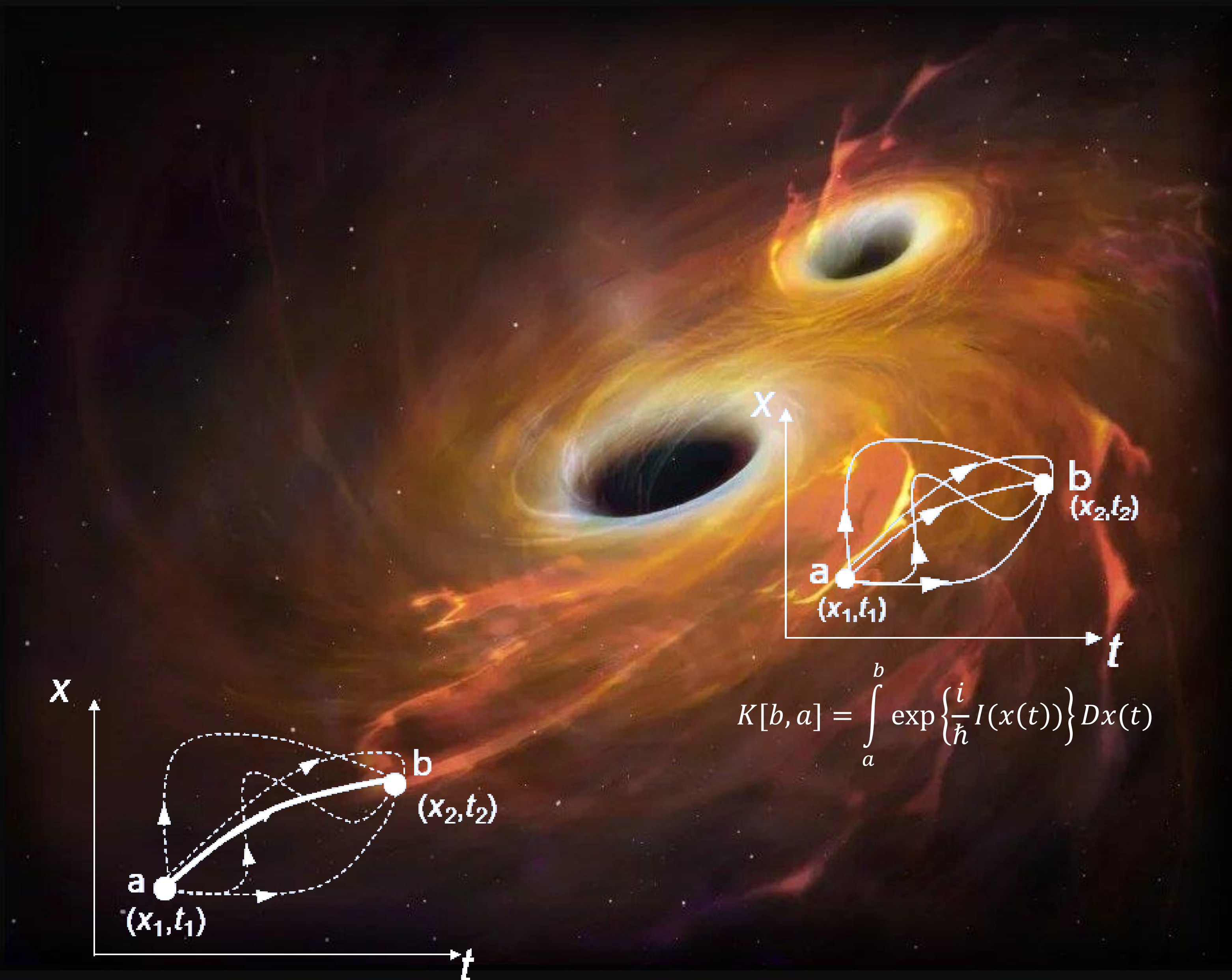
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Ε. Α. Δρης, Θ. Η. Αλεξόπουλος



$$I = \int_a^b L(x,\, \dot{x},\, t)dt$$

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Εθνικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021-2025

Ε. Α. ΔΡΗΣ
Ομότιμος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Θ. Η. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αναλυτική Δυναμική

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Αναλυτική Δυναμική

Συγγραφή

Ε. Α. Δρης Ομότιμος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Θ. Η. Αλεξόπουλος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Όξενκιουν Ελένη Ελισσάβετ

Γραφιστική Επιμέλεια: Ιωάννης Παλιόκας

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN: 978-618-85370-9-5

Εικόνα εξώφυλλου: Υπόβαθρο, εικαστική αναπαράσταση δυο μελανών οπών σε πορεία σύγκρουσης (MARK GARLICK/SCIENCE PHOTO LIBRARY/Getty Images). https://www.livescience.com/three-supermassive-black-holes-collision.html

Κάτω αριστερά: ολοκλήρωμα δράσης. Σημειώνεται με έντονη γραμμή η πραγματική τροχιά και με διακεκομμένες γραμμές μερικές γειτονικές τροχιές.
Πάνω δεξιά: κβαντικό ολοκλήρωμα διαδρομής. Σημειώνονται οι προηγούμενες τροχιές οι οποίες τώρα συμβάλλουν με ίδιο βάρος στον υπολογισμό του διαδότη.

Βιβλιογραφική Αναφορά: Δρης, Ε., Αλεξόπουλος, Θ. (2021). *Αναλυτική Δυναμική* [Μεταπτυχιακό εγχειρίδιο]. Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://hdl.handle.net/11419/8018

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνυμίων

LIGO	Laser Interferometer Gravitational wave Observatory
BEH	Brout- Englert- Higgs
VCO	Voltage Controlled Oscillator
KAM	Θεώρημα Kolmogorov-Arnold-Moser
ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πρόλογος

‘Timeo hominem unius libri’ [Thomas Acquinas]

«Φοβού τον άνθρωπο του ενός βιβλίου» [Θωμάς Ακινάτης]

Αυτό το βιβλίο μπορεί να αποτελέσει βοήθημα για φοιτητές που παρακολουθούν σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από προχωρημένους προπτυχιακούς φοιτητές. Το μεγαλύτερο μέρος από αυτό το βιβλίο διδάχτηκε στο Μεταπτυχιακό: Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές, ΕΜΠ/Δημόκριτος, στα πλαίσια του μαθήματος Κλασική Μηχανική.

Οι φοιτητές που παρακολουθούν ένα τέτοιο μάθημα πρέπει να έχουν γνώση Μηχανικής επιπέδου Γενικής Φυσικής και κάποια γνώση πιο προχωρημένης Μηχανικής, προπτυχιακού επιπέδου, καθώς και γνώση Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Η Μηχανική γενικώς και ειδικότερα η Αναλυτική Μηχανική ή η Αναλυτική Δυναμική είναι κλάδοι της επιστήμης, που μπορεί να ισχυριστεί κάποιος, αποτελούν το αλφάβητο, το βασικό εργαλείο, που είναι χρήσιμο για τη μετάβαση σε άλλους κλάδους της φυσικής και της επιστήμης του μηχανικού.

Το περιεχόμενο είναι, κυρίως, κλασική Αναλυτική Δυναμική. Επίσης περιλαμβάνονται και τα βασικά για τη Μη Γραμμική Δυναμική. Περιλαμβάνονται θέματα κλασικής Θεωρίας Πεδίου και τα θεωρήματα της Noether.

Δίνονται στοιχεία από τη θεωρία μεταβολών για συστήματα με φυσικές συνοριακές συνθήκες. Εξετάζονται οι περιπτώσεις όπου η λαγκρανζιανή εξαρτάται από ανώτερες παραγώγους και αναφέρεται το θεώρημα Ostrogradsky. Αναλύονται διάφορα θέματα που σχετίζονται με τη Γενική Σχετικότητα.

Εξετάζεται το αντίστροφο πρόβλημα της Μηχανικής, δηλαδή πότε από τις εξισώσεις κίνησης μπορεί να βρεθεί λαγκρανζιανή που να περιγράφει το σύστημα.

Οι προχωρημένες θεωρίες σωματιδίων, σχετικότητας, αστροφυσικής κ.λπ. στηρίζονται στην Αναλυτική Δυναμική. Επίσης σε θέματα της επιστήμης του Μηχανικού γίνεται μεγάλη χρήση της Αναλυτικής Μηχανικής, π.χ. κύματα, ταλαντευόμενες κατασκευές, ρευστά, χαοτικά συστήματα κ.λπ.

Το βιβλίο απευθύνεται σε όσους θέλουν να αποκτήσουν μια γεύση από τα αντικείμενα που πραγματεύονται στις σελίδες του. Για περισσότερες γνώσεις κάποιος μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία που παρατίθεται εδώ, γενικώς σε άλλα συγγράμματα που είναι πιο εξειδικευμένα. Η βιβλιογραφία περιέχει βιβλία και δημοσιεύσεις που χρησιμοποιήσαμε σε μικρό ή μεγάλο βαθμό για τη συγγραφή αυτού του πονήματος, και άλλα για παραπάνω μελέτη.

Το βιβλίο δε μπορεί να διδαχτεί ολόκληρο σε ένα εξάμηνο, ο διδάσκων πρέπει να κάνει κατάλληλη επιλογή της ύλης που διδάσκει. Όμως είναι χρήσιμο και ως βιβλίο αναφοράς στο αντικείμενό του.

