

1.2 ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως τα μέσα του 19ου αιώνα, οι φυσικοί πίστευαν ότι η θερμότητα είναι ένα αόρατο ρευστό που το ονόμαζαν “caloric”. Η ανάγκη βελτίωσης των ατμομηχανών ώθησε τους επιστήμονες να εξετάσουν προσεκτικά τις αρχές πάνω στις οποίες στηρίζονταν η λειτουργία αυτών των μηχανών. Οδηγήθηκαν έτσι στην ανάπτυξη της Θερμοδυναμικής, η οποία εξετάζει τις ενεργειακές μεταβολές μεταξύ θερμότητας, η οποία δίνεται ή λαμβάνεται από ένα σώμα, του έργου υπό διάφορες μορφές, που παράγει ή καταναλώνει αυτό και της εσωτερικής (ή αλλιώς θερμοδυναμικής) του ενέργειας. Έτσι βρέθηκαν οι διάφοροι νόμοι της θερμοδυναμικής. Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα (ή πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής) ουσιαστικά αναφέρεται στη διατήρηση της ενέργειας.

Η διαπίστωση ότι η θερμότητα δεν μπορεί να μεταφερθεί από ψυχρό σε θερμό σώμα χωρίς εξωτερική παρέμβαση, οδήγησαν στην διατύπωση του δεύτερου θερμοδυναμικού αξιώματος ή δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου και στην εισαγωγή της έννοιας της εντροπίας.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα και οι εφαρμογές του για τις μεταβολές ιδανικού αερίου καθώς και το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα και οι εφαρμογές του στη λειτουργία των θερμικών μηχανών.

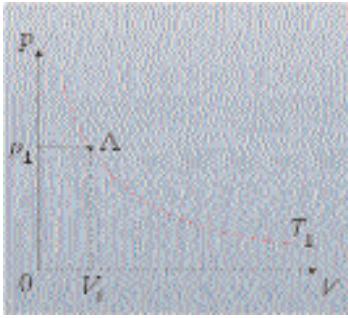
Η Θερμοδυναμική αναπτύχθηκε αρχικά αγνοώντας την ατομική δομή της ύλης. Χρησιμοποιήθηκαν έννοιες που είχαν ήδη οριστεί στην Μηχανική, όπως ενέργεια, όγκος, πίεση, αλλά και άλλες που δεν έχουν μηχανικό ανάλογο, όπως η θερμοκρασία και η εντροπία.

Αυτή η μερική διαφοροποίηση της Θερμοδυναμικής από την υπόλοιπη Φυσική έγινε πρόκληση για αρκετούς ερευνητές (όπως ο Boltzmann) του περασμένου κυρίως αιώνα. Αυτοί προσπάθησαν να δείξουν ότι οι νόμοι της Θερμοδυναμικής είναι συνέπεια των βασικών νόμων της Μηχανικής και της ατομικής δομής της ύλης. Αυτή η προσπάθεια είχε σαν αποτέλεσμα να αναπτυχθεί ο κλάδος της Στατιστικής Μηχανικής. Στα περίπου εκατό χρόνια εφαρμογής της, έχει δώσει σημαντικά αποτελέσματα στην κατανόηση της Φύσης.

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Κατά τη μελέτη φυσικών φαινομένων συγκεντρώνουμε την προσοχή μας, συνήθως σε ένα κομμάτι της ύλης, το οποίο το διαχωρίζουμε νοητά από το περιβάλλον του. Αυτό το κομμάτι της ύλης το ονομάζουμε σύστημα και το σύνολο των σωμάτων, που μπορεί να αλληλεπιδράσουν, με οποιονδήποτε τρόπο, με αυτό σύστημα το ονομάζουμε περιβάλλον του συστήματος. Ένα σύστημα στο οποίο έχουμε εφαρμογή των νόμων της θερμοδυναμικής το ονομάζουμε θερμοδυναμικό σύστημα. Τα φυσικά μεγέθη των οποίων οι τιμές περιγράφουν την κατάσταση ενός θερμοδυναμικού συστήματος, ονομάζονται θερμοδυναμικές μεταβλητές.

Τα θερμοδυναμικά συστήματα, με τα οποία κυρίως θα ασχοληθούμε, θα είναι συστήματα ιδανικών αερίων. Όπως έχουμε αναφέρει, η κατάσταση



ΣΧΗΜΑ 1.12

Η κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας παριστάνεται με ένα σημείο Α σε διάγραμμα $p-V$.

μιας ποσότητας ιδανικού αερίου περιγράφεται μακροσκοπικά από την καταστατική εξίσωση $pV = nRT$, συνεπώς τα μεγέθη p , V , T και η ποσότητα ύλης n είναι οι θερμοδυναμικές μεταβλητές που περιγράφουν το ιδανικό αέριο.

Αν οι τιμές της πίεσης, θερμοκρασίας και πυκνότητας παραμένουν οι ίδιες, σε όλη την έκταση του όγκου του αερίου, τότε λέμε ότι το αέριο βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Έστω ότι ποσότητα αερίου βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας με τιμές πίεσης, όγκου και θερμοκρασίας αντίστοιχα p_1 , V_1 , T_1 . Η κατάσταση του αερίου μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο $A(p_1, V_1, T_1)$ σε διάγραμμα $p-V$.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ας θεωρήσουμε ποσότητα αερίου κλεισμένη σε κυλινδρικό δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα και έμβολο. Αν το έμβολο μετακινηθεί, έτσι ώστε να αυξηθεί όγκος του αερίου, το αέριο θα παραγάγει κάποιο μηχανικό έργο και θα ψυχθεί. Δηλαδή το αέριο διαθέτει κάποιο ενεργειακό απόθεμα, σε βάρος του οποίου θα παραχθεί το έργο. Αυτή την ενέργεια που υπάρχει στο αέριο, την ονομάζουμε εσωτερική ενέργεια (ή καλύτερα θερμοδυναμική ενέργεια).

Τα μόρια του αερίου κινούνται μεταφορικά, άρα έχουν κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης. Έχουν επίσης δυναμική ενέργεια ένεκα αλληλεπίδρασης μεταξύ τους. Τα πολυατομικά μόρια έχουν και πρόσθετη ενέργεια. Συγκεκριμένα, εκτός από τη μεταφορική εκτελούν και περιστροφική κίνηση και γι' αυτό έχουν πρόσθετη κινητική ενέργεια. Επίσης τα άτομα στα πολυατομικά μόρια ταλαντώνονται, με αποτέλεσμα να αυξομοιώνονται οι μεταξύ τους αποστάσεις. Λόγω των ταλαντώσεων, τα μόρια έχουν κινητική και δυναμική ενέργεια. Το άθροισμα όλων των ενεργειών των μορίων αποτελούν την εσωτερική ενέργεια του αερίου.

Ορίζουμε ως εσωτερική (ή θερμοδυναμική) ενέργεια U ενός συστήματος το άθροισμα όλων των κινητικών και δυναμικών ενεργειών των σωματιδίων που το αποτελούν.

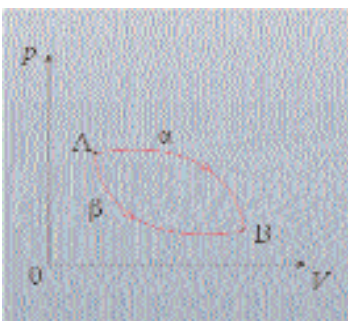
Στην εσωτερική ενέργεια δεν υπεισέρχεται η ενέργεια μεταφορικής κίνησης ή περιστροφής του δοχείου, δηλαδή η ενέργεια ένεκα μακροσκοπικής κίνησης του συστήματος.

Στο ιδανικό αέριο οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων είναι αμελητέες, συνεπώς η εσωτερική (θερμοδυναμική) ενέργεια είναι το άθροισμα των υπόλοιπων ενεργειών των μορίων.

Η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης είναι ανάλογη με την απόλυτη (ή θερμοδυναμική) θερμοκρασία. Γενικά μπορούμε να πούμε, όπως θα δείξουμε παρακάτω, ότι η εσωτερική ενέργεια μιας ποσότητας ιδανικού αερίου αυξάνεται με τη θερμοκρασία και μάλιστα είναι ανάλογη με την απόλυτη (ή θερμοδυναμική) θερμοκρασία, T , του αερίου.

Αυτό που μας ενδιαφέρει στη Θερμοδυναμική δεν είναι η τιμή της εσωτερικής ενέργειας αλλά η αύξηση ή η μείωσή της σε μια διαδικασία.

Η μεταβολή $\Delta U = U_B - U_A$ της εσωτερικής ενέργειας ενός συστήματος, όταν αυτό μεταβεί από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β, εξαρτάται



ΣΧΗΜΑ 1.13

Η μεταβολή ΔU της εσωτερικής ενέργειας ενός αερίου μεταξύ των καταστάσεων Α, Β είναι ίδια, ανεξάρτητα από τον τρόπο μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη.

μόνο από τις καταστάσεις A και B και όχι από τον τρόπο μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη. Πράγματι, αν μια ποσότητα ιδανικού αερίου μεταβεί από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην B (p_2, V_2, T_2) εκτελώντας τη μεταβολή α ή τη β (σχ. 1.13), η μεταβολή $\Delta U = U_B - U_A$ της εσωτερικής του ενέργειας θα είναι και τις δύο φορές ίδια. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι η εσωτερική ενέργεια στην A ή στην B κατάσταση είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας του αερίου.

ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΚΤΟΝΩΣΗ ΑΕΡΙΟΥ

Έστω αέριο το οποίο βρίσκεται σε κύλινδρο που κλείνει με έμβολο εμβαδού A . Αν μετακινηθεί το έμβολο ελάχιστα κατά Δx , έτσι ώστε να αυξηθεί ο όγκος του αερίου θα παραχθεί από αυτό έργο

$$\Delta W = F \Delta x$$

\vec{F} είναι η δύναμη που ασκεί στο έμβολο το αέριο, το οποίο έχει πρακτικά σταθερή πίεση p , αφού η μετατόπιση Δx είναι πάρα πολύ μικρή, άρα

$$F = pA$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta W &= pA \Delta x \quad \text{ή} \\ \Delta W &= p \Delta V \end{aligned} \tag{1.10}$$

Η διαδικασία υπολογισμού του έργου για μεταβολή ($V_2 - V_1$) του όγκου, που παριστάνεται στο διάγραμμα $p - V$ του σχήματος 1.15 είναι η εξής:

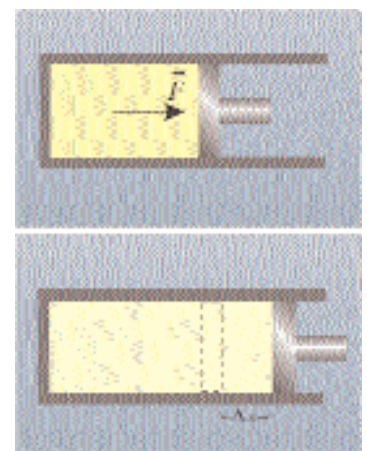
Διαιρούμε την συνολική μεταβολή του όγκου σε πολλές και πολύ μικρές μεταβολές όγκου $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots$ και σε κάθε μία από αυτές θεωρούμε την πίεση περίπου σταθερή. Έτσι κατά τη μεταβολή του όγκου κατά ΔV_i , η πίεση είναι p_i και το εμβαδό του ορθογωνίου βάσης ΔV_i και ύψους p_i (δηλ. $\Delta W_i = p_i \Delta V_i$) είναι το στοιχειώδες έργο, που αντιστοιχεί στην έντονα σκιασμένη λωρίδα, του σχήματος 1.15.

Το συνολικό έργο είναι το άθροισμα όλων των στοιχειωδών έργων και δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots \quad \text{ή} \\ W &= p_1 \Delta V_1 + p_2 \Delta V_2 + \dots \quad \text{ή} \\ W &= \sum p \Delta V \end{aligned} \tag{1.11}$$

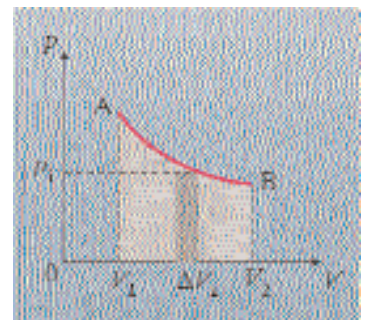
Επειδή το κάθε στοιχειώδες έργο παριστάνεται από το εμβαδό μιας λωρίδας, συμπεραίνουμε ότι το έργο W θα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας (A, B, $V_2 V_1$) στο διάγραμμα $p - V$ του σχήματος 1.15. Το έργο κατά την εκτόνωση του αερίου είναι θετικό και κατά την συμπίεση αρνητικό. Δηλαδή το έργο είναι θετικό, όταν το αέριο, παράγει έργο (επί εξωτερικού συστήματος) και αρνητικό, όταν το αέριο απορροφά έργο (παράγεται έργο επί του αερίου από εξωτερικό σύστημα).

Το έργο, που παράγεται ή καταναλώνεται, σε μεταβολές όγκου αερίων δεν καθορίζεται μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση του αερίου αλλά και από την συγκεκριμένη διαδικασία, μέσω της οποίας το αέριο



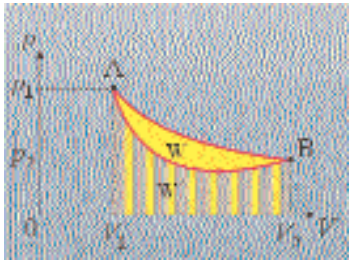
ΣΧΗΜΑ 1.14

Επειδή η μετατόπιση του εμβόλου είναι πολύ μικρή η πίεση του αερίου θεωρούμε ότι παραμένει σταθερή.



ΣΧΗΜΑ 1.15

Το σκιασμένο εμβαδόν μας δίνει το έργο που εκτέλεσε το αέριο κατά τη μεταβολή AB.



ΣΧΗΜΑ 1.16

Το έργο κατά την μετάβαση αερίου από την κατάσταση A στην κατάσταση B εξαρτάται και από τον τρόπο μετάβασης. Εδώ έχουμε $W > W'$.

μεταβαίνει από την αρχική στην τελική του κατάσταση. Αυτό φαίνεται από το σχήμα (1.16), όπου έχουμε την ίδια αρχική και τελική κατάσταση για δύο διαφορετικές μεταβολές. Στην περίπτωση αυτή το έργο W είναι διαφορετικό από το έργο W' και από το σχήμα φαίνεται ότι $W > W'$.

1ο ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Εκτός από την διαδικασία ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ σωμάτων, μέσω μηχανικού ή ηλεκτρικού ή άλλης μορφής έργου, υπάρχει και ο τρόπος να δώσει ή να λάβει ενέργεια ένα σώμα μέσω επαφής του με σώμα διαφορετικής θερμοκρασίας.

Η διαδικασία μεταφοράς ενέργειας, λόγω διαφοράς θερμοκρασίας, από άλλο ένα σώμα σε άλλο, ονομάζεται ανταλλαγή ή ροή θερμότητας και το ποσό ενέργειας που μεταφέρεται ονομάζεται θερμότητα, Q . Μονάδα θερμότητας στο SI είναι το joule (τζουλ), J, που είναι η μονάδα ενέργειας. Μέχρι τις μέρες μας, για ιστορικούς λόγους χρησιμοποιείται ακόμη ως μονάδα θερμότητας το $1 \text{ cal} \approx 4,19 \text{ J}$.

Θα θεωρούμε θετική τη θερμότητα Q , που ανταλλάσσει ένα θερμοδυναμικό σύστημα με το περιβάλλον του, όταν η θερμότητα μεταφέρεται από το περιβάλλον στο σύστημα και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Όταν προσφερθεί θερμότητα Q σ' ένα θερμοδυναμικό σύστημα, στη γενική περίπτωση, ένα μέρος αυτής θα παραμείνει στο σύστημα αυξάνοντας κατά ΔU την εσωτερική του ενέργεια και το υπόλοιπο θα δοθεί στο περιβάλλον μέσω του έργου W , που μπορεί να παραχθεί από το σύστημα. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

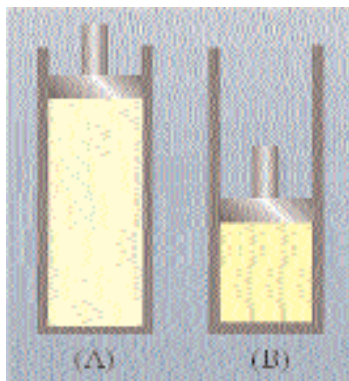
$$Q = \Delta U + W \tag{1.12}$$

Η σχέση (1.12) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του 1ου Θερμοδυναμικού Αξιώματος ή του 1ου Νόμου της Θερμοδυναμικής.

Σημειώνουμε ότι το Q και το W εξαρτώνται από τον τρόπο μετάβασης του συστήματος από την αρχική στην τελική κατάσταση. Η διαφορά τους, που είναι η μεταβολή ΔU της εσωτερικής ενέργειας, δεν εξαρτάται από τον τρόπο μετάβασης του συστήματος από την αρχική στην τελική κατάσταση, αλλά εξαρτάται μόνο από αυτές τις δύο καταστάσεις.

ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΑΕΡΙΩΝ

Ας θεωρήσουμε ποσότητα ιδανικού αερίου εγκλωβισμένη σε κυλινδρικό δοχείο με θερμομονωτικό τοιχώματα και έμβολο. Το αέριο βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, A (p_1, V_1, T_1) (Σχ. 1.17). Ελαττώνουμε αργά τον όγκο του αερίου αυξάνοντας την πίεση, μέσω του εμβόλου, έτσι που συνεχώς το αέριο να βρίσκεται (πρακτικά) σε θερμοδυναμική ισορροπία. Το έμβολο δεν έχει τριβές με το τοίχωμα. Το αέριο φθάνει στην τελική κατάσταση B (p_2, V_2, T_2). Για να γίνει αυτή η μεταβολή το έμβολο εκτέλεσε έργο επί του αερίου. Το αέριο απορρόφησε έργο ($W_{AB} < 0$) και η εσωτερική του ενέργεια αυξήθηκε κατά ΔU_{AB} . Ισχύει $W_{AB} = -\Delta U_{AB}$ και $T_2 > T_1$. Στο σχήμα 1.18 φαίνεται



ΣΧΗΜΑ 1.17

Όταν η μεταβολή του αερίου από την κατάσταση A στην κατάσταση B γίνει πολύ αργά και χωρίς τριβές, θεωρείται αντιστρεπτή.

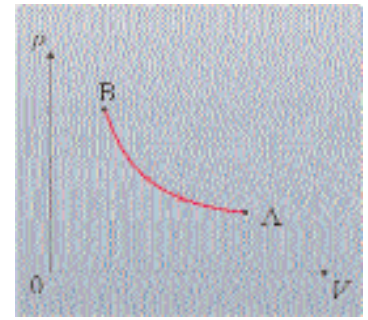
η μεταβολή σε διάγραμμα ($p - V$) από την κατάσταση Α στη Β. Κάθε σημείο της καμπύλης παριστάνει μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας του αερίου.

Μπορούμε τώρα να φανταστούμε ότι από την κατάσταση Β, αυξάνουμε αργά τον όγκο του αερίου, ελαττώντας την πίεση, μέσω του εμβόλου, έτσι που το αέριο να βρίσκεται και πάλι συνεχώς σε θερμοδυναμική ισορροπία. Το αέριο από την κατάσταση Β θα φθάσει στην αρχική κατάσταση Α. Η μεταβολή από την κατάσταση Β στην Α παριστάνεται με την ίδια καμπύλη στο σχήμα 1.18, διαγραφόμενη κατά την αντίθετη φορά. Το έργο που παράγει το αέριο είναι το αντίθετο από αυτό της μεταβολής από το Α στο Β, δηλαδή $W_{BA} = -W_{AB} > 0$ και η εσωτερική ενέργεια τώρα ελαττώνεται, δηλαδή έχουμε μεταβολή $\Delta U_{BA} = -\Delta U_{AB}$ ($T_1 < T_2$). Ισχύει πάλι $W_{BA} = -\Delta U_{BA}$. Παρατηρούμε ότι η μεταβολή από το Α στο Β έγινε κατά τέτοιο τρόπο, που μπορέσαμε, κάνοντας ακριβώς την αντίστροφη διεργασία, να πάμε από το Β στο Α. Συγκεκριμένα τα ποσά έργου που ανταλλάγησαν ήταν ίσα κατά μέτρο και με αντίθετα πρόσημα. Τέτοιες μεταβολές λέγονται αντιστρεπτές. Περιγράψαμε μεταβολή κατά την οποία δεν έγινε ανταλλαγή θερμότητας, αλλά θα μπορούσαμε να φανταστούμε αντιστρεπτή μεταβολή όπου συμβαίνει και τέτοια ανταλλαγή.

Υπάρχουν μεταβολές οι οποίες γίνονται κατά τρόπο ώστε το σύστημα να μην βρίσκεται διαρκώς σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Τέτοιες μεταβολές για αέρια, που μας ενδιαφέρουν εδώ, δεν μπορούν να παρασταθούν σε διάγραμμα $p - V$. Σε αυτά τα διαγράμματα παριστάνονται καταστάσεις αερίου σε θερμοδυναμική ισορροπία. Τέτοια περίπτωση θα ήταν η περίπτωση συμπίεσης του αερίου του σχ. 1.17 τόσο πολύ γρήγορα που η πίεση στη περιοχή του εμβόλου να είναι μεγαλύτερη από την πίεση στον πυθμένα του δοχείου και μεγαλύτερη κάθε φορά από την αντίστοιχη της αντιστρεπτής μεταβολής. Κατά την συμπίεση μέχρι τον όγκο V_2 (ίδια μετακίνηση του εμβόλου, όπως στην αντιστρεπτή μεταβολή), αφού αποκατασταθεί η θερμοδυναμική ισορροπία, η θερμοκρασία θα είναι T_2' . Η T_2' είναι μεγαλύτερη από την T_2 , διότι το προσφερόμενο έργο στο αέριο είναι μεγαλύτερο από πριν. Αν επιχειρήσουμε να μειώσουμε πολύ γρήγορα τον όγκο, ώστε να καταλήξουμε στον αρχικό όγκο V_1 , πάλι δεν θα έχουμε θερμοδυναμική ισορροπία και τώρα η πίεση στη περιοχή του εμβόλου θα είναι μικρότερη από αυτήν στον πυθμένα του δοχείου και από την εκάστοτε πίεση της αντιστρεπτής μεταβολής. Το έργο που θα δώσει το αέριο κατά την μεταβολή του όγκου από V_2 σε V_1 θα είναι μικρότερο από αυτό που πήρε κατά την μεταβολή από V_1 σε V_2 . Έτσι το αέριο δεν θα επανέλθει στην αρχική του κατάσταση κατά την θερμοδυναμική ισορροπία, αλλά θα έχει ίδιο όγκο V_1 και μεγαλύτερη θερμοκρασία, άρα και πίεση. Αυτού του είδους οι μεταβολές λέγονται μη αντιστρεπτές. Είναι μεταβολές που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν κατά την αντίστροφη φορά, εκτελώντας τους αντίστροφους χειρισμούς.

Μη αντιστρεπτή μεταβολή είναι ή μεταφορά θερμότητας (αυθόρμητα) από το αέριο στον έξω χώρο, ένεκα πεπερασμένης διαφοράς θερμοκρασίας. Το αντίστροφο δεν γίνεται (αυθόρμητα) χωρίς χρήση κάποιας αντλίας θερμότητας.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι, για να είναι μια μεταβολή αντιστρεπτή, πρέπει κατά την διάρκεια της:



ΣΧΗΜΑ 1.18

Η αντιστρεπτή μεταβολή παριστάνεται με συνεχή γραμμή σε διάγραμμα $p - V$.

α) Να επικρατεί διαρκώς κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, άρα δεν πρέπει να γίνεται ροή θερμότητας, ένεκα πεπερασμένης διαφοράς θερμοκρασίας.

β) Δεν πρέπει να παρουσιάζονται φαινόμενα τριβής, γιατί οι πιέσεις και το έργο δεν θα είναι ίδια κατά την αρχική και την αντίστροφη μεταβολή.

Είναι ευνόητο ότι οι αντιστρεπτές μεταβολές μπορούν να προσεγγιστούν στην πράξη, αν οι διεργασίες γίνονται αρκετά αργά, αν οι διαφορές θερμοκρασίας είναι πολύ μικρές και οι τριβές αμελητέες.

Στη πραγματικότητα όλες οι μεταβολές στη φύση είναι μη αντιστρεπτές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ 1ου ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΕΡΙΟΥ

Θα δούμε τώρα την εφαρμογή του 1ου θερμοδυναμικού αξιώματος σε ορισμένες μεταβολές ιδανικού αερίου. Οι μεταβολές που θα ακολουθήσουν θεωρούνται όλες αντιστρεπτές.

1. ΙΣΟΘΕΡΜΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Ισόθερμη ονομάζουμε τη μεταβολή ορισμένης μάζας αερίου, υπό σταθερή θερμοκρασία. Μια τέτοια μεταβολή επιτυγχάνεται πειραματικά με την διάταξη του σχήματος 1.1.

Στο σχήμα 1.19 παριστάνεται σε διάγραμμα $p - V$ η ισόθερμη εκτόνωση ποσότητας αερίου από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2) με $T_1 = T_2 = T_0$.

Από το νόμο των Boyle-Marriotte προκύπτει

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Στη διάρκεια της ισόθερμης μεταβολής η μάζα και η θερμοκρασία παραμένουν σταθερές, συνεπώς σταθερή παραμένει και η εσωτερική ενέργεια του ιδανικού αερίου, άρα $\Delta U = 0$.

Από το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα έχουμε

$$Q = W$$

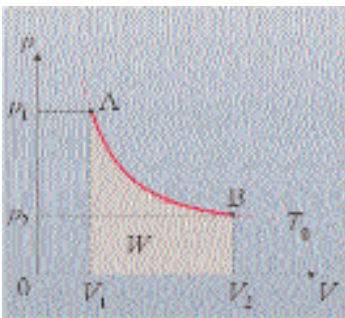
Δηλαδή όλη η προσφερόμενη στο αέριο θερμότητα αποδίδεται στο περιβάλλον, μέσω του έργου W . Το έργο W παριστάνεται από το σκιασμένο εμβαδόν του διαγράμματος του σχήματος 1.19 και αποδεικνύεται ότι είναι

$$W = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1.13)$$

2. ΙΣΟΧΩΡΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

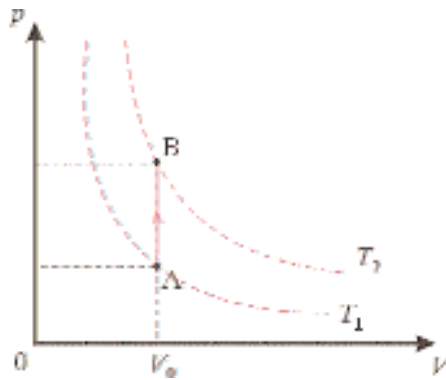
Ισόχωρη ονομάζουμε τη μεταβολή ορισμένης μάζας αερίου, υπό σταθερό όγκο.

Η ισόχωρη μεταβολή μπορεί να επιτευχθεί πειραματικά με τη διάταξη του σχήματος 1.5. Στο σχήμα 1.20 παριστάνεται σε διάγραμμα $p - V$ η ισόχωρη θέρμανση ποσότητας αερίου από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2), με $V_1 = V_2 = V_0$. Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχουμε



ΣΧΗΜΑ 1.19

Ισόθερμη εκτόνωση.



ΣΧΗΜΑ 1.20

Ισόχωρη θέρμανση.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Στη διάρκεια της ισόχωρης μεταβολής ο όγκος του αερίου παραμένει σταθερός, συνεπώς το έργο είναι μηδέν, δηλαδή $W = 0$. Από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα έχουμε

$$Q = \Delta U$$

Δηλαδή όλη η προσφερομένη στο αέριο θερμότητα χρησιμοποιείται για την θέρμανσή του, δηλαδή την αύξηση της θερμοδυναμικής του (εσωτερικής) ενέργειας.

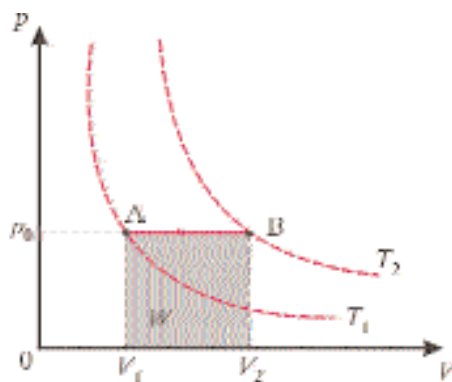
3. ΙΣΟΒΑΡΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Ισοβαρή ονομάζουμε τη μεταβολή ορισμένης μάζας αερίου, υπό σταθερή πίεση.

Η ισοβαρής μεταβολή μπορεί να επιτευχθεί πειραματικά με τη διάταξη του σχήματος 1.6.

Στο σχήμα 1.21. παριστάνεται σε διάγραμμα $p - V$ η ισοβαρής εκτόνωση μιας ποσότητας αερίου από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2), με $p_1 = p_2 = p_0$.

Από τον νόμο των Charles και Gay-Lussac προκύπτει



ΣΧΗΜΑ 1.21

Ισοβαρής εκτόνωση ή ισοβαρής θέρμανση.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Η προσφερόμενη στο αέριο θερμότητα Q κατά ένα μέρος χρησιμοποιείται για τη θέρμανση του αερίου και το υπόλοιπο μέρος ισούται με το έργο W , που παράγει το αέριο κατά την εκτόνωσή του. Δηλαδή για την ισοβαρή μεταβολή το θερμοδυναμικό αξίωμα έχει την μορφή

$$Q = \Delta U + W$$

Το έργο W παριστάνεται από το σκιασμένο εμβαδό του διαγράμματος του σχήματος 1.21 και είναι:

$$W = p_0(V_2 - V_1) \tag{1.14}$$

4. ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Αδιαβατική ονομάζουμε τη μεταβολή ορισμένης μάζας αερίου στην διάρκεια της οποίας δεν ανταλλάσει το αέριο θερμότητα με το περιβάλλον, δηλαδή $Q = 0$. Το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα έχει τη μορφή:

$$0 = W + \Delta U \quad \text{ή}$$

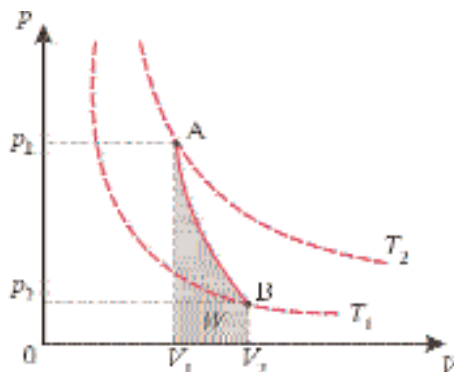
$$W = -\Delta U \tag{1.15}$$

Από την σχέση (1.15) προκύπτει ότι όταν το αέριο εκτονώνεται αδιαβατικά, παράγει έργο ($W > 0$) σε βάρος της εσωτερικής του ενέργειας ($\Delta U < 0$),



ΣΧΗΜΑ 1.22

Τα τοιχώματα και το έμβολο είναι θερμομονωτικά. Μετακινώντας αργά το έμβολο μπορούμε να πετύχουμε μια αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή.



ΣΧΗΜΑ 1.23

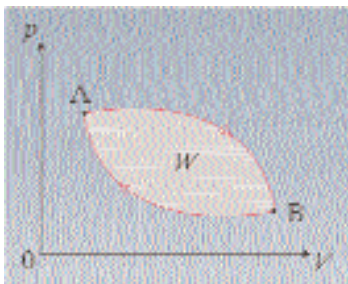
Αδιαβατική εκτόνωση (ψύξη).

δηλαδή ψύχεται. Ανάλογα, όταν το αέριο συμπιέζεται αδιαβατικά, έχουμε $W < 0$, οπότε $\Delta U > 0$, άρα αυτό θερμαίνεται. Τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι αδιαβατικές καμπύλες είναι πιο απότομες από τις ισόθερμες. Στο σχήμα 1.23 παριστάνεται σε διάγραμμα $p - V$ η αδιαβατική εκτόνωση (ψύξη) μιας ποσότητας αερίου από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2). Το σκιασμένο εμβαδόν παριστάνει το έργο W .

5. ΚΥΚΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Η μεταβολή ορισμένης μάζας αερίου, η οποία αρχίζει από μία κατάσταση A (p_0, V_0, T_0) και καταλήγει πάλι σ' αυτή, ονομάζεται κυκλική μεταβολή.

Μια τέτοια κυκλική μεταβολή φαίνεται στο σχήμα 1.24 σε διάγραμμα $p - V$. Εφ' όσον το αέριο επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση, η εσωτερική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται, δηλαδή έχουμε $\Delta U = 0$.



ΣΧΗΜΑ 1.24

Κυκλική μεταβολή.

Από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα προκύπτει

$$Q = W$$

Το προσφερόμενο, στο αέριο, ποσό θερμότητας μετατρέπεται σε έργο W που παράγει το αέριο.

Το έργο W παριστάνεται από το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες στο διάγραμμα $p-V$ του σχήματος 1.24. Στην περίπτωση αυτού του σχήματος το έργο κατά την εκτόνωση $A \rightarrow B$ είναι μεγαλύτερο, κατά απόλυτη τιμή από το έργο κατά τη συμπίεση $B \rightarrow A$. Συνεπώς το συνολικό έργο είναι θετικό. Μπορούμε εδώ να αναφέρουμε έναν εμπειρικό κανόνα.

“Το έργο σε μια κυκλική μεταβολή είναι θετικό, όταν ο κύκλος, σε διάγραμμα $p-V$, διαγράφεται προς τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού και αρνητικό, όταν διαγράφεται κατά την αντίστροφη φορά”.

Παράδειγμα 1.6

Ποσότητα ιδανικού αερίου εκτελεί κυκλική μεταβολή, που αποτελείται από τις παρακάτω διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές.

(I) Ισόχωρη μεταβολή από την κατάσταση $A (p_0, V_0, T_0)$ έως την κατάσταση B , όπου η πίεση γίνεται $2p_0$.

(II) Ισόθερμη μεταβολή από την κατάσταση B , ως την κατάσταση Γ .

(III) Ισοβαρή μεταβολή ΓA .

α) Να παρασταθεί η κυκλική μεταβολή σε διαγράμματα $p-V$, $V-T$, $p-T$.

β) Να υπολογισθεί το έργο W για την κυκλική μεταβολή.

Γνωστά είναι τα p_0 , V_0 , T_0 και $\ln 2 \approx 0,69$

Απάντηση

α) Για την ισόχωρη μεταβολή AB ισχύει

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \quad \text{ή} \quad \frac{p_0}{T_0} = \frac{2p_0}{T_B} \quad \text{ή} \quad T_B = 2T_0$$

Αφού η μεταβολή ΓA είναι ισοβαρής, έχουμε ότι:

$$p_\Gamma = p_A \quad \text{ή} \\ p_\Gamma = p_0$$

Για την ισόθερμη μεταβολή $B\Gamma$ ισχύει:

$$p_B V_B = p_\Gamma V_\Gamma \quad \text{ή} \quad 2p_0 V_0 = p_0 V_\Gamma \quad \text{ή} \\ V_\Gamma = 2V_0$$

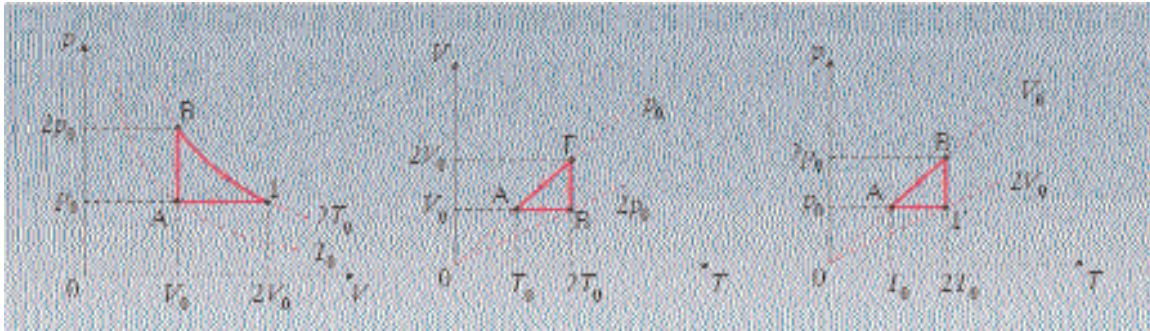
Τα ζητούμενα διαγράμματα φαίνονται στο Σχ. 1.25.

β) Υπολογίζουμε το έργο σε κάθε μία απ' τις επιμέρους μεταβολές

Μεταβολή AB : $W_{AB} = 0$

Μεταβολή $B\Gamma$: $W_{B\Gamma} = nR 2T_0 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 2 \ln 2 nRT_0 = 1,4 p_0 V_0$

Μεταβολή ΓA : $W_{\Gamma A} = p_0 (V_0 - 2V_0) = -p_0 V_0$



ΣΧΗΜΑ 1.25

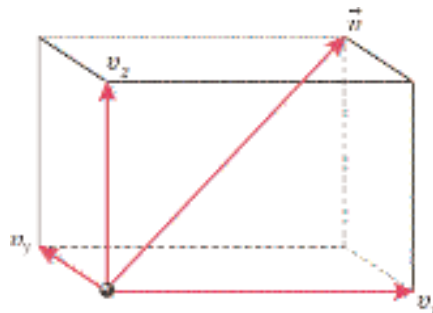
Το έργο για την κυκλική μεταβολή είναι:

$$\begin{aligned}
 W_{ολ} &= W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma A} \quad \text{ή} \\
 W_{ολ} &= 0 + 1,4 p_0 V_0 - p_0 V_0 \quad \text{ή} \\
 W_{ολ} &= 0,4 p_0 V_0
 \end{aligned}$$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Τα μόρια ενός μονατομικού ιδανικού αερίου εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση, συνεπώς η μέση ενέργεια των μορίων του είναι

$$E_K = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$



ΣΧΗΜΑ 1.26

Η ταχύτητα του μορίου αναλύεται σε τρεις συνιστώσες.

Αν v_x , v_y , v_z οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός μορίου έχουμε

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

συνεπώς

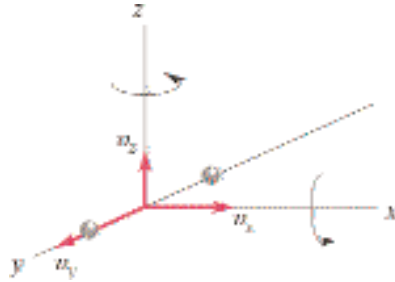
$$E_K = \frac{1}{2} m \overline{v_x^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{3}{2} kT \quad (1.16)$$

Με τον όρο βαθμοί ελευθερίας, f , εννοούμε το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών που καθορίζουν την ενέργεια ενός σώματος. Από την σχέση (1.16) συμπεραίνουμε ότι για τα μόρια μονατομικού ιδανικού αερίου είναι $f = 3$. Όπως έχουμε πει ισχύει, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, άρα σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί το ίδιο ποσό ενέργειας $kT/2$. Αυτή η πρόταση

ισχύει γενικότερα. Αν η ενέργεια του μορίου μπορεί να γραφεί ως άθροισμα όρων που ο καθένας περιέχει το τετράγωνο της αντιστοιχης μεταβλητής, τότε για κάθε μία από αυτές τις μεταβλητές (τους βαθμούς ελευθερίας) ισχύει ότι η μέση ενέργεια είναι: $KT/2$.

Αυτό αποτελεί το θεώρημα της ισοκατανομής της θερμοδυναμικής ενέργειας (εσωτερικής ενέργειας) και εφαρμόζεται σε μονατομικά και πολυατομικά μόρια.

Για ένα διατομικό μόριο με σταθερές αποστάσεις μεταξύ των ατόμων (σχήμα 1.27), έχουμε $f = 5$. Τρεις βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στην



ΣΧΗΜΑ 1.27

Διατομικό μόριο με σταθερή απόσταση μεταξύ των ατόμων.

μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας, O , του μορίου και δύο στην περιστροφή γύρω από τους άξονες z και x . Για λόγους που εξηγούνται από την κβαντομηχανική, η περιστροφή περί άξονα, που διέρχεται από τα κέντρα μάζας των ατόμων, δεν συνεισφέρει στην ενέργεια του συστήματος. Ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας λέμε ότι είναι “παγωμένος”.

Αν στο μοντέλο του παραπάνω μορίου φανταστούμε αυξομείωση της απόστασης μεταξύ των ατόμων, λόγω ταλάντωσης, πρέπει να προσθέσουμε και άλλους δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τότε ισχύει $f = 7$.

Στα μόρια με περισσότερα άτομα το f μπορεί να πάρει διάφορες τιμές.

Από το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, έχουμε ότι η μέση ενέργεια ενός μορίου ιδανικού αερίου, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{E} = f \frac{1}{2} kT \quad (1.17)$$

Η εσωτερική ενέργεια μιας ποσότητας N μορίων ιδανικού αερίου είναι, εξ ορισμού $U = N\bar{E}$, οπότε λόγω της (1.17) προκύπτει:

$$U = \frac{f}{2} NkT \quad (1.18)$$

Επειδή

$$Nk = N \frac{R}{N_A} = nR$$

έχουμε

$$U = \frac{f}{2} nRT \quad (1.19)$$

Η (1.19) με χρήση της καταστατικής εξίσωσης δίνει

$$U = \frac{f}{2} pV \quad (1.20)$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ ΚΑΙ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Σύμφωνα με τον γνωστό νόμο της θερμιδομετρίας, το ποσό θερμότητας Q που πρέπει να απορροφήσει ένα σώμα μάζας m , ώστε να αυξήσει τη θερμοκρασία του κατά ΔT , είναι

$$Q = mc\Delta T \quad (1.25)$$

Η σταθερά c ονομάζεται ειδική θερμότητα ή καλύτερα ειδική θερμοχωρητικότητα, εξαρτάται από το υλικό του σώματος και από το είδος της μεταβολής που υφίσταται. Η μονάδα της στο SI είναι το 1 J/kgK . Η μάζα m γράφεται $m = nM$, όπου n ποσότητα ύλης (μετρείται σε γραμμομόρια, mol) και M η γραμμομοριακή μάζα, οπότε η σχέση (1.25) γίνεται

$$Q = nMc\Delta T$$

Το γινόμενο (Mc) συμβολίζεται με C , δηλαδή $C = Mc$, και ονομάζεται ειδική γραμμομοριακή θερμότητα ή καλύτερα γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα. Μπορούμε πλέον να γράψουμε

$$Q = nC\Delta T \quad (1.26)$$

(Μερικοί συγγραφείς ορίζουν με C τη θερμοχωρητικότητα, δηλαδή το $\frac{Q}{\Delta T} = mc$).

Η θερμοκρασία ενός αερίου μπορεί να αλλάξει με διάφορους τρόπους, όπως, για παράδειγμα, κρατώντας τον όγκο σταθερό και προσφέροντας ποσό θερμότητας ή διατηρώντας σταθερή την πίεση και προσφέροντας ποσό θερμότητας ή μεταβάλλοντας τον όγκο και την πίεση και προσφέροντας ποσό θερμότητας.

Αυτές οι διαφορετικές μεταβολές μας οδηγούν στο να ορίζουμε διαφορετικές γραμμομοριακές (και ειδικές) θερμοχωρητικότητες, ανάλογα με την μεταβολή που χρησιμοποιούμε. Από όλες τις γραμμομοριακές θερμοχωρητικότητες δύο είναι οι πλέον χρήσιμες: α) αυτή που ορίζεται όταν ο όγκος μένει σταθερός (C_V) και β) αυτή που ορίζεται, όταν η πίεση μένει σταθερή (C_P).

Η C_V ονομάζεται γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο και η C_P γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση.

Σε μια ισόχωρη μεταβολή αερίου, έχουμε

$$Q = nC_V\Delta T \quad (1.27)$$

Σε μια ισοβαρή μεταβολή αερίου έχουμε

$$Q = nC_P\Delta T \quad (1.28)$$

Ισχύει $C_P > C_V$, γιατί στην ισόχωρη μεταβολή η προσφερόμενη θερμότητα στο αέριο χρησιμοποιείται ολόκληρη για τη θέρμανση του

αερίου, ενώ στην ισοβαρή μεταβολή ένα μέρος της προσφερόμενης θερμότητας μετατρέπεται σε έργο.

Έστω δύο ισόθερμες, ενός ιδανικού αερίου, με θερμοδυναμικές θερμοκρασίες T_1 και T_2 ($T_2 > T_1$). Όπως είναι γνωστό η εσωτερική ενέργεια του ιδανικού αερίου είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας, οπότε κάθε μία από τις καμπύλες αυτές είναι ταυτόχρονα και καμπύλη σταθερής εσωτερικής ενέργειας (σχ. 1.28). Έτσι πηγαίνοντας από ένα σημείο της καμπύλης T_1 ή (U_1) σε κάποιο σημείο της καμπύλης T_2 ή (U_2), ακολουθώντας οποιασδήποτε μορφής διαδρομή, η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια, $\Delta U = U_2 - U_1$, είναι η ίδια.

Για την ισόχωρη μεταβολή $\alpha \rightarrow \beta$, από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα έχουμε

$$Q = \Delta U$$

άρα

$$\Delta U = nC_V \Delta T \quad (1.29)$$

Συνεπώς, για οποιαδήποτε μεταβολή μεταξύ των ισοθέρμων T_1 , T_2 η μεταβολή ΔU της εσωτερικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση (1.29).

Εκτελώντας την ισοβαρή μεταβολή $\alpha \rightarrow \gamma$, το αέριο εκτονώνεται παράγοντας έργο

$$W = p \Delta V$$

Από την καταστατική εξίσωση έχουμε:

$$p \Delta V = nR(T_2 - T_1) = nR \Delta T$$

οπότε

$$W = nR \Delta T \quad (1.30)$$

Από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα για την ισοβαρή μεταβολή έχουμε

$$Q = \Delta U + W$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.28), (1.29) και (1.30) μπορούμε να γράψουμε

$$nC_P \Delta T = nC_V \Delta T + nR \Delta T \quad \text{ή}$$

$$C_P = C_V + R \quad (1.31)$$

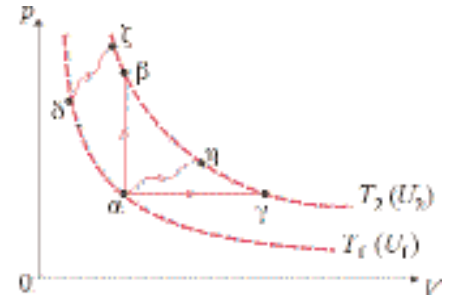
Η σχέση (1.31) συνδέει τις γραμμομοριακές θερμοχωρητικότητες C_P , C_V , ενός ιδανικού αερίου και δείχνει ότι $C_P > C_V$, πράγμα που είχαμε προβλέψει.

Ο λόγος των γραμμομοριακών θερμοχωρητικότητων (ή των ειδικών θερμοχωρητικότητων) παριστάνεται με το γ ,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V} \quad (1.32)$$

και είναι $\gamma > 1$, αφού $C_P > C_V$.

Από τη σχέση (1.19) μπορούμε να γράψουμε



ΣΧΗΜΑ 1.28

Η μεταβολή ΔU της εσωτερικής ενέργειας είναι ίδια για οποιαδήποτε μεταβολή μεταξύ των ισοθέρμων T_1 , T_2 .

$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$$

και συγκρίνοντας με την (1.29), έχουμε ότι

$$C_V = \frac{f}{2} R \tag{1.33}$$

Από τις (1.33) και (1.31) προκύπτει ότι

$$C_P = \frac{f + 2}{2} R \tag{1.34}$$

Από τις (1.32), (1.33) και (1.34) βρίσκουμε ότι

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \tag{1.35}$$

Το μοντέλο του ιδανικού αερίου δίνει τιμές για τα C_P (και C_V) οι οποίες σχεδόν συμπίπτουν με τις πειραματικές τιμές για τα μονατομικά αέρια, όπως το He ή το Ar (Βλέπε τον πίνακα για το C_P).

Μονατομικά	$C_P / \frac{J}{mol \cdot K}$	
	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ
He	20,8	20,8
Ar	20,8	20,7

Αν όμως εξετάσουμε πιο πολύπλοκα μόρια αερίων, παρατηρούμε μια συνεχή απόκλιση των θεωρητικών τιμών, για το C_P , από τις πειραματικές τιμές, καθώς αυξάνει ο αριθμός των ατόμων που αποτελούν τα μόρια. Οι επόμενοι πίνακες δείχνουν αυτή την απόκλιση.

Διατομικά	$C_P / \frac{J}{mol \cdot K}$		Πολυατομικά	$C_P / \frac{J}{mol \cdot K}$	
	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ		ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ
He	29,1	28,8	CO ₂	33,2	36,6
O ₂	29,1	29,3	SO ₂	33,2	40,7

Οι παραπάνω αποκλίσεις οφείλονται στο γεγονός ότι η Κλασική Μηχανική δεν περιγράφει επαρκώς τα μοριακά συστήματα, για καλύτερη περιγραφή των οποίων χρησιμοποιείται η Κβαντική Μηχανική.

Επίσης το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας δεν προβλέπει εξάρτηση των C_P και C_V από τη θερμοκρασία T , πράγμα που παρατηρείται πειραματικά σε κάποια μόρια.

Για το H₂ π.χ. η C_V μέχρι τους 100 K περίπου είναι $3R/2$, κατόπιν αυξάνεται σε $5R/2$ και συνεχίζει η αύξησή της, μέχρι που το H₂ διασπάται στους 3200 K. Για ένα διατομικό αέριο που δεν διασπάται, η C_V στους 10 000 K είναι $7R/2$. Αυτό σημαίνει ότι για μικρές θερμοκρασίες είναι “παγωμένοι” οι βαθμοί ελευθερίας που αφορούν στην περιστροφή και στην ταλάντωση.

Συνεπώς το διατομικό μόριο σε χαμηλές θερμοκρασίες συμπεριφέρεται ως μονατομικό.

Σε ψηλότερες θερμοκρασίες είναι “παγωμένοι” μόνο οι βαθμοί ελευθερίας που αφορούν στην ταλάντωση κ.λπ.

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ POISSON ΚΑΙ Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΣΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Έστω αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή ποσότητας ιδανικού αερίου από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2). Αποδεικνύεται ότι σε μια αδιαβατική μεταβολή ισχύει

$$pV^\gamma = \text{σταθ.} \quad (\text{Νόμος Poisson})$$

Συνεπώς για τη μεταβολή $A \rightarrow B$ έχουμε

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad (1.36)$$

Από την (1.36) και την καταστατική εξίσωση προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{nRT_1}{V_1} V_1^\gamma &= \frac{nRT_2}{V_2} V_2^\gamma \quad \text{ή} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_2^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ακόμη από την (1.36) και την καταστατική εξίσωση μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} p_1 \left(\frac{nRT_1}{p_1} \right)^\gamma &= p_2 \left(\frac{nRT_2}{p_2} \right)^\gamma \quad \text{ή} \\ T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα, για την παραπάνω αδιαβατική μεταβολή έχουμε

$$W = -\Delta U = -nC_V \Delta T \quad (1.39)$$

Από τις σχέσεις $C_p = C_V + R$ και $\gamma = C_p/C_V$ έχουμε

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (1.40)$$

και

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (1.41)$$

Η (1.39) λόγω της (1.40) δίνει

$$W = -n \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) \quad \text{ή}$$

$$W = \frac{nRT_2 - nRT_1}{1 - \gamma} \quad \text{ή}$$

$$W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1 - \gamma} \quad (1.42)$$

Παράδειγμα 1-7

Ποσότητα μονατομικού ιδανικού αερίου βρίσκεται σε κατάσταση Α (p_0, V_0, T_0) και εκτονώνεται ισοβαρώς μέχρι την κατάσταση Β, όπου ο όγκος γίνεται $V_B = 4V_0$. Στη συνέχεια ψύχεται αδιαβατικά μέχρι την κατάσταση Γ, όπου αποκτά ξανά την αρχική του θερμοκρασία T_0 .

α) Να σχεδιαστούν οι μεταβολές σε διάγραμμα $p - V$.

β) Να υπολογισθούν τα μεγέθη W, Q και ΔU για κάθε μια από τις επιμέρους μεταβολές, καθώς και για την συνολική.

Απάντηση

α) Για την ισοβαρή μεταβολή ΑΒ ισχύει

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \quad \text{ή} \quad \frac{V_0}{T_0} = \frac{4V_0}{T_B} \quad \text{ή} \quad T_B = 4T_0$$

Αφού το αέριο είναι μονατομικό έχουμε $f = 3$, συνεπώς

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} = \frac{5}{3}$$

Από την αδιαβατική μεταβολή ΒΓ έχουμε

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_\Gamma V_\Gamma^{\gamma-1} \quad \text{ή}$$

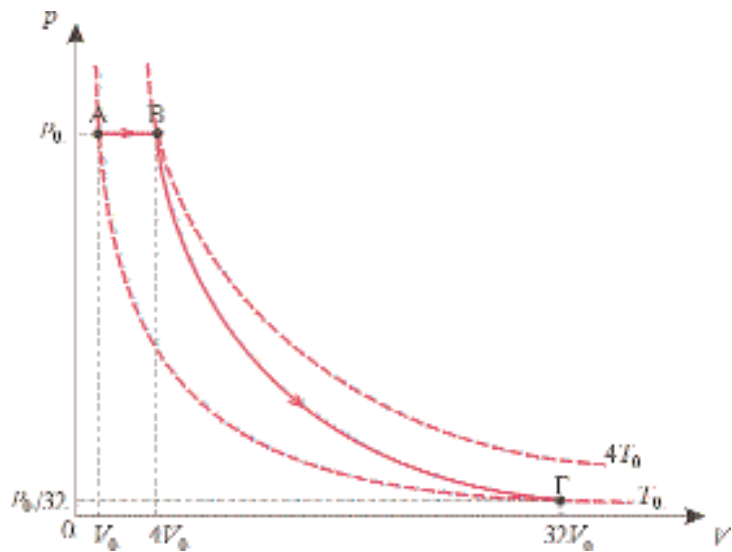
$$4T_0 (4V_0)^{\frac{2}{3}} = T_0 V_\Gamma^{\frac{2}{3}} \quad \text{ή}$$

$$V_\Gamma = 4^{\frac{3}{2}} 4V_0 = 32V_0$$

Ακόμα για την μεταβολή ΒΓ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{p_B V_B}{T_B} = \frac{p_\Gamma V_\Gamma}{T_\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{p_0 4V_0}{4T_0} = \frac{p_\Gamma 32V_0}{T_0} \quad \text{ή} \quad p_\Gamma = \frac{p_0}{32}$$

Κατασκευάζουμε το ζητούμενο διάγραμμα



ΣΧΗΜΑ 1.29

β) Για την ισοβαρή μεταβολή AB έχουμε

$$W_{AB} = P_0(4V_0 - V_0) = 3P_0V_0$$

$$Q_{AB} = nC_P(4T_0 - T_0) = n \left(\frac{f+2}{2} \right) R 3T_0 \quad \text{ή}$$

$$Q_{AB} = \frac{15}{2} nRT_0 = 7,5 P_0V_0$$

Τέλος από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα είναι

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 4,5 P_0V_0$$

Για την αδιαβατική μεταβολή ΒΓ έχουμε:

$$Q_{BG} = 0$$

$$W_{BG} = -\Delta U_{BG} = -nC_V(T_0 - 4T_0) \quad \text{ή}$$

$$W_{BG} = -n \frac{f}{2} R(-3T_0) = \frac{9}{2} nRT_0 \quad \text{ή}$$

$$W_{BG} = 4,5 P_0V_0$$

Οπότε

$$\Delta U_{BG} = -4,5 P_0V_0$$

Για τη συνολική μεταβολή έχουμε:

$$Q_{ολ} = Q_{AB} + Q_{BG} = 7,5 P_0V_0$$

$$W_{ολ} = W_{AB} + W_{BG} = 7,5 P_0V_0$$

Τέλος από τη σχέση $\Delta U_{ολ} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BG}$ ή $\Delta U_{ολ} = Q_{ολ} - W_{ολ}$ καταλήγουμε ότι $\Delta U_{ολ} = 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί στην αρχική και η τελική κατάσταση έχουμε την ίδια θερμοκρασία T_0 .

ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Με τον όρο θερμικές μηχανές εννοούμε διατάξεις οι οποίες, ανεξάρτητα των επιμέρους χαρακτηριστικών τους, εξυπηρετούν τον ίδιο σκοπό δηλαδή την μετατροπή μέρους της προσφερόμενης θερμότητας σε μηχανική ενέργεια. Η ενέργεια, η προερχόμενη από την καύση κάποιας πρώτης ύλης, μεταφέρεται υπό την μορφή θερμότητας σε κάποιο αέριο. Το αέριο εκτελεί κυκλική μεταβολή, δίνει θερμότητα σε ψυχρότερο σώμα και συνολικά παράγει έργο.

Η αρχή λειτουργίας μιας θερμικής μηχανής φαίνεται στο σχήμα 1.30.

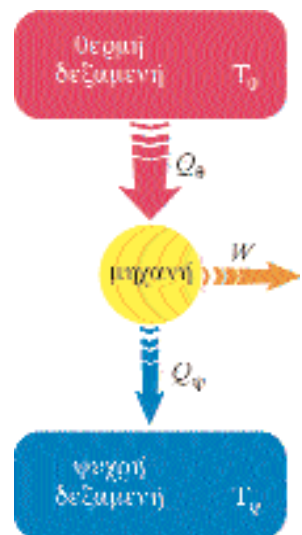
Η θερμική μηχανή αποτελείται από τρία κύρια μέρη:

α) Από ένα θερμό σώμα, που ονομάζεται θερμή δεξαμενή.

β) Από το υλικό λειτουργίας, που είναι συνήθως αέριο και λέγεται ενεργό υλικό της μηχανής.

γ) Από ένα ψυχρό σώμα (π.χ. το περιβάλλον), που ονομάζεται ψυχρή δεξαμενή.

Το υλικό λειτουργίας παραλαμβάνει ποσό θερμότητας Q_θ από τη θερμή δεξαμενή, η οποία βρίσκεται σε υψηλότερη θερμοκρασία T_θ και αποδίδει ποσό θερμότητας Q_ψ στην ψυχρή δεξαμενή, της οποίας η θερμοκρασία είναι χαμηλότερη T_ψ ($T_\theta > T_\psi$). Το ενεργειακό ισοζύγιο ανά κύκλο μπορεί να καθοριστεί από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα. Εφ' όσον το υλικό λειτουργίας στο τέλος κάθε κύκλου επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση, η εσωτερική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται, δηλαδή $\Delta U = 0$.



ΣΧΗΜΑ 1.30

Σχηματικό διάγραμμα ροής ενέργειας σε μια πραγματική θερμική μηχανή.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$W = Q_{\theta} - |Q_{\psi}|$$

Ο συντελεστής απόδοσης (e) μιας θερμοκίνησης μηχανής είναι ο λόγος του έργου που παρέχει συνολικά προς το ποσό θερμότητας Q_{θ} , δηλαδή

$$e = \frac{W}{Q_{\theta}} \tag{1.43}$$

Μπορούμε ακόμα να γράψουμε

$$e = \frac{Q_{\theta} - |Q_{\psi}|}{Q_{\theta}} \quad \text{ή}$$

$$e = 1 - \frac{|Q_{\psi}|}{Q_{\theta}} \tag{1.44}$$

ΨΥΚΤΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Γνωρίζουμε ότι η θερμότητα μεταφέρεται “αυθόρμητα” από ένα θερμό προς ένα ψυχρό σώμα. Υπάρχουν μηχανές (ψυγεία, κλιματιστικά κλπ.), που πραγματοποιούν την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή μεταφέρουν θερμότητα από ένα ψυχρό σώμα προς ένα θερμό, δαπανώντας ενέργεια. Οι παραπάνω μηχανές ονομάζονται ψυκτικές μηχανές. Στο σχήμα 1.31 φαίνεται σχηματικά μια ψυκτική μηχανή. Αυτή σε κάθε κύκλο, που εκτελεί το υλικό της, μεταφέρει θερμότητα Q_{ψ} από την ψυχρή δεξαμενή στην θερμή δεξαμενή, δαπανώντας ενέργεια W . Σε κάθε κύκλο στη θερμή δεξαμενή αποδίδεται ποσό θερμότητας

$$|Q_{\theta}| = |W| + |Q_{\psi}|$$

Ο συντελεστής απόδοσης της ψυκτικής μηχανής είναι

$$e = \frac{|Q_{\psi}|}{|W|} = \frac{|Q_{\psi}|}{|Q_{\theta}| - |Q_{\psi}|}$$

Παραλλαγή της ψυκτικής μηχανής είναι η αντλία θερμότητας που χρησιμοποιείται για θέρμανση σπιτιών ψύχοντας τον αέρα έξω από το σπίτι. Είναι σαν ψυγείο που λειτουργεί ανάποδα. Ο συντελεστής απόδοσης της αντλίας θερμότητας είναι

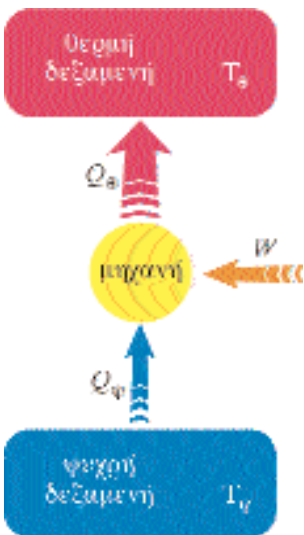
$$\frac{|Q_{\theta}|}{|W|} = \frac{|Q_{\theta}|}{|Q_{\theta}| - |Q_{\psi}|} > 1$$

Από εδώ διαπιστώνεται το πλεονέκτημα αυτών των διατάξεων για θέρμανση οικιών.

2ο ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Η πειραματική εμπειρία λέει ότι είναι αδύνατον να φτιαχτεί θερμοκίνηση μηχανή η οποία να μετατρέπει όλη την προσφερόμενη θερμότητα σε έργο ή, με άλλα λόγια, ο συντελεστής απόδοσης e να ισούται με την μονάδα. Αυτή η αδυναμία εκφράζεται με μια πρόταση, η οποία ονομάζεται 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα ή 2ος θερμοδυναμικός νόμος και λέει τα εξής:

“Είναι αδύνατον οποιοδήποτε σύστημα να υποστεί μια μεταβολή κατά την οποία θα απορροφήσει θερμότητα από σώμα ορισμένης



ΣΧΗΜΑ 1.31

Σχηματικό διάγραμμα μιας ψυκτικής μηχανής.

θερμοκρασίας και θα την μετατρέψει όλη σε μηχανικό έργο, επιστρέφοντας στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε”.

Αυτή είναι από τις διατυπώσεις του 2ου θερμοδυναμικού αξιώματος, η διατύπωση Kelvin-Planck.

