 απέχουν απόσταση $a = 2,00 \times 10^{-2}$ mm,



ΣΧΗΜΑ 3.73

ενώ η απόσταση μεταξύ των δύο πετασιμάτων είναι $D = 1,50 \text{ m}$. Η απόσταση του τρίτου φωτεινού κρουσού από τον κεντρικό μετρήθηκε και βρέθηκε $d = 13,1 \text{ cm}$. Να προσδιορισθεί η συχνότητα της ακτινοβολίας των ατμών του νατρίου ($c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$).

Απάντηση

Το μήκος κύματος λ της ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{\alpha}{D} \Delta x$$

Είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \text{και} \quad \Delta x = \frac{d}{3}$$

Άρα

$$\frac{c}{f} = \frac{\alpha d}{3D} \quad \text{ή} \quad f = \frac{3Dc}{\alpha d}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$f = \frac{3 \times 1,5 \times 3 \times 10^8}{2,00 \times 10^{-5} \times 13,1 \times 10^{-2}} \quad \text{ή}$$

$$f = 5,15 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

(Η ακριβής τιμή είναι $5,0934 \times 10^{14} \text{ Hz}$)

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Το φως, οι ακτίνες X, τα ραδιοκύματα κ.λπ. είναι κύματα της ίδιας φύσης. Όλα είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα και διαδίδονται στο κενό με την ίδια ταχύτητα, την ταχύτητα του φωτός c .

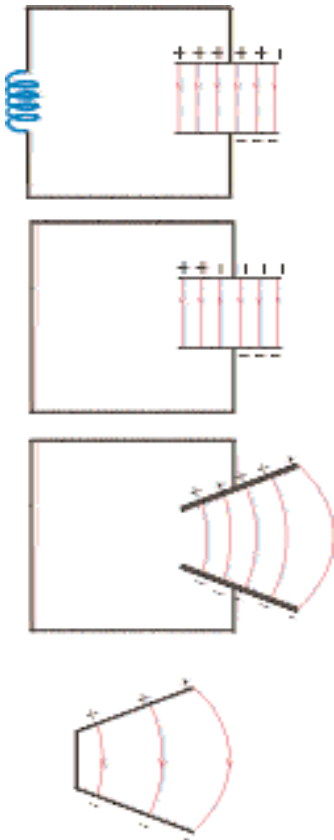
Μια απλή συσκευή παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι το παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο. Για την ποιοτική κατανόηση της λειτουργίας του, θεωρούμε ένα κύκλωμα LC (κύκλωμα Tomson) Σχ. (3.74) Αντικαθιστώντας το πηνίο με ένα απλό σύρμα το κύκλωμα παραμένει LC, με μικρότερο όμως συντελεστή αυτεπαγωγής. Αρχίζουμε και απομακρύνουμε τους σπλισμούς του πυκνωτή και ταυτόχρονα μειώνουμε το εμβαδόν τους. Τελικά, καταλήγουμε σε ένα είδος κυκλώματος Tomson, δηλαδή ένα ευθύγραμμο σύρμα, μια κεραία.

Αν τροφοδοτήσουμε την κεραία με ρεύμα αρκετά υψηλής συχνότητας, τότε εμφανίζονται ηλεκτρικές ταλαντώσεις (Σχ. 3.75).

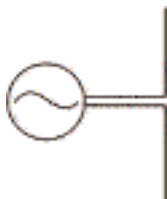
Όταν το ρεύμα στο σύρμα είναι μηδέν, τότε έχουμε πλήρη φόρτιση του "πυκνωτή" και τα φορτία είναι κατανομημένα κατά τρόπο, ώστε στο μισό σύρμα να είναι τα θετικά και στο άλλο μισό τα αρνητικά. Μετά από χρόνο $T/2$ έχουμε πάλι ίδια κατανομή φορτίων, με αντίθετη όμως πολικότητα. Σ' αυτό το χρονικό διάστημα υπάρχει κίνηση φορτίων, δηλαδή ρεύμα και αλλαγή πολικότητας.

Μετά από χρόνο $T/2$ επανέρχεται η αρχική κατάσταση κ.ο.κ.

"Κεραία με τη μορφή ευθύγραμμου σύρματος ονομάζεται παλλόμενο δίπολο". Ας μελετήσουμε ποιοτικά το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα παλλόμενο δίπολο.

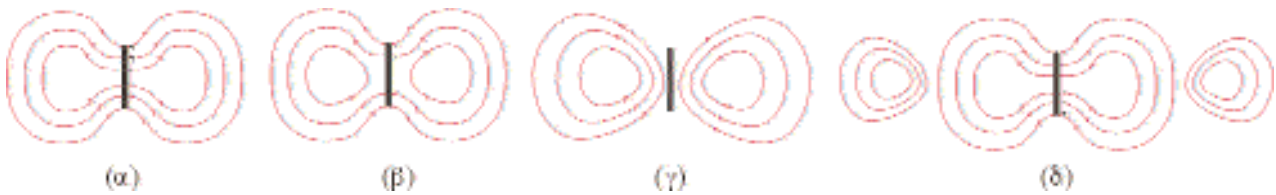


ΣΧΗΜΑ 3.74



ΣΧΗΜΑ 3.75

α) Ηλεκτρικό πεδίο. Όταν το παλλόμενο δίπολο έχει μέγιστο ηλεκτρικό φορτίο στο κάθε μισό του, τότε η μορφή των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών κοντά στο δίπολο, είναι αυτή του σχήματος 3.76. Καθώς μειώνεται το φορτίο,



ΣΧΗΜΑ 3.76

Η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από παλλόμενο δίπολο.

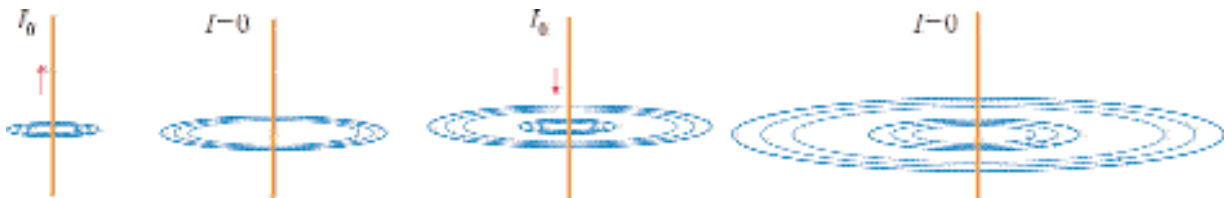
οι δυναμικές γραμμές απομακρύνονται από το δίπολο και έχουμε το στιγμιότυπο (β). Βλέπουμε ότι οι δυναμικές γραμμές, των οποίων τα άκρα ξεκινούν και καταλήγουν στο δίπολο είναι λιγότερες. Αυτό συμβαίνει, διότι έχουμε μικρότερο φορτίο. Όταν το φορτίο γίνει μηδέν, η μορφή του πεδίου περιγράφεται με το στιγμιότυπο (γ) και καμιά ηλεκτρική δυναμική γραμμή δεν έχει τα άκρα της στο παλλόμενο δίπολο. Όταν αλλάξει η πολικότητα του σύρματος, έχουμε το στιγμιότυπο (δ), όπου η φορά των δυναμικών γραμμών αλλάζει και αυτή. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται.

Εάν αναζητήσουμε ένα στιγμιότυπο για μεγάλη περιοχή γύρω από το δίπολο αυτό, θα έχει τη μορφή του σχήματος 3.77, καθώς απομακρυνόμαστε από το δίπολο το πεδίο εξασθενεί και η εξασθένηση είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο η απόσταση από το δίπολο μεγαλώνει.

β) Μαγνητικό πεδίο: Το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα, δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Στο σχήμα 3.78 παρατηρούμε διαδοχικά στιγμιότυπα του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται.



ΣΧΗΜΑ 3.77



ΣΧΗΜΑ 3.78

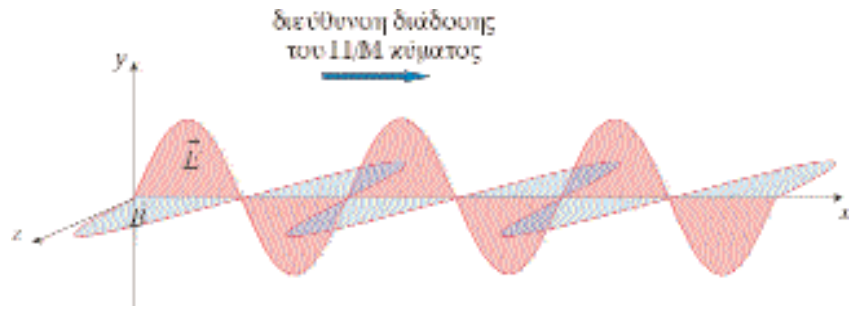
Διαδοχικά στιγμιότυπα του μαγνητικού πεδίου γύρω από παλλόμενο δίπολο.

Επομένως, από το παλλόμενο δίπολο παράγονται ηλεκτρομαγνητικά πεδία που διαδίδονται, δηλαδή κύματα.

Τα κύματα που εκπέμπονται από πολύ μικρό (σημειακό δίπολο) είναι σφαιρικά (όχι σφαιρικά συμμετρικά). Σε μεγάλες αποστάσεις από την κεραία και σε μικρές περιοχές είναι περίπου επίπεδα.

Στο σχήμα 3.79 φαίνονται τα πεδία \vec{E} και \vec{B} για επίπεδο κύμα. Τα πεδία είναι σύμφωνα, κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Η διεύθυνση διάδοσης ενός επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο σχήμα είναι αυτή του άξονα x , οπότε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο δίνονται από τις σχέσεις.

$$\begin{cases} E = E_0 \sin(\omega t - kx) \\ B = B_0 \sin(\omega t - kx) \end{cases} \quad (3.65)$$



ΣΧΗΜΑ 3.79

Το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται και αυτοσυντηρούνται ανεξάρτητα από το δίπολο. Από τις εξισώσεις του Maxwell αποδεικνύεται η ύπαρξή τους και η αυτοσυντήρησή τους.

Παράδειγμα 3-16

Όταν η κεραία ενός σταθμού εκπέμπει ισχύ 1000 W , σε απόσταση 6 km (ακριβώς) από αυτή το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι $5,66 \times 10^{-2} \text{ V/m}$. Αν η συχνότητα του πομπού είναι 4 MHz (ακριβώς) και το μαγνητικό πεδίο συνδέεται με το ηλεκτρικό με τη σχέση $E = cB$, να γραφούν οι σχέσεις για τα πεδία E και B για εκείνη την περιοχή.

Απάντηση

Είναι

$$\omega = 2\pi f = 8\pi \times 10^6 \text{ rad/s (Hz)}$$

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0 = 1,89 \times \frac{10^{-2}}{10^8} \text{ T} = 1,89 \times 10^{-10} \text{ T}$$

Επίσης

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \text{ή} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{8\pi \times 10^6}{3 \times 10^8} \text{ m}^{-1} \quad \text{ή}$$

$$k = 8,37 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$B = B_0 \sin(\omega t - kx)$$

έχουμε

$$E = \left[5,66 \sin \left(8\pi \times 10^6 t - 8,37 \times 10^{-2} x \right) \right] \times 10^{-2} \text{ (S. I.)}$$

$$B = \left[1,89 \sin \left(8\pi \times 10^6 t - 8,37 \times 10^{-2} x \right) \right] \times 10^{-10} \text{ (S. I.)}$$

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει ενέργεια, η οποία περιέχεται στα πεδία του. Η ακτινοβολούμενη ενέργεια ονομάζεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

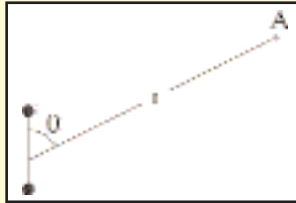
Πιο συγκεκριμένα, όταν έχουμε ακτινοβολία, τα χρονοεξαρτώμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι τέτοια, ώστε ενέργεια να “φεύγει” από την πηγή προς το άπειρο, χωρίς να επιστρέφει πίσω. Δηλαδή δεν χρειάζεται δέκτης για να απορροφήσει την ακτινοβολία. Μπορεί να έχουμε χρονοεξαρτώμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που να μη συνιστούν ακτινοβολία, π.χ. στάσιμα κύματα. Όταν δεν έχουμε ακτινοβολία, η ενέργεια φεύγει από την πηγή και, αν δεν απορροφηθεί από άλλο σώμα, επιστρέφει σε αυτήν, οπότε η μέση τιμή της ενέργειας που παρέχει η πηγή είναι μηδέν. Η ακτινοβολία είναι ισχυρή, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα του διπόλου. Στη συχνότητα του δικτύου ρεύματος (50 Hz) πρακτικά η ακτινοβολία είναι μηδέν. Τα πεδία είναι κυρίως στατικά και μορφής επαγωγικής, όπου ενέργεια παρέχεται στο περιβάλλον των αγωγών και, αν δεν απορροφηθεί, επιστρέφει σ’ αυτούς.