Ας μη ξεχνάμε τον Θωμά Ακινάτη, με τον οποίο ξεκινήσαμε αυτόν τον πρόλογο, κανένα βιβλίο δεν είναι αρκετό από μόνο του. Το κάθε βιβλίο έχει την αξία του, μπορεί να εξηγεί καλύτερα κάτι που κάποιο άλλο δεν το κάνει. Αυτό εξαρτάται και από τον αναγνώστη ο οποίος μπορεί να καταλάβει κάτι όταν του δίνεται με τρόπο που εκείνος καταλαβαίνει καλύτερα.

Ευχαριστούμε το πλήθος των μεταπτυχιακών φοιτητών οι οποίοι παρακολούθησαν το μεταπτυχιακό μάθημα και με τις παρατηρήσεις τους και την αυστηρή, πολλές φορές, κριτική τους βοήθησαν στη βελτίωση της παρουσίασης των θεμάτων αυτού του βιβλίου. Η αλληλεπίδραση διδάσκοντος και διδασκομένων είναι πολύ ουσιαστική στη διαμόρφωση ενός μαθήματος και αντίστοιχου βιβλίου.

Επίσης, ευχαριστούμε τους Καθηγητές, Ιωάννη Βέργαδο, Αλέξανδρο Κεχαγιά, Κωνσταντίνο Κουσουρή, Γεώργιο Κουτσούμπα, Στέφανο Λεοντσίνη, Νικόλαο Μαυρόματο, Αντώνη Μοδινό, Κυριάκο Ταμβάκη, Γεώργιο Τσιπολίτη, Κωνσταντίνο Φαράκο, για την ενθάρρυνσή τους ώστε από σημειώσεις να γραφτεί ένα βιβλίο και για τις σχετικές παρατηρήσεις και υποδείξεις τους.

Επίσης ευχαριστούμε τον Φυσικό Σωτήρη Φραγκίσκο για την μεγάλη συμβολή του στον σχεδιασμό των σχημάτων και για παρατηρήσεις του σχετικές με το κείμενο του βιβλίου.

Εμμανουήλ Αντ. Δρης　　　　Θεόδωρος Η. Αλεξόπουλος

Αθήνα 2021

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Η λέξη Αναλυτική που υπάρχει στον κλάδο αυτό της Δυναμικής σχετίζεται με το γεγονός ότι γίνεται χρήση του κλάδου των μαθηματικών που ξέρουμε ως Μαθηματική Ανάλυση. Ο Νεύτωνας στο κλασικό σύγγραμμά του Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Μαθηματικές Αρχές Φυσικής Φιλοσοφίας (στα λατινικά 1687, στα αγγλικά 1729), έκανε χρήση των εννοιών της δύναμης και της ορμής. Αυτά είναι δυο μεγέθη που έχουν τιμή και κατεύθυνση. Παρόλο που στο έργο του ο Νεύτωνας δεν χρησιμοποιεί διανύσματα όπως γίνεται σήμερα, στην ουσία η Νευτώνεια θεώρηση της Κλασικής Δυναμικής (ή Μηχανικής) στηρίζεται σε σχέσεις διανυσμάτων. Ο Νεύτωνας κάνει χρήση γεωμετρικών εννοιών και παρόλο που έχει «ανακαλύψει» την έννοια της παραγώγου δεν την χρησιμοποιεί. Όπως είναι γραμμένο, το σύγγραμμά του είναι δύσκολο να «διαβαστεί». Στις μέρες μας, ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) γράφεται, στην μορφή με διανύσματα, ως $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$.

Στην Αναλυτική Δυναμική γίνεται χρήση δυο βαθμωτών μεγεθών, της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας (ή της δυναμικής συνάρτησης), και στη συνέχεια γίνεται χρήση της Μαθηματικής Ανάλυσης. Πρωτοπόρος σε αυτή την κατεύθυνση υπήρξε ο σύγχρονος και «αντίπαλος» του Νεύτωνα, ο Leibniz. Αυτός, ουσιαστικά, εισήγαγε τα δυο ανωτέρω βαθμωτά μεγέθη στη Μηχανική. Στην πράξη, μπορούμε να πούμε ότι η Αναλυτική Δυναμική είναι η Δυναμική που αναπτύχτηκε από τους Bernoulli, Euler, d’ Alembert, Lagrange, Hamilton, Poisson, Jacobi, Gauss και άλλους. Αξίζει να τονιστεί ότι στοιχεία της Μηχανικής γενικώς και της Αναλυτικής Μηχανικής ειδικότερα, υπάρχουν στα έργα πολλών προηγούμενων επιστημόνων. Ένα παράδειγμα είναι ο Αριστοτέλης ο οποίος αναφέρει, στην πραγματικότητα, την αρχή των δυνατών έργων, παρόλο που δεν χρησιμοποιεί αυτόν τον όρο. Ακόμη, υπάρχουν κάποιοι στην περίοδο του Μεσαίωνα, στη Δύση και στο Βυζάντιο. Μερικοί είναι Άραβες. Αναφέρουμε μόνο λίγους από αυτούς που δεν είναι τόσο πολύ γνωστοί: ο βυζαντινός Ιωάννης ο Φιλόπονος, ο Άραβας Avicenna, ο Roger Bacon κ.α. Είναι βέβαια γνωστό ότι πολύ σημαντική είναι η συμβολή του Γαλιλαίου.

Με αυτά που εκθέσαμε θέλουμε να τονίσουμε ότι παρόλο που κάποιοι σήκωσαν στους ώμους τους το κύριο βάρος της εξέλιξης αυτής της επιστήμης, στην πραγματικότητα η διαδικασία της εξέλιξης αυτής της κατεύθυνσης, όπως και των άλλων κλάδων των επιστημών, στηρίζεται στη δουλειά πολλών ανθρώπων, στα λάθη τους και στις επιτυχίες τους. Η δουλειά αυτή μπορεί να γίνεται σε διάρκεια ακόμη και πολλών αιώνων. Πολλοί από αυτούς τους «εργάτες» μένουν αφανείς.

Στη Νευτώνεια μεθοδολογία, το πρόβλημα της δυναμικής υλικού σημείου (σώματος χωρίς χωρικές διαστάσεις), λύνεται αν γνωρίζουμε τη δύναμη που ασκείται πάνω του και τη μάζα του. Αν υπάρχουν πολλά υλικά σημεία (σωμάτια) τότε εφαρμόζεται ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής για κάθε ένα σωμάτιο. Αν αυτά αλληλεπιδρούν το πρόβλημα γίνεται πολύπλοκο. Για την αντιμετώπιση της κίνησης συστημάτων που αποτελούνται από πολλά υλικά σημεία, ο Νεύτωνας εισήγαγε τον τρίτο νόμο του, δράση ίση με αντίδραση. Αυτό βέβαια δεν ισχύει για όλες τις δυνάμεις.

Στην περίπτωση στερεού σώματος δεχόμαστε ότι οι εσωτερικές (δηλαδή οι μεταξύ των υλικών σημείων του στερεού δυνάμεις) είναι ένα είδος κεντρικών δυνάμεων. Με άλλα λόγια, για κάθε ζεύγος σωματίων οι μεταξύ τους δυνάμεις, βρίσκονται πάνω στον ίδιο φορέα και είναι αντίθετες με ίσες απόλυτες τιμές.

Στη Νευτώνεια θεώρηση, γενικώς, αναγράφονται όλες οι δυνάμεις - διανύσματα που ασκούνται σε κάθε ένα σωμάτιο του συστήματος, δηλαδή δίνεται έμφαση σε κάθε ένα σωμάτιο χωριστά.

Στην περίπτωση (της θεώρησης) της Αναλυτικής Δυναμικής χρειάζεται να ξέρουμε τη δυναμική συνάρτηση που γράφεται για όλο το σύστημα των υλικών σημείων, αυτή είναι μια βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Έτσι έχουμε μια θεώρηση όλου του συστήματος των σωματίων ως συνόλου. Αυτό διευκολύνει την κατάσταση. Οι επιμέρους δυνάμεις μπορούν να βρεθούν από αυτήν την βαθμωτή συνάρτηση.

Ένα ακόμη μεγαλύτερο πλεονέκτημα της Αναλυτικής Δυναμικής παρουσιάζεται σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν δεσμοί, δηλαδή τα σωμάτια δεν είναι ελεύθερα να κινούνται στον χώρο υπό την επίδραση δεδομένων δυνάμεων αλλά περιορίζονται από διάφορα αίτια. Οι δεσμοί ασκούν δυνάμεις (δυνάμεις δεσμών) πάνω στα υλικά σημεία οι οποίες όμως δεν είναι δεδομένες εκ των προτέρων αλλά μπορεί να προσδιοριστούν αν κάποιος λύσει πρώτα το πρόβλημα με κάποιον τρόπο. Η Αναλυτική δυναμική μπορεί να λύσει πολλά τέτοια προβλήματα χωρίς να εισέρχονται από την αρχή οι δυνάμεις των δεσμών.

Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις Lagrange της Αναλυτικής Μηχανικής έχουν την ίδια μορφή ανεξάρτητα από το ποιες είναι οι (γενικευμένες) συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της θέσης του συστήματος. Αυτό είναι χρήσιμο σε διάφορες θεωρίες όπου οι εξισώσεις χρειάζεται να έχουν αναλλοίωτη μορφή ανεξάρτητη των συντεταγμένων. Πολύ χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας, αλλά αυτή δεν είναι η μόνη περίπτωση.