Το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα στηρίζεται στην διαφορετική φύση της εσωτερικής ενέργειας και της μακροσκοπικής μηχανικής ενέργειας. Η εσωτερική ενέργεια είναι η ενέργεια λόγω της τυχαίας μοριακής κίνησης, ενώ η μακροσκοπική μηχανική ενέργεια αντιπροσωπεύει την διατεταγμένη μοριακή κίνηση την οποία εμφανίζει ένα σώμα, όταν κινείται με μία ταχύτητα προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Όταν το σώμα σταματά λόγω τριβών ή συγκρούσεων, η διατεταγμένη του κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε ενέργεια τυχαίας μοριακής κίνησης. Εφ’ όσον οι κινήσεις των μορίων δεν μπορούν να “ελεχθούν”, δεν μπορούμε να μετατρέψουμε πάλι την τυχαία κίνηση σε διατεταγμένη, εκτός από ένα μέρος της. Αυτή είναι η εργασία που εκτελεί μια θερμική μηχανή. Αν το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα δεν ίσχυε, τότε θα ήταν δυνατό να κινηθεί ένα ατμόπλοιο παίρνοντας θερμότητα από την θάλασσα ή ένα αεροπλάνο παίρνοντας θερμότητα από τον αέρα.

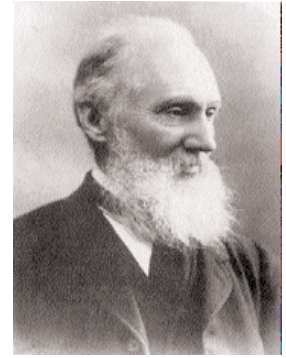
Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα μας λέει ότι η ενέργεια διατηρείται ποσοτικά, ενώ το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα μας λέει ότι δύο ίσα ποσά ενέργειας δεν έχουν, γενικά, την ίδια ικανότητα παραγωγής έργου.

Μια ισοδύναμη διατύπωση του 2ου θερμοδυναμικού αξιώματος είναι η διατύπωση του Clausius, που αφορά στη λειτουργία των ψυκτικών μηχανών και λέει ότι:

“Είναι αδύνατο να μεταφερθεί θερμότητα από ένα σώμα προς άλλο σώμα ψηλότερης θερμοκρασίας, χωρίς δαπάνη ενέργειας”.

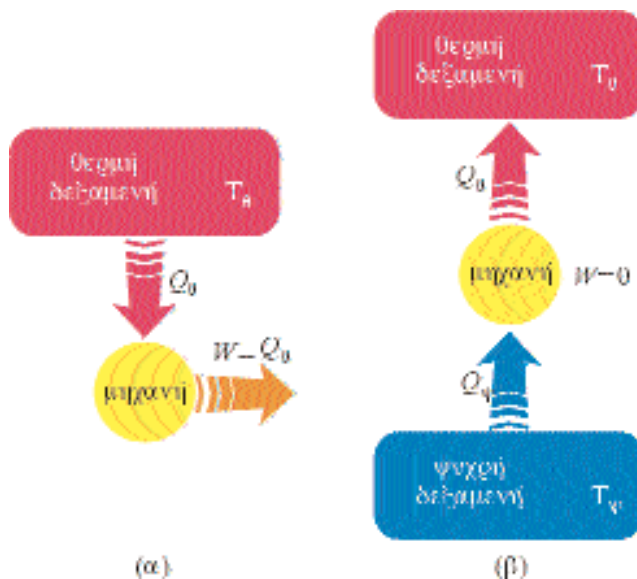
Τονίζουμε ότι οι δύο παραπάνω διατυπώσεις του 2ου θερμοδυναμικού αξιώματος, παρόλο που φαίνονται εκ πρώτης όψεως ασύνδετες, είναι ισοδύναμες. Αν δηλαδή ισχύει η μία, θα ισχύει και η άλλη ή αν η μία είναι λανθασμένη, είναι λανθασμένη και η άλλη.

Στο σχήμα 1.32 φαίνεται σχηματικά μια ανέφικτη θερμική και μια ανέφικτη ψυκτική μηχανή, σύμφωνα με το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα.



Lord Kelvin (1824-1907)

Βρετανός Φυσικός και Μαθηματικός. Πρώτος εισήγαγε την χρήση της απόλυτης κλίμακας θερμοκρασίας (κλίμακα Kelvin), σήμερα η θερμοκρασία αυτή λέγεται *θερμοδυναμική θερμοκρασία*.



ΣΧΗΜΑ 1.32

(α) Ανέφικτη θερμική μηχανή. (β) Ανέφικτη ψυκτική μηχανή.



Sadi Carnot (1796-1832)
Γάλλος Μηχανικός και Φυσικός. Παρόλο που πέθανε πολύ νέος η συμβολή του στην ανάπτυξη της θερμοδυναμικής είναι πολύ μεγάλη.

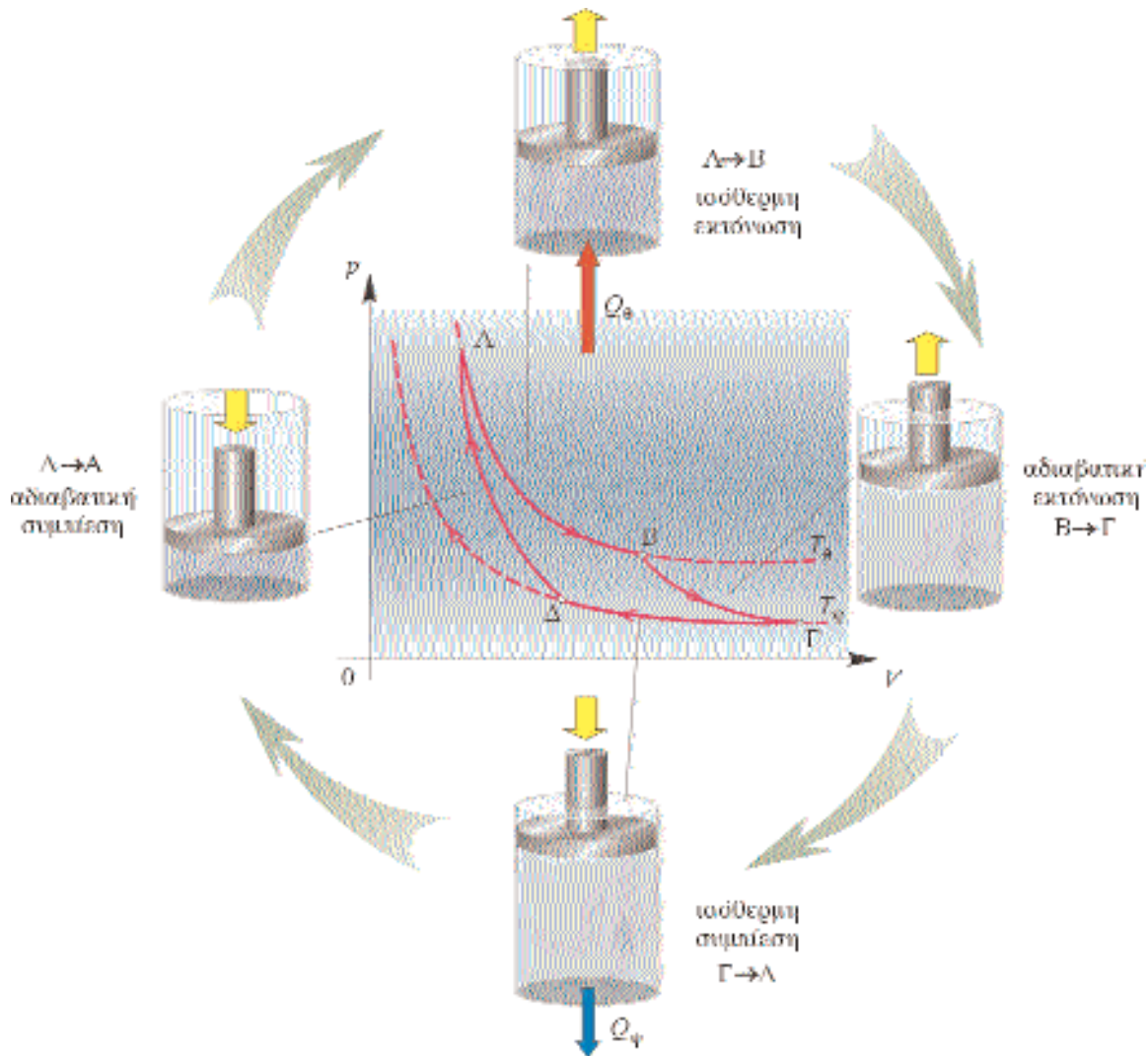
Ο ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ CARNOT

Σύμφωνα με το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα καμμία θερμική μηχανή δεν μπορεί να έχει συντελεστή απόδοσης ίσο με την μονάδα.

Πόσο μεγάλη απόδοση όμως μπορεί να έχει μια θερμική μηχανή, η οποία λειτουργεί μεταξύ δύο θερμοκρασιών T_{θ} και T_{ψ} ; Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τον Γάλλο μηχανικό Sadi Carnot, που ανέπτυξε την αρχή λειτουργίας μιας τέτοιας ιδεατής θερμικής μηχανής, η οποία έχει τον μέγιστο δυνατό συντελεστή απόδοσης και ταυτόχρονα είναι συμβατή με το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα.

Το υλικό της μηχανής Carnot εκτελεί κύκλο (τον κύκλο του Carnot), μεταξύ των θερμοκρασιών T_{θ} και T_{ψ} ($T_{\theta} > T_{\psi}$). Αυτός ο κύκλος αποτελείται από δύο ισόθερμες και δύο αδιαβατικές αντιστρεπτές μεταβολές, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.33.

Η κυκλική διαδικασία αρχίζει από την κατάσταση Α. Το ιδανικό αέριο εκτονώνεται ισόθερμα και λαμβάνει ποσό θερμότητας Q_{θ} , από τη θερμή



ΣΧΗΜΑ 1.33

Ο κύκλος του Carnot.

δεξαμενή, μέχρι να φθάσει στην κατάσταση B.

Από την κατάσταση B εκτονώνεται αδιαβατικά μέχρι την κατάσταση Γ.

Κατά την διαδικασία $B \rightarrow \Gamma$ η θερμοκρασία του αερίου πέφτει από την τιμή T_θ στην τιμή T_ψ .

Στο σημείο αυτό σταματά το στάδιο της εκτόνωσης και αρχίζει το στάδιο της συμπίεσης.

Από την κατάσταση Γ το αέριο συμπιέζεται ισόθερμα μέχρι την κατάσταση Δ, αποδίδοντας στην ψυχρή δεξαμενή ποσό θερμότητας Q_ψ .

Από την κατάσταση Δ το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση Α, μέσω αδιαβατικής συμπίεσης, κλείνοντας τον κύκλο.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ CARNOT

Ο συντελεστής απόδοσης θερμοκίνης μηχανής δίνεται από την (1.44).

$$e = 1 - \frac{|Q_\psi|}{Q_\theta}$$

οπότε για τον υπολογισμό του e αρκεί να υπολογισθούν τα Q_θ και Q_ψ .

Για τις ισόθερμες μεταβολές έχουμε

$$A \rightarrow B \quad Q_\theta = W_{AB} = nRT_\theta \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (1.45)$$

και

$$\Gamma \rightarrow \Delta \quad Q_\psi = W_{\Gamma\Delta} = nRT_\psi \ln \frac{V_\Delta}{V_\Gamma} = -nRT_\psi \ln \frac{V_\Gamma}{V_\Delta} \quad (1.46)$$

Από τις (1.45) και (1.46) παίρνουμε

$$\frac{|Q_\psi|}{Q_\theta} = \frac{T_\psi}{T_\theta} \frac{\ln \frac{V_\Gamma}{V_\Delta}}{\ln \frac{V_B}{V_A}} \quad (1.47)$$

Κατά τις αδιαβατικές μεταβολές, από τη σχέση (1.37), έχουμε

$$B \rightarrow \Gamma \quad T_\theta V_B^{\gamma-1} = T_\psi V_\Gamma^{\gamma-1}$$

$$\Delta \rightarrow A \quad T_\theta V_\Delta^{\gamma-1} = T_\psi V_A^{\gamma-1}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_\Gamma}{V_\Delta}\right)^{\gamma-1} \quad \text{ή}$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_\Gamma}{V_\Delta} \quad (1.48)$$

και

$$\ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{V_\Gamma}{V_\Delta}$$

Η σχέση (1.47) γίνεται

$$\frac{Q_{\psi}}{Q_{\theta}} = \frac{T_{\psi}}{T_{\theta}} \tag{1.49}$$

οπότε

$$e = 1 - \frac{T_{\psi}}{T_{\theta}} = \frac{T_{\theta} - T_{\psi}}{T_{\theta}} \tag{1.50}$$

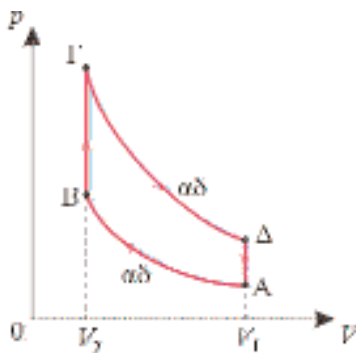
Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει ότι ο συντελεστής απόδοσης στον κύκλο Carnot εξαρτάται μόνο από τις θερμοκρασίες της θερμής και της ψυχρής δεξαμενής και ότι η απόδοση e μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει η διαφορά $T_{\theta} - T_{\psi}$.

Μπορεί να δειχτεί ότι κάθε άλλη θερμική μηχανή, που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών, έχει συντελεστή απόδοσης μικρότερο της μηχανής Carnot ή με άλλα λόγια, η μηχανή Carnot έχει το μέγιστο συντελεστή απόδοσης.

Από την σχέση (1.50) προκύπτει ότι για $T_{\psi} = 0$ είναι $e = 1$. Όμως ψυχρή δεξαμενή σε θερμοκρασία $T_{\psi} = 0$ δεν μπορεί να υπάρξει στην πράξη και συνεπώς είναι πάντα $e < 1$.

Παράδειγμα 1-8

Στο σχήμα 1.34 φαίνεται σε διάγραμμα $p-V$ ο κύκλος του Otto, ο οποίος προσεγγιστικά περιγράφει τον κύκλο βενζινομηχανής εσωτερικής καύσεως. Ο κύκλος αποτελείται από δύο αδιαβατικές και δύο ισόχωρες μεταβολές. Να υπολογισθεί ο συντελεστής απόδοσης του κύκλου του Otto, αν δίνονται οι όγκοι V_1, V_2 και ο λόγος $\gamma = C_p/C_v$ για το αέριο της μηχανής.



ΣΧΗΜΑ 1.34

Ο κύκλος του Otto.

Απάντηση

Υπολογίζουμε τα ποσά θερμότητας, που ανταλλάσσει το αέριο της μηχανής, με τη θερμή και την ψυχρή δεξαμενή στη διάρκεια του κύκλου.

Έχουμε $Q_{AB} = Q_{\Gamma\Delta} = 0$, επομένως

$$Q_{\theta} = Q_{B\Gamma} = nC_v(T_{\Gamma} - T_B)$$

και

$$Q_{\psi} = Q_{\Delta A} = nC_v(T_A - T_{\Delta}) = -nC_v(T_{\Delta} - T_A)$$

Ο συντελεστής απόδοσης είναι

$$e = 1 - \frac{|Q_{\psi}|}{Q_{\theta}} = 1 - \frac{T_{\Delta} - T_A}{T_{\Gamma} - T_B} \tag{I}$$

Από το νόμο του Poisson για τις αδιαβατικές μεταβολές ΓΔ και AB έχουμε αντίστοιχα

$$T_{\Gamma} V_2^{\gamma-1} = T_{\Delta} V_1^{\gamma-1}$$

και

$$T_B V_2^{\gamma-1} = T_A V_1^{\gamma-1}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις

$$V_2^{\gamma-1} (T_{\Gamma} - T_B) = V_1^{\gamma-1} (T_{\Delta} - T_A) \quad \text{ή}$$

$$\frac{T_{\Delta} - T_A}{T_{\Gamma} - T_B} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \quad (\text{II})$$

Από τις (I), (II) καταλήγουμε

$$e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

ΕΝΤΡΟΠΙΑ

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ

Το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα σχετίζεται με την έννοια της εσωτερικής ενέργειας, η οποία είναι καταστατικό μέγεθος. Δηλαδή η τιμή της εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα και όχι από τον τρόπο που οδηγήθηκε σε αυτή την κατάσταση. Όπως θα δούμε και το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα σχετίζεται με ένα καταστατικό μέγεθος, το οποίο το ονομάζουμε εντροπία και συμβολίζεται με S . Η εντροπία ορίστηκε από τον Clausius το 1865 μακροσκοπικά. Στη Στατιστική Μηχανική, που αναπτύχθηκε αργότερα, η εντροπία αποτελεί μέτρο της αταξίας ενός συστήματος.

Θα δούμε τώρα πώς ορίστηκε η εντροπία από τον Clausius.

Θεωρούμε μια ισόθερμη αντιστρεπτή μεταβολή, σε θερμοκρασία T , κατά την οποία το σύστημα ανταλλάσσει ποσό θερμότητας Q , με το περιβάλλον. Η μεταβολή της εντροπίας ΔS του συστήματος ορίζεται ως το πηλίκο

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad (1.51)$$

Σε μια ισόθερμη-αντιστρεπτή μεταβολή ποσότητας ιδανικού αερίου έχουμε $Q = W$, συνεπώς

$$\Delta S = \frac{W}{T} = \frac{nRT \ln \frac{V_2}{V_1}}{T} \quad \text{ή}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1.52)$$

Αν έχουμε μια αντιστρεπτή μεταβολή AB, που δεν είναι ισόθερμη μπορούμε να τη χωρίσουμε σε πολύ μικρές (απειροστές) επιμέρους μεταβολές. Σε κάθε μικρή μεταβολή το σύστημα ανταλλάσσει με το περιβάλλον ποσό θερμότητας ΔQ , υπό σταθερή (πρακτικά) θερμοκρασία T . Η στοιχειώδης μεταβολή της εντροπίας σε μια απειροστή μεταβολή θα είναι $\Delta Q/T$. Για να βρούμε τη μεταβολή της εντροπίας για όλη τη μεταβολή AB, αθροίζουμε τις επιμέρους μεταβολές της, δηλαδή

$$\Delta S = \sum \frac{\Delta Q}{T}$$

Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι σε μια αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή ισχύει $S = \text{σταθ.}$ ή $\Delta S = 0$.

Θεωρούμε τον κύκλο του Carnot του σχήματος 1.33. Η μεταβολή της

εντροπίας για όλο τον κύκλο είναι:

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BF} + \Delta S_{FA} + \Delta S_{AA} \quad \text{ή}$$

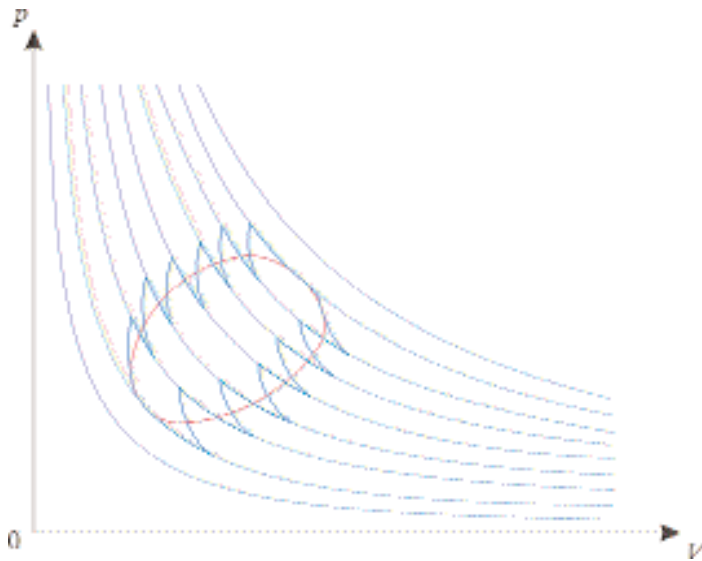
$$\Delta S = \frac{Q_\theta}{T_\theta} + 0 + \frac{Q_\psi}{T_\psi} + 0 \quad \text{ή}$$

$$\Delta S = \frac{Q_\theta}{T_\theta} - \frac{|Q_\psi|}{T_\psi}$$

Αν λάβουμε υπόψη τη σχέση (1.49), καταλήγουμε ότι η μεταβολή της εντροπίας για τον κύκλο του Carnot είναι

$$\Delta S = 0$$

Μια ποσότητα ιδανικού αερίου εκτελεί την κυκλική μεταβολή, που σχεδιάστηκε με κόκκινο χρώμα στο σχήμα 1.35. Η κυκλική μεταβολή προσεγγίζεται από την μεταβολή με το σκούρο μπλε χρώμα, η οποία



ΣΧΗΜΑ 1.35

Κάθε κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή προσεγγίζεται από ένα μεγάλο πλήθος κύκλων Carnot.

δημιουργείται από ένα μεγάλο πλήθος κύκλων Carnot. Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των κύκλων Carnot. Για κάθε κύκλο Carnot είναι $\Delta S = 0$, άρα θα είναι $\Delta S = 0$ και για την κυκλική μεταβολή. Συνεπώς, για οποιαδήποτε κυκλική αντιστρεπτή διεργασία, η μεταβολή της εντροπίας είναι μηδέν.

Θεωρούμε τις μεταβολές ΑΓΒ και ΑΔΒ μιας ποσότητας ιδανικού αερίου από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β (σχήμα 1.36).

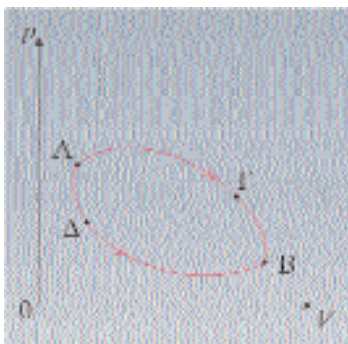
Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω ισχύει

$$\Delta S_{ΑΓΒ} + \Delta S_{ΒΔΑ} = 0 \quad \text{ή}$$

$$\Delta S_{ΑΓΒ} - \Delta S_{ΑΔΒ} = 0 \quad \text{ή}$$

$$\Delta S_{ΑΓΒ} = \Delta S_{ΑΔΒ}$$

Δηλαδή, κατά την μετάβαση ενός συστήματος από μια κατάσταση Α σε μια κατάσταση Β, η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος εξαρτάται από τις καταστάσεις Α και Β, αλλά δεν εξαρτάται από το τρόπο



ΣΧΗΜΑ 1.36

Η μεταβολή της εντροπίας κατά τη μετάβαση αερίου από την κατάσταση Α στην Β είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο μετάβασης.

μετάβασης απ' τη μια κατάσταση στην άλλη.

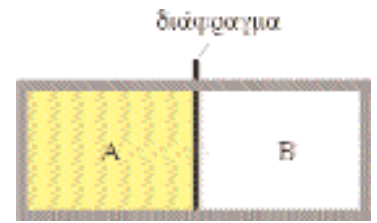
Με τη βοήθεια της τελευταίας πρότασης μπορούμε να υπολογίζουμε τη μεταβολή της εντροπίας και σε μη αντιστρεπτές διεργασίες, αρκεί να ξεκινούν και να καταλήγουν σε καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας.

Ας το δούμε στην περίπτωση της **ελεύθερης εκτόνωσης** αερίου.

Θεωρούμε ένα δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα, το οποίο χωρίζεται με διάφραγμα σε δύο χώρους A, B με όγκους αντίστοιχα V_A , V_B . Στο χώρο A έχουμε μια ποσότητα αερίου, ενώ ο χώρος B είναι κενός. Ανασύρουμε το διάφραγμα, οπότε το αέριο διαχέεται ταχύτατα σε όλο το χώρο. Η παραπάνω μεταβολή είναι μη αντιστρεπτή και το αέριο δεν παράγει έργο, ούτε ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον. Αφού είναι $W = 0$ και $Q = 0$ από το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα προκύπτει ότι και $\Delta U = 0$. Επειδή δεν μεταβάλλεται η εσωτερική ενέργεια του αερίου, δεν μεταβάλλεται και η θερμοκρασία του. Συνεπώς η μεταβολή της εντροπίας κατά την ελεύθερη εκτόνωση θα είναι ίδια με τη μεταβολή της εντροπίας για μια ισόθερμη εκτόνωση του αερίου, από την ίδια αρχική στην ίδια τελική κατάσταση.

Από τη σχέση (1.52) μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_A + V_B}{V_A}$$



ΣΧΗΜΑ 1.37

Αφαιρώντας το διάφραγμα το αέριο εκτονώνεται ελεύθερα.

Η ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΤΟ 2ο ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Σε μια αντιστρεπτή μεταβολή π.χ. μια ισόθερμη εκτόνωση ιδανικού αερίου, (υπάρχει θερμοδυναμική ισορροπία και με το περιβάλλον) η μεταβολή της εντροπίας του αερίου είναι Q/T , ενώ του περιβάλλοντος $-Q/T$, καθότι η θερμότητα Q μεταφέρεται από το περιβάλλον στο αέριο. Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου και του περιβάλλοντος συνολικά είναι μηδέν.

Αυτό δεν μπορεί να συμβεί σε μια φυσική διεργασία, η οποία είναι πάντα μη αντιστρεπτή.

Είδαμε για παράδειγμα στην ελεύθερη εκτόνωση (μη αντιστρεπτή μεταβολή) ότι για το αέριο είναι $\Delta S_1 > 0$, ενώ για το περιβάλλον, επειδή έχουμε θερμομονωτικά τοιχώματα, είναι $\Delta S_2 = 0$. Συνολικά λοιπόν για το αέριο και το περιβάλλον έχουμε αύξηση της εντροπίας.

Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε θεωρώντας την ανταλλαγή μικρού ποσού θερμότητας ΔQ , μεταξύ δύο σωμάτων Σ_1 , Σ_2 , που έχουν θερμοκρασίες T_1 , T_2 με $T_1 > T_2$ ($T_1 - T_2$ πεπερασμένο) και είναι απομονωμένα από το περιβάλλον τους. Το ποσό θερμότητας ΔQ θα μεταφερθεί από το Σ_1 στο Σ_2 . Θεωρώντας ότι πρακτικά οι θερμοκρασίες T_1 , T_2 δεν θα μεταβληθούν έχουμε για το σώμα Σ_1

$$\Delta S_1 = -\frac{\Delta Q}{T_1}$$

και για το Σ_2

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_2}$$

Άρα για το σύστημα των σωμάτων είναι

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1} > 0$$

Μπορούμε και αντίστροφα, ξεκινώντας από την υπόθεση $\Delta S > 0$ να καταλήξουμε ότι η θερμότητα ΔQ θα μεταφερθεί από το Σ_1 στο Σ_2 .

Αν δεν ίσχυε το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα και η μεταφορά θερμότητας γινόταν αυθόρμητα από το Σ_2 προς το Σ_1 , θα είχαμε $\Delta S < 0$. Εύκολα συμπεραίνουμε και το αντίστροφο. Συνεπώς το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα διατυπώνεται και με τη βοήθεια της εντροπίας ως εξής: **Δεν είναι δυνατόν σε μια φυσική μεταβολή να μειωθεί η ολική εντροπία όλων των συστημάτων, που παίρνουν μέρος σ' αυτή τη μεταβολή.**

ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΤΑΞΙΑ

Είπαμε ότι η εντροπία αποτελεί μέτρο της αταξίας ενός συστήματος. Ας το δούμε πιο αναλυτικά. Από τη σχέση (1.51) ή (1.52) διαπιστώνουμε ότι σε μια ισόθερμη εκτόνωση αερίου η εντροπία του αυξάνεται, ενώ σε μια ισόθερμη συμπίεση η εντροπία του μειώνεται. Το αέριο μετά την εκτόνωσή του βρίσκεται σε κατάσταση αυξημένης αταξίας, γιατί τα μόρια κινούνται σε μεγαλύτερο όγκο, έχουν δηλαδή μεγαλύτερη τυχαιότητα, ως προς τη θέση. Με την ίδια λογική το αέριο, όταν συμπιεστεί, μειώνει την αταξία του. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η αύξηση ή η μείωση της εντροπίας συνοδεύεται από την αύξηση ή τη μείωση αντίστοιχα της αταξίας.

Είδαμε ότι μια φυσική διεργασία οδηγεί συνολικά σε αύξηση της εντροπίας των συστημάτων, που παίρνουν μέρος σε αυτή. Μπορούμε πλέον να πούμε ότι κάθε πραγματική φυσική διεργασία οδηγεί σε αύξηση της αταξίας.

Όταν όμως αυξάνεται η αταξία ενός συστήματος, μειώνεται η ικανότητα του για παραγωγή έργου. Ας πάρουμε το παράδειγμα της επαφής δυο σωμάτων διαφορετικής θερμοκρασίας. Γνωρίζουμε ότι θα μεταφερθεί θερμότητα από το θερμό σώμα στο ψυχρό, έως ότου εξισωθούν οι θερμοκρασίες των δύο σωμάτων. Αρχικά το σύστημα έχει μικρότερη αταξία, γιατί είναι διαχωρισμένα τα μόρια σε μια θερμή και μια ψυχρή περιοχή. Δηλαδή σε μια περιοχή με μεγάλη μέση κινητική ενέργεια και σε μια περιοχή με μικρή μέση κινητική ενέργεια. Μετά τη θερμική ισορροπία, αυτή τη ταξινόμηση χάνεται ανεπιστρεπτί, δηλαδή αυξάνει η αταξία του συστήματος των σωμάτων. Πριν την επαφή, τα δύο σώματα μπορούσαν να αποτελέσουν την θερμή και την ψυχρή δεξαμενή μιας θερμικής μηχανής και έτσι να έχουμε παραγωγή έργου. Από την στιγμή της θερμικής ισορροπίας, χάθηκε για πάντα αυτή η ευκαιρία μετατροπής της θερμότητας σε έργο.

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, παρόλο που διατηρείται η ενέργεια του σύμπαντος, αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου η εντροπία και η αταξία του και υποβαθμίζεται η ενέργειά του.

Παράδειγμα 1-9

Να παρασταθεί γραφικά ο κύκλος Carnot, σε διάγραμμα θερμοκρασίας-εντροπίας. Τί παριστάνει το εμβαδό του χωρίου της γραφικής παράστασης που προκύπτει;

Απάντηση

Εκτός των διαγραμμάτων $p-V$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διαγράμματα $T-S$, δηλαδή διαγράμματα σε άξονες απόλυτης θερμοκρασίας T και εντροπίας S . Αυτά ονομάζονται εντροπικά διαγράμματα.

Με τη βοήθεια των εντροπικών διαγραμμάτων, μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα τη θερμότητα, που ανταλλάσσεται σε ορισμένη αντιστρεπτή μεταβολή. Ας θεωρήσουμε μια αντιστρεπτή μεταβολή, που παριστάνεται γραφικά με τη γραμμή AB του σχήματος 1.38. Από τον ορισμό της μεταβολής της εντροπίας

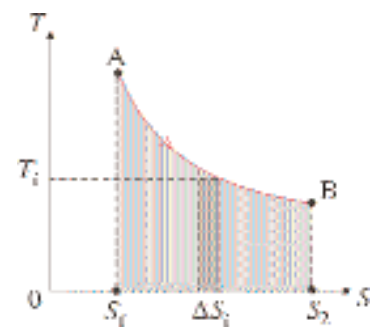
$$\Delta S_i = \frac{\Delta Q_i}{T_i}$$

έχουμε $\Delta Q_i = T_i \Delta S_i$ και επομένως

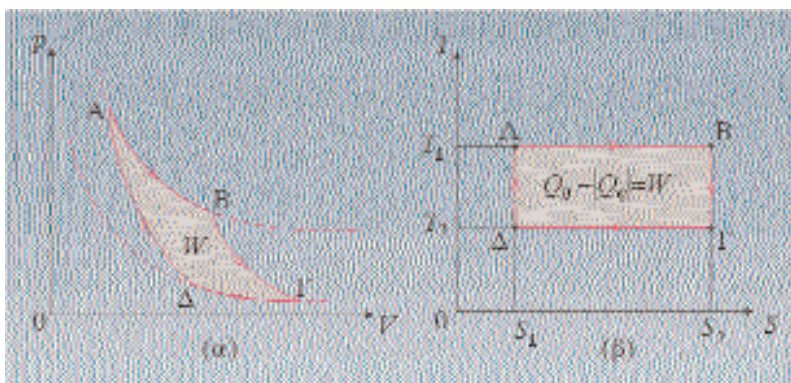
$$Q_{AB} = \sum T_i \Delta S_i$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται μεταξύ της γραμμής της μεταβολής, και του οριζόντιου άξονα της εντροπίας, ανάμεσα στα όρια S_1, S_2 , παρέχει τη θερμότητα που προσφέρεται ή αφαιρείται κατά τη μεταβολή.

Ο κύκλος του Carnot που παριστάνεται σε διάγραμμα $p-V$ στο σχήμα 1.39α, θα έχει σε διάγραμμα $T-S$ τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 1.39β. Η μορφή αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι κατά τις



ΣΧΗΜΑ 1.38



ΣΧΗΜΑ 1.39

(α) Ο κύκλος του Carnot σε διάγραμμα $p-V$. (β) Ο κύκλος του Carnot σε διάγραμμα $T-S$.

ισόθερμες μεταβολές AB και $\Gamma\Delta$ διατηρείται η θερμοκρασία σταθερή, ενώ κατά τις αδιαβατικές $B\Gamma$ και ΔA παραμένει σταθερή η εντροπία.

Προφανώς, το εμβαδόν του χωρίου (ABS_2S_1) παριστάνει το ποσό θερμότητας Q_θ , που λαμβάνει το αέριο, από τη θερμή δεξαμενή κατά την ισόθερμη εκτόνωση $A \rightarrow B$. Όμοια το εμβαδόν του χωρίου $(\Gamma\Delta S_1S_2)$ παριστάνει το ποσό θερμότητας Q_ψ , που αποδίδει το αέριο στην ψυχρή δεξαμενή κατά την ισόθερμη συμπίεση $\Gamma\Delta$. Επομένως, η θερμότητα $Q_\theta - |Q_\psi| = W$, παριστάνεται από το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου $(AB\Gamma\Delta)$. Από τα παραπάνω διαπιστώνομε ότι ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot

$$e = \frac{Q_\theta - |Q_\psi|}{Q_\theta}$$

θα δίνεται από το πηλίκο του εμβαδού (ΑΒΓΔ) δια του εμβαδού (ΑΒS₂S₁).

Παράδειγμα 1-10

Ποσότητα ύλης n (σε mol) ιδανικού αερίου μεταβαίνει από την κατάσταση Α (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση Β (p_2, V_2, T_2).

α) Δείξτε ότι η μεταβολή της εντροπίας του αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta S = nR \left(\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (\text{I})$$

β) Ποιά μορφή παίρνει η παραπάνω σχέση, αν η μεταβολή Α → Β είναι (i) ισόχωρη ή (ii) ισοβαρής.

Απάντηση

α) Επειδή η μεταβολή της εντροπίας δεν εξαρτάται από το τρόπο που θα οδηγηθούμε από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β, επινοούμε εμείς μια διαδικασία. Υποθέτουμε ότι το αέριο εκτονώνεται ισόθερμα από την κατάσταση Α (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση Γ (p_Γ, V_Γ, T_1), ώστε κατόπιν, αδιαβατικά, να επιστρέψει στην κατάσταση Β (p_2, V_2, T_2).

Έχουμε

$$\Delta S = \Delta S_{\text{ΑΓ}} + \Delta S_{\text{ΓΒ}}$$

όμως είναι $\Delta S_{\text{ΓΒ}} = 0$, οπότε

$$\Delta S = \Delta S_{\text{ΑΓ}} = nR \ln \frac{V_\Gamma}{V_1} \quad (\text{II})$$

Από το νόμο του Poisson για τη μεταβολή ΓΒ έχουμε:

$$T_1 V_\Gamma^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{ή}$$

$$V_\Gamma = V_2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{III})$$

Από τις (II) και (III) έχουμε:

$$\Delta S = nR \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right] \quad (\text{IV})$$

Από την (IV) με εφαρμογή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων καταλήγουμε στην (I).

β) (i) Αν η μεταβολή Α → Β είναι ισόχωρη, θα ισχύει $V_1 = V_2$, οπότε η σχέση (I) γίνεται

$$\Delta S = n \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Με τη βοήθεια της (1.40) καταλήγουμε

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (1.54)$$

(ii) Αν η μεταβολή $A \rightarrow B$ είναι ισοβαρής, έχουμε

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

οπότε η σχέση (I) δίνει

$$\Delta S = n \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Με τη βοήθεια της (1.41) καταλήγουμε

$$\Delta S = nC_P \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (1.55)$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ

Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι να ορίσουμε το μέγεθος "εντροπία" με βάση τη Στατιστική θεώρηση.

Ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα, μέσω του οποίου θα βγουν χρήσιμα συμπεράσματα για την κατανόηση της έννοιας της εντροπίας.

Θεωρούμε N μόρια ιδανικού αερίου τα οποία βρίσκονται σε κλειστό κυλινδρικό δοχείο, το οποίο χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη, στο αριστερό μισό (Α) και στο δεξιό μισό (Δ).

Θεωρούμε ακόμη, εντελώς απλουστευτικά, ότι η φυσική μικροκατάσταση (απλώς θα λέμε κατάσταση) του αερίου καθορίζεται από τους αριθμούς των μορίων στα δύο μισά του δοχείου, και αυτή η κατάσταση συμβολίζεται με:

$$(N_{1A}; N_{2\Delta})$$

όπου N_{1A} είναι τα N_1 μόρια αριστερά και $N_{2\Delta}$ είναι τα N_2 μόρια δεξιά με

$$N_1 + N_2 = N$$

Ας θεωρήσουμε όλα τα δυνατά μοιράσματα των N μορίων στα δύο μισά του δοχείου. Εφ' όσον τα μόρια διαφέρουν το ένα από το άλλο, τα ορίζουμε με χρώματα. Κάθε κατάσταση μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα ή περισσότερους τρόπους, όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Όπως φαίνεται από τον πίνακα, καθώς ο αριθμός N των μορίων αυξάνει, αυξάνει σημαντικά το πλήθος των Ω τρόπων για την πραγματοποίηση της κατάστασης $(\{N/2\}_A; \{N/2\}_\Delta)$, δηλαδή μισά μόρια αριστερά μισά δεξιά.

Αριθμός μορίων	Όνομα κατάστασης	Παραστατικές απεικονίσεις καταστάσεων	Πλήθος τρόπων πραγματοποίησης κάθε κατάστασης	Συνολικό πλήθος τρόπων πραγματοποίησης κάθε κατάστασης
N-1	(1 _A ; ∅ _Δ)		1	2-2 ^N (2 ^N για N-1)
	(∅ _A ; 1 _Δ)		1	
N-2	(2 _A ; ∅ _Δ)		1	4-2 ² (2 ^N για N-2)
	(1 _A ; 1 _Δ)		2	
N-3	(∅ _A ; 2 _Δ)		1	8-2 ³ (2 ^N για N-3)
	(1 _A ; 2 _Δ)		3	
	(∅ _A ; 3 _Δ)		1	
N-4	(4 _A ; ∅ _Δ)		1	16-2 ⁴ (2 ^N για N-4)
	(3 _A ; 1 _Δ)		4	
	(2 _A ; 2 _Δ)		6	
	(1 _A ; 3 _Δ)		4	
	(∅ _A ; 4 _Δ)		1	

Σημείωση: Το σύμβολο ∅_A σημαίνει κανένα μόριο αριστερά και το σύμβολο ∅_Δ σημαίνει κανένα μόριο δεξιά.

Αν πάρουμε για N = N_A, όπου N_A ≈ 6 × 10²³ (σταθερά Avogadro), τότε οι τρόποι που πραγματοποιείται η κατάσταση

$$\left(\left\{ \frac{N}{2} \right\}_A ; \left\{ \frac{N}{2} \right\}_\Delta \right)$$

είναι ένας τεράστιος αριθμός, σε σύγκριση με τον ένα και μοναδικό τρόπο που πραγματοποιείται η κατάσταση (∅_A; {N_A}_Δ) ή η κατάσταση ({N_A}_A; ∅_Δ).

Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι καταστάσεις είναι το ίδιο πιθανές να συμβούν για δεδομένο αριθμό μορίων N, τότε το αέριο είναι πολύ πιο πιθανό να βρεθεί στην κατάσταση εκείνη, η οποία θα πραγματοποιείται με τους πιο πολλούς τρόπους.

Έτσι λοιπόν για N = 4 έχουμε τις 5 δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί το αέριο δηλ.

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} (4_A; \emptyset_\Delta) \\ \text{ή} \\ (\emptyset_A; 4_\Delta) \end{array} \right\} \text{ 1 τρόπος πραγματοποίησης } \rightarrow \text{ απίθανο να πραγματοποιηθεί}$$

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{l} (3_A; 1_\Delta) \\ \text{ή} \\ (1_A; 3_\Delta) \end{array} \right\} \text{ 4 τρόποι πραγματοποίησης } \rightarrow \text{ περισσότερο πιθανό να πραγματοποιηθεί σε σύγκριση με την } (\alpha)$$

(γ) $(2_A; 2_\Delta)$ 6 τρόποι πραγματοποίησης \rightarrow πιθανότερη όλων να πραγματοποιηθεί σε σύγκριση με τις (α) και (β).

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας, για το πόσο πιθανό είναι να πραγματοποιηθεί μια κατάσταση, μπορούμε να δώσουμε τους εξής ορισμούς

1. *Κατάσταση με τάξη*: είναι αυτή που πραγματοποιείται με ένα μόνο τρόπο

2. *Κατάσταση με πλήρη αταξία*: είναι αυτή που πραγματοποιείται με το μέγιστο πλήθος των τρόπων.

Επομένως, ο βαθμός αταξίας μιας κατάστασης του αερίου εξαρτάται από το πλήθος των τρόπων που πραγματοποιείται αυτή η κατάσταση. Το φυσικό μέγεθος που θέλουμε να εισάγουμε και το οποίο θα μετρά την αταξία μιας κατάστασης του αερίου, θα πρέπει να εξαρτάται από το πλήθος των τρόπων που πραγματοποιείται αυτή η κατάσταση.

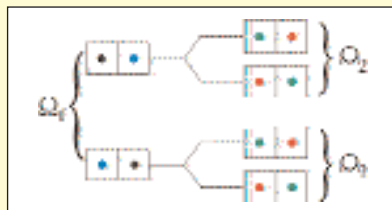
Αν ονομάσουμε Ω το πλήθος των τρόπων πραγματοποίησης μιας κατάστασης του αερίου, μια πρώτη σκέψη θα ήταν να ορίσουμε αυτό το φυσικό μέγεθος ανάλογο του Ω

$$\text{δηλ. } S \propto \Omega$$

Ο ορισμός της εντροπίας θα πρέπει να συμβιβάζεται με την προσθετική ιδιότητα της εντροπίας. Αν έχουμε δηλαδή ένα σύνθετο σύστημα που αποτελείται από δύο άλλα συστήματα, η μεταβολή της εντροπίας του σύνθετου συστήματος, θα πρέπει να είναι το άθροισμα των μεταβολών των εντροπιών των επί μέρους συστημάτων ή το άθροισμα των εντροπιών των δύο συστημάτων, δίνει την εντροπία του συνθέτου συστήματος.

Εφ' όσον προσπαθούμε να ορίσουμε την εντροπία μέσω του παραδείγματος του δοχείου που περιέχει N μόρια, ας θεωρήσουμε δύο συστήματα ως εξής:

Θεωρούμε ότι έχουμε δύο δοχεία τα οποία περιέχουν, το ένα ένα "μαύρο" και ένα "μπλέ" μόριο και το άλλο, ένα "κόκκινο" και ένα "πράσινο" μόριο και βρίσκονται και τα δύο στην κατάσταση $(1_A; 1_\Delta)$, δηλαδή σχηματικά έχουμε



Αν θεωρήσουμε τα δύο δοχεία σαν ένα σύνθετο σύστημα τότε αυτό μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις 4 προηγούμενες καταστάσεις, για τις οποίες γράφουμε:

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2$$

όπου $\Omega_1 = 2$ και $\Omega_2 = 2$.

Η εντροπία του σύνθετου συστήματος S , σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, θα ήταν

$$S = S_1 S_2$$

Η σχέση αυτή έρχεται σε αντίθεση με την προσθετική ιδιότητα της εντροπίας οπότε θα πρέπει να τροποποιήσουμε τον ορισμό για να είναι συμβατός με την ιδιότητα αυτή. Αν λοιπόν ορίσουμε την εντροπία S ως

$$S = k \ln \Omega$$

τότε η εντροπία ενός σύνθετου συστήματος γράφεται σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα ως

$$S = k \ln \Omega = k \ln (\Omega_1 \Omega_2) = k (\ln \Omega_1 + \ln \Omega_2) = k \ln \Omega_1 + k \ln \Omega_2$$

οπότε

$$S = S_1 + S_2$$

Συνεπώς η συνάρτηση $\ln \Omega$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε αναφέρει καθόλου για το πώς επηρεάζεται το πλήθος Ω από ενεργειακούς παράγοντες που μπορεί να χαρακτηρίζουν την φυσική κατάσταση του αερίου.

Ας υποθέσουμε ότι στην κατάσταση $(2_A; 2_\Delta)$ για $N = 4$, όταν βρεθούν το "κόκκινο" και το "μπλε" μόριο μαζί στο ίδιο μισό του δοχείου δεν μπορούν να συνυπάρξουν, λόγω αμοιβαίας άπωσης. Για να μπορέσουν να βρεθούν μαζί, θα πρέπει να πάρουν ενέργεια από το αέριο. Αν το αέριο έχει να δώσει αυτή την ενέργεια, τότε τα δύο μόρια θα μπορέσουν να βρεθούν μαζί, οπότε θα πραγματοποιηθούν και οι 6 τρόποι της κατάστασης $(2_A; 2_\Delta)$.

Αν το αέριο δεν διαθέτει την ενέργεια αυτή, τότε δεν πρόκειται να πραγματοποιηθούν οι καταστάσεις



δηλ. από τους 6 τρόπους που μπορεί να πραγματοποιηθεί η κατάσταση $(2_A; 2_\Delta)$ μόνο οι 4 επιτρέπονται.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πλήθος Ω εξαρτάται από την ενέργεια του συστήματος, οπότε γράφουμε την γενική σχέση για την εντροπία ως

$$S = k \ln \Omega(E) \quad (1.44)$$

Η σταθερά αναλογίας k είναι η σταθερά Boltzmann.

Αύξηση Εντροπίας σε μια μη Αντιστρεπτή Μεταβολή

Στην περίπτωση $N = 4$ του παραδείγματός μας, θεωρούμε τις καταστάσεις $(4_A; 0_\Delta)$ και $(2_A; 2_\Delta)$. Η $(4_A; 0_\Delta)$ αντιπροσωπεύει μια κατάσταση στην οποία υπάρχει "τάξη" σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, ότι δηλαδή πραγματοποιείται με ένα και μόνο τρόπο. Έτσι, λοιπόν, η εντροπία αυτής της κατάστασης είναι

$$S_{\tau\acute{\alpha}\xi\eta} = k \ln 1 = 0$$

Η $(2_A; 2_\Delta)$ αντιπροσωπεύει μια κατάσταση στην οποία επικρατεί πλήρως αταξία, γιατί πραγματοποιείται με τον μέγιστο αριθμό τρόπων από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Η εντροπία της κατάστασης αυτής είναι:

$$S_{\alpha\tau\alpha\xi\acute{\alpha}} = k \ln 6 > 0$$

Από αυτές έχουμε ότι:

$$\Delta S = S_{\alpha\tau\alpha\xi\acute{\alpha}} - S_{\tau\acute{\alpha}\xi\eta} > 0$$

Η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί, αφ' ενός μεν στην υπενθύμιση της έννοιας της μη-αντιστρεπτής μεταβολής και αφ' ετέρου σε μια άλλη διατύπωση του 2ου θερμοδυναμικού αξιώματος.

Όσον αφορά την έννοια της μη-αντιστρεπτής μεταβολής, μπορούν να ειπωθούν τα εξής:

Αν περιορίσουμε με ένα διάφραγμα τα 4 μόρια στο αριστερό μισό του δοχείου, τότε δημιουργούμε μια κατάσταση τάξης, ενώ, αν βγάλουμε το διάφραγμα τότε τα μόρια θα μετακινηθούν δεξιά-αριστερά, έτσι ώστε να έχουμε πλήρη αταξία, χωρίς τάση να συσσωρευτούν μόνο δεξιά ή μόνο αριστερά.

Αυτό σημαίνει ότι είναι απίθανο να δούμε όλα τα μόρια από μόνα τους να μαζευτούν π.χ. αριστερά, οπότε η αρχική κατάσταση σχεδόν ποτέ δεν πραγματοποιείται. Η φράση "σχεδόν ποτέ δεν πραγματοποιείται" είναι η ουσία της μη-αντιστρεπτής μεταβολής.

Η σχέση $\Delta S \geq 0$ μας οδηγεί στο να διατυπώσουμε το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα ως εξής.

"Σε κλειστό απομονωμένο σύστημα, η εντροπία του είτε αυξάνεται είτε μένει σταθερή".

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗΣ (1872-1950)



Γεννήθηκε στο Βερολίνο από γονείς Έλληνες και πέθανε στο Μόναχο.

Αρχικά σπούδασε Πολιτικός Μηχανικός, αλλά η αγάπη του προς τα Μαθηματικά τον οδήγησε να αφήσει το επάγγελμα του Μηχανικού και να συνεχίσει τις σπουδές και να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά. Κατέλαβε διάφορες πανεπιστημιακές θέσεις σε εξέχοντα πανεπιστήμια της Ευρώπης. Το 1920 πήγε στη Σμύρνη για να οργανώσει το

Πανεπιστήμιο της Σμύρνης. Το 1922, μετά τη Μικρασιατική Καταστροφή, ήρθε στην Ελλάδα, ως καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και στο Ε. Μ. Πολυτεχνείο, όπου έμεινε ως το 1924. Το 1924 έγινε Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, όπου παρέμεινε μέχρι το θάνατό του.

Οι εργασίες του καλύπτουν διάφορες περιοχές των Μαθηματικών και της Φυσικής. Οι περιοχές των Μαθηματικών είναι, Λογισμός Μεταβολών, Θεωρία Συναρτήσεων, Θεωρία Μέτρου και Ολοκληρώματα καθώς και εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Στη Φυσική έχει κάνει εργασίες που σχετίζονται με αξιωματική μαθηματική θεμελίωση. Οι εργασίες είναι στην περιοχή της Μηχανικής, συμπεριλαμβανομένης και της ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, της Θερμοδυναμικής και επίσης της Γεωμετρικής Οπτικής. Από τις σημαντικότερες είναι αυτές που θεμελιώνουν αυστηρά την Κλασική Θερμοδυναμική (1909, 1922). Άλλη εργασία του θεμελιώνει αξιωματικά την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (1924). Οι εργασίες του στη Γεωμετρική Οπτική κάνουν χρήση και αξιοποιούν την αρχή του ελαχίστου χρόνου και έχουν πρακτικές εφαρμογές σε κατασκευές οπτικών οργάνων.



Ο “ανεμόμυλος” αυτός μετατρέπει την κινητική ενέργεια του ανέμου σε ηλεκτρική.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Ο σύγχρονος πολιτισμός στηρίζεται όσο κανείς προηγούμενος στη χρήση ενέργειας. Για οικιακή χρήση πολύ πρακτική είναι η χρήση της ηλεκτρικής ενέργειας, στην οποία χρειάζεται να μετατραπούν άλλες μορφές ενέργειας.

Οι πηγές που απαντούν στη φύση και λέγονται **πρωτογενείς πηγές** μπορούν να χωριστούν σε δυό κατηγορίες.

α) Περιορισμένες πηγές. Αυτές περιλαμβάνουν τα καύσιμα απολιθωμάτων, διάφορες μορφές ορυκτού κάρβουνου, πετρέλαιο και φυσικό αέριο, που σχηματίστηκαν από την απολίθωση υπολειμμάτων φυτικών και ζωικών οργανισμών. Αυτοί θάφτηκαν μέσα στη γη πριν 600 εκατ. χρόνια και υπάρχουν σε περιορισμένη ποσότητα, που δεν ανανεώνεται. Οι εκτιμήσεις είναι ότι τα αποθέματα πετρελαίου και του φυσικού αερίου θα αρχίσουν να μειώνονται σε ανησυχητικό επίπεδο μέσα στον 21ο αιώνα. Τα αποθέματα ορυκτού κάρβουνου θα διαρκέσουν για περίπου 200 χρόνια ακόμη. Τα αποθέματα πυρηνικών καυσίμων, όπως το ουράνιο προς το παρόν φαίνεται ότι θα υπάρχουν για περίπου 100 χρόνια.

β) Ανανεώσιμες πηγές - Ανεξάντλητες πηγές.

Αυτές είναι πηγές ενέργειας που δεν εξαντλούνται. Τέτοιες είναι η ηλιακή ενέργεια, τα βιοκαύσιμα, η υδροηλεκτρική ενέργεια, η αιολική ενέργεια και η ενέργεια υδατικών κυμάτων. Όλες αυτές στηρίζονται στον ήλιο. Επίσης υπάρχουν η παλιρροϊκή και γεωθερμική που δεν

στηρίζονται στον ήλιο, παρ' όλο που ο ήλιος έχει κάποια σχέση με τις παλίρροιας.

Γίνονται συνεχώς προσπάθειες να γίνει εκμετάλλευση ανανεώσιμων-ανεξάντλητων πηγών ενέργειας, προτού τα συμβατικά καύσιμα εξαντληθούν. Στην Ελλάδα υπάρχουν σταθμοί ηλεκτροπαραγωγής με φωτοβολταϊκά στοιχεία που μετατρέπουν την ηλιακή ενέργεια κατευθείαν σε ηλεκτρική. Υπάρχουν από χρόνια τώρα υδροηλεκτρικά εργοστάσια. Υπάρχουν αιολικές εγκαταστάσεις όπου με κατάλληλους “ανεμόμυλους” γίνεται μετατροπή της κινητικής ενέργειας του ανέμου σε ηλεκτρική.

Ακόμη πάρα πολλά νοικοκυριά εκμεταλλεύονται τη μεγάλη ηλιοφάνεια και χρησιμοποιούν ηλιακούς θερμοσίφωνες. Για εξοικονόμηση ενέργειας, τα εργοστάσια κατασκευής ηλεκτρικών συσκευών πρέπει να φροντίζουν κατά τον χειμώνα για την καλή θερμομόνωση και εκμετάλλευση της ηλιοφάνειας με κατάλληλους προσανατολισμούς των οικιών, ώστε να μην κατεβαίνει πολύ η θερμοκρασία στο εσωτερικό τους, οπότε να χρειάζονται μεγάλες ποσότητες ενέργειας για θέρμανση.

Πολλές από τις ανανεώσιμες μορφές ενέργειας δεν είναι ακόμη δυνατόν να αξιοποιηθούν, λόγω μεγάλου κόστους παραγωγής και μετατροπής σε εύχρηστες μορφές ενέργειας. Στο μέλλον όμως, με την ανάπτυξη της επιστήμης και της τεχνολογίας πολλές τέτοιες μορφές θα μπουν περισσότερο στην υπηρεσία του ανθρώπου.

Βασικό στοιχείο που πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη, κατά την μετατροπή των πρωτογενών μορφών ενέργειας σε μορφές όπως η ηλεκτρική, η οποία χρησιμοποιείται ευκολότερα και άμεσα από τον άνθρωπο, είναι οι επιπτώσεις στο περιβάλλον. Μια καταστροφή ενός φράγματος έχει μεγάλες επιπτώσεις αλλά ακόμη και η κατασκευή ενός φράγματος, πρέπει να γίνεται μετά από περιβαλλοντική μελέτη.

Το ίδιο ισχύει για συμβατικά εργοστάσια ηλεκτροπαραγωγής που λειτουργούν με ορυκτό άνθρακα ή με πετρέλαιο και εκπέμπουν διάφορους ρύπους. Πάντα, όλοι μας έχουμε το φόβο του πυρηνικού ατυχήματος που το φανταζόμαστε αόρατο σαν φάντασμα. Το θέμα ενέργεια δεν είναι απλό και αφορά όλους μας. Οι τεχνικοί και επιστήμονες πρέπει να εργάζονται συνεχώς προς την κατεύθυνση της εκμετάλλευσης των πρωτογενών πηγών ενέργειας, με το λιγότερο οικονομικό και περιβαλλοντολογικό κόστος.



Η Δ.Ε.Η. έχει δημιουργήσει σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με φωτοβολταϊκά στοιχεία, όπως φαίνεται στη διπλανή φωτογραφία.

Α Ν Α Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ω Σ Η

□ Ένα αέριο βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, όταν οι τιμές της πίεσης, της θερμοκρασίας και της πυκνότητας είναι οι ίδιες σε όλη την έκταση του όγκου του αερίου. Εννοείται ότι το αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και με το περιβάλλον του.

□ Μια μεταβολή ονομάζεται αντιστρεπτή, όταν το σύστημα μεταβαίνει από την αρχική στην τελική κατάσταση, δια μέσου διαδοχικών καταστάσεων ισορροπίας.

□ Εσωτερική ενέργεια U ενός συστήματος είναι το άθροισμα όλων των κινητικών και δυναμικών ενεργειών των σωματιδίων που το αποτελούν. Η εσωτερική ενέργεια αερίου είναι ανάλογη της μάζας και της θερμοκρασίας του. Η εσωτερική ενέργεια είναι καταστατικό μέγεθος. Δεν λαμβάνεται υπόψη η ενέργεια ένεκα μακροσκοπικής κίνησης του συστήματος.

□ Το έργο κατά την εκτόνωση αερίου υπολογίζεται από τη σχέση

$$W = \sum p \Delta V$$

και παριστάνεται από το εμβαδόν που περικλείεται από το γράφημα της μεταβολής σε διάγραμμα $p-V$ και τον άξονα των όγκων.

□ Η μαθηματική διατύπωση του 1ου θερμοδυναμικού αξιώματος είναι

$$Q = \Delta U + W$$

□ Η εσωτερική ενέργεια μιας ποσότητας ιδανικού αερίου, υπολογίζεται από το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας, ως εξής

$$U = \frac{f}{2} NKT = \frac{f}{2} nRT = \frac{f}{2} pV$$

□ Η θερμότητα, που ανταλλάσσει μια ποσότητα αερίου με το περιβάλλον, σε μια

ισόχωρη ή σε μια ισοβαρή μεταβολή, δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$Q = n C_V \Delta T \quad \text{ή} \quad Q = n C_P \Delta T$$

□ Η σχέση μεταξύ C_P και C_V είναι:

$$C_P = C_V + R$$

□ Τα C_P , C_V και $\gamma = C_P/C_V$ υπολογίζονται απ' τις σχέσεις

$$C_V = \frac{f}{2} R, \quad C_P = \frac{f+2}{2} R, \quad \gamma = \frac{f+2}{f}$$

□ Ο νόμος του Poisson, που ισχύει σε μια αδιαβατική μεταβολή, είναι

$$PV^\gamma = \text{σταθ.}$$

□ Ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής είναι

$$e = \frac{W}{Q_\theta} = 1 - \frac{|Q_\psi|}{Q_\theta}$$

□ Οι διατυπώσεις του 2ου θερμοδυναμικού αξιώματος είναι:

Kelvin - Planck:

Είναι αδύνατο οποιοδήποτε σύστημα να απορροφήσει θερμότητα από σώμα ορισμένης θερμοκρασίας και να την μετατρέψει όλη σε έργο, εκτελώντας κυκλική μεταβολή.

Clausius:

Είναι αδύνατο, χωρίς δαπάνη ενέργειας, να μεταφερθεί θερμότητα από ένα σώμα προς άλλο σώμα ψηλότερης θερμοκρασίας.

□ Η μηχανή Carnot είναι η μηχανή μεγίστης αποδόσεως μεταξύ των θερμοκρασιών T_ψ και T_θ . Ο συντελεστής απόδοσης αυτής της μηχανής είναι

$$e = 1 - \frac{T_\psi}{T_\theta}$$

□ Η μεταβολή της εντροπίας σε μια αντιστρεπτή μεταβολή υπολογίζεται απ' τη σχέση:

$$\Delta S = \sum \frac{\Delta Q}{T}$$

□ Για μια ισόθερμη μεταβολή έχουμε:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

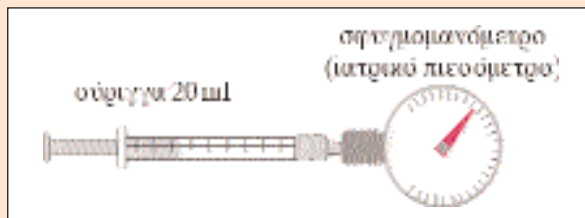
□ Η αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή είναι ισηντροπική, δηλαδή ισχύει $\Delta S = 0$.

□ Η εντροπία είναι καταστατικό μέγεθος και αποτελεί μέτρο της αταξίας ενός συστήματος. Όσο αυξάνεται η εντροπία ενός συστήματος τόσο μειώνεται η ικανότητά του για παραγωγή έργου.

□ Το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα διατυπώνεται με τη βοήθεια της εντροπίας, ως εξής: Είναι αδύνατο σε μια φυσική διεργασία να μειωθεί η ολική εντροπία των συστημάτων που παίρνουν μέρος σε αυτή.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. ΕΡΓΟ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΠΙΕΣΗ ΑΕΡΙΟΥ



Προσαρμόστε ένα σφηνγομανόμετρο (ιατρικό πιεσόμετρο) στο στόμιο μιας σύριγγας των 20 mL. Φροντίστε, ώστε ο όγκος του εγκλωβισμένου στη σύριγγα αέρα να είναι $V_0 = 20 \text{ mL}$ και η πίεσή του, όσο η ατμοσφαιρική p_0 , δηλαδή το μανόμετρο και δείχνει μηδέν. Συμπιέστε αργά τον αέρα και ανά 1 mL μετρείστε την πίεση του αέρα. Μην ξεχνάτε ότι στην πίεση που δείχνει το μανόμετρο πρέπει να προσθέτετε και την ατμοσφαιρική, την οποία μετράτε με ένα βαρόμετρο. Αν δεν έχετε βαρόμετρο, υποθέσετε $P_0 = 760 \text{ mmHg}$. Σταματείστε τις μετρήσεις, μόλις φθάσει το μανόμετρο στη μέγιστη ένδειξή του.

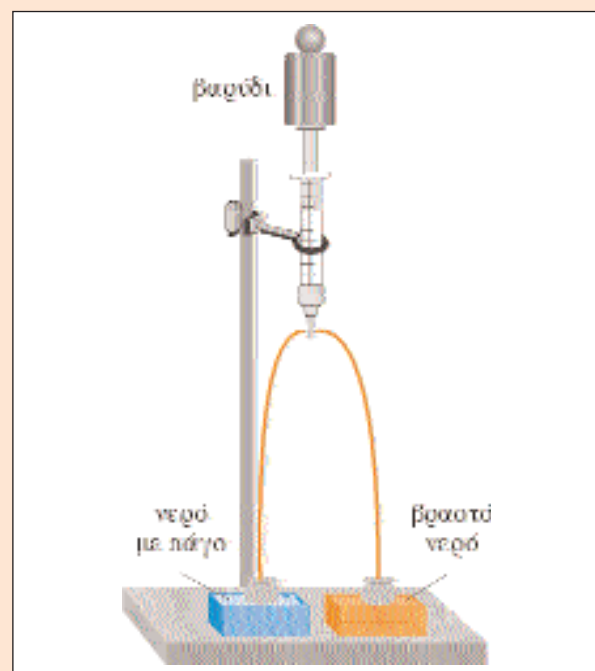
Κατασκευάστε το διάγραμμα $p-V$ για τη μεταβολή του αέρα. Ποιά, απ' τις γνωστές μεταβολές εκτέλεσε (πρακτικά) ο αέρας της σύριγγας;

Υπολογίστε προσεγγιστικά με εμβαδομέτρηση από το διάγραμμα $p-V$ το έργο για τη συμπίεση του αέρα.