Στο παλλόμενο δίπολο τα φορτία κινούνται αρμονικά και το παραγόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι αρμονικό. Το φαινόμενο αυτό είναι πιο γενικό, δηλαδή όταν έχουμε επιταχυνόμενα φορτία πάντοτε εκπέμπονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Όταν π.χ. τα ηλεκτρόνια της καθόδου σε σωλήνα παραγωγής ακτίνων X κτυπούν στην άνοδο επιβραδύνονται βίαια. Αποτέλεσμα αυτής της επιβράδυνσης είναι η παραγωγή ακτίνων X (ακτινοβολία πέδησης), οι οποίες είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσης. Το παραγόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι μη περιοδικό και επομένως αναλύεται κατά Fourier δίνοντας συνεχές φάσμα συχνοτήτων. Πράγματι η φασματοσκοπική ανάλυση των ακτίνων Röntgen παρέχει εκτός από γραμμικό και συνεχές φάσμα.

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΟΥΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ

Από παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο, το οποίο βρίσκεται στο κενό, παράγονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα, που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός c , οπότε έχουμε γενικώς διάδοση ενέργειας στο κενό.

Η μέση ένταση της ακτινοβολίας I ορίζεται ως η μέση ισχύς ανά μονάδα επιφανείας. Η ένταση της ακτινοβολίας που παράγεται από το παλλόμενο δίπολο σε ένα σημείο A (βλ. σχήμα) δίνεται από τη σχέση



$$I(\theta) = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$$

όπου ω : η κυκλική συχνότητα
 c : η ταχύτητα διάδοσης του φωτός
 ϵ_0 : η ηλεκτρική σταθερά ή επιτρεπτότητα του κενού (λέγεται, κακώς, και διηλεκτρική σταθερά του κενού).
 r : η απόσταση του σημείου από το δίπολο
 θ : η γωνία που σχηματίζει το δίπολο με την απόσταση r
 και p_0 : το πλάτος της ηλεκτρικής διπολικής ροπής του διπόλου.

Η συνολική (μέση) ισχύς ενός παλλόμενου διπόλου είναι το συνολικό

άθροισμα εντάσεων επί τις αντίστοιχες στοιχειώδεις επιφάνειες, που διαιρείται μια κλειστή επιφάνεια, η οποία περικλείει το παλλόμενο δίπολο,

$$P = \sum I(\theta) \Delta S$$

Αποδεικνύεται ότι είναι:

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (\alpha)$$

Ας εξετάσουμε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις, αυτή του ατόμου και αυτή μιας απλής κεραίας.

Το άτομο ακτινοβολεί, διότι κλασικά λέμε ότι "ταλαντώνεται" κάποιο ηλεκτρονίο του. Η (μέγιστη) διπολική ροπή p_0 είναι $p_0 = q_0 \ell$, όπου $q_0 = e$ το φορτίο του ηλεκτρονίου και $\ell \approx 10^{-10}$ m η διάμετρος του ατόμου. Αντικαθιστώντας έχουμε για την ισχύ, $P \approx 10^{-74} \omega^4$.

Στην περιοχή του ορατού φάσματος είναι $\omega \approx 10^{14}$ Hz και επομένως $P \approx 10^{-18}$ W

Η κεραία είναι παλλόμενο δίπολο και για το παλλόμενο δίπολο ισχύει $I_m = \omega Q_m$. Επομένως:

$$p_0 = Q_m \ell \quad \text{ή}$$

$$p_0 = \frac{I_m \ell}{\omega}$$

Αντικαθιστώντας στην (α) έχουμε

$$P = \frac{I_m^2 \ell^2 \omega^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Θέτοντας τυπικές τιμές, όπως $I_0 = 20$ A, $\ell = 30$ m το μήκος της κεραίας και

$$\omega = 2\pi \times 5 \times 10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

βρίσκουμε $P \approx 400$ W.

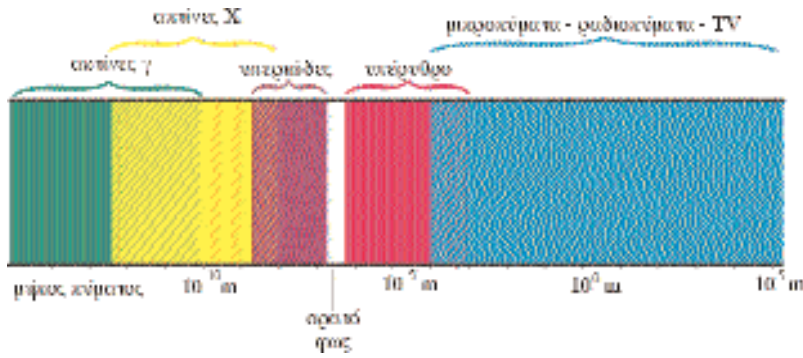
ΛΗΨΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Η λήψη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ακτινοβολίας) γίνεται με κεραία, η οποία τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπέσει σ' αυτή. Προφανώς η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίδια με τη συχνότητα του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Ειδικά, στην ασύρματη επικοινωνία το παραγόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (ακτινοβολίας) του πομπού, το οποίο λέγεται φέρον κύμα, υφίσταται διαμόρφωση πλάτους (AM) ή συχνότητας (FM-Frequency Modulation ή και άλλες διαμορφώσεις), μέσω της οποίας μεταδίδονται τα σήματα πληροφορίας. Η κεραία του δέκτη λαμβάνει το διαμορφωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα του πομπού και με κατάλληλες ηλεκτρονικές διατάξεις επιτυγχάνεται η αποδιαμόρφωση και λήψη των σημάτων πληροφορίας από αυτό.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΦΑΣΜΑ

Τα ραδιοκύματα (ακτινοβολία) είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα σχετικά χαμηλών συχνοτήτων, το ορατό φως υψηλότερων και οι ακτίνες γ πιο υψηλών.



ΣΧΗΜΑ 3.80 (ΠΙΝΑΚΑΣ)

Στον αντίστοιχο πίνακα 3.80 δίνεται το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποια επικάλυψη στα σύνορα των διαφόρων τμημάτων του φάσματος. Για παράδειγμα, ακτινοβολία συχνότητας περίπου 3×10^{11} Hz μπορεί να χαρακτηρισθεί και ως μικροκύματα, διότι παράγεται από ταλαντωτές μικροκυμάτων, και ως υπέρυθρη, διότι παράγεται από ερυθροπυρωμένες πηγές. Οι συχνότητες και τα αντίστοιχα μήκη κύματος που αντιλαμβάνεται ο οφθαλμός του μέσου ανθρώπου είναι:

Χρώμα	μήκος λ (nm)	συχνότητες f (10^{14} Hz)
Ιώδες	390 – 455	7,69 – 6,59
Κυανό	455 – 492	6,59 – 6,10
Πράσινο	492 – 577	6,10 – 5,20
Κίτρινο	577 – 597	5,20 – 5,03
Πορτοκαλί	597 – 622	5,03 – 4,82
Ερυθρό	622 – 780	4,82 – 3,84

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.80(α)

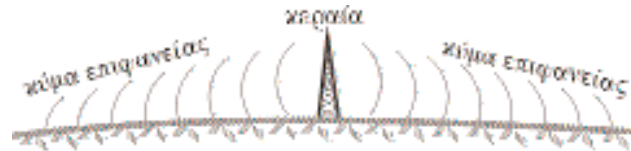
Ονομασία	Συχνότητα	Μήκος Κύματος
Εξαιρετικά Χαμηλές Συχνότητες (ELF)	30 Hz 300 Hz	10^7 - 10^6 m
Συχνότητες Φωνής (VF)	300 Hz 3000 kHz	10^6 - 10^5 m
Πολύ χαμηλές συχνότητες (VLF)	3 kHz 30 kHz	10^5 - 10^4 m
Χαμηλές Συχνότητες (LF)	30 kHz 300 kHz	10^4 - 10^3 m
Μεσαίες Συχνότητες (MF)	300 kHz 3 MHz	10^3 - 10^2 m
Υψηλές Συχνότητες (HF)	3 MHz 30 MHz	10^2 - 10^1 m
Πολύ Υψηλές Συχνότητες (VHF)	30 MHz 300 MHz	10^1 -1 m
Υπερ-Υψηλές Συχνότητες (VHF)	300 MHz 3 GHz	1- 10^{-1} m
Super Υψηλές Συχνότητες (SHF)	3 GHz 30 GHz	10^{-1} - 10^{-2} m
Εξαιρετικά Υψηλές Συχνότητες (EHF)	30 GHz 3000 GHz	10^{-2} - 10^{-3} m
Υπέρυθρες	_____	0,7-10 μ m
Το ορατό φάσμα (φως)	_____	$0,4 \times 10^{-6}$ m
		$0,8 \times 10^{-6}$ m

Στον πίνακα 3.80(α) αναφέρονται αναλυτικά τα είδη των ραδιοκυμάτων και οι συχνότητες τους.

ΔΙΑΔΟΣΗ ΡΑΔΙΟΚΥΜΑΤΩΝ

Ανάλογα με τη διαδρομή που ακολουθούν τα ραδιοκύματα από τον πομπό ως το δέκτη, χαρακτηρίζονται ως εξής:

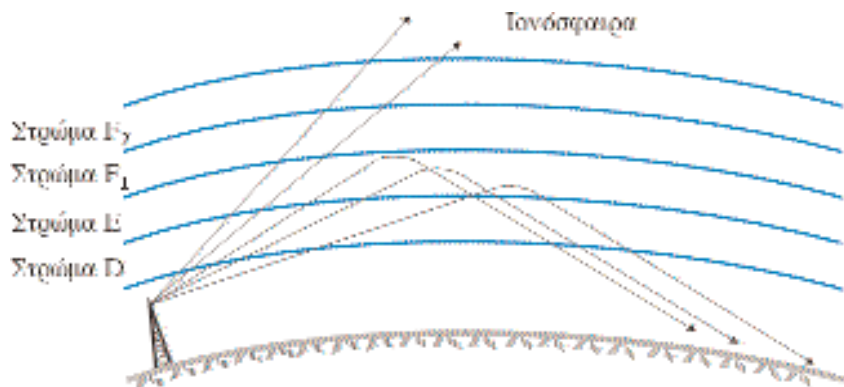
α) **Κύματα εδάφους ή επιφανείας:** Αυτά τα κύματα ταξιδεύουν κατά μήκος του εδάφους και ακολουθούν την καμπυλότητα της γης, με συνέπεια να οδεύουν πέραν του ορίζοντος (Σχ. 3.81). Η εξασθένησή τους οφείλεται στην απορρόφησή



ΣΧΗΜΑ 3.81

τους από τη Γη, η οποία είναι μεγαλύτερη στην ξηρά απ' ό τι στη θάλασσα. Είναι επίσης μεγαλύτερη σε μεγαλύτερες συχνότητες απ' ό τι σε μικρότερες. Η διάδοση με κύματα εδάφους είναι η κύρια διαδρομή ραδιοκυμάτων στην περιοχή των 30 kHz ως των 3 MHz με διαμόρφωση AM. Σε κάποιες περιπτώσεις στις χαμηλές συχνότητες (μακρά κύματα) φτάνουν σε απόσταση μέχρι και 1500 km, η οποία μειώνεται σημαντικά για κύματα μεγαλύτερης συχνότητας, όπως τα VHF, Very High Frequency (πολύ υψηλή συχνότητα).