Αναφέρουμε ότι ο Lagrange με το σύγγραμμά του (στα Γαλλικά) με τίτλο Αναλυτική Μηχανική (1788), κατάφερε να φτιάξει, όπως λέει, μια νέα ισχυρή μεθοδολογία με την οποία μπορεί να λυθεί κάθε πρόβλημα Μηχανικής μόνο με καθαρό λογισμό (Απειροστικό Λογισμό), δηλαδή χωρίς αναφορά σε φυσικές ή γεωμετρικές θεωρήσεις. Προϋπόθεση γι' αυτό είναι να δίνεται η Κινητική Ενέργεια και η Δυναμική Ενέργεια του συστήματος σε αφηρημένη αναλυτική μορφή. Στον πρόλογο του παραπάνω βιβλίου του αναφέρεται σε αυτή την εξαιρετική επιτυχία με τα εξής λόγια: «Ο αναγνώστης δεν θα βρει κανένα σχήμα σε αυτό το βιβλίο. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιώ δεν χρειάζονται ούτε κατασκευές (σχήματα) ή γεωμετρική ή μηχανική επιχειρηματολογία: χρειάζονται μόνο αλγεβρικές διαδικασίες, υποκείμενες σε έναν κανονικό και ομοιόμορφο κανόνα μεθοδολογίας.». Το κείμενο σε αγγλική μετάφραση είναι:"The reader will find no figures in the work. The methods which I set forth do not require either constructions or geometrical or mechanical reasonings: but only algebraic operations, subject to a regular and uniform rule of procedure."

Ένα άλλο πιο «σύγχρονο» βιβλίο (το οποίο έχουμε στην βιβλιογραφία μας): A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies by E. T. Whittaker, Fourth Edition 1965, (First edition 1904), είναι γραμμένο στο παραπάνω πνεύμα, δεν έχει κανένα σχήμα και κανένα σύνηθες σύμβολο διανύσματος.

Από τις βασικές αρχές της Αναλυτικής Μηχανικής είναι η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων και η αρχή των δυνατών έργων. Αυτή είναι μια αρχή που, σε αντίθεση με τον θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνα, εμπεριέχει αρκετή αφαίρεση διότι αναφέρεται σε μη πραγματικές μετατοπίσεις, αφού οι μετατοπίσεις δεν γίνονται συναρτήσει του χρόνου αλλά γίνονται με τον χρόνο σταθερό (παγωμένο).

Πολύ χρήσιμη και με αρκετή αφαίρεση είναι η εισαγωγή εννοιών της θεωρίας μεταβολών στην Αναλυτική Δυναμική. Πρόκειται για ολοκληρω(μα)τικές αρχές όπου οι νόμοι δεν αναφέρονται σε ένα σημείο του χώρου των θέσεων αλλά σε ολόκληρες «τροχιές» του συστήματος. Το σύστημα, από πολλές γειτονικές τροχιές «διαλέγει» και διαγράφει την πραγματική τροχιά του, η οποία είναι αυτή για την οποία ισχύει ότι κάποια ολοκληρω(μα)τική ποσότητα είναι στάσιμη.

Σε αυτή την κατεύθυνση έπαιξαν ρόλο πολλοί επιστήμονες αλλά μπορούμε να ξεχωρίσουμε τον κυριότερο, που είναι ο Hamilton. Φυσικά υπάρχουν και πάλι οι «Αρχαίοι», όπως ο Ήρων από την Αλεξάνδρεια, που εξηγούσε την ανάκλαση του φωτός με την αρχή ελαχίστου που φέρει το όνομά του.

Η Αναλυτική Δυναμική μπορεί να χωριστεί στη Δυναμική Lagrange και στη Δυναμική των Hamilton, Euler και άλλων. Μπορεί ένας άλλος κλάδος να πούμε ότι είναι η Μηχανική των Hamilton και Jacobi.

Σε βιβλία που αναφέρουμε στη βιβλιογραφία, στο τέλος αυτού του πονήματος, μπορεί κάποιος να βρει πολλά ιστορικά στοιχεία σχετικά με τη Μηχανική γενικώς, και την Αναλυτική Δυναμική ειδικότερα.

Η μεθοδολογία κατά Νεύτωνα (νευτώνεια μεθοδολογία ή νευτώνεια θεώρηση) είναι χρήσιμη κυρίως στη στατική και για απλά προβλήματα δυναμικής. Για πιο σύνθετα προβλήματα με πολλά σωμάτια, όπου μπορεί να υπάρχουν μεταξύ τους και δεσμοί, είναι πιο εύχρηστη η περισσότερο αφαιρετική και λίγο πιο πέρα από τις συνήθεις εμπειρίες μας, Αναλυτική Δυναμική.

Η Αναλυτική Δυναμική εκτός των άλλων είναι το σκαλοπάτι για την ανάπτυξη πιο προχωρημένων θεωριών όπως είναι η Κβαντική Φυσική στις διάφορες μορφές της, και η Γενική Σχετικότητα αλλά και η Κλασική Ηλεκτροδυναμική, η Ρευστομηχανική κ.λπ.

Είναι χρήσιμο να τονίσουμε ότι πολλές φορές θα χρησιμοποιήσουμε σχέσεις οι οποίες δεν φαίνεται να είναι διαστατικά σωστές, δεν ανήκουν σε συνεπές (coherent) σύστημα μονάδων και μεγεθών. Αυτό απαντάται πολύ συχνά στα Μαθηματικά όπου τα μαθηματικά μεγέθη θεωρούνται αδιάστατα. Στην περίπτωση της Μηχανικής ένας τρόπος που μπορούμε να σκεφτούμε είναι ότι τα φυσικά μεγέθη και οι μονάδες έχουν μετασχηματιστεί έτσι που κάποιες φυσικές σταθερές να έχουν αριθμητική τιμή ίση με τη μονάδα. Αυτό γίνεται με κατάλληλη διαδικασία που στηρίζεται στη διαστατική ανάλυση, σε κλάδους όπως η Φυσική Υψηλών Ενεργειών ή Στοιχειωδών Σωματιδίων. Ένας πιο εύκολος τρόπος είναι να θεωρούμε αυτές τις σχέσεις ως εμπειρικές σχέσεις, δηλαδή ότι ισχύουν μεταξύ αριθμητικών τιμών για συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. Ως παράδειγμα, ας δούμε τη σχέση, $\dot{y} - t\dot{x} = 0$, όπου x, y είναι οι δυο καρτεσιανές συντεταγμένες ενός υλικού σημείου και t είναι ο χρόνος. Ας υποθέσουμε ότι οι μονάδες είναι οι συνήθεις μονάδες του SI. Τότε αυτή η σχέση είναι εμπειρική σχέση, δεν είναι διαστατικά σωστή, δεν είναι ομογενής. Η σχέση μπορεί να μετατραπεί σε ομογενή σχέση μεταξύ φυσικών μεγεθών που να ανήκει σε συνεπές σύστημα μονάδων, όπως το SI, αν της δώσουμε τη μορφή $\dot{y} - kt\dot{x} = 0$, όπου στο SI το k είναι μια σταθερά με διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου και στην περίπτωσή μας έχει τιμή $k = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Μια άλλη περίπτωση είναι όταν γράφουμε ότι η κινητική ενέργεια σωματίου είναι $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$. Ας υποθέσουμε ότι το x μετριέται σε m, ο χρόνος σε s και η ενέργεια σε J . Αυτή η σχέση ισχύει μεταξύ των αριθμητικών τιμών των διαφόρων μεγεθών, όταν η μάζα του σωματίου ισούται με 1 kg. Επίσης, η ίδια σχέση ισχύει μεταξύ των αριθμητικών τιμών αν μονάδες μέτρησης είναι το cm, το s και το erg, ενώ η μάζα ισούται με 1 g. Η διαστατικά σωστή έκφραση για την κινητική ενέργεια είναι η γνωστή $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, που ισχύει στο SI (ισχύει και σε άλλα παλιότερα συνεπή συστήματα φυσικών μεγεθών και μονάδων). Αυτή η σχέση ισχύει για οποιαδήποτε μάζα και όχι μόνο για μάζα 1 kg. Μια άλλη θεώρηση είναι να θεωρούμε ότι το x έχει μετασχηματιστεί και σημαίνει $\sqrt{m}x$. Σε άλλες περιπτώσεις όπως των Στοιχειωδών Σωματιδίων χρειάζεται στο τέλος να επανέλθουν οι σχέσεις στην ομογενή τους μορφή, π.χ. με μονάδες του SI. Αυτό ακολουθεί μια κατάλληλη, αντίστροφη, διαδικασία. Στην περίπτωσή μας αυτό δεν θα χρειάζεται να γίνει. Αν οι τελικές σχέσεις θέλουμε να είναι ομογενείς, διαστατικά σωστές, τότε από την αρχή όλες οι σχέσεις θα είναι ομογενείς.