Υπολογίστε το έργο και θεωρητικά από τον τύπο που αντιστοιχεί στη μεταβολή που νομίζετε ότι εκτέλεσε ο αέρας. Συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

2. ΑΡΧΗ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΗΣ

Πάρτε δύο μπουκαλάκια Α, Β (π.χ. από αντιβηχικό σιρόπι), μια σύριγγα πλαστική των 60 mL, διακόπτη τριών θέσεων και σωληνάκια από όρο. Στηρίξτε τη σύριγγα σε ορθοστάτη, όπως στο σχήμα, και



προσαρμόστε το διακόπτη στο στόμιό της. Συνδέστε τις δύο διόδους του διακόπτη με σωληνάκια, των οποίων τα άλλα άκρα περνούν από φελλούς, με τους οποίους έχετε πωματίσει τα μπουκαλάκια Α, Β. Αρχικά ο διακόπτης είναι στη θέση στην οποία επικοινωνεί ο αέρας της σύριγγας με τον αέρα που είναι εγκλωβισμένος και στα δύο μπουκαλάκια.

Κατασκευάστε ένα βαρύδι γμιζοντας ένα κυλινδρικό κουτάκι από φιλμ με κέρματα (καποστάρια). Αρχικά, φροντίστε ώστε ο εγκλωβισμένος αέρας στη σύριγγα να είναι 40 mL.

Ακολουθήστε κατόπιν τα εξής βήματα:

(i) απομονώστε με το διακόπτη το μπουκαλάκι Β και τοποθετήστε το Α μέσα σε κατσαρόλα, στην οποία υπάρχει νερό με πάγο (περίπου 0°C) και περιμένετε να κατέβει το έμβολο της σύριγγας.

(ii) Τοποθετήστε το βαρύδι πάνω στο έμβολο της σύριγγας και περιμένετε να κατέβει κι άλλο το έμβολο.

(iii) Απομονώστε το μπουκαλάκι Α και βάλτε το Β σε κατσαρόλα που έχει νερό, το οποίο προηγουμένως είχατε βράσει (περίπου 90°C). Περιμένετε να ανέβει το έμβολο μαζί με το βαρύδι.

(iv) Βγάλτε το βαρύδι από το έμβολο και περιμένετε να ανέβει το έμβολο κι άλλο.

Εξηγήστε αναλυτικά, γιατί το σύστημα που κατασκευάσατε αποτελεί την αρχή λειτουργίας μιας θερμικής μηχανής. Αναφέρατε τις ενεργειακές μετατροπές που συμβαίνουν

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Μέσα σε δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα υπάρχει ατμοσφαιρικός αέρας και ένα αναμμένο κερί. Για κάποιο χρονικό διάστημα πριν σβήσει το κερί, η εσωτερική ενέργεια του συστήματος αέρας - κερί, που περιέχεται στο δοχείο

- (α) παραμένει ίδια
 - (β) αυξάνεται
 - (γ) μειώνεται
- και γιατί;

2

Το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα είναι ισοδύναμο με

- (α) την αρχή διατήρησης της ορμής.
- (β) την αρχή διατήρησης του φορτίου.
- (γ) την αρχή διατήρησης της ενέργειας.
- (δ) τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.

3

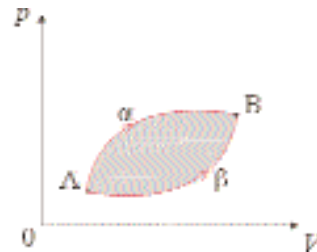
Σε μια διεργασία ένα θερμοδυναμικό σύστημα απορροφά θερμότητα $Q = 1000 \text{ J}$ και παράγει

έργο $W = 600 \text{ J}$. Η εσωτερική ενέργεια του συστήματος

- (α) αυξάνεται κατά 1600 J.
- (β) αυξάνεται κατά 400 J.
- (γ) μειώνεται κατά 1600 J.
- (δ) μειώνεται κατά 400 J.

4

Ιδανικό αέριο μεταβαίνει από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α στην Β,



εκτελώντας την αντιστρεπτή μεταβολή α ή την β, που φαίνεται στο διάγραμμα $p-V$ του σχήματος. Ποιά/ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή/σωστές.

- (α) Το αέριο παράγει το ίδιο έργο, όποια απ' τις δύο μεταβολές και αν εκτελέσει.
- (β) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας τους αερίου είναι ίδια, όποια απ' τις δύο μεταβολές και αν εκτελέσει.
- (γ) Η θερμότητα που απορροφά το αέριο κατά την μεταβολή α είναι μεγαλύτερη από την θερμότητα που απορροφά κατά την μεταβολή β.

5

Ιδανικό αέριο διπλασιάζει τον όγκο του (α) ισοβαρώς ή (β) ισόθερμα ή (γ) αδιαβατικά. Να παρασταθούν στο ίδιο σύστημα αξόνων $p-V$ οι παραπάνω αντιστρεπτές μεταβολές.

Σε ποιά περίπτωση το αέριο παράγει περισσότερο και σε ποιά λιγότερο έργο.

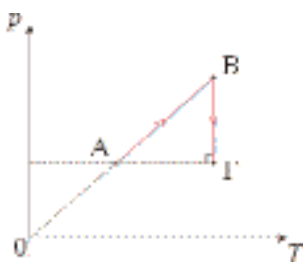
6

Το ίδιο αέριο εκτελεί δύο ισοβαρείς εκτονώσεις μεταξύ των ίδιων ισοθέρων T_1, T_2 . Κατά την πρώτη εκτόνωση η πίεση είναι P_1 και το παραγόμενο έργο W_1 , ενώ κατά τη δεύτερη εκτόνωση το έργο είναι W_2 και η πίεση $P_2 = 2P_1$. Για τα έργα W_1, W_2 ισχύει

- (α) $W_1 = 2W_2$
- (β) $W_1 = W_2/2$
- (γ) $W_1 = W_2/4$
- (δ) $W_1 = W_2$

7

Αέριο εκτελεί διαδοχικά τις μεταβολές AB και ΒΓ, που παριστάνονται στο διάγραμμα $p-T$ του σχήματος.

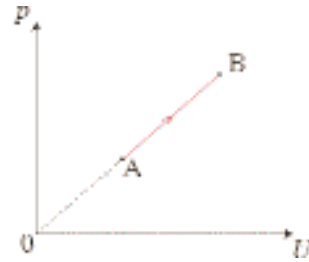


Να αντιστοιχίσετε τις μεταβολές της στήλης (Α) με τα ονόματα μεταβολών της στήλης (Β) (περισσεύει μία).

- | | |
|----------|---------------|
| <u>A</u> | <u>B</u> |
| 1. AB | α. ισοθερμη |
| 2. ΒΓ | β. ισόχωρη |
| | γ. αδιαβατική |

8

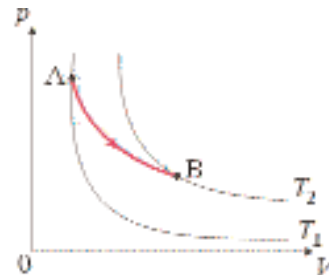
Η μεταβολή AB ενός αερίου που παριστάνεται στο διάγραμμα πίεσης-εσωτερικής ενέργειας ($p-U$) του σχήματος είναι



- (α) ισόχωρη.
- (β) αδιαβατική.
- (γ) ισόθερμη.
- (δ) ισοβαρής.

9

Η αντιστρεπτή μεταβολή AB, που παριστάνεται στο διάγραμμα $p-V$ του σχήματος μπορεί να



είναι αδιαβατική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

10

Ιδανικό αέριο εκτονώνεται αδιαβατικά και παράγει έργο W_1 . Στη συνέχεια απορροφά, ισόχωρα, θερμότητα $Q_2 = W_1$. Δείξτε ότι το αέριο αποκτά την αρχική του θερμοκρασία.

11

Πώς μπορείτε

- (α) να θερμάνετε ένα αέριο, χωρίς να του προσφέρετε θερμότητα;
- (β) να προσφέρετε σ' ένα αέριο θερμότητα, χωρίς να αυξηθεί η θερμοκρασία του;

12

Ενώ ορίσαμε την ειδική θερμοχωρητικότητα για ισόχωρη και ισοβαρή μεταβολή, δεν την ορίσαμε για ισόθερμη ή αδιαβατική μεταβολή. Δώστε μια εξήγηση.

13

Φανταστείτε ένα δωμάτιο με θερμομονωτικά τοιχώματα, μέσα στο οποίο βρίσκεται σε λειτουργία ηλεκτρικό ψυγείο με την πόρτα του ανοιχτή. Η θερμοκρασία του δωματίου

- (α) αυξάνεται
(β) μειώνεται
(γ) μένει ίδια
και γιατί;

14

Σύμφωνα με το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα σε κυκλική μεταβολή ισχύει $Q = W$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα, που λέει ότι δεν υπάρχει κυκλική διεργασία, στην οποία η προσφερόμενη στο σύστημα θερμότητα να μετατρέπεται 100% σε έργο;

15

Γιατί δεν μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα τεράστια ποσά εσωτερικής ενέργειας των θαλασσών;

16

Η θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής μιας μηχανής Carnot είναι 20°C . Ο συντελεστής απόδοσης αυτής της μηχανής είναι $e = 0,5$. Η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής της μηχανής είναι

- (α) 40°C (β) 80°C (γ) 313°C (δ) 586°C

17

Ισχυρίζεται κάποιος μηχανικός ότι σχεδίασε θερμική μηχανή που λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών 300 K και 600 K , με απόδοση 60%. Τί λέτε;

18

Θερμική μηχανή Carnot χρησιμοποιεί μονατομικό αέριο ($f = 3$). Ποιά από τις παρακάτω διαδικασίες θα επιλέγατε, ώστε να αυξηθεί περισσότερο η απόδοση της μηχανής;

- (α) Να αυξήσετε κατά 40 K την θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής.
(β) Να ελαττώσετε κατά 40 K την θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής.
(γ) Να αυξήσετε την θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής κατά 20 K και ταυτόχρονα να ελαττώσετε την θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής κατά 20 K .

(δ) Να αντικαταστήσετε το αέριο με ένα διατομικό αέριο ($f = 5$).

19

Δύο μηχανές Carnot A, B έχουν ψυχρές δεξαμενές ίδιας θερμοκρασίας, ενώ η θερμή δεξαμενή της A έχει ψηλότερη θερμοκρασία από την θερμή δεξαμενή της B. Το αέριο κάθε μηχανής απορροφά, ανά κύκλο, το ίδιο ποσό θερμότητας από την αντίστοιχη θερμή δεξαμενή. Ποιά απ' τις δύο μηχανές παράγει περισσότερο έργο ανά κύκλο;

20

Δικαιολογείτε γιατί δύο ισόθερμες καμπύλες, σε διάγραμμα $p-V$, δεν είναι δυνατόν να τέμνονται.

21

Δικαιολογήστε γιατί δύο αδιαβατικές καμπύλες, σε διάγραμμα $p-V$, δεν είναι δυνατόν να τέμνονται.

22

Ιδανικό αέριο εκτελεί, σε θερμοκρασία $T = 300\text{ K}$, ισόθερμη εκτόνωση αυξάνοντας την εντροπία του κατά 2 J/K . Το αέριο παράγει έργο

- (α) 1200 J (β) 600 J (γ) 300 J (δ) 150 J

23

Ποιά/ποιές από τις παρακάτω προτάσεις, που αφορούν την ισόθερμη συμπίεση ιδανικού αερίου, είναι ορθή/ορθές;

- (α) Η εσωτερική ενέργεια αυξάνεται.
(β) Η εντροπία αυξάνεται.
(γ) Η πίεση αυξάνεται.
(δ) Η ενεργός ταχύτητα, v_r , των μορίων αυξάνεται.

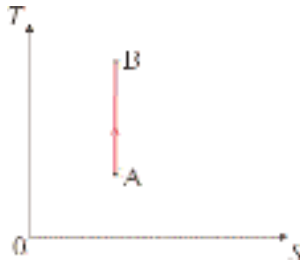
24

Ποιά/ποιές από τις παρακάτω προτάσεις, που αφορούν την αδιαβατική συμπίεση ιδανικού αερίου είναι ορθή/ορθές.

- (α) Η εσωτερική ενέργεια αυξάνεται.
(β) Η εντροπία αυξάνεται.
(γ) Η πίεση αυξάνεται.
(δ) Η ενεργός ταχύτητα v_r των μορίων αυξάνεται.

25

Ιδανικό αέριο εκτελεί την μεταβολή AB, που απεικονίζεται στο σχήμα σε διάγραμμα $T-S$. Η μεταβολή είναι

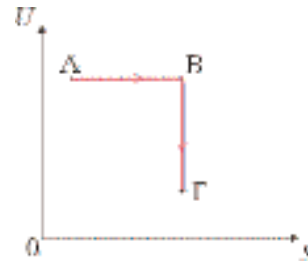


- (α) Ισόχωρη θέρμανση.
- (β) Ισόχωρη ψύξη.
- (γ) Αδιαβατική εκτόνωση.
- (δ) Αδιαβατική συμπίεση.

26

Στο διάγραμμα $U-S$ του σχήματος παριστάνονται δύο διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές, ιδανικού αερίου.

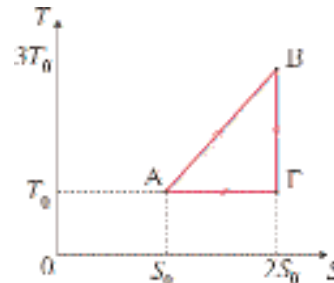
Να αντιστοιχίσετε τη μεταβολή (στήλη Α) με το όνομα της μεταβολής της στήλης Β (περισεύει μία).



Α	Β
ΑΒ	ισόθερμη
ΒΓ	ισόχωρη
	αδιαβατική

27

Η απόδοση του κύκλου, που απεικονίζεται στο διάγραμμα $T-S$ του σχήματος, είναι:

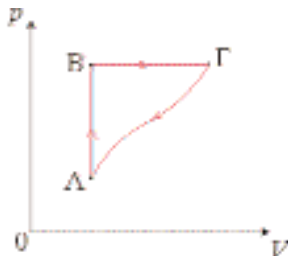


- (α) 30%
- (β) 40%
- (γ) 50%
- (δ) 60%

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

Ιδανικό αέριο εκτελεί διαδοχικά τις αντιστρεπτές μεταβολές AB, ΒΓ, ΓΑ που παριστάνονται στο διάγραμμα $p-V$ του σχήματος.



- (α) Αν δίνονται $Q_{ABΓ} = 30 \text{ J}$ και $W_{BΓ} = 20 \text{ J}$, να βρεθεί η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου κατά τη μεταβαση του από την κατάσταση Α στην κατάσταση Γ, $\Delta U_{AΓ}$.

- (β) Αν κατά τη μεταβολή ΓΑ μεταφέρεται θερμότητα 22 J από το αέριο στο περιβάλλον, να βρεθεί το έργο $W_{ΓA}$.

2

Ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση ισορροπίας Α (p_0, V_0, T_0) και ψύχεται ισόχωρα μέχρι θερμοκρασία $T_0/2$. Κατόπιν εκτονώνεται ισοβαρώς μέχρι τη θερμοκρασία T_0 . Στη συνέχεια, θερμαίνεται ισόχωρα μέχρι τη θερμοκρασία $3T_0/2$ και τέλος συμπιέζεται ισοβαρώς, μέχρι την αρχική θερμοκρασία T_0 .

- (α) Να παρασταθούν σε διάγραμμα $p-V$ οι μεταβολές που επέλεξε το αέριο.
- (β) Να αποδειχθεί ότι για την συνολική μεταβολή είναι $W_{ολ} = 0$.

3

Ποσότητα ιδανικού αερίου εκτονώνεται ισόθερμα αντιστρεπτά από όγκο $V_1 = 0,20 \text{ m}^3$ σε όγκο $V_2 = 0,80 \text{ m}^3$. Στην τελική κατάσταση η πίεση είναι $p_2 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$. Να υπολογισθεί η θερμότητα που μεταφέρθηκε στο αέριο από το περιβάλλον $\ln 2 = 0,69$.

4

Ποσότητα ύλης $n = 10,0 \text{ mol}$ ιδανικού αερίου, που βρίσκεται σε θερμοκρασία 27°C , εκτονώνεται ισοβαρώς μέχρι το διπλάσιο όγκο. Να βρεθούν:

- (α) Η τελική θερμοκρασία του αερίου.
- (β) Το ποσό θερμότητας που προσφέρθηκε στο αέριο.
- (γ) Το έργο που παρήγαγε το αέριο.
- (δ) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.

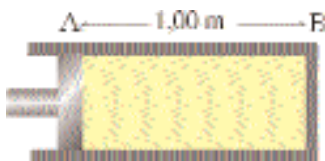
Δίνονται: $R = 8,31 \text{ J/mol.K}$, $C_p = 20,8 \text{ J/mol.K}$

5

Δοχείο με αμελητέα θερμοχωρητικότητα, αδιαβατικά και άκαμπτα τοιχώματα περιέχει $2,0 \text{ mol}$ μονατομικού ιδανικού αερίου, θερμοκρασίας 300 K . Μέσα στο δοχείο υπάρχει αντιστάτης, που διαρρέεται από ρεύμα $1,0 \text{ A}$. Αν σε χρόνο 30 s η θερμοκρασία του αερίου γίνει 400 K , να υπολογισθεί η αντίσταση του αντιστάτη. $R = 8,3 \text{ J/mol.k}$

6

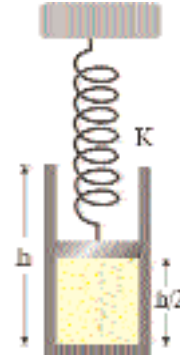
Τα τοιχώματα και το έμβολο του δοχείου του



σχήματος είναι θερμομονωτικά. Το έμβολο ισορροπεί στη θέση A και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Όταν το έμβολο είναι στη θέση A, ο όγκος του αερίου που περιέχεται στο δοχείο είναι $1,00 \text{ L}$. Πόση ενέργεια θα καταναλώσει ένας άνθρωπος για να μετακινήσει αργά - αργά το έμβολο μέχρι να γίνει ο όγκος του αερίου $0,250 \text{ L}$; Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$ και για το αέριο $C_p = 3R$.

7

Δοχείο ύψους $h = 1 \text{ m}$ και διατομής $A = 10^{-3} \text{ m}^2$ περιέχει ιδανικό μονατομικό αέριο. Το έμβολο έχει βάρος $B = 50 \text{ N}$ και ισορροπεί στη θέση που φαίνεται στο σχήμα. Τότε το ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$



βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Επίσης, η εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$. Θερμαίνουμε το αέριο μέχρι να διπλασιαστεί πολύ αργά ο όγκος του.

- (α) Να παραστήσετε γραφικά σε άξονες $p - V$ τη μεταβολή του αερίου (θεωρείται αντιστρεπτή).
- (β) Να υπολογίσετε το έργο που παράχθηκε από το αέριο.
- (γ) Να υπολογίσετε τη θερμότητα που προσφέρθηκε στο αέριο.

Οι απαντήσεις να δοθούν με τρία σημαντικά ψηφία.

8

Ιδανικό αέριο εκτελεί κυκλική μεταβολή, η οποία αποτελείται από τρεις επιμέρους αντιστρεπτές μεταβολές.

- (i) ισόχωρη θέρμανση $A \rightarrow B$
- (ii) ισόθερμη εκτόνωση $B \rightarrow \Gamma$
- (iii) ισοβαρή συμπίεση $\Gamma \rightarrow A$
- (α) Να παρασταθεί ο κύκλος (ποιοτικά) σε διαγράμματα $p - V$, $p - T$, $V - T$.
- (β) Να βρεθεί η θερμότητα $Q_{B\Gamma}$, αν δίνονται $W_{ολ} = 250 \text{ J}$, $Q_{AB} = 300 \text{ J}$, $\gamma = 1,40$.

9

Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε κατάσταση A (p_0, V_0, T_0) και εκτονώνεται ισοβαρώς, μέχρι όγκο $2V_0$. Ύστερα εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι την πίεση $p_0/2$. Κατόπιν, συμπιέζεται ισοβαρώς έως το όγκο V_0 και τέλος επανέρχεται, ισόχωρα, στην κατάσταση A (p_0, V_0, T_0).

- (α) Να παρασταθεί η κυκλική μεταβολή σε άξονες $p - V$.
- (β) Να υπολογισθεί το έργο που παράγει το αέριο κατά την κυκλική μεταβολή.

Δίνονται: $p_0 = 0,50 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_0 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, $\ln 2 = 0,69$.

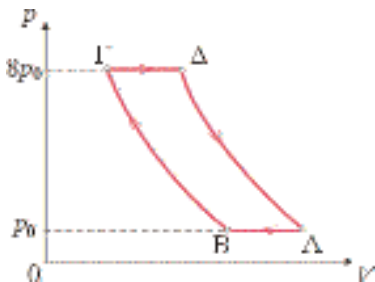
10

Το αέριο μιας θερμικής μηχανής εκτελεί αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή, που αποτελείται τις παρακάτω επιμέρους μεταβολές.

- (i) Ισόχωρη θέρμανση από την κατάσταση $A (p_0, V_0, T_0)$ μέχρι την κατάσταση B , όπου η θερμοκρασία είναι $2T_0$.
 - (ii) Αδιαβατική εκτόνωση $B \rightarrow \Gamma$
 - (iii) Ισόθερμη $\Gamma \rightarrow A$
- Αν $\ln 2 = 0,69$, να βρεθεί η απόδοση της μηχανής.

11

Το αέριο ($\gamma = 1,5$) μιας θερμικής μηχανής εκτελεί τον κύκλο του σχήματος, που αποτελείται από δύο ισοβαρείς και δύο αδιαβατικές μεταβολές.



Να υπολογισθεί ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής.

12

Το αέριο μηχανής εκτελεί κυκλική μεταβολή που αποτελείται από τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές.

- (i) Ισοβαρή εκτόνωση από την κατάσταση $A (p_A = 160 \text{ Pa})$ σε κατάσταση $B (V_B = 8 \text{ m}^3)$.
- (ii) Ισόχωρη ψύξη $B \rightarrow \Gamma$
- (iii) Αδιαβατική συμπίεση $\Gamma \rightarrow A$

Για την μεταβολή ΓA δίνεται $pV^\gamma = 160 \text{ N.m}^3$

- (α) Να βρεθεί ο λόγος γ των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων του αερίου.

- (β) Να υπολογισθεί το έργο και η θερμότητα για κάθε επιμέρους μεταβολή.
- (γ) Να βρεθεί η απόδοση της μηχανής.

13

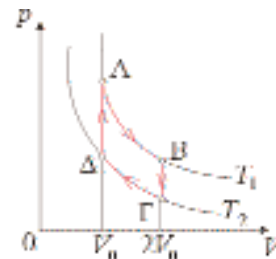
Το αέριο μηχανής εκτελεί κυκλική μεταβολή που αποτελείται από τις παρακάτω επιμέρους αντιστρεπτές μεταβολές.

- (i) Ισοβαρή εκτόνωση από την κατάσταση $A (p_0, V_0, T_0)$ στην κατάσταση $B (V_B = 3V_0)$.
- (ii) Ισόχωρη ψύξη από την κατάσταση B στην κατάσταση $\Gamma (T_\Gamma = T_0)$.
- (iii) Ισοβαρής συμπίεση $\Gamma \Delta$.
- (iv) Ισόχωρη θέρμανση ΔA .

Ο συντελεστής απόδοσης του κύκλου είναι $2/13$. Να βρεθεί το πλήθος των βαθμών ελευθερίας f του αερίου.

14

Να βρεθεί η απόδοση μηχανής της οποίας το αέριο ($f = 5$) εκτελεί τον κύκλο του σχήματος. Δίνεται ότι η



απόδοση της μηχανής Carnot, που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων ισοθέμων T_1 και T_2 είναι 50% $\ln 2 = 0,69$.

15

Η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής μιας μηχανής Carnot είναι 500 K και της ψυχρής δεξαμενής 300 K . Το αέριο σε κάθε κύκλο απορροφά από την θερμή δεξαμενή 6000 J . Να βρεθούν

- (α) Η θερμότητα που αποβάλλει το αέριο σε κάθε κύκλο στην ψυχρή δεξαμενή.
- (β) Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής.
- (γ) Η ισχύς της μηχανής σε KW , αν εκτελεί 10 κύκλους/s.

16

Δύο μηχανές συνδέονται έτσι ώστε, το ποσό θερμότητας που αποδίδει η πρώτη να χρησιμοποιείται για τη λειτουργία της δεύτερης.

Ο συντελεστής απόδοσης της πρώτης μηχανής είναι $e_1 = 0,40$ και της δεύτερης $e_2 = 0,20$. Να βρεθεί ο συντελεστής απόδοσης του συστήματος των μηχανών.

17

Η θερμή δεξαμενή μιας μηχανής Carnot έχει θερμοκρασία T_θ και η ψυχρή δεξαμενή έχει θερμοκρασία $T_\psi = 300 \text{ K}$. Κατά την ισόθερμη εκτόνωση το αέριο απορροφά θερμότητα $Q_\theta = 2000 \text{ J}$ και αυξάνει την εντροπία του κατά $\Delta S = 4 \text{ J/K}$. Να βρεθούν:

- Η απόδοση της μηχανής.
- Το έργο που παράγει σε κάθε κύκλο το αέριο.
- Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου κατά την ισόθερμη συμπίεση.

18

Θερμική μηχανή χρησιμοποιεί $0,500 \text{ mol}$ ιδανικού αερίου με $\gamma = 1,40$. Το αέριο εκτελεί κύκλο που αποτελείται από τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές:

- Ισοβαρή εκτόνωση από 300 K σε 1200 K .
- Αδιαβατική εκτόνωση μέχρι να επανέλθει σε θερμοκρασία 300 K .
- Ισόθερμη συμπίεση.

Να βρεθούν

- Η θερμότητα σε κάθε μεταβολή.
- Η απόδοση της μηχανής.
- Η ισχύς της μηχανής αν εκτελεί 10 κύκλους/s.
- Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου κατά την ισόβαρη εκτόνωση.

$$R = 8,31 \text{ J/mol.K}, \ln 2 = 0,693$$

19

Ιδανικό αέριο εκτελεί κυκλική μεταβολή, που αποτελείται από τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές:

- Ισόθερμη εκτόνωση από την κατάσταση A (p_0, V_0, T_0), ως την κατάσταση B ($V_B = 4V_0$).
- Ισόχωρη ψύξη $B \rightarrow \Gamma$.
- Αδιαβατική συμπίεση $\Gamma \rightarrow A$.

Να βρεθούν:

- Το συνολικό έργο που παράγει το αέριο κατά την κυκλική μεταβολή.
- Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου κατά

την ισόχωρη ψύξη.

Δίνονται: $p_0 = 8,0 \times 10^4 \text{ Pa}$, $V_0 = 2,0 \text{ m}^3$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $\gamma = 1,5$ και $\ln 2 = 0,69$.

20

Ιδανικό αέριο βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση A (p_0, V_0, T_0) και εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι όγκο $2V_0$. Στη συνέχεια θερμαίνεται ισόχωρα μέχρι να γίνει η πίεσή του $2p_0$. Να βρεθεί η μεταβολή της εντροπίας του αερίου, για τη συνολική μεταβολή.

Δίνονται: $n = 2,0 \text{ mol}$, $R = 8,3 \text{ J/mol.K}$, $f = 3$, $\ln 2 = 0,69$.

21

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A (p_A, V_A, T_A) με $V_A = 0,200 \text{ m}^3$ και $T_A = 320 \text{ K}$. Το αέριο εκτονώνεται αντιστρεπτά μέχρι την κατάσταση B (p_B, V_B, T_B), με $V_B = 0,500 \text{ m}^3$. Αν η αντιστρεπτή μεταβολή AB περιγράφεται απ' τον εμπειρικό νόμο

$$p = (-5V + 3,5) 10^5$$

(Το V είναι σε m^3 και το p σε Pa) να βρεθούν:

- Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.
- Η θερμότητα που απορρόφησε το αέριο.
- Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου.

Δίνονται $\ln 2 = 0,693$, $\ln 5 = 1,61$.

22

Τα τοιχώματα και το έμβολο του δοχείου του σχήματος είναι θερμομονωτικά. Ένα διάφραγμα Δ χωρίζει το δοχείο σε δύο μέρη A, B. Στο A περιέχεται αέριο σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας (p_0, V_0, T_0). Το μέρος B είναι κενό και ο όγκος του είναι $3V_0$. Αφαιρούμε απότομα το διάφραγμα και μετά από λίγο αρχίζουμε να πιέζουμε το έμβολο, ώστε αυτό αργά-αργά να



έλθει στη θέση που ήταν το διάφραγμα. Να βρεθούν:

- (α) Η τελική πίεση και θερμοκρασία.
 (β) Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου για τη συνολική μεταβολή.

Δίνονται: $p_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_0 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$,
 $T_0 = 300 \text{ K}$, $\gamma = 1,5$ και $\ln 2 = 0,69$.

23

Πόση θερμότητα πρέπει να προσφερθεί, ισοβαρώς, σε 1 mol αερίου με $f = 5$, που βρίσκεται στους 27°C ώστε να διπλασιαστεί η ενεργός τιμή των ταχυτήτων των μορίων; $R = 8,314 \text{ J/mol.K}$

Η απάντηση να δοθεί με 4 σημαντικά ψηφία.

24

Ιδανικό αέριο εκτονώνεται αδιαβατικά μέχρι να οκταπλασιαστεί ο όγκος του. Αν η ενεργός ταχύτητα v_r των μορίων υποδιπλασιάστηκε, να βρεθούν:

- (α) Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας f .
 (β) Η μεταβολή ΔS της εντροπίας του αερίου.

25

Δύο δοχεία ίδιου όγκου επικοινωνούν με σωλήνα αμελητέου όγκου που φέρει στρόφιγγα. Το ένα δοχείο περιέχει $1,00 \text{ mol}$ He και το άλλο $1,00 \text{ mol}$ H_2 στην ίδια θερμοκρασία. Ανοίγουμε κατόπιν την στρόφιγγα και τα αέρια αναμιγνύονται. Αν τα τοιχώματα των δοχείων είναι θερμομονωτικά, να βρεθούν για το σύστημα των αερίων:

- (α) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας.
 (β) Η μεταβολή της εντροπίας $R = 8,31 \text{ J/mol.K}$, $\ln 2 = 0,693$.

26

Δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα χωρίζεται με διάφραγμα σε δύο διαμερίσματα A, B, με όγκους $V_B = 2 V_A$. Στο A περιέχεται $1,00 \text{ mol}$ He σε πίεση $p_1 = 1,00 \text{ atm}$ και θερμοκρασία $T_1 = 300 \text{ K}$. Στο B περιέχεται $1,00 \text{ mol}$ H_2 σε πίεση $p_2 = 1,00 \text{ atm}$.

- (α) Ποιά η θερμοκρασία T_2 του H_2 στο B διαμέρισμα;
 (β) Ποιά η τελική θερμοκρασία T και η τελική πίεση p του μίγματος που θα προκύψει, αν αφαιρέσουμε το διάφραγμα; Για το He είναι $f_1 = 3$ και για το H_2 $f_2 = 5$.

27

Σε δοχείο περιέχεται, μίγμα ίσων ποσοτήτων ύλης (σε mol) He ($f_1 = 3$) και H_2 ($f_2 = 5$). Να βρεθεί ο λόγος $\gamma = C_p/C_v$ για το μίγμα των αερίων.

28

Υποθέτουμε ότι ένα αέριο εκτελεί αντιστρεπτή μεταβολή με νόμο

$$\frac{p}{V} = \text{σταθ.}$$

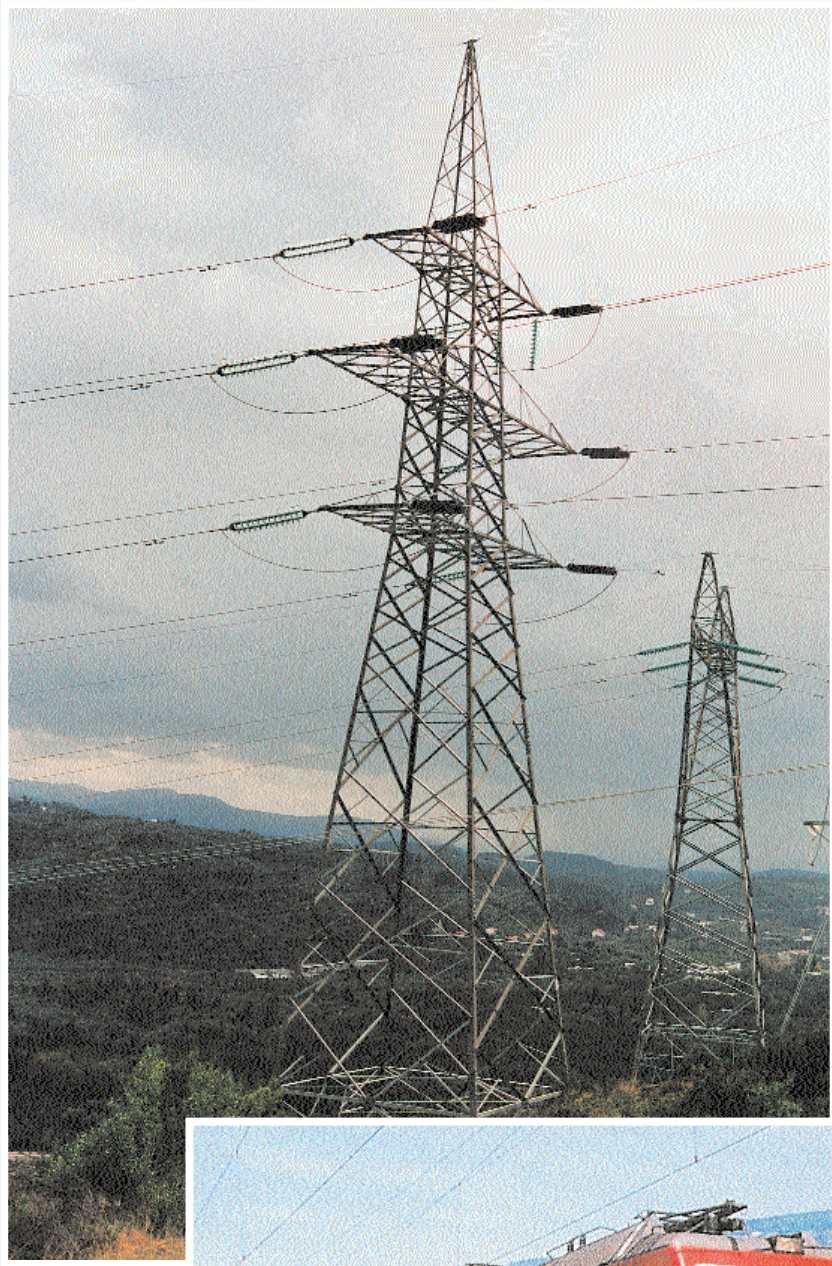
Δείξτε ότι η ειδική γραμμομοριακή θερμότητα για την παραπάνω μεταβολή είναι:

$$C = \frac{C_p + C_v}{2}$$



Συνύπαρξη της παράδοσης με στοιχεία σύγχρονου πολιτισμού. Οι “ανεμόμυλοι” μετατρέπουν την αιολική ενέργεια σε ηλεκτρική αξιοποιώντας τους δυνατούς ανέμους σ’ αυτό το ελληνικό νησί.

Το εντυπωσιακό σχέδιο που φαίνεται στην παραπάνω εικόνα δεν είναι τίποτα περισσότερο από φωτογραφημένη λεπτομέρεια φωτοβολταϊκού στοιχείου, με το οποίο μετατρέπεται η ηλιακή ενέργεια σε ηλεκτρική.



Κ
Ε
Φ
Λ
Λ
Α
Ι
Ο
2

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

2.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για σώματα που βρίσκονται σε επαφή είναι εύκολο να καταλάβει κανείς ότι μπορεί να αλληλεπιδρούν, δηλαδή να ασκεί δύναμη το ένα στο άλλο. Έχουμε όπως λέμε "αλληλεπίδραση (δράση) με επαφή". Για σώματα που βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους είναι δύσκολη η κατανόηση του φαινομένου της αλληλεπίδρασης. Αυτό απασχολούσε και τον **Newton** (1642-1727), ο οποίος διατύπωσε το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Ο νόμος αυτός εκφράζει "δράση από απόσταση".

Οι εννοιολογικές δυσκολίες ξεπεράστηκαν με την εισαγωγή της έννοιας του πεδίου από τον Άγγλο **Michael Faraday** (1791-1867), προκειμένου να κατανοηθούν καλύτερα τα φαινόμενα των αλληλεπιδράσεων του ηλεκτρομαγνητισμού.

Σύμφωνα με τον Faraday, το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από κάποιο φορτίο και εξαπλώνεται σε όλο τον χώρο. Αν τοποθετηθεί ένα δεύτερο φορτίο σε κάποια απόσταση απ' το πρώτο, δέχεται κάποια δύναμη, ένεκα του πεδίου που υπάρχει σ' αυτή τη θέση. Κατά κάποιο τρόπο η εισαγωγή της έννοιας του πεδίου είναι σα να μετατρέπει τη "δράση από απόσταση" σε κάτι που μοιάζει με "δράση επαφής". Στις αλληλεπιδράσεις στοιχειωδών σωματιδίων η αλληλεπίδραση επαφής λέγεται "τοπική αλληλεπίδραση" σε αντιδιαστολή με την προηγούμενη, που είναι "μη τοπική αλληλεπίδραση".

Η εισαγωγή της έννοιας του πεδίου δεν συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιου είδους ύλης, που μεταφέρει τη δύναμη με μηχανικό τρόπο, κάτι σαν ελαστικό στερεό. Απλώς είναι μία βοηθητική έννοια της φυσικής, μια ιδιότητα του κενού χώρου. Σήμερα, στα πλαίσια των πιο αποδεκτών προχωρημένων θεωριών αλληλεπιδράσεων στοιχειωδών σωματιδίων, έχει εισαχθεί η έννοια των σωματιδίων-φορέων των αλληλεπιδράσεων (φωτόνια, W^\pm , Z^0 μποζόνια κτλ). Αυτά τα σωματίδια-φορείς ανταλλάσσονται μεταξύ των σωματιδίων και αυτό το φαινόμενο οδηγεί σε δυνάμεις αλληλεπίδρασης. Σε αυτές τις θεωρίες έχουμε τοπικές αλληλεπιδράσεις (σαν τις δυνάμεις επαφής). Ο κενός χώρος, σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις, δεν είναι ακριβώς κενός αλλά έχει πολύπλοκες ιδιότητες που οδηγούν σε κβαντικά φαινόμενα, τα οποία δεν είναι κατανοητά με την κλασική φυσική. Για παράδειγμα στο χώρο γύρω από ένα ηλεκτρόνιο δημιουργούνται και χάνονται στιγμιαία ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων. Αυτό γίνεται αισθητό, αν περάσει άλλο ηλεκτρόνιο κοντά από το πρώτο. Αν περάσει πολύ κοντά το ενεργό φορτίο που "βλέπει" είναι μεγαλύτερο από το φορτίο που "βλέπει", όταν είναι πολύ μακριά, δηλαδή το σύνθητες φορτίο του ηλεκτρονίου, γιατί τα ζεύγη ηλεκτρονίων - ποζιτρονίων θωρακίζουν, κατά κάποιο τρόπο, το φορτίο του ηλεκτρονίου τόσο περισσότερο, όσο μακρύτερα από αυτό είμαστε. Είναι ανάλογο φαινόμενο, όπως αυτό που έχουμε μέσα σε ρευστό διηλεκτρικό, στο οποίο βρίσκεται ένα σημειακό φορτίο.

Ηλεκτρικό πεδίο είναι ο χώρος, μέσα στον οποίο, αν φέρουμε ηλεκτρικό φορτίο θα ασκηθεί πάνω του (ηλεκτρική) δύναμη. Το ηλεκτρικό πεδίο χαρακτηρίζεται σε κάθε σημείο του από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , η οποία ορίζεται έτσι, ώστε να είναι ανεξάρτητη από το φορτίο που φέρνουμε στη συγκεκριμένη θέση. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο του ορίζεται ως $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, \vec{F} είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα

πολύ μικρό φορτίο q με πολύ μικρές διαστάσεις (σημειακό), που φέρνουμε στο σημείο αυτό. Το πολύ μικρό και σημειακό φορτίο q , λέγεται δοκιμαστικό φορτίο. Προφανώς, η κατεύθυνση της έντασης \vec{E} συμπίπτει με την κατεύθυνση της δύναμης \vec{F} , πάνω σε θετικό δοκιμαστικό φορτίο. Ο λόγος που επιλέγουμε το δοκιμαστικό φορτίο q πολύ μικρό είναι ότι αυτό δεν πρέπει να επηρεάζει σημαντικά την κατανομή των φορτίων - πηγών του πεδίου. Προφανές είναι ότι το q δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από το φορτίο του ηλεκτρονίου. Απλώς εννοούμε ότι είναι αρκετά μικρό, ώστε να μην διαταράσσεται η κατανομή των φορτίων - πηγών του πεδίου. Στις περιπτώσεις προβλημάτων δεν χρειάζεται να παίρνουμε το q πολύ μικρό, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι τα φορτία - πηγές του πεδίου είναι ακλόνητα. Μας αρκεί απλά το q να είναι σημειακό, ώστε να εξετάζεται η ένταση \vec{E} σ' ένα σημείο και όχι ένα είδος μέσης τιμής της σε κάποια περιοχή. Για την ολική ένταση σε κάποιο σημείο A του ηλεκτροστατικού πεδίου, που δημιουργείται από πολλά, ακλόνητα σε δεδομένες θέσεις, σημειακά φορτία, ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Δηλαδή η ολική ένταση στο A είναι $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$, όπου \vec{E}_i η ένταση που δημιουργεί ένα φορτίο-

πηγή του πεδίου, q_i , από μόνο του στο A , όταν βρίσκεται στη δεδομένη θέση.

Το μέγεθος \vec{E} έχει επικρατήσει διεθνώς να λέγεται (καταχρηστικά) πεδίο \vec{E} .

Μονάδα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο διεθνές σύστημα S.I. είναι το 1 N/C, ή, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί ισοδύναμα να είναι και το 1 V/m.

Για κάθε πεδίο, όπως το ηλεκτρικό, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις πεδριακές γραμμές, οι οποίες σε κάθε σημείο δίνουν την κατεύθυνση της έντασης του πεδίου. Οι πεδριακές γραμμές λέγονται και δυναμικές γραμμές. Αυτό, για την περίπτωση του ηλεκτρικού πεδίου, δικαιολογείται από το γεγονός ότι η δύναμη έχει την ίδια διεύθυνση με την ένταση του πεδίου. Ο όρος, καταχρηστικώς, χρησιμοποιείται και σε πεδία που δεν ισχύει αυτό. Σχεδιάζουμε αυτές τις γραμμές κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η πυκνότητά τους σε κάθε σημείο να είναι ανάλογη της έντασης στο ίδιο σημείο. Στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου οι γραμμές είναι συνεχείς, ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία (μπορεί να ξεκινούν ή να καταλήγουν και στο άπειρο). Αφού η ένταση του πεδίου έχει σε κάθε σημείο μοναδική τιμή, οι δυναμικές γραμμές δεν μπορεί να τέμνονται σε κανένα (ομαλό)

σημείο, όπου το πεδίο είναι μη μηδενικό και πεπερασμένο. Σε ανώμαλα σημεία αυτό δεν ισχύει.

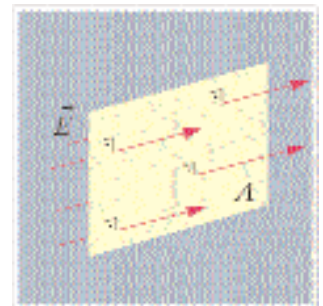
Στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου, που πηγές του είναι τα φορτία, η αναπαράστασή του με δυναμικές γραμμές είναι απλή και χρήσιμη. Σε άλλες περιπτώσεις, όπου δεν υπάρχουν αντίστοιχες πηγές, τα πράγματα περιπλέκονται.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθεί η έννοια της ηλεκτρικής ροής και θα μελετηθεί ο νόμος του Gauss και οι εφαρμογές του. Επίσης θα μελετηθεί η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό στο ηλεκτροστατικό πεδίο, καθώς και οι κινήσεις φορτισμένων σωματιδίων μέσα σ' αυτό. Θα γίνει μελέτη του βαρυτικού πεδίου ως ανάλογο του ηλεκτροστατικού πεδίου. Τέλος θα ασχοληθούμε με τους πυκνωτές και τις εφαρμογές τους.



ΡΟΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Το ηλεκτρικό πεδίο, όπως είπαμε, σχηματοποιείται με τη βοήθεια των δυναμικών του γραμμών και κατά την απεικόνισή του σχεδιάζουμε τις δυναμικές γραμμές με πυκνότητα ανάλογη της έντασης του πεδίου. Σ' ένα ομογενές πεδίο, για παράδειγμα, ο αριθμός των δυναμικών γραμμών, που διαπερνούν την κάθετη σ' αυτές μοναδιαία επιφάνεια, είναι ανάλογος του μέτρου της έντασης E του πεδίου. Ο αριθμός συνεπώς των δυναμικών γραμμών, που θα περνούν από μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A τοποθετημένη κάθετα προς αυτές θα είναι ανάλογος του γινομένου EA (βλ. σχ. 2.1).



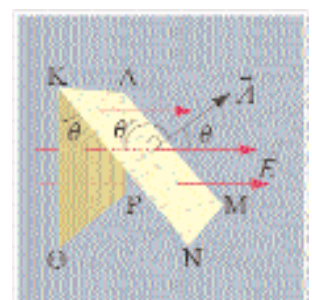
ΣΧΗΜΑ 2.1

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια είναι EA .

Θα ορίσουμε τώρα το φυσικό μέγεθος, που ονομάζεται *ροή του πεδίου E ή ηλεκτρική ροή, Φ_E* , το οποίο μας δίνει το πλήθος των δυναμικών γραμμών που περνούν από μια επιφάνεια.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια ΚΛΜΝ σχήματος ορθογωνίου και ένα διάνυσμα \vec{A} κάθετο σ' αυτή, που έχει μέτρο όσο το εμβαδόν της και κάποια φορά, την οποία ορίζουμε αυθαίρετα ως θετική. Η επιφάνεια βρίσκεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης \vec{E} (σχήμα 2.2). Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών, που διαπερνούν την επιφάνεια ΚΛΜΝ, είναι ο ίδιος με τον αριθμό των γραμμών που διέρχονται από την κάθετη στην ένταση \vec{E} , προβολή της παραπάνω επιφάνειας, δηλαδή από την ΚΛΡΘ. Έχουμε ήδη εξηγήσει ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών, που περνούν από την επιφάνεια ΚΛΡΘ, είναι ανάλογος του γινομένου $(E A_{\perp})$, όπου A_{\perp} το εμβαδόν της ΚΛΡΘ. Τα εμβαδά A και A_{\perp} συνδέονται με τη σχέση $A_{\perp} = A \cos \theta$, άρα το γινόμενο $(E A_{\perp})$ ισούται με $(EA \cos \theta)$. Η τελευταία ποσότητα είναι η ηλεκτρική ροή του πεδίου \vec{E} , που διέρχεται από την επιφάνεια ΚΛΜΝ, δηλαδή



ΣΧΗΜΑ 2.2

Από τις επιφάνειες (ΚΛΜΝ) και (ΚΛΡΘ) διέρχονται ίσες σε αριθμό δυναμικές γραμμές.

$$\Phi_E = EA \cos \theta \quad (2.1)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε απλώς τον όρο ηλεκτρική ροή χωρίς αναφορά στο πεδίο \vec{E} .

Είναι προφανές ότι η Φ_E μπορεί να δοθεί και από τη σχέση

$$\Phi_E = E_{\perp} A,$$

όπου E_{\perp} είναι η προβολή του \vec{E} στη διεύθυνση του A .

Η μονάδα της ηλεκτρικής ροής είναι το Nm^2/C .

Αν οι δυναμικές γραμμές είχαν την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{E} και \vec{A} θα ήταν $\theta' = 180^\circ - \theta$, οπότε η ροή θα υπολογιζόταν απ' τη σχέση:

$$\Phi_E = EA \cos \theta' = -EA \cos \theta$$

και θα είχε αρνητική τιμή. Η σημασία του αρνητικού προσήμου είναι ότι οι δυναμικές γραμμές διαπερνούν την επιφάνεια προς την αντίθετη πλευρά από την πλευρά που την διαπερνά το διάνυσμα \vec{A} .

Στη σχέση (2.1) τα E και A παριστάνουν τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων. Στα μαθηματικά, η παράσταση $EA \cos \theta$ ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{E} και \vec{A} και συμβολίζεται με $(\vec{E} \cdot \vec{A})$.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

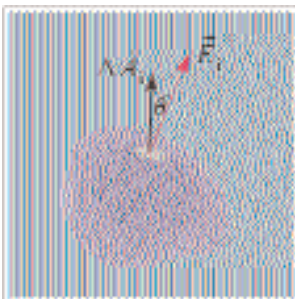
Επεκτείνουμε τώρα τον ορισμό της ηλεκτρικής ροής στη γενική περίπτωση ανομοιογενούς πεδίου και καμπύλης επιφάνειας. Θεωρούμε ένα πολύ μικρό (απειροστό) τμήμα της καμπύλης επιφάνειας με εμβαδόν ΔA_i (σχ. 2.3), το οποίο, όπως λέμε, τείνει στο μηδέν ($\Delta A_i \rightarrow 0$). Στην έκταση του ΔA_i μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερή ένταση E_i , άρα για το μικρό αυτό τμήμα ισχύει ο προηγούμενος ορισμός. Χωρίζουμε την καμπύλη επιφάνεια σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος στοιχειωδών τμημάτων και υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή, $E_i \Delta A_i \cos \theta_i$, για κάθε στοιχειώδες τμήμα. Τελικά έχουμε ότι η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την καμπύλη επιφάνεια, ισούται με το άθροισμα των στοιχειωδών ροών.

$$\Phi_E = E_1 \Delta A_1 \cos \theta_1 + E_2 \Delta A_2 \cos \theta_2 + \dots$$

ή

$$\Phi_E = \sum E_i \Delta A_i \cos \theta_i \quad (2.2)$$

Αν έχουμε μια κλειστή επιφάνεια αυτή χωρίζεται σε δύο μέρη, αυτόν που βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια (εσωτερικός χώρος) και αυτόν που είναι εκτός της επιφάνειας (εξωτερικός χώρος). Θεωρούμε, κατά σύμβαση, θετική την φορά κάθε διανύσματος $\vec{\Delta A}_i$, που κατευθύνεται προς τον εξωτερικό χώρο της επιφάνειας. Έτσι η "εξερχόμενη" ροή θα είναι θετική, ενώ η "εισερχόμενη" αρνητική.



ΣΧΗΜΑ 2.3

Στην έκταση του τμήματος της καμπύλης ΔA_i , θεωρούμε θεωρούμε σταθερή την ένταση E_i του πεδίου.

Παράδειγμα 2-1

Δίνεται μια επίπεδη επιφάνεια, σχήματος ορθογωνίου, με διαστάσεις $\alpha = 0,20\text{ m}$ και $\beta = 0,40\text{ m}$, τοποθετημένη μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E = 30\text{ N/C}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Να υπολογισθεί η ροή που διέρχεται από την επιφάνεια. Δίνεται $\theta = 60^\circ$.

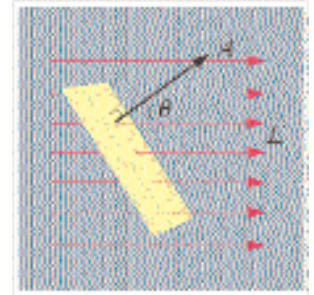
Απάντηση

Η ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A , η οποία βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E , δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_E = EA \cos \theta \tag{1}$$

Όμως $A = \alpha\beta$, έχουμε

$$\Phi_E = E\alpha\beta \cos \theta = (30 \times 0,20 \times 0,40 \times 0,5) \text{ Nm}^2/\text{C} = 1,2 \text{ Nm}^2/\text{C}$$



ΣΧΗΜΑ 2.4

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS (ΓΚΑΟΥΣ)

Για να υπολογίσουμε την ένταση σ' ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου, που έχει για πηγές ορισμένα σημειακά φορτία, εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας. Υπολογίζουμε την ένταση στο θεωρούμενο σημείο από κάθε φορτίο χωριστά, ανεξάρτητα απ' την ύπαρξη των υπολοίπων και ύστερα προσθέτουμε (διανυσματικά) τις εντάσεις που υπολογίσαμε.

Παρόμοια διαδικασία εφαρμόζουμε και στην περίπτωση που έχουμε μια συνεχή κατανομή φορτίου. Τότε θεωρούμε ότι έχουμε ένα τεράστιο πλήθος σημειακών φορτίων σε διάφορα σημεία του χώρου. Η διαδικασία αυτή πολλές φορές είναι αρκετά επίπονη. Υπάρχει όμως μια μέθοδος υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία απλοποιεί τα πράγματα, στις περιπτώσεις συμμετρικών πεδίων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο νόμο του Gauss. Αυτός ο νόμος μπορεί να εξαχθεί από τον νόμο του Coulomb, αλλά μπορεί να γίνει και το αντίθετο. Επομένως οι δύο νόμοι είναι ισοδύναμοι στα πλαίσια της ηλεκτροστατικής. Στη θεωρία του Maxwell, για τον ηλεκτρομαγνητισμό, ο νόμος του Gauss είναι θεμελιώδης, και ο νόμος του Coulomb προκύπτει από αυτόν, επειδή ο νόμος του Gauss δεν ισχύει μόνο στην ηλεκτροστατική, αλλά ισχύει ανεξάρτητα από το πως δημιουργείται το ηλεκτρικό πεδίο.



Karl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

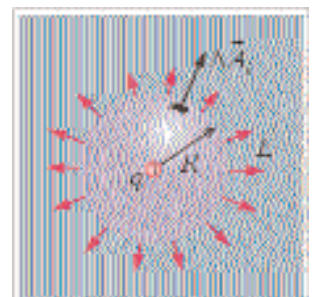
Ένας απ' τους μεγαλύτερους μαθηματικούς και θεωρητικούς φυσικούς όλων των εποχών.

ΑΠΟ ΤΟ ΝΟΜΟ ΤΟΥ COULOMB ΣΤΟΝ ΝΟΜΟ ΤΟΥ GAUSS

Θεωρούμε μια νοητή σφαιρική επιφάνεια (σχ. 2.5) ακτίνας R , στο κέντρο της οποίας βρίσκεται θετικό σημειακό φορτίο q . Η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου, σ' ένα οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας, είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \tag{2.3}$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η σχέση (2.3) προκύπτει απ' το νόμο του Coulomb και τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου.



ΣΧΗΜΑ 2.5

Η ένταση \vec{E} είναι κάθετη σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.

Η ηλεκτρική σταθερά ϵ_0 (ή επιτρεπτικότητα του κενού) καθορίζεται ακριβώς απ' τα παρακάτω δεδομένα:

Ισχύει: $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$

Είναι ακριβώς:

$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$

Άρα $\epsilon_0 = 8,8541853 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

Χωρίζουμε τη σφαιρική επιφάνεια σε πολύ μικρά (απειροστά) στοιχειώδη τμήματα για καθένα απ' τα οποία ορίζουμε το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$ σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως. Έτσι έχουμε ότι η ένταση \vec{E}_i , που αντιστοιχεί σε κάθε τμήμα, δίνεται από τη σχέση (2.3) και έχει κατεύθυνση ίδια με του διανύσματος $\Delta \vec{A}_i$.

Η διερχόμενη από την επιφάνεια ηλεκτρική ροή είναι:

$$\Phi_E = \sum E \Delta A_i \cos 0^\circ = \sum E \Delta A_i = E \sum \Delta A_i$$

Όμως το άθροισμα όλων των στοιχειωδών τμημάτων $\sum \Delta A_i$ ισούται προφανώς με το εμβαδόν $4\pi R^2$ της επιφάνειας, άρα

$$\Phi_E = E 4\pi R^2 \tag{2.4}$$

Από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) καταλήγουμε στην

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.5}$$

Αν το φορτίο q είναι αρνητικό, έχουμε αρνητική ροή. Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί σ' αυτή την περίπτωση οι δυναμικές γραμμές εισέρχονται στην επιφάνεια.

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ροή που περνά από κάθε ομόκεντρο (ή όχι) σφαιρική επιφάνεια με την αρχική ή γενικότερα από κάθε κλειστή επιφάνεια, που περικλείει το φορτίο q , είναι πάλι q/ϵ_0 . Αυτό συμβαίνει, γιατί ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν όλες τις επιφάνειες που περικλείουν το φορτίο, είναι ίδιος (σχ. 2.6).

Ας φανταστούμε τώρα μια κλειστή επιφάνεια (σχ. 2.7), που δεν περιέχει φορτία και ότι ένα φορτίο q βρίσκεται έξω απ' αυτή. Ο αριθμός των εισερχόμενων δυναμικών γραμμών στην επιφάνεια ισούται με τον αριθμό των εξερχόμενων γραμμών απ' αυτή. Δηλαδή η "εισερχόμενη" ροή ισούται με την "εξερχόμενη", άρα ισχύει $\Phi_E = 0$.

Τέλος, αν στο εσωτερικό μιας κλειστής επιφάνειας δεν βρίσκεται μόνο το φορτίο q , αλλά ένα πλήθος φορτίων q_1, q_2, \dots , ονομάζουμε $Q_{\epsilon\sigma}$ το άθροισμα αυτών των φορτίων

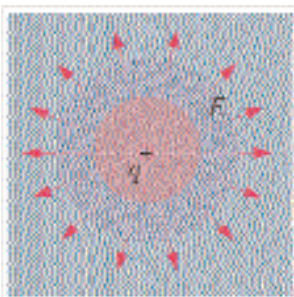
$$Q_{\epsilon\sigma} = q_1 + q_2 + \dots$$

και γράφουμε για την ροή που διέρχεται από την επιφάνεια

$$\Phi_E = \frac{Q_{\epsilon\sigma}}{\epsilon_0} \tag{2.6}$$

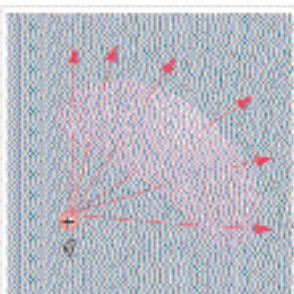
Αυτή είναι η μαθηματική έκφραση του νόμου του Gauss, ο οποίος με λόγια διατυπώνεται ως εξής:

Η ολική ροή που διέρχεται από μια νοητή κλειστή επιφάνεια, ισούται με το ολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια προς την ηλεκτρική σταθερά ϵ_0 .



ΣΧΗΜΑ 2.6

Από κάθε επιφάνεια που περικλείει το φορτίο q περνά η ίδια ροή Φ_E .



ΣΧΗΜΑ 2.7

Ο αριθμός των εισερχόμενων δυναμικών γραμμών στην επιφάνεια, ισούται με τον αριθμό των εξερχόμενων γραμμών.

ΑΠΟ ΤΟ ΝΟΜΟ ΤΟΥ GAUSS ΣΤΟ ΝΟΜΟ ΤΟΥ COULOMB

Έστω δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 που βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση R (σχ 2.8). Θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια στο κέντρο της οποίας βρίσκεται το q_1 και στο εξωτερικό της εφάπτεται το q_2 . Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια είναι

$$\Phi_E = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

Από αυτή τη σχέση και την (2.4) έχουμε

$$E4\pi R^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

Αν \vec{F} η δύναμη που ασκεί το πεδίο του q_1 στο q_2 , θα έχουμε από τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου

$$E = \frac{F}{q_2}$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις καταλήγουμε στο νόμο του Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{R^2}$$

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, σε προβλήματα εφαρμογής του νόμου του Gauss, πρέπει να επιλέγουμε την κατάλληλη κλειστή (γκαουσιανή όπως ονομάζεται) επιφάνεια. Η επιλογή της επιφάνειας πρέπει να είναι συνέπεια της συμμετρίας που θα έχουμε. Αυτό θα γίνει εμφανές από τη μελέτη των ακόλουθων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2-2

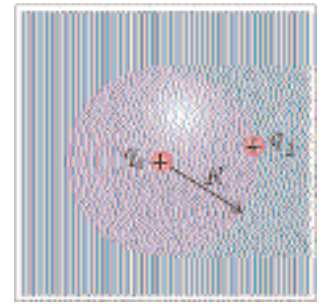
Δίνεται μια συμπαγής αγωγίμη σφαίρα, ακτίνας R , φορτισμένη με θετικό φορτίο q . Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας.

Απάντηση

Τα φορτία της σφαίρας ισορροπούν, άρα δεν δέχονται δύναμη, οπότε συμπεραίνουμε ότι η ένταση \vec{E} στο εσωτερικό της είναι μηδέν. Θεωρούμε μια γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια S_1 στο εσωτερικό της σφαίρας.

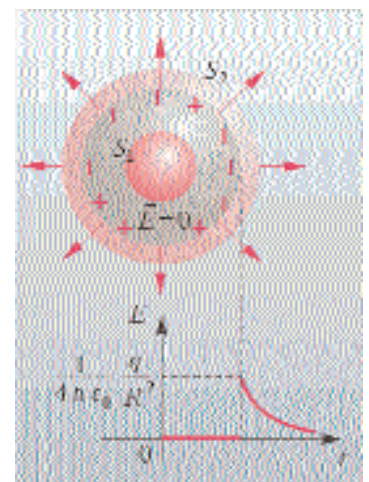
Αφού είναι $E = 0$ παντού στο εσωτερικό της σφαίρας, έχουμε από το νόμο του Gauss ότι το φορτίο εντός της επιφάνειας S_1 είναι μηδέν. Αν η παραπάνω επιφάνεια συρρικνωθεί οσοδήποτε, πάλι το φορτίο στο εσωτερικό της είναι μηδέν. Αυτό θα συμβαίνει και όταν αυτή μικρύνει τόσο, ώστε η περιοχή που περικλείει να θεωρηθεί σημείο. Με αυτή τη διαδικασία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δεν μπορεί να υπάρξει φορτίο σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό της σφαίρας. Συνεπώς το φορτίο βρίσκεται (ισοκαταναμημένο λόγω συμμετρίας) στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας.

Κατόπιν θα εξετάσουμε το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας ($r \geq R$). Επιλέγουμε μία σφαιρική επιφάνεια S_2 ομόκεντρη με τη σφαίρα, η οποία



ΣΧΗΜΑ 2.8

Το q_1 βρίσκεται στο κέντρο της επιφάνειας και το q_2 εφάπτεται στο εξωτερικό της.