β) **Κύματα ατμοσφαιρικά:** Αυτά ταξιδεύουν στο χώρο και, αν η συχνότητα τους είναι μικρότερη από μια κρίσιμη συχνότητα, η οποία εξαρτάται από την ώρα της ημέρα και την εποχή (τυπική τιμή 30 MHz), καμπυλώνονται ή ανακλώνται από την ιονόσφαιρα και επιστρέφουν στην Γη (Σχ. 3.82). Η ιονόσφαιρα εκτείνεται

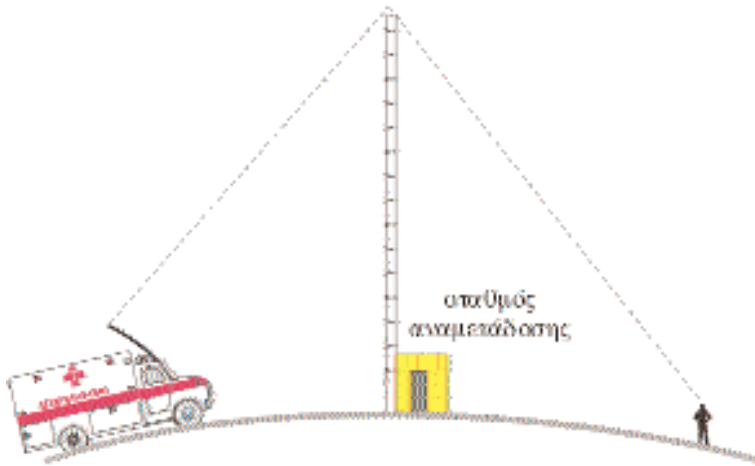


ΣΧΗΜΑ 3.82

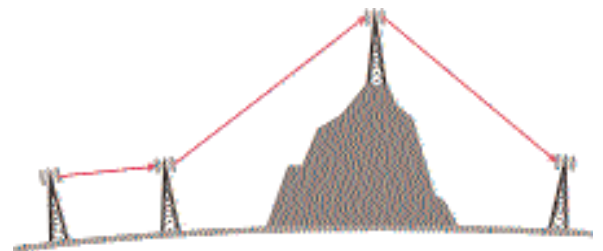
περίπου από 80 km έως 500 km πάνω από τη Γη και σ' αυτή υπάρχουν θετικά ιόντα και ηλεκτρόνια, τα οποία προκύπτουν από τον ιονισμό των μορίων της ανώτερης ατμόσφαιρας από την υπεριώδη ηλιακή ακτινοβολία. Τα ατμοσφαιρικά κύματα χαμηλών μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων μπορούν να ταξιδέψουν πολλές χιλιάδες χιλιόμετρα. Αν όμως η συχνότητά τους είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη, διαπερνούν την ιονόσφαιρα και ταξιδεύουν στο διάστημα.

Αν σε ένα τόπο φτάνουν συγχρόνως τα κύματα επιφανείας και τα ατμοσφαιρικά του ίδιου ραδιοσήματος με παραπλήσια ένταση, έχουμε επαλληλία και παρατηρούνται διαλείψεις (Fade), δηλαδή αυξομειώσεις του σήματος.

γ) **Κύματα χώρου:** Είναι τα κατευθείαν διαδιδόμενα κύματα από την κεραία εκπομπής στην κεραία λήψης. Δεν υφίστανται ούτε διάθλαση ούτε ανάκλαση και, για να ληφθούν, πρέπει να υπάρχει οπτική επαφή κεραίας πομπού και κεραίας δέκτη. Με τον τρόπο αυτό διαδίδονται τα VHF, UHF (Ultra High Frequency, υπερυψηλές συχνότητες) και γενικά τα μικροκύματα. Η μέγιστη απόσταση μετάδοσής τους είναι περίπου 150 km. Για να αυξηθεί η απόσταση αυτή, χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές, σπουδαιότερη των οποίων είναι η χρήση σταθμών επαναληπτών, που είναι ένας συνδυασμός δέκτη και πομπού. Ο επαναλήπτης λαμβάνει το σήμα από τον πομπό το ενισχύει και το αναμεταδίδει προς το δέκτη. Εγκαθίσταται σε υψηλές θέσεις μεταξύ σταθμού εκπομπής και λήψης και ο ίδιος έχει μεγάλο ύψος (Σχ. 3.83). Μπορούν



ΣΧΗΜΑ 3.83

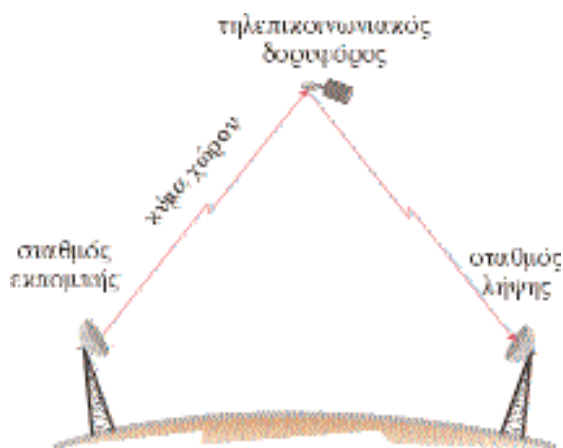


ΣΧΗΜΑ 3.84

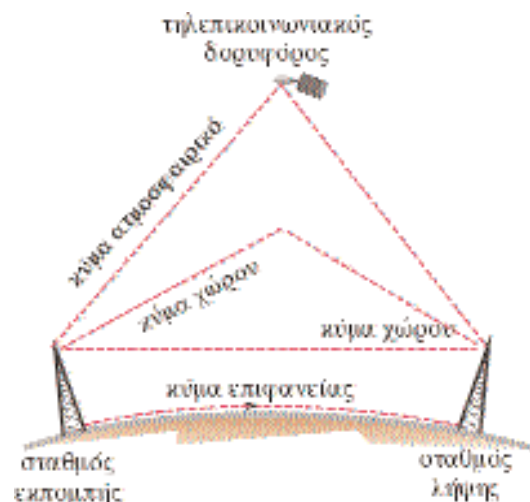
επίσης να χρησιμοποιηθούν διαδοχικοί αναμεταδότες για μετάδοση σε μεγάλες αποστάσεις (Σχ. 3.84).

Χρησιμοποιούνται ως επαναλήπτες τηλεπικοινωνιακοί δορυφόροι (Σχ. 3.85) που είναι γεωστατικοί δορυφόροι (σε σταθερή θέση πάνω από τη Γη) και έχουν πολλούς αναμεταδότες, ώστε να αναμεταδίδουν πολλά διαφορετικά φέροντα κύματα (ακτινοβολίας).

Στο σχήμα 3.86 παρίστανται συγκεντρωτικά οι τρόποι μετάδοσης που προαναφέραμε:



ΣΧΗΜΑ 3.85



ΣΧΗΜΑ 3.86

ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΡΑΔΙΟΚΥΜΑΤΑ

Στον πίνακα 3.80(α) δίνεται το φάσμα των ραδιοκυμάτων, όπου αναγράφεται και το εύρος συχνοτήτων που καλύπτει κάθε περιοχή. Δεν έχουν όλα σημαντική συνιστώσα ακτινοβολίας. Πιο αναλυτικά για κάθε περιοχή έχουμε:

1) Εξαιρετικά Χαμηλές Συχνότητες (ELF-Extremely Low Frequencies): Είναι οι συχνότητες που κυμαίνονται μεταξύ 30 Hz και 300 Hz. Περιλαμβάνουν τις συχνότητες των γραμμών μεταφοράς ισχύος, (στην Ευρώπη) 50 Hz, καθώς και την περιοχή ακουστικών συχνοτήτων.

2) Συχνότητες φωνής (VF-Voice Frequencies): Κυμαίνονται μεταξύ 300 Hz και 3000 Hz. Είναι η κανονική περιοχή συχνοτήτων της ανθρώπινης ομιλίας. Αν και ο άνθρωπος μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 Hz έως 20000 Hz, στην καθημερινή του ομιλία οι συχνότητες που παράγονται, βρίσκονται στην περιοχή VF.

3) Πολύ Χαμηλές Συχνότητες (VLF-Very Low Frequencies): Είναι η ζώνη συχνοτήτων από 3 kHz έως 30 kHz. Περιλαμβάνει το ανώτερο άκρο της περιοχής των ακουστών ήχων (15 kHz έως 20 kHz) και χρησιμοποιείται σε κάποιες κυβερνητικές και στρατιωτικές επικοινωνίες. Για παράδειγμα η VLF ραδιοσυχνότητες χρησιμοποιούνται από το ναυτικό για επικοινωνία με τα υποβρύχια.

4. Χαμηλές Συχνότητες (LF-Low Frequencies): Κυμαίνονται μεταξύ 30 kHz έως 300 kHz. Η περιοχή αυτή χρησιμοποιείται κυρίως για τις επικοινωνίες στην αεροναυτική και στη θαλάσσια ναυσιπλοΐα. Επίσης συχνότητες της περιοχής αυτής χρησιμοποιούνται ως υποφορείς (φέρουσες). Υποφορείς είναι συχνότητες οι οποίες, μεταφέρουν διαμορφώνουσα πληροφορία, αλλά στη συνέχεια διαμορφώνουν μια άλλη φέρουσα υψηλότερης συχνότητας.

5. Μεσαίες Συχνότητες (MF-Medium Frequencies): Οι μεσαίες συχνότητες είναι μεταξύ 300 kHz και 3000 kHz. Βρίσκουν εφαρμογές στις ραδιοφωνικές εκπομπές AM (διαμόρφωση πλάτος) (535 kHz ως 1605 kHz.), καθώς επίσης τις θαλάσσιες και αεροναυτικές επικοινωνίες.

6. Υψηλές Συχνότητες (HF-High Frequencies): Κυμαίνονται μεταξύ 3 MHz και 30 MHz και είναι γνωστές ως βραχέα κύματα. Εφαρμογές βρίσκουν στις ραδιοεπικοινωνίες δύο κατευθύνσεων (αμφίδρομες), καθώς και σε Διεθνείς ραδιοεκπομπές. Για παράδειγμα “Η Φωνή της Αμερικής”, η “Φωνή της Ελλάδας” προς τους Έλληνες Εξωτερικού, εκπέμπουν σ’ αυτή την περιοχή. Επίσης, τα βραχέα κύματα χρησιμοποιούνται από κυβερνητικές και στρατιωτικές υπηρεσίες, καθώς επίσης και στις επικοινωνίες ραδιοερασιτεχνών και CB.

7. Πολύ Υψηλές Συχνότητες (VHF-Very High Frequencies): Καλύπτουν την περιοχή 30 MHz έως 300 MHz. Είναι η πλέον δημοφιλής περιοχή συχνοτήτων. Χρησιμοποιείται από πολλές υπηρεσίες, συμπεριλαμβανομένης της ασύρματης κινητής, θαλάσσιας και αεροναυτικής επικοινωνίας, για ραδιοφωνικές εκπομπές των FM (Διαμόρφωση Συχνότητας) (88 MHz ως 108 MHz) και για τηλεοπτικές εκπομπές (κανάλια 2 μέχρι 13). Ακόμη οι ραδιοερασιτέχνες έχουν μερικές ζώνες στην περιοχή αυτών των συχνοτήτων.

8. Υπερυψηλές Συχνότητες (UHF-Ultra High Frequencies): Καλύπτουν το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από 300 MHz έως 3000 MHz. Περιλαμβάνουν τα UHF τηλεοπτικά κανάλια (από 14 έως 83) και χρησιμοποιούνται για επίγειες κινητές επικοινωνίες (όπως η κινητή τηλεφωνία). Οι στρατιωτικές υπηρεσίες, μερικές υπηρεσίες ραντάρ και ναυσιπλοΐας, καθώς και ραδιοερασιτέχνες, έχουν ζώνες στην περιοχή αυτή του φάσματος.

9. Διαν Υψηλές Συχνότητες (SHF-Super High Frequencies): Κυμαίνονται από 3 GHz έως 30 GHz και χρησιμοποιούνται ευρέως στις δορυφορικές επικοινωνίες και στα ραντάρ. Επίσης κάποιες εξειδικευμένες αμφίδρομες μορφές ραδιοεπικοινωνίας καλύπτουν αυτή την περιοχή.

10. Εξαιρετικά Υψηλές Συχνότητες (EHF-Extremely High Frequencies): Οι συχνότητες EHF εκτείνονται από 30 GHz έως 300 GHz. Προς το παρόν, υπάρχει περιορισμένος αριθμός δραστηριοτήτων σ' αυτή την περιοχή, μεταξύ των οποίων είναι οι δορυφορικές επικοινωνίες και κάποια ραντάρ. Ο λόγος είναι ότι ο εξοπλισμός που χρησιμοποιείται για παραγωγή και λήψη, είναι εξαιρετικά πολύπλοκος και ακριβός. Η EHF περιοχή συχνοτήτων θα γίνει περισσότερο εκμεταλλεύσιμη με την ταυτόχρονη εξέλιξη της τεχνολογίας των.