1.1 Συντεταγμένες θέσης

Οι νόμοι του Νεύτωνα για την κίνηση μηχανικού συστήματος εκφράζονται με (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης συνήθως σε καρτεσιανές συντεταγμένες του καθενός σωματίου (υλικού σημείου) του συστήματος. Πολλές φορές οι καρτεσιανές δεν είναι οι πιο βολικές συντεταγμένες για να λυθεί το πρόβλημα. Αν για παράδειγμα έχουμε κεντρική κίνηση σωματίου, τότε είναι πιο βολική η εισαγωγή σφαιρικών ή πολικών συντεταγμένων. Σε άλλες περιπτώσεις, όταν έχουμε σύστημα σωματίων, είναι βολικό να διαχωριστεί η κίνηση σε κίνηση του κέντρου μάζας του, η οποία, για παράδειγμα, μπορεί να περιγράφεται με καρτεσιανές συντεταγμένες και σε κίνηση ως προς σύστημα του κέντρου μάζας του που μπορεί, για παράδειγμα, να είναι σφαιρικές συντεταγμένες. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η θέση του κάθε σωματίου καθορίζεται στον τρισδιάστατο χώρο, από τρία διατεταγμένα μεγέθη, που είναι οι συντεταγμένες του σωματίου.

Στην περίπτωση με δεσμούς μεταξύ των σωματίων συστήματος, όπως στην κίνηση στερεού, τα σωμάτια κινούνται κατά τρόπο που η γνώση της θέσης κάποιων από αυτά μια χρονική στιγμή, προσδιορίζει τη θέση των άλλων την ίδια χρονική στιγμή. Σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός των απαραίτητων συντεταγμένων θέσης είναι μικρότερος από τον αριθμό των συντεταγμένων όλων των σωματίων.

Γενικώς, στον συνήθη φορμαλισμό του Νεύτωνα για τη Δυναμική, ξεκινούμε από τις εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες και μπορούμε να καταλήξουμε στις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης σε μη καρτεσιανές συντεταγμένες. Όταν υπάρχουν δεσμοί τότε υπεισέρχονται στις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης και οι δυνάμεις των δεσμών, οι οποίες προσδιορίζονται λύνοντας το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων για το μηχανικό σύστημα.

Μπορεί κάποιος να ορίσει ως Γενικευμένες Συντεταγμένες οποιοδήποτε σύστημα μεγεθών είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη θέση κάποιου μηχανικού συστήματος, συμπεριλαμβανομένων και των καρτεσιανών συντεταγμένων. Πολλές φορές τις λέμε και απλώς συντεταγμένες. Οι αντίστοιχες παράγωγοι αυτών των συντεταγμένων ως προς τον χρόνο είναι οι γενικευμένες ταχύτητες ή απλώς ταχύτητες. Πολλοί θεωρούν ως γενικευμένες συντεταγμένες, μόνο τις ανεξάρτητες εκείνες συντεταγμένες οι οποίες αποτελούν το ελάχιστο σύνολο συντεταγμένων που είναι αρκετές για τον προσδιορισμό της θέσης συστήματος σωματίων. Όλες τις άλλες τις ονομάζουν απλώς συντεταγμένες. Ακόμη χρησιμοποιείται ο όρος γνήσιες (ή κύριες) γενικευμένες συντεταγμένες για τις ανεξάρτητες ελάχιστες απαιτούμενες συντεταγμένες και ο όρος γενικευμένες συντεταγμένες χρησιμοποιείται για τις συντεταγμένες γενικώς. Θα ακολουθούμε, λίγο πολύ, αυτή την τελευταία ονοματολογία με την έννοια ότι θα παραλείπουμε, μερικές φορές, όταν δεν δημιουργείται ασάφεια, τον όρο «γνήσιες» ή «κύριες συντεταγμένες».

Στα πλαίσια της Αναλυτικής Δυναμικής μπορεί να καταλήγουμε στις εξισώσεις Lagrange οι οποίες έχουν την ίδια μορφή, ανεξάρτητα από το είδος των γενικευμένων συντεταγμένων. Αυτές είναι γενικές (διαφορικές) εξισώσεις από τις οποίες μπορούμε να βρούμε τις επιμέρους (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης για κάθε επιμέρους μηχανικό σύστημα. Επίσης μπορεί να επιτευχθεί, να μην εμφανίζονται οι δυνάμεις των δεσμών, εφόσον αυτές δεν παράγουν έργο υπό κάποιες συνθήκες (π.χ. περίπτωση στερεού σώματος). Αυτή η ιδέα ξεκίνησε από τον Lagrange. Συνήθως, για τις γενικευμένες συντεταγμένες, χρησιμοποιείται κατά κανόνα ο συμβολισμός: $q_1, q_2, ..., q_n$ και $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$.

Για τον καθορισμό της θέσης N σωματίων που αποτελούν κάποιο μηχανικό σύστημα, χρειάζονται $3N$

καρτεσιανές συντεταγμένες θέσης ή $3N$ άλλες κατάλληλες (γενικευμένες) συντεταγμένες. Στην πιο απλή περίπτωση οι συντεταγμένες είναι σε ομάδες των τριών, διότι χρειάζονται τρεις συντεταγμένες για κάθε ένα σωμάτιο. Γενικώς, οι συντεταγμένες δεν είναι απαραίτητο να είναι σε διακριτές τριάδες, όμως για N σωμάτια χρειάζονται συνολικά πάντα $3N$ συντεταγμένες. Ο χώρος αυτών των συντεταγμένων, λέγεται (configuration space) «θεσικός χώρος» ή «χώρος των θέσεων». Σε κάθε τέτοιο χώρο $3N$ διαστάσεων η θέση του συστήματος παριστάνεται με ένα σημείο που έχει $3N$ συντεταγμένες. Ο χώρος αυτός με διαστάσεις πλήθους $3N$ είναι ο πλήρης θεσικός χώρος για N σωμάτια, ανεξάρτητα του αν υπάρχουν δεσμοί τέτοιοι που να περιορίζουν το πλήθος των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων (γνήσιες γενικευμένες συντεταγμένες). Όταν υπάρχουν δεσμοί που περιορίζουν τις ανεξάρτητες συντεταγμένες θέσης, τότε αν οι (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες είναι n ισχύει $n \leq 3N$, όπου η ισότητα ισχύει αν δεν υπάρχουν τέτοιοι δεσμοί. Παρόλο που αναφερόμαστε στις θέσεις των N σωματίων συστήματος, στην πράξη αυτό δεν είναι συνήθως απαραίτητο. Για παράδειγμα, αν έχουμε στερεό σώμα, τότε μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός της θέσης του στερεού ως συνόλου, πράγμα που χρειάζεται πολύ λίγες συντεταγμένες. Γενικώς κατά την αλλαγή συντεταγμένων, υπάρχουν σχέσεις (μετασχηματισμοί) που συνδέουν τις «νέες» (q') με τις «παλιές» (q) συντεταγμένες, στη μετατροπή μπορεί να υπάρχει και ο χρόνος, $q_i' = q'(q_1, q_2, ...q_m, t),\ i = 1, 2, ..., n$. Αν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων, τότε οι νέες συντεταγμένες είναι λιγότερες από τις παλιές, $n < m$. Πολλές φορές είναι βολικό να ξεκινήσουμε από καρτεσιανές συντεταγμένες, οπότε οι παλιές συντεταγμένες είναι καρτεσιανές και οι νέες οποιεσδήποτε γενικευμένες συντεταγμένες. Αυτό γίνεται κυρίως, γιατί στη νευτώνεια θεώρηση της μηχανικής προσφέρονται καλύτερα οι καρτεσιανές συντεταγμένες. Γενικώς όμως, οι ανωτέρω μετασχηματισμοί μπορεί να είναι μεταξύ οποιουδήποτε τύπου συντεταγμένων.

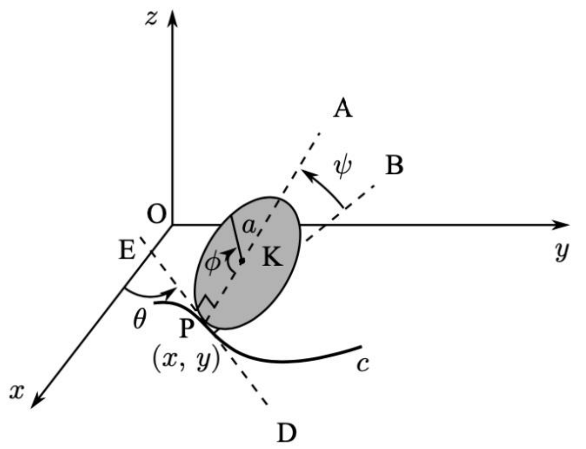
Ακόμη πρέπει να πούμε ότι, όταν αναφερόμαστε σε σωμάτια χρειάζεται πολλές φορές να αθροίσουμε μεγέθη των διαφόρων σωματίων, δηλαδή έχουμε διακριτά αθροίσματα. Σε άλλες περιπτώσεις, που δεν έχουμε διακριτά σημεία αλλά συνεχείς κατανομές (για παράδειγμα ένα συμπαγές στερεό), τότε έχουμε ολοκληρώματα. Παρόλα αυτά θα λέμε πάντα ότι αθροίζουμε, θεωρώντας και τα ολοκληρώματα ως ένα είδος αθροίσματος.