ΣΧΗΜΑ 2.9

Το διάγραμμα $E = f(r)$, για το ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης αγωγίμης σφαίρας.

έχει ακτίνα $r > R$. Λόγω σφαιρικής συμμετρίας το πεδίο είναι ακτινωτό, και το ίδιο σε όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας, οπότε ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή που ακολουθήσαμε κατά την εξαγωγή της σχέσης (2.4), βρίσκουμε την ροή που περνά από την επιλεγμένη επιφάνεια

$$\Phi_E = E 4\pi r^2$$

Όμως απ' το νόμο του Gauss ισχύει

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{εστ}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι **το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό σφαίρας με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στην επιφάνειά της είναι το ίδιο με το πεδίο που θα είχε δημιουργηθεί, αν όλο το φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της.**

Παράδειγμα 2-3

Θετικό φορτίο q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε μια σφαιρική περιοχή ακτίνας R , δηλαδή έχουμε μια σφαιρική κατανομή φορτίου. Να υπολογισθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της σφαιρικής κατανομής.

Απάντηση

Θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια S_1 ομόκεντρη της σφαιρικής κατανομής με ακτίνα $r < R$. Ονομάζουμε q' , V' το φορτίο και τον όγκο της κατανομής που εγκλωβίζεται από την επιφάνεια. Αν V όγκος ολόκληρης της σφαιρικής κατανομής, λόγω ομοιομορφίας θα ισχύει:

$$\frac{q'}{q} = \frac{V'}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3}$$

Άρα

$$q' = q \frac{r^3}{R^3}$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας το πεδίο είναι ακτινωτό και σε κάθε σημείο της γκαουσιανής μας επιφάνειας η ένταση έχει σταθερή τιμή, άρα η διερχόμενη ροή Φ_E από την επιφάνεια θα δίνεται απ' τη σχέση

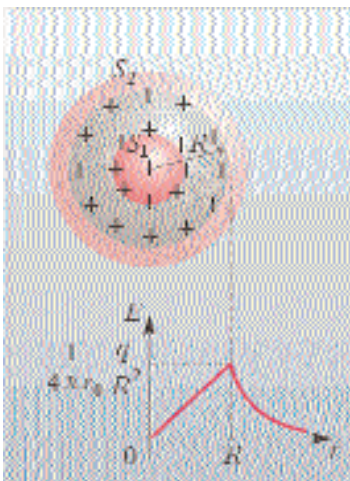
$$\Phi_E = E 4\pi r^2$$

(Για την εξαγωγή αυτής της σχέσης εργαζόμαστε παρόμοια με την εξαγωγή της 2.4).

Από το νόμο του Gauss μπορούμε να γράψουμε

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{εστ}}}{\epsilon_0} = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

Οι τρεις τελευταίες σχέσεις οδηγούν στην



ΣΧΗΜΑ 2.10

Το διάγραμμα $E = f(r)$, για το ηλεκτρικό πεδίο σφαιρικής κατανομής φορτίου.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαιρικής κατανομής φορτίου. Εργαζόμενοι ανάλογα με το προηγούμενο παράδειγμα 2-2 διαπιστώνουμε ότι η ένταση στο εξωτερικό της κατανομής θα δίνεται απ' τη σχέση

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Παράδειγμα 2-4

Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτισμένο επίπεδο άπειρης έκτασης. Η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη. Δίνεται το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας $\sigma = q/A$ (επιφανειακή πυκνότητα φορτίου).

Απάντηση

Από τη συμμετρία του προβλήματος έχουμε ότι οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες στο επίπεδο και ισαπέχουσες. Η γκαουσιανή επιφάνεια, που επιλέγουμε, είναι ένας κύλινδρος (σχ. 2.11) με τον άξονα του κάθετο στο επίπεδο, το οποίο αποτελεί και επίπεδο συμμετρίας του. Από την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου δεν διέρχονται δυναμικές γραμμές, άρα η διερχόμενη απ' αυτόν ροή είναι αυτή που διέρχεται απ' τις βάσεις του. Αν A το εμβαδό των βάσεων του κυλίνδρου και E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, έχουμε

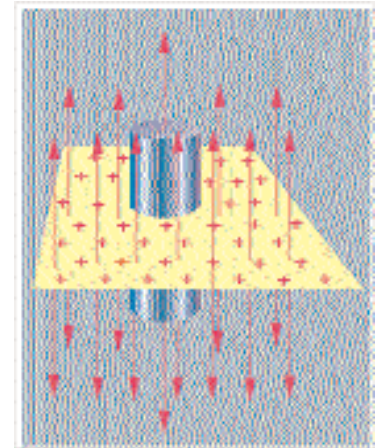
$$\Phi_E = 2EA$$

Όμως απ' το νόμο του Gauss ισχύει

$$\Phi_E = \frac{Q_{\epsilon\sigma}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις δίνουν

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

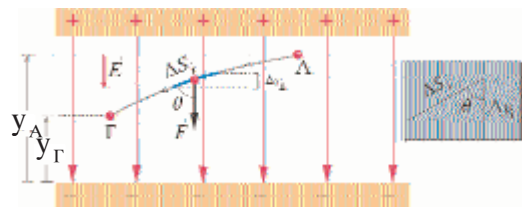


ΣΧΗΜΑ 2.11

Η κυλινδρική επιφάνεια είναι η επιφάνεια που επιλέγουμε για την εφαρμογή του νόμου του Gauss.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ

Έστω ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης \vec{E} , όπως αυτό του σχήματος 2.12. Ένα σωματίο μάζας m , που φέρει θετικό φορτίο q , όταν βρεθεί μέσα σ' αυτό το πεδίο, θα δεχτεί σταθερή δύναμη, $\vec{F} = \vec{E}q$. Έστω ότι το σωματίο υποχρεώνεται να κινηθεί απ' το A στο Γ, ακολουθώντας τον καμπύλο δρόμο ΑΓ. Χωρίζουμε την τροχιά σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος στοιχειωδών τμημάτων $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots$ τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ευθύγραμμα. Το



ΣΧΗΜΑ 2.12

Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση του φορτίου από το A στο Γ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

έργο της δύναμης του πεδίου, ΔW_i , για μια στοιχειώδη μετατόπιση ΔS_i θα είναι

$$\Delta W_i = F \Delta S_i \cos \theta = F \Delta y_i$$

Το συνολικό έργο της δύναμης του πεδίου υπολογίζεται με άθροιση των στοιχειώδων έργων

$$W = F \Delta y_1 + F \Delta y_2 + \dots \quad \text{ή}$$

$$W = F (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots)$$

Ο κατακόρυφος άξονας έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και αναφερόμαστε στις προβολές των διαφόρων διανυσμάτων πάνω σε αυτόν τον άξονα.

Ισχύει $F = Eq$ και $(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots) = (y_T - y_A)$ άρα $W = Eq(y_T - y_A)$ ή

$$W = (-Eqy_A) - (-Eqy_T)$$

Παρατηρούμε ότι το έργο εκφράζεται ως η διαφορά της αρχικής μείον την τελική τιμή της ποσότητας $(-Eqy)$, η οποία είναι συνάρτηση μόνο της θέσης και ονομάζεται (ηλεκτρική) **δυναμική ενέργεια** U . Αυτό που έχει σημασία είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU (και όχι το U), γιατί το αντίθετο αυτής της μεταβολής ισούται με το έργο.

$$W = -\Delta U \quad (2.7)$$

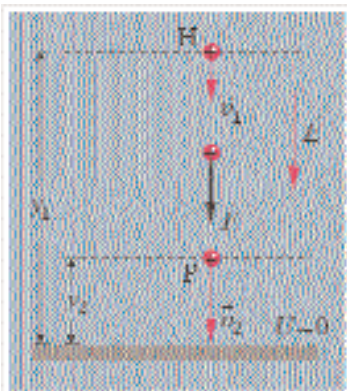
Για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε κάποιο σημείο του χώρου, όπου θεωρούμε ότι αυτή είναι μηδέν. Αυτό είναι το σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας ή σημείο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Από την σχέση (2.7) έχουμε $F \Delta y = -\Delta U$ ή

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta y}$$

Δηλαδή το αντίθετο της κλίσης της καμπύλης $U = f(y)$ μας δίνει την δύναμη F .

Επιπλέον, από τα παραπάνω βγαίνει το συμπέρασμα ότι το έργο της δύναμης του πεδίου, κατά την μετακίνηση ενός φορτίου μεταξύ δύο σημείων, δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά μόνο από τις τιμές της συνάρτησης U , συνεπώς και τις θέσεις των δύο σημείων. Αν λοιπόν το φορτίο κινηθεί κατά μήκος κλειστής διαδρομής, το έργο της δύναμης του πεδίου θα είναι μηδέν. Η δύναμη του ηλεκτροστατικού πεδίου, καθώς και κάθε άλλη δύναμη με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **συντηρητική** ή **διατηρητική δύναμη** και το αντίστοιχο πεδίο **συντηρητικό** ή **διατηρητικό**. Καλείται συντηρητική (ή διατηρητική) δύναμη, γιατί η μηχανική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου διατηρείται. Δηλαδή, μέσω του έργου της ούτε αφαιρείται, ούτε προστίθεται ενέργεια στο σώμα στο οποίο ασκείται. Απλά το έργο της εκφράζει την μετατροπή της δυναμικής σε κινητική ενέργεια και αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι ένα (θετικά) φορτισμένο σωματίδιο κινείται κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου, υπό την επίδραση μόνο της δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου, όπως στο σχήμα 2.13. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη μετακίνηση του σωματίου μεταξύ των θέσεων Η και Ρ.



ΣΧΗΜΑ 2.13

Όταν στο φορτίο δρα μόνο η πεδιακή δύναμη η ενέργειά του διατηρείται.

$$K_P - K_H = W$$

$$K_P - K_H = U_H - U_P$$

$$K_H + U_H = K_P + U_P$$

Άρα η ενέργεια του σωματίου στη θέση Η ισούται με την ενέργεια στη θέση Ρ. Επιπλέον, όταν ένα θετικά φορτισμένο σωματίο κινείται προς τη φορά των δυναμικών γραμμών μειώνεται η δυναμική του ενέργεια, η δύναμη του πεδίου παράγει (θετικό) έργο και η κινητική του ενέργεια αυξάνεται. Τα εντελώς αντίθετα συμβαίνουν, αν το παραπάνω σωματίο κινείται αντίθετα από την κατεύθυνση του πεδίου.

Εάν τώρα ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίο κινείται προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών, η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται, η κινητική του ενέργεια μειώνεται και το έργο της δύναμης του πεδίου έχει αρνητικό πρόσημο.

Ξεκινήσαμε την ενεργειακή μελέτη του ηλεκτροστατικού πεδίου από το ομογενές για το λόγο ότι δεν διαθέτουμε τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία, προκειμένου να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας από το ανομοιογενές πεδίο. Γενικεύοντας, αναφέρουμε ότι κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό πεδίο, άρα:

- (i) Το έργο της δύναμης του πεδίου ισούται με το αντίθετο της μεταβολής μιας δυναμικής συνάρτησης θέσης, δηλαδή της δυναμικής ενέργειας.
- (ii) Το έργο της ίδιας δύναμης μεταξύ δύο θέσεων εξαρτάται μόνο απ' τις θέσεις αυτές και όχι απ' το δρόμο, στον οποίο μετακινείται το σημείο εφαρμογής της ή ισοδύναμα, το έργο της σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.
- (iii) Η ενέργεια ενός φορτισμένου σωματίου διατηρείται, εφόσον ασκείται σ' αυτό μόνο η δύναμη του συντηρητικού πεδίου (ή πιθανώς και κάποια άλλη συντηρητική δύναμη).

Ας δούμε συγκεκριμένα την περίπτωση κατά την οποία ένα ακλόνητο σημειακό φορτίο Q αποτελεί την μοναδική πηγή πεδίου (σχήμα 2.14). Αποδεικνύεται ότι το έργο της δύναμης, που ασκεί το πεδίο σ' ένα φορτίο q , το οποίο μετακινείται μεταξύ των θέσεων Α και Γ είναι

$$W = k \frac{Qq}{r_1} - k \frac{Qq}{r_2}$$

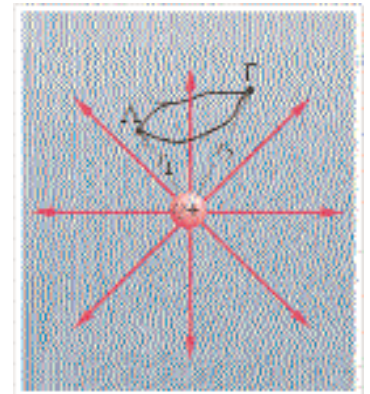
όπου

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Δηλαδή το έργο ισούται με την αρχική μείον την τελική τιμή της ποσότητας kQq/r . Αυτή η ποσότητα μπορεί να θεωρηθεί ως η **δυναμική ενέργεια του φορτίου q σε απόσταση r από το Q** (σχ. 2.15), εφόσον ληφθεί ως σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το άπειρο. Έχουμε λοιπόν

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} \tag{2.8}$$

Για να φέρουμε απ' το άπειρο, (απόσταση που δεν αλληλεπιδρούν), τα



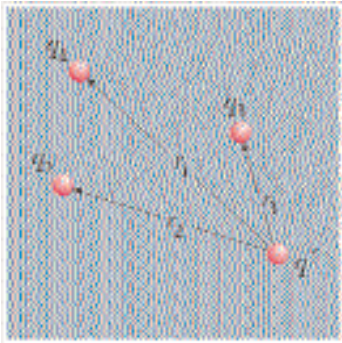
ΣΧΗΜΑ 2.14

Το έργο της πεδιακής δύναμης κατά τη μετακίνηση φορτίου από το Α στο Γ εξαρτάται από τα r_1, r_2 και όχι από τη διαδρομή.



ΣΧΗΜΑ 2.15

Το σύστημα των φορτίων αποθηκεύει δυναμική ενέργεια ίση με την δαπανώμενη ενέργεια για την τοποθέτησή τους σε απόσταση r .



ΣΧΗΜΑ 2.16

Η δυναμική ενέργεια του q' υπολογίζεται με την αρχή της επαλληλίας.

φορτία Q, q σε απόσταση r , θα πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια και το σύστημα των φορτίων αποθηκεύει αυτή την ενέργεια. Ουσιαστικά λοιπόν η σχέση (2.8) μας δίνει την δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων Q, q . Στην περίπτωση κατά την οποία το Q είναι ακλόνητο λέμε ότι η U είναι η δυναμική ενέργεια του q . Πράγματι, αν το q αφηθεί ελεύθερο να κινηθεί, η κινητική του ενέργεια θα αυξάνεται με αντίστοιχη απώλεια της U . Αν όμως τα δύο φορτία είναι ελεύθερα να κινηθούν τότε η αύξηση του αθροίσματος των κινητικών τους ενεργειών ισούται με την απώλεια της U . Συνεπώς η δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο φορτίων δίνεται απ' τη σχέση (2.8).

Θεωρούμε μια ομάδα ακίνητων σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots και ένα άλλο σημειακό φορτίο q' σε θέση που απέχει r_1, r_2, \dots αντίστοιχα από τα παραπάνω φορτία (σχ. 2.16). Η δυναμική ενέργεια του q' υπολογίζεται με την αρχή της επαλληλίας και ισούται με το άθροισμα

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q'}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q'}{r_2} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \sum \frac{q_i}{r_i} \quad (2.9)$$

Είδαμε ότι η δυναμική ενέργεια ενός ζεύγους φορτίων υπολογίζεται απ' τη σχέση 2.8. Θα υπολογίσουμε τώρα την δυναμική ενέργεια του συστήματος ενός μεγάλου πλήθους φορτίων. Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση του συστήματος τριών σημειακών φορτίων q_1, q_2, q_3 . Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των q_1, q_2 είναι $r_{1,2}$ μεταξύ των q_1, q_3 είναι $r_{1,3}$ και μεταξύ των q_2, q_3 είναι $r_{2,3}$. Τα τρία φορτία αρχικά βρίσκονται πολύ μακριά ώστε να μην αλληλεπιδρούν. Φέρνουμε αρχικά το q_1 στην τελική του θέση. Για να γίνει αυτό, προφανώς, δεν χρειάζεται ενέργεια. Η απαιτούμενη ενέργεια για να πλησιάσει το q_2 σε απόσταση $r_{1,2}$ από το q_1 είναι

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}$$

ενώ η απαιτούμενη ενέργεια για να πλησιάσει κατόπιν το q_3 σε απόσταση $r_{1,3}$ από το q_1 και $r_{2,3}$ από το q_2 είναι

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{2,3}}$$

Άρα η απαιτούμενη ενέργεια για τη συγκρότηση του συστήματος είναι

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{2,3}}$$

Αυτή η ενέργεια "αποθηκεύεται" στο σύστημα και είναι η δυναμική του ενέργεια. Γενικεύοντας, λέμε ότι για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων, αθροίζουμε τις ενέργειες αλληλεπίδρασης όλων των ζευγαριών και γράφουμε

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.10)$$

Τονίζουμε ότι κατά την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης κάθε ζευγάρι το λαμβάνουμε μία φορά (π.χ. αν περιλάβουμε στο άθροισμα τον όρο με

$i = 2$ και $j = 3$ δε θα λάβουμε υπόψη τον όρο με $i = 3$ και $j = 2$). Επίσης είναι προφανές ότι $i \neq j$.

Μπορούμε διαφορετικά να γράψουμε

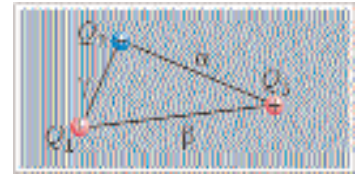
$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Τότε έχουμε στο άθροισμα όλους τους όρους 2 φορές.

Μονάδα της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας είναι το joule (J, τζουλ).

Παράδειγμα 2-5

Δίνονται τρία σημειακά φορτία $Q_1 = +2,0 \mu\text{C}$, $Q_2 = -4,0 \mu\text{C}$ και $Q_3 = +9,0 \mu\text{C}$ τοποθετημένα στις κορυφές τριγώνου με πλευρές $\alpha = 2,5 \text{ cm}$, $\beta = 3,0 \text{ cm}$ και $\gamma = 2,0 \text{ cm}$ όπως στο σχήμα 2.17. Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια του φορτίου Q_1 καθώς και η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.



ΣΧΗΜΑ 2.17

Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια του φορτίου Q_1 , υπολογίζεται από τη σχέση (2.9) και είναι

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \left(\frac{Q_2}{\gamma} + \frac{Q_3}{\beta} \right) \quad \text{ή}$$

$$U_1 = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} 2 \times 10^{-6} \text{C} \left(\frac{-4 \times 10^{-6} \text{C}}{2 \times 10^{-2} \text{m}} + \frac{9 \times 10^{-6} \text{C}}{3 \times 10^{-2} \text{m}} \right) \quad \text{ή}$$

$$U_1 = 1,8 \text{ J}$$

Με εφαρμογή της σχέσης (2.10) υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{\gamma} + \frac{Q_2 Q_3}{\alpha} + \frac{Q_1 Q_3}{\beta} \right)$$

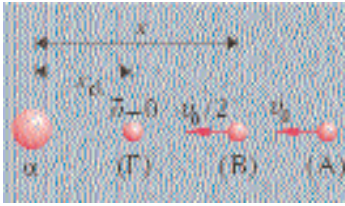
Με αντικατάσταση τιμών προκύπτει

$$U = -11 \text{ J}$$

Το αρνητικό πρόσημο της U σημαίνει ότι πρέπει να δαπανηθεί ενέργεια προκειμένου να "διαλυθεί" το σύστημα, δηλαδή να απομακρυνθούν τα φορτία μέχρι το άπειρο, ώστε να μην αλληλεπιδρούν. Το θετικό πρόσημο της U_1 εκφράζει ότι το φορτίο q_1 μπορεί να απομακρυνθεί απ' τη θέση του χωρίς δαπάνη ενέργειας από εξωτερικό παράγοντα.

Παράδειγμα 2-6

Ένα ποζιτρόνιο, που έχει θετικό φορτίο q και μάζα m , κατευθύνεται από μεγάλη απόσταση προς ένα σωματίδιο α . Το φορτίο του σωματιδίου α είναι $Q = 2q$ και η μάζα του 7000 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ποζιτρονίου, οπότε το σωματίδιο α μπορεί να θεωρηθεί ακλόνητο, ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η ταχύτητα του ποζιτρονίου,



ΣΧΗΜΑ 2.18

πριν αρχίσει η αλληλεπίδρασή του με το σωματίδιο α, είναι v_0 και όταν τα δύο σωματίδια απέχουν κατά x , η ταχύτητα έχει γίνει $v_0/2$. Με δεδομένη την απόσταση x , να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση, στην οποία πλησιάζουν τα σωματίδια.

Απάντηση

Το ποζιτρόνιο, εφόσον αλληλεπιδρά με το σωματίδιο α, επιβραδύνεται μέχρι που σταματά στιγμιαία και κατόπιν αρχίζει να απομακρύνεται. Επομένως, την στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του ποζιτρόνιου, έχουμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωματιδίων.

Το ποζιτρόνιο κινείται στο συντηρητικό πεδίο του σωματιδίου α, άρα η ενέργειά του διατηρείται. Οπότε

$$K_A + U_A = K_B + U_B \tag{ή}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qq}{x} \tag{ή}$$

$$\frac{3}{8} m v_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{x} \tag{I}$$

Ακόμα ισχύει:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \tag{ή}$$

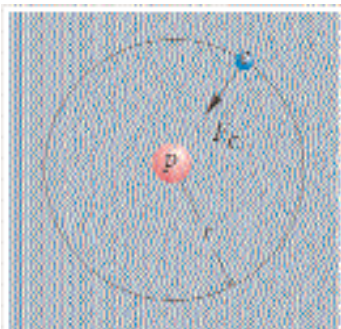
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qq}{x_{ελ}} \tag{ή}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{x_{ελ}} \tag{II}$$

Από τις (I) και (II) καταλήγουμε

$$x_{ελ} = \frac{3}{4} x$$

Παράδειγμα 2-7



ΣΧΗΜΑ 2.19

Το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης παίζει η δύναμη Coulomb.

Στο πρότυπο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου το ηλεκτρόνιο, που έχει φορτίο $q = -e$ ($e > 0$), περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα, ο οποίος έχει ένα πρωτόνιο με φορτίο e . Η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι ομαλή κυκλική σε μια καθορισμένη τροχιά ακτίνας r και το ρόλο της "κεντρομόλου δύναμης" έχει αναλάβει η δύναμη Coulomb. Να βρεθεί η ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Απάντηση

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου E είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \tag{I}$$

Η δύναμη Coulomb είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} \quad (\text{II})$$

Από τις (I) και (II) έχουμε

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} \quad (2.11)$$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ - ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ένα διανυσματικό φυσικό μέγεθος, το οποίο χαρακτηρίζει κάθε σημείο του πεδίου και ορίζεται με βάση την ασκούμενη δύναμη σ' ένα φορτίο -υπόθεμα- που θα βρεθεί σ' ένα σημείο του. Ένα άλλο χαρακτηριστικό του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ότι κάθε φορτίο, που θα βρεθεί σ' ένα σημείο του, "αποκτά" δυναμική ενέργεια. Με βάση αυτή την ιδιότητα θα ορίσουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, το οποίο ονομάζεται δυναμικό και η τιμή του είναι χαρακτηριστική για κάθε σημείο του πεδίου.

Ένα φορτίο-υπόθεμα q σε ένα σημείο A του ηλεκτροστατικού πεδίου έχει δυναμική ενέργεια U_A , ως προς κάποιο σημείο αναφοράς (σχ 2.20).

Δυναμικό, V_A σε ένα σημείο A ηλεκτροστατικού πεδίου ορίζουμε το μονόμετρο (ή βαθμωτό) μέγεθος, που ισούται με το πηλίκο της δυναμικής ενέργειας ενός (μικρού σημειακού) φορτίου q , το οποίο βρίσκεται στο A , προς το q . Η ισοδύναμη ισούται με το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση του φορτίου q απ' το A ως το σημείο αναφοράς, όπου θεωρούμε μηδέν τη δυναμική ενέργεια (και το δυναμικό), δια του q .

Το σημείο αναφοράς επιλέγεται συνήθως (όταν έχουμε εντοπισμένη κατανομή φορτίου) στο άπειρο και γράφουμε

$$V_A = \frac{U_A}{q} = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{q} \quad (2.12)$$

Η αλλαγή του σημείου αναφοράς ισοδυναμεί με πρόσθεση ενός σταθερού όρου στο δυναμικό ή στη δυναμική ενέργεια, ίδιου για κάθε σημείο του πεδίου.

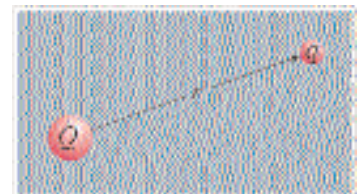
Η μονάδα δυναμικού στο S.I είναι το 1 volt (1V)

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Το δυναμικό του σημείου A στην περίπτωση του σχήματος 2.20 είναι

$$V_A = \frac{U_A}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.13)$$

με την προϋπόθεση ότι η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από το φορτίο Q , που είναι η πηγή του πεδίου. Στην



ΣΧΗΜΑ 2.20

Το φορτίο q στη θέση A έχει δυναμική ενέργεια U_A .

Την ενέργεια στοιχειωδών σωματιδίων τη μετράμε συχνά σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV). Το eV ισούται με την ενέργεια που κερδίζει ένα ηλεκτρόνιο όταν κινηθεί μεταξύ δύο θέσεων με διαφορά δυναμικού 1V.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Η διαφορά δυναμικού στα ηλεκτρικά κυκλώματα ονομάζεται και "τάση".

περίπτωση, κατά την οποία το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από ένα πλήθος σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots το δυναμικό ϕ ένα σημείο Α, που απέχει r_1, r_2, \dots αντίστοιχα από κάθε φορτίο δίνεται απ' τη σχέση

$$V_A = \frac{U_A}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i} \quad (2.14)$$

Η διαφορά δυναμικού $V_{ΑΓ}$ μεταξύ δύο σημείων Α, Γ του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι η διαφορά των δυναμικών τους και ισούται με το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μετακινηθεί ένα φορτίο q απ' το Α στο Γ, προς το φορτίο q . Ισοδύναμα, το $V_{ΑΓ}$ ισούται με το σταθερό πηλίκο της διαφοράς, που παρουσιάζει η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q μεταξύ των δύο σημείων, προς το φορτίο q .

$$V_{ΑΓ} = V_A - V_\Gamma = \frac{U_A - U_\Gamma}{q} = \frac{W_{Α \rightarrow \Gamma}}{q} \quad (2.15)$$

ΣΧΕΣΗ ΕΝΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Έστω δύο σημεία Α, Γ κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης \vec{E} (σχήμα 2.21). Θετικό φορτίο q μετατοπίζεται από το Α στο Γ, κινούμενο πάνω στη δυναμική γραμμή. Αν $\Delta \ell$ η μετατόπιση του φορτίου q , το έργο της δύναμης του πεδίου είναι

$$W_{Α \rightarrow \Gamma} = F \Delta \ell = Eq \Delta \ell \quad (2.16)$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α, Γ δίνεται απ' την σχέση (2.15), η οποία λόγω της (2.16) γίνεται:

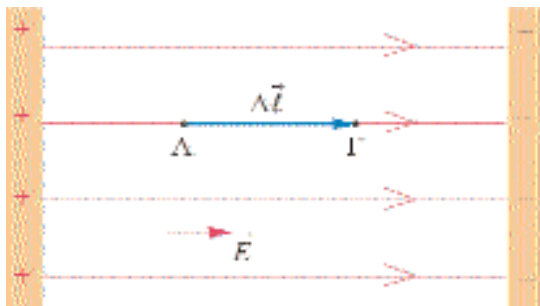
$$V_A - V_\Gamma = E \Delta \ell$$

Ονομάζουμε ΔV τη μεταβολή του δυναμικού $V_\Gamma - V_A$ οπότε

$$-\Delta V = E \Delta \ell \quad \text{ή}$$

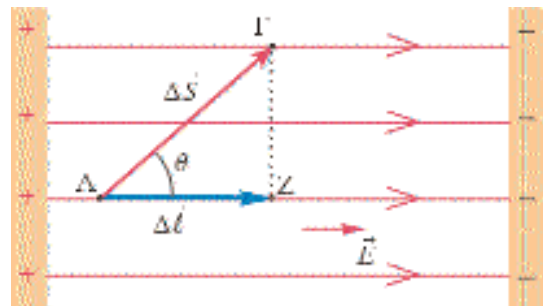
$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta \ell} \quad (2.17)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής το δυναμικό ελαττώνεται, οπότε τα θετικά φορτία "κινούνται αυθόρμητα" από θέσεις ψηλού δυναμικού προς θέσεις χαμηλού δυναμικού. Το αντίθετο ισχύει για τα αρνητικά φορτία. Αν τα σημεία



ΣΧΗΜΑ 2.21

Το δυναμικό κατά μήκος της δυναμικής γραμμής ελαττώνεται.



ΣΧΗΜΑ 2.22

Το $\Delta \ell$ είναι η προβολή της μετατόπισης ΔS κατά μήκος των δυναμικών γραμμών.

Α, Γ δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια δυναμική γραμμή (σχήμα 2.22) τότε, όπως γνωρίζουμε, το έργο της δύναμης του πεδίου θα δίνεται πάλι από τη σχέση (2.16), όπου

$$\Delta\ell = \Delta S \cos \theta$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση (2.17), με τη διαφορά ότι το διάνυσμα $\vec{\Delta\ell}$ είναι η προβολή της μετατόπισης $\vec{\Delta S}$, του φορτίου q , κατά μήκος των δυναμικών γραμμών.

Στην περίπτωση ανομοιογενούς πεδίου ισχύει η σχέση (2.17), με τη διαφορά ότι το $\Delta\ell$ είναι πάρα πολύ μικρό (απειροστό), ώστε κατά μήκος του να θεωρούμε την ένταση σταθερή.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Ισοδυναμική επιφάνεια ονομάζεται μια νοητή επιφάνεια, της οποίας όλα τα σημεία έχουν το ίδιο δυναμικό.

Θεωρούμε ένα φορτίο -υπόθεμα q , που μετατοπίζεται πάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια. Εφ' όσον η διαφορά του δυναμικού είναι μηδέν για δύο τυχαία σημεία της ισοδυναμικής επιφάνειας και το έργο της δύναμης του πεδίου θα είναι μηδέν, για μετατόπιση του φορτίου q από το ένα σημείο στο άλλο. Αυτό συνεπάγεται ότι η δύναμη και η ένταση του πεδίου, είναι κάθετες στην εφαπτόμενη της ισοδυναμικής επιφάνειας σε όλα τα σημεία της. Αν δεν συνέβαινε αυτό, η δύναμη του πεδίου F θα είχε συνιστώσα εφαπτόμενη στην ισοδυναμική επιφάνεια, άρα θα είχαμε παραγωγή έργου. Συνεπώς **οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.**

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε να δώσουμε τη μορφή των ισοδυναμικών επιφανειών σε δύο απλές περιπτώσεις:

(i) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q , είναι ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες, στο κέντρο των οποίων βρίσκεται το Q (σχ. 2.23α).

(ii) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι επίπεδες επιφάνειες κάθετες στις δυναμικές γραμμές (σχ. 2.23β).

Παράδειγμα 2-8

Ηλεκτρικό δίπολο ονομάζεται ένα σύστημα δύο απολύτως ίσων και αντίθετων φορτίων $q_1 = +q$ και $q_2 = -q$, που βρίσκονται μεταξύ τους σε σταθερή απόσταση d . Να βρεθεί η ισοδυναμική επιφάνεια, της οποίας όλα τα σημεία έχουν δυναμικό μηδέν (σημείο αναφοράς το άπειρο).

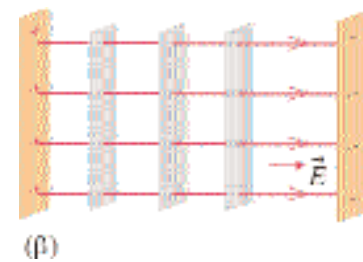
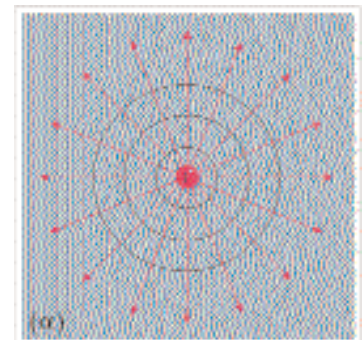
Απάντηση

Έστω ότι το P είναι ένα σημείο της ζητούμενης επιφάνειας, άρα ισχύει

$$V_P = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_2} = 0 \quad \text{ή} \quad r_1 = r_2$$

Δηλαδή το P ισαπέχει από τα σημεία A, B. Τα σημεία του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, ανήκουν στο μεσοκάθετο επίπεδο αυτού του τμήματος. Άρα η ζητούμενη ισοδυναμική επιφάνεια είναι το μεσοκάθετο επίπεδο του AB.

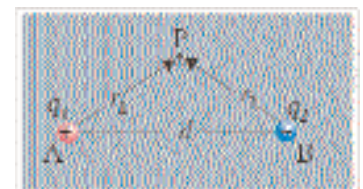
Η μονάδα έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο S.I. είναι:
1N/C = 1V/m



ΣΧΗΜΑ 2.23

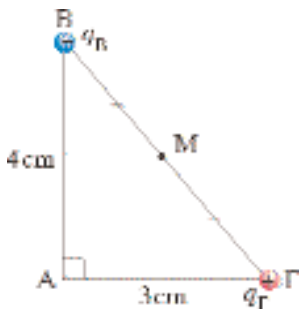
(α) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαιρικές επιφάνειες στο κέντρο των οποίων βρίσκεται το φορτίο.

(β) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι επίπεδες επιφάνειες κάθετες στις δυναμικές γραμμές.



ΣΧΗΜΑ 2.24

Το μεσοκάθετο επίπεδο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο φορτία ενός ηλεκτρικού δίπολου είναι ισοδυναμική επιφάνεια.



ΣΧΗΜΑ 2.25

Παράδειγμα 2-9

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή τη γωνία \hat{A} , $(AB) = 4,0\text{ cm}$ και $(A\Gamma) = 3,0\text{ cm}$. Στα Β, Γ υπάρχουν τοποθετημένα τα φορτία $q_B = -2,0\text{ }\mu\text{C}$ και $q_\Gamma = +1,0\text{ }\mu\text{C}$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης του πεδίου των φορτίων q_B, q_Γ κατά τη μετακίνηση ενός φορτίου $q = -3,0\text{ }\mu\text{C}$ από το Α στο μέσο Μ της (ΒΓ).

Απάντηση

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει $(B\Gamma) = 5,0\text{ cm}$, άρα $(BM) = (\Gamma M) = 2,5\text{ cm}$

Το δυναμικό στο Α είναι:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_B}{(AB)} + \frac{q_\Gamma}{(A\Gamma)} \right] \quad \text{ή}$$

$$V_A = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left[\frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{4 \times 10^{-2} \text{ m}} + \frac{10^{-6} \text{ C}}{3 \times 10^{-2} \text{ m}} \right] \quad \text{ή}$$

$$V_A = -1,5 \times 10^5 \text{ V}$$

Υπολογίζουμε κατόπιν το δυναμικό στο Μ

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_B}{(BM)} + \frac{q_\Gamma}{(\Gamma M)} \right]$$

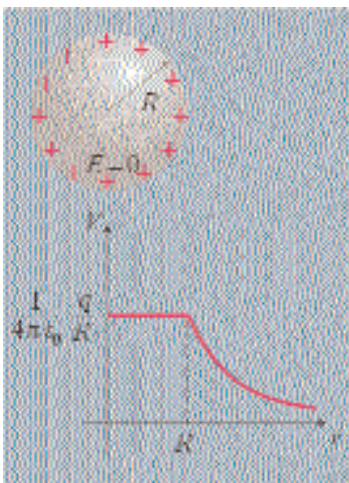
Με αντικατάσταση τιμών προκύπτει $V_M = -3,6 \times 10^5 \text{ V}$.

Έχουμε απ' το ορισμό της διαφοράς δυναμικού

$$V_A - V_M = \frac{W_{A \rightarrow M}}{q} \quad \text{ή} \quad W_{A \rightarrow M} = q (V_A - V_M) \quad \text{ή}$$

$$W_{A \rightarrow M} = -3 \times 10^{-6} \text{ C} \left[-1,5 \times 10^5 \text{ V} - (-3,6 \times 10^5 \text{ V}) \right] \quad \text{ή}$$

$$W_{A \rightarrow M} = -0,63 \text{ J}$$



ΣΧΗΜΑ 2.26

Το δυναμικό συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο φορτισμένου σφαιρικού αγωγού.

Παράδειγμα 2-10

Δίνεται φορτισμένος συμπαγής μεταλλικός σφαιρικός αγωγός ακτίνας R, που φέρει φορτίο q. Να βρεθεί το δυναμικό συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο του αγωγού και να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα.

Απάντηση

Είδαμε στο παράδειγμα 2-2 ότι το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας είναι ίδιο με το πεδίο που θα δημιουργηθεί στην περίπτωση κατά την οποία συγκεντρωθεί όλο το φορτίο στο κέντρο της.

Άρα για $r > R$ ισχύει

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Στην επιφάνεια της σφαίρας το δυναμικό είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Στο εσωτερικό της σφαίρας είδαμε ότι η ένταση του πεδίου είναι μηδέν. Αυτό έχει ως συνέπεια τη μη παραγωγή έργου στην περίπτωση μετακίνησης ενός φορτίου μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του αγωγού. Άρα όλα τα σημεία του αγωγού έχουν το ίδιο δυναμικό, όσο δηλαδή και τα σημεία της επιφάνειάς του. Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 2.26.

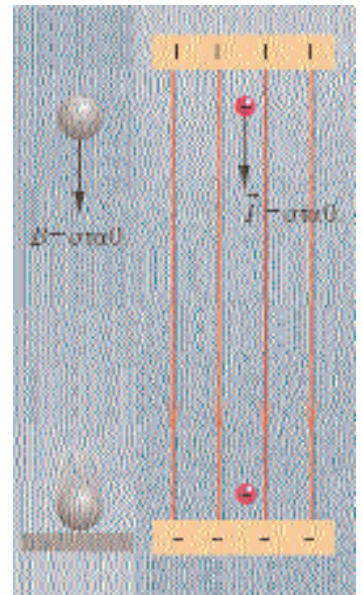
ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Εδώ θα εξετάσουμε την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Μπορούμε να πούμε ότι αυτή η κίνηση παρουσιάζει μια αναλογία με την κίνηση ενός σώματος πλησίον της επιφάνειας της Γης, υπό την επίδραση μόνο του βάρους του.

Όταν βρεθεί ένα φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο θα δέχεται σταθερή δύναμη \vec{F} , παράλληλη με τις δυναμικές γραμμές. Αν το φορτίο του σωματιδίου είναι θετικό, τότε η δύναμη έχει την ίδια φορά με την ένταση, διαφορετικά είναι αντίρροπη. Στα προβλήματα που μελετάμε δεν λαμβάνουμε υπόψη τριβές, αντιστάσεις κλπ. Επίσης το βάρος των σωματιδίων είναι αμελητέο σε σχέση με την δύναμη \vec{F} από το ηλεκτρικό πεδίο. Συνεπώς η μοναδική δύναμη, που ασκείται στα σωματίδια, είναι η σταθερή δύναμη \vec{F} , άρα αυτά αποκτούν σταθερή επιτάχυνση στην διεύθυνση των δυναμικών γραμμών, δηλαδή

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$$

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, με τη βοήθεια της κινηματικής, μπορούμε να μελετάμε την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, όπως θα φανεί από τις παρακάτω εφαρμογές.



ΣΧΗΜΑ 2.27

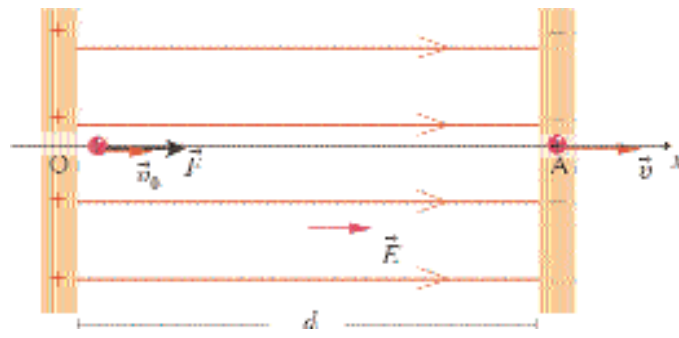
Η ελεύθερη πτώση σώματος από μικρό ύψος και η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, κατά μήκος των δυναμικών γραμμών, είναι κινήσεις ομαλά επιταχυνόμενες.

Εφαρμογή: ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕ ΤΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Έστω ένα σωματίδιο, μάζας m , με φορτίο q , εισέρχεται, τη στιγμή $t_0=0$, με ταχύτητα \vec{v}_0 σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Η ταχύτητα \vec{v}_0 είναι ομόρροπη με τις δυναμικές γραμμές (σχήμα 2.28).

Οι εξισώσεις της κίνησης είναι

$$v = v_0 + at = v_0 + \frac{Eq}{m} t \tag{2.18}$$



ΣΧΗΜΑ 2.28

Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με αρχική ταχύτητα παράλληλη στις δυναμικές γραμμές.

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{Eq}{m} t^2 \quad (2.19)$$

Αν το σωματίδιο δεν έχει αρχική ταχύτητα v_0 οι εξισώσεις είναι

$$v = at = \frac{Eq}{m} t \quad (2.20)$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{Eq}{m} t^2 \quad (2.21)$$

Απαλοίφοντας τον χρόνο από τις εξισώσεις (2.20) και (2.21) παίρνουμε την σχέση

$$v = \sqrt{\frac{2Eq}{m} x} \quad (2.22)$$

Αν είναι V η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Ο και Α, ισχύει

$$E = \frac{V}{d}$$

Η ταχύτητα στη θέση Α μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της (2.22), αν αντικαταστήσουμε την ένταση E από την προηγούμενη σχέση και επιπλέον θέσουμε $x = d$

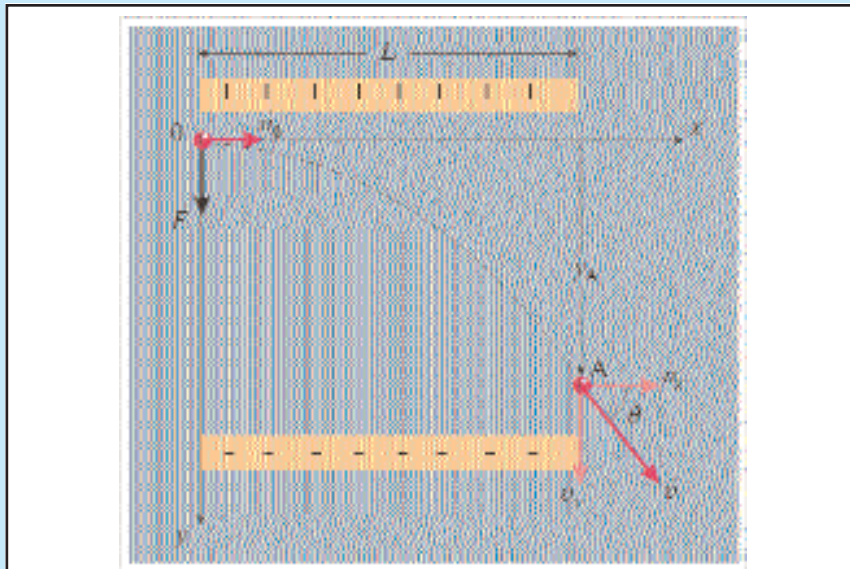
$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (2.23)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε οδηγηθεί, αν εφαρμόζαμε το θεωρημά μεταβολής της κινητικής ενέργειας, κατά την κίνηση του σωματιδίου μεταξύ των θέσεων Ο και Α

$$K_A - K_O = W_E \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m v^2 - 0 = qV \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

Εφαρμογή: ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΘΕΤΗ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Φορτισμένο σωματίδιο, μάζας m και φορτίου q , εισέρχεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ταχύτητα v_0 κάθετη στις δυναμικές γραμμές (σχ 2.29). Αυτό θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση, η οποία αποτελείται από δύο ανεξάρτητες κινήσεις



ΣΧΗΜΑ 2.29

Το σωματίδιο εκτελεί σύνθετη κίνηση.

(i) Μία ευθύγραμμη ομαλή στον άξονα των x , αφού σ' αυτή τη διεύθυνση δε δέχεται δύναμη και

(ii) Μια ομαλά επιταχυνόμενη στον άξονα των y , αφού σ' αυτήν την διεύθυνση δέχεται σταθερή δύναμη.

Η κίνηση περιγράφεται κατά άξονα ως εξής:

άξονας x

$$v_x = v_0 \tag{2.24}$$

$$x = v_0 t \tag{2.25}$$

άξονας y

$$v_y = at = \frac{Eq}{m} t \tag{2.26}$$

$$y = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{Eq}{m} t^2 \tag{2.27}$$

Με απαλοιφή του χρόνου από τις (2.25) και (2.26) προκύπτει η συνάρτηση $y = y(x)$ για την τροχιά

$$y = \frac{Eq}{2m v_0^2} x^2 \quad (2.28)$$

Από τη μορφή της παραπάνω σχέσης συμπεραίνουμε ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι παραβολική.

Ο χρόνος κίνησης του σωματιδίου στο ηλεκτροστατικό πεδίο μπορεί να εξαχθεί από την σχέση (2.25), αν θέσουμε $x = L$

$$t = \frac{L}{v_0} \quad (2.29)$$

Η εκτροπή y_A υπολογίζεται από την (2.27), θέτοντας την τιμή του t που βρήκαμε ή από την (2.28) θέτοντας $x = L$

$$y_A = \frac{Eq}{2m v_0^2} L^2 \quad (2.30)$$

Το μέτρο της ταχύτητας στη θέση A είναι

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Η τελευταία σχέση λόγω των (2.24), (2.26) και (2.29) γίνεται

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{EqL}{mv_0}\right)^2}$$

Η γωνιακή εκτροπή θ υπολογίζεται απ' τη σχέση

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

η οποία από τις (2.24), (2.26) και (2.29) δίνει

$$\tan \theta = \frac{EqL}{mv_0^2} \quad (2.31)$$

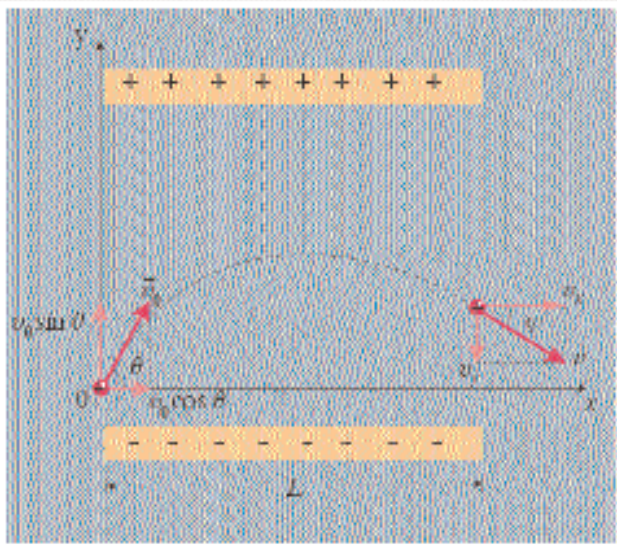
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω κίνηση παρουσιάζει αναλογία με την οριζόντια βολή στο βαρυτικό πεδίο.

Εφαρμογή: ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΟΞΕΙΑ ΓΩΝΙΑ ΜΕ ΤΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Έστω ότι το σωματίδιο εισέρχεται στο πεδίο, όπως στο σχήμα 2.30. Σ' αυτή την περίπτωση εργαζόμαστε για τη μελέτη της κίνησης, όπως στις προηγούμενες εφαρμογές, με τη διαφορά ότι η αρχική ταχύτητα έχει συνιστώσες και στους δύο άξονες.

Η κίνηση περιγράφεται, κατά άξονα, ως εξής:
 άξονας x

$$v_x = v_0 \cos \theta$$



ΣΧΗΜΑ 2.30

Η κίνηση του σωματιδίου είναι παρόμοια με την πλάγια βολή σώματος στο βαρυτικό πεδίο, στο κενό.

$$x = v_0 \cos \theta t$$

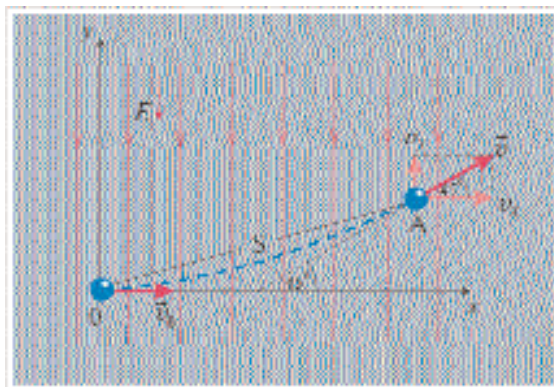
άξονας y

$$v_y = v_0 \sin \theta - \frac{Eq}{m} t$$

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} \frac{Eq}{m} t^2$$

Παράδειγμα 2-11

Ηλεκτρόνιο εισέρχεται, τη στιγμή $t_0 = 0$, σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E = 1,0 \times 10^3 \text{ N/C}$ με ταχύτητα $v_0 = 4,0 \times 10^6 \text{ m/s}$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Κάποια χρονική στιγμή t_1 το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη θέση Α, όπου η ταχύτητα του \vec{v} σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^\circ$ με τη \vec{v}_0 .



ΣΧΗΜΑ 2.31

Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 καθώς και η απόσταση S του Α από το σημείο εισόδου στο πεδίο.

Δίνονται $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και μάζα ηλεκτρονίου $m = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Απάντηση

Γράφουμε τις σχέσεις για την κίνηση κατά άξονα x

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 t$$

άξονας y

$$v_y = \frac{E e}{m} t$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{E e}{m} t^2$$

Στη θέση Α, εφόσον η v σχηματίζει γωνία 45° με την v_x , ισχύει

$$v_x = v_y \quad \text{ή}$$

$$v_0 = \frac{E e}{m} t_1 \quad \text{ή}$$

$$t_1 = \frac{m v_0}{E e} \quad \text{ή}$$

$$t_1 = \frac{9,0 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 4,0 \times 10^6 \text{ m/s}}{10^3 \text{ N/C} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} \quad \text{ή}$$

$$t_1 = 2,25 \times 10^{-8} \text{ s} \approx 2,3 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Την στιγμή t_1 έχουμε

$$x_A = v_0 t_1 = 4,0 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 2,25 \times 10^{-8} \text{ s} \quad \text{ή}$$

$$x_A = 9,0 \times 10^{-2} \text{ m} = 9,0 \text{ cm}$$

και

$$y_A = \frac{1}{2} \frac{E e}{m} t_1^2 \quad \text{ή}$$

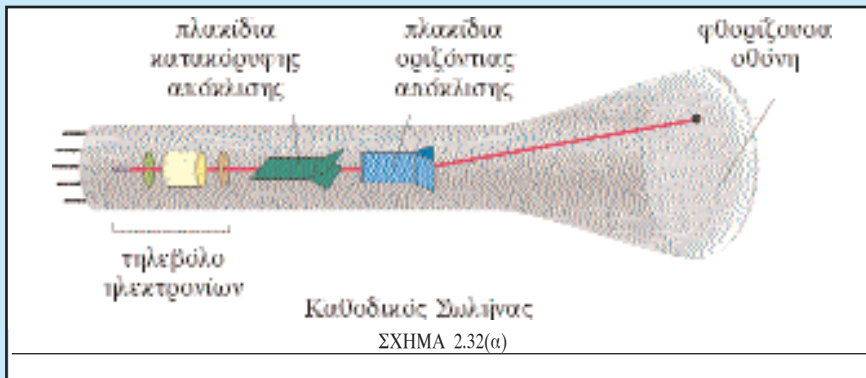
$$y_A = \frac{1}{2} \frac{10^3 \text{ N/C} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}{9 \times 10^{-31} \text{ kg}} (2,25 \times 10^{-8} \text{ s})^2 \quad \text{ή}$$

$$y_A = 4,5 \times 10^{-2} \text{ m} = 4,5 \text{ cm}$$

Η ζητούμενη απόσταση είναι

$$S = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 10 \text{ cm}$$

Εφαρμογή: Ο ΚΑΘΟΔΙΚΟΣ ΣΩΛΗΝΑΣ

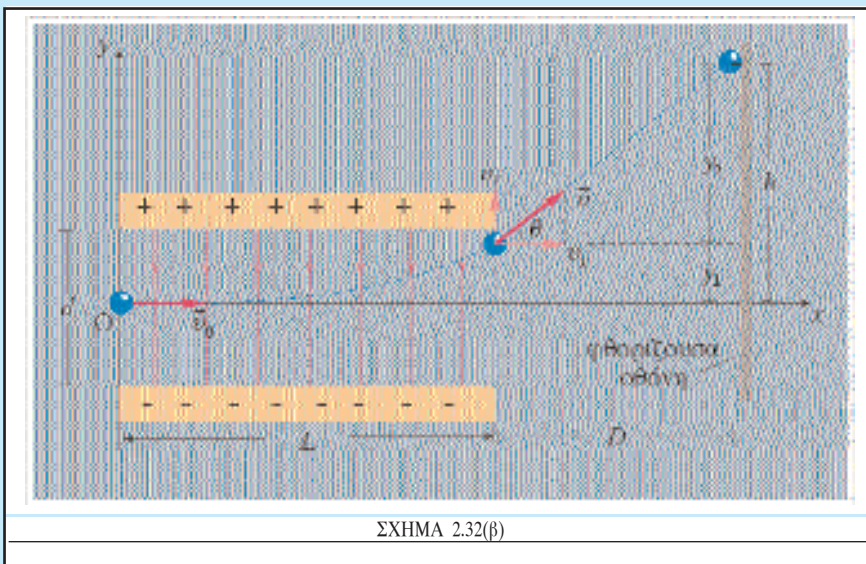


Οι καθοδικοί σωλήνες είναι συσκευές που συναντιώνται στον παλμογράφο, τον οποίο θα εξετάσουμε αργότερα, και παραλαγές τους απαντούν στην τηλεόραση, στους υπολογιστές, στα ραντάρ κτλ.

Στο εσωτερικό του καθοδικού σωλήνα μια διάταξη, που ονομάζεται "τηλεβόλο ηλεκτρονίων", εκτοξεύει δέσμη ηλεκτρονίων, η οποία χτυπά σε μια φθορίζουσα οθόνη με αποτέλεσμα το σημείο επαφής της δέσμης με την οθόνη να είναι ορατό σαν φωτεινή κηλίδα.

Για να μην σκεδάζεται η δέσμη των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό του σωλήνα υπάρχει υψηλό κενό (πίεση 10^{-7} atm).

Το τηλεβόλο ηλεκτρονίων περιέχει την θερμαινόμενη κάθοδο απ' όπου εκπέμπονται τα ηλεκτρόνια και μια άνοδο. Μεταξύ καθόδου-ανόδου τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από τάση V_1 . Το τηλεβόλο περιέχει και τμήματα ελέγχου της έντασης της δέσμης



καθώς και εστίασης. Ακόμη στο σωλήνα υπάρχουν δύο ζεύγη επίπεδων πλακιδίων. Το ένα ζεύγος έχει τα πλακίδια κατακόρυφα και το άλλο οριζόντια, άρα, αν εφαρμοστεί τάση στα πλακίδια, η δέσμη εκτρέπεται αντίστοιχα οριζόντια ή κατακόρυφα. Θα

μελετήσουμε την εκτροπή της δέσμης, όταν εφαρμοστεί τάση V_2 μόνο στα οριζόντια πλακίδια.

Μεταξύ καθόδου-ανόδου τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από τάση V_1 , οπότε αποκτούν ταχύτητα v_0 , η οποία από την σχέση (2.23) είναι

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_1}{m}} \quad (2.32)$$

Η εκτροπή y_1 λόγω της (2.30), της (2.32) και της $E = \frac{V_2}{d}$ είναι

$$y_1 = \frac{V_2 L^2}{4dV_1}$$

Η δέσμη των ηλεκτρονίων μετά την έξοδό της από τα πλακίδια κινείται ευθύγραμμα, άρα από τη γεωμετρία του προβλήματος ισχύει

$$\tan \theta = \frac{y_2}{D}$$

Η τελευταία λόγω της (2.31), της (2.32) και της $E = V_2/d$ δίνει

$$y_2 = \frac{DV_2 L}{2dV_1}$$

Η συνολική εκτροπή της δέσμης των ηλεκτρονίων είναι h , άρα

$$h = y_1 + y_2$$

$$h = \frac{V_2 L}{2dV_1} \left(\frac{L}{2} + D \right)$$

Όμως στην πράξη είναι $L \ll D$, άρα

$$\frac{L}{2} + D \approx D$$

οπότε

$$h = \frac{LD}{2dV_1} V_2$$

Παρατηρούμε ότι η εκτροπή h είναι ανάλογη της τάσης V_2 , που εφαρμόζεται στα πλακίδια, συνεπώς με κατάλληλη βαθμονόμηση μπορούμε από την απόκλιση της κηλίδας να μετράμε τάση.

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΩΣ ΑΝΑΛΟΓΟ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Θα μελετήσουμε το βαρυτικό πεδίο, ως ανάλογο του ηλεκτροστατικού πεδίου, γι' αυτό θα ήταν σκόπιμο να συνοψίσουμε μερικά βασικά γνωρίσματα του ηλεκτροστατικού πεδίου.

1. Ηλεκτρικό πεδίο ονομάζουμε το χώρο, μέσα στον οποίο αν βρεθεί ένα φορτίο (υπόθεμα), θα δεχτεί δύναμη. Πηγή του ηλεκτρικού (εδώ ηλεκτροστατικού) πεδίου είναι κάθε φορτίο.

2. Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, σε ένα σημείο του Α, ορίζουμε το διανυσματικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο της δύναμης \vec{F} , που θα ασκηθεί σε φορτίο q , το οποίο θα βρεθεί στο Α, προς το φορτίο q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Τονίζουμε ότι η ένταση \vec{E} έχει την κατεύθυνση της \vec{F} , όταν το φορτίο q είναι θετικό (σχ. 2.33).

3. Η ένταση E σε απόσταση r από ένα σημειακό φορτίο - πηγή Q του πεδίου είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

4. Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό.

5. Η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου-υποθέματος q σε απόσταση r από ένα φορτίο-πηγή Q είναι

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

Αυτή είναι και η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων.

6. Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων υπολογίζεται από τη σχέση

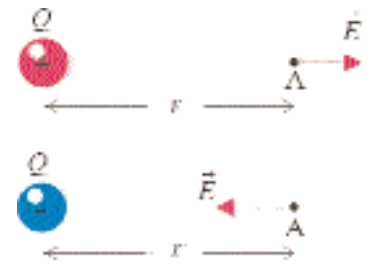
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

7. Δυναμικό, σ' ένα σημείο Α του ηλεκτροστατικού πεδίου, ονομάζουμε το μονόμετρο μέγεθος, που ισούται με το σταθερό πηλίκο της δυναμικής ενέργειας U_A ενός φορτίου q , που βρίσκεται στο Α, προς το q ή ισούται με το πηλίκο του έργου της δύναμης του ηλεκτροστατικού πεδίου, όταν το q μετατοπιστεί από το Α ως το σημείο αναφοράς δυναμικού (συνήθως στο άπειρο), προς το q

$$V_A = \frac{U_A}{q} = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{q}$$

8. Το δυναμικό σε απόσταση r από ένα φορτίο Q (με σημείο αναφοράς το άπειρο) είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



ΣΧΗΜΑ 2.33

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο Α έχει την κατεύθυνση της δύναμης, που ασκείται σε θετικό φορτίο, το οποίο τοποθετείται στο σημείο Α.

9. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Γ του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται απ' τη σχέση

$$V_{ΑΓ} = V_A - V_Γ = \frac{U_A - U_Γ}{q} = \frac{W_{Α→Γ}}{q}$$

$U_A - U_Γ$ είναι η διαφορά δυναμικής ενέργειας του φορτίου q μεταξύ των θέσεων Α, Γ και $W_{Α→Γ}$ το έργο της δύναμης του πεδίου όταν το φορτίο q μετακινηθεί απ' το Α στο Γ.

Αντίστοιχα με το ηλεκτρικό πεδίο, έχουμε για το βαρυτικό τα εξής :

1. Βαρυτικό πεδίο ονομάζουμε το χώρο, μέσα στον οποίο αν βρεθεί μια σημειακή μάζα-υπόθεμα m , θα δεχτεί δύναμη \vec{F} . Μια ή περισσότερες μάζες αποτελούν την πηγή του βαρυτικού πεδίου (ισχύει η αρχή της επαλληλίας).

2. Ένταση του βαρυτικού πεδίου, σ' ένα σημείο Α, ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος \vec{g} , το οποίο ισούται με το σταθερό πηλίκο της δύναμης \vec{F} , που θα ασκηθεί σε μια μάζα m που θα τοποθετηθεί στο Α, προς τη μάζα m

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Τονίζουμε ότι η \vec{g} έχει την κατεύθυνση της \vec{F} .

3. Το g σε απόσταση r από την μάζα M (πηγή του πεδίου), είναι

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Αυτή η σχέση προκύπτει από τον ορισμό της έντασης \vec{g} και το νόμο της παγκόσμιας έλξης.

4. Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό, αυτό σημαίνει ότι

(i) Το έργο της βαρυτικής δύναμης, πάνω σε μια μάζα, ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή

$$W = -\Delta U$$

(ii) Το έργο της δύναμης βαρύτητας είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που θα ακολουθηθεί μεταξύ δυο θέσεων και εξαρτάται μόνο από τις θέσεις αυτές.

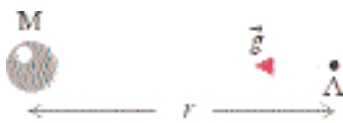
(iii) Η μηχανική ενέργεια ενός σώματος διατηρείται, εφόσον αυτό κινείται υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης.

5. Η δυναμική ενέργεια μιας μάζας m σε απόσταση r από την μάζα M πηγή του πεδίου, είναι

$$U = -G \frac{M m}{r}$$

Αυτή είναι και η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών

6. Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος μαζών δίνεται από τη σχέση



ΣΧΗΜΑ 2.34

Η κατεύθυνση της έντασης \vec{g} στο σημείο Α είναι ίδια με την κατεύθυνση της δύναμης, που ασκείται σε μια σημειακή μάζα η οποία τοποθετείται στο σημείο Α.