Μικροκύματα: Οι συχνότητες πάνω από περίπου 1 GHz ονομάζονται μικροκύματα, διότι το μήκος κύματος είναι στην περιοχή μερικών

Α Ν Α Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ω Σ Η

□ Η εξίσωση επίπεδου αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του άξονα των x είναι

$$y_0 = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

όπου $\omega = 2\pi f$ και $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Η ταχύτητα διάδοσης των παραγόμενων κυμάτων σε μια χορδή δίνεται από τη σχέση

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

□ Ο Huygens για την διάδοση των κυμάτων επινόησε την αρχή που φέρνει το όνομά του, σύμφωνα με την οποία, “κάθε σημείο μετώπου

κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή δευτερευόντων κυματιδίων που διαδίδονται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος”.

□ Όταν κύμα συναντά διαχωριστική επιφάνεια, κάθε ακτίνα του διαχωρίζεται στην ανακλώμενη και την διαθλώμενη. Για την ανακλώμενη ισχύει $\theta_1 = \theta_1'$, (γωνία προσπτώσεως = γωνία ανακλάσεως) και για την διαθλώμενη ισχύει

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

όπου θ_1, θ_2 οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης αντίστοιχα και v_1, v_2 η ταχύτητα

του κύματος στα δύο μέσα. Ο απόλυτος δείκτης διάθλασης ενός μέσου είναι

$$n = \frac{c}{v},$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και v η ταχύτητα του φωτός στο μέσο. Ολική ανάκλαση έχουμε, όταν το κύμα διαδίδεται από ένα μέσο σε ένα άλλο, στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης είναι μεγαλύτερη. Για την οριακή γωνία ολικής ανάκλασης θ_c ισχύει

$$\sin \theta_c = \frac{v_1}{v_2}$$

□ Στάσιμα κύματα προκύπτουν, όταν διαδίδονται κύματα σε μέσο περιορισμένων διαστάσεων. Σε μια χορδή τα στάσιμα κύματα έχουν την εξίσωση

$$y = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Στα σημεία $x_n = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ και $x_\delta = n \frac{\lambda}{2}$ με $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε κοιλίες (πλάτος $2A_0$) και δεσμούς (πλάτος μηδενικό) αντίστοιχα. Οι ιδιοσυχνότητες μιας χορδής είναι:

$$f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Στον ηχητικό σωλήνα έχουμε επίσης στάσιμα κύματα και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες για σωλήνα μήκους L με τα δύο του άκρα ανοικτά είναι

$$f_n = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Όταν το ένα άκρο μένει ανοικτό και το άλλο κλειστό έχουμε:

$$f_{2n+1} = (2n+1) \frac{v}{4L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

v η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

□ Κατά τη συμβολή δύο συγχρόνως πηγών

για τα σημεία συμβολής μεγίστου και ελαχίστου (μηδενικού) πλάτους ισχύει:

$$r_2 - r_1 = n\lambda$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (μέγιστο πλάτος)

$$r_2 - r_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(μηδενικό πλάτος)

□ Κατά το πείραμα του Young, από την απόσταση Δx μεταξύ δύο διαδοχικών κροσσών ενισχυτικής ή καταστροφικής συμβολής, την απόσταση a μεταξύ των πηγών και την απόσταση D μεταξύ των δύο πετασμάτων, υπολογίζεται το μήκος της μονοχρωματικής ακτινοβολίας που χρησιμοποιήθηκε

$$\lambda = \frac{a}{D} \Delta x$$

□ Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να παραχθούν από ένα παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο, δηλ. μια κεραία, τροφοδοτώντας την με ρεύμα αρκετά υψηλής συχνότητας. Τα παραγόμενα ηλεκτρομαγνητικά κύματα αυτοσυντηρούνται και διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός όπως αποδεικνύεται και θεωρητικά με τις εξισώσεις του Maxwell. Μακριά από την πηγή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ακτινοβολίας) γίνονται επίπεδα και οι εξισώσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι:

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$B = B_0 \sin(\omega t - kx)$$

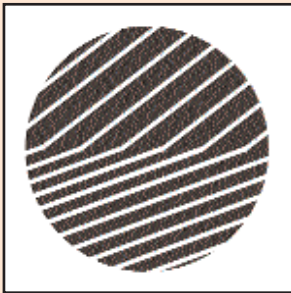
Η λήψη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων γίνεται με κεραίες που εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, όταν προσπέσουν πάνω τους τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ανάλογα με την συχνότητα τους ακολουθούν και διαφορετική διαδρομή διάδοσης και, έτσι, χαρακτηρίζονται ως κύματα εδάφους, ατμοσφαιρικά ή χώρου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΥΔΑΤΙΝΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Χρησιμοποιείστε μια μακρόστενη λεκάνη, όπου από την μέση και πέρα έχετε τοποθετήσει στον πυθμένα μια σανίδα ή άμμο, ώστε το βάθος να είναι διαφορετικό. Γεμίστε την λεκάνη με νερό και δημιουργώντας επίπεδα κύματα στην επιφάνεια του νερού, με κατάλληλη κίνηση μιας σανίδας, θα παρατηρήσετε το φαινόμενο της διάθλασης των υδάτινων κυμάτων, καθώς οδεύουν από τη μια πλευρά με το μεγάλο βάθος προς αυτή με το μικρότερο.



Το πείραμα πετυχαίνει, αν το βάθος του νερού είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος. Αυτό συμβαίνει, διότι η ταχύτητα των κυμάτων εξαρτάται από το βάθος του νερού.

ΑΚΟΥΣΤΙΚΟ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

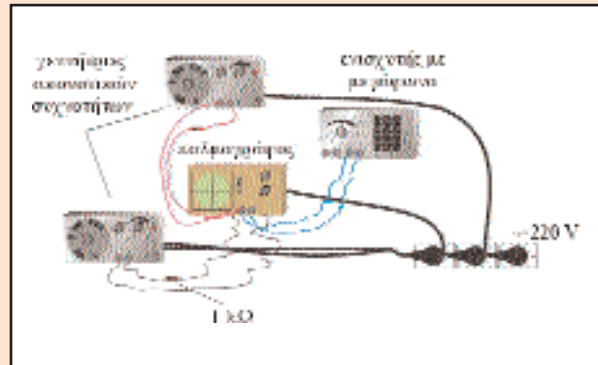
Έχοντας δύο όμοια διαπασών τροποποιούμε ελαφρώς την συχνότητα του ενός κολλώντας στο ένα σκέλος του ένα κομμάτι τσίχλας. Κτυπάμε τα δύο διαπασών και ακούμε διακρότημα, δηλαδή αυξομειώσεις στην ένταση του ήχου.

ΜΗ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΑ ΓΥΑΛΙΑ

Στα γυαλιά μπορούν και περιορίζουν την ανακλαστικότητά τους τοποθετώντας πάνω τους ένα στρώμα υλικού με κατάλληλο δείκτη διαθλάσεως και κατάλληλο πάχος. Αυτό συμβαίνει, διότι η ανακλώμενη ακτίνα από το υλικό και αυτή από το γυαλί συμβάλλουν καταστρεπτικά. Ανατρέξτε στην αντίστοιχη βιβλιογραφία και αναπτύξτε το θέμα αναλυτικά.

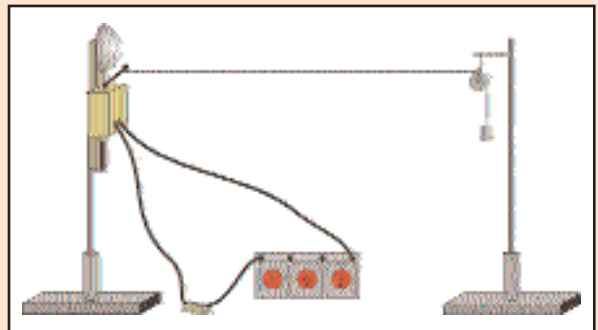
ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ ΣΤΟΝ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟ

Πραγματοποιείτε το κύκλωμα του σχήματος, ρυθμίζοντας τις γεννήτριες ακουστικών συχνοτήτων ώστε να δίνουν αρμονικό σήμα ακουστικής συχνότητας π.χ. 80 Hz. Το ύψος του σήματος μπορεί να επιλεγεί περίπου 500 mV. Τα δύο σήματα ρυθμίζονται, ώστε να είναι



ίσα και εφαρμόζονται στις δύο εισόδους του παλμογράφου και προστίθενται. Μεταβάλλουμε αργά τη συχνότητα της μιας γεννήτριας ακουστών συχνοτήτων ώστε να δούμε το διακρότημα στην οθόνη του παλμογράφου. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο μια είσοδο παλμογράφου αν παρεμβάλουμε δύο αντιστάτες των 1000 Ω μεταξύ εισόδου και σήματος της κάθε γεννήτριας. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να ακούσουμε με ενισχυτή και μεγάφωνο το “διακρότημα”, αν συνδέσουμε την είσοδο του ενισχυτή με την είσοδο του παλμογράφου.

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΧΟΡΔΗ.



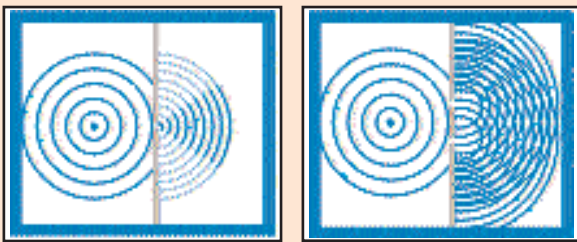
Φτιάξτε τη διάταξη του σχήματος. Θέστε σε λειτουργία το ηλεκτρικό κουδούνι, οπότε δημιουργούνται στάσιμα κύματα στη χορδή. Μετρήστε την απόσταση d μεταξύ δύο δεσμών. Ισχύει

$$\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

όπου F το βάρος των βαριδιών που κρεμάσατε. Επαληθεύστε πειραματικά την τελευταία σχέση αλλάζοντας τα βάρη. Το πείραμα πρέπει να γίνεται, έτσι ώστε η συχνότητα του κουνουνιού να είναι ίδια, όταν κρεμάτε πρόσθετα βαρίδια.

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΥΔΑΤΙΝΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Μ' ένα εμπόδιο χωρίζουμε λεκάνη με νερό στα δύο, όπως φαίνεται στα σχήματα. Με την πρώτη διάταξη που το ξύλο έχει ένα άνοιγμα περίπου 1 cm και το νερό έχει βάθος περίπου 1 cm, δημιουργούμε κύματα στο αριστερό μέρος. Στο δεύτερο μέρος παρατηρούμε το



φαινόμενο της περίθλασης. Αν έχουμε ανοίξει δύο οπές, παρατηρούμε στο δεύτερο μέρος φαινόμενα συμβολής. Φωτίστε την λεκάνη από πάνω για πιο ευκρινή αποτελέσματα.

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Ένας απλός τρόπος για να παρατηρήσετε περίθλαση του φωτός, είναι να παρεμβάλετε μεταξύ μιας λάμπας και του ματιού σας τα δάκτυλά σας. Αυξομειώνοντας την απόσταση μεταξύ των σχεδόν ενωμένων δακτύλων παρατήστε το φαινόμενο της περίθλασης.

ΟΠΤΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Ανατρέξτε στην βιβλιογραφία και αναπτύξτε το θέμα εκτενώς.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Σε λεκάνη με νερό, όπου στον πυθμένα τοποθετήσατε μαύρο πανί, ρίξτε μια σταγόνα από “ελαφρύ” λάδι, π.χ. λάδι αυτοκινήτου. Θα παρατηρήσετε ότι καθώς το λάδι απλώνετε σε μεγάλη έκταση, το φως που πέφτει στην επιφάνεια του νερού και το οποίο προέρχεται από έναν λαμπτήρα πυρακτώσεως, δίνει φαινόμενα συμβολής που οφείλονται στην ανακλώμενη ακτίνα στην άνω επιφάνεια του λαδιού και σ' αυτή στην επιφάνεια μεταξύ

λαδιού και νερού. Ανάλογα με το πάχος του στρώματος άλλα μήκη κύματος συμβάλλουν ενισχυτικά και άλλα καταστρεπτικά. Όταν το πάχος του στρώματος γίνει μικρότερο του $\lambda/8$, όπου λ το μέσο μήκος κύματος του φωτός, δεν παρατηρούνται αυτά τα φαινόμενα και απλώς βλέπουμε τον πυθμένα. Υπολογίστε χοντρικά το μήκος κύματος του φωτός από το πάχος d του στρώματος. Το πάχος d θα το υπολογίσετε ως εξής: από ένα μεγάλο πλήθος σταγόνων, π.χ. 100, υπολογίζοντας τον συνολικό τους όγκο βρίσκετε τον όγκο της μιας και από το εμβαδόν της έκτασης που κατέλαβε το λάδι, βρίσκετε το πάχος του στρώματος λαδιού.