1.2 Δεσμοί

Μεταξύ των σωματίων μηχανικού συστήματος μπορεί να υπάρχουν γεωμετρικοί περιορισμοί (δεσμοί, σύνδεσμοι), που περιορίζουν τον χώρο των θέσεων, δηλαδή το πλήθος των ελάχιστων απαιτούμενων συντεταγμένων (γνήσιες συντεταγμένες) για τον προσδιορισμό της θέσης του συστήματος. Μπορεί όμως να υπάρχουν κινηματικοί δεσμοί οι οποίοι περιορίζουν την κινητικότητα του συστήματος, δηλαδή τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις του και επομένως και τις ταχύτητές του. Κάθε γεωμετρικός περιορισμός περιορίζει και τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις του συστήματος, δηλαδή είναι και κινηματικός περιορισμός, ενώ κάθε κινηματικός περιορισμός δεν είναι κατ’ ανάγκη και γεωμετρικός περιορισμός.

Για ένα σωμάτιο το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται μέσα σε ένα κουτί που είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οι δεσμοί εκφράζονται με ανισότητες. Χρησιμοποιείται ο όρος αμφιμερείς δεσμοί για δεσμούς που εκφράζονται με ισότητες και μονομερείς δεσμοί για δεσμούς που εκφράζονται με ανισότητες. Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με αμφιμερείς δεσμούς, δηλαδή με δεσμούς που εκφράζονται με ισότητες. Πολλές φορές ανάγουμε, με διάφορα τεχνάσματα, μονομερείς δεσμούς σε αμφιμερείς για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα και να μπορέσουμε να το λύσουμε πιο εύκολα. Για παράδειγμα, τέτοια περίπτωση είναι η μελέτη της ολίσθησης χωρίς τριβή, σωματίου στο εξωτερικό κατακόρυφης κυκλικής στεφάνης, μέσα σε πεδίο βαρύτητας, όπου μας ενδιαφέρει, πότε το σωμάτιο θα ξεφύγει από την επιφάνεια της στεφάνης.

Ας εξετάσουμε το παράδειγμα ομογενούς κυκλικού δίσκου ακτίνας a που μπορεί να κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο, Σχ. 1.1. Η ευθεία ED βρίσκεται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο x, y και στο επίπεδο του δίσκου, δηλαδή είναι η τομή των δυο αυτών επιπέδων. Η ευθεία PA βρίσκεται στο επίπεδο του δίσκου και είναι κάθετη στην ευθεία ED. Εφόσον ο δίσκος είναι ομογενής, η PA περνά από το κέντρο, K, του δίσκου. Η ευθεία PB βρίσκεται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο xy και είναι κάθετη στην ED. Η c είναι η τροχιά που διαγράφει το σημείο επαφής P (δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο) πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Η σημασία των γωνιών είναι κατανοητή από το σχήμα. Γενικώς, η θέση του δίσκου προσδιορίζεται από τις δυο καρτεσιανές συντεταγμένες x, y του σημείου επαφής με το οριζόντιο επίπεδο και από τις γωνίες φ, θ, ψ. Αν η επαφή είναι λεία (που υποθέτουμε ότι σημαίνει χωρίς τριβή) τότε ο δίσκος, κατά τη μετατόπισή του, μπορεί και ολισθαίνει στο επίπεδο προς όλες τις κατευθύνσεις και οι πέντε αυτές συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες, οπότε μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Επίσης, είναι επιτρεπτή οποιαδήποτε μικρή ή μεγάλη μεταβολή αυτών των γενικευμένων συντεταγμένων.



Σχήμα 1.1 *Ομογενής κυκλικός δίσκος που μπορεί να κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο.*

Αν η επαφή είναι τραχεία, τότε θεωρούμε ότι η τριβή να είναι τέτοια που ο δίσκος να μπορεί να κυλίεται στο επίπεδο, χωρίς να μπορεί να ολισθαίνει σε καμιά κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση οι πέντε γενικευμένες συντεταγμένες εξακολουθούν να μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές που μπορούσαν να πάρουν και πριν, παρόλο που τώρα υπάρχει ο περιορισμός της μη ολίσθησης. Τονίζουμε ότι ο θεσικός χώρος μένει ο ίδιος, με τις ίδιες διαστάσεις, όμως οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις δεν μπορεί να επιλεγούν αυθαίρετα, δεν είναι ανεξάρτητες. Αν οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις δεν είναι ανεξάρτητες, τότε συμπεραίνουμε ότι και οι αντίστοιχες ταχύτητες δεν θα είναι ανεξάρτητες. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που ο δίσκος κινείται έτσι ώστε το επίπεδό του να είναι συνεχώς κατακόρυφο, $\psi = \pi/2$, τώρα οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι τέσσερις, οι x, y, θ, φ. Είναι πιο βολικό να ξεκινήσουμε με την δέσμευση για τις ταχύτητες που είναι γνωστή από τη Γενική Φυσική. Οι συντεταγμένες x, y του κέντρου του δίσκου είναι ίδιες με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του σημείου επαφής P. Επομένως έχουμε για την τιμή της ταχύτητας του κέντρου του δίσκου και του σημείου επαφής P

$$\upsilon = a\dot{\varphi}\,.$$

Η διανυσματική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ βρίσκεται στο επίπεδο του δίσκου και είναι οριζόντια, έχουμε

$$\dot{x} = \upsilon\cos\theta = a\dot{\varphi}\cos\theta,\ \dot{y} = \upsilon\sin\theta = a\dot{\varphi}\sin\theta\,.$$

Από τις τελευταίες βρίσκουμε για στοιχειώδεις μετατοπίσεις ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x - a\cos\theta\mathrm{d}\varphi &= 0 \\ \mathrm{d}y - a\sin\theta\mathrm{d}\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Αυτό είναι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του δεσμού (περιορισμού) μεταξύ των στοιχειωδών μετατοπίσεων. Βλέπουμε ότι οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Θα δούμε παρακάτω ότι δεν υπάρχει περιορισμός στις τιμές των συντεταγμένων, δηλαδή στον θεσικό χώρο. Αυτό σημαίνει ότι οι διαφορικές εξισώσεις (1.1) δεν μπορούν να ολοκληρωθούν, αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούν να προκύψουν δυο δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων, ισοδύναμες με αυτές τις διαφορικές εξισώσεις. Έχουμε καθαρά κινηματικούς δεσμούς που δεν είναι και γεωμετρικοί δεσμοί.

Γενικώς, είναι δυνατόν οι ίδιοι φυσικοί περιορισμοί να εκφράζονται με διαφορετικές διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, οι παραπάνω φυσικοί περιορισμοί, μπορούν να εκφραστούν με τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, που περιέχουν και μη γραμμικά διαφορικά, οπότε αντί για τις Εξ. (1.1) έχουμε τις εξισώσεις

$$(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 - a^2(\mathrm{d}\varphi)^2 = 0,\ \ \sin\theta\mathrm{d}x - \cos\theta\mathrm{d}y = 0 \tag{1.2}$$

Η πρώτη εξίσωση εκφράζει τη μη ύπαρξη ολίσθησης στο επίπεδο κύλισης και η δεύτερη την μη ύπαρξη ολίσθησης στο κάθετο προς το επίπεδο κύλισης, επίπεδο.Σε αυτό το σημείο εισάγουμε μερικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες είναι χρήσιμες στην περιοχή αυτή της Μηχανικής με δεσμούς. Οι περισσότεροι δεσμοί της Μηχανικής εκφράζονται με τις διαφορικές εξισώσεις που θα δούμε παρακάτω.

Οι γραμμικές ως προς τα διαφορικά εκφράσεις

$$\sum_{i=1}^{m} C_{li}(z_1,z_2,...,z_m)\mathrm{d}z_i\ ,\ l = 1,2,...,M$$

λέγονται διαφορικές εκφράσεις του Pfaff, προς τιμή του Γερμανού μαθηματικού που τις εισήγαγε. Υποθέτουμε ότι οι εκφράσεις αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις (1.3) προκύπτουν από τις παραπάνω M διαφορικές εκφράσεις,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} C_{li}(z_1,z_2,...,z_m)\mathrm{d}z_i = 0,\ l = 1,2,...,M\\ &M < m\end{aligned} \tag{1.3}$$

Αυτές λέγονται (διαφορικές) εξισώσεις του Pfaff και αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων που θα θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Είναι ένα πλήθος M δεσμευτικών σχέσεων που πρέπει να είναι μικρότερο του πλήθους m των μεταβλητών ώστε μερικά από τα διαφορικά $\mathrm{d}z$ να μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των άλλων. Αν $M = m$ τότε όλα τα $\mathrm{d}z$ είναι καθορισμένα, είναι συναρτήσεις μόνο των z . Αν υπάρχουν περισσότερες σχέσεις ή δεν θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ή δεν θα είναι συμβατές, δηλαδή δεν θα ισχύουν όλες μαζί.

Η ανεξαρτησία μεταξύ των διαφορικών αυτών εξισώσεων πλήθους M σημαίνει ότι η μήτρα $M \times m$ των συντελεστών C_{li} στην Εξ. (1.3) είναι τάξης M .