Μονάδα έντασης του βαρυτικού πεδίου είναι το 1 N/kg

Παγκόσμια βαρυτική σταθερά:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$U = -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -\frac{1}{2} G \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

Για παράδειγμα η δυναμική ενέργεια του συστήματος, που απεικονίζεται στο σχήμα 2.35, είναι

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{\gamma} - G \frac{m_2 m_3}{\alpha} - G \frac{m_1 m_3}{\beta}$$

7. Δυναμικό, σ' ένα σημείο A του βαρυτικού πεδίου ονομάζουμε το μονόμετρο μέγεθος, που ισούται με το σταθερό πηλίκο της δυναμικής ενέργειας μιας μάζας m που βρίσκεται στο A, προς την μάζα m ή ισοδύναμα, ισούται με το έργο της πεδιακής δύναμης κατά τη μετατόπιση της μάζας m από το A ως το άπειρο

$$V_A = \frac{U}{m} = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{m}$$

8. Το δυναμικό σε απόσταση r από τη μάζα M -πηγή του πεδίου είναι

$$V = -G \frac{M}{r}$$

Το αρνητικό πρόσημο του δυναμικού και της δυναμικής ενέργειας εκφράζει το γεγονός ότι πρέπει να δαπανηθεί ενέργεια για να μεταφερθεί, από ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου ως το άπειρο, μια μάζα m .

9. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και Γ του βαρυτικού πεδίου ισούται με το πηλίκο της διαφοράς της δυναμικής ενέργειας $U_A - U_\Gamma$, μιας μάζας m μεταξύ των θέσεων A και Γ, προς την m ή ισούται με το έργο της βαρυτικής δύναμης, κατά τη μετατόπιση της μάζας m απ' το A στο Γ, προς την μάζα m

$$V_A - V_\Gamma = \frac{U_A - U_\Gamma}{m} = \frac{W_{A \rightarrow \Gamma}}{m}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι μάζες στις προηγούμενες σχέσεις, θεωρούνται σημειακές ή σφαιρικής κατανομής. Οι αποστάσεις στην περίπτωση των μαζών σφαιρικής κατανομής μετρούνται απ' το κέντρο των σφαιρών. Επίσης στα προβλήματα όλα τα ουράνια σώματα θεωρούνται ομογενείς σφαίρες.

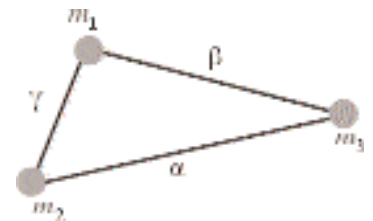
ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

Θα εξειδικεύσουμε τα παραπάνω στο βαρυτικό πεδίο της Γης, την οποία θεωρούμε ομογενή σφαίρα μάζας M_Γ και ακτινας R_Γ . Θα συμβολίζουμε ακόμη με h το ύψος από την επιφάνεια της Γης και r την απόσταση απ' το κέντρο της. Προφανώς ισχύει $r = R_\Gamma + h$.

(α) Η δύναμη που ασκεί η Γη σ' ένα σώμα μάζας m ονομάζεται βάρος του σώματος και δίνεται απ' τη σχέση

$$B = G \frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2}$$

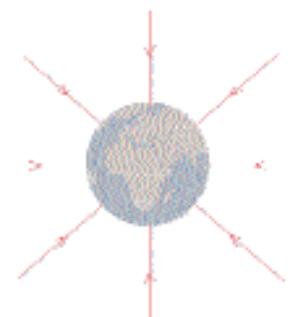
(β) Η ένταση του γήινου βαρυτικού πεδίου ορίζεται απ' τη σχέση



ΣΧΗΜΑ 2.35

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος έχει αρνητικό πρόσημο πρέπει συνεπώς να δαπανηθεί ενέργεια για να απομακρυνθούν μεταξύ τους οι μάζες.

Μονάδα βαρυτικού δυναμικού είναι το 1 J/kg



ΣΧΗΜΑ 2.36

Το γήινο βαρυτικό πεδίο είναι ακτινωτό. Μόνο σε μικρές περιοχές μπορεί να θεωρηθεί ομογενές.

$$\vec{g} = \frac{\vec{B}}{m}$$

Άρα η ένταση \vec{g} ισούται με την "επιτάχυνση της βαρύτητας" (αρχή της ισοδυναμίας).

(γ) Το g δίνεται απ' τη σχέση

$$g = G \frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$$

και όπως παρατηρούμε (σχ. 2.37) μειώνεται με το ύψος h . Στην επιφάνεια της Γης έχουμε

$$g_0 = \frac{G M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \tag{2.33}$$

(δ) Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m στο βαρυτικό πεδίο της Γης, με σημείο αναφοράς στο άπειρο, είναι

$$U = -G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma + h}$$

(ε) Το δυναμικό του γήινου βαρυτικού πεδίου (με σημείο αναφοράς το άπειρο) δίνεται απ' τη σχέση

$$V = -G \frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)}$$

Η μεταβολή του δυναμικού, με την απόσταση r (για $r \geq R_\Gamma$) απ' το κέντρο της Γης, φαίνεται στο σχήμα 2.38.

Παρατήρηση:

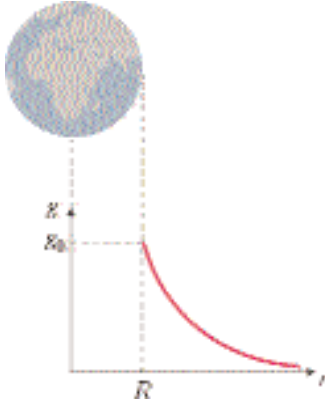
Το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι ανομοιογενές. Σε μικρές όμως περιοχές μπορεί να θεωρηθεί ομογενές ($\vec{g} = \text{σταθ.}$). Τότε δεν θεωρούμε μηδενική τη δυναμική ενέργεια ενός σώματος στο άπειρο, αλλά σε οποιοδήποτε οριζόντιο επίπεδο επιθυμούμε. Η δυναμική ενέργεια του σώματος θα είναι $(+mgh)$ ή $(-mgh)$, ανάλογα αν το σώμα βρίσκεται κατά h πάνω ή κάτω από αυτό το επίπεδο.

ΟΜΟΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΟΥ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΜΕ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Από τη μελέτη του βαρυτικού και του ηλεκτροστατικού πεδίου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δύο πεδία παρουσιάζουν ορισμένες τυπικές ομοιότητες, αλλά και διαφορές.

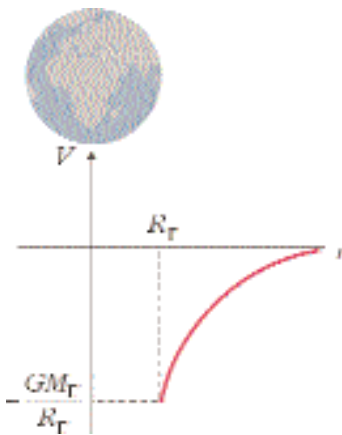
1. Ομοιότητες

- (α) Είναι και τα δύο συντηρητικά πεδία
- (β) Η ένταση κάθε πεδίου, σε απόσταση r από σημειακή πηγή, είναι αντιστρόφως ανάλογη του r^2 , ενώ το δυναμικό είναι αντιστρόφως ανάλογο του r .
- (γ) Οι δυνάμεις των πεδίων είναι κεντρικές, δηλαδή οι δυνάμεις μεταξύ δύο σημειακών φορτίων (ή μαζών) έχουν τη διεύθυνση της ευθείας



ΣΧΗΜΑ 2.37

Το \vec{g} μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια της Γης.



ΣΧΗΜΑ 2.38

Το δυναμικό του γήινου βαρυτικού πεδίου, συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της Γης.

που ενώνει τα δύο φορτία (ή τις μάζες). Επιπλέον αυτές οι δυνάμεις είναι ανάλογες με το γινόμενο των φορτίων (ή των μαζών) και αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ των φορτίων (ή των μαζών).

2. Διαφορές

- (α) Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πάντα ελκτικές, ενώ οι ηλεκτρικές μπορεί να είναι ελκτικές ή απωστικές.
- (β) Οι βαρυτικές δυνάμεις, σε αντίθεση με τις ηλεκτρικές, δεν θωρακίζονται.
- (γ) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου g είναι και επιτάχυνση της βαρύτητας. Δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.
- (δ) Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων (σε ατομικό ή μοριακό επίπεδο) είναι αμελητέες, σε σχέση με τις αντίστοιχες ηλεκτρικές. Λόγου χάρη μεταξύ πρωτονίου και ηλεκτρονίου η ηλεκτρική δύναμη είναι περίπου 10^{39} φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη βαρυτική.
- (ε) Επειδή υπάρχουν θετικά και αρνητικά φορτία και συνήθως στον μακρόκοσμο αλληλοεξουδετερώνονται, “υπερισχύουν” σ’ αυτόν οι βαρυτικές δυνάμεις, αφού δεν υπάρχουν “αρνητικές” και “θετικές” μάζες, ώστε να αλληλοεξουδετερώνεται η δράση τους.

Παράδειγμα 2-12

Αφήνουμε ένα σώμα να πέσει από σημείο Γ, το οποίο βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία φθάνει το σώμα στο έδαφος, εφ’ όσον αμελήσουμε τη δράση της ατμόσφαιρας. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας g_0 , στην επιφάνεια της Γης και η ακτίνα της Γης R_Γ .

Απάντηση

Η ενέργεια του σώματος διατηρείται, γιατί σε αυτό ασκείται μόνο το βάρος του, που είναι συντηρητική δύναμη.

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_A + U_A \quad \text{ή} \quad 0 - G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \quad \text{ή}$$

$$v^2 = \frac{2G M_\Gamma h}{R_\Gamma (R_\Gamma + h)}$$

Αν λάβουμε υπόψη και την σχέση (2.33) καταλήγουμε

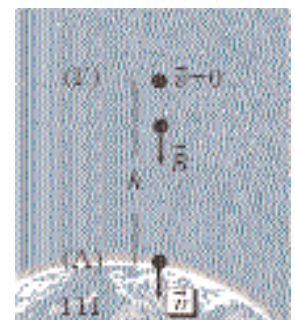
$$v = \sqrt{\frac{2g_0 h R_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$$

Στην περίπτωση που είναι $h \ll R_\Gamma$, θέτουμε $R_\Gamma + h \approx R_\Gamma$, οπότε

$$v = \sqrt{2 g_0 h}$$

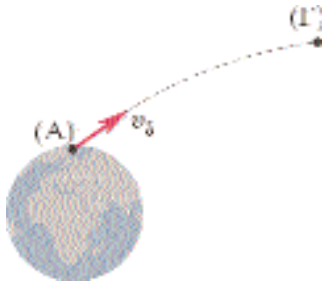
Παρατήρηση:

Αν γνωρίζαμε εξ αρχής ότι $h \ll R_\Gamma$ (δηλαδή $g \approx g_0 = \text{σταθ.}$), θα θεωρούσαμε στο Α μηδέν την δυναμική ενέργεια και στο Γ θα ήταν $U_\Gamma = mg_0 h$, οπότε



ΣΧΗΜΑ 2.39

Η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται, γιατί σ’ αυτό ασκείται μόνο το βάρος του που είναι συντηρητική δύναμη.



ΣΧΗΜΑ 2.40

Η μηχανική ενέργεια σώματος που εκτοξεύεται με την ταχύτητα διαφυγής, είναι μηδέν.

$$K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_A + U_A \quad \text{ή} \quad 0 + m g_0 h = \frac{1}{2} m v^2 + 0 \quad \text{ή}$$

$$v = \sqrt{2 g_0 h}$$

Παράδειγμα 2-13

Να υπολογισθεί η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης, δηλαδή η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να βληθεί το σώμα από την επιφάνεια της Γης, ώστε να μην επιστρέψει σ' αυτή. Να θεωρηθεί αμελητέα η αντίσταση του αέρα. Ακόμα δίνονται $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ και $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$.

Απάντηση

Έστω ότι το σώμα βάλλεται από το έδαφος με την ταχύτητα διαφυγής v_{δ} . Αυτό μόλις θα καταφέρει να διαφύγει από την έλξη της Γης και θα φθάσει με μηδενική ταχύτητα σ' ένα σημείο Γ, στο άπειρο. Αφού στο σώμα δρα μόνο το βάρος του, διατηρείται η μηχανική του ενέργεια, άρα

$$K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} m v_{\delta}^2 - G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}} = 0 + 0 \quad \text{ή}$$

$$v_{\delta} = \sqrt{2G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}}$$

Η τελευταία λόγω της (2.33) γίνεται

$$v_{\delta} = \sqrt{2g_0 R_{\Gamma}}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των μεγεθών

$$v_{\delta} = \sqrt{2 \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 64 \times 10^5 \text{ m}} = 8\sqrt{2} \times 10^3 \text{ m/s} \quad \text{ή}$$

$$v_{\delta} \approx 11,3 \text{ km/s}$$

Παράδειγμα 2-14

Να υπολογισθεί η ταχύτητα, η περίοδος και η μηχανική ενέργεια ενός δορυφόρου της Γης, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Απάντηση

Το βάρος δρα ως κεντρομόλος δύναμη, άρα

$$B = F_k \quad \text{ή}$$

$$G \frac{M_{\Gamma} m}{(R_{\Gamma} + h)^2} = m \frac{v^2}{R_{\Gamma} + h} \quad \text{ή}$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}$$

(2.34)

Η περίοδος της κίνησης είναι

$$T = \frac{2\pi}{v}(R_{\Gamma} + h)$$

η οποία λόγω της (2.34) δίνει

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_{\Gamma} + h)^3}{G M_{\Gamma}}}$$

Η κινητική ενέργεια του δορυφόρου είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ή } K = \frac{1}{2}mG \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} \text{ ή}$$

$$K = \frac{GM_{\Gamma}m}{2(R_{\Gamma} + h)}$$

Η δυναμική ενέργεια του δορυφόρου δίνεται από τη σχέση

$$U = -\frac{GM_{\Gamma}m}{R_{\Gamma} + h}$$

Η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου είναι

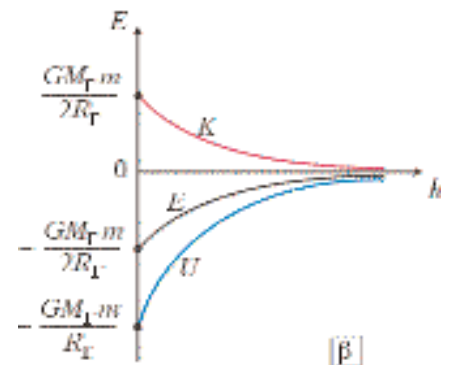
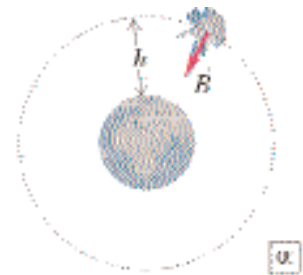
$$E = K + U \text{ ή}$$

$$E = \frac{GM_{\Gamma}m}{2(R_{\Gamma} + h)} - G \frac{M_{\Gamma}m}{R_{\Gamma} + h} \text{ ή}$$

$$E = -\frac{GM_{\Gamma}m}{2(R_{\Gamma} + h)}$$

Συμπέρασμα:

Όσο ψηλότερα βρίσκεται ο δορυφόρος τόσο μικρότερη είναι η ταχύτητά του, τόσο μεγαλύτερη η περίοδος του και τόσο μεγαλύτερη η ενέργειά του.



ΣΧΗΜΑ 2.41

(α) Το βάρος του δορυφόρου παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. (β) Η κινητική, η δυναμική και η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου συναρτήσει του ύψους h από την επιφάνεια της Γης.

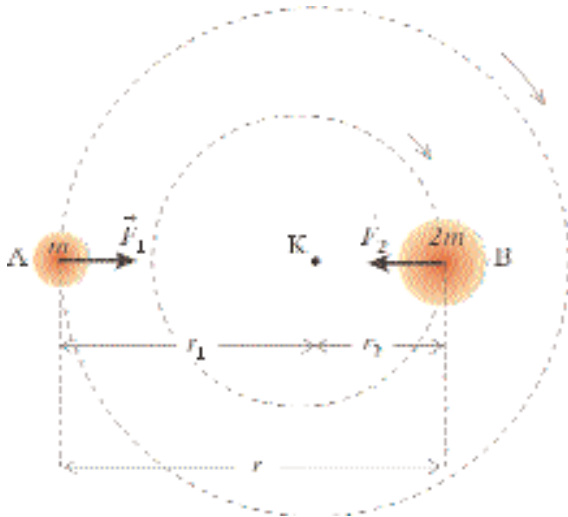
Παράδειγμα 2-15

Δίνεται ένα σύστημα δύο αστέρων με μάζες m και $2m$ αντίστοιχα. Η διάκεντρος των αστέρων είναι r και αυτοί στρέφονται γύρω από το σημείο Κ της διακέντρου (κέντρο μάζας), υπό την επίδραση της αμοιβαίας βαρυτικής έλξης. Αυτό το "διπλό άστρο" δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα του σύμπαντος. Να βρεθεί η περίοδος περιστροφής, T , και η ενέργεια του συστήματος των δύο άστρων.

Απάντηση

Από το νόμο της παγκόσμιας έλξης έχουμε

$$F_1 = F_2 = G \frac{2m^2}{r^2} \tag{I}$$



ΣΧΗΜΑ 2.42
Διπλό άστρο.

Η \vec{F}_1 είναι κεντρομόλος δύναμη για το A άστρο, ενώ η \vec{F}_2 για το B, άρα

$$F_1 = m \frac{v_1^2}{r_1} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r_1 \tag{II}$$

$$F_2 = 2m \frac{v_2^2}{r_2} = 2m \frac{4\pi^2}{T^2} r_2 \tag{III}$$

Από τις (II), (III) και με δεδομένο ότι $F_1 = F_2$, προκύπτει

$$r_1 = 2r_2$$

άρα εύκολα καταλήγουμε ότι

$$r_1 = \frac{2r}{3} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{r}{3} \tag{IV}$$

Με συνδυασμό των σχέσεων I, II και IV εξάγεται ότι

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{3Gm}}$$

Η κινητική ενέργεια του αστέρα A υπολογίζεται από τις I, II και IV

$$K_A = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{2}{3} G \frac{m^2}{r}$$

Ανάλογα βρίσκουμε την κινητική ενέργεια του B

$$K_B = \frac{1}{2} 2m v_2^2 = \frac{1}{3} G \frac{m^2}{r}$$

Η ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E = K_A + K_B + U \tag{ή}$$

$$E = \frac{2}{3} G \frac{m^2}{r} + \frac{1}{3} G \frac{m^2}{r} - G \frac{2m^2}{r} \tag{ή}$$

$$E = -G \frac{m^2}{r}$$

ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ Ή ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΙΚΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

Έστω σύστημα δύο ή περισσότερων σωμάτων, απομονωμένο από το υπόλοιπο σύμπαν και ότι οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων είναι συντηρητικές (ηλεκτρικές ή και βαρυτικές). Για το σύστημα των σωμάτων ισχύουν:

- α) Η αρχή διατήρησης της ορμής, λόγω απομόνωσής του.
- β) Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, λόγω συντηρητικών δυνάμεων.

Παράδειγμα 2-16

Δύο σημειακές μάζες m_1, m_2 κρατούνται ακίνητες σε απόσταση r_1 . Οι μάζες αφήνονται ελεύθερες και αρχίζουν να πλησιάζουν, λόγω Νευτώνειας έλξης. Να βρεθούν οι ταχύτητες των μαζών τη στιγμή που η απόστασή τους έχει γίνει r_2 . Οι μάζες δεν υφίστανται δράσεις από άλλα σώματα στο σύμπαν.

Απάντηση

Το σύστημα των μαζών είναι μονωμένο, άρα από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \quad \text{ή} \quad 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \quad (I)$$

Αφού τα σώματα του συστήματος δέχονται μόνο την μεταξύ τους βαρυτική έλξη, θα διατηρείται η ενέργεια του συστήματος

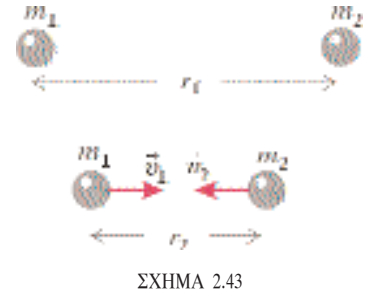
$$U_{αρχ} + K_{1, αρχ} + K_{2, αρχ} = U_{τελ} + K_{1, τελ} + K_{2, τελ} \quad \text{ή}$$

$$-G \frac{m_1 m_2}{r_1} + 0 + 0 = -G \frac{m_1 m_2}{r_2} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (II)$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (I) και (II), βρίσκουμε

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}$$



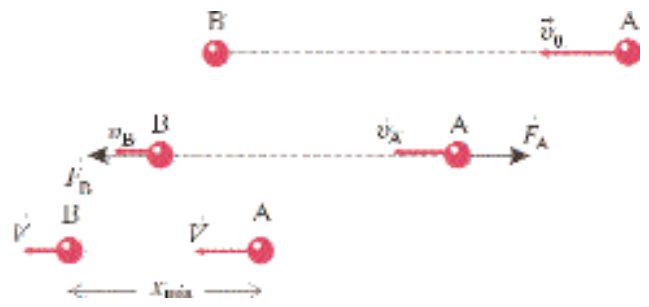
Παράδειγμα 2-17

Πυρήνας A με μάζα m_1 και φορτίο q_1 κινείται με ταχύτητα v_0 κατευθυνόμενος προς έναν αρχικά ακίνητο πυρήνα B, με μάζα m_2 και φορτίο q_2 . Η αρχική απόσταση των πυρήνων είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην αλληλεπιδρούν. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν οι πυρήνες. Η βαρυτική αλληλεπίδραση των πυρήνων είναι αμελητέα σε σχέση με την ηλεκτρική αλληλεπίδραση και επιπλέον οι πυρήνες δεν δέχονται δράσεις από άλλα σώματα.

Απάντηση

Όσο πλησιάζουν οι πυρήνες, ο A κινείται επιβραδυνόμενος και ο B επιταχυνόμενος. Αρχικά, επειδή $v_B < v_A$, η σχετική απόσταση των πυρήνων ελαττώνεται και ελαχιστοποιείται τη στιγμή που είναι $v_A = v_B = V$. Κατόπιν η απόσταση μεταξύ των πυρήνων αρχίζει πάλι να αυξάνεται.

Το σύστημα των πυρήνων είναι μονωμένο, άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής



$$m_1 v_0 = m_1 V + m_2 V \quad \text{ή}$$

$$V = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \quad (I)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα, έχουμε

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = k \frac{q_1 q_2}{x_{ελ}} + \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 \tag{II}$$

όπου

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Από τις (I) και (II) προκύπτει

$$x_{ελ} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{2k q_1 q_2}{v_0^2}$$

ΠΥΚΝΩΤΕΣ

ΓΕΝΙΚΑ



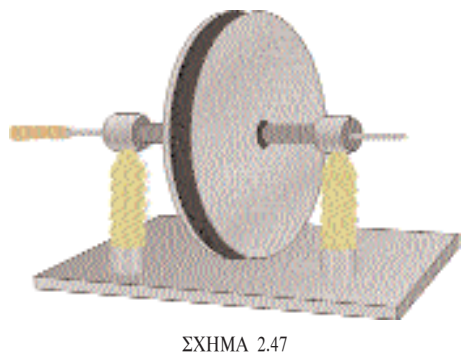
ΣΧΗΜΑ 2.45

Διάφοροι πυκνωτές που χρησιμοποιούνται στη σύγχρονη ηλεκτρονική



ΣΧΗΜΑ 2.46

Ο πυκνωτής συμβολίζεται με δύο παράλληλες γραμμές.



ΣΧΗΜΑ 2.47

Επίπεδος Πυκνωτής.

Εδώ θα ασχοληθούμε με τους πυκνωτές, δηλαδή τις διατάξεις που υπάρχουν στις περισσότερες σύγχρονες ηλεκτρονικές συσκευές.

Η παραγωγή και η λήψη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, η εξομάλυνση ανορθωμένης τάσης, η λειτουργία των φλας των φωτογραφικών μηχανών, η διόρθωση του συντελεστή ισχύος κυκλώματος, ο φραγμός συνεχούς ρεύματος, οι αντιπαρασιτικές διατάξεις και η εκκίνηση των κινητήρων είναι μερικές απ' τις εφαρμογές που χρησιμοποιούνται πυκνωτές.

Γενικά πυκνωτή ονομάζουμε ένα σύστημα δύο αγωγών (συνήθως αγωγία φύλλα), που βρίσκονται πλησίον ο ένας στον άλλον και ανάμεσά τους παρεμβάλλεται κενό ή κάποιο μονωτικό υλικό. Τους δύο αγωγούς τους ονομάζουμε οπλισμούς του πυκνωτή και τους φορτίζουμε, ώστε να φέρουν αντίθετα φορτία (κατ' απόλυτη τιμή ίση). Φορτίο Q του πυκνωτή ονομάζουμε την απόλυτη τιμή του φορτίου του κάθε οπλισμού.

Όταν οι οπλισμοί είναι επίπεδες πλάκες ίσων εμβαδών, ο πυκνωτής ονομάζεται επίπεδος. Όταν ο ένας οπλισμός είναι σφαιρικός αγωγός και ο άλλος ομόκεντρος σφαιρικός φλοιός, ο πυκνωτής ονομάζεται σφαιρικός. Τέλος, όταν ο ένας οπλισμός είναι κυλινδρικός αγωγός και ο άλλος ομοαξονικός κυλινδρικός φλοιός ο πυκνωτής ονομάζεται κυλινδρικός.

Ο πυκνωτής είναι μια χρήσιμη ηλεκτρική διάταξη, γιατί λειτουργεί σαν μία αποθήκη φορτίου. Για την τοποθέτηση των φορτίων στους οπλισμούς δαπανάται ενέργεια, η οποία αποθηκεύεται στον πυκνωτή με τη μορφή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή ο πυκνωτής είναι μία "αποθήκη" φορτίου και ενέργειας.

Θα εξηγήσουμε τώρα γιατί οι πυκνωτές έχουν, σε σχέση με τους απλούς αγωγούς, μεγαλύτερη ικανότητα αποθήκευσης φορτίου. Έστω μία μεταλλική πλάκα Α φορτισμένη με θετικό φορτίο (σχ. 2.48). Συνδέουμε την πλάκα με ηλεκτροσκόπιο και καταγράφουμε την ένδειξη. Κατόπιν πλησιάζουμε στην πλάκα Α μια, αρχικά αφόρτιστη γειωμένη μεταλλική πλάκα Β. Αυτή φορτίζεται από επαγωγή με αρνητικό φορτίο. Παρατηρούμε τότε ότι η ένδειξη του ηλεκτροσκοπίου, άρα και το δυναμικό της πλάκας Α, μειώθηκε. Επομένως, η πλάκα Α, απ' τη στιγμή που πλησίασε η Β, αύξησε την ικανότητά της για αποθήκευση φορτίου.

Περιμέναμε όμως θεωρητικά τη μείωση του δυναμικού της A, όταν πλησίασε η B; Προφανώς ναι, γιατί στο δυναμικό της πλάκας A, που οφείλεται στα θετικά της φορτία προστίθεται το αρνητικό δυναμικό, που οφείλεται στα αρνητικά φορτία της πλάκας B.

Το μέγεθος με το οποίο μετράμε την ικανότητα ενός πυκνωτή να αποθηκεύει φορτία, το ονομάζουμε χωρητικότητα και ισούται με το πηλίκο του φορτίου του πυκνωτή προς τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του.

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2.35}$$

Μονάδα χωρητικότητας είναι το 1 farad (1 F) (φαράντ)

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

Η μονάδα 1 F είναι πολύ μεγάλη, γι' αυτό στην πράξη χρησιμοποιούνται τα υποπολλαπλάσια $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$, $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$, $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$.

Ενδεικτικά, η Γη θεωρούμενη ως σφαιρικός πυκνωτής με τον άλλο οπλισμό στο άπειρο έχει χωρητικότητα 700 μF .

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η χωρητικότητα είναι σταθερό, χαρακτηριστικό μέγεθος για κάθε πυκνωτή και εξαρτάται απ' τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του καθώς και από το υλικό, που παρεμβάλεται μεταξύ των οπλισμών του.

Παρατήρηση: Παραπάνω αναφερθήκαμε στο δυναμικό της πλάκας A, δηλαδή στο δυναμικό ενός αγωγού. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.10, το δυναμικό κάθε σημείου του αγωγού έχει την ίδια τιμή. Έτσι το δυναμικό αγωγού είναι ίσο με το δυναμικό οποιουδήποτε σημείου του, άρα και οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειάς του. Αυτό ισούται με το πηλίκο της δυναμικής ενέργειας U , ενός φορτίου q , στην επιφάνεια του αγωγού (η του έργου W της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση του q από την επιφάνεια του αγωγού ως το άπειρο), προς το φορτίο q .

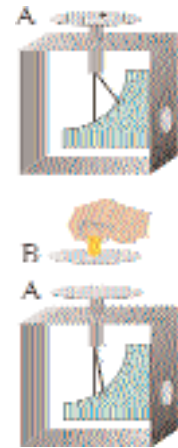
$$V = \frac{U}{q} = \frac{W}{q}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ

Θεωρούμε ένα επίπεδο πυκνωτή, που μεταξύ των οπλισμών του υπάρχει κενό (ή αέρας). Το πεδίο του πυκνωτή είναι ομογενές στην κεντρική του περιοχή, όχι όμως στα άκρα του (σχ. 2.49). Στην περίπτωση, που η απόσταση d μεταξύ των οπλισμών είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις τους, μπορούμε να θεωρούμε ότι πεδίο υπάρχει μόνο στο εσωτερικό του πυκνωτή και μάλιστα είναι παντού ομογενές. Συνεπώς η ένταση E και η διαφορά δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών, συνδέονται με τη σχέση

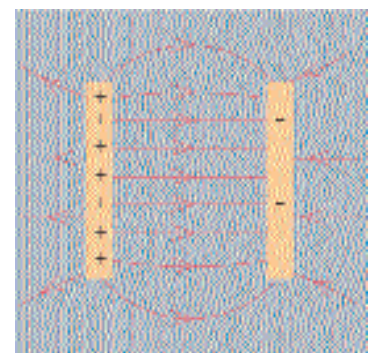
$$V = E d$$

Επιλέγουμε μια γκαουσιανή κλειστή επιφάνεια, σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εφόσον οι οπλισμοί έχουν σχήμα ορθογωνίου ή σε σχήμα κυλίνδρου, εφόσον οι οπλισμοί είναι κυκλικοί δίσκοι. Μια τομή της παραπάνω επιφάνειας απεικονίζεται στο σχήμα 2.50. Η ροή που περνά από την κλειστή επιφάνεια είναι αυτή που περνά από τη μία έδρα του παραλληλεπιπέδου (ή



ΣΧΗΜΑ 2.48

Η πλάκα A πλησίον της B αυξάνει την ικανότητά της για αποθήκευση φορτίου.



ΣΧΗΜΑ 2.49

Το πεδίο γύρω από την κεντρική περιοχή των πλακών μπορεί να θεωρηθεί ομογενές.



ΣΧΗΜΑ 2.50

Όταν η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους (στο σχήμα αυτό δεν φαίνεται για λόγους ευκρίνειας) θεωρούμε ότι υπάρχει πεδίο μόνο στο εσωτερικό των πλακών το οποίο είναι ομογενές.

από τη μια βάση του κυλίνδρου), η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου και έχει εμβαδόν A , όσο το εμβαδόν του κάθε οπλισμού

$$\Phi_E = EA$$

Από το νόμο του Gauss όμως έχουμε

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Η οποία λόγω της (2.35) γίνεται

$$\Phi_E = \frac{CV}{\epsilon_0} \quad \text{ή} \quad EA = \frac{CEd}{\epsilon_0} \quad \text{ή}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{2.35}$$

Δηλαδή, η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη με το εμβαδόν των οπλισμών και αντιστρόφως ανάλογη της μεταξύ τους απόστασης.

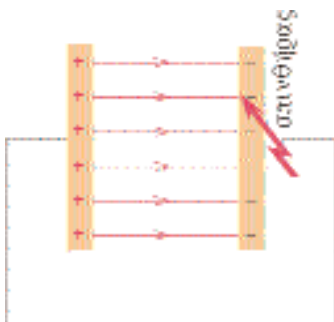
ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΠΥΚΝΩΤΗ

Όπως αναφέραμε ο φορτισμένος πυκνωτής έχει αποθηκευμένη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με το έργο που δαπανήθηκε για τη φόρτισή του. Για να διαπιστώσουμε ότι ένας φορτισμένος πυκνωτής έχει αποθηκευμένη ενέργεια δεν έχουμε παρά να φέρουμε, μέσω ενός καλωδίου, σε επαφή τους δύο οπλισμούς του, θα πραγματοποιηθεί ταχύτατη εκφόρτιση του πυκνωτή με εμφάνιση ενός σπινθήρα (σχ. 2.51).

Θα υπολογίσουμε τώρα την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, που έχει αποθηκεύσει ένας πυκνωτής, μέσω του απαιτούμενου έργου για τη φόρτισή του. Η φόρτιση μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορους τρόπους π.χ. με τη διαδικασία που περιγράψαμε στην περίπτωση του σχήματος 2.48. Στην πράξη γίνεται με μεταφορά (με τη βοήθεια μπαταρίας) φορτίων από τον ένα οπλισμό στον άλλο. Θεωρούμε πως η φόρτιση γίνεται τοποθετώντας διαδοχικά στους οπλισμούς πολύ μικρές ποσότητες φορτίου. Επιλέγουμε αυτή τη διαδικασία σαν πιο βολική για να κάνουμε υπολογισμούς, μιας και το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη διαδικασία φόρτισης. Κατά την τοποθέτηση μιάς πολύ μικρής ποσότητας φορτίου ΔQ_i , δεχόμαστε ότι δεν άλλαξε ουσιαστικά η τάση V_i μεταξύ των οπλισμών. Όποια από τις διαδικασίες φόρτισης και αν ακολουθήσουμε, το έργο ΔW_i , που θα δαπανήσουμε για την πρόσθετη φόρτιση του πυκνωτή με το φορτίο ΔQ_i , θα είναι

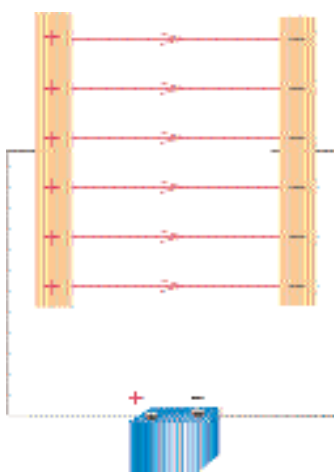
$$\Delta W_i = \Delta Q_i V_i$$

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα της τάσης V μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, συναρτήσει του φορτίου του Q (σχ. 2.53). Παρατηρούμε ότι το έργο ΔW_i ισούται με το “εμβαδόν” του ορθογωνίου (ΑΒΓΔ). Ακόμη ότι, όσο πιο μικρό είναι το ΔQ_i , τόσο περισσότερο το “εμβαδόν” του ορθογωνίου (ΑΒΓΔ) προσεγγίζει το “εμβαδόν” του τραπεζιού (ΑΒΖΔ). Για πάρα πολύ μικρό ΔQ_i , μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα δύο παραπάνω εμβαδά είναι περίπου ίσα. Για να βρούμε το απαιτούμενο έργο W για τη φόρτιση του πυκνωτή με φορτίο Q_0 , αρκεί να προσθέσουμε τα στοιχειώδη έργα, που δαπανήθηκαν για την τοποθέτηση των αντίστοιχων μικρών ποσοτήτων φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, οδηγούμαστε στο



ΣΧΗΜΑ 2.51

Ταχύτατη εκφόρτιση πυκνωτή με την εμφάνιση σπινθήρα.



ΣΧΗΜΑ 2.52

Φόρτιση πυκνωτή με μπαταρία.

συμπέρασμα ότι το έργο W ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου (ΟΚΛ), άρα

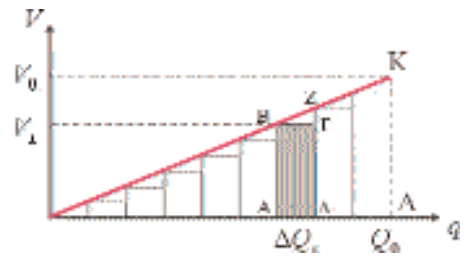
$$W = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

Αυτό το έργο ισούται με την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, που αποθηκεύτηκε στον πυκνωτή, συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, η ενέργεια ενός φορτισμένου πυκνωτή με φορτίο Q είναι

$$U = \frac{1}{2} Q V$$

όπου V η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Από την προηγούμενη σχέση και την $C = Q/V$, μπορούμε να γράψουμε

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{2.37}$$



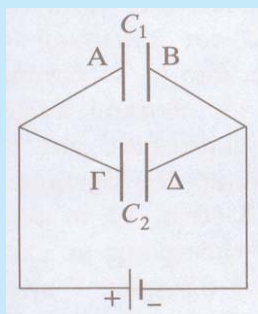
ΣΧΗΜΑ 2.53

Εφαρμογή: ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ ΠΥΚΝΩΤΩΝ

Οι πυκνωτές κατασκευάζονται από τα εργοστάσια παραγωγής τους με ορισμένες τυποποιημένες τιμές χωρητικότητας και τάσης λειτουργίας. Πολλές φορές όμως χρειαζόμαστε πυκνωτές με τιμή χωρητικότητας διαφορετική από τις τυποποιημένες. Τότε μπορούμε με κατάλληλη συνδεσμολογία δύο ή περισσότερων πυκνωτών να πετύχουμε την επιθυμητή τιμή χωρητικότητας. Οι πιο απλές περιπτώσεις σύνδεσης πυκνωτών είναι (α) παράλληλα και (β) σε σειρά.

Α. Παράλληλη συνδεσμολογία πυκνωτών

Στο σχήμα 2.54 έχουμε συνδεδεμένους παράλληλα δύο πυκνωτές, με χωρητικότητες C_1, C_2 . Κατά τη φόρτιση του συστήματος, με τη βοήθεια της μπαταρίας, μεταφέρονται ηλεκτρόνια από τους οπλισμούς Α και Γ των πυκνωτών προς τους οπλισμούς Β και Δ. Όταν τελειώσει η φόρτιση, οι οπλισμοί Α, Γ έχουν το ίδιο δυναμικό, όσο το δυναμικό του θετικού πόλου της μπαταρίας και οι οπλισμοί Β, Δ το ίδιο δυναμικό με τον αρνητικό πόλο της μπαταρίας. Άρα οι πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών τους, ίση με τη διαφορά δυναμικού V μεταξύ των πόλων της μπαταρίας



ΣΧΗΜΑ 2.54

Δύο πυκνωτές συνδεδεμένοι παράλληλα.

$$V_1 = V_2 = V$$

Ονομάζουμε ισοδύναμο πυκνωτή χωρητικότητας $C_{ισ}$ τον πυκνωτή που αποθηκεύει το ίδιο φορτίο Q με το σύστημα των δύο πυκνωτών, εφόσον φορτιστεί από την ίδια μπαταρία, άρα

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 && \text{ή} \\ C_{ισ} V &= C_1 V + C_2 V && \text{ή} \end{aligned}$$

$$C_w = C_1 + C_2$$

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση σύνδεσης N πυκνωτών παράλληλα. Τότε οι πυκνωτές έχουν την ίδια τάση V μεταξύ των οπλισμών τους

$$V_1 = V_2 = \dots = V_N = V$$

Το ολικό φορτίο Q του συστήματος των πυκνωτών ισούται με το άθροισμα των φορτίων τους

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$$

Η χωρητικότητα του ισοδύναμου πυκνωτή ισούται με το άθροισμα των χωρητικοτήτων των πυκνωτών

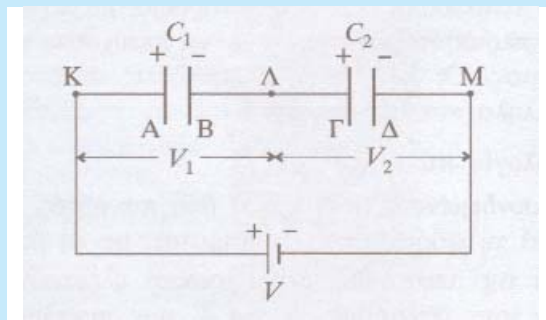
$$C_w = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι συνδέοντας παράλληλα πυκνωτές πετυχαίνουμε αύξηση της χωρητικότητας. Ακόμη αν οι N πυκνωτές έχουν την ίδια χωρητικότητα C , θα ισχύει

$$C_w = N \cdot C$$

B. Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά

Στο σχήμα 2.55 απεικονίζεται η συνδεσμολογία δύο ιδανικών (χωρίς διαρροές) πυκνωτών συνδεδεμένων σε σειρά. Όταν αρχίσει η τροφοδοσία



ΣΧΗΜΑ 2.55
Δύο πυκνωτές συνδεδεμένοι σε σειρά.

του συστήματος από τη μπαταρία θα μεταφερθούν ηλεκτρόνια από τον οπλισμό A του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 στον οπλισμό Δ του πυκνωτή χωρητικότητας C_2 . Η φόρτιση θα σταματήσει όταν το δυναμικό του οπλισμού A γίνει ίδιο με το δυναμικό του θετικού πόλου της

μπαταρίας και το δυναμικό του οπλισμού Δ γίνει ίδιο με το δυναμικό του αρνητικού πόλου της μπαταρίας. Αν το φορτίο του οπλισμού Δ είναι $-Q$, το φορτίο του οπλισμού A είναι $+Q$ (με $Q > 0$). Λόγω ηλεκτρούσης με επαγωγή, το φορτίο του οπλισμού B είναι $-Q$ και του οπλισμού Γ είναι $+Q$. Συνεπώς τα φορτία των πυκνωτών είναι ίσα, δηλαδή

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

όπου Q η απόλυτη τιμή του φορτίου που μετακινήθηκε μέσω της μπαταρίας. Αν V η τάση στα άκρα του συστήματος των πυκνωτών, V_1 η τάση στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 και V_2 η τάση στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας C_2 θα ισχύει

$$V_K - V_M = V_K - V_A + V_A - V_M \quad \text{ή}$$

$$V = V_1 + V_2$$

Αν $C_{\text{ισ}}$ η χωρητικότητα του ισοδύναμου πυκνωτή από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\frac{Q}{C_{\text{ισ}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{C_{\text{ισ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ή}$$

$$C_{\text{ισ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Γενικεύοντας για N πυκνωτές, συνδεδεμένους σε σειρά, έχουμε ότι οι πυκνωτές έχουν το ίδιο φορτίο Q .

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N = Q$$

Η τάση V στα άκρα του συστήματος ισούται με το άθροισμα των τάσεων των πυκνωτών

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

Το αντίστροφο της χωρητικότητας του ισοδύναμου πυκνωτή, ισούται με το άθροισμα των αντιστρόφων των χωρητικοτήτων των πυκνωτών

$$\frac{1}{C_{\text{ισ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

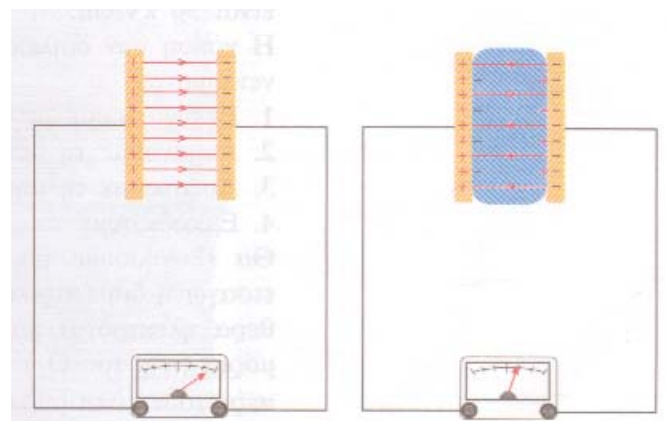
Παρατηρούμε ότι με τη σύνδεση πυκνωτών σε σειρά πετυχαίνουμε μείωση της χωρητικότητας. Ακόμη αν οι N πυκνωτές έχουν την ίδια χωρητικότητα C , θα ισχύει:

$$\frac{1}{C_{\text{ισ}}} = N \frac{1}{C} \quad \text{ή} \quad C_{\text{ισ}} = \frac{C}{N}$$

ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΜΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ

Ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή παρεμβάλλεται συνήθως ένα μονωτικό υλικό, ένα διηλεκτρικό. Φορτίζουμε έναν πυκνωτή (χωρίς διηλεκτρικό) με φορτίο Q και συνδέουμε τους οπλισμούς του με ένα ηλεκτρόμετρο (σχ. 2.56). Το ηλεκτρόμετρο μετρά την τάση V χωρίς ουσιαστικά να αποφορτίσει τον πυκνωτή. Τοποθετούμε κατόπιν διηλεκτρικό (π.χ. χαρτί ή γυαλί) ανάμεσα στους οπλισμούς, οπότε παρατηρούμε μείωση της τάσης. Αφού το φορτίο του πυκνωτή δεν άλλαξε, από τη σχέση $C = Q/V$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι με την εισαγωγή του διηλεκτρικού αυξήθηκε η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Ο λόγος της χωρητικότητας του πυκνωτή C με το διηλεκτρικό, προς τη χωρητικότητα C_0 χωρίς το



ΣΧΗΜΑ 2.56

Η εισαγωγή διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή οδηγεί στη μείωση της τάσης, άρα στην αύξηση της χωρητικότητας.

διηλεκτρικό, ονομάζεται σχετική επιτρεπτότητα ή διηλεκτρική σταθερά K (ή ϵ_r). Ο όρος διηλεκτρική σταθερά χρησιμοποιείται σήμερα όλο και λιγότερο, ενώ επικρατεί ο όρος του οποίου η μετάφραση θα μπορούσε να είναι σχετική επιτρεπτότητα.

Το K δεν είναι σταθερά, διότι όταν το ηλεκτρικό πεδίο E είναι χρονικά μεταβαλλόμενο εξαρτάται από τη συχνότητα του E , γι' αυτό συνηθίζεται και ο όρος διηλεκτρική συνάρτηση.

Είναι λοιπόν

$$K = \frac{C}{C_0} \tag{2.38}$$

Άρα, η χωρητικότητα ενός επιπέδου πυκνωτή με διηλεκτρικό θα είναι

$$C = K \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{2.39}$$

Διηλεκτρική σταθερά διαφόρων υλικών στους 20 °C			
Κενό	1	Ακρυλικό Γυαλί (Plexiglas)	3,40
Αέρας (1atm)	1,00059	Γυαλί	5-10
Μαρμαρυγίας (mica)	3-6	Γλυκερίνη	42,5
Πολυβινολοχλωρίδιο	3,18	Νερό	80,4

Ακολουθεί πίνακας με τη σχετική διηλεκτρική σταθερά διαφόρων υλικών.

Παρατηρούμε ότι για τον αέρα είναι $K \approx 1$, οπότε ο πυκνωτής θα έχει πρακτικά την ίδια χωρητικότητα, είτε έχει αέρα ανάμεσα στους οπλισμούς του, είτε κενό.

Τα διηλεκτρικά δεν είναι μονωτές για οποιαδήποτε τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, μέσα στο οποίο βρίσκονται. Το κάθε διηλεκτρικό έχει ορισμένη "αντοχή". Όταν η ένταση του πεδίου ξεπεράσει μια τιμή, χαρακτηριστική για κάθε υλικό, το διηλεκτρικό γίνεται αγωγίμο και σχηματίζεται σπινθήρας ή εκκένωση τόξου με αποτέλεσμα την "διάτρηση του διηλεκτρικού". Όταν π.χ. μεταξύ ενός φορτισμένου νέφους και του εδάφους η διαφορά δυναμικού είναι αρκετά μεγάλη, ο αέρας καθίσταται αγωγίμος, οπότε δημιουργείται σπινθήρας, δηλαδή κεραυνός. Για ξηρό αέρα, η αντοχή του υλικού είναι 30 kV/cm.

Η χρήση των διηλεκτρικών στους πυκνωτές παρουσιάζει τα παρακάτω πλεονεκτήματα.

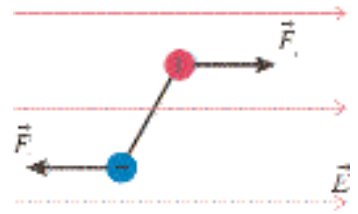
1. Πετυχαίνουμε μεγάλες τιμές χωρητικότητας
2. Αυξάνουμε τη μέγιστη τάση λειτουργίας του πυκνωτή.
3. Αυξάνουμε τη μηχανική αντοχή του πυκνωτή.
4. Εμποδίζουμε τους οπλισμούς να έλθουν σε επαφή.

Θα εξηγήσουμε τώρα την αύξηση της χωρητικότητας του πυκνωτή με την εισαγωγή διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών. Τα διηλεκτρικά δεν έχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα μόριά τους είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Σε κάποια μόρια (π.χ. του O_2) η κατανομή του θετικού και του αρνητικού φορτίου, που περιέχουν είναι συμμετρική περί το ίδιο κέντρο (μη πολικά μόρια). Σε κάποια άλλα μόρια (π.χ. του H_2O) τα κέντρα των δύο ειδών φορτίου είναι μετατοπισμένα το ένα σχετικά με το άλλο, αυτά λέγονται πολικά μόρια και έχουν ηλεκτρική διπολική ροπή. Το μέγεθος ηλεκτρική διπολική ροπή

σχετίζεται με τη δυνατότητα περιστροφής, που έχει το δίπολο, όταν βρεθεί μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Όταν το διηλεκτρικό (μονωτικό) υλικό βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, τα πολικά μόρια τείνουν να προσανατολιστούν στη διεύθυνση του πεδίου. Τι συμβαίνει όμως με τα μη πολικά μόρια; Λόγω του πεδίου αποκτούν και αυτά διπολική ηλεκτρική ροπή οπότε τείνουν να προσανατολιστούν κατά τη διεύθυνση του πεδίου. Έτσι το διηλεκτρικό αποκτά μακροσκοπικά διπολική ροπή, και τότε λέμε πως έχουμε "πόλωση του διηλεκτρικού". Στα άκρα του μονωτή, που βρίσκονται σε επαφή με τους οπλισμούς, εμφανίζονται τα "επιφανειακά φορτία πόλωσης", τα οποία δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (έντασης E_1), αντίθετης φοράς με το αρχικό ομογενές πεδίο (έντασης E_0). Προφανώς η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή μειώνεται και γίνεται

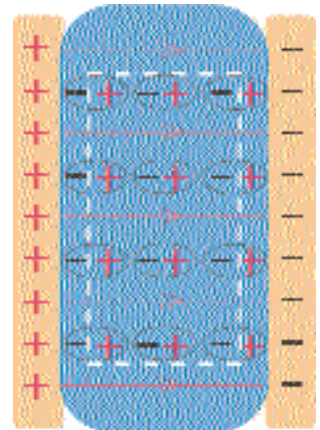
$$E = E_0 - E_1$$

Εφόσον η ένταση μειώνεται, έχουμε (από τη σχέση $V = E d$) ότι μειώνεται και η τάση. Η μείωση της τάσης, λόγω της σχέσης $C = Q/V$, οδηγεί στην αύξηση της χωρητικότητας.



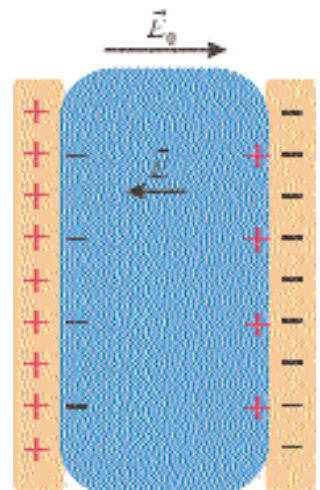
ΣΧΗΜΑ 2.57

Όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο δέχεται δυνάμεις, που τείνουν να το προσανατολίσουν στη διεύθυνση του πεδίου.



ΣΧΗΜΑ 2.58

Ο προσανατολισμός των μορίων δεν είναι απόλυτος. Σχεδιάστηκε όμως έτσι για λόγους απλοστευσης.

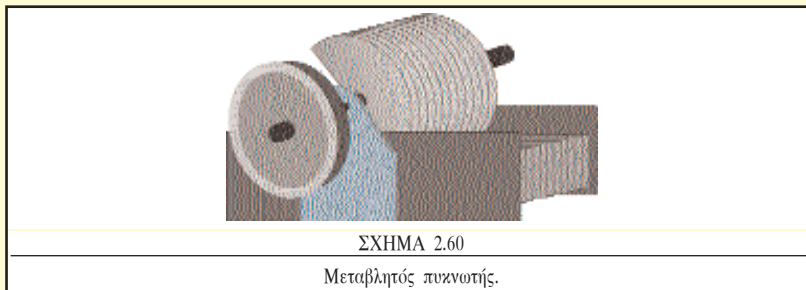


ΣΧΗΜΑ 2.59

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή είναι $E = E_0 - E_1$.

ΤΥΠΟΙ ΠΥΚΝΩΤΩΝ

1. Οι συνηθισμένοι πυκνωτές του εμπορίου αποτελούνται από λεπτά μεταλλικά φύλλα, που έχουν ανάμεσά τους χαρτί (ποτισμένο με παραφίνη) ή φύλλο πλαστικού τύπου mylar, τυλιγμένα σε ρολό.
2. Οι πυκνωτές μικρών διαστάσεων κατασκευάζονται από κεραμικά υλικά.
3. Οι πυκνωτές ψηλής τάσης αποτελούνται από εναλλασσόμενα μεταλλικά φύλλα μέσα σε ορυκτέλαιο.
4. Οι ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές αποθηκεύουν πολλά φορτία και αποτελούνται από ένα μεταλλικό φύλλο εντός ενός ηλεκτρολύτη. Πάνω στο μεταλλικό φύλλο δημιουργείται ένα στρώμα οξειδίου του μετάλλου, που παίζει το ρόλο του διηλεκτρικού. Κατά τη σύνδεση αυτών των πυκνωτών απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή γιατί οι οπλισμοί τους συνδέονται με καθορισμένη πολικότητα. Στην αντίθετη περίπτωση καταστρέφονται.
5. Οι μεταβλητοί πυκνωτές είναι πυκνωτές, των οποίων μπορούμε να μεταβάλλουμε τη γεωμετρία, άρα και τη χωρητικότητα. Αποτελούνται από δύο ομάδες μεταλλικών φύλλων, που μεταξύ τους υπάρχει αέρας. Τα φύλλα της μιάς ομάδας είναι ακίνητα, ενώ της άλλης κινητά, οπότε μπορούμε να αυξάνουμε ή να μειώνουμε το εμβαδόν των εισαγομένων κινουμένων επιφανειών εντός των ακινήτων.



ΣΧΗΜΑ 2.60

Μεταβλητός πυκνωτής.

Παράδειγμα 2-17

Επίπεδος πυκνωτής χωρητικότητας C_0 , που έχει αέρα μεταξύ των οπλισμών του, φορτίστηκε από μπαταρία. Η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι V_0 , το φορτίο του Q_0 , η ένταση του ηλεκτρικού του πεδίου E_0 και η ενέργεια που έχει αποθηκεύσει U_0 . Τι θα συμβεί στις τιμές C_0 , V_0 , Q_0 , E_0 και U_0 , αν διπλασιαστεί η απόσταση d μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, ενώ αυτός

- (α) παραμένει συνδεδεμένος με τη μπαταρία
- (β) αποσυνδέεται προηγουμένως από τη μπαταρία.

Απάντηση

Η χωρητικότητα αρχικά είναι

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

και ύστερα γίνεται

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{2d} = \frac{C_0}{2}$$

ανεξάρτητα με το αν ο πυκνωτής συνεχίζει ή όχι να είναι συνδεδεμένος με τη μπαταρία.

(α) Εφόσον ο πυκνωτής παραμένει συνδεδεμένος με την μπαταρία, δεν θ' αλλάξει η τάση μεταξύ των οπλισμών του

$$V = V_0$$

Το φορτίο του γίνεται

$$Q = C V = \frac{C_0}{2} V_0 = \frac{Q_0}{2}$$

Η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών είναι

$$E = \frac{V}{2d} = \frac{V_0}{2d} = \frac{E_0}{2}$$

Τέλος η αποθηκευμένη ηλεκτρική (δυναμική) ενέργεια είναι

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{2} V_0 = \frac{1}{2} U_0$$

(β) Όταν ο πυκνωτής αποσυνδεθεί από τη μπαταρία, διατηρεί σταθερό το φορτίο του $Q = Q_0$

Η τάση μεταξύ των οπλισμών του γίνεται

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C_0/2} = 2 \frac{Q_0}{C_0} = 2V_0$$

Η ένταση του πεδίου δεν αλλάζει γιατί

$$E = \frac{V}{2d} = \frac{2V_0}{2d} = \frac{V_0}{d} = E_0$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια γίνεται

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} Q_0 2V_0 = 2U_0$$

Δηλαδή μεταφέρθηκε ενέργεια στον πυκνωτή από τον παράγοντα που αύξησε την απόσταση μεταξύ των οπλισμών.

Παράδειγμα 2-18

Δίνεται η συνδεσμολογία του σχήματος 2.61. Οι χωρητικότητες των πυκνωτών είναι $C_1 = 1,0 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,0 \mu\text{F}$, $C_3 = 3,0 \mu\text{F}$, $C_4 = 3,0 \mu\text{F}$, $C_5 = 20,0 \mu\text{F}$, $C_6 = 20,0 \mu\text{F}$, $C_7 = 40,0 \mu\text{F}$ και η τάση στα άκρα του συστήματος είναι $V = 12 \text{ V}$.

Να βρεθούν

- α) Η ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος,
- β) το φορτίο κάθε πυκνωτή και
- γ) η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή χωρητικότητας C_4 .

Απάντηση

α) Οι πυκνωτές με χωρητικότητες C_1, C_2, C_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, άρα η ισοδύναμη χωρητικότητά τους είναι

$$C_{123} = C_1 + C_2 + C_3 = 6,0 \mu\text{F}$$

Οι πυκνωτές με χωρητικότητες C_5, C_6, C_7 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, άρα η ισοδύναμή τους χωρητικότητα είναι

$$\frac{1}{C_{567}} = \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7},$$

Οπότε, $C_{567} = 8,0 \mu\text{F}$

Ο ισοδύναμος πυκνωτής χωρητικότητας C_{123} και ο C_4 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, άρα

$$C_{1234} = \frac{C_{123} C_4}{C_{123} + C_4} = 2 \mu\text{F}$$

Τέλος οι πυκνωτές με χωρητικότητες C_{1234} και C_{567} είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, άρα

$$C_{ολ} = C_{1234} + C_{567} \quad \text{ή}$$

$$C_{ολ} = 10 \mu\text{F}$$

β) Το ολικό φορτίο της συνδεσμολογίας είναι

$$Q_{ολ} = C_{ολ} V = 120 \mu\text{C}$$

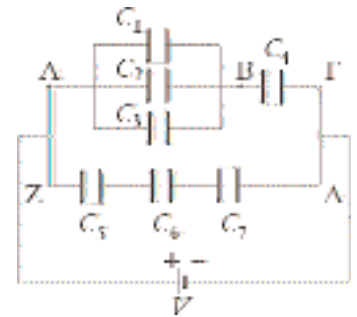
Οι ισοδύναμοι πυκνωτές C_{1234} και C_{567} έχουν στα άκρα τους την τάση V , άρα τα φορτία τους είναι

$$Q_{1234} = C_{1234} \cdot V = 24 \mu\text{C}$$

$$Q_{567} = C_{567} \cdot V = 96 \mu\text{C}$$

Οι πυκνωτές με χωρητικότητες C_5, C_6, C_7 έχουν ίδιο φορτίο, άρα

$$Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_{567} = 96 \mu\text{C}$$



ΣΧΗΜΑ 2.61

Όμοια

$$Q_4 = Q_{123} = Q_{1234} = 24 \mu\text{C}$$

Οι πυκνωτές με χωρητικότητες C_1, C_2, C_3 έχουν στα άκρα τους την ίδια τάση

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{AB} = \frac{Q_{123}}{C_{123}} = 4,0 \text{ V}$$

οπότε τα φορτία τους είναι

$$Q_1 = C_1 V_{AB} = 4,0 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 V_{AB} = 8,0 \mu\text{C}$$

$$Q_3 = C_3 V_{AB} = 12 \mu\text{C}$$

γ) Η ενέργεια του πυκνωτή χωρητικότητας C_4 είναι

$$U_4 = \frac{1}{2} \frac{Q_4^2}{C_4} = 96 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Παράδειγμα 2-19

Ο πυκνωτής χωρητικότητας $C_1 = 2,0 \mu\text{F}$ του σχ. 2.62, φέρει φορτίο $Q_0 = 120 \mu\text{C}$, ενώ ο πυκνωτής χωρητικότητας $C_2 = 3,0 \mu\text{F}$ είναι αφόρτιστος. Κάποια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη δ.

Να βρεθεί

(α) το τελικό φορτίο κάθε πυκνωτή και

(β) η απώλεια ενέργειας του συστήματος των πυκνωτών.

Απάντηση

α) Μόλις κλείσει ο διακόπτης θα μεταφερθούν ηλεκτρόνια από τον οπλισμό Β του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 στον οπλισμό Δ του άλλου πυκνωτή. Επίσης θα μεταφερθούν ηλεκτρόνια από τον οπλισμό Γ στον Α. Αυτό θα συνεχιστεί έως ότου οι οπλισμοί Β, Δ αποκτήσουν το ίδιο δυναμικό. Το ίδιο δυναμικό θα αποκτήσουν και οι οπλισμοί Α, Γ. Άρα η εκφόρτιση του ενός πυκνωτή πάνω στον άλλο θα σταματήσει, όταν οι πυκνωτές αποκτήσουν την ίδια τάση V μεταξύ των οπλισμών τους.

Αν Q_1, Q_2 τα τελικά φορτία των πυκνωτών, από την αρχή διατήρησης του φορτίου, έχουμε

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \quad \text{ή}$$

$$Q_0 = C_1 V + C_2 V \quad \text{ή}$$

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = 24 \text{ V}$$

Άρα

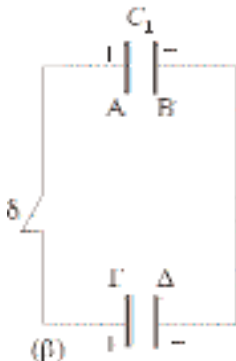
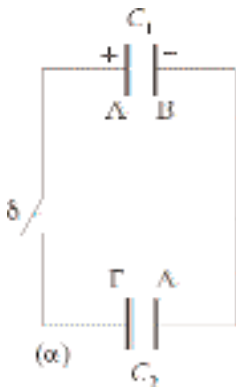
$$Q_1 = C_1 V = 48 \mu\text{C}$$

και

$$Q_2 = C_2 V = 72 \mu\text{C}$$

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_1} = 36 \times 10^{-4} \text{ J}$$



ΣΧΗΜΑ 2.62

Η τελική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 \quad \text{ή}$$

$$U_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2 \quad \text{ή}$$

$$U_{\text{τελ}} = 14 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Η απώλεια ενέργειας είναι

$$|\Delta U| = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = 22 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Η ενέργεια που χάθηκε έγινε κυρίως εσωτερική ενέργεια, κατά τη μετακίνηση των φορτίων στους αγωγούς σύνδεσης και μεταβιβάστηκε στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας. Γενικώς, αν οι μετακινήσεις φορτίου είναι πάρα πολύ γρήγορες, μπορεί να υπάρχει και εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Παράδειγμα 2-20

Φορτίζουμε με τη βοήθεια μιας μπαταρίας έναν επίπεδο πυκνωτή, οπότε αποθηκεύεται σ' αυτόν ενέργεια $U_0 = 4,0 \times 10^{-3} \text{ J}$. Αποσυνδέουμε τον πυκνωτή από την μπαταρία και γεμίζουμε τον (αρχικά άδειο) χώρο μεταξύ των οπλισμών με διηλεκτρικό ($K = 4$). Να βρεθεί η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή μετά την είσοδο του διηλεκτρικού.