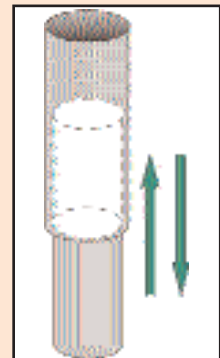
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΗΧΟΥ ΜΕ ΤΟ ΡΟΛΟ ΚΟΥΖΙΝΑΣ

Πάρτε τους χάρτινους σωλήνες από δύο ρολά κουζίνας. Κόψτε τον ένα κατά μήκος και αφαιρέστε μια μικρή λωρίδα. Ξανακολλήστε το με μια μονωτική ταινία, ώστε να μικρύνει η διατομή του. Θέστε τον ένα σωλήνα μέσα στον άλλο, ώστε να προκύψει ένα τρομπόνι. Ακούστε κάμποσες φορές τον ήχο ενός διαπασών 523,3 Hz ή κοντά σ' αυτή την συχνότητα (γιατί;). Κατόπιν αυξομειώστε το μήκος του τρομπονιού και χτυπώντας το ελαφρά στο κεφάλι σας, προσπαθείτε να πετύχετε το ύψος του ήχου του διαπασών. Μετρήστε τότε το μήκος του σωλήνα, L_0 , και προσθέστε τα 0,6 της διαμέτρου της διατομής. Το μέγεθος $L = L_0 + 0,6 \times D$ είναι το μήκος ιδανικού (χωρίς φαινόμενα άκρων) σωλήνα που δίνει αυτή την συχνότητα. Ισχύει

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} \quad \text{ή}$$

$$v = 2f(L_0 + 0,6 \times D) \quad \text{όπου } v \text{ η ταχύτητα του ήχου.}$$

Από την αντίστοιχη σχέση θεμελιώδους συχνότητας και μήκους ανοιχτού και στα δύο άκρα, υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του ήχου.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Ποιά κύματα λέγονται αρμονικά;

2

Ποιά από τα παρακάτω κύματα είναι αρμονικά;

(α) $y(x, t) = 5 \cos(3x - 5t)$

(β) $y(x, t) = 2 \sin^2(2t - x)$

(γ) $y(x, t) = 3 \sin(10t - 0,1x) + 2 \cos(10t = 0,10x)$

(δ) $y(x, t) = 6e^{-\sin(2t - x)}$

(ε) $y(x, t) = 8^{-3x} \sin(5x - 3t)$

3

Προς ποιά κατεύθυνση διαδίδονται τα παρακάτω κύματα.

(α) $y(x, t) = 6 \cos(5t - 3x)$

(β) $y(x, t) = 7 \sin(-6x - 10t)$

(γ) $y(x, t) = 12 \sin(2x - 5t)$

(δ) $y(x, t) = 6 \cos(3x + 2t) + 7 \sin(-3x - 2t)$

4

Αντιστοιχίστε την διαταραχή με την ταχύτητα για τις παρακάτω περιπτώσεις κυμάτων

i) $6 \sin(3t - 2x)$ (α) 2,00 m/s

ii) $7 \cos(4x + 5t)$ (β) 1,25 m/s

iii) $6 \cos(-5x + 6t)$ (γ) 1,50 m/s

iv) $2 \sin(-3x - 6t)$ (δ) 1,20 m/s

5

Τί λέγεται μέτωπο κύματος; Τι λέγεται ακτίνα κύματος;

6

Σε ένα σημείο του χώρου παράγονται αρμονικά μηχανικά κύματα τα οποία διαδίδονται ομοιόμορφα χωρίς απώλειες προς όλες τις κατευθύνσεις. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

(α) Η ενέργεια που ρέει ανά μονάδα χρόνου από επιφάνειες ομόκεντρων σφαιρών με κέντρο την πηγή μειώνεται καθώς αυξάνεται η ακτίνα των σφαιρών.

(β) Σε μεγάλη απόσταση από την πηγή τα κύματα γίνονται επίπεδα διότι όλες οι ακτίνες είναι σχεδόν παράλληλες.

(γ) Το πλάτος του κύματος μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από την πηγή διότι μειώνεται η ενέργεια που διέρχεται ανά μονάδα επιφάνειας.

(δ) Όλα τα σωματίδια της επιφάνειας μιας σφαίρας με κέντρο την πηγή, έχουν κάθε στιγμή ίδιες

απομακρύνσεις.

7

Ορίζοντας ως ένταση του κύματος I , την ισχύ που περνάει ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, αποδείξτε ότι οι εντάσεις I_1 και I_2 ομοιόμορφου σφαιρικού κύματος στις αποστάσεις r_1 και r_2 αντίστοιχα από την πηγή, συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

8

Όταν μια μονοχρωματική ακτίνα φως εισέρχεται από ένα οπτικά πυκνότερο μέσο σε ένα αραιότερο, ποιές από τις παρακάτω ποσότητες μένουν σταθερές;

(α) Το πλάτος του κύματος

(β) Η συχνότητα του κύματος

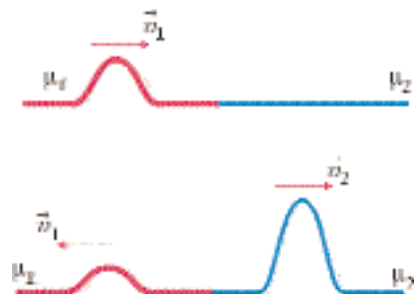
(γ) Το μήκος του κύματος

(δ) Η ταχύτητα του κύματος

(ε) Η κυκλική συχνότητα

9

Στο σχήμα βλέπουμε διαδοχικά στιγμιότυπα ενός παλμού που διαδίδεται πάνω σε χορδή αρχικά προς



τα δεξιά. Εξηγήστε γιατί:

(α) Η γραμμική πυκνότητα μ_1 είναι μεγαλύτερη της γραμμικής πυκνότητας μ_2 .

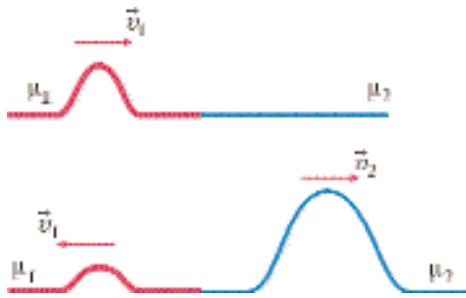
(β) Ο ανακλώμενος παλμός είναι μικρότερος του προσπίπτοντος.

(γ) Ο ανακλώμενος παλμός κινείται με την ίδια ταχύτητα με αυτή του προσπίπτοντος.

(δ) Ο διαθλώμενος παλμός είναι πιο πεπλατυσμένος από τον προσπίπτοντα.

10

Η σχέση του εύρους d_2 του διαθλώμενου και d_1 του προσπίπτοντος παλμού σε μια χορδή με

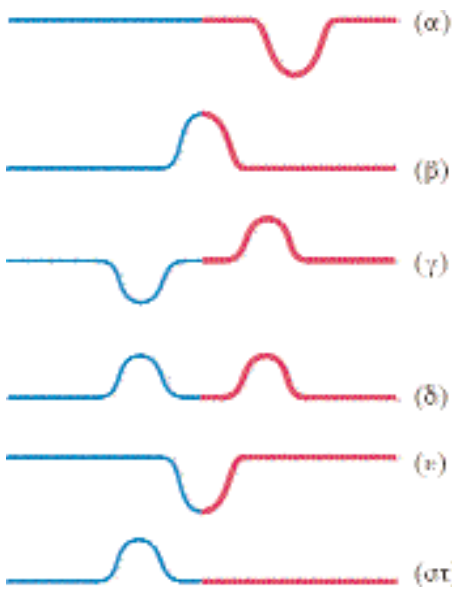


ασυνέχεια, είναι $d_2 = 2d_1$. Ποιά είναι η σχέση που συνδέει τις γραμμικές πυκνότητες των δύο τμημάτων της χορδής;

- (α) $\mu_1 = 2\mu_2$,
- (β) $\mu_1 = \sqrt{2}\mu_2$
- (γ) $\mu_1 = 4\mu_2$
- (δ) $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_2$

11

Τα σχήματα είναι στιγμιότυπα δύο διαφορετικών



φαινομένων ανάκλασης και διάθλασης σε ασυνέχεια χορδής. Ομαδοποιείτε τις φωτογραφίες και τοποθετήστε αυτές στη σωστή χρονική σειρά.

12

Το εύρος του ανακλώμενου παλμού σε σχέση με αυτό του προσπίπτοντος σε μια χορδή με ασυνέχεια είναι:

- (α) ίσο
- (β) μικρότερο
- (γ) μεγαλύτερο
- (δ) εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

13

Διατυπώστε την αρχή του Huygens.

14

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Κατά τη διάδοση του κύματος τα μέτωπα κύματος είναι (α) μεταξύ τους επιφάνειες, (β) στις ακτίνες του κύματος. Στο επίπεδο κύμα οι ακτίνες είναι μεταξύ τους (γ) και οι ισοφασικές επιφάνειες (δ) επίπεδα”.

15

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Όταν ένα κύμα διαδίδει σε ένα μέσο και συναντάει (α) διαχωρίζεται σε δύο κύματα, το ένα είναι το (β) και διαδίδεται στο ίδιο μέσο, και το άλλο το (γ) και διαδίδεται στο άλλο μέσο”.

16

Διατυπώστε τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης επιπέδου κύματος.

17

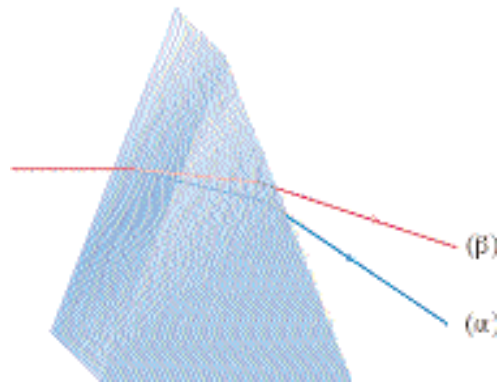
Αποδείξτε με τη βοήθεια της αρχής του Huygens τον νόμο της διάθλασης επιπέδου κύματος.

18

Αποδείξτε με συλλογισμούς συμμετρίας ότι η ανακλώμενη διαθλώμενη και προσπίπτουσα ακτίνα βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο.

19

Δύο παράλληλες μονοχρωματικές ακτίνες α και β περνάνε μέσα από γυάλινο πρίσμα όπως στο σχήμα.



Αν η εκτροπή της (α) είναι μεγαλύτερη από αυτή της (β), ποιά ακτίνα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα στο γυαλί;

20

Σε ποιά περίπτωση οι διαθλώμενες ακτίνες κάμπτονται προς την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια;

21

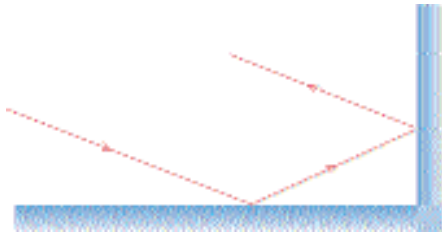
Τι είναι το φαινόμενο ολικής ανάκλασης; Αναφέρετε κάποια εφαρμογή του.

22

Μπορεί να παρατηρηθεί το φαινόμενο ολικής ανάκλασης και στα δύο μέσα μιας διαχωριστικής επιφάνειας;

23

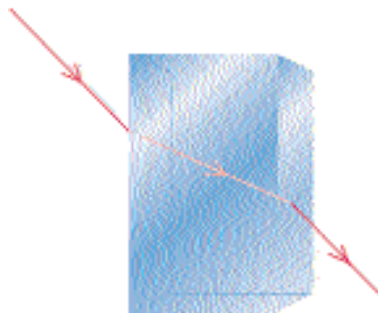
Οι δύο καθρέπτες είναι κάθετα τοποθετημένοι να αποδειχθεί ότι η ανακλώμενη ακτίνα από το σύστημα



των καθρεπτών είναι παράλληλη στην προσπίπτουσα (περιοριστείτε στο επίπεδο του σχήματος).