Μπορεί πάντοτε να βρεθούν τροχιές (καμπύλες, λύσεις) στον χώρο των m διαστάσεων των μεταβλητών z, που πληρούν το παραπάνω σύστημα, Εξ. (1.3). Αυτές οι καμπύλες μπορεί να πάρουν την παρακάτω παραμετρική μορφή και συνηθίζεται να τις ονομάζουν μη γνήσιες (καταχρηστικές) λύσεις,

$$z(\lambda) = \left(z_1(\lambda), z_2(\lambda), ..., z_m(\lambda)\right) \tag{1.4}$$

Ισχύει ο εξής ορισμός: Οι M το πλήθος Εξ. (1.3) είναι πλήρως (όλες μαζί) ολοκληρώσιμες αν υπάρχουν M αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών z που τις πληρούν, ή καλύτερα, είναι ισοδυναμές τους. Οι σχέσεις αυτές έχουν την παρακάτω μορφή και συνηθίζεται να λέγονται γνήσιες (αλγεβρικές) λύσεις,

$$h_l(z_1, z_2, ..., z_m) = c_l \tag{1.5}$$

Πρόκειται για «επιφάνειες» σε πολυδιάστατο χώρο.

Η c_l είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Η κάθε σταθερά παίρνει ένα συνεχές σύνολο τιμών. Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε M ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς των διαφορικών εξισώσεων (1.3), με πολλαπλασιαστές κατάλληλες συναρτήσεις των z, καταλήγουμε σε διαφορικές εξισώσεις που η καθεμιά είναι ολικό διαφορικό οπότε οδηγούνται σε M σχέσεις της μορφής, (1.5). Αυτή είναι η έννοια ολοκληρωσιμότητας τύπου Frobenius. Γενικώς υπάρχουν λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους, οπότε με τη συνήθη έννοια, το σύστημα είναι απροσδιόριστο. Λέμε τότε πως έχουμε λύσεις του συστήματος υπό μορφή επιφανειών στον χώρο των m διαστάσεων. Όταν δεν είναι ολοκληρώσιμες δεν υπάρχουν τέτοιες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών αλλά υπάρχουν μόνο λύσεις-τροχιές της μορφής (1.4). Για την πλήρη μελέτη του θέματος απαιτούνται προχωρημένες γνώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας που ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτού του πονήματος.

Θα δούμε αργότερα, την έννοια ολοκληρωσιμότητας συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, όπου προσδιορίζονται αναλλοίωτες (διατηρούμενες) ποσότητες. Στη Μηχανική τέτοια είναι τα ολοκληρώματα κίνησης και σχετίζονται με την εύρεση λύσεων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, π.χ. διατηρούμενη ενέργεια. Αυτή λέγεται ολοκληρωσιμότητα Liouville.

Για κάθε l οι Εξ. (1.5) αντιπροσωπεύουν μια μονοπαραμετρική οικογένεια υπερεπιφανειών, διάστασης $m-1$, που είναι εμβαπτισμένες μέσα σε χώρο διάστασης m. Αυτό ισχύει διότι όπως είπαμε η κάθε μια σταθερά c_l που ανήκει σε συγκεκριμένη σχέση των Εξ. (1.5) παίρνει διάφορες τιμές, ενώ η συναρτησιακή μορφή h_l παραμένει ίδια. Οι υπερεπιφάνειες της μονοπαραμετρικής οικογένειας (δεδομένο l, διάφορες τιμές του c_l) δεν τέμνονται μεταξύ τους. Η τομή M τέτοιων υπερεπιφανειών, με διαφορετικά l, είναι υπόχωρος $m-M$ διαστάσεων, του χώρου των m διαστάσεων.

Όταν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι πλήρως ολοκληρώσιμο, τότε οι καμπύλες των Εξ. (1.4) (μη γνήσιες λύσεις, καταχρηστικές) βρίσκονται σε αυτόν τον υπόχωρο.

Για το πλήρως ολοκληρώσιμο σύστημα ισχύει ένα ή συνδυασμός από τα παρακάτω:

α) η κάθε διαφορική έκφραση είναι ολικό διαφορικό ή μπορεί να γίνει ολικό διαφορικό με πολλαπλασιασμό επί κατάλληλο, μη μηδενικό ολοκληρωτικό παράγοντα (ο οποίος είναι, γενικώς, συνάρτηση των μεταβλητών).

β) υπάρχουν γραμμικοί συνδυασμοί των Εξ. (1.3), μετά από πολλαπλασιασμό τους με παράγοντες που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών, οι οποίοι γραμμικοί συνδυασμοί είναι ολικά διαφορικά.

Μπορούμε να καταλάβουμε ότι το δεύτερο περιλαμβάνει το πρώτο, ως ειδική περίπτωση.

Εκτός από την σχετικά απλή περίπτωση μιας (μοναδικής) διαφορικής εξίσωσης, η μελέτη του προβλήματος που αναφέρεται σε σύστημα (πολλών) διαφορικών εξισώσεων είναι γενικώς πολύπλοκο.

Μπορεί μέρος του συστήματος να είναι ολοκληρώσιμο, με την ανωτέρω έννοια, ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις του να μην είναι. Το σύστημα τότε είναι μερικώς ολοκληρώσιμο.

Για σύστημα το οποίο είναι πλήρως ολοκληρώσιμο, σε κάθε σημείο του χώρου υπάρχουν γειτονικά σημεία που δεν ενώνονται με αυτό ακολουθώντας τις διαδρομές (1.4) , οι οποίες πληρούν τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις. Αυτό συμβαίνει διότι οι λύσεις θα βρίσκονται πάνω στις «τομές» M υπερεπιφανειών διάστασης η κάθε μια ίσης με $m-1$. Η κάθε μια υπερεπιφάνεια ανήκει σε μια από τις M οικογένειες υπερεπιφανειών. Το αρχικό σημείο βρίσκεται πάνω σε κάποια τομή από όπου περνά λύση. Όποια σημεία (ακόμη και πολύ γειτονικά στο αρχικό) δεν βρίσκονται πάνω σε τέτοιες τομές δεν μπορούν να ενωθούν με το αρχικό γιατί η λύση δεν μπορεί να βγει έξω από αυτόν τον υπόχωρο.

Όσα αναφέρουμε εδώ, έχουν εφαρμογή και στη θερμοδυναμική. Σχετίζονται με το θεώρημα του Καραθεοδωρή, το οποίο χρησιμοποίησε για να αναδιατυπώσει το Δεύτερο Θερμοδυναμικό Αξίωμα.

Μια (μοναδική) διαφορική εξίσωση μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη, με την παραπάνω έννοια, χωρίς να είναι ολικό διαφορικό, αυτό σημαίνει ότι μπορεί να γίνει ολικό διαφορικό αν πολλαπλασιαστεί επί κάποιον κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα.

Αν υπάρχει ένας ολοκληρωτικός παράγοντας μπορεί να βρεθεί άπειρο πλήθος ολοκληρωτικών παραγόντων.

Για το πλήθος L των ολοκληρωμάτων (αν υπάρχουν), ισχύει $L \leq M$, όπου M το πλήθος των ανεξάρτητων διαφορικών εξισώσεων. Το σύστημα μπορεί να είναι πλήρως $(L = M)$, μερικώς $(L < M)$ ή καθόλου ολοκληρώσιμο $(L = 0)$.

Παρόλο που δεν έχουμε εισαγάγει ακόμη αυστηρά την έννοια των γενικευμένων συντεταγμένων θα χρησιμοποιούμε το καθιερωμένο σύμβολό τους, δηλαδή το q, για να δηλώσουμε συντεταγμένες που είναι και οι καρτεσιανές αλλά και οι σφαιρικές, οι κυλινδρικές κ.α. Στη Μηχανική που θα μας απασχολήσει εδώ, θα γράφουμε τα ολοκληρώματα των διαφορικών εξισώσεων των δεσμών στη μορφή

$$f_l(q_1, q_2, ..., q_m, t) = 0 \tag{1.6}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι δεσμοί μπορεί να εξαρτώνται και από τον χρόνο. Η σχέση (1.6), για δεδομένη χρονική στιγμή, μας λέει ότι το σημείο του χώρου των θέσεων, δηλαδή του θεσικού χώρου $(q_1, q_2, ..., q_m)$ είναι δέσμιο να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διάστασης m που παριστάνει αυτή η σχέση, όπου ο χρόνος είναι μια σταθερή κάθε φορά παράμετρος. Επίσης η σχέση (1.6) παριστάνει μια «επιφάνεια» στον χώρο διάστασης $m+1$, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τις m συντεταγμένες του θεσικού χώρου μαζί με τη μια διάσταση του χρόνου.

Για την ειδική περίπτωση που αναφέραμε προηγουμένως, του κυλιόμενου κατακόρυφου δίσκου χωρίς ολίσθηση, όπου δεν υπεισέρχεται ο χρόνος, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι δεν υπάρχει δεσμευτική σχέση μεταξύ των γενικευμένων συντεταγμένων, οι συντεταγμένες μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές που θα έπαιρναν αν δεν υπήρχαν οι δεσμευτικές σχέσεις. Αυτό φαίνεται με τον παρακάτω συλλογισμό για αυτό το ειδικό παράδειγμα.