Απάντηση

Αφού ο πυκνωτής αποσυνδέθηκε από την πηγή, θα διατηρήσει το φορτίο του Q . Η χωρητικότητα του θα γίνει

$$C = K C_0$$

όπου C_0 η αρχική του χωρητικότητα.

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή μετά την είσοδο του διηλεκτρικού είναι

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{ή}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{K C_0} \quad \text{ή}$$

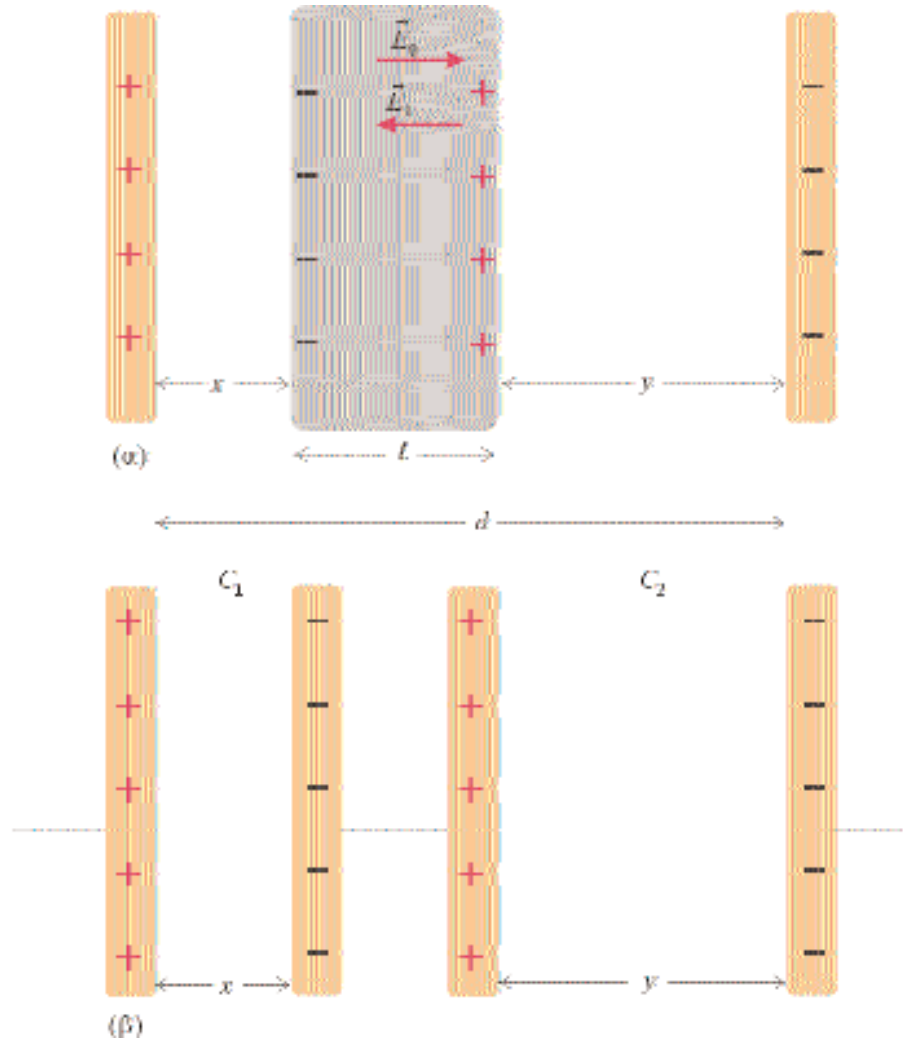
$$U = \frac{1}{K} U_0 \quad \text{ή}$$

$$U = 10^{-3} \text{ J}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μείωση της ενέργειας του πεδίου. Αυτή η απώλεια καταναλώθηκε κατά την εισαγωγή του διηλεκτρικού, γιατί αυτό έλκεται από τους οπλισμούς.

Παράδειγμα 2-21

Οι οπλισμοί ενός επίπεδου πυκνωτή χωρητικότητας $C_0 = 50 \mu\text{F}$ απέχουν d . Ανάμεσα στους οπλισμούς τοποθετούμε μεταλλική πλάκα πάχους $\ell = d/5$, όπως στο σχήμα 2.63(α). Να βρεθεί η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή.



ΣΧΗΜΑ 2.63

Απάντηση

Στην επιφάνεια της μεταλλικής πλάκας επάγονται φορτία, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.63(α). Αυτά τα φορτία δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο έντασης E_1 , που εξουδετερώνει το αρχικό πεδίο του πυκνωτή, άρα το πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας είναι μηδέν. Συνεπώς το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα 2.63(β) είναι ισοδύναμο με το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα 2.63(α), οπότε

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 \frac{A}{x}} + \frac{1}{\epsilon_0 \frac{A}{y}} = \frac{x+y}{\epsilon_0 A} \quad \text{ή}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d-l} = \frac{\epsilon_0 A}{\frac{4}{5}d} \quad \text{ή}$$

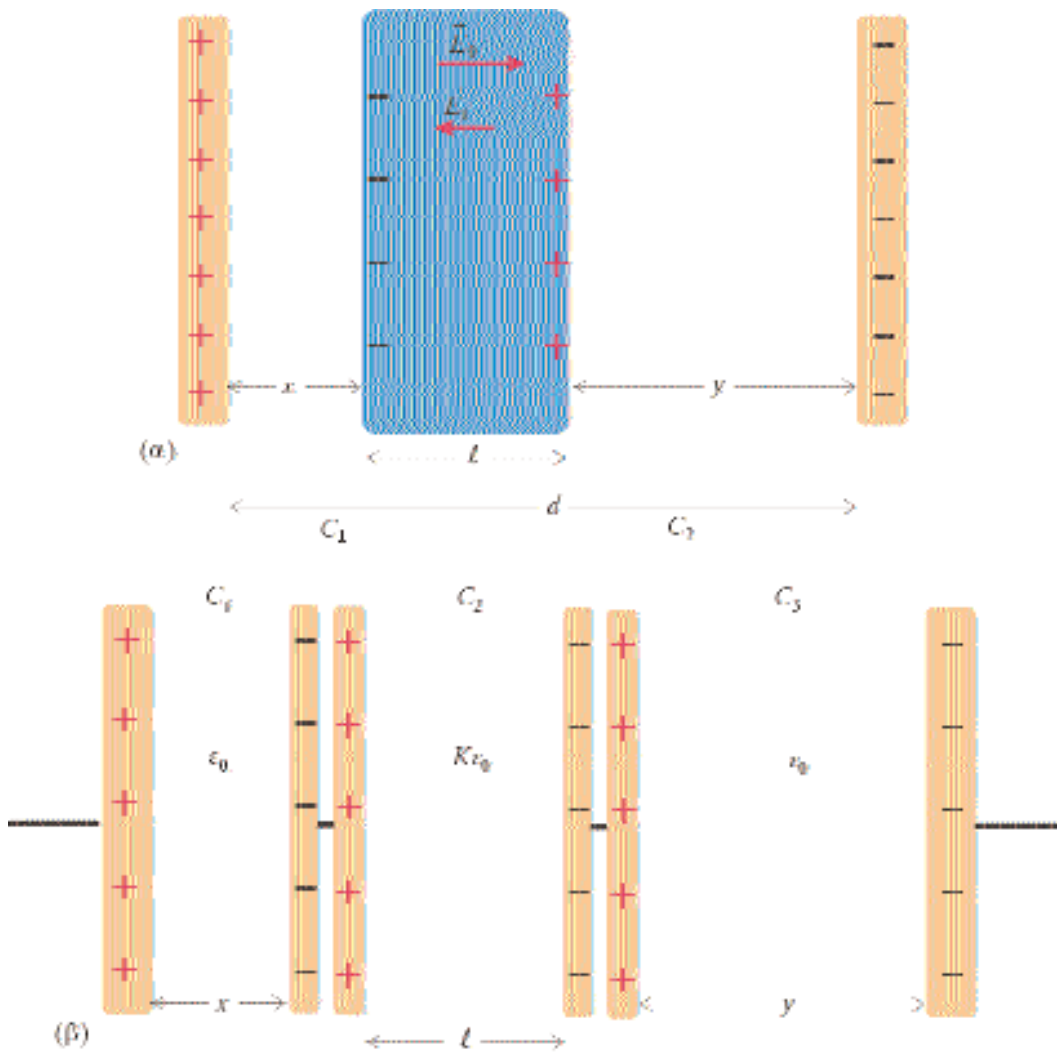
$$C = \frac{5}{4} C_0 = 63 \mu\text{F}$$

Παράδειγμα 2-22

Ανάμεσα στους οπλισμούς πυκνωτή χωρητικότητας $C_0 = 10 \text{ nF}$, που απέχουν d , τοποθετείται διηλεκτρική πλάκα πάχους $\ell = d/4$. Να βρεθεί η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή, αν δίνεται για το διηλεκτρικό $K = 5$.

Απάντηση

Τα επιφανειακά φορτία πόλωσης στο διηλεκτρικό δεν εξουδετερώνουν πλήρως το αρχικό πεδίο. Συνεπώς το αρχικό σύστημα [Σχ. 2.64(α)] είναι ισοδύναμο με το σύστημα των τριών πυκνωτών του σχήματος 2.64(β), άρα



ΣΧΗΜΑ 2.64

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \eta$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 \frac{A}{x}} + \frac{1}{K \epsilon_0 \frac{A}{\ell}} + \frac{1}{\epsilon_0 \frac{A}{y}} \quad \eta$$

$$\frac{1}{C} = \frac{x+y}{\epsilon_0 A} + \frac{\ell}{5\epsilon_0 A} = \frac{3d/4}{\epsilon_0 A} + \frac{d/4}{5\epsilon_0 A} \quad \eta$$

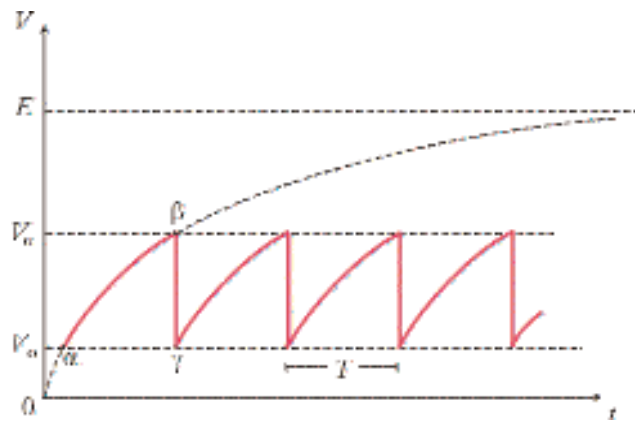
$$C = \frac{5}{4} \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \eta \quad C = \frac{5}{4} C_0 = 13 \text{ nF}$$

ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟΣ

Η μέτρηση είναι η βασικότερη διαδικασία για την μελέτη και ανάπτυξη της επιστήμης και της τεχνολογίας.

Το διαρκές αίτημα για ακριβέστερη μέτρηση ποσοτήτων που περιγράφουν τα διάφορα φαινόμενα οδήγησε στην εξέλιξη των οργάνων μέτρησης.

Με την εμφάνιση και την πρόοδο του ηλεκτρισμού και της ηλεκτρονικής αργότερα τα μηχανικά όργανα μέτρησης εξελίχθηκαν σε ηλεκτρομηχανικά και στην συνέχεια σε ηλεκτρονικά.



ΣΧΗΜΑ 2.65

Πριονωτή τάση.

Τα όργανα αυτά έχουν τη δυνατότητα να ανταποκρίνονται με αξιοπιστία και ακρίβεια σε γρήγορες μεταβολές, λόγω πολύ μικρής αδράνειας, αφού οι μοναδικές μάζες που λαμβάνουν μέρος, είναι τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια.

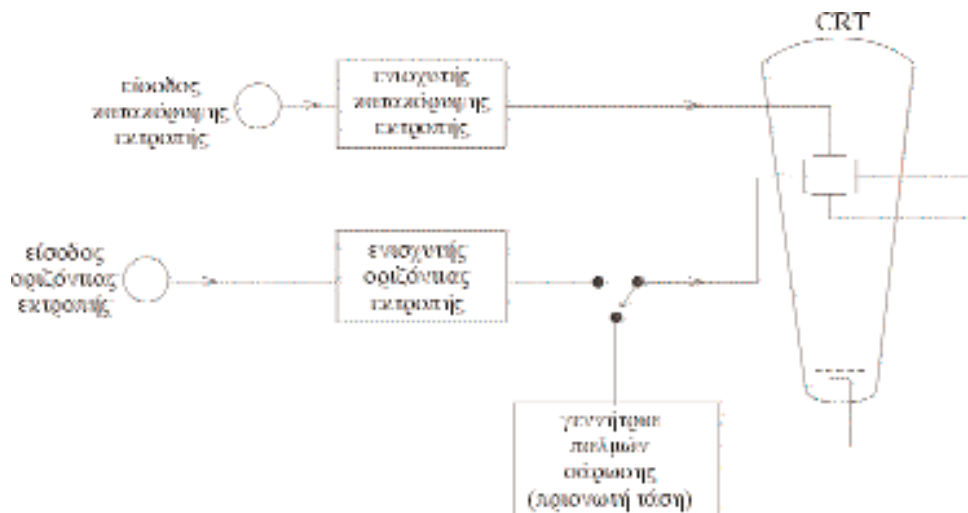
Ένα σπουδαίο όργανο αυτής της κατηγορίας είναι ο καθοδικός παλμογράφος.

Κάθε παλμογράφος αποτελείται από τρία βασικά μέρη.

- 1) Τον καθοδικό σωλήνα που ήδη περιγράψαμε.
- 2) Τους δύο ενισχυτές οριζόντιας και κατακόρυφης εκτροπής για την ενίσχυση ή μείωση του εισερχομένου συστήματος στα αντίστοιχα πλακίδια εκτροπής.
- 3) Τη γεννήτρια παλμών σάρωσης (πριονωτής τάσης) που παράγει τάση της μορφής που φαίνεται στο σχήμα 2.65 και τροφοδοτεί τα οριζόντια πλακίδια με ρυθμιζόμενη (κατά βούληση) συχνότητα.

Ο παλμογράφος στο σχολικό εργαστήριο χρησιμοποιείται:

- Για την μέτρηση συνεχούς ή εναλλασσόμενης τάσης.
- Για τη μέτρηση της περιόδου μιας κυματομορφής.
- Για την επίδειξη κυματομορφών εναλλασσομένου ρεύματος, ηλεκτρικών κυματομορφών που προέρχονται από ηχητικά κύματα και άλλων γραφικών παραστάσεων.
- Για την επίδειξη σχημάτων Lissajous κ.α.



ΣΧΗΜΑ 2.66

Στοιχειώδες διάγραμμα βασικών μερών παλμογράφου.



Παλμογράφος

ΟΙ ΟΘΟΝΕΣ ΤΗΣ ΤΗΛΕΟΡΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ Η/Υ

Οι οθόνες της τηλεόρασης και των Η/Υ διαφέρουν βασικά από την οθόνη του παλμογράφου, στο μέγεθος και στο σύστημα εκτροπών της δέσμης των καθοδικών ακτίνων.

Οι εκτροπές δεν γίνονται με ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή με πλάκες εκτροπής αλλά με μαγνητικά πεδία, δηλαδή με πηνία που βρίσκονται στο μέσον, όπου διευρύνεται ο καθοδικός σωλήνας.

Στην περίπτωση των έγχρωμων οθονών υπάρχουν, αντί ενός, τρία ηλεκτρονικά τηλεβόλα, των οποίων οι δέσμες σαρώνουν την οθόνη, που έχει επικαλυφθεί με κουκίδες φωσφορικών αλάτων για τρία χρώματα κόκκινο, πράσινο, μπλέ (ένα για κάθε χρώμα).

Εκτελούνται 54 σαρώσεις, ανά εικόνα, κατά μήκος της επιφάνειας (οθόνης) του σωλήνα.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

□ Η ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A , η οποία βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης \vec{E} , δίνεται απ' τη σχέση

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ένταση \vec{E} με ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια.

□ Για να βρούμε την ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από μια καμπύλη επιφάνεια, η οποία βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, χωρίζουμε την επιφάνεια σε στοιχειώδη τμήματα και λαμβάνουμε το άθροισμα.

$$\Phi_E = \sum E_i \Delta A_i \cos \theta_i$$

□ Ο νόμος του Gauss διατυπώνεται ως εξής: “Η ολική ροή που διέρχεται από μιά κλειστή επιφάνεια, ισούται με το ολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια, προς την ηλεκτρική σταθερά (ή την επιτρεπτικότητα του κενού ϵ_0).

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

□ Η δυναμική ενέργεια σημειακού φορτίου q' , που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο δημιουργείται από ομάδα ακλόνητων σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots είναι

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \sum \frac{q_i}{r_i}$$

Το r_i παριστάνει την απόσταση του q' από το q_i

□ Η δυναμική ενέργεια συστήματος σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots είναι

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

□ Διαφορά δυναμικού $V_{A\Gamma}$ μεταξύ δύο σημείων του ηλεκτροστατικού πεδίου ονομάζουμε το πηλίκο

$$V_{A\Gamma} = \frac{U_A - U_\Gamma}{q} = \frac{W_{A \rightarrow \Gamma}}{q}$$

όπου $(U_A - U_\Gamma)$ η διαφορά που παρουσιάζει η δυναμική ενέργεια φορτίου q μεταξύ των θέσεων A και Γ και $W_{A \rightarrow \Gamma}$ το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση φορτίου q από το A στο Γ .

□ Το δυναμικό ενός σημείου A του ηλεκτροστατικού πεδίου ονομάζεται το πηλίκο

$$V_A = \frac{U_A}{q}$$

όπου U_A η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q που βρίσκεται στο A .

□ Το δυναμικό σε ένα σημείο A του πεδίου, που δημιουργείται από ακλόνητα σημειακά φορτία q_1, q_2, \dots είναι

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

Το r_i παριστάνει την απόσταση του A από το q_i .

□ Η μεταβολή του δυναμικού ΔV μεταξύ δύο σημείων, που βρίσκονται κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης \vec{E} και απέχουν κατά Δl , σχετίζεται με την ένταση E σύμφωνα με την σχέση

$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta l}$$

□ Βάρος σώματος (συνήθως) ονομάζουμε τη δύναμη B , που ασκεί η Γη στο σώμα και ισούται με

$$B = G \frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2}$$

□ Η ένταση σε ένα σημείο A του γήινου βαρυτικού πεδίου ορίζεται, ως το πηλίκο του βάρους σώματος μάζας m , που θα βρεθεί στο A, προς την μάζα m

$$\vec{g} = \frac{\vec{B}}{m}$$

και ισχύει

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + h)^2}$$

□ Η δυναμική ενέργεια σώματος, μάζας m , στο γήινο βαρυτικό πεδίο είναι

$$U = -G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma} + h}$$

□ Το δυναμικό v ένα σημείο του γήινου βαρυτικού πεδίου δίνεται απ' τη σχέση

$$V = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}$$

(στις πιο πάνω σχέσεις το δυναμικό και η βαρυτική ενέργεια θεωρούνται μηδέν στο άπειρο)

□ Χωρητικότητα πυκνωτή ονομάζουμε το πηλίκο του φορτίου του πυκνωτή προς τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του

$$C = \frac{Q}{V}$$

□ Η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή είναι

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

όπου A το εμβαδόν των οπλισμών και d η μεταξύ τους απόσταση.

□ Η αποθηκευμένη ενέργεια στο πεδίο φορτισμένου πυκνωτή δίνεται από τις σχέσεις

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

όπου C η χωρητικότητα, Q το φορτίο και V η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

□ Η χωρητικότητα του ισοδύναμου πυκνωτή, ενός συστήματος πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα, είναι

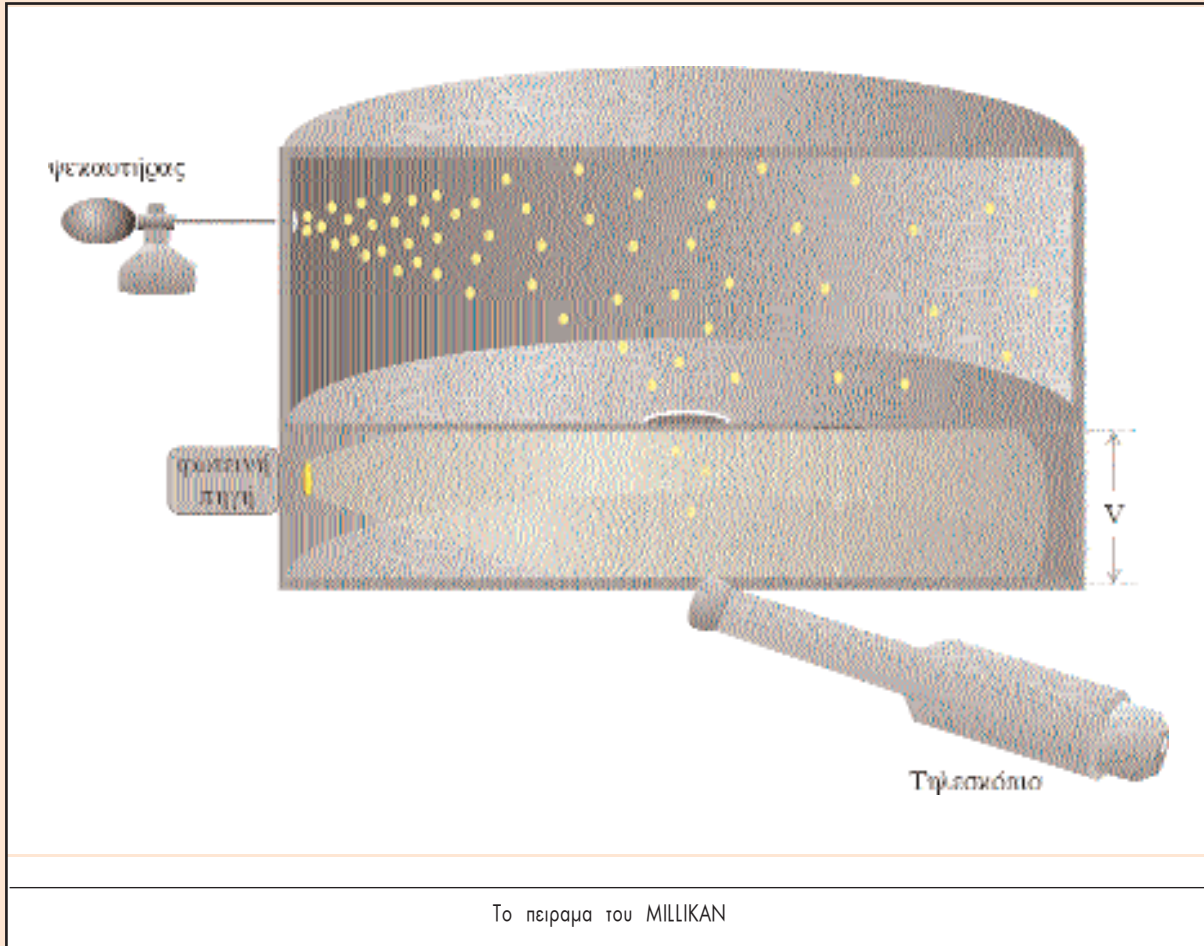
$$C = C_1 + C_2 + \dots$$

□ Η χωρητικότητα C του ισοδύναμου πυκνωτή, ενός συστήματος πυκνωτών συνδεδεμένων σε σειρά, δίνεται απ' τη σχέση

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

□ Όταν μεταξύ των οπλισμών πυκνωτή εισαχθεί διηλεκτρικό η χωρητικότητά του αυξάνει K (ή ϵ_r) φορές ($K > 1$), όπου K η σχετική επιτρεπτότητα (ή διηλεκτρική σταθερά) του υλικού.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ



1. ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ MILLIKAN

Το φορτίο κάθε φορτισμένου σώματος είναι κβαντισμένο, δηλαδή δεν παίρνει οποιαδήποτε τιμή, αλλά είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας ελάχιστης ποσότητας φορτίου. Αυτή η ελάχιστη ποσότητα φορτίου ονομάζεται στοιχειώδες φορτίο e και ισούται με το φορτίο του πρωτονίου (ή του ηλεκτρονίου κατ' απόλυτη τιμή). Ο Millikan προσδιόρισε πειραματικά το φορτίο e μετρώντας το φορτίο σταγονιδίων λαδιού, με την παρακάτω διαδικασία.

Με ψεκασμό δημιουργούσε φορτισμένα σταγονίδια λαδιού εντός ενός κατακόρυφου ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης E . Ένα

σταγονίδιο, μάζας m και φορτίου q ισορροπούσε (έμενε ακίνητο ή εκτελούσε κίνηση με σταθερή ταχύτητα), όταν η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο ήταν αντίθετη του βάρους, δηλαδή

$$mg = Eq$$

Το ηλεκτρικό πεδίο περιοριζόταν μεταξύ δύο πλακών που απέχον κατά l , οπότε

$$E = \frac{V}{l}$$

όπου V η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών.

Συμπεπώς

$$mg = \frac{V}{\ell} q$$

οπότε

$$q = \frac{mg\ell}{V}$$

Για τον υπολογισμό του q απαιτούνταν ο προσδιορισμός της μάζας m του σταγονιδίου. Όμως ισχύει

$$(μάζα) = (\text{πυκνότητα}) \times (\text{όγκος})$$

δηλαδή

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

όπου r η ακτίνα του σταγονιδίου.

Για να βρεθεί η μάζα αρκούσε να προσδιοριστεί η ακτίνα r της σταγόνας. Για το σκοπό αυτό ο Millikan καταργούσε το ηλεκτρικό πεδίο και μετρούσε την σταθερή (οριακή ή ορική ταχύτητα v), με την οποία έπεφτε η σταγόνα, όταν το βάρος της εξισορροπούνταν από την αντίσταση F του αέρα.

Θα μάθουμε αργότερα ότι ισχύει

$$F = 6\pi\eta r v \quad (\eta = \text{ιξώδες αέρα})$$

Οπότε

$$mg = F$$

$$\rho \frac{4}{3} \pi r^3 g = 6\pi\eta r v$$

Από την τελευταία σχέση ο Millikan εύρισκε την ακτίνα r , οπότε υπολόγιζε το φορτίο q του σταγονιδίου.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι απόλυτες τιμές των φορτίων ορισμένων σταγονιδίων, που παρατηρήθηκαν σε κάποιο πείραμα τύπου

$q / 10^{-19} \text{ C}$							
6,41	4,82	11,2	12,9	9,61	15,9	8,02	3,19

Millikan.

Τι μπορείτε να υποθέσετε για την τιμή του στοιχειώδους φορτίου;

2. ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ ΣΤΟΝ ΚΑΘΟΔΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

Εφαρμόστε ανοδική τάση περίπου 250 V στον καθοδικό σωλήνα του εργαστηρίου του σχολείου και παρατηρήστε την κηλίδα, κατόπιν

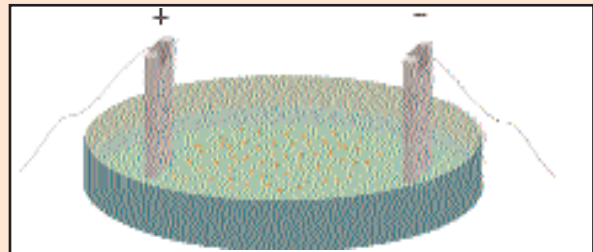
I) Εφαρμόστε συνεχή τάση (γύρω στα 4V) στα πλακίδια Y ή στα πλακίδια X. Τί παρατηρείτε;

Τί θα συμβεί αν διπλασιάσετε την παραπάνω τάση και τί όταν αλλάξετε την πολικότητά της;

II) Εφαρμόστε στα πλακίδια Y (ή στα X) εναλλασσόμενη τάση (περίπου 5V) από γεννήτρια. Αρχίστε να αυξάνετε τη συχνότητα από πολύ μικρές τιμές αρχικά. Τί παρατηρείτε, καθώς αυξάνετε η συχνότητα;

3. ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΟΠΛΙΣΜΩΝ ΠΥΚΝΩΤΗ

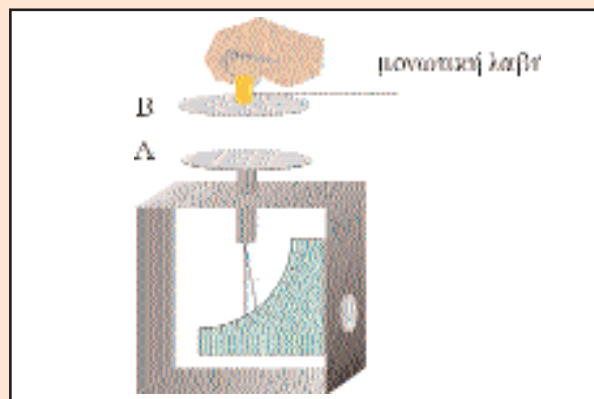
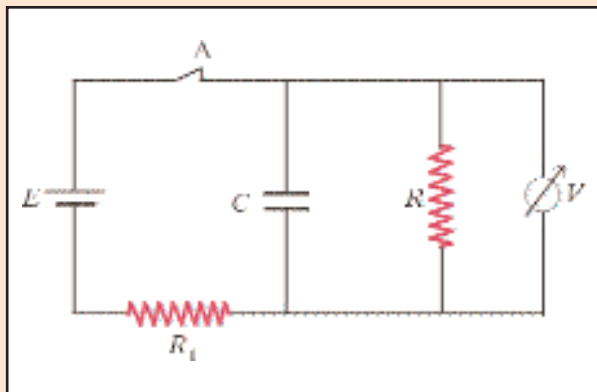
Δημιουργήστε έναν χονδροειδή πυκνωτή με δύο μεταλλικά πλακίδια. Βυθίστε τα πλακίδια (όχι ολόκληρα) μέσα σε κατάλληλο λάδι (π.χ.



καστορέλαιο). Ρίξτε στο λάδι, ώστε να επιπλέουν, κόκκους σουσαμιού ή σιμιγδάλι. Τροφοδοτήστε κατόπιν με φορτία τους οπλισμούς του πυκνωτή συνδέοντάς τους με τους ακροδέκτες της μηχανής Wimshurst. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΚΦΟΡΤΙΣΗΣ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΠΥΚΝΩΤΗ

(I) Πραγματοποιήστε στην τάξη το κύκλωμα του σχήματος με $E = 13,5 \text{ V}$, $C = 68 \mu\text{F}$, $R = 150 \text{ k}\Omega$ και $R_1 = 100 \Omega$. Προσοχή το



βολτόμετρο να είναι ψηφιακό (εσωτερική αντίσταση περίπου 10 MΩ). Ανοίξτε τη στιγμή $t = 0$ το διακόπτη και σημειώστε την ένδειξη V του βολτομέτρου ανά 10 s. Αφού συμπληρώσετε το δοσμένο πίνακα τιμών κατασκευάστε (στο σπίτι) το διάγραμμα $V = f(t)$ σε χαρτί μιλιμετρέ και γράψτε τα

t/s	10	20	30	40	50	60
V/V						

συμπεράσματά σας.

(II) Να κάνετε το ίδιο με αντιστάτη $R = 10 \text{ k}\Omega$. Τί παρατηρείτε;

(III) Πραγματοποιήστε με τα δοσμένα στοιχεία ένα κύκλωμα για τη μελέτη της φόρτισης του πυκνωτή.

5. ΜΕΛΕΤΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΠΥΚΝΩΤΗ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΦΟΡΤΙΟ

Στο εργαστήριο του σχολείου θα βρείτε ηλεκτροσκόπιο με ζεύγος μεταλλικών δίσκων Α, Β. Ο δίσκος Α είναι στερεωμένος στο ηλεκτροσκόπιο, ενώ ο Β έχει μονωτική βάση, απ' την οποία τον κρατάτε.

Φορτίστε με επαγωγή τον δίσκο Α και παρατηρήστε την απόκλιση των φύλλων του ηλεκτροσκοπίου. Κατόπιν πλησιάστε

τον δίσκο Β στον Α και ακουμπήστε τον για λίγο με το δάκτυλό σας. Έχετε πλέον ένα φορτισμένο πυκνωτή με οπλισμούς τους δίσκους Α, Β. Μετακινήστε πάνω-κάτω και αριστερά-δεξιά τον δίσκο Β. Τι παρατηρείτε; Τοποθετήστε ανάμεσα στους δίσκους ένα πλαστικό φύλλο. Τί παρατηρείτε; Δώστε ερμηνεία.

6. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΑΣΗΣ ΜΕ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟ

i) Σκεφτείτε τον τρόπο και πραγματοποιήστε μέτρηση της τάσης μιας μπαταρίας με παλμογράφο.

ii) Κόψτε ένα λεμόνι στη μέση. Καρφώστε πάνω στο κομμένο λεμόνι δύο ελάσματα. Ένα χάλκινο και ένα τσίγκινο. Μετρήστε την τάση μεταξύ των ελασμάτων με τον παλμογράφο. Δοκιμάστε κατόπιν να μετρήσετε αυτή την τάση με ένα βολτόμετρο.

iii) Υποβιβάστε την τάση του δικτύου της ΔΕΗ στα 12 V με ένα μετασχηματιστή. Εφαρμόστε την “μετασχηματισμένη” τάση στα πλακίδια κατακόρυφης απόκλισης του παλμογράφου. Δοκιμάστε διάφορες ρυθμίσεις, ώστε να δείτε την κυματομορφή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

Με δεδομένο το νόμο του Gauss να εξηγηθεί γιατί οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτροστατικού πεδίου πρέπει να ξεκινούν και να καταλήγουν σε φορτία ή στο άπειρο.

2

Σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Με χρήση του νόμου του Gauss να δείχθει ότι σ' αυτή την περιοχή η πυκνότητα φορτίου είναι μηδέν.

3

Από μια κλειστή επιφάνεια εξέρχονται περισσότερες ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές από όσες εισέρχονται. Ποιά από τις προτάσεις είναι σωστή.

- (α) Η επιφάνεια περικλείει αρνητικό ολικό φορτίο
- (β) Η επιφάνεια περικλείει θετικό ολικό φορτίο
- (γ) Το ολικό φορτίο εντός της επιφάνειας είναι μηδέν.
- (δ) Η ολική ροή που περνά από την επιφάνεια είναι μηδέν

4

Σε ποιά περίπτωση θα μεταβληθεί η ροή που περνά από μια κλειστή επιφάνεια, που εγκλωβίζει σημειακό θετικό φορτίο q .

- (α) Η επιφάνεια αλλάζει σχήμα
- (β) Η επιφάνεια αλλάζει όγκο
- (γ) Το φορτίο αυξάνεται
- (δ) Το φορτίο αλλάζει θέση εντός της επιφάνειας

5

Αναφέρουμε μια υπόθεση και ένα συμπέρασμα
Υπόθεση: Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών φορτίων είναι αντιστρόφως ανάλογη με την απόσταση μεταξύ των φορτίων.

Συμπέρασμα: Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δυο σημειακών φορτίων αυξάνεται πάντα όταν τα φορτία πλησιάζουν.

- (α) Είναι σωστή μόνο η υπόθεση
- (β) Είναι σωστό μόνο το συμπέρασμα
- (γ) Είναι σωστή και η υπόθεση και το συμπέρασμα
- (δ) Δεν είναι σωστή ούτε η υπόθεση ούτε το συμπέρασμα.

6

Ποιά (ή ποιές) από τις παρακάτω φράσεις είναι ορθά διατυπωμένη (διατυπωμένες).

- (α) Το δυναμικό του σημείου A είναι 5 V

- (β) Το δυναμικό του φορτίου q είναι 5 V
- (γ) Η δυναμική ενέργεια του σημείου A είναι 5 J
- (δ) Η δυναμική ενέργεια του φορτίου q , στο σημείο A, είναι 5 J

7

Τοποθετούμε ένα “ελεύθερο” σημειακό φορτίο q σ' ένα σημείο του πεδίου ενός ηλεκτρικού διπόλου, στο οποίο το δυναμικό είναι μηδέν. Θα κινηθεί το φορτίο q ;

8

Τρία ίσα θετικά σημειακά φορτία βρίσκονται στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου. Η δυναμική ενέργεια του ενός φορτίου είναι U . Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

- (α) $6U$ (β) $3U$ (γ) $1,5U$ (δ) U

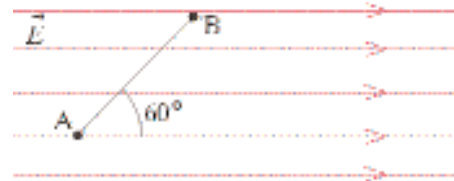
9

Δίνονται δύο σημεία A, B μιας δυναμικής γραμμής ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Το δυναμικό του A είναι $V_A = 70\text{ V}$ και του B είναι $V_B = -30\text{ V}$. Το δυναμικό του μέσου M του AB είναι:

- (α) 50 V (β) 40 V (γ) 20 V (δ) 10 V

10

Το ευθύγραμμο τμήμα (AB) = 0,200 m σχηματίζει γωνία 60° με τις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης $E = 50,0\text{ N/C}$. Η διαφορά



δυναμικού $V_{AB} = V_A - V_B$ είναι

- (α) 10,0 V (β) 5,00 V (γ) - 17,3 V (δ) 17,3 V

11

Ποιά (ή ποιές) από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (ή σωστές)

- (α) Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι διανυσματικό μέγεθος
- (β) Το δυναμικό κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής προς τη φορά της έντασης αυξάνεται
- (γ) Το πρόσημο της δυναμικής ενέργειας, ενός σημειακού φορτίου q , σ' ένα σημείο του ηλεκτροστατικού πεδίου εξαρτάται από το πρόσημο του q

12

Είναι γνωστό ότι το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο έχουν φορτία αντίθετου προσήμου αλλά ίδιου μέρου, ενώ η μάζα του πρωτονίου είναι 1836 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου. Αν βρεθούν μέσα στο ίδιο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο θα αποκτήσουν επιταχύνσεις με μέτρα a_e το ηλεκτρόνιο και a_p το πρωτόνιο. Ο λόγος $\frac{a_e}{a_p}$ ισούται με

- (α) $\frac{1}{1836}$ (β) 1836 (γ) 1836^2 (δ) 1

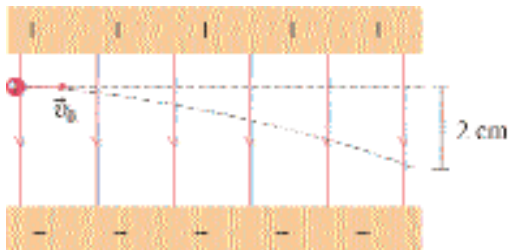
13

Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται με ταχύτητα \vec{v}_0 μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Για να μηδενιστεί κάποια στιγμή η ταχύτητα του ηλεκτρονίου, πρέπει η \vec{v}_0 να είναι:

- (α) Κάθετη στις δυναμικές γραμμές
 (β) Πλάγια ως προς τις δυναμικές γραμμές
 (γ) Ομόρροπη με τις δυναμικές γραμμές
 (δ) Αντίρροπη με τις δυναμικές γραμμές.

14

Φορτισμένο σωματίδιο βάλλεται μεταξύ παράλληλων φορτισμένων πλακών όπως στο σχήμα. Κατά τη



διέλευση του σωματιδίου στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών προκαλείται απόκλιση 2 cm.

Ένα άλλο φορτισμένο σωματίδιο με διπλάσιο φορτίο και τετραπλάσια μάζα από το πρώτο βάλλεται με την ίδια ταχύτητα \vec{v}_0 . Αυτό θα αποκλίνει στο πεδίο κατά

- (α) 0,5 cm (β) 1 cm (γ) 2 cm (δ) 4 cm

15

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με αυτά της δεξιάς.

<u>Βαρυτικό πεδίο</u>	<u>Ηλεκτρικό πεδίο</u>
A. \vec{g}	α. q
B. G	β. \vec{E}
Γ. m	

16

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με αυτά της δεξιάς.

<u>Φυσικά μεγέθη</u>	<u>Μονάδες</u>
A. Ένταση βαρυτικού πεδίου	α. N/kg
B. Δυναμικό βαρυτικού πεδίου	β. J
	γ. J/kg

17

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με αυτά της δεξιάς.

<u>Πεδίο</u>	<u>Μέγεθος</u>
A. Ηλεκτρικό πεδίο	α. \vec{g}
B. Βαρυτικό πεδίο	β. \vec{E}
	γ. \vec{p}

18

Συμβολίζουμε με R_Γ την ακτίνα της Γης και με g_0 την ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Το δυναμικό σ' ένα σημείο του γήινου πεδίου βαρύτητας, όπου η ένταση είναι $g = \frac{1}{4} g_0$, έχει τιμή:

- (α) $4g_0R_\Gamma$ (β) $-\frac{1}{2}g_0R_\Gamma$
 (γ) $-2g_0R_\Gamma$ (δ) $-\frac{1}{4}g_0R_\Gamma$

19

Ένα σώμα μετακινείται στο βαρυτικό πεδίο της Γης από ένα σημείο, του οποίου το δυναμικό είναι -25 MJ/kg , σ' ένα άλλο σημείο, του οποίου το δυναμικό είναι -55 MJ/kg . Στη διάρκεια αυτής της αλλαγής θέσεως το σώμα κινήθηκε:

- (α) Απομακρυνόμενο απ' τη Γη.
 (β) Σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη
 (γ) Πλησιάζοντας προς τη Γη,
 (δ) Τίποτε απ' τα παραπάνω

20

Η σχέση που συνδέει την ταχύτητα περιφοράς v δορυφόρου, που περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, με ακτίνα τροχιάς ίση με την ακτίνα της Γης, και την ταχύτητα διαφυγής v_δ ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης είναι

- (α) $v_\delta = \frac{v}{\sqrt{2}}$ (β) $v_\delta = 2v$
 (γ) $v_\delta = v$ (δ) $v_\delta = \sqrt{2}v$

21

Αν είναι E_1 η ελάχιστη μηχανική ενέργεια, που πρέπει να δοθεί σ' ένα σώμα, ώστε αυτό να μεταβεί απ' τη Γη στη Σελήνη και E_2 η ελάχιστη ολική μηχανική ενέργεια, που πρέπει να δοθεί στο ίδιο σώμα, ώστε να επιστρέψει απ' τη Σελήνη στη Γη, ισχύει: $E_1 = E_2$ ή $E_1 > E_2$ ή $E_1 < E_2$;

22

“Γεωστατικός” ή “σύγχρονος δορυφόρος της Γης” ονομάζεται ένας δορυφόρος, που φαίνεται ακίνητος από γήινο παρατηρητή. Ποιά (ή ποιές) από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν αυτόν τον δορυφόρο είναι σωστή (ή σωστές).

- (α) Η περίοδος της κίνησης του δορυφόρου είναι 24 h
 (β) Το επίπεδο της τροχιάς του δορυφόρου πρέπει να ταυτίζεται με το επίπεδο του ισημερινού της Γης
 (γ) Ο δορυφόρος μπορεί να τεθεί σε τροχιά σε οποιοδήποτε ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης.

23

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με αυτά της δεξιάς.

Στήλη Α

- A. Διατήρηση ορμής
 B. Διατήρηση μηχανικής ενέργειας

Στήλη Β

- α. Μονωμένο σύστημα
 β. Σταθερή συνισταμένη δύναμη
 γ. Μόνο συντηρητικές δυνάμεις

24

Με ποιόν (ή ποιούς) από τους παρακάτω τρόπους μπορούμε να αυξήσουμε την τάση V μεταξύ των οπλισμών πυκνωτή αέρα, ο οποίος φορτίστηκε και

- κατόπιν αποσυνδέθηκε από την πηγή φόρτισης.
 (α) Με εισαγωγή διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών.
 (β) Με αύξηση της απόστασης μεταξύ των οπλισμών.
 (γ) Με αύξηση της επιφάνειας των οπλισμών.

25

Με ποιόν (ή ποιούς) από τους παρακάτω τρόπους μπορούμε να αυξήσουμε την αποθηκευμένη ενέργεια σε πυκνωτή, που είναι συνδεδεμένος με πηγή, ώστε η τάση στα άκρα του να είναι συνεχώς V .

- (α) Με μείωση της επιφάνειας των οπλισμών.
 (β) Με εισαγωγή διηλεκτρικού.
 (γ) Με μείωση της απόστασης μεταξύ των οπλισμών.

26

Εξηγήστε γιατί η αποθηκευμένη ενέργεια σε φορτισμένο πυκνωτή.

- (α) Μειώνεται αν αφαιρέσουμε το διηλεκτρικό, ενώ ο πυκνωτής παραμένει συνδεδεμένος με την πηγή φόρτισης.
 (β) Αυξάνεται αν αφαιρέσουμε το διηλεκτρικό, αφού προηγουμένως αποσυνδέσουμε τον πυκνωτή από την πηγή.

27

Διαθέτουμε αρκετούς ίδιους πυκνωτές χωρητικότητας $C = 6,0 \mu\text{F}$. Να προταθούν τρόποι συνδεσμολογίας, ώστε να πετύχουμε χωρητικότητα.

- (α) $2,0 \mu\text{F}$, (β) $9,0 \mu\text{F}$, (γ) $15 \mu\text{F}$ (δ) $18 \mu\text{F}$

28

Δύο πυκνωτές συνδέονται μεταξύ τους σε σειρά ή παράλληλα. Με τον ένα τρόπο σύνδεσης η ολική χωρητικότητα είναι $50 \mu\text{F}$ και με τον άλλο $8,0 \mu\text{F}$. Ποιά απ' τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής.

- (α) Όταν οι πυκνωτές συνδέονται σε σειρά η χωρητικότητα του συστήματος είναι $50 \mu\text{F}$
 (β) Όταν οι πυκνωτές συνδέονται παράλληλα η χωρητικότητα του συστήματος είναι $8,0 \mu\text{F}$.
 (γ) Ο ένας πυκνωτής έχει χωρητικότητα μεγαλύτερη από $50 \mu\text{F}$.
 (δ) Οι πυκνωτές έχουν χωρητικότητες ανάμεσα στα $8\mu\text{F}$ και στα $50\mu\text{F}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

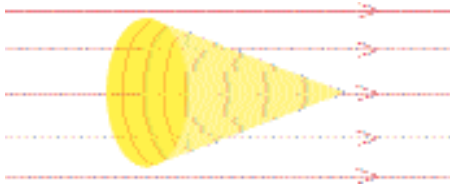
Σημειακό φορτίο q τοποθετείται

- (i) στο κέντρο κύβου
 (ii) στο κέντρο μιας έδρας κύβου
 (iii) σε μια κορυφή κύβου

Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή, που περνά από την ολική επιφάνεια του κύβου σε κάθε περίπτωση και από τη μια έδρα στην (i) περίπτωση.

2

Κώνος με ακτίνα βάσης $r = 0,100$ m τοποθετείται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, έντασης $E = 100 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, με τη βάση του τοποθετημένη κάθετα στις δυναμικές γραμμές. Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή που διέρχεται.



- (α) από την ολική επιφάνεια
(β) από την βάση
(γ) από την παράπλευρη κωνική επιφάνεια.

3

Ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανομημένο κατά μήκος λεπτού σύρματος, απείρου μήκους. Η γραμμική πυκνότητα του φορτίου του σύρματος είναι λ . Να βρεθεί το πεδίο E σε απόσταση r από το σύρμα.

4

Στα άκρα A, B ενός ευθυγράμμου τμήματος $(AB) = 3$ m (ακριβώς) είναι τοποθετημένα (ακλόνητα) τα σημειακά φορτία $q_A = +1 \mu\text{C}$ και $q_B = -4 \mu\text{C}$ (ακριβώς). Να βρεθεί το σημείο (ή τα σημεία) της ευθείας που περνά από τα A, B, όπου το δυναμικό είναι ακριβώς μηδέν.

5

Δύο ακλόνητα σημειακά φορτία $q_A = +4,0 \mu\text{C}$ και $q_B = -1,0 \mu\text{C}$ βρίσκονται σε σημεία A, B, που απέχουν 1,0 m. Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια σημειακού φορτίου $q = -2,0 \text{ mC}$, που θα τοποθετηθεί στο σημείο, όπου το ηλεκτρικό πεδίο E (των q_A και q_B) είναι μηδέν.

6

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $(AB) = 30$ cm και $(BΓ) = 60$ cm. Στις κορυφές B, Δ υπάρχουν τα σημειακά φορτία $q_B = +1,0 \mu\text{C}$ και $q_D = -1,0 \mu\text{C}$. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης του πεδίου όταν μετακινηθεί ένα φορτίο $q = -1,0 \mu\text{C}$ από το A στο Γ.

7

Δύο οριζόντιες φορτισμένες πλάκες, που φέρουν ίσα (απολύτως) και αντίθετα φορτία, απέχουν 4,5 cm

και η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους είναι $4,0 \times 10^3$ V. Στο χώρο μεταξύ των πλακών αιωρείται, “αρνητικά” φορτισμένη, σταγόνα λαδιού μάζας $1,0 \times 10^{-14}$ kg. Να βρεθεί το πλήθος της περίσσειας των ηλεκτρονίων της σταγόνας. $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

8

Πρωτόνιο μάζας m και φορτίου e κατευθύνεται προς ελεύθερο από ηλεκτρόνια πυρήνα, πολύ μεγαλύτερης μάζας, με φορτίο $q = 3e$. Το πρωτόνιο σε πολύ μεγάλη απόσταση από τον πυρήνα, έχει ταχύτητα v_0 . Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση, που θα πλησιάσει το πρωτόνιο στον πυρήνα.

9

Να υπολογισθεί το έργο που καταναλώνεται για την τοποθέτηση τεσσάρων ίσων σημειακών φορτίων q στις κορυφές τετραγώνου, πλευράς a .

10

Ηλεκτρόνιο εισέρχεται, με ταχύτητα v_0 , μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, παράλληλα προς τις δυναμικές γραμμές. Η v_0 είναι ομόρροπη με την ένταση E του πεδίου. Να βρεθεί σε πόσο χρόνο, απ' τη στιγμή της εισόδου, μηδενίζεται η ταχύτητα του ηλεκτρονίου και πόσο διάστημα διανύει αυτό, απ' τη στιγμή της εισόδου, μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητα του. Δίνονται:

$$v_0 = 1,0 \times 10^6 \text{ m/s}, \quad E = 100 \text{ N/C},$$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

11

Φορτισμένο με θετικό φορτίο σωματίδιο, με λόγο φορτίου προς μάζα $\frac{q}{m} = 1,0 \times 10^8 \text{ C/kg}$, κινείται

οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ m/s}$

και κάποια στιγμή εισέρχεται σε κατακόρυφο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, έντασης $E = 1,0 \times 10^3 \text{ N/C}$, με φορά προς τα κάτω.

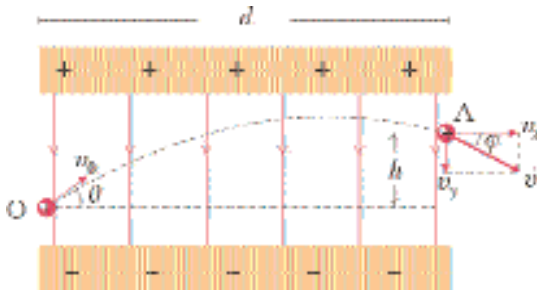
Να βρεθεί σε χρόνο 1,0 μs από τη στιγμή της εισόδου.

- α. Η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση του σωματιδίου.
β. Η ταχύτητα του σωματιδίου, κατά μέτρο και κατεύθυνση.
γ. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ του σημείου εισόδου στο πεδίο και του σημείου που βρίσκεται το σωματίδιο σε χρόνο 1,0 μs απ' τη στιγμή της εισόδου.

12

Σωματίδιο φέρει θετικό φορτίο και ο λόγος του φορτίου, προς τη μάζα του είναι $\frac{q}{m} = 1,0 \times 10^8 \text{ C / kg}$.

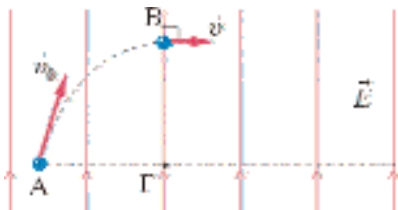
Αυτό εισέρχεται με ταχύτητα $v_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ m / s}$ μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, έντασης $E = 1,0 \times 10^3 \text{ N/C}$ που δημιουργείται από δύο παράλληλες φορτισμένες πλάκες μήκους $d = 8,0 \text{ cm}$ (όπως στο σχήμα). Το σωματίδιο εισέρχεται στο πεδίο απ' το σημείο O και εξέρχεται απ' το A, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία θ είναι 37° και δίνεται



- ότι $\sin 37^\circ = 0,60$ και $\cos 37^\circ = 0,80$. Να βρεθούν.
 (α) Ο χρόνος κίνησης του σωματιδίου στο πεδίο.
 (β) Η κατακόρυφη μετατόπιση h του σωματιδίου.
 (γ) Η ταχύτητα εξόδου \vec{v} .

13

Ηλεκτρόνιο βάλεται από σημείο A με ταχύτητα v_0 , πλάγια ως προς τις δυναμικές γραμμές κατακόρυφου ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Η ταχύτητα \vec{v} του ηλεκτρονίου γίνεται κάθετη στις δυναμικές γραμμές όταν η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι ίσες $(A\Gamma) = (\Gamma B)$. Η κινητική ενέργεια του



- ηλεκτρονίου στο A είναι 100 eV . Να βρεθούν
 (α) Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου στο B.
 (β) Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά την κίνηση του ηλεκτρονίου από το A ως το B.
 (γ) Η διαφορά δυναμικού V_{AB} .

14

Ρίχνουμε ένα σώμα από την επιφάνεια της Γης

κατακόρυφα προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα $8,0 \times 10^3 \text{ m/s}$. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια της Γης που θα φθάσει το σώμα. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$, η ένταση του γήινου βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του ατμοσφαιρικού αέρα είναι αμελητέα.

15

Τρεις σφαίρες, μικρών διαστάσεων και ίδιας μάζας m η κάθε μία, κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά, ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή, να αποτελούν τις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a . Κάθε σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, υπό την επίδραση των δυνάμεων απ' τις άλλες δύο, δηλαδή οι σφαίρες δεν αλληλεπιδρούν με άλλα σώματα του σύμπαντος. Να υπολογισθεί η μηχανική ενέργεια του συστήματος των μαζών.
 Γνωστά G, m, a .

16

Τρεις σφαίρες, ίδιας μάζας m , βρίσκονται στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου ABΓ πλευράς a . Οι σφαίρες που βρίσκονται στα B, Γ είναι σταθερά στερεωμένες, ενώ η σφαίρα που βρίσκεται στο A αφήνεται (χωρίς αρχική ταχύτητα) να κινηθεί, υπό την επίδραση μόνο των βαρυτικών δυνάμεων, από τις άλλες δύο σφαίρες. Να υπολογισθεί η μέγιστη ταχύτητα της κινούμενης σφαίρας και το μέγιστο διάστημα που διανύει, χωρίς να αλλάξει φορά κίνησης. Γνωστά τα G, m, a .

17

Τεχνητός δορυφόρος της Γης στρέφεται σε κυκλική τροχιά σε ύψος $h = 3R_T$. Ξαφνικά, λόγω έκρηξης, σπάει σε δύο κομμάτια A, B ίσων μαζών. Το A, μετά την έκρηξη γίνεται δορυφόρος της Γης στο ίδιο ύψος, κινούμενος όμως με αντίθετη φορά απ' τον αρχικό δορυφόρο.
 (α) Να βρεθεί η ταχύτητα του κομματιού B, αμέσως μετά τη διάσπαση.
 (β) Να αποδειχθεί ότι το κομμάτι B διαφεύγει απ' το βαρυτικό πεδίο της Γης.
 (γ) Να υπολογισθεί η ταχύτητα του κομματιού B, όταν αυτό δεν αλληλεπιδρά πλέον με τη Γη.
 Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

18

Δύο ίδια θετικά φορτισμένα σωμάτια είναι μακριά από άλλα σώματα. Κάποια στιγμή βρίσκονται μεταξύ

τους σε δεδομένη απόσταση a και έχουν ταχύτητες μηδέν. Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση όταν η ταχύτητά τους είναι μισή από την ταχύτητα που έχουν όταν, πρακτικώς, η αλληλεπίδραση τους γίνει μηδέν. Μεταξύ των σωματίων, λαμβάνεται υπόψη μόνο η ηλεκτρική αλληλεπίδραση.

19

Τέσσερα σφαιρίδια, ίδιας μάζας m , κρατούνται στις κορυφές τετραγώνου πλευράς a .

- (α) Ποιά η δυναμική ενέργεια του συστήματος;
- (β) Ποιά η απαιτούμενη ενέργεια, για τη διάλυση του συστήματος;
- (γ) Αφήνουμε τα σφαιρίδια ταυτόχρονα, χωρίς αρχικές ταχύτητες. Κάθε ένα από αυτά δέχεται μόνο τις βαρυτικές δυνάμεις απ' τα υπόλοιπα. Ποιά η ταχύτητα των σφαιριδίων την στιγμή που σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς $a/4$;

Γνωστά G, m, a .

20

Σφαίρα A , μάζας m , κινείται προς αρχικά ακίνητη σφαίρα B , μάζας $2m$. Η ταχύτητα της σφαίρας A πολύ μακριά από την B είναι v_0 . Αν οι δύο σφαίρες δεν αλληλεπιδρούν με άλλα σώματα, να βρεθούν

- (α) Η ταχύτητα της σφαίρας B , όταν η ταχύτητα της A είναι $2v_0$
- (β) Η απόσταση των κέντρων των σφαιρών, την στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα της A σφαίρας είναι $2v_0$.

Γνωστά v_0, G, m .

21

Να υπολογιστεί η % μεταβολή της αποθηκευμένης ενέργειας σε επίπεδο πυκνωτή, που έχει αέρα μεταξύ των οπλισμών του, αν αυτός αποσυνδεθεί από την πηγή φόρτισης, τριπλασιαστεί η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του και γεμίσει με διηλεκτρικό με $K = 6,0$.

22

Επίπεδος πυκνωτής έχει κυκλικούς οπλισμούς ακτίνας $r = 6,00\text{ cm}$. Ο χώρος μεταξύ των οπλισμών είναι γεμάτος με διηλεκτρικό ($K = 5,00$), του οποίου η αντοχή είναι $2,00 \times 10^7\text{ V/m}$. Αν η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = 10^{-10}\text{ F}$ να υπολογισθεί η μέγιστη τάση V_m που μπορεί να εφαρμοστεί μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ($\pi = 3,14, \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$).

23

Επίπεδος πυκνωτής αέρα είναι φορτισμένος με φορτίο q και το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε οπλισμού είναι A . Δείξτε ότι η ελκτική δύναμη μεταξύ των οπλισμών δίνεται απ' σχέση .

24

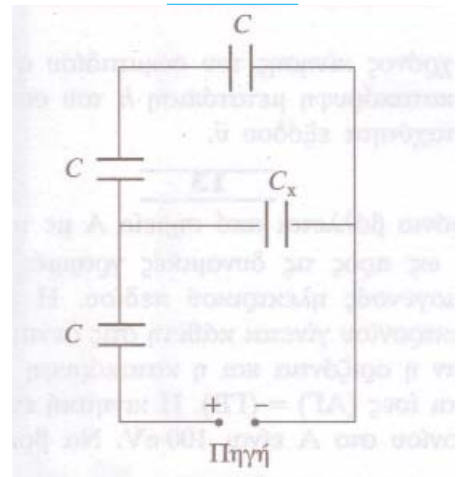
Η τάση μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή αέρα, που απέχουν $\ell = 2,0\text{ cm}$, είναι $V = 3,0 \times 10^3\text{ V}$

- (α) Ποιά η ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών;
- (β) Ανάμεσα στους οπλισμούς αιωρείται σταγονίδιο λαδιού μάζας $m = 12 \times 10^{-12}\text{ kg}$. Να βρεθεί το φορτίο του σταγονιδίου ($g = 10\text{ m/s}^2$)
- (γ) Αν η τάση μεταξύ των οπλισμών γίνει $V_1 = 2,0 \times 10^3\text{ V}$ να βρεθεί η επιτάχυνση που αποκτά η σταγόνα.

Άνοση και αντίσταση αέρα αμελητέες.

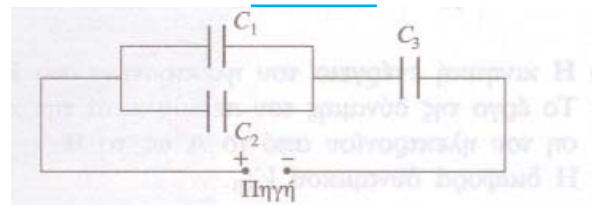
25

Αν $C = 8,0\text{ }\mu\text{F}$, να βρεθεί η χωρητικότητα C_x , ώστε



η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας να είναι $C_{ολ} = 4,0\text{ }\mu\text{F}$.

26



Για την συνδεσμολογία δίνονται: $C_1 = 1,0\text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 2,0\text{ }\mu\text{F}$, $C_3 = 6,0\text{ }\mu\text{F}$ και τάση πηγής $V = 12\text{ V}$. Να βρεθούν:

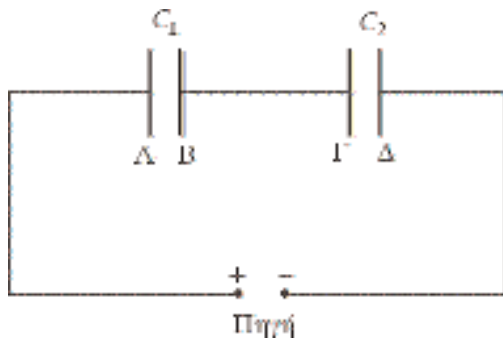
- (α) Η ολική χωρητικότητα
- (β) Το φορτίο κάθε πυκνωτή

(γ) Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε κάθε πυκνωτή.

27

Δύο πυκνωτές με χωρητικότητες $C_1 = 2,50 \mu\text{F}$ και $C_2 = 10,0 \mu\text{F}$ συνδέονται στη σειρά και τροφοδοτούνται από τάση $V = 12,0 \text{ V}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κατόπιν οι πυκνωτές αποσυνδέονται από την πηγή (χωρίς να εκφορτισθούν) και συνδέονται μεταξύ τους ως εξής:

- (α) Ο οπλισμός Α με τον Δ και ο Β με τον Γ ή
- (β) Ο οπλισμός Α με τον Γ και ο Β με τον Δ.

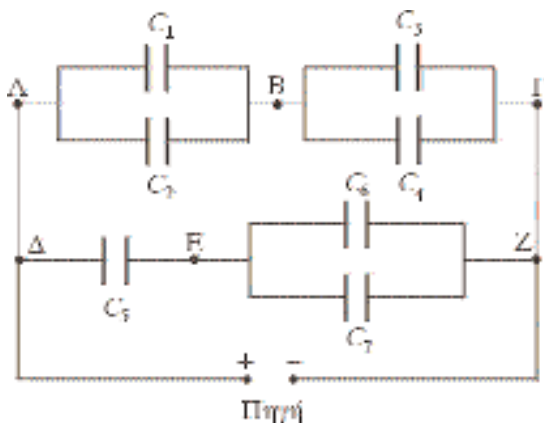


Να βρεθεί το τελικό φορτίο του κάθε πυκνωτή, σε κάθε περίπτωση.