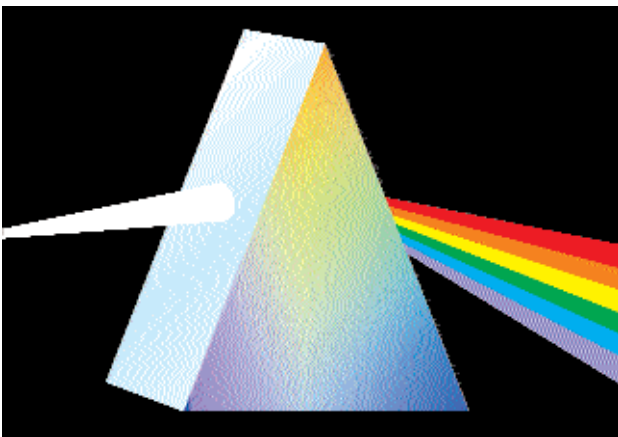
24

Να δεχθεί ότι, όταν μονοχρωματική δέσμη διέλθει από γυάλινη πλάκα με παράλληλες πλευρές δεν υφίσταται καμιά εκτροπή.



25

Το λευκό φως είναι συνδυασμός όλων των συχνοτήτων του ορατού φάσματος. Όταν το λευκό φως περνά



από τριγωνικό πρίσμα αναλύεται σε πολλά χρώματα (χρώματα της ίριδος), όπως στο σχήμα. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

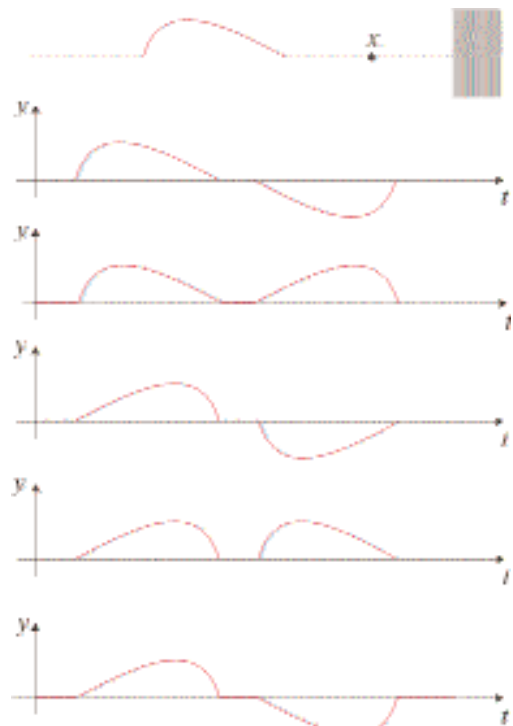
- (α) Οι ερυθρές ακτίνες εκτρέπονται περισσότερο από τις κυανές.
- (β) Οι ακτίνες μεγαλύτερης συχνότητας έχουν μεγαλύτερη ταχύτητα στο γυαλί.
- (γ) Αν μειώσουμε τη διαθλαστική γωνία του πρίσματος, πέραν μιας τιμής, η σειρά των χρωμάτων θα ανατραπεί.

26

Η ταχύτητα διάδοσης υδάτινων κυμάτων μικρού μήκους κύματος εξαρτάται από την επιφανειακή τάση σ (δύναμη ανά μονάδα μήκους), από την πυκνότητα ρ του νερού και από το μήκος κύματος. Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης v με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης (ο αδιάστατος συντελεστής είναι $\sqrt{2\pi}$).

27

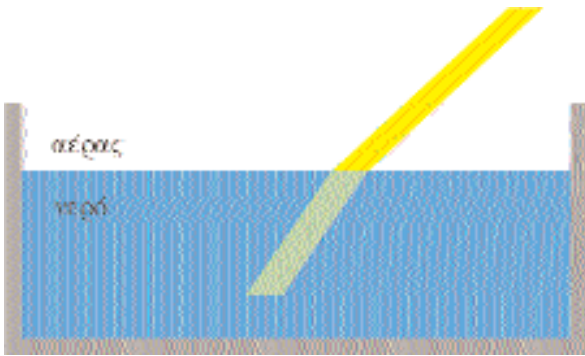
Ο παλμός του σχήματος διαδίδεται προς τα δεξιά και τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει τη μορφή του σχήματος.



Ποιά από τις γραφικές παραστάσεις ανταποκρίνεται στην απομάκρυνση y του σημείου x με το χρόνο;

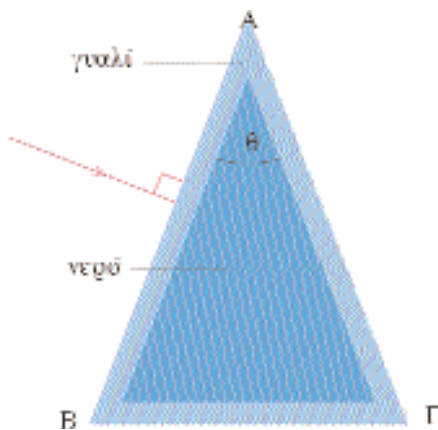
28

Γιατί ένας χάρακας όταν βυθίζεται στο νερό φαίνεται σπασμένος. (Δες σχήμα)



29

Το τριγωνικό πρίσμα του σχήματος έχει πλευρές από γυαλί και είναι γεμάτο με νερό. Αν μια ακτίνα



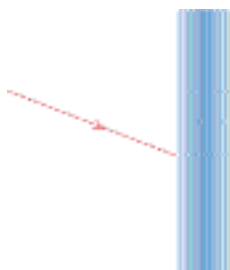
φωτός πέφτει κάθετα στην πλευρά AB, η ελάχιστη τιμή για το $\sin\theta$, ώστε να υποστεί ολική ανάκλαση στην επιφάνεια ΑΓ μεταξύ γυαλιού και αέρα είναι

- (α) $\frac{1}{2}$, (β) $\frac{2}{3}$, (γ) $\frac{3}{4}$, (δ) $\frac{8}{9}$, (ε) $\frac{16}{27}$

Δίνονται οι δείκτες διάθλασης $\frac{4}{3}$ και $\frac{3}{2}$ για το νερό και το γυαλί αντίστοιχα.

30

Στο γυάλινο πλακίδιο του σχήματος πέφτει ακτίνα λευκού φωτός. Σχεδιάστε προσεγγιστικά τις ακτίνες που θα προκύψουν από την άλλη πλευρά του



πλακιδίου.

31

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Καθώς προσπαθούμε να δημιουργήσουμε λεπτή δέσημη φως παρεμβάλλοντας διαφράγματα με πολύ μικρές οπές, παρατηρούμε ότι το φως (α) αλλά απλώνεται στο χώρο που αναμένεται στη σκιά. Το φαινόμενο ονομάζεται (β) και με βάση αυτό το φαινόμενο ακούμε κάποιον όταν δεν έχουμε με αυτόν (γ)”

32

Σε μια ευθεία διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας. Χαρακτηρίστε ως σωστή ή λάθος την κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- (α) Το αποτέλεσμα της επαλληλίας των δύο κυμάτων είναι πάντα στάσιμο κύμα.
- (β) Το αποτέλεσμα της επαλληλίας είναι κύμα όταν τα κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση.
- (γ) Το αποτέλεσμα της επαλληλίας των δύο κυμάτων είναι στάσιμο κύμα όταν αυτά διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.
- (δ) Το αποτέλεσμα της επαλληλίας θα είναι ή κύμα ή στάσιμο κύμα ανάλογα με τη διαφορά φάσης των δύο κυμάτων.

33

Δύο τετραγωνικοί παλμοί οδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις και είναι όμοιοι με αντίθετη φορά απομακρύνσεων. Η ταχύτητα με την οποία κινούνται είναι 1 cm/s. Να σχεδιάσετε κατά προσέγγιση την εικόνα που θα βλέπουμε μετά από χρόνο

- (α) 2 s (β) 2,5 s (γ) 3 s (δ) 3,5 s (ε) 4,5 s
Το εύρος τους είναι 2 cm και αρχικά τα κέντρα τους απείχαν 4 cm.

34

Μια χορδή, μήκους L , γραμμικής πυκνότητας μ είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της και τείνεται με δύναμη F . Η χορδή διεγείρεται οπότε παράγονται σ' αυτή στάσιμα κύματα. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές λάθος.

- (α) Η χορδή εκτελεί συνήθως μια σύνθετη κίνηση από πολλές αρμονικές με συχνότητες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους

$$\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

- (β) Η χορδή πάλλεται πάντα με μια συχνότητα πολλαπλάσια της αρμονικής.
- (γ) Κατά την κίνηση της χορδής, δεν συμβαίνει ροή ενέργειας από ένα τμήμα της στο γειτονικό του.

(δ) Έχουμε ροή ενέργειας από ένα τμήμα της χορδής στο γειτονικό της αλλά συμβαίνει και το αντίθετο οπότε το ενεργειακό ισοζύγιο είναι μηδέν.

35

Όταν τεντώνουμε περισσότερο, κουρδίζοντας, τη χορδή μιας κιθάρας η συχνότητά της αυξάνει, εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

36

Από την οροφή ενός κτιρίου είναι κρεμασμένο ένα σχοινί. Δημιουργούμε ένα παλμό στο κάτω άκρο και καθώς διαδίδεται προς τα επάνω η ταχύτητά του αυξάνεται. Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό;

37

Ποιά χορδή της κιθάρας πάλλεται με μεγαλύτερη συχνότητα η πρώτη από επάνω ή η τελευταία και γιατί; (Υποθέστε ότι αποτελούνται από το ίδιο υλικό, έχουν την ίδια μηχανική τάση και η κάτω είναι μικρότερης διατομής).

38

Ποιές συχνότητες παράγουν, ο ανοικτός και στα δύο άκρα και ο κλειστός στο ένα άκρο σωλήνας ίδιου μήκους;

39

Θέλουμε να συντονίσουμε τη θεμελιώδη συχνότητα ενός μπουκαλιού με ένα διαπασών, πως μπορούμε να μεταβάλλουμε τη θεμελιώδη συχνότητα του μπουκαλιού ώστε να τα καταφέρουμε;

40

Αν μια χορδή τεντωθεί και αυξηθεί το μήκος της σε σχέση με το φυσικό της μήκος κατά α % την μια φορά και κατά β % την άλλη, δείξτε ότι οι θεμελιώδεις συχνότητες των στασίμων κυμάτων που παράγονται σε κάθε περίπτωση ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{(100 + \beta)\alpha}{(100 + \alpha)\beta}}$$

Υποθέστε ότι τα α και β είναι σχετικά μικρά ώστε για τον εφελκισμό να ισχύει ο νόμος του Hooke.

41

Να αντιστοιχίσετε τις θεμελιώδεις συχνότητες που παράγονται με τα αντίστοιχα αντικείμενα που τις παράγουν:

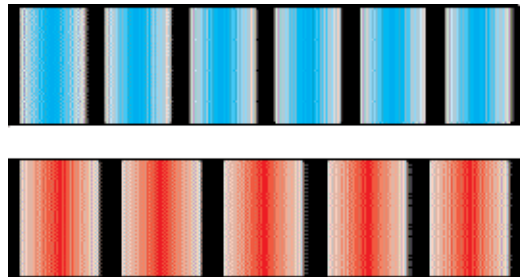
- 1) $\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ (α) Σωλήνας με ένα ανοιχτό άκρο
- 2) $\frac{v}{2L}$ (β) Χορδή
- 3) $\frac{v}{4L}$ (γ) Σωλήνας με δύο ανοιχτά άκρα

42

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: “Για να είναι στατική η συμβολή δύο πηγών, πρέπει οι πηγές να είναι (α) δηλ. να έχουν οι διαταραχές τους (β) σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου”.