Έστω ότι έχουμε δεδομένα τα x, y, θ που προφανώς μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Ισχυριζόμαστε ότι το φ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Πράγματι, ο δίσκος μπορεί να κυλίσει (χωρίς ολίσθηση) διαγράφοντας, για παράδειγμα, κύκλο αυθαίρετης ακτίνας R, του οποίου το κέντρο είναι πάνω στην κάθετο στο επίπεδό του στο σημείο επαφής του με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ πληρούνται οι συνθήκες των δεσμών. Κατά την κίνηση, το επίπεδο του δίσκου είναι συνεχώς κάθετο στην ακτίνα του διαγραφόμενου κύκλου η οποία περνά από το σημείο επαφής. Αυτό σημαίνει ότι ο δίσκος περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το σημείο επαφής και το θ μεταβάλλεται. Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος διαγράφει έναν πλήρη κύκλο στο οριζόντιο επίπεδο. Προφανώς τα x, y, θ θα έχουν και πάλι τις τιμές που είχαν όταν ξεκίνησε η μετατόπιση. Είναι ευνόητο ότι διαλέγοντας κατάλληλα την ακτίνα R του κύκλου περιστροφής μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε φ για δεδομένα x, y, θ. Αυτό δείχνει ότι δεν υπάρχει δεσμευτική σχέση μεταξύ των x, y, φ, θ. Το ίδιο ισχύει για απειροστή μετατόπιση, δηλαδή αν είμαστε σε κάποια θέση (x, y, φ, θ) και θέλουμε να πάμε στην απείρως κοντινή γειτονική θέση $(x, y, \varphi + \mathrm{d}\varphi, \theta)$, μπορούμε να το επιτύχουμε διαλέγοντας κύκλο κατάλληλης ακτίνας R στον οποίο να κινηθεί κατά συνεχή τρόπο ο δίσκος, όπως πριν, έτσι που τα x, y, θ να έχουν τελικώς τις αρχικές τους τιμές και το φ να αποκτήσει την τιμή $\varphi + \mathrm{d}\varphi$. Αν οι δεσμοί, μεταξύ των (γενικευμένων) συντεταγμένων, δίνονται από αλγεβρικές εξισώσεις της παρακάτω μορφής (ή μπορεί να αναχθούν σε τέτοιες),

$$f_k(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0 \quad k = 1, 2, ..., M \tag{1.7}$$

τότε λέμε ότι οι δεσμοί είναι ολόνομοι (holonomic), ο όρος είναι διεθνής και προέρχεται από την ελληνική γλώσσα και σημαίνει κάτι που είναι «σύμφωνα με τον νόμο». Οι δεσμευτικές σχέσεις και οι δεσμοί αυτής της μορφής λέγονται γεωμετρικής μορφής. Σε όλες τις περιπτώσεις σχέσεων δεσμών, οι σχέσεις που λαμβάνουμε υπόψη πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Όλοι οι άλλοι δεσμοί, που δεν δίνονται σε αυτή τη μορφή ή δίνονται σε μορφή που δεν μπορεί να αναχθεί στη μορφή αυτή, λέγονται μη ολόνομοι δεσμοί. Τέτοιοι είναι και οι δεσμοί με ανισότητες που όμως δεν διαπραγματευόμαστε σε αυτό το πόνημα.

Αξίζει να συνοψίσουμε την εξής ουσιώδη διαφορά μεταξύ ολόνομων και μη ολόνομων δεσμών: Η διάσταση του θεσικού χώρου μειώνεται όταν υπάρχουν ολόνομοι δεσμοί, ενώ αυτό δεν συμβαίνει για μη ολόνομους δεσμούς.

Είναι ευνόητο ότι, οι τελικοί θεσικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, με n το πλήθος αρχικές συντεταγμένες και M ολόνομους δεσμούς, είναι $n-M$, άρα πρέπει $n>M$, ώστε το σύστημα να έχει κάποιους θεσικούς βαθμούς ελευθερίας, ώστε να μπορεί να κινηθεί υπό την επίδραση (ενεργητικών) δυνάμεων, δηλαδή δυνάμεων που δεν οφείλονται στους δεσμούς.

Γενικές σχέσεις που περιέχουν και γενικευμένες ταχύτητες, δηλαδή είναι της μορφής,

$$g_k(q, \dot{q}, t) = 0, \quad k = 1, 2, ..., M \tag{1.8}$$

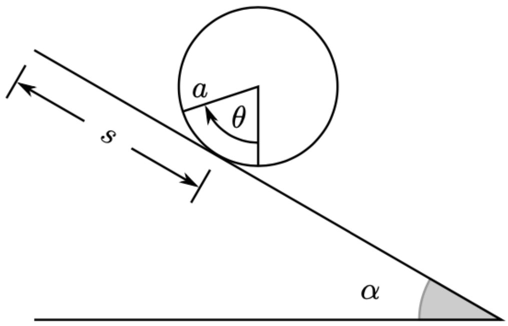
λέγονται σχέσεις δεσμών σε κινηματική μορφή. Αν οι σχέσεις αυτές δεν μπορούν να ολοκληρωθούν και να οδηγήσουν σε εξισώσεις της μορφής της Εξ. (1.7), οπότε θα ανάγονταν σε ολόνομους δεσμούς, εκφράζουν μη ολόνομους δεσμούς. Σε αντίθετη περίπτωση εκφράζουν ολόνομους δεσμούς.

Ειδική περίπτωση των Εξ. (1.8) είναι αυτή των Εξ. (1.9) που είναι γραμμικές ως προς τις ταχύτητες οπότε μπορούν να γραφτούν στη μορφή,

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ki}(q,t)\dot{q}_i + A_k(q,t) = 0 \quad k = 1,2,...,M \tag{1.9}$$

Ας δούμε την παρακάτω απλή περίπτωση. Έστω κυκλικός δίσκος ακτίνας *a* που κυλίεται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος ευθείας όπως στο Σχ. 1.2. Οι συντεταγμένες είναι οι (θ, s). Ο περιορισμός για κύλιση χωρίς ολίσθηση δίνει

$$\begin{aligned} \upsilon &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \mathrm{d}s &- a\mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$



Σχήμα 1.2 *Δίσκος που κυλίεται πάνω σε μια ευθεία.*

Εύκολα με ολοκλήρωση, παίρνουμε μια σχέση μεταξύ των δυο γενικευμένων συντεταγμένων, τη σχέση $s - s_0 + a\theta_0 - a\theta = 0$. Ο κάτω δείκτης 0 δηλώνει αρχικές τιμές των αντίστοιχων μεγεθών. Αυτή η σχέση είναι της μορφής της Εξ. (1.7), άρα το σύστημα είναι ολόνομο, υπάρχει περιορισμός μεταξύ των γενικευμένων συντεταγμένων. Η μια συντεταγμένη μπορεί να εξαλειφθεί και να μείνει μόνο μια (γνήσια) συντεταγμένη. Αν η κύλιση γίνονταν με ολίσθηση τότε δεν θα υπήρχε δεσμευτική σχέση και ο θεσικός χώρος θα είχε διάσταση δύο. Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από το αρχικό σημείο του χώρου των δυο διαστάσεων δεν μπορούμε να πάμε σε οποιοδήποτε αυθαίρετο γειτονικό του σημείο, εφόσον πληρούται η δεσμευτική σχέση στον χώρο των δυο διαστάσεων, δηλαδή δε μπορούμε να πάμε (χωρίς ολίσθηση) από το σημείο s, θ στο γειτονικό αυθαίρετο σημείο $s + \Delta s, \theta + \Delta\theta$. Δεν υπάρχει ορισμός για το τι είναι μη ολόνομος δεσμός, απλά δεσμός που δεν είναι ολόνομος είναι μη ολόνομος δεσμός. Θα ασχοληθούμε κυρίως με την ειδική κατηγορία δεσμών που περιγράφονται με διαφορικές, γραμμικές ως προς τις ταχύτητες, εξισώσεις ή με τη μορφή τους με διαφορικά (δηλαδή με εξισώσεις Pfaff), όπως οι παρακάτω:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\dot{q}_k + A_l(q,t) = 0 \quad l = 1,2,...,M \quad M < n \\ \text{ή } &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\mathrm{d}q_k + A_l(q,t)\mathrm{d}t = 0 \quad l = 1,2,...,M \quad M < n\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Τονίζουμε ξανά ότι αυτές οι διαφορικές εξισώσεις (κινηματική μορφή), εκφράζουν ολόνομους δεσμούς αν μπορεί να οδηγήσουν σε ολοκληρώματα, που γενικώς συνδέουν γενικευμένες συντεταγμένες και τον χρόνο. Αν δεν μπορούν να οδηγήσουν σε τέτοιες σχέσεις μεταξύ συντεταγμένων και του χρόνου, τότε εκφράζουν μη ολόνομους δεσμούς. Αν δεν υπάρχει ο όρος με το $A_l(q,t)$, τότε ο δεσμός λέγεται καταστατικός, αν υπάρχει αυτός ο όρος τότε έχουμε ακαταστατικό δεσμό. Αν όλοι οι δεσμοί συστήματος είναι του πρώτου τύπου το σύστημα λέγεται καταστατικό, αν όλοι είναι του δεύτερου τύπου το σύστημα λέγεται ακαταστατικό.