28

Για τη συνδεσμολογία δίνονται

$$C_1 = 2,0 \mu\text{F}, C_2 = 2,0 \mu\text{F}, C_3 = 4,0 \mu\text{F}, C_4 = 12 \mu\text{F},$$



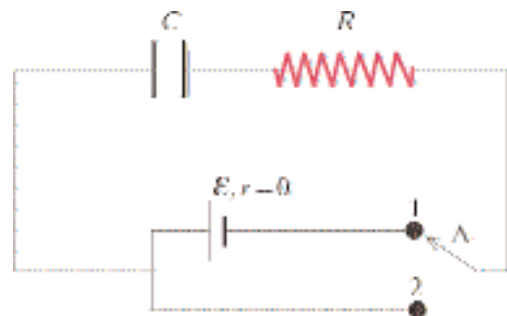
$$C_5 = 5,0 \mu\text{F}, C_6 = 5,0 \mu\text{F}, C_7 = 15 \mu\text{F}$$

Αν το φορτίο του πυκνωτή χωρητικότητας C_5 είναι $q_5 = 20 \mu\text{C}$, να βρεθεί το φορτίο των υπόλοιπων πυκνωτών.

29

Πραγματοποιούμε το κύκλωμα του σχήματος, για το οποίο δίνονται $C = 2,5 \mu\text{F}$, $R = 4,0 \text{ k}\Omega$ και $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$. Ο διακόπτης Δ βρίσκεται στη θέση 1 και ο πυκνωτής φορτίζεται.

- (α) Να αποδειχθεί ότι το 50% της ενέργειας, που δαπάνησε η πηγή στη διάρκεια της φόρτισης, αποθηκεύτηκε στον πυκνωτή.
- (β) Αφού φορτιστεί ο πυκνωτής, μεταφέρουμε το διακόπτη στη θέση 2, οπότε αρχίζει να εκφορτίζεται. Κάποια στιγμή, στη φάση της εκφόρτισης, η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι $V_C = 20 \text{ V}$. Να βρεθεί, εκείνη τη στιγμή, το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη και ο ρυθμός με τον οποίο χάνει ενέργεια ο πυκνωτής. Ακόμη να υπολογιστεί η ενέργεια Joule (Τζουλ) απ' την στιγμή που άρχισε η εκφόρτιση, ως τη στιγμή που είναι $V_C = 20 \text{ V}$.





- Μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας της Δ.Ε.Η. (διπλανή φωτογραφία)
- Γεννήτρια της Δ.Ε.Η. στο σταθμό Αγ. Δημητρίου (επάνω)
- Ο ατμοστρόβιλος του σταθμού Αγ. Δημητρίου (κάτω)



2.2 ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιδιότητα ενός κομματιού μαγνητίτη (φυσικού μαγνήτη) να έλκει σιδερένια αντικείμενα, καθώς και να έλκει ή να απωθεί άλλα κομμάτια μαγνητίτη, ήταν γνωστή στους Αρχαίους Έλληνες από το 800 π.Χ. Πρώτοι οι Κινέζοι εκμεταλλεύτηκαν την ιδιότητα της μαγνητικής βελόνας να προσανατολίζεται σε ορισμένη διεύθυνση και κατασκεύασαν την μαγνητική πυξίδα.

Τον 16ο αιώνα ο William Gilbert έκανε πολλά πειράματα με μαγνήτες, κατασκεύασε τεχνητούς μαγνήτες και διατύπωσε την άποψη ότι η Γη είναι ένας μεγάλος μόνιμος μαγνήτης, ερμηνεύοντας έτσι τον προσανατολισμό της μαγνητικής βελόνας. Τον 18ο αιώνα ο John Michell υπολόγισε τη δύναμη μεταξύ μαγνητικών πόλων και βρήκε ότι ακολουθεί το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου, πράγμα που επιβεβαίωσε και ο Coulomb.

Το 1819 ο Δανός Hans Christian Oersted ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα ασκεί δυνάμεις στη μαγνητική βελόνα και συμπέρανε ότι ο μαγνητισμός σχετίζεται με τον ηλεκτρισμό. Λίγο αργότερα ο André Ampère εξήγαγε το νόμο της μαγνητικής δύναμης ανάμεσα σε ρευματοφόρους αγωγούς και ισχυρίστηκε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα είναι η αιτία κάθε μαγνητικού φαινομένου.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν κινούμενα φορτία, καθώς και τη δύναμη που δέχονται αυτά από το μαγνητικό πεδίο.

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Γνωρίζουμε από το πείραμα του Oersted ότι γύρω από ρευματοφόρο αγωγό δημιουργείται μαγνητικό πεδίο. Αυτό μας οδηγεί στη σκέψη ότι το κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο αποτελεί πηγή για το μαγνητικό πεδίο, όπως κατ' αναλογία το ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί ηλεκτροστατικό πεδίο.

Ένα θετικό σημειακό φορτίο q , που κινείται με ταχύτητα \vec{v} , δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο, το οποίο, όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά, έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

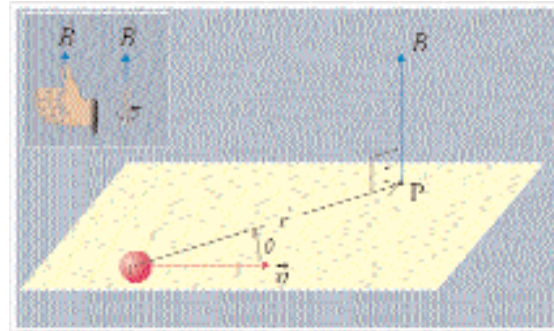
(I) Το B είναι

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \theta}{r^2} \quad (2.40)$$

όπου r η απόσταση μεταξύ του φορτίου (θέση πηγής) και του σημείου P μέτρησης του πεδίου (σημείου παρατήρησης) και θ η μικρότερη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{r} ($0 \leq \theta \leq \pi$). Το διάνυσμα \vec{r} έχει ορισθεί με φορά από τη θέση πηγής προς το σημείο παρατήρησης (σχήμα 2.67)

(II) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{r}

(III) Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας. Δηλαδή, ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει τη φορά του \vec{B} , εφόσον τα υπόλοιπα δάκτυλα διαγράφουν την γωνία θ απ' το διάνυσμα \vec{v} προς το \vec{r} ή η φορά του \vec{B} είναι προς τη φορά που



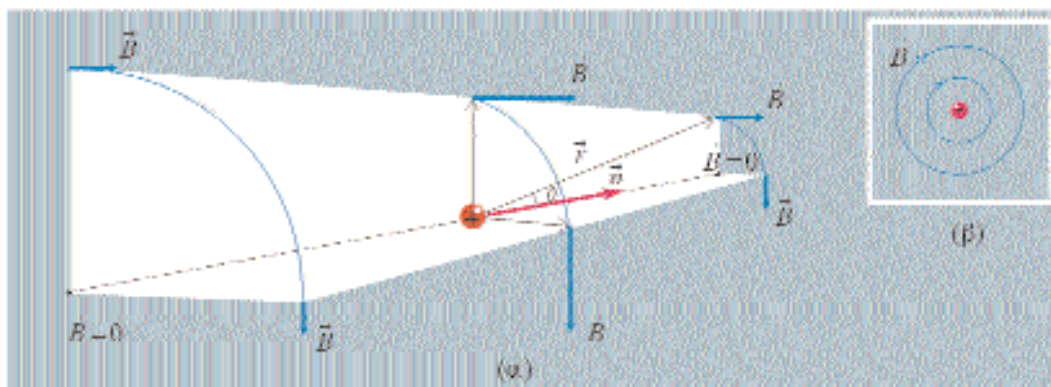
ΣΧΗΜΑ 2.67

Η φορά του \vec{B} καθορίζεται απ' τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας.

προχωρά η δεξιόστροφη βίδα, στρεφόμενη απ' το διάνυσμα \vec{v} προς το \vec{r} μέσω του συντομότερου δρόμου.

Αν το κινούμενο φορτίο είναι αρνητικό, τότε προφανώς η φορά του \vec{B} αλλάζει, και γίνεται αντίθετη.

Υπενθυμίζουμε ότι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού ή μαγνητική σταθερά ορίζεται $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ ακριβώς.



ΣΧΗΜΑ 2.68

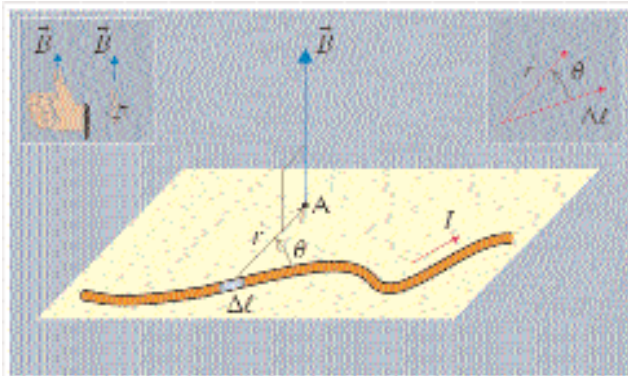
(α) Διανύσματα των πεδίων \vec{B} που δημιουργούνται από κινούμενο θετικό φορτίο. (β) Οι πεδιακές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, κινούμενου φορτίου πάνω στο επίπεδο που περιέχει το φορτίο.

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ BIOT ΚΑΙ SAVART

Μας είναι γνωστό ότι κάθε ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, η μορφή του οποίου εξαρτάται από το σχήμα του αγωγού. Τίθεται έτσι το ερώτημα, αν υπάρχει γενικός τρόπος υπολογισμού του μαγνητικού πεδίου \vec{B} , που δημιουργούν ρευματοφόροι αγωγοί διαφόρων σχημάτων. Απάντηση σ' αυτό δίνει ο νόμος των **Biot** και **Savart**. Με βάση αυτό το νόμο μπορούμε να υπολογίζουμε, σ' ένα οποιοδήποτε σημείο του πεδίου, την τιμή του, που οφείλεται σε κάποιο στοιχειώδες τμήμα του αγωγού. Για να βρούμε κατόπιν την ολική τιμή του πεδίου σ' αυτό το σημείο,

αθροίζουμε διανυσματικά τα στοιχειώδη πεδία $\Delta \vec{B}$, τα οφειλόμενα σε όλα τα στοιχειώδη τμήματα του αγωγού.

Θεωρούμε ρευματοφόρο αγωγό, που διαρρέεται από ρεύμα I και ένα μικρό τμήμα μήκους $\Delta \ell$ (σχήμα 2.69). Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε



ΣΧΗΜΑ 2.69

Το διάνυσμα $\Delta \vec{B}$ έχει τη φορά προς την οποία προχωρά μια δεξιόστροφη βίδα, όταν στρέφεται μέσω του συντομότερου δρόμου από το $\Delta \vec{\ell}$ προς το \vec{r} ή τη φορά του αντίχειρα όταν τα δάχτυλα του δεξιού χεριού στρέφονται από το $\Delta \vec{\ell}$ προς το \vec{r} μέσω του συντομότερου δρόμου.

το πεδίο $\Delta \vec{B}$, που δημιουργεί το $\Delta \ell$ σε σημείο A, το οποίο απέχει απόσταση r από το $\Delta \ell$. Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα, το διάνυσμα $\Delta \vec{\ell}$ με την διεύθυνση του στοιχειώδους τμήματος $\Delta \ell$ και φορά την φορά του ρεύματος, και το διάνυσμα \vec{r} με τη διεύθυνση του ευθυγράμμου τμήματος r και φορά από το $\Delta \vec{\ell}$ προς το A. Σύμφωνα με το νόμο των Biot-Savart το διάνυσμα $\Delta \vec{B}$ έχει:

(I) Μέτρο

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell}{r^2} \sin \theta \tag{2.41}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\Delta \vec{\ell}$ και \vec{r} .

(II) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\Delta \vec{\ell}$ και \vec{r} .

(III) Φορά τη φορά προς την οποία προχωρά μια δεξιόστροφη βίδα, στρεφόμενη απ' το $\Delta \vec{\ell}$ προς το \vec{r} μέσω του συντομότερου δρόμου. Αντίστοιχα μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όπως και πριν ο κανόνας του δεξιού χεριού (σχήμα 2.69).

Οι Biot και Savart διατύπωσαν το νόμο τους λίγο μετά το πείραμα του Oersted βασιζόμενοι σε πειραματικές μετρήσεις. Φυσικά δεν είναι δυνατόν πειραματικά να μετρηθεί το πεδίο ενός στοιχειώδους τμήματος κάποιου αγωγού. Πειραματικά ελέγχεται το μαγνητικό πεδίο ορισμένων τύπων αγωγών που αποτελούν κλειστό κύκλωμα και είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίζεται θεωρητικά από το νόμο των Biot-Savart.

Ο παραπάνω νόμος μπορεί να εξαχθεί θεωρητικά με αφετηρία το

μαγνητικό πεδίο κινούμενου φορτίου και την αρχή της επαλληλίας. Το πεδίο $\vec{\Delta B}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων, που οφείλονται σε όλα τα κινούμενα φορτία του αγωγού μέσα στο στοιχειώδες τμήμα μήκους $\Delta \ell$, άρα, αν αυτά είναι N , έχουμε από τη σχέση (2.40)

$$\Delta B = \frac{\mu_0 N q v \sin \theta}{4\pi r^2}$$

όπου v η ταχύτητα ολισθήσεως (μέση ταχύτητα των φορτίων). Αν Δt ο απαιτούμενος χρόνος να διανύσει ένα φορτίο το τμήμα $\Delta \ell$, τότε ισχύει:

$$v = \frac{\Delta \ell}{\Delta t}$$

Ακόμα στο χρόνο Δt , από μια διατομή του αγωγού διέρχεται φορτίο Nq , οπότε το ρεύμα στον αγωγό είναι

$$I = \frac{Nq}{\Delta t}$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε στην (2.41).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΩΝ ΒΙΟΤ-SAVART

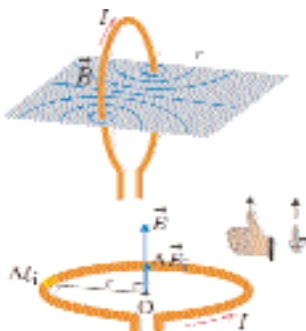
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥ ΑΓΩΓΟΥ.

Οι γραμμές του πεδίου \vec{B} ενός κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού, σε ένα μόνο επίπεδο, εικονίζονται στο σχήμα 2.70. Οι γραμμές δεν είναι κύκλοι, είναι όμως κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν τον αγωγό. Η μαγνητική γραμμή που περνά από το κέντρο του αγωγού είναι ευθεία, η οποία ξεκινά από το μείον άπειρο και καταλήγει στο συν άπειρο. Η φορά των μαγνητικών γραμμών καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας, όπως στο σχήμα. Θα δούμε τώρα πώς, με εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart, υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο O κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού, ακτίνας r , που διαρρέεται από ρεύμα I .

Χωρίζουμε τον αγωγό σε πολύ μικρά (σχεδόν ευθύγραμμα) στοιχειώδη τμήματα $\Delta \ell_1, \Delta \ell_2, \dots$. Από το νόμο των Biot-Savart το πεδίο $\vec{\Delta B}_i$ στο O , το οφειλόμενο στο στοιχειώδες τμήμα $\Delta \ell_i$, είναι κάθετο στο επίπεδο του αγωγού και έχει μέτρο

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell_i}{r^2} \sin 90^\circ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell_i}{r^2}$$

Τα στοιχειώδη πεδία $\vec{\Delta B}_1, \vec{\Delta B}_2, \dots$ έχουν όλα την ίδια κατεύθυνση, οπότε το συνολικό πεδίο \vec{B} στο O είναι ίδιας κατεύθυνσης με τα στοιχειώδη πεδία και έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των στοιχειωδών πεδίων:



ΣΧΗΜΑ 2.70

Το μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell_1}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell_2}{r^2} + \dots \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} (\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 + \dots) \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} 2\pi r \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (2.42)$$

Αν αντί μιάς σπείρας έχουμε πηνίο με N (πυκνά διατεταγμένες) σπείρες ίδιας ακτίνας, θα ισχύει

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} N \quad (2.43)$$

ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥ ΑΓΩΓΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Το μαγνητικό πεδίο ενός ευθύγραμμου αγωγού πολύ μεγάλου μήκους εικονίζεται (μόνο σε ένα επίπεδο) στο σχήμα 2.71. Οι μαγνητικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με το επίπεδό τους κάθετο στον αγωγό και το κέντρο τους επί του αγωγού. Η φορά των μαγνητικών γραμμών καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας όπως φαίνεται στο σχήμα 2.71. Με αφετηρία το νόμο των Biot-Savart και την χρήση ολοκληρώματος αποδεικνύεται ότι το πεδίο B , σε απόσταση r από τον αγωγό, δίνεται απ' τη σχέση

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.44)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει γενικώς για απόσταση r πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του αγωγού. Γι' αυτό κατά τη μαθηματική επεξεργασία του προβλήματος, θεωρούμε τον αγωγό απείρου μήκους.

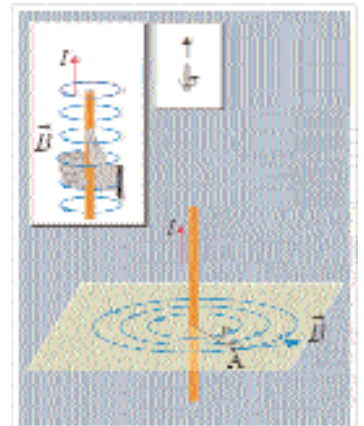
Παράδειγμα 2-23

Κυκλικός αγωγός ακτίνας r , με κέντρο O , διαρρέεται από ρεύμα I . Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε σημείο A , που βρίσκεται πάνω στην κάθετη ευθεία στο επίπεδο του αγωγού, η οποία περνά από το O . Δίνεται ότι η απόσταση (OA) είναι d .

Απάντηση

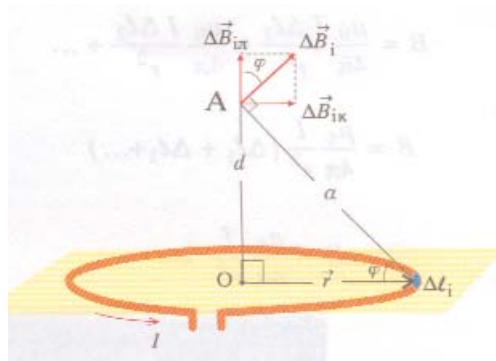
Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα $\Delta \ell_i$ του αγωγού. Το πεδίο στο A , που οφείλεται στο $\Delta \ell_i$, είναι $\Delta \vec{B}_i$. Το $\Delta \vec{B}_i$ έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα 2.72 και μέτρο

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \ell_i}{a^2} \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 I \Delta \ell_i}{4\pi a^2}$$



ΣΧΗΜΑ 2.71

Το μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού.



ΣΧΗΜΑ 2.72

Το $\vec{\Delta B}_i$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την $\vec{\Delta B}_{i\pi}$, παράλληλη στην διεύθυνση του d , και την $\vec{\Delta B}_{i\kappa}$, κάθετη στο d .

Χωρίζουμε τον αγωγό σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος στοιχειωδών τμημάτων $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \dots$, με ίδιο μήκος και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα στοιχειώδη πεδία στο σημείο A. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των οριζοντίων συνιστωσών λόγω συμμετρίας είναι μηδέν. (Η $\vec{\Delta B}_{i\kappa}$ εξουδετερώνεται από την $\vec{\Delta B}_{j\kappa}$, την οφειλόμενη στο στοιχειώδες τμήμα $\Delta\ell_j$, που είναι "αντιδιαμετρικό" του $\Delta\ell_i$).

Συνεπώς, το ολικό πεδίο \vec{B} στο A είναι το άθροισμα των κατακόρυφων συνιστωσών των στοιχειωδών πεδίων. Άρα το \vec{B} έχει την κατεύθυνση του $\vec{\Delta B}_{i\pi}$ και ισχύει

$$B = \Delta B_{1\pi} + \Delta B_{2\pi} + \dots \quad \text{ή}$$

$$B = \Delta B_1 \cos\varphi + \Delta B_2 \cos\varphi + \dots \quad \text{ή}$$

$$B = \left[\frac{\mu_0 I \Delta\ell_1}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 I \Delta\ell_2}{4\pi a^2} + \dots \right] \cos\varphi \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} [\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \dots] \frac{r}{a} \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} 2\pi r \frac{r}{a} \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2 a^3} \quad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2(\sqrt{d^2 + r^2})^3}$$

ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΠΟΥ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ένα ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο, αλλά και δέχεται δύναμη, όταν βρεθεί μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο. Δηλαδή το ακίνητο φορτίο αποτελεί πηγή αλλά και υπόθεμα για το ηλεκτρικό πεδίο. Το κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο είδαμε ότι δημιουργεί και μαγνητικό πεδίο. Μήπως κατ' αναλογία το κινούμενο φορτίο δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο; Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε χρησιμοποιώντας τη δέσμη ηλεκτρονίων που παράγεται στον καθοδικό σωλήνα. Χωρίς τροφοδοσία των πλακιδίων απόκλισης η κηλίδα είναι στο κέντρο της οθόνης. Τοποθετούμε κατόπιν το σωλήνα σε μαγνητικό πεδίο, οπότε παρατηρούμε εκτροπή της κηλίδας. Συνεπώς το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη στα κινούμενα ηλεκτρόνια της δέσμης. Μόνο στην περίπτωση κατά την οποία οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλες με την ταχύτητα των ηλεκτρονίων δεν διαπιστώνουμε εκτροπή της δέσμης. Από την κατεύθυνση μετατόπισης της κηλίδας διαπιστώνουμε ότι η δύναμη στα ηλεκτρόνια δεν έχει τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου (όπως ίσως αναμέναμε), αλλά είναι κάθετη σ' αυτό. Με μετρήσεις ακριβείας, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά της δύναμης \vec{F} που ασκείται σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο εντός μαγνητικού πεδίου. Αυτή η μαγνητική δύναμη έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

(I) Η F δίνεται από την σχέση

$$F = B v q \sin \theta \tag{2.6}$$

όπου B , v αντίστοιχα το μαγνητικό πεδίο και η ταχύτητα του φορτίου, q το φορτίο και θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{B} ($0 \leq \theta \leq \pi$).

(II) Η κατεύθυνση της είναι κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων \vec{B} και \vec{v} (σχ. 2.73)

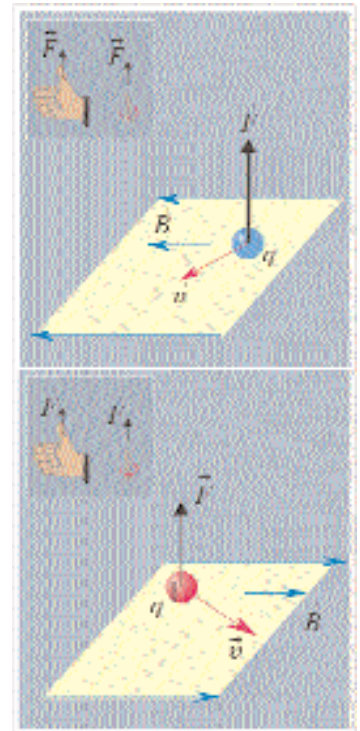
(III) Η φορά της προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: Τοποθετούμε το δεξί μας χέρι με τον αντίχειρα κάθετο στο επίπεδο των \vec{v} και \vec{B} , ενώ τα υπόλοιπα δάκτυλα στρέφονται μέσω του συντομότερου δρόμου από το διάνυσμα \vec{v} προς το \vec{B} , εφόσον το q είναι θετικό ή απ' το \vec{B} προς το \vec{v} , εφόσον το q είναι αρνητικό και τότε ο αντίχειρας δείχνει τη φορά της δύναμης \vec{F} .

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα της δεξιόστροφης βίδας. Δηλαδή η \vec{F} σε θετικό φορτίο έχει τη φορά προς την οποία προχωρά η δεξιόστροφη βίδα, που στρέφεται μέσω του συντομότερου δρόμου από το διάνυσμα \vec{v} προς το \vec{B} .

- Αν τα διανύσματα \vec{v} και \vec{B} είναι κάθετα, τότε $\sin \theta = 1$, οπότε

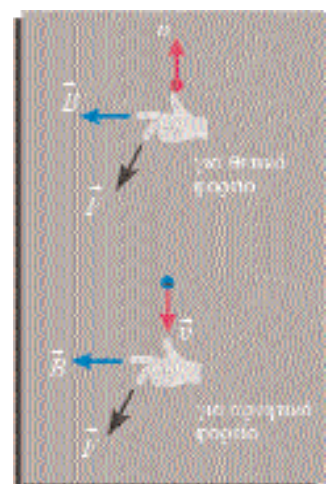
$$F = B v q$$

Σ' αυτή την περίπτωση τα διανύσματα \vec{v} , \vec{B} , \vec{F} αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα και μπορούμε να τα παραστήσουμε με τα τρία δάκτυλα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.74.



ΣΧΗΜΑ 2.73

Η φορά της δύναμης \vec{F} που ασκείται σε φορτίο q που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας.



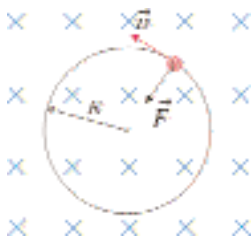
ΣΧΗΜΑ 2.74

Παράσταση των διανυσμάτων \vec{v} , \vec{B} , \vec{F} με τα τρία δάκτυλα του δεξιού χεριού.

- Αν τα διανύσματα \vec{v} και \vec{B} είναι παράλληλα, τότε $\theta = 0^\circ$ ή $\theta = 180^\circ$, οπότε $F = 0$.

ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ.

1. Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται παράλληλα προς τις δυναμικές γραμμές, δεν δέχεται μαγνητική δύναμη. Θεωρώντας αμελητέες τις δυνάμεις βαρύτητας ή τριβών η κίνηση του σωματιδίου είναι ευθύγραμμη ομαλή.



ΣΧΗΜΑ 2.75

Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέλθει σε Ο.Μ.Π., κάθετα στις γραμμές, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

2. Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα \vec{v} , κάθετη στις μαγνητικές γραμμές, δέχεται μαγνητική δύναμη, $F = Bvq = \text{σταθερό}$, η οποία είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα \vec{v} (σχ. 2.75). Αυτό έχει ως συνέπεια η κίνηση του σωματιδίου να είναι ομαλή κυκλική και το "ρόλο της κεντρομόλου δύναμης" να παίζει η μαγνητική δύναμη, άρα

$$Bv|q| = \frac{mv^2}{R} \quad \text{ή}$$

$$R = \frac{mv}{B|q|} \quad (2.46)$$

Απ' την σχέση (2.46) υπολογίζουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου.

Η γωνιακή ταχύτητα ω του σωματιδίου, που ονομάζεται και κυκλοτρονική συχνότητα όπως θα δούμε στον επιταχυντή σωματιδίων "κυκλοτρόνιο", δίνεται από τη σχέση

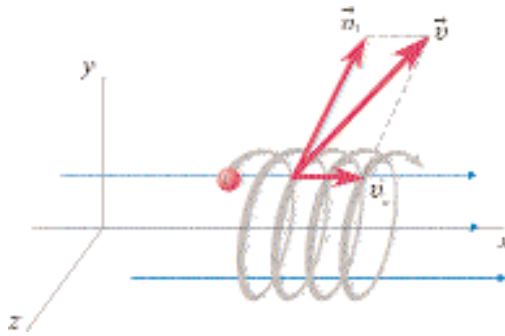
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m} \quad (2.47)$$

Η περίοδος της κίνησης των σωματιδίων, είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{B|q|} \quad (2.48)$$

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα είναι ανάλογη της ταχύτητας, ενώ η περίοδος ανεξάρτητη. Άρα, αν εισέλθουν δύο ίδια σωματίδια με διαφορετικές ταχύτητες σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, θα διαγράψουν στον ίδιο χρόνο κύκλους διαφορετικής ακτίνας.

3. Όταν η ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου δεν είναι κάθετη στις μαγνητικές γραμμές μπορούμε να την αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες, την $v_{//}$, που είναι παράλληλη στις μαγνητικές γραμμές και την v_{\perp} , που είναι κάθετη στις μαγνητικές γραμμές. Για τη μελέτη της κίνησης του φορτισμένου σωματιδίου χρησιμοποιούμε την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων. Αν το σωματίδιο είχε μόνο την v_{\perp} , η κίνησή του θα ήταν ομαλή κυκλική, ενώ αν είχε μόνο την $v_{//}$, η κίνησή του θα ήταν ευθύγραμμη ομαλή. Τώρα εκτελεί ταυτόχρονα αυτές τις δύο κινήσεις, με αποτέλεσμα η σύνθεσή τους να είναι μια **ελικοειδής κίνηση**, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.76. Η ακτίνα της ελικοειδούς τροχιάς, σύμφωνα με τη σχέση (2.46) είναι



ΣΧΗΜΑ 2.76

Ελικοειδής κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε Ο.Μ.Π.

$$R = \frac{m v_{\perp}}{B|q|} \tag{2.49}$$

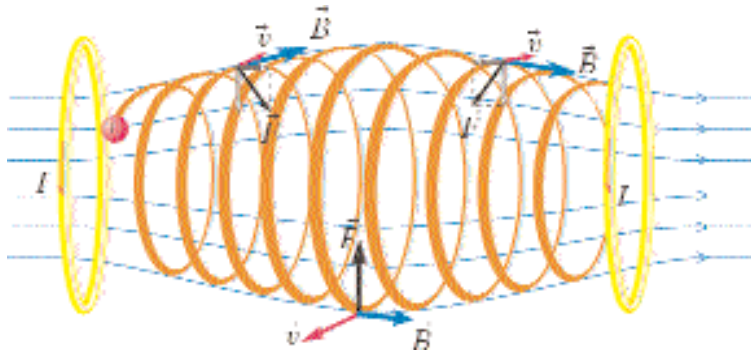
Ακόμα το βήμα της έλικας (δηλαδή το διάστημα που διανύει το σωματίδιο κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών στο χρόνο μιας περιόδου) είναι $\beta = v_{\parallel}T$ και σύμφωνα με τη σχέση (2.9), προκύπτει:

$$\beta = v_{\parallel} \frac{2\pi m}{B|q|} \tag{2.50}$$

ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΕ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο είναι αρκετά περίπλοκη και εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου. Εδώ θα αναφέρουμε μόνο την περίπτωση της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου στο πεδίο που δημιουργείται από δύο κυκλικά πηνία, τα οποία βρίσκονται σε κάποια απόσταση μεταξύ τους. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται είναι ισχυρό στα άκρα και ασθενές στο κέντρο. Ένα σωματίδιο που βρίσκεται στα άκρα δέχεται δύναμη προς το κέντρο της περιοχής. Έτσι, σωματίδια που έχουν κατάλληλες τιμές ταχύτητας μπορούν να κινούνται ελικοειδώς από το ένα άκρο στο άλλο και αντίστροφα. Δηλαδή τα σωματίδια μπορεί να παγιδευτούν σ' ένα τέτοιο πεδίο, το οποίο γι' αυτό το λόγο ονομάζεται μαγνητική φιάλη. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται για τον εγκλωβισμό πολύ θερμού πλάσματος, δηλαδή αγωγίμου αερίου, αποτελούμενο από ηλεκτρόνια και ιόντα σε ορισμένη αναλογία.

Παρόμοια το μαγνητικό πεδίο της Γης παγιδεύει φορτισμένα σωματίδια που προέρχονται από τον Ήλιο σε περιοχές δακτυλιοειδούς σχήματος



ΣΧΗΜΑ 2.77

Μαγνητική φιάλη.

Η μαγνητική δύναμη είναι σ' όλες τις περιπτώσεις συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα, άρα δεν παράγει έργο. Δηλαδή ένα κινούμενο σωματίδιο, υπό την επίδραση μόνο της μαγνητικής δύναμης, διατηρεί το μέτρο της ταχύτητάς του σταθερό.

γύρω από τη Γη. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται ζώνες ακτινοβολίας Van Allen (Βαν Άλλεν) και ανακαλύφθηκαν το 1958 από τον πρώτο Αμερικανικό δορυφόρο Explorer I.



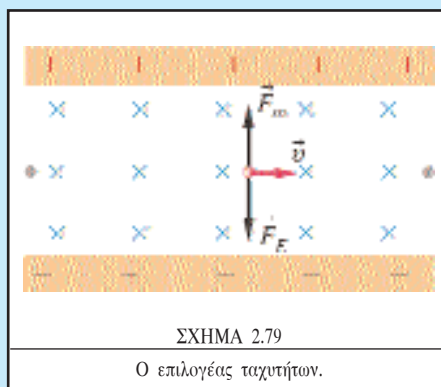
ΣΧΗΜΑ 2.78
Ζώνες Van Allen.

Διευκρίνιση:

Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται σ' ένα χώρο, που συνυπάρχουν ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύο δυνάμεις, την ηλεκτρική $F_e = Eq$ και την μαγνητική δύναμη. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων είναι αυτή που ονομάζεται δύναμη Lorentz. Σε ορισμένα όμως εγχειρίδια αναφέρεται μόνο ως δύναμη Lorentz ή μαγνητική δύναμη.

Εφαρμογή: ΕΠΙΛΟΓΕΑΣ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα m και φορτίο q (έστω θετικό) εισέρχεται σ' ένα χώρο όπου συνυπάρχουν δύο ομογενή πεδία, ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό, με τις γραμμές τους κάθετες μεταξύ τους. Η ταχύτητα v του σωματιδίου είναι κάθετη τόσο στις ηλεκτρικές, όσο και στις μαγνητικές γραμμές. Αν το σωματίδιο περάσει ανεπηρέαστο απ' τον παραπάνω χώρο, τότε αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις απ' τα δύο πεδία εξουδετερώνονται, άρα

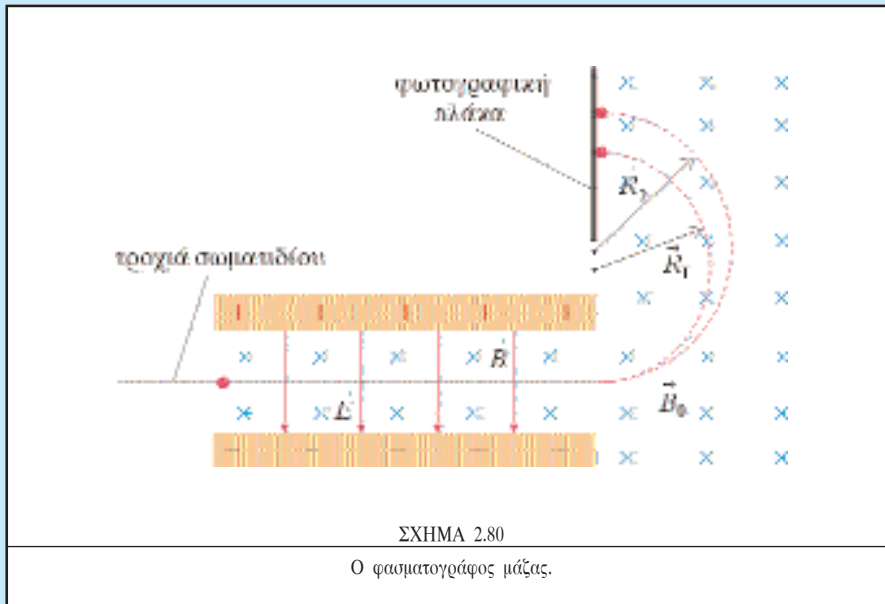


εξουδετερώνονται, άρα

$$F_m = F_E \quad \text{ή} \quad Bvq = Eq \quad \text{ή} \quad v = E/B \quad (2.51)$$

Αυτή η διάταξη ονομάζεται επιλογέας ταχυτήτων, γιατί με κατάλληλη ρύθμιση των τιμών B και E των πεδίων μπορούμε να πετύχουμε τη διέλευση σωματιδίων με επιθυμητή ταχύτητα.

Εφαρμογή: ΦΑΣΜΑΤΟΓΡΑΦΟΣ ΜΑΖΑΣ



ΣΧΗΜΑ 2.80

Ο φασματογράφος μάζας.

Ο φασματογράφος μάζας είναι μια διάταξη που διαχωρίζει ιόντα ανάλογα με το λόγο του φορτίου προς τη μάζα τους q/m (ειδικό φορτίο). Τα ιόντα περνούν πρώτα από τον επιλογέα ταχυτήτων, οπότε η ταχύτητα αυτών που διέρχονται χωρίς να εκτρέπονται δίνεται απ' τη σχέση (2.51). Τα ιόντα μπαίνουν στη συνέχεια σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B}_0 , κάθετα στις μαγνητικές γραμμές. Εκεί, αφού διαγράψουν ημικύκλιο ακτίνας R , αποτυπώνουν τα ίχνη τους σε μία φωτογραφική πλάκα. Η ακτίνα R δίνεται από τη σχέση.

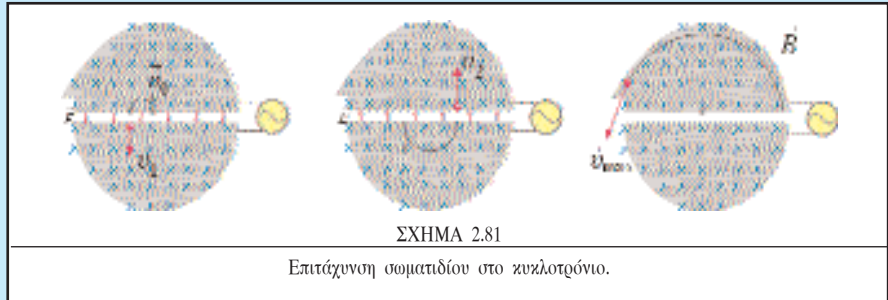
$$R = \frac{mv}{B_0|q|}$$

Η τελευταία λόγω της (2.51) δίνει

$$\frac{|q|}{m} = \frac{E}{B B_0 R} \quad (2.52)$$

Η ακτίνα R προσδιορίζεται πειραματικά, αφού το σωματίδιο αφήνει ίχνος στη φωτογραφική πλάκα το οποίο απέχει $2R$ απ' το σημείο εισόδου στο μαγνητικό πεδίο B_0 . Από τη σχέση (2.52) είναι δυνατόν να υπολογίζουμε το ειδικό φορτίο ενός ιόντος. Μπορούμε επίσης να προσδιορίζουμε το λόγο των μαζών δύο ιόντων με το ίδιο φορτίο q , ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε το q .

Εφαρμογή: ΚΥΚΛΟΤΡΟΝΙΟ



Το κυκλοτρόνιο είναι ένας επιταχυντής φορτισμένων σωματιδίων. Αποτελείται κατ' αρχήν από έναν ηλεκτρομαγνήτη, που δημιουργεί ομογενές μαγνητικό πεδίο. Κάθετα στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι τοποθετημένοι δυο θάλαμοι κενού σε σχήμα D και γι' αυτό ονομάζονται (πληθυντικός) ντίιζ (dees). Ανάμεσα στα ντίιζ υπάρχει το διάκενο, όπου με τη βοήθεια εναλλασσόμενης τάσης δημιουργούμε ομογενές εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Όταν ένα σωματίδιο βρεθεί αρχικά στο διάκενο, θα επιταχυνθεί και θα εισέλθει σε ένα από τα δύο ντίιζ. Εκεί θα γράψει ένα ημικύκλιο και θα βρεθεί πάλι στο διάκενο. Επειδή όμως η περίοδος της εναλλασσόμενης τάσης είναι ίση με την περίοδο περιφοράς (η αντίστοιχη συχνότητα λέγεται κυκλοτρονική συχνότητα), το σωματίδιο θα επιταχυνθεί ξανά μέσα στο διάκενο, οπότε θα εισέλθει στο άλλο D με μεγαλύτερη ταχύτητα. Εκεί θα γράψει ένα ημικύκλιο μεγαλύτερης ακτίνας κ.ο.κ.

Για την κίνηση του σωματιδίου στα ντίιζ ισχύουν οι σχέσεις (2.46), (2.47). Αυτό γράφει ημικύκλια με ολοένα αυξανόμενη ακτίνα, έως ότου αυτή γίνει ίση με την ακτίνα R_D των ντίιζ. Τότε πλέον το σωματίδιο έχει αποκτήσει τη μέγιστη ταχύτητα \vec{v}_{\max} , με την οποία εξέρχεται απ' το κυκλοτρόνιο. Η \vec{v}_{\max} , όπως προκύπτει από τη σχέση (2.46) είναι

$$v_{\max} = \frac{|q|BR_D}{m}$$

Άρα η κινητική ενέργεια, που κερδίζουν τα σωματίδια κατά την επιτάχυνσή τους, είναι

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{q^2B^2R_D^2}{2m}$$

Όταν η ενέργεια των σωματιδίων υπερβεί μια τιμή, έχουμε πλέον σχετικιστικά φαινόμενα. Τότε αυξάνεται η περίοδος περιφοράς και διαφοροποιείται από την περίοδο της εναλλασσόμενης τάσης. Αυτό το πρόβλημα επιλύεται με αύξηση της συχνότητας της επιταχύνουσας τάσης.

Παράδειγμα 2-24

Ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο επιταχύνονται από το ίδιο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και κατόπιν εισέρχονται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, με ταχύτητα κάθετη στις μαγνητικές γραμμές. Να βρεθεί ο λόγος των ακτίνων και των περιόδων των κυκλικών κινήσεων, που θα εκτελέσουν τα σωματίδια στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Μάζα ηλεκτρονίου $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg και μάζα πρωτονίου $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg.

Απάντηση

Το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο έχουν το ίδιο φορτίο κατ' απόλυτη τιμή

$$|q_e| = q_p = e$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη φάση της επιτάχυνσης του ηλεκτρονίου στο ηλεκτρικό πεδίο

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = eV$$

όπου V η επιταχύνουσα τάση. Η τελευταία σχέση δίνει την ταχύτητα εισόδου του ηλεκτρονίου στο ομογενές μαγνητικό πεδίο

$$v_e = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

Όμοια, για την ταχύτητα με την οποία εισέρχεται το πρωτόνιο στο μαγνητικό πεδίο, έχουμε

$$v_p = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει

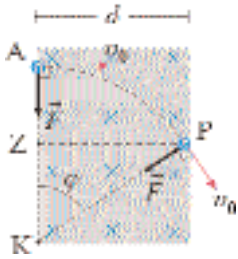
$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$$

Ο λόγος των ακτίνων των κυκλικών τροχιών είναι

$$\frac{R_e}{R_p} = \frac{\frac{m_e v_e}{Be}}{\frac{m_p v_p}{Be}} = \frac{m_e}{m_p} \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = 2,33 \times 10^{-2}$$

Ο λόγος των περιόδων είναι

$$\frac{T_e}{T_p} = \frac{\frac{2\pi m_e}{eB}}{\frac{2\pi m_p}{eB}} = \frac{m_e}{m_p} = 5,45 \times 10^{-4}$$



ΣΧΗΜΑ 2.82

Παράδειγμα 2-25

Ένα φορτισμένο με αρνητικό φορτίο, σωματίδιο, που έχει ειδικό φορτίο $|q|/m=10^8$ C/kg, εισέρχεται με ταχύτητα $v_0 = 10^5$ m/s σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 10^{-2}$ T, κάθετα στις μαγνητικές γραμμές. Το πεδίο εκτείνεται κατά μήκος της v_0 σε απόσταση $d = 5,0$ cm (σχήμα 2.82). Να βρεθεί ο χρόνος κίνησης του σωματιδίου στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Απάντηση

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράψει το σωματίδιο είναι

$$R = \frac{mv_0}{B|q|} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Αφού είναι $d = 5,0$ cm, το σωματίδιο θα γράψει τόξο μικρότερο του τεταρτοκυκλίου. Η μαγνητική δύναμη έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και αυτό ακριβώς το γεγονός εκμεταλλευόμαστε για να προσδιορίσουμε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς (σχήμα 2.82). Η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνία φ με

$$\sin \varphi = \frac{(ZP)}{(KP)} = \frac{d}{R} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Αν T η περίοδος της κίνησης και t ο χρόνος κίνησης ισχύει

$$\frac{t}{T} = \frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1}{12} \quad \text{ή}$$

$$t = \frac{1}{12} \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi}{6} \times 10^{-6} \text{ s} = \frac{\pi}{6} \mu\text{s} = 0,52 \mu\text{s}$$

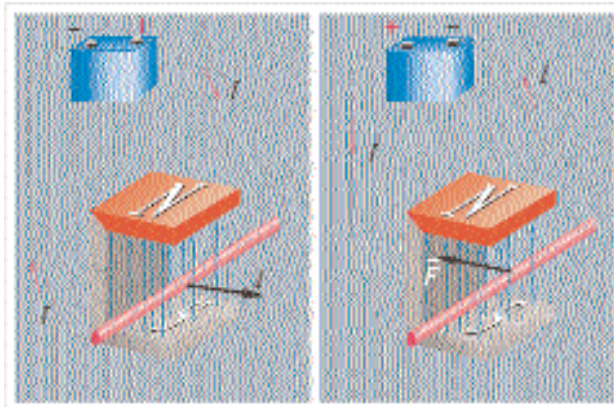
Ο ζητούμενος χρόνος μπορούσε να βρεθεί και από τη σχέση

$$t = \frac{\overset{\frown}{AP}}{v_0} = \frac{R \varphi}{v_0} = \frac{\pi}{6} \mu\text{s} = 0,52 \mu\text{s}$$

ΔΥΝΑΜΗ LAPLACE - ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ B

Είδαμε ότι το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη πάνω σε κινούμενο φορτίο. Λογικά λοιπόν περιμένουμε ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα μέσα σε μαγνητικό πεδίο να δέχεται δύναμη.

Τοποθετούμε ένα αιωρούμενο ευθύγραμμο σύρμα μέσα στο πεδίο ενός μαγνήτη, κάθετα στις μαγνητικές γραμμές. Παρατηρούμε ότι το σύρμα μένει ακίνητο. Ύστερα συνδέουμε τα άκρα του σύρματος με τους πόλους μιας μπαταρίας (σχ. 2.83), οπότε αυτό εκτρέπεται. Η εκτροπή του σύρματος οφείλεται σε μία δύναμη που ασκείται κάθετα στο σύρμα αλλά και στις μαγνητικές γραμμές. Αν συνδέσουμε την μπαταρία με αντίθετη πολικότητα, διαπιστώνουμε εκτροπή του σύρματος προς την αντίθετη κατεύθυνση.



ΣΧΗΜΑ 2.83

Η δύναμη Laplace σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό.

Μπορούμε να πετύχουμε αύξηση του ρεύματος, που διαρρέει το σύρμα, αν συνδέσουμε δύο μπαταρίες σε σειρά. Η εκτροπή του σύρματος στην περίπτωση αυτή μεγαλώνει. Τέλος, μειώνοντας τη γωνία που σχηματίζει το αιωρούμενο σύρμα με τις μαγνητικές γραμμές, διαπιστώνουμε μείωση της ασκούμενης δύναμης. Μπορούμε μάλιστα (με άλλο πείραμα) να βρούμε ότι η δύναμη μηδενίζεται στην περίπτωση που το σύρμα γίνει παράλληλο με τις μαγνητικές γραμμές.

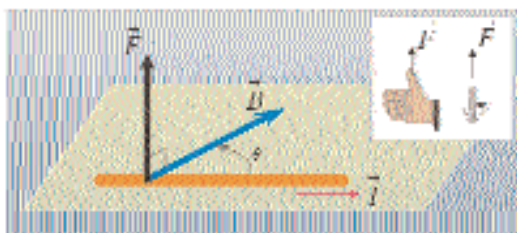
Κάθε αγωγός λοιπόν, όταν θα βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύναμη, η οποία ονομάζεται (από τη γαλλική βιβλιογραφία) **δύναμη Laplace**. Με ακριβέστερες μετρήσεις καταλήγουμε στο νόμο:

Η ασκούμενη δύναμη, σε μήκος l ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού, που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} , είναι

$$F = BI l \sin \theta \tag{2.53}$$

όπου I το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό και θ η μικρότερη γωνία που σχηματίζει ο αγωγός (προς τη φορά του ρεύματος) με τις μαγνητικές γραμμές.

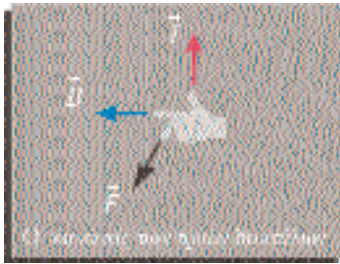
Η διεύθυνση της δύναμης είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζει ο αγωγός με τις μαγνητικές γραμμές και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας (σχ. 2.84). Δηλαδή,



ΣΧΗΜΑ 2.84

Η δύναμη Laplace είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζει ο αγωγός με τις μαγνητικές γραμμές.

τη φορά της δύναμης δείχνει ο αντίχειρας του δεξιού χεριού, εφόσον τα υπόλοιπα δάκτυλα διαγράφουν τη γωνία θ από τον αγωγό (προσανατολισμένο προς τη φορά του ρεύματος) προς το διάνυσμα \vec{B} , ή η φορά της δύναμης είναι αυτή προς την οποία προχωρά η δεξιόστροφη



ΣΧΗΜΑ 2.85

Ο κανόνας των τριών δακτύλων.

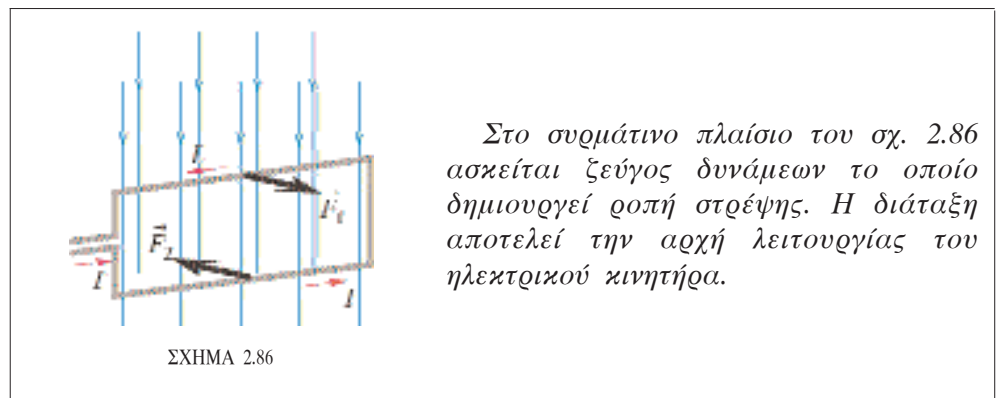
βίδα, όταν στρέφεται από τον αγωγό (προσανατολισμένο προς τη φορά του ρεύματος) προς το \vec{B} μέσω του συντομότερου δρόμου.

Αν ο αγωγός είναι παράλληλος με τις μαγνητικές γραμμές είναι $F = 0$ και αν ο αγωγός είναι κάθετος με τις μαγνητικές γραμμές, η δύναμη είναι

$$F = BI\ell$$

Στην τελευταία περίπτωση τα διανύσματα \vec{F} , \vec{B} και ο αγωγός σχηματίζουν τρισσορθογώνιο σύστημα, που μπορεί να παρασταθεί με τα τρία δάχτυλα του δεξιού χεριού, όπως στο σχήμα 2.85.

Αν ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος, τότε τον χωρίζουμε σε στοιχειώδη τμήματα και υπολογίζουμε απ' τη σχέση (2.53) τη δύναμη σε κάθε τμήμα. Η συνολική δύναμη στον αγωγό ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων, που ασκούνται στα στοιχειώδη τμήματα του αγωγού.

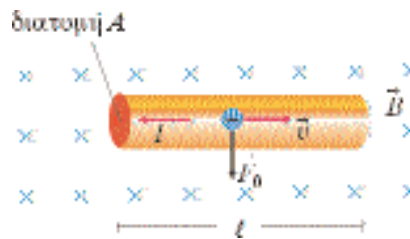


Στο σχηματικό πλαίσιο του σχ. 2.86 ασκείται ζεύγος δυνάμεων το οποίο δημιουργεί ροπή στρέψης. Η διάταξη αποτελεί την αρχή λειτουργίας του ηλεκτρικού κινητήρα.

ΣΧΗΜΑ 2.86

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ LAPLACE

Θεωρούμε αγωγό μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Όταν αυτός διαρρέεται από ρεύμα, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται κατά μήκος του με μέση ταχύτητα v (σχ. 2.87). Κάθε ηλεκτρόνιο δέχεται δύναμη



ΣΧΗΜΑ 2.87

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται σ' ένα κινούμενο ηλεκτρόνιο ενός αγωγού.

$$F_0 = Bve \sin \theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα (ή η διεύθυνση του αγωγού) με τις μαγνητικές γραμμές.

Η δύναμη \vec{F} , που ασκείται σε τμήμα μήκους ℓ του αγωγού, ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ασκούμενων δυνάμεων στα N στοιχειώδη κινούμενα φορτία εντός του παραπάνω τμήματος. Άρα

$$F = NF_0 = NBve \sin \theta$$

Το N ισούται με τον αριθμό των φορτίων που πέρασαν απ' τη διατομή A του αγωγού (και από κάθε διατομή) σε χρόνο t , όπου t ο απαιτούμενος χρόνος για να διανύσουν τα φορτία απόσταση ℓ . Άρα $v = \ell/t$, οπότε

$$F = B \frac{Ne}{t} \ell \sin \theta$$

Όμως Ne είναι το φορτίο q , που πέρασε από μια διατομή του αγωγού σε χρόνο t , οπότε το κλάσμα $\frac{Ne}{t} = \frac{q}{t}$ ισούται με το ρεύμα I .

Συνεπώς,

$$F = B \ell I \sin \theta$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ “ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ B ” Η ΑΠΛΑ ΤΟΥ “ΠΕΔΙΟΥ B ”

Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε το "πεδίο \vec{B} " χωρίς να το έχουμε ορίσει αυστηρά. Αυτό μπορεί πλέον να γίνει άμεσα.

Πυκνότητα μαγνητικής ροής \vec{B} (λέγεται και επαγωγή), ή πεδίο \vec{B} , σ' ένα σημείο A του μαγνητικού πεδίου, ορίζουμε το διανυσματικό μέγεθος \vec{B} , με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

1. Διεύθυνση, τη διεύθυνση ενός στοιχειώδους τμήματος αγωγού, το οποίο όταν βρεθεί στο A δεν θα δέχεται δύναμη.
2. Φορά, τη φορά με την οποία ικανοποιείται ο κανόνας των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού στην περίπτωση, που το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού τοποθετηθεί κάθετα στη διεύθυνση του πεδίου.
3. Μέτρο που δίνεται απ' τη σχέση

$$B = \frac{F}{I \Delta \ell}$$

όπου F το μέτρο της δύναμης, που θα ασκηθεί στο στοιχειώδες τμήμα $\Delta \ell$ ενός αγωγού (διαρροεμένου από ρεύμα I), το οποίο θα τοποθετηθεί κάθετα στη διεύθυνση του διανύσματος \vec{B} .

Η μονάδα του πεδίου \vec{B} είναι το tesla (τέσλα) και συμβολίζεται με T .

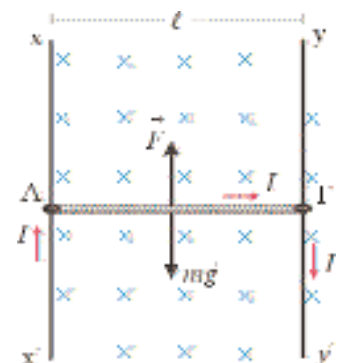
Παράδειγμα 2-26

Ένας οριζόντιος αγωγός AG μήκους $\ell = 1,0 \text{ m}$ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές με τα άκρα του συνεχώς σε επαφή με δύο κατακόρυφους αγωγούς $x'x$, $y'y$. Η διάταξη βρίσκεται με το επίπεδο της κάθετο στις γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B = 2,0 \text{ T}$. Ο αγωγός AG διαρρέεται από ρεύμα $I = 8,0 \text{ A}$, το οποίο διατηρείται σταθερό. Ποιά η μάζα του αγωγού, ώστε αυτός να κινείται με σταθερή ταχύτητα; ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Απάντηση

Για να ανέρχεται ή να κατέρχεται ο αγωγός AG με σταθερή ταχύτητα, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων, που ασκούνται πάνω του, να είναι μηδέν. Δηλαδή η δύναμη Laplace πρέπει να είναι αντίθετη απ' το βάρος. Αυτό προϋποθέτει δύο πράγματα:

- (I) Το ρεύμα να έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα 2.88.



ΣΧΗΜΑ 2.88

(II) Το μέτρο της δύναμης Laplace να ισούται με το βάρος του αγωγού, άρα,

$$F = m g \quad \text{ή}$$

$$B I \ell = m g \quad \text{ή}$$

$$m = \frac{B I \ell}{g} = \frac{2 \text{ T} \times 8 \text{ A} \times 1 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2} \quad \text{ή}$$

$$m = 1,6 \text{ kg}$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΩΝ ΑΓΩΓΩΝ



ΣΧΗΜΑ 2.89

Όταν οι αγωγοί διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έλκονται, ενώ όταν διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα απωθούνται.

Στηρίζουμε δύο ευθύγραμμα σύρματα, ώστε να είναι παράλληλα και πολύ κοντά το ένα στο άλλο (σχ. 2.89). Τα σύρματα είναι χαλαρά στερεωμένα, ώστε να μπορούν να πλησιάζουν ή να απομακρύνονται. **Όταν τα σύρματα διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έλκονται, ενώ όταν διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα απωθούνται.**

Η αλληλεπίδραση δύο παράλληλων ευθύγραμμων αγωγών είναι αναμενόμενη. Ο κάθε αγωγός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, μέσα στο οποίο βρίσκεται ο άλλος αγωγός, που προφανώς θα δέχεται δύναμη Laplace.

Ας θεωρήσουμε τους παράλληλους ρευματοφόρους αγωγούς του σχήματος 2.90, οι οποίοι έχουν πολύ μεγάλο μήκος σε σχέση με τη μεταξύ τους απόσταση. Το μαγνητικό πεδίο, που δημιουργεί ο αγωγός Α, στη θέση που βρίσκεται ο αγωγός Γ, είναι

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Σε μήκος L του αγωγού (Γ) ασκείται δύναμη Laplace

$$F_2 = B_1 I_2 L \quad \text{ή}$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r} \quad (2.54)$$

Κατ' αναλογία μπορούμε να δείξουμε ότι σε μήκος L του αγωγού (Α) ασκείται δύναμη

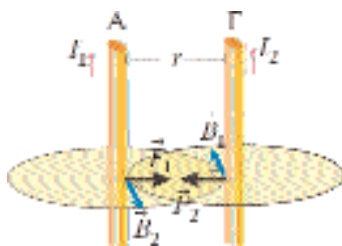
$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

κάτι που φαίνεται να συμφωνεί με το νόμο δράσης - αντίδρασης.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ AMPERE ΚΑΙ COULOMB ΣΤΟ S.I.

Το ampere είναι μια από τις επτά θεμελιώδεις μονάδες του S.I. Για τον ορισμό του εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι δύο παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί έλκονται ή απωθούνται.

Ένα ampere είναι το σταθερό ρεύμα, το οποίο όταν διαρρέει δύο παράλληλους ρευματοφόρους αγωγούς, άπειρου μήκους και αμελητέας



ΣΧΗΜΑ 2.90

Κάθε αγωγός δέχεται μαγνητική δύναμη γιατί βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο άλλος αγωγός.

διατομής, ευρισκόμενους σε απόσταση 1 m μεταξύ τους, ασκείται σε κάθε αγωγό δύναμη 2×10^{-7} newton/m ακριβώς.

Η τιμή 2×10^{-7} newton προκύπτει απ' την εξίσωση (2.54) θέτοντας $L = 1$ m, $r = 1$ m, $I_1 = I_2 = 1$ A.

Για μετρήσεις ρεύματος μεγάλης ακρίβειας χρησιμοποιείται ο λεγόμενος ζυγός ρεύματος.

Μετά τον ορισμό του ampere (A) μπορεί να εισαχθεί στο S.I. και το coulomb (C).

Ένα coulomb είναι το φορτίο, που περνά ανά δευτερόλεπτο από οποιαδήποτε διατομή αγωγού, διαρρομένου από ρεύμα ενός ampere.

Παράδειγμα 2-27

Δίνεται ένα ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο με διαστάσεις α και β , το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I_2 . Στο επίπεδο του πλαισίου και παράλληλα προς τη διάσταση β υπάρχει ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός $\chi\chi$ πολύ μεγάλου μήκους (σχήμα 2.91), ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I_1 . Να βρεθεί η συνολική δύναμη που ασκεί ο ευθύγραμμος αγωγός στο πλαίσιο.

Δίνονται $I_1 = 10$ A, $I_2 = 20$ A, $r = 2,0$ cm, $\alpha = 18$ cm και $\beta = 20$ cm.

Απάντηση

Θα βρούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων, που ασκεί ο αγωγός $\chi\chi$ στις πλευρές του πλαισίου.

Οι δυνάμεις \vec{F}_3, \vec{F}_4 , είναι δύσκολο να υπολογιστούν κατά μέτρο, γιατί το μαγνητικό πεδίο του αγωγού $\chi\chi$ μεταβάλλεται κατά μήκος της διάστασης α . Λόγω συμμετρίας όμως μπορούμε να πούμε ότι αυτές οι δυνάμεις είναι αντίθετες, οπότε εξουδετερώνονται.

Ο αγωγός $\chi\chi$ ασκεί ελκτική δύναμη \vec{F}_1 στον αγωγό ΔA , με μέτρο

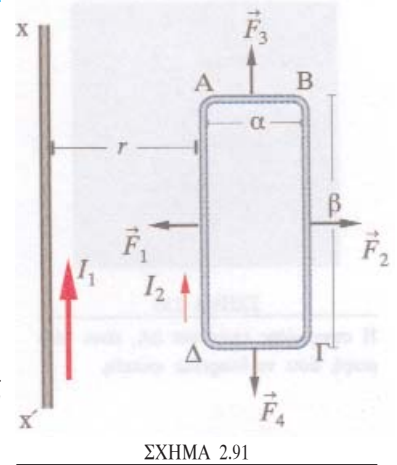
$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \beta}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 20 \times 0,2}{2\pi \times 0,02} \text{ N} = 40 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Ο αγωγός $\chi\chi$ ασκεί απωστική δύναμη \vec{F}_2 στον αγωγό $B\Gamma$, με μέτρο

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \beta}{2\pi(r + \alpha)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 20 \times 0,2}{2\pi \times 0,2} \text{ N} = 4,0 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων \vec{F}_1, \vec{F}_2 έχει την κατεύθυνση της \vec{F}_1 και μέτρο

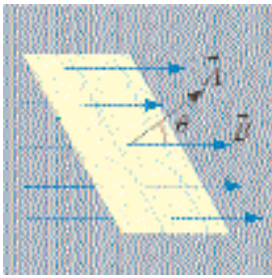
$$F_{\text{ολ}} = F_1 - F_2 = 36 \times 10^{-5} \text{ N}$$



ΣΧΗΜΑ 2.91

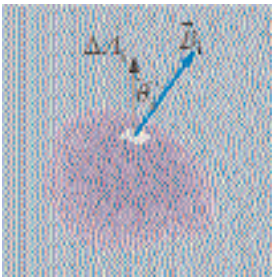
Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ (ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ GAUSS ΓΙΑ ΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟ)

Όπως στο ηλεκτρικό πεδίο ορίσαμε την ηλεκτρική ροή, ανάλογα και στο μαγνητικό πεδίο ορίζουμε τη μαγνητική ροή. Θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A , τοποθετημένη μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} και



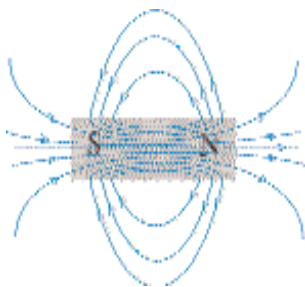
ΣΧΗΜΑ 2.92

Η μαγνητική ροή Φ μας δίνει το πλήθος των γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια.