43

Τα αποτελέσματα συμβολής του πειράματος του Young για την κυανή και ερυθρή ακτινοβολία είναι



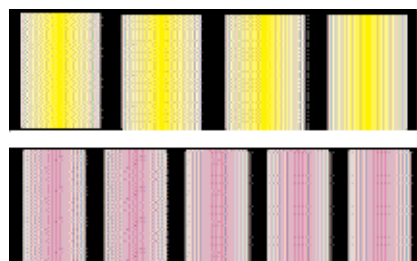
αυτή του σχήματος. Μπορείτε να εξηγήσετε τη διαφορά τους;

44

Μπορεί το πείραμα του Young να παρουσιάσει τα φαινόμενα συμβολής όταν προσπέσει στις δύο οπές ηλιακή ακτινοβολία και όχι μονοχρωματική; Τι αποτέλεσμα αναμένεται;

45

Κατά την επανάληψη του πειράματος του Young για δύο μονοχρωματικές ακτινοβολίες (α) και (β) τα



αποτελέσματα ήταν αυτά του σχήματος. Αν η συχνότητα της (α) ακτινοβολίας είναι 6×10^{14} Hz η συχνότητα της (β) είναι:

- i) $7,5 \times 10^{14}$ Hz
 ii) $5,5 \times 10^{14}$ Hz
 iii) 5×10^{14} Hz

46

Αντιστοιχίστε τα φαινόμενα με τις εφαρμογές τους:

- (α) Ολική ανάκλαση 1) Μέτρηση μήκους κύματος
 (β) Περίθλαση 2) Μη ευθύγραμμη διάδοση του φωτός
 (γ) Συμβολή 3) Οπτικές ίνες

47

Τί είναι το παλλόμενο δίπολο;

48

Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:

“Τα κύματα που εκπέμπονται από ένα πολύ μικρό δίπολο, είναι σφαιρικά και σε μεγάλες αποστάσεις είναι σχεδόν (α) Το ηλεκτρικό και (β) πεδίο είναι μεταξύ τους κάθετα και (γ) στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Διαδίδονται και αυτοσυντηρούνται (δ) του διπόλου”.

49

Τί ονομάζεται ακτινοβολία.

50

Γιατί το φάσμα των ακτίνων Χ έχει και συνεχή συνιστώσα;

51

Αν το παλλόμενο δίπολο σταματήσει να τροφοδοτείται από την πηγή υψίσυχνου ρεύματος, ποιά από τα παρακάτω θα συμβούν;

- (α) Θα πάψουν να υπάρχουν κύματα σε όλο το χώρο επειδή δεν έχουμε ούτε φορτία ούτε ρεύματα, άρα δεν υπάρχει ούτε ηλεκτρικό ούτε μαγνητικό πεδίο.
 (β) Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που παρήχθησαν μέχρι την στιγμή που λειτουργούσε το δίπολο θα απομακρύνονται από αυτό με την ταχύτητα του φωτός και θα αυτοσυντηρούνται.
 (γ) Τα κύματα που παρήχθησαν θα υπάρχουν σε όλο το χώρο διότι με βάση την αρχή του Huygens τα σημεία που ήδη βρίσκεται το κύμα θα γίνουν νέες πηγές ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (προς όλες τις κατευθύνσεις).

52

Το ποσοστό της ισχύος που λαμβάνει μια κεραία λήψης ραδιοφώνου (μακριά από την κεραία εκπομπής) από το συνολικό ποσό που παράγει η κεραία του ραδιοφωνικού πομπού είναι:

- (α) το 10 %, (β) το 50 %, (γ) σχεδόν 0 %;

53

Χρησιμοποιείται υπέρυθρη ακτινοβολία στις τηλεπικοινωνίες;

54

Ένας πομπός εκπέμπει:

- (α) Επιλεκτικά κύματα εδάφους ή ατμοσφαιρικά ή χώρου, ανάλογα με την συχνότητά του.
 (β) Και τα τρία είδη των κυμάτων αλλά μεταδιδόμενα έχουν διαφορετική απορρόφηση.
 (γ) Απλώς ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Χαρακτηρίστε τις πιο πάνω προτάσεις σωστές ή λάθος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

Η “διαταραχή” κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 10 \sin \pi (3t - 0,1x) \quad (x, y \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

Να βρείτε:

- (α) Την ταχύτητα του κύματος
 (β) την μέγιστη ταχύτητα μεταβολής του y
 (γ) την κατεύθυνση προς την οποία διαδίδεται το κύμα
 (Αποτελέσματα με δύο σημαντικά ψηφία).

2

Τα όρια των ακουστικών συχνοτήτων είναι 16 Hz ως 20 000 Hz, να βρείτε τα αντίστοιχα μήκη κύματος,

για τον αέρα και το νερό. Η ταχύτητα του ήχου στο νερό και τον αέρα είναι αντίστοιχα 1450 m/s και 340 m/s περίπου.

3

Η εξίσωση ενός κύματος είναι

$$y = 10 \sin \pi (x - 100t) \quad (x, y \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

Να βρείτε:

- (α) το πλάτος
 (β) το μήκος κύματος
 (γ) τη συχνότητα
 (δ) την ταχύτητα και την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
 (Με δύο σημαντικά ψηφία).

4

Καθώς ένας βαρκάρης κάνει μια βάρκα να λικνίζεται, ενώ βρίσκεται σε μια ήρεμη λίμνη, παράγονται λοφίσκοι νερού που διαδίδονται σε ακτίνα 10 m σε 4,0 s. Αν ο βαρκάρης εκτελεί 10 ταλαντώσεις σε 20 s να υπολογισθεί το μήκος κύματος των επιφανειακών κυμάτων που παράγονται.

5

Το διαδιδόμενο κύμα κατά μήκος μιας χορδής περιγράφεται με τη σχέση

$$y = 10 \sin \pi \left(\frac{\pi}{4} (x - 2t) \right) \quad (x, y \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

- (α) Υπολογίστε την μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα ενός σημείου της χορδής
 (β) Υπολογίστε την ταχύτητα στο σημείο $x = 5,0 \text{ cm}$, όταν $t = 1,0 \text{ s}$.

6

Το αριστερό άκρο ενός οριζοντίου, μεγάλου μήκους σχοινού, μετακινείται πάνω κάτω με εύρος κίνησης 16,0 cm ακριβώς τρεις φορές το δευτερόλεπτο.

Αν η γραμμική πυκνότητα του σχοινού είναι $0,210 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ και η τείνουσα δύναμη έχει τιμή $F = 30,0 \text{ N}$ να βρείτε:

- (α) Την ταχύτητα διάδοσης των παραγόμενων κυμάτων
 (β) Την εξίσωση του κύματος $y(x, t)$ αν θεωρήσουμε ως αρχή των θέσεων το σημείο που προκαλείται η διαταραχή και ως αρχή των χρόνων την στιγμή που άρχισε η διαταραχή.

7

Ένα χαλύβδινο σύρμα έχει διάμετρο διατομής 0,15 mm και τείνεται με δύναμη $F = 200 \text{ N}$. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων κατά μήκος του σύρματος. Η πυκνότητα του χάλυβα είναι $7,8 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$.

8

Ένα σχοινί κρέμεται από την οροφή. Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης μιας εγκάρσιας διαταραχής στο σχοινί στη θέση που απέχει απόσταση 1,44 m από το ελεύθερο κάτω άκρο του. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 9,80 \text{ m/s}^2$

9

Ένα χάλκινο σύρμα μήκους 30 m ενώνεται με ένα χαλύβδινο μήκους 15 m. Η διάμετρος κάθε σύρματος είναι 1,0 mm. Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται ένας παλμός να διατρέξει το συνολικό

μήκος των δύο συρμάτων. Η πυκνότητα του χαλκού και του χάλυβα είναι αντίστοιχα $8,9 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $7,8 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ και η τείνουσα δύναμη 600 N.

10

Το μήκος κύματος του κίτρινου φωτός νατρίου στον αέρα είναι 589nm. α) Ποιό είναι το μήκος κύματος στο γυαλί (απολύτου) δείκτη διάθλασης 1,50; β) Αν ακτίνα κίτρινου φωτός νατρίου προσπέσει με γωνία 60° ως προς την κάθετο, από τον αέρα στο γυαλί, ποιά είναι η γωνία διάθλασης. Ο απόλυτος δείκτης διάθλασης του αέρα είναι περίπου 1,00.

11

Ένα γυάλινο πρίσμα περιβάλλεται από αέρα. Στην μια πλευρά της διαθλαστικής γωνίας του η οποία είναι 60° , προσπίπτει ακτίνα που υφίσταται οριακά ολική ανάκλαση στην άλλη πλευρά. Αν ο δείκτης διαθλάσεως του γυαλιού για τη συγκεκριμένη ακτινοβολία είναι 1,52 και του αέρα 1,00, να υπολογισθεί η γωνία πρόσπτωσης.

12

Η διαθλαστική γωνία ενός γυάλινου πρίσματος είναι 40° και ο δείκτης διαθλάσεως του 1,58. Να υπολογίσετε τη γωνία με την οποία πρέπει να προσπέσει η ακτίνα φωτός στην μια πλευρά του για να φύγει συμμετρικά από την άλλη. Για τον αέρα είναι $n = 1,00$

13

Μια ακτίνα φωτός μήκους κύματος 560 nm προσπίπτει από τον αέρα σε ένα διαφανές μέσο. Η γωνία προσπτώσεως είναι $50,0^\circ$ και η γωνία διαθλάσεως μετρήθηκε $30,0^\circ$. Να υπολογισθεί το μήκος κύματος της ακτίνας στο διαφανές μέσο ($n_{\text{αέρα}} = 1,00$)

14

Στον πυριτύλο ο δείκτης διαθλάσεως για το ιώδες είναι 1,660 και για το ερυθρό φως είναι 1,620. Αν λευκό φως διέρχεται από πρίσμα γωνίας 50° (λέγεται διαθλαστική γωνία) και η γωνία πρόσπτωσης είναι 60° , να υπολογισθεί η γωνία διασποράς δηλαδή, η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα του ιώδους με αυτή του ερυθρού που εξέρχονται από το πρίσμα.

15

Ένας κολυμβητής βρίσκεται μέσα στο νερό και βλέπει τον ήλιο υπό γωνία 30° ως προς την κατακόρυφο. Δεδομένου ότι ο δείκτης διάθλασης

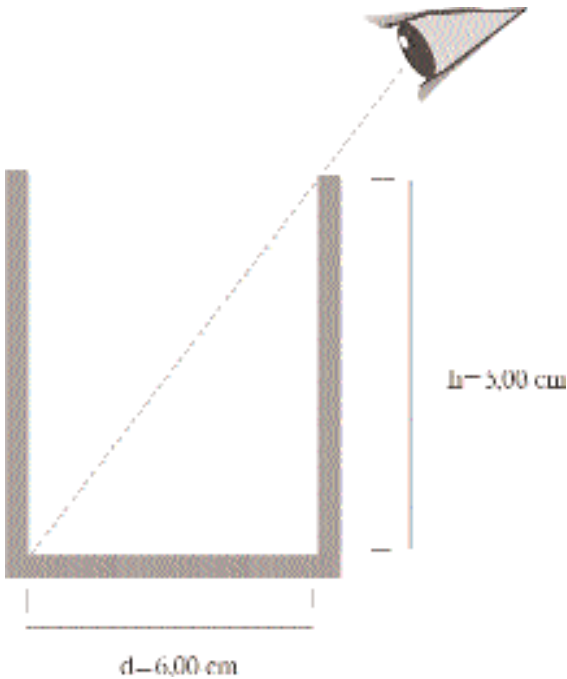
του νερού είναι $\frac{4}{3}$ (ακριβώς) να υπολογισθεί η πραγματική γωνία στην οποία βρίσκεται ο ήλιος ως προς την κατακόρυφο (με τρία σημαντικά ψηφία)

16

Μονοχρωματική δέση έχει μήκος κύματος στο νερό 450 nm και στο βενζόλιο 400 nm. Να βρεθεί η οριακή γωνία ολικής ανακλάσεως στην επιφάνεια βενζολίου-αέρα για την μονοχρωματική δέση. Δίνονται ο δείκτης διαθλάσεως του νερού $\frac{4}{3}$ (ακριβώς) και του αέρα 1 (ακριβώς).

17

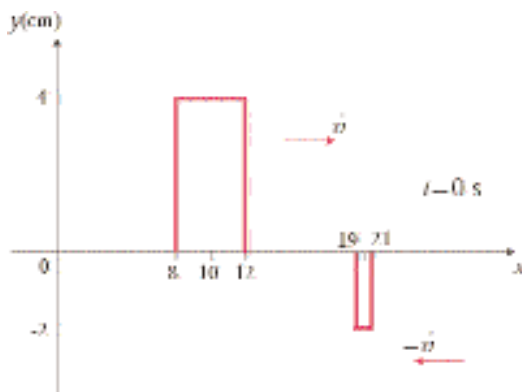
Όταν το δοχείο του σχήματος είναι άδειο βλέπουμε την



άκρη του πυθμένα. Γεμίζουμε το δοχείο με υγρό και τότε βλέπουμε το μέσο του πυθμένα. Να υπολογισθεί ο δείκτης διάθλασης του υγρού με το οποίο γεμίσαμε το δοχείο. Ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι 1,00.

18

Οι δύο παλμοί του σχήματος κινούνται αντίθετα στο



ίδιο μονοδιάστατο μέσο. Η ταχύτητα είναι $v = 10 \text{ m/s}$. Να σχεδιαστεί η συνολική διαταραχή τις χρονικές στιγμές.

- (α) $t = 4,5 \text{ s}$
- (β) $t = 5,0 \text{ s}$
- (γ) $t = 5,5 \text{ s}$
- (δ) $t = 7,0 \text{ s}$

19

Δύο κύματα οδεύουν σε μια χορδή και οι αντίστοιχες διαταραχές είναι

$$y_1 = 3 \sin \pi(3x - 2t) \quad \left(\begin{matrix} y, x \text{ σε cm} \\ t \text{ σε s} \end{matrix} \right)$$

$$y_2 = 4 \cos \pi(x + t)$$

Να βρεθεί η συνισταμένη διαταραχή στα σημεία

- (α) $x = 1,75 \text{ cm}, t = 1,50 \text{ s}$
- (β) $x = 8,75 \text{ cm}, t = 2,25 \text{ s}$.

20

Σε μια χορδή οδεύουν δύο εγκάρσια κύματα y_1 και y_2 με

$$y_1 = 2,5 \sin \left(\frac{\pi}{10} x - \frac{\pi}{0,001} t - \frac{\pi}{3} \right) \quad \left(\begin{matrix} y, x \text{ σε cm} \\ t \text{ σε s} \end{matrix} \right)$$

$$y_2 = 2,5 \sin \left(\frac{\pi}{10} x - \frac{\pi}{0,001} t \right)$$

Να βρεθεί η συνολική διαταραχή $y_1 + y_2$. Επίσης να υπολογισθεί η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα ενός σωματιδίου της χορδής.

21

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα περιγράφονται από τις συναρτήσεις

$$y_1 = 1,5 \sin (5\pi x - 2\pi t) \quad \left(\begin{matrix} y, x \text{ σε cm} \\ t \text{ σε s} \end{matrix} \right)$$

$$y_2 = 1,5 \sin (2\pi t - 5\pi x)$$

Να βρεθεί η συνολική διαταραχή $y_1 + y_2$ καθώς και η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα του σωματίου στη θέση $x = 1,65 \text{ cm}$.

(Με τρία σημαντικά ψηφία)

22

Υπολογίστε τη συνολική διαταραχή $y_1 + y_2$ από την επαλληλία των κυμάτων

$$y_1 = 3 \sin (2\pi t - 3\pi x)$$

$$y_2 = 3 \sin \left(2\pi t + 3\pi x + \frac{\pi}{3} \right) \quad \left(\begin{matrix} x, y \text{ σε cm, } t \text{ σε s} \end{matrix} \right)$$

Είναι η διαταραχή στάσιμο κύμα; Υπολογίστε επίσης τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σωματίο στη θέση $x = 2,5 \text{ cm}$ καθώς ταλαντώνεται.

23

Δύο αρμονικά κύματα διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις και δίνουν συνολική διαταραχή.

$$y = 12 \sin(0,6x) \cos(150t) \quad (x, y \text{ σε } \text{cm}, t \text{ σε } \text{s})$$

Προσδιορίστε τα δύο αρμονικά κύματα καθώς επίσης την ταχύτητα διάδοσης και το μήκος κύματος. (Με δύο σημαντικά ψηφία).

24

Χορδή μήκους 0,5 m όταν τείνεται με δύναμη 8100 N δίνει θεμελιώδη συχνότητα f_1 . Άλλη χορδή από το ίδιο υλικό διπλάσιος διαμέτρου και διπλάσιου μήκους, όταν τείνεται με δύναμη 10000 N η δεύτερη αρμονική της έχει συχνότητα $f_2' = 100 \text{ Hz}$. Να βρεθεί η f_1 .

25

Χορδή μήκους 40,0 cm και διαμέτρου 1,00 mm η θεμελιώδη συχνότητα είναι $f \approx 360 \text{ Hz}$ που αντιστοιχεί στη νότα ΛΑ της διατονικής κλίμακας, κλειδί του ΣΟΛ. Να υπολογιστεί η τείνουσα δύναμη αν η χορδή είναι χαλύβδινη, πυκνότητας $\rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

26

Χορδή τείνεται από δύναμη F και η θεμελιώδης συχνότητά της είναι f . Να βρεθεί η θεμελιώδης συχνότητα χορδής ίδιου μήκους από το ίδιο υλικό η οποία έχει διπλάσια διάμετρο διατομής και τείνεται από μισή δύναμη απ' ότι η προηγούμενη.

27

Η χορδή μιας κιθάρας έχει μήκος 0,600 m και τείνεται από δύναμη 60,0 N. Αν η γραμμική πυκνότητα της χορδής είναι $0,0100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ να βρείτε τις αρμονικές της που μπορεί να ακούσει ο άνθρωπος. Δίνεται ότι ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται συχνότητες από 16 Hz έως 20000 Hz.

28

Χάλκινο σύρμα έχει μήκος 1,00 m και κυκλική διατομή ακτίνας 0,800 mm. Αν το σύρμα τείνεται από δύναμη $F = 800 \text{ N}$, να βρεθούν:

- Οι δύο πρώτες αρμονικές
- Τα αντίστοιχα μήκη κύματος
- Να γραφούν οι σχέσεις για τα στάσιμα κύματα των δύο πρώτων αρμονικών, αν τα πλάτη είναι $A_1 = 4,00 \text{ cm}$ και $A_2 = 3,00 \text{ cm}$ αντίστοιχα. Η πυκνότητα του χαλκού είναι $8,89 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

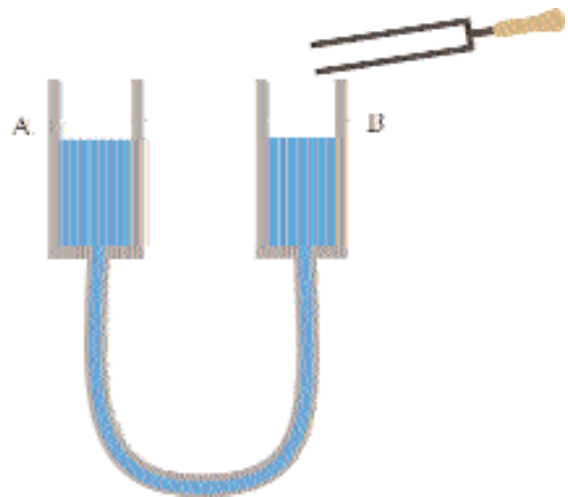
29

Μία χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα 100 Hz και βρίσκεται σε συντονισμό με ένα διαπασών. Να

βρείτε την συχνότητα των διακροτημάτων που θα προκύψουν αν η δύναμη που τείνει την χορδή μειωθεί κατά 4,00 %. Υποθέστε ότι η χορδή και στις δύο περιπτώσεις πάλλεται με τη συχνότητα της πρώτης αρμονικής.

30

Διαπασών συχνότητας 444 Hz βρίσκεται μπροστά από το στόμιο του σωλήνα του σχήματος. Η στάθμη



του νερού μεταβάλλεται με την μετακίνηση του δοχείου Α. Να υπολογισθούν τα μήκη των δύο πρώτων στηλών αέρα στο Β για τα οποία έχουμε συντονισμό. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα να λειφθεί $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

31

Η θεμελιώδης συχνότητα ηχητικού σωλήνα ανοικτού και στα δύο άκρα είναι 350 Hz. Να υπολογισθεί το μήκος του σωλήνα αν η ταχύτητα του ήχου είναι $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Επίσης να υπολογισθεί η συχνότητα των 3 πρώτων αρμονικών αν κόψουμε το σωλήνα στη μέση.

32

Ένας ηχητικός σωλήνας μήκους 0,600 m κλειστός στο ένα άκρο που παράγει αρμονική συχνότητα 698 Hz. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του ήχου στην αέρια στήλη του ηχητικού σωλήνα και να βρεθεί η τάξη της αρμονικής.

33

Ενός ηχητικού σωλήνα μήκους $L = 0,50 \text{ m}$ ανοικτού και στα δύο άκρα, δύο διαδοχικές συχνότητες είναι 675 Hz και 1010 Hz αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του ήχου στην αέρια στήλη του ηχητικού σωλήνα.

34

Ένας άνθρωπος τραγουδάει ενώ κάνει ντουζ. Η ντουζιέρα περικλείεται με πλαστική κουρτίνα και ισοδυναμεί με ηχητικό σωλήνα κλειστό και στα δύο άκρα. Αν οι διαστάσεις της ντουζιέρας είναι $80\text{ cm} \times 80\text{ cm}$ και το ύψος της κουρτίνας $2,10\text{ m}$, να βρείτε ποιες συχνότητες θα ακούγονται πιο δυνατά, αν ο άνθρωπος τραγουδώντας παράγει συχνότητες από 100 Hz έως 2000 Hz . Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 m/s .

35

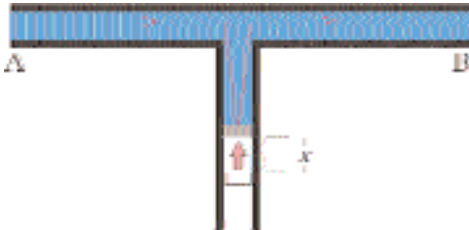
Μια οδική σήραγγα έχει μήκος 500 m . Με ποιές ηχητικές συχνότητες συντονίζεται; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα να λειφθεί 340 m/s .

36

Δύο μεγάφωνα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $3,00\text{ m}$. Ακροατής βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δύο μεγάφωνα και σε απόσταση $10,0\text{ m}$ από το μέσο. Μετακινείται παράλληλα προς το ευθύγραμμο τμήμα των μεγαφώνων και αντιλαμβάνεται το πρώτο ελάχιστο διανύοντας απόσταση $0,100\text{ m}$. Να βρεθεί η συχνότητα που εκπέμπουν τα μεγάφωνα, αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 342 m/s^{-1} .

37

Διαπασών έχει συχνότητα 256 Hz . Να βρεθεί η απόσταση που πρέπει να μετακινηθεί το έμβολο



ώστε να “συλλάβουμε” στο B δύο διαδοχικά μέγιστα. Η ταχύτητα του ήχου είναι $v = 340\text{ m/s}^{-1}$.

38

Σε πείραμα του Young χρησιμοποιείται μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος 590 nm . Οι δύο οπές απέχουν απόσταση $0,30\text{ mm}$ και η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ελαχίστων βρέθηκε $\Delta x = 0,30\text{ cm}$. Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των δύο πετασμάτων.

39

Δύο οπές (ή σχισμές) που βρίσκονται σε απόσταση $0,50\text{ mm}$, φωτίζονται με κόκκινο φως, μήκους κύματος 650 nm . Το πέτασμα για την παρατήρηση των κροσσών συμβολής τοποθετείται σε απόσταση $D = 1,5\text{ m}$. Για να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών κάνουμε το εξής: Για δύο συμμετρικά μέγιστα από το κεντρικό μετράμε την απόστασή τους και κατόπιν μετράμε το πλήθος των μεγίστων που μεσολαβούν. Αν στο πείραμά μας οι δύο συμμετρικοί κροσσοί απέχουν περίπου 2 cm πόσους ενδιάμεσους φωτεινούς κροσσούς θα μετρήσουμε;

40

Σε πείραμα του Young χρησιμοποιείται ως μονοχρωματική δέσμη κυανο-πράσινο λέιζερ αργού. Η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι $0,3000\text{ mm}$ και η οθόνη συμβολής βρίσκεται σε απόσταση $3,000\text{ m}$. Αν σε απόσταση $3,584\text{ cm}$ μεταξύ δύο μεγίστων μετρηθηκαν 6 άλλα μέγιστα, να υπολογιστεί το μήκος κύματος του φωτός του λέιζερ αργού