Αν έχουμε τις ολόνομες σχέσεις, Εξ. (1.7), μπορούμε να πάρουμε τις διαφορικές εξισώσεις με διαφόριση

$$\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\mathrm{d}q_k + A_l(q,t)\mathrm{d}t = 0 \quad l=1,2,...,M$$
$$A_{lk}(q,t) = \frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_k}, \quad A_l(q,t) = \frac{\partial f_l(q,t)}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Κατά τη διαφόριση είναι ευνόητο ότι ο δεσμός πληρούται και για τη μετατοπισμένη θέση, τα (q,t) δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τα $(\mathrm{d}q,\mathrm{d}t)$. Δηλαδή τα σημεία βρίσκονται πάνω σε «υπερεπιφάνειες» που καθορίζουν οι δεσμευτικές σχέσεις. Με άλλα λόγια $f_l(q+dq,t+dt)=0=f(q,t)$. Αν ο δεσμός δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, λέγεται σκληρόνομος (scleronomic) δεσμός, ο όρος είναι διεθνής, προέρχεται από τα ελληνικά και θα πει κάτι «σκληρό», στέρεο, δηλαδή κάτι που δεν εξαρτάται (άμεσα) από τον χρόνο. Αν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο λέγεται ρεόνομος (rheonomic) δεσμός, και πάλι από τα ελληνικά, και σημαίνει κάτι «ρευστό», δηλαδή κάτι που εξαρτάται (άμεσα) από τον χρόνο.

Ο χρόνος μπορεί να εμφανίζεται και σε δεσμευτικές σχέσεις που είναι ανισότητες, οπότε και σε αυτή την περίπτωση μιλούμε για σκληρόνομους και ρεόνομους δεσμούς. Αν οι διαφορικές εξισώσεις δεσμών, που σχετίζονται με διαφορικές εκφράσεις που αρχικά δεν είναι ολικά διαφορικά, μπορεί να μετατραπούν οι ίδιες ή γραμμικοί συνδυασμοί τους σε ολικά διαφορικά, αφού στη συνέχεια πολλαπλασιαστούν επί κατάλληλες συναρτήσεις, τότε ουσιαστικά πρόκειται για ολόνομους δεσμούς. Πρόκειται για ένα είδος «κρυμμένων» ολόνομων δεσμών. Επανερχόμαστε στον συμβολισμό της Εξ. (1.3), μόνο που αλλάζουμε το z με το u, οπότε καταλήγουμε στις

$$u_l = q_l \quad l=1,2,...,n \qquad m=n+1 \quad u_m = t.$$

Οι διαφορικές εξισώσεις των Εξ. (1.11) παίρνουν τη μορφή

$$\sum_{k=1}^{m} B_{lk}(u)\mathrm{d}u_k = 0,\ B_{lk} = A_{lk}\ k=1,2,...,n\ ,\ B_{lm} = A_l\ l=1,2,...,M \tag{1.13}$$

Αν έχουμε μόνο μια μοναδική δεσμευτική σχέση της μορφής

$$\sum_{r=1}^{m} B_r \mathrm{d}u_r = 0 \tag{1.14}$$

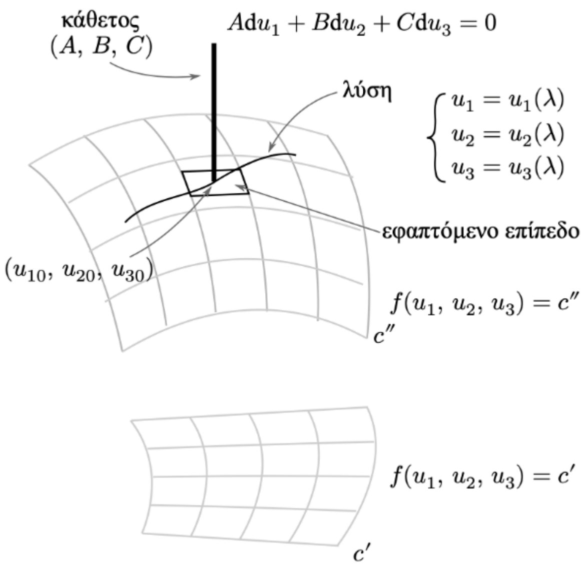
το κριτήριο ολοκληρωσιμότητάς της είναι σχετικά απλό, συγκεκριμένα πρέπει να ισχύει

$$B_s\left(\frac{\partial B_l}{\partial u_r} - \frac{\partial B_r}{\partial u_l}\right) + B_l\left(\frac{\partial B_r}{\partial u_s} - \frac{\partial B_s}{\partial u_r}\right) + B_r\left(\frac{\partial B_s}{\partial u_l} - \frac{\partial B_l}{\partial u_s}\right) = 0$$
$$r,l,s = 1,2,...,m. \tag{1.15}$$

Υπάρχουν $m(m-1)(m-2)/6$ εξισώσεις εκ των οποίων $(m-1)(m-2)/2$ είναι ανεξάρτητες, $m>2$. Αυτό σημαίνει πως υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που κάνει τη διαφορική εξίσωση ολικό διαφορικό. Για μια δεσμευτική σχέση με τρεις μεταβλητές, όπου η μια μπορεί να είναι ο χρόνος, έχουμε για το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας τη σχέση

$$A\mathrm{d}u_1 + B\mathrm{d}u_2 + C\mathrm{d}u_3 = 0,\ A\left(\frac{\partial B}{\partial u_3} - \frac{\partial C}{\partial u_2}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial u_1} - \frac{\partial A}{\partial u_3}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial u_2} - \frac{\partial B}{\partial u_1}\right) = 0. \tag{1.16}$$

Για δυο μεταβλητές, $A(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1 + B(u_1,u_2)\mathrm{d}u_2 = 0$, αποδεικνύεται ότι, αν το διαφορικό δεν είναι τέλειο εξ αρχής, πάντα μπορεί να βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας που το κάνει τέλειο διαφορικό. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να διαπιστωθεί ότι πράγματι ισχύει πάντα το κριτήριο (1.16). Στην περίπτωση μιας ολοκληρώσιμης διαφορικής εξίσωσης τύπου Pfaff (ή της αντίστοιχης με τις ταχύτητες) τριών μεταβλητών, έχουμε μια εικόνα όπου φαίνεται εύκολα το γεωμετρικό νόημα της διαδικασίας. Η γεωμετρική κατανόηση είναι ακόμη καλύτερη αν οι τρεις μεταβλητές είναι συντεταγμένες θέσης, δηλαδή αν δεν υπάρχει ο χρόνος στις δεσμευτικές σχέσεις, βλέπε Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3 *Γεωμετρική εικόνα μιας ολοκληρώσιμης διαφορικής εξίσωσης.*

Το ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης, θα έχει και μια σταθερά ολοκλήρωσης c, δηλαδή θα έχει τη μορφή $f(u_1,u_2,u_3)=c$. Δεν «απορροφούμε» τη σταθερά μέσα στη συνάρτηση f και στο Σχήμα 1.3 φαίνεται η επιφάνεια που παριστάνει η προηγούμενη σχέση, για δυο τιμές c',c'' της σταθεράς c. Έχουμε δυο μη τεμνόμενες δισδιάστατες επιφάνειες. Στο σημείο u_{10},u_{20},u_{30} της επιφάνειας c'' έχει σχεδιαστεί το στοιχειώδες εφαπτόμενο επίπεδο και η κάθετος που αντιπροσωπεύει διάνυσμα $\vec{V}=(A,B,C)$, δηλαδή διάνυσμα με συνιστώσες τα A,B,C. Πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο βρίσκονται τα $\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}u_3$ που είναι κατά μήκος της, παραμετροποιημένης με παράμετρο λ, λύσης $u_1=u_1(\lambda),u_2=u_2(\lambda),u_3=u_3(\lambda)$ η οποία περνά από το εν λόγω σημείο. Η καθετότητα υπάρχει γιατί ισχύει η διαφορική εξίσωση $A\mathrm{d}u_1+B\mathrm{d}u_2+C\mathrm{d}u_3=0$. Μπορούμε να γράψουμε και τη σχέση

$$\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0,\quad \mathrm{d}\vec{r}=(\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}u_3)\,. \tag{1.17}$$

Το $\mathrm{d}\vec{r}$ είναι πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι όλες οι λύσεις που περνούν από το ανωτέρω σημείο είναι κάθετες στο «διάνυσμα» A,B,C και μπορούν και σχηματίζουν ένα επίπεδο εφαπτόμενο στην επιφάνεια c''. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση μη ολοκληρωσιμότητας ενώ στο κάθε σημείο ισχύει η καθετότητα των διανυσμάτων (A,B,C) $(\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}u_3)$, δεν υπάρχει πεπερασμένη επιφάνεια πάνω στην οποία να βρίσκονται συνεχώς τα $(\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}u_3)$. Δεν υπάρχει γενικός τρόπος υπολογισμού των ολοκληρωτικών παραγόντων.

Το κριτήριο της Εξ. (1.16) σημαίνει ότι αν $\vec{V}=(A,B,C)$ πρέπει

$$\vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0\,. \tag{1.18}$$

Η Εξ. (1.15) είναι γενίκευση των Εξ. (1.16) και (1.18).
Αν η διαφορική εξίσωση είναι από την αρχή ολικό διαφορικό τότε ισχύουν οι γνωστές σχέσεις

$$\frac{\partial B}{\partial u_3}=\frac{\partial C}{\partial u_2},\ \frac{\partial C}{\partial u_1}=\frac{\partial A}{\partial u_3},\ \frac{\partial A}{\partial u_2}=\frac{\partial B}{\partial u_1}. \tag{1.19}$$

Όταν ισχύουν αυτές οι σχέσεις τότε το κριτήριο (1.16) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

Οι σχέσεις (1.19) λένε ότι το $\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ άρα το