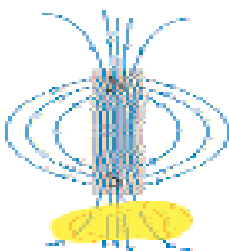
ΣΧΗΜΑ 2.93

Η στοιχειώδης επιφάνεια ΔΑ_ι είναι τόσο μικρή, ώστε να θεωρείται επίπεδη.



ΣΧΗΜΑ 2.94

Μαγνητικό φάσμα ενός μαγνήτη.



ΣΧΗΜΑ 2.95

Όσες μαγνητικές γραμμές εισέρχονται στην κλειστή επιφάνεια τόσες και εξέρχονται.

διάνυσμα \vec{A} κάθετο σ' αυτή, με φορά αυτή που αυθαίρετα ορίζουμε ως θετική και μέτρο όσο το εμβαδόν A (σχ. 2.92). Το μονόμετρο μέγεθος που μας δίνει τον αριθμό των μαγνητικών γραμμών, που διαπερνούν την επιφάνεια, ονομάζεται **μαγνητική ροή Φ** και ισούται με

$$\Phi = BA \cos \theta \tag{2.55}$$

Αν τώρα έχουμε μια κυρτή επιφάνεια σε ένα μαγνητικό πεδίο (όχι υποχρεωτικά ομογενές), υπολογίζουμε την διερχόμενη από την επιφάνεια μαγνητική ροή ως εξής. Χωρίζουμε την κυρτή επιφάνεια σε ένα μεγάλο πλήθος στοιχειωδών τμημάτων (σχ. 2.93). Η στοιχειώδης ροή $\Delta\Phi_i$ που διέρχεται από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια ΔA_i υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta\Phi_i = B_i \Delta A_i \cos \theta_i \tag{2.56}$$

Η ολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια, ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των στοιχειωδών ροών.

$$\Phi = \sum B_i \Delta A_i \cos \theta_i \tag{2.57}$$

Θεωρούμε μια κλειστή επιφάνεια που περικλείει συνολικό ηλεκτρικό φορτίο μηδέν. Τότε από το νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε $\Phi_E = 0$. Επειδή δεν έχουν ανιχνευθεί (προς το παρόν τουλάχιστον) μαγνητικά μονόπολα, ο αντίστοιχος νόμος με το νόμο του Gauss για το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\Phi = 0 \text{ (κλειστή επιφάνεια)}$$

Δηλαδή η ολική μαγνητική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν.

Αν λοιπόν επιλέξουμε μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια (σχ. 2.95) το πλήθος των εισερχόμενων σ' αυτή μαγνητικών γραμμών (κατά σύμβαση αρνητική ροή) θα ισούται με το πλήθος των εξερχόμενων απ' αυτή μαγνητικών γραμμών (κατά σύμβαση θετική ροή).

Ο παραπάνω νόμος ($\Phi = 0$) μας πληροφορεί ότι δεν υπάρχουν απομονωμένα μαγνητικά μονόπολα και ότι οι πεδριακές γραμμές του μαγνητικού πεδίου διαφέρουν από αυτές του ηλεκτροστατικού πεδίου, στο ότι δεν ξεκινούν από κάπου και δεν καταλήγουν πουθενά. Οι μαγνητικές γραμμές είναι κλειστές στις ιδανικές περιπτώσεις μεγάλης συμμετρίας (Σχ. 2.94-2.95).

Ο νόμος της μαγνητικής ροής ισχύει για κάθε περίπτωση ανεξάρτητα από τον τρόπο δημιουργίας του μαγνητικού πεδίου. Ισχύει δηλαδή και για μη στατικά μαγνητικά πεδία και αποτελεί μια από τις εξισώσεις του Maxwell.

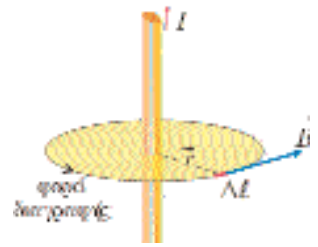
Παρατήρηση: Από τη σχέση (2.56), αν το ΔA_i είναι κάθετο στην στοιχειώδη επιφάνεια, έχουμε

$$\Delta\Phi_i = B_i \Delta A_i \quad \text{ή} \quad B_i = \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta A_i}$$

Δηλαδή η τιμή του πεδίου \vec{B} ισούται με τη ροή που περνά απ' την μοναδιαία επιφάνεια, η οποία είναι τοποθετημένη κάθετα στις δυναμικές γραμμές προς τη μοναδιαία επιφάνεια. Γι' αυτό και το \vec{B} ονομάζεται πυκνότητα μαγνητικής ροής.

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

Θεωρούμε έναν ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό πολύ μεγάλου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα I , και μια κυκλική (κλειστή) γραμμή με το επίπεδό της κάθετο στον αγωγό και το κέντρο της επί του αγωγού (σχ. 2.96). Αυτή η κλειστή γραμμή ταυτίζεται προφανώς με μια γραμμή του μαγνητικού πεδίου του αγωγού και επομένως το μαγνητικό πεδίο εφάπτεται σε κάθε σημείο της γραμμής. Χωρίζουμε την κλειστή γραμμή σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος (τείνει στο άπειρο) στοιχειωδών τμημάτων $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \dots$ και ορίζουμε μια φορά διαγραφής της π.χ. τη φορά των δυναμικών γραμμών. Κατόπιν αθροίζουμε τα γινόμενα που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε για κάθε τμήμα το μέτρο του \vec{B} επί το αντίστοιχο μήκος $\Delta\ell$.



ΣΧΗΜΑ 2.96

Η κλειστή γραμμή ταυτίζεται με μια μαγνητική γραμμή.

$$\sum B \Delta\ell = B_1 \Delta\ell_1 + B_2 \Delta\ell_2 + \dots$$

Όμως $B_1 = B_2 = \dots = B$, άρα

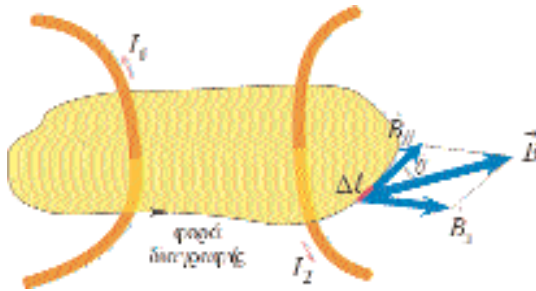
$$\sum B \Delta\ell = B(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \dots)$$

Ακόμη το άθροισμα $(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \dots)$ ισούται με την περίμετρο της κυκλικής γραμμής, δηλαδή με $2\pi r$ και το B δίνεται απ' τη γνωστή μας σχέση

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ άρα } \sum B \Delta\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r \quad \text{ή}$$

$$\sum B \Delta\ell = \mu_0 I$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε κλειστή γραμμή, που περιβάλλει ένα οποιοδήποτε πλήθος ρευμάτων, αρκεί στη



ΣΧΗΜΑ 2.97

Το \vec{B} αναλύεται στην συνιστώσα $\vec{B}_{//}$, που έχει τη διεύθυνση του $\Delta\ell$ και στην \vec{B}_{\perp} , που είναι κάθετη στο $\Delta\ell$.

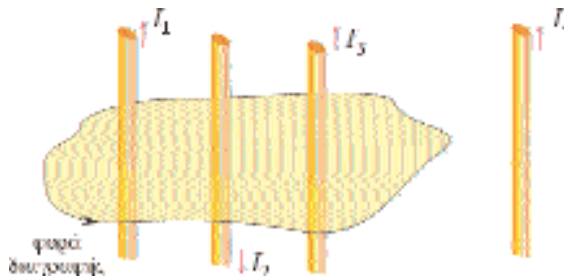
θέση του \vec{B} να θέσουμε την συνιστώσα $\vec{B}_{//}$ του πεδίου, που έχει την διεύθυνση του $\Delta\ell$, και στη θέση του I να θέσουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων $I_{\epsilon\sigma}$, τα οποία περικλείονται απ' την κλειστή γραμμή (σχήμα 2.97).

$$\sum B_{//} \Delta\ell = \mu_0 I_{\epsilon\sigma} \tag{2.58}$$

Για την εφαρμογή της σχέσης (2.58) πρέπει να έχουμε υπόψη ότι:

(I) Η συνιστώσα $\vec{B}_{//}$ ισούται με $\vec{B} \cos \theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει το \vec{B} με το αντίστοιχο τμήμα Δl το οποίο προσανατολίζεται προς την φορά διαγραφής.

(II) Στο άθροισμα $I_{\text{εστ}}$, θετικά θα λαμβάνονται τα ρεύματα των οποίων η φορά είναι ίδια με τη φορά προς την οποία προχωρά η δεξιόστροφη βίδα, όταν στρέφεται προς τη φορά διαγραφής. Ακόμη δεν θα λαμβάνονται υπόψη ρεύματα που βρίσκονται εκτός της κλειστής γραμμής π.χ. για το σχήμα 2.98 ισχύει:



ΣΧΗΜΑ 2.98

Στο $I_{\text{εστ}}$ δεν λαμβάνεται υπόψη το I_4 , επειδή βρίσκεται εκτός κλειστής γραμμής.

$$I_{\text{εστ}} = I_1 - I_2 + I_3$$

Η σχέση (2.58) είναι η μαθηματική διατύπωση ενός πολύ σημαντικού νόμου, του νόμου Ampere, που διατυπώνεται με λόγια ως εξής:

Το άθροισμα των γινομένων των εφαπτομενικών συνιστωστών του μαγνητικού πεδίου σε μια κλειστή γραμμή, επί τα αντίστοιχα στοιχειώδη τμήματα στα οποία διαιρείται η κλειστή γραμμή, είναι ανάλογο με το άθροισμα των ρευμάτων που περικλείονται από την κλειστή γραμμή.

Η μεγάλη χρησιμότητα του νόμου του Ampere έγκειται στο γεγονός ότι με αυτόν μπορούμε, στην περίπτωση κατανομών ρευμάτων με συμμετρία, να υπολογίζουμε την μορφή και την τιμή του μαγνητικού πεδίου, ευκολότερα απ' ό,τι με την χρήση του νόμου των Biot-Savart. Όπως κατ' αναλογία, σε περιπτώσεις συμμετρικών κατανομών φορτίου υπολογίζουμε ευκολότερα το ηλεκτροστατικό πεδίο με τη βοήθεια του νόμου του Gauss απ' ό,τι με τη βοήθεια του νόμου του Coulomb.

Ας το δούμε στην περίπτωση υπολογισμού του μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού μεγάλου μήκους (σχήμα 2.96). Επιλέγουμε μία κλειστή κυκλική γραμμή με το κέντρο της στον αγωγό και ακτίνα r , όσο η απόσταση στην οποία θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο \vec{B} .

Χωρίζουμε την κλειστή γραμμή σε στοιχειώδη τμήματα $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots$ και λαμβάνουμε ως φορά διαγραφής τη φορά που φαίνεται στο σχήμα 2.96. Εφαρμόζουμε κατόπιν τον νόμο του Ampere, έχοντας υπόψη ότι η κλειστή γραμμή επιλέχτηκε, ώστε να ταυτίζεται με μία δυναμική γραμμή. Το πεδίο σε κάθε σημείο της γραμμής έχει την διεύθυνση του αντίστοιχου στοιχειώδους τμήματος και σταθερό μέτρο, λόγω συμμετρίας. Έχουμε

$$\sum B_{//} \Delta l = \mu_0 I_{\text{εστ}} \quad \text{ή} \quad B \Delta l_1 + B \Delta l_2 + \dots = \mu_0 I \quad \text{ή}$$

$$B (\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots) = \mu_0 I \quad \text{ή} \quad B 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{ή}$$

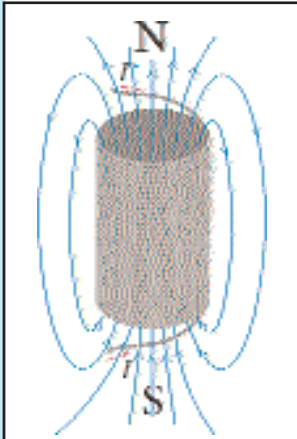
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



**ANDRE-MARIE
AMPERE (1775-1836)**

Γάλλος Φυσικός Μαθηματικός και Χημικός. Θεμελίωσε την Ηλεκτροδυναμική και προς τιμή του η μονάδα μέτρησης του ρεύματος φέρει το όνομά του.

Εφαρμογή: ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΩΛΗΝΟΕΙΔΟΥΣ ΠΗΝΙΟΥ



ΣΧΗΜΑ 2.99

Το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς είναι πανομοιότυπο με το πεδίο ενός ραβδόμορφου μαγνήτη.

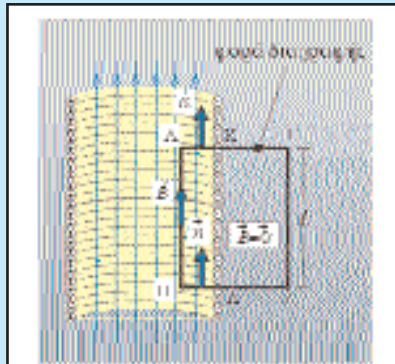
Το σωληνοειδές πηνίο αποτελείται από μία συρμάτινη περιέλιξη γύρω από κύλινδρο. Απαρτίζεται από ένα πολύ μεγάλο πλήθος σπειρών πολύ κοντά η μία στην άλλη, ώστε η κάθε μία να είναι περίπου κυκλική. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το σωληνοειδές, όταν διαρρέεται από ρεύμα, είναι ίδιο με το πεδίο ενός ραβδόμορφου μαγνήτη (σχήμα 2.94). Από μελέτη του σωληνοειδούς μεγάλου μήκους (η διάμετρος του είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του) προκύπτουν τα παρακάτω:

(I) Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς θεωρείται ομογενές.

(II) Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σωληνοειδούς (σε απόσταση μερικών ακτίνων απ' τα άκρα του, πρακτικά μιας ή δύο) είναι αμελητέο. Θα εφαρμόσουμε τώρα

το νόμο του Ampere για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.

Στο σχήμα 2.100 παριστάνεται μια τομή του σωληνοειδούς η οποία περιέχει τον άξονά του. Για να εφαρμόσουμε το νόμο του Ampere επιλέγουμε την κλειστή γραμμή ΑΓΖΗΑ σχήματος ορθογωνίου. Αν το σωληνοειδές έχει n σπείρες ανά μονάδα μήκους, τότε σε μήκος l περιέχει $N = nl$ σπείρες. Κάθε σπείρα του σωληνοειδούς διαρρέεται από ρεύμα I , άρα το άθροισμα των περιεχομένων ρευμάτων στην κλειστή γραμμή είναι $I_{εστ} = NI$. Το μέρος του αθροίσματος $\sum B_{//} \Delta l$ που αφορά το τμήμα ΚΓΖΛ είναι μηδέν, γιατί στο εξωτερικό του σωληνοειδούς έχουμε $B = 0$. Το ίδιο ισχύει και για τα



ΣΧΗΜΑ 2.100

Εφαρμογή του νόμου του Ampere για τον υπολογισμό του \vec{B} στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.

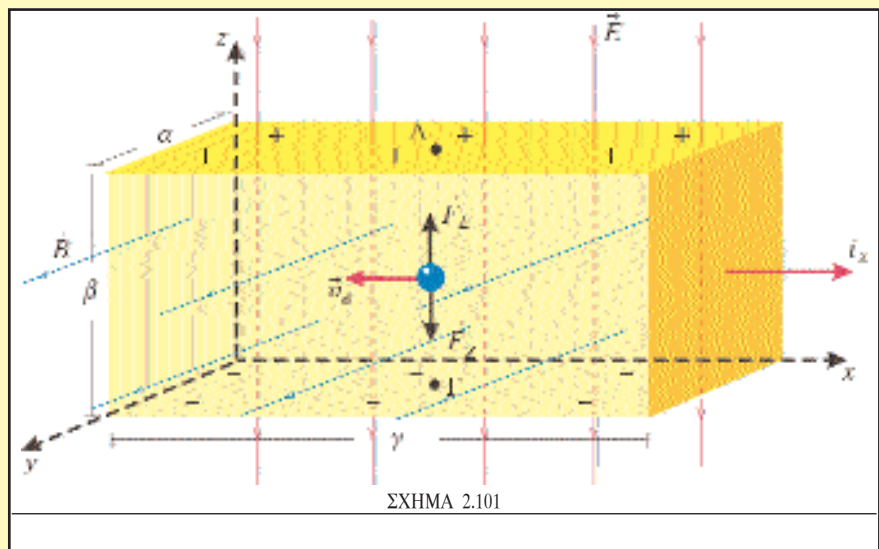
τμήματα ΑΚ και ΛΗ, γιατί το \vec{B} είναι κάθετο σ' αυτά. Επομένως το άθροισμα $\sum B_{//} \Delta l$ ισούται με το άθροισμα $\sum \vec{B} \Delta l$ κατά μήκος του ΗΑ, και αυτό ισούται με $\vec{B} l$.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
 \sum B_{//} \Delta l &= \mu_0 I_{εστ} && \text{ή} \\
 B l &= \mu_0 N I && \text{ή} \\
 B l &= \mu_0 n l I && \text{ή} \\
 B &= \mu_0 n I && (2.59)
 \end{aligned}$$

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ HALL ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

Θεωρούμε ένα αγώγιμο πλακίδιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις a, β, γ , όπως στο σχήμα (2.101), το οποίο διαρρέεται από ρεύμα i_x στη διεύθυνση του άξονα x . Στα σημεία Δ, Γ εφαρμόζουμε τα άκρα βολτομέτρου και η ένδειξή του είναι μηδέν, δηλαδή είναι μηδέν η διαφορά δυναμικού μεταξύ Δ και Γ . Αν τώρα δημιουργήσουμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} στη διεύθυνση του άξονα y θα μετρήσουμε μια διαφορά δυναμικού V_H μεταξύ των Δ και Γ . Το φαινόμενο της εμφάνισης εγκάρσιας διαφοράς δυναμικού V_H όταν το διαρρεόμενο από ρεύμα πλακίδιο βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο, ονομάζεται φαινόμενο Hall. Θα δώσουμε τώρα την ερμηνεία του φαινομένου και θα υπολογίσουμε την τάση V_H .



Ας υποθέσουμε ότι οι φορείς του ρεύματος είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Όταν το πλακίδιο διαρρέεται από ρεύμα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται με την ταχύτητα ολίσθησης v_d , άρα δέχονται μαγνητική δύναμη \vec{F}_z στη διεύθυνση του άξονα z . Αυτό έχει σαν συνέπεια τη συσσώρευση ηλεκτρονίων προς την έδρα που βρίσκεται το Γ και την εμφάνιση περίσσειας θετικών φορτίων προς την απέναντι έδρα. Δημιουργείται έτσι ένα ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} (εκτός από αυτό της πηγής του ρεύματος) στη διεύθυνση του άξονα z και επίσης εμφανίζεται η τάση Hall V_H . Στα κινούμενα ηλεκτρόνια αναπτύσσεται πλέον και μιά άλλη δύναμη \vec{F}_E από το πεδίο έντασης \vec{E} , αντίρροπη της \vec{F}_z . Στη μόνιμη κατάσταση οι δυνάμεις \vec{F}_E και \vec{F}_z είναι ίσες κατά μέτρο, άρα

$$F_z = F_E \quad \text{ή}$$

$$B v_d e = e E \quad \text{ή}$$

$$B v_d = E$$

Όμως από τη σχέση έντασης και τάσης στο ηλεκτρικό πεδίο έχουμε

$$E = \frac{V_H}{\beta}$$

άρα

$$V_H = B v_d \beta$$

Αν n το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου του πλακιδίου (πυκνότητα φορέων), έχουμε ότι το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων εντός του πλακιδίου είναι $N = n V$, όπου V ο όγκος του, άρα

$$N = n a \beta \gamma$$

Το πλήθος N των ηλεκτρονίων διέρχεται από μια κατακόρυφη τομή του πλακιδίου σε χρόνο

$$t = \frac{\gamma}{v_d}$$

Το ρεύμα i_x είναι

$$i_x = \frac{q}{t} = \frac{N e}{\frac{\gamma}{v_d}} = \frac{N e v_d}{\gamma} = \frac{n a \beta \gamma e v_d}{\gamma} = n a \beta e v_d$$

άρα

$$v_d = \frac{i_x}{n a \beta e}$$

Συνεπώς

$$V_H = B \frac{i_x}{n a \beta e} \beta \quad \text{ή}$$

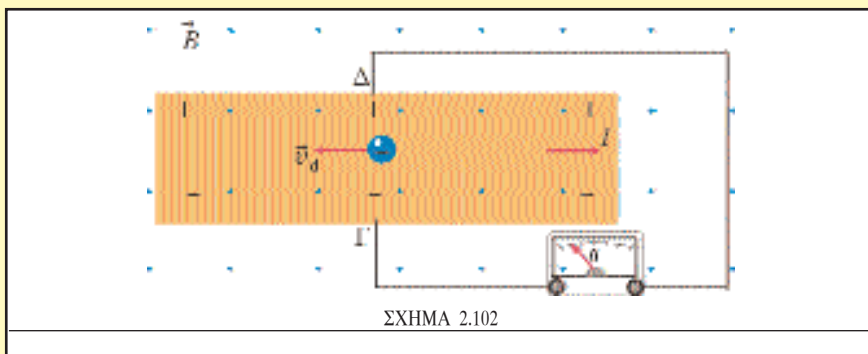
$$V_H = \frac{B i_x}{n e a} \quad \text{(I)}$$

Η σχέση (I) γενικεύεται για κάθε είδος φορέων ρεύματος φορτίων q .

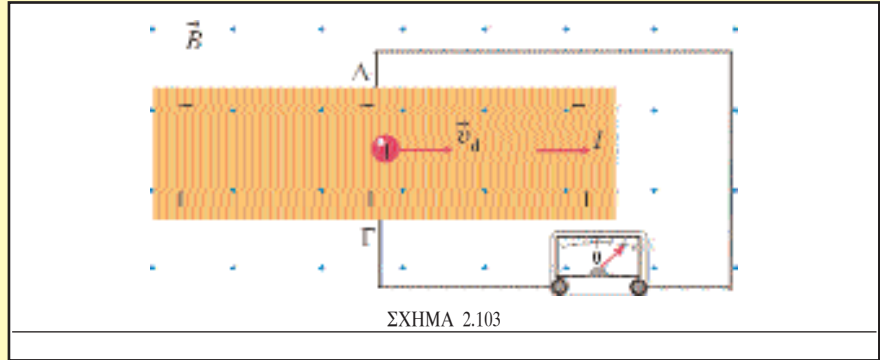
Τα μεγέθη V_H , i_x και a είναι μετρήσιμα

- Αν είναι γνωστό το πεδίο \vec{B} και το φορτίο των φορέων του ρεύματος, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος n των φορέων του ρεύματος ανά μονάδα όγκου.

- Αν είναι γνωστό το n και το φορτίο των φορέων του ρεύματος, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο \vec{B} (εφαρμογή στα μαγνητόμετρα Hall).



- Αν είναι γνωστά τα n και \vec{B} , μπορούμε να διαπιστώσουμε τον είδος των φορέων του ηλεκτρικού ρεύματος. Από τη μελέτη των σχημάτων (2.102), (2.103)) μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι στην περίπτωση που οι φορείς του ρεύματος είναι αρνητικά φορτία, το δυναμικό του Δ είναι ψηλότερο από το δυναμικό του Γ. Αν οι φορείς του ρεύματος είναι θετικά φορτία, τότε το δυναμικό του Δ είναι χαμηλότερο από το δυναμικό του Γ.



Α Ν Α Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ω Σ Η

□ Ένα κινούμενο σημειακό φορτίο q με ταχύτητα \vec{v} δημιουργεί σε απόσταση r μαγνητικό πεδίο

(α) με B

$$B = \frac{\mu_0 q v \sin \theta}{4\pi r^2}$$

όπου θ η μικρότερη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{r} (το \vec{r} ορίζεται με φορά από τη θέση του φορτίου προς το σημείο υπολογισμού του \vec{B})

(β) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των \vec{v} και \vec{r}

(γ) Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή της δεξιόστροφης βίδας.

□ Το πεδίο $\Delta\vec{B}$, που δημιουργείται σε απόσταση r από ένα στοιχειώδες τμήμα

μήκους $\Delta\ell$, ενός αγωγού, που διαρρέεται από ρεύμα I , υπολογίζεται από τον νόμο των Biot - Savart

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta\ell}{4\pi r^2} \sin \theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ $\Delta\vec{\ell}$ και \vec{r} .

□ Το πεδίο B στο κέντρο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού ακτίνας r , που διαρρέεται από ρεύμα I , είναι

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

□ Το πεδίο B σε απόσταση r από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα I , είναι

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

□ Η δύναμη \vec{F} που ασκείται σε φορτισμένο σωματίδιο q , το οποίο κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} , με ταχύτητα \vec{v} , είναι

$$F = Bvq \sin \theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των \vec{v} και \vec{B}

□ Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο, μάζας m και φορτίου q , εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} με ταχύτητα \vec{v} κάθετη στις δυναμικές γραμμές, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα

$$R = \frac{mv}{B|q|}$$

και περίοδο

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|}$$

□ Η ασκούμενη δύναμη (Laplace) σε μήκος ℓ ενός ευθύγραμμου αγωγού, που διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} είναι

$$F = BI\ell \sin \theta$$

όπου θ η μικρότερη γωνία που σχηματίζει ο αγωγός (προς τη φορά του ρεύματος) με το \vec{B} .

Η διεύθυνση της δύναμης είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζει ο αγωγός με τις δυναμικές γραμμές και η φορά της καθορίζεται από το κανόνα του δεξιού

χειριού ή της δεξιόστροφης βίδας.

□ Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί, που βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση r και διαρρέονται από ρεύματα I_1, I_2 αντίστοιχα, έλκονται, αν τα ρεύματα είναι ομόρροπα ή απωθούνται, αν είναι αντίρροπα. Σε μήκος L κάθε αγωγού ασκείται από τον άλλο δύναμη

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

□ Η ολική μαγνητική ροή που διέρχεται από μία κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν

$$\Phi = 0$$

□ Για οποιαδήποτε κλειστή γραμμή που περιβάλλει ρεύματα ισχύει ο νόμος του Ampere

$$\sum B_{//} \Delta \ell = \mu_0 I_{\text{εσ}}$$

όπου $\Delta \ell$ ένα στοιχειώδες τμήμα της γραμμής και $B_{//}$ η κατά μήκος του $\Delta \ell$ συνιστώσα του πεδίου \vec{B} , που δημιουργείται απ' τα ρεύματα.

□ Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό σωληνοειδούς, που διαρρέεται από ρεύμα I , θεωρείται ομογενές και δίνεται από τη σχέση

$$B = \mu_0 nI$$

όπου n ο αριθμός των σπειρών του σωληνοειδούς ανά μονάδα μήκους.

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ

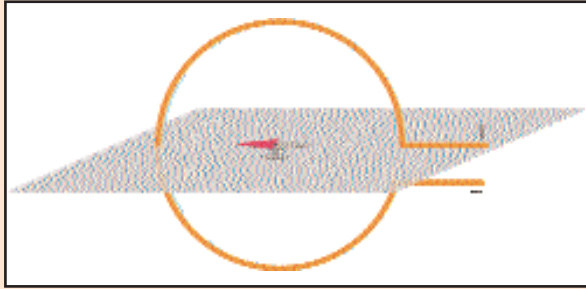
1. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Κατασκευάστε με ένα χάλκινο σύρμα έναν κυκλικό αγωγό διαμέτρου 10 cm. Τοποθετήστε ένα επίπεδο χαρτόνι, ώστε να περνά περίπου από το κέντρο του αγωγού. Σταθεροποιήστε το σύστημα, ώστε το χαρτόνι να είναι οριζόντιο και το επίπεδο του αγωγού κατακόρυφο.

Τοποθετήστε μια μικρή μαγνητική βελόνα με πολύ χαμηλή βάση στο κέντρο του αγωγού πάνω στο χαρτόνι. Φροντίστε ο άξονας της βελόνας, η οποία έχει προσανατολιστεί από το γήινο μαγνητικό πεδίο, να ταυτίζεται με την οριζόντια διάμετρο του αγωγού. Διαβιβάστε συνεχές ρεύμα 2A στον αγωγό. Παρατηρήστε ότι η

βελόνα, η οποία μπορεί να στρέφεται ελεύθερα σε οριζόντιο επίπεδο, εκτρέπεται κατά γωνία φ . Μετρήστε τη γωνία φ . Μπορείτε να υπολογίσετε την οριζόντια συνιστώσα του γήινου μαγνητικού πεδίου;

Αν έχετε μαγνητόμετρο στο εργαστήριο μετρήστε το πεδίο B στο κέντρο του αγωγού (μέγιστη ένδειξη). Επιβεβαιώνεται ο νόμος Biot - Savart;



2. ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΣΩΛΗΝΑ DE LA RIVE

Τροφοδοτήστε τον σωλήνα De la Rive του εργαστηρίου από πηνίο Ruhmkorff, ώστε να δημιουργηθεί εκκένωση. Τροφοδοτείστε κατόπιν τον ηλεκτρομαγνήτη του σωλήνα με συνεχή τάση περίπου 5 V. Τι παρατηρείτε; Τι θα συμβεί αν εναλλαχθεί η πολικότητα της τάσης τροφοδοσίας του ηλεκτρομαγνήτη. Ερμηνεύστε τις παρατηρήσεις σας.

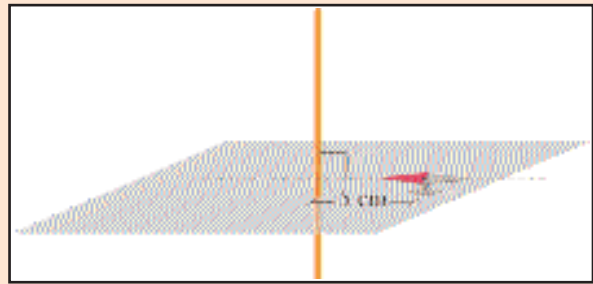
3. ΣΩΛΗΝΑΣ ΚΑΘΟΔΙΚΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Τροφοδοτήστε τον σωλήνα καθοδικών ακτίνων του εργαστηρίου από το πηνίο Ruhmkorff, ώστε να παρατηρήσετε την καθοδική δέσμη. Πλησιάστε ένα ραβδόμορφο μαγνήτη στο σωλήνα, ώστε ο μαγνήτης να είναι κάθετος στη δέσμη. Τι παρατηρείτε;

Τί θα συμβεί αν εναλλάξετε την θέση των πόλων του μαγνήτη;

4. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Πάρτε ένα ευθύγραμμο σύρμα μήκους περίπου 1 m και στηρίξτε το κατακόρυφα. Φροντίστε το σύρμα να περνά από ένα οριζόντιο χαρτόνι. Τοποθετήστε πάνω στο



χαρτόνι, σε απόσταση 5 cm από τον αγωγό μια μικρή μαγνητική βελόνα, η οποία μπορεί να στρέφεται ελεύθερα σε οριζόντιο επίπεδο. Η βελόνα προσανατολίζεται από το γήινο μαγνητικό πεδίο. Τοποθετήστε κατάλληλα την βελόνα, ώστε η προέκταση του άξονά της να τέμνει κάθετα τον αγωγό. Διαβιβάστε στον αγωγό συνεχές ρεύμα 6 A και παρατηρήστε την εκτροπή της βελόνας. Μετρήστε την γωνία εκτροπής. Μπορείτε να υπολογίσετε την οριζόντια συνιστώσα του γήινου μαγνητικού πεδίου;

Αν έχετε μαγνητόμετρο στο εργαστήριο μετρήστε το πεδίο B σε απόσταση 5 cm από τον αγωγό (μέγιστη ένδειξη). Επιβεβαιώνεται ο νόμος του Ampere;

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ HALL

- Έστω ότι έχετε ένα πλακίδιο πυριτίου (ημιαγωγός) πάχους 1,0 mm που διαρρέεται από ρεύμα 1,0 mA. Το πλακίδιο είναι τοποθετημένο κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B = 1,2 \text{ T}$ και η τάση Hall είναι 75 mV. Ποιά η πυκνότητα φορέων φορτίου του πυριτίου; ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- Αν έχετε ένα πλακίδιο ίδιου πάχους από χαλκό ($8,5 \times 10^{28}$ ελεύθερα ηλεκτρόνια ανά m^3) που διαρρέεται από ρεύμα 10 A, ποιά θα είναι η τάση Hall;

- Έστω ότι θέλετε να κατασκευάσετε μαγνητόμετρο (όργανο μέτρησης μαγνητικού πεδίου), του οποίου η λειτουργία στηρίζεται στο φαινόμενο Hall. Για ποιές περιπτώσεις θα χρησιμοποιούσατε πλακίδιο από χαλκό και για ποιές πλακίδιο από πυρίτιο;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1

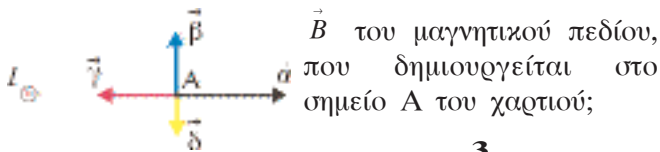
Το πεδίο \vec{B} σ' ένα σημείο A του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό ρευματοφόρου αγωγού δεν εξαρτάται

- (α) από την τιμή του ρεύματος
- (β) από το υλικό του αγωγού
- (γ) από την γεωμετρία του αγωγού
- (δ) από την απόσταση από τον αγωγό

Βάλτε σε κύκλο το γράμμα της σωστής απάντησης.

2

Ένας ευθύγραμμος αγωγός είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διαρρέεται από ρεύμα I με φορά από τον αναγνώστη προς το χαρτί. Ποιό από τα διανύσματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ παριστάνει το διάνυσμα



\vec{B} του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργείται στο σημείο A του χαρτιού;

3

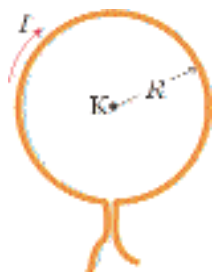
Κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I και το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του είναι B. Αν υποδιπλασιαστεί το ρεύμα I , το πεδίο B

- (α) θα διπλασιαστεί
- (β) θα τετραπλασιαστεί
- (γ) θα υποδιπλασιαστεί
- (δ) θα υποτετραπλασιαστεί

Βάλτε σε κύκλο το γράμμα της σωστής απάντησης.

4

Ο κυκλικός αγωγός του σχήματος έχει ακτίνα R και διαρρέεται από ρεύμα I , που έχει φορά, τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Ποιά (ή ποιές)



από τις παρακάτω προτάσεις, που αφορούν το πεδίο \vec{B} στο κέντρο του αγωγού είναι σωστή (ή σωστές)

- (α) Η τιμή του \vec{B} δεν εξαρτάται από την ακτίνα R του αγωγού
- (β) Το πεδίο \vec{B} είναι κάθετο στο επίπεδο του αγωγού με φορά προς τον αναγνώστη
- (γ) Η μαγνητική γραμμή που διέρχεται από το κέντρο K του αγωγού είναι ευθεία.

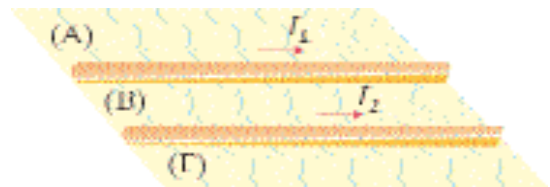
5

Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με αυτά της δεξιάς

Μαγνητικές Γραμμές	Μαγνητικό πεδίο
A. Ομόκεντροι κύκλοι	α. Ομογενές
B. Ευθείες παράλληλες και ισαπέχουσες	β. Κυκλικού ρεύματος
	γ. Ευθύγραμμου ρεύματος

6

Στο σχήμα φαίνονται δύο παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί, που διαρρέονται από ρεύματα I_1, I_2 με $I_1 > I_2$.



Οι αγωγοί χωρίζουν το επίπεδο που ανήκουν σε τρία τμήματα A, B, Γ. Σε ποιό απ' αυτά τα τμήματα υπάρχουν σημεία όπου το πεδίο \vec{B} είναι μηδέν; Να βρεθεί το ίδιο αν το I_1 έχει αντίθετη φορά απ' αυτή του σχήματος.

7

Στο σχήμα φαίνονται οι τροχιές x, y, z τριών σωματιδίων, που κινούνται κάθετα στις γραμμές ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου.



Να αντιστοιχίσετε τα σωματίδια της στήλης A με τις τροχιές της στήλης B.

<u>A</u>	<u>B</u>
Νετρόνιο	z
Πρωτόνιο	y
	x

8

Φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα \vec{v} , η οποία σχηματίζει

γωνία 30° με τις μαγνητικές γραμμές. Ποιά (ποιές) από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (σωστές);

- (α) Η ορμή του σωματιδίου μεταβάλλεται.
- (β) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου μεταβάλλεται.
- (γ) Το έργο της δύναμης του πεδίου πάνω στο σωματίδιο είναι μηδέν.
- (δ) Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι μηδέν.

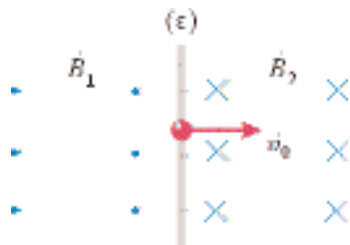
9

Φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται με ορμή \vec{p}_0 σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, με την \vec{p}_0 κάθετη στις μαγνητικές γραμμές. Το σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο T . Ποιά (ποιές) από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (σωστές);

- (α) Σε χρόνο $T/4$ το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου είναι $\Delta p = p_0 \sqrt{2}$
- (β) Αν το ίδιο σωματίδιο έμπαινε στο πεδίο με ορμή μεγαλύτερη από την p_0 , θα εκτελούσε κυκλική κίνηση μεγαλύτερης ακτίνας.
- (γ) Αν το ίδιο σωματίδιο έμπαινε στο πεδίο με ορμή κατά μέτρο μεγαλύτερη από την p_0 , θα εκτελούσε ομαλή κυκλική κίνηση με μεγαλύτερη περίοδο.

10

Θεωρούμε δύο ομογενή μαγνητικά πεδία με αντίρροπες μαγνητικές γραμμές. Ένα πρωτόνιο έχει



κάποια στιγμή ταχύτητα \vec{v}_0 κάθετη στο διαχωριστικό επίπεδο (ϵ) των δύο πεδίων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να σχεδιαστεί ποιοτικά η τροχιά του πρωτονίου αν είναι $B_1 > B_2$.

11

Ηλεκτρόνια εισέρχονται με την ίδια ταχύτητα \vec{v} σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} κάθετα στις μαγνητικές γραμμές, οπότε εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο T και ακτίνα τροχιάς R . Αν αυξηθεί το B , ποιο από τα παρακάτω θα συμβεί;

- (α) θα αυξηθεί η ακτίνα R και θα μειωθεί η περίοδος T
- (β) θα αυξηθεί τόσο η ακτίνα R , όσο και η περίοδος

- (γ) θα μειωθεί τόσο η ακτίνα R , όσο και η περίοδος T
- (δ) θα μειωθεί η ακτίνα R και θα αυξηθεί η περίοδος T

12

Σωματίδια εισέρχονται με την ίδια ταχύτητα \vec{v} μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, κάθετα στις μαγνητικές γραμμές, οπότε διαγράφουν τις τροχιές K_1, K_2 . Να αντιστοιχίσετε τις τροχιές της αριστερής στήλης στα σωματίδια της δεξιάς στήλης.



Τροχιά	Σωματίδιο
K_1	πρωτόνιο
K_2	ηλεκτρόνιο
	ión Na^+

13

Σ' ένα χώρο υπάρχει ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός και δεν δέχεται μαγνητική δύναμη. Μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι στο χώρο αυτό δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο;

14

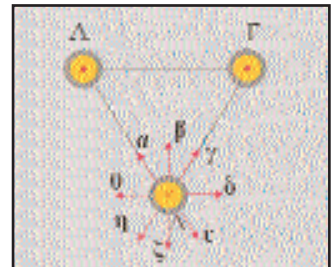
Ευθύγραμμος αγωγός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και σχηματίζει με τις μαγνητικές γραμμές γωνία 30° . Η δύναμη Laplace που δέχεται ο αγωγός είναι 5,0 N. Η δύναμη που θα δεχτεί αν τοποθετηθεί κάθετα στις μαγνητικές γραμμές είναι:

- (α) 2,5 N
- (β) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ N
- (γ) 5,0 N
- (δ) 10 N

15

Τρεις παράλληλοι ευθύγραμμοι αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα με ίδια τιμή I . Οι αγωγοί είναι κάθετοι στο επίπεδο του χαρτιού και το τέμνουν στα σημεία Δ, Γ, Λ , που είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Τα διερχόμενα ρεύματα από τα Δ και Γ έχουν φορά από το χαρτί προς τον αναγνώστη, ενώ το διερχόμενο ρεύμα από το Λ έχει φορά από τον αναγνώστη προς το χαρτί. Ποιό από τα διανύσματα



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{zeta}, \vec{\eta}, \vec{\theta}$ παριστάνει,

- i) το ολικό πεδίο \vec{B} , που δημιουργείται από τα

διερχόμενα ρεύματα από τα Α και Γ
 ii) την (συνισταμένη) δύναμη, που ασκείται στον διερχόμενο από το Δ αγωγό.

16

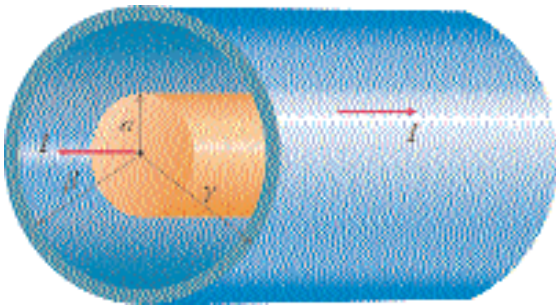
Ποιά (ή ποιές) από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος

- (α) Οι γραμμές το μαγνητικού πεδίου ενός μαγνήτη ξεκινούν από το βόρειο μαγνητικό πόλο και καταλήγουν στον νότιο πόλο
- (β) Το πλήθος των μαγνητικών γραμμών που εισέρχονται σε οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια, ισούται με το πλήθος των μαγνητικών γραμμών που εξέρχονται απ' αυτή
- (γ) Η μαγνητική ροή είναι διανυσματικό μέγεθος

17

Συμπαγές κυλινδρικό σύρμα, πολύ μεγάλου μήκους, ακτίνας διατομής a , περιβάλλεται από μονωτικό περίβλημα εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας β . Το μονωτικό περίβλημα περιβάλλεται και αυτό από μεταλλικό περίβλημα εσωτερικής ακτίνας β και εξωτερικής ακτίνας γ . Το κυλινδρικό σύρμα και το μεταλλικό περίβλημα διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα $I_1 = I_2 = I$

(I) Το πεδίο \vec{B} σε απόσταση r από το κέντρο, όπου



$a < r < \beta$, είναι:

- (α) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- (β) 0
- (γ) $\frac{\mu_0 2I}{\pi r^2}$
- (δ) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}$

(II) Το πεδίο \vec{B} σε απόσταση r από το κέντρο, όπου $r > \gamma$, είναι

- α. $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- β. $\frac{\mu_0 I}{\pi r}$
- γ. $\frac{\mu_0 I}{\pi r^2}$
- δ. 0

18

Σωληνοειδές πηνίο διαρρέεται από ρεύμα. Σε ποιά από τις παρακάτω περιπτώσεις θα αυξηθεί το πεδίο \vec{B} στο εσωτερικό του σωληνοειδούς;

- (α) Αν διπλασιάσουμε ταυτόχρονα το μήκος και τον αριθμό των σπειρών.
- (β) Αν διπλασιάσουμε το μήκος διατηρώντας τον ίδιο αριθμό σπειρών.
- (γ) Αν διπλασιάσουμε τον αριθμό των σπειρών διατηρώντας ίδιο μήκος.
- (δ) Αν κόψουμε ένα μικρό κομμάτι από το ένα άκρο του σωληνοειδούς.

19

Σωληνοειδές μεγάλου μήκους ℓ , με N σπείρες ακτίνας r , διαρρέεται από ρεύμα I . Η διερχόμενη μαγνητική ροή από μια κεντρική σπείρα του σωληνοειδούς είναι:

- (α) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} N$
- (β) $\mu_0 \frac{N}{\ell} I \pi r^2$
- (γ) $\mu_0 \frac{N}{\ell} I 2\pi r$
- (δ) $\mu_0 N I \pi r'$

20

Η παρακάτω πρόταση είναι σωστή ή λάθος;

“Η τιμή του πεδίου \vec{B} στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς είναι μεγάλου μήκους είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας των σπειρών του σωληνοειδούς”.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Όπου χρειαστεί είναι $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$

1

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός πολύ μεγάλου μήκους διαρρέεται από ρεύμα I . Σε απόσταση

$r = 3,0 \text{ cm}$ από τον αγωγό το δημιουργούμενο πεδίο έχει $B = 1,0 \times 10^{-4} \text{ T}$. Να βρεθεί το ρεύμα I .

2

Κυκλικό πλαίσιο αντίστασης 10Ω αποτελείται από 10 σπείρες με ακτίνα $5,0 \text{ cm}$. Το πλαίσιο τροφοδοτείται από πηγή συνεχούς ρεύματος με ΗΕΔ

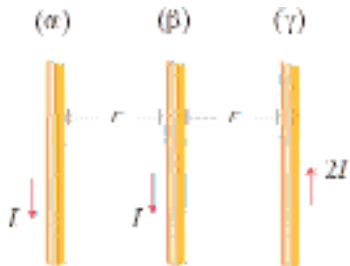
33 V και εσωτερική αντίσταση 1,0 Ω. Να υπολογισθεί το πεδίο \vec{B} στο κέντρο του πλαισίου.

3

Συρμάτινο ημικύκλιο ακτίνας 6,3 cm διαρρέεται από ρεύμα $I = 10$ A. Να υπολογισθεί με εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart το πεδίο \vec{B} στο κέντρο του ημικυκλίου.

4

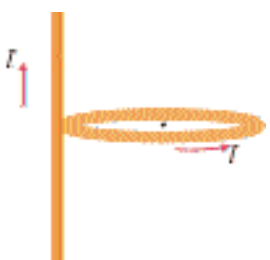
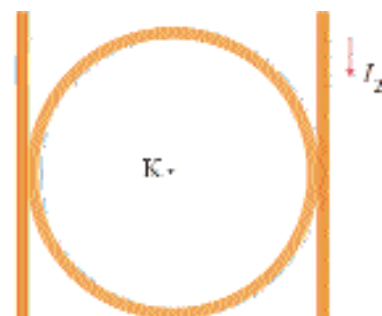
Στο σχήμα φαίνονται τρεις ομοεπίπεδοι κατακόρυφοι παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί α, β, γ μεγάλου μήκους. Οι αγωγοί διαρρέονται από ρεύματα όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $r = 9$ cm



(ακριβώς) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των αγωγών στα οποία το δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο έχει \vec{B} ίσο με μηδέν.

5

Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί μεγάλου μήκους διαρρέονται από αντίροπα ρεύματα $I_1 = 8$ A (ακριβώς) και $I_2 = 4,56$ A. Οι δύο ευθύγραμμοι α γ ω γ ο ί εφάπτονται σε αντιδιαμετρικά σημεία ενός κυκλικού αγωγού. Να βρεθεί το ρεύμα που πρέπει να διαρρέει τον κυκλικό αγωγό, ώστε το πεδίο \vec{B} στο κέντρο του να είναι μηδέν.

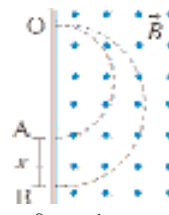


6
Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός μεγάλου μήκους εφάπτεται σε κυκλικό αγωγό ακτίνας R. Ο ευθύγραμμος αγωγός είναι κάθετος στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού. Αν και οι δύο αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα I να υπολογισθεί το πεδίο

\vec{B} στο κέντρο του κυκλικού αγωγού.

7

Ένα πρωτόνιο $\left(\frac{q}{m} = 1,0 \times 10^8 \text{ C / kg}\right)$ και ένα σωματίδιο α επιταχύνονται από τάση $V = 5,0 \times 10^3 \text{ V}$ και κατόπιν εισέρχονται, από το ίδιο σημείο O σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με $B = 0,10 \text{ T}$, κάθετα στις πεδιακές γραμμές. Εκεί διαγράφουν ημικύκλια και αποτυπώνουν τα ίχνη τους σε σημεία A και B πάνω σε φωτογραφική πλάκα. Να υπολογιστεί η απόσταση x των ιχνών A, B. Το σωματίδιο α έχει διπλάσιο φορτίο και τετραπλάσια μάζα από το πρωτόνιο.

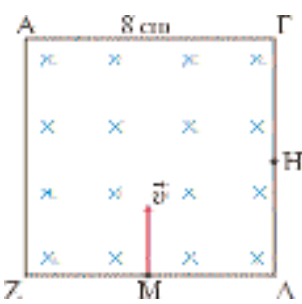


8

Ηλεκτρόνιο μπαίνει με ταχύτητα $v = 1,0 \times 10^3 \text{ m / s}$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η ταχύτητα v σχηματίζει γωνία 45° με τις μαγνητικές γραμμές. Να βρεθεί το μήκος της τροχιάς του ηλεκτρονίου σε χρόνο $t = 1,0 \text{ ms}$.

9

Η κατακόρυφη τομή ενός οριζώντιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου με $B = 9,0 \times 10^{-5} \text{ T}$ είναι τετράγωνο ΑΓΔΖ πλευράς $a = 8,0 \text{ cm}$. Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο πεδίο με ταχύτητα \vec{v} κάθετη στις μαγνητικές γραμμές και κάθετη στην πλευρά ΔΖ. Το σημείο Μ της εισόδου του ηλεκτρονίου στο πεδίο είναι το μέσο της ΔΖ. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας \vec{v} , ώστε το ηλεκτρόνιο να εξέρχεται από το πεδίο (i) από το σημείο Δ (ii) από το μέσο Η της ΓΔ (iii) από το σημείο Γ

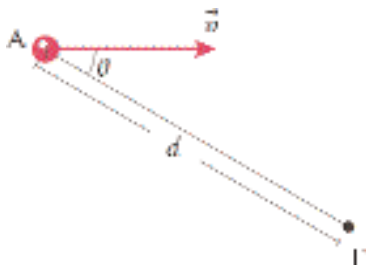


Δίνεται $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και ακόμη να θεωρηθεί η μάζα του ηλεκτρονίου $m = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

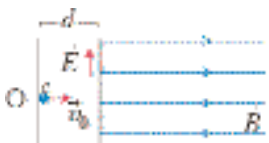
10

Πρωτόνια $\left(\frac{q}{m} = 10^8 \text{ C / kg}\right)$ επιταχύνονται σε ηλεκτρικό πεδίο από διαφορά δυναμικού $V = 200 \text{ V}$. Τα πρωτόνια βγαίνουν από το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Α. Σε απόσταση (ΑΓ) = $d = 2,0 \text{ cm}$, υπάρχει στόχος Γ. Η ταχύτητα \vec{v} των πρωτονίων στο Α σχηματίζει

γωνία $\theta = 30^\circ$ με την ΑΓ. Να υπολογισθεί το \vec{B} του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που πρέπει να υπάρχει στο χώρο, ώστε τα πρωτόνια να βρίσκουν το στόχο Γ, στις περιπτώσεις που οι μαγνητικές γραμμές
 (i) είναι κάθετες στο επίπεδο του χαρτιού
 (ii) είναι παράλληλες με την ΑΓ.



11

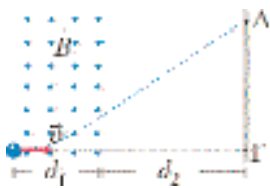


Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E = 90 \text{ N/C}$ εκτείνεται σε απόσταση $d = 12 \text{ cm}$, όπως στο σχήμα. Ένα ηλεκτρόνιο βάλλεται με

ταχύτητα $v_0 = 1,2 \times 10^6 \text{ m/s}$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές αυτού του πεδίου. Αφού το ηλεκτρόνιο διασχίσει το ηλεκτρικό πεδίο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με $B = 1,0 \times 10^{-4} \text{ T}$, του οποίου οι γραμμές είναι παράλληλες στην \vec{v}_0 . Να βρεθεί η ακτίνα και το βήμα της ελικοειδούς τροχιάς, που θα διαγράψει το ηλεκτρόνιο στο μαγνητικό πεδίο.

δίνεται $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, και να θεωρηθεί η μάζα του ηλεκτρονίου $m = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$

12

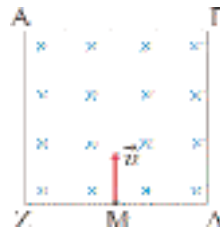


Ηλεκτρόνιο ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$) επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού $V = 500 \text{ V}$, οπότε αποκτά ταχύτητα \vec{v} . Κατόπιν εισέρχεται σε ένα χώρο, που εκτείνεται σε μήκος $d_1 = 6,0 \text{ cm}$ στον οποίο υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο με $B = 10^{-3} \text{ T}$, όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια το ηλεκτρόνιο κινείται στο κενό και χτυπά στο σημείο Δ ενός φθορίζοντος διαφράγματος, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d_2 = 12 \text{ cm}$ από το όριο του μαγνητικού πεδίου. Να βρεθεί η απόσταση (ΓΔ).

Να βρεθούν
 (α) το μέτρο της \vec{v}
 (β) το μήκος της τροχιάς του πρωτονίου μέσα στο πεδίο
 (γ) ο χρόνος κίνησης του πρωτονίου μέσα στο πεδίο

13

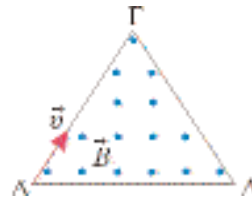
Η κατακόρυφη τομή οριζώντιου χώρου με ομογενές μαγνητικό πεδίο με $B = 18 \times 10^{-4} \text{ T}$ είναι τετράγωνο ΑΓΔΖ πλευράς $a = 6,0 \text{ cm}$. Ηλεκτρόνιο ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,0 \times 10^{-31} \text{ kg}$) εισέρχεται στο πεδίο με ταχύτητα $\vec{v} = 6,4 \times 10^6 \text{ m/s}$ από το μέσο Μ της ΖΔ. Η ταχύτητα \vec{v} είναι κάθετη στις μαγνητικές γραμμές και στην ΖΔ.



- (α) Να προσδιοριστεί το σημείο εξόδου του ηλεκτρονίου από το πεδίο.
- (β) Να βρεθεί ο χρόνος κίνησης του ηλεκτρονίου μέσα στο πεδίο.
- (γ) Να υπολογιστεί το έργο της μαγνητικής δύναμης, που ασκήθηκε στο ηλεκτρόνιο.
- (δ) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής του ηλεκτρονίου.

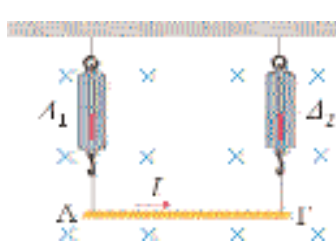
14

Στο σχήμα φαίνεται η τομή οριζώντιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου, με $B = 1,0 \times 10^{-2} \text{ T}$ που έχει σχήμα ισοπλευρού τριγώνου πλευράς $a = 6,0 \text{ cm}$. Πρωτόνιο ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$) εισέρχεται στο πεδίο από το Α με ταχύτητα \vec{v} , όπως φαίνεται στο σχήμα και εξέρχεται από το σημείο Δ.



- Να βρεθούν
 (α) το μέτρο της \vec{v}
 (β) το μήκος της τροχιάς του πρωτονίου μέσα στο πεδίο
 (γ) ο χρόνος κίνησης του πρωτονίου μέσα στο πεδίο

15

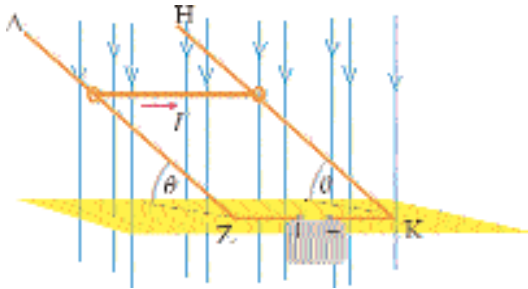


Ο οριζόντιος αγωγός ΑΓ έχει μάζα $0,10 \text{ kg}$ μήκος $1,0 \text{ m}$ και κρέμεται από την οροφή μέσω δύο δυναμομέτρων Δ_1, Δ_2 . Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα $I = 10 \text{ A}$ και οι ενδείξεις των δυναμομέτρων είναι μηδέν. Να βρεθεί το \vec{B} , ομογενούς μαγνητικού πεδίου, που υπάρχει στο χώρο της διάταξης, με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Ο οριζόντιος αγωγός ΑΓ έχει μάζα $0,10 \text{ kg}$ μήκος $1,0 \text{ m}$ και κρέμεται από την οροφή μέσω δύο δυναμομέτρων Δ_1, Δ_2 . Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα $I = 10 \text{ A}$ και οι ενδείξεις των δυναμομέτρων είναι μηδέν. Να βρεθεί το \vec{B} , ομογενούς μαγνητικού πεδίου, που υπάρχει στο χώρο της διάταξης, με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα $g = 10 \text{ m/s}^2$.

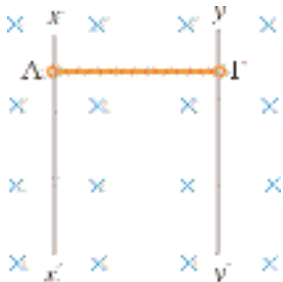
16

Δύο παράλληλα σύρματα ΔΖ και ΗΚ σχηματίζουν με τον οριζοντα γωνία θ . Οριζόντιος αγωγός ΑΓ με μήκος 1,0 m και μάζα 1,0 kg έχει τα άκρα του σε επαφή με τους αγωγούς ΔΖ και ΗΚ. Ο αγωγός ΑΓ διαρρέεται από ρεύμα $I = 10$ A και ισορροπεί. Στο χώρο της διάταξης υπάρχει κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο με $B = 1,0$ T. Να βρεθεί η γωνία θ . (Τριβές αμελητέες και $g = 10$ m/s²).



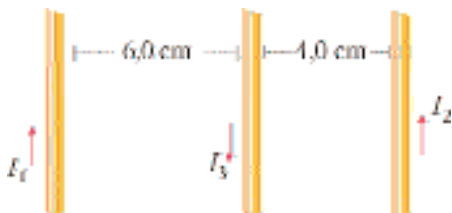
17

Οριζόντιος αγωγός ΑΓ με μήκος 1,0 m και μάζα 1,0 kg τροφοδοτείται από μία διάταξη με σταθερό ρεύμα I . Ο αγωγός ΑΓ μπορεί να ολισθαίνει, χωρίς τριβές, έχοντας τα άκρα του σε επαφή με τους κατακόρυφους οδηγούς $x'x$ και $y'y$. Στο χώρο της διάταξης υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο με $B = 1,0$ T, όπως στο σχήμα. Αρχικά κρατάμε τον αγωγό και κάποια στιγμή τον αφήνουμε ελεύθερο. Αυτός θα κινηθεί προς τα πάνω διανύοντας 2,0 m σε χρόνο 2,0 s απ' τη στιγμή που θα αφηθεί ελεύθερος. Να βρεθεί το ρεύμα I και να σχεδιαστεί η φορά του. ($g = 10$ m/s²)



18

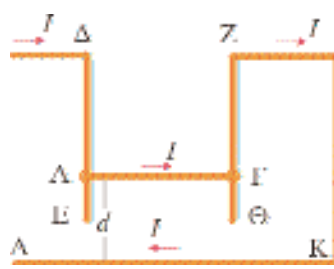
Τρεις παράλληλοι ομοεπίπεδοι ευθύγραμμοι αγωγοί μεγάλου μήκους διαρρέονται από ρεύματα $I_1 = 60$ A, $I_2 = 20$ A και $I_3 = 10$ A, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται σε τμήμα μήκους



10 cm του αγωγού που διαρρέεται από το ρεύμα I_3 .

19

Σύρμα ΑΓ μήκους 0,6 m και μάζας 6,0 g μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος των οδηγών ΔΕ και ΖΘ παραμένοντας οριζόντιο. Όλο το σύστημα είναι μεταλλικό και διαρρέεται από ρεύμα I , ώστε το σύρμα ΑΓ να ισορροπεί σε απόσταση $d = 2,0$ cm από τον αγωγό ΚΛ. Να βρεθεί το ρεύμα I . ($g = 10$ m/s²)



20

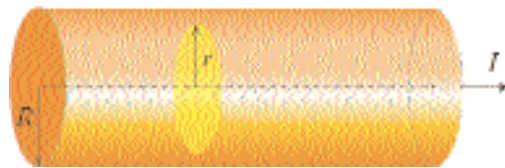
Στο σχήμα φαίνεται ένα δακτυλιοειδές σωληνοειδές που διαρρέεται από ρεύμα I . Στην πραγματικότητα οι σπείρες έχουν πολύ μεγάλη πυκνότητα, για λόγους ευκρίνειας όμως σχεδιάστηκαν λίγες. Ο αριθμός των σπειρών είναι N .

- α) Εξηγήστε με τη βοήθεια του νόμου του Ampere γιατί το μαγνητικό πεδίο στα σημεία Κ και Α είναι μηδέν.
- β) Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Μ είναι

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

21

Θεωρούμε κυλινδρικό αγωγό πολύ μεγάλου μήκους, με ακτίνα διατομής R , που διαρρέεται από ρεύμα I ,



ομοιόμορφα κατανεμημένο στην εγκάρσια διατομή του. Να υπολογισθεί το πεδίο \vec{B} στο εσωτερικό του αγωγού σε απόσταση r από τον άξονά του. Γνωστά I, R, r .

22

Ποιό το ρεύμα, που πρέπει να διαρρέει ένα σωληνοειδές πηνίο με 20,0 σπείρες/cm, ώστε το πεδίο B στο εσωτερικό του σωληνοειδούς να είναι 0,020 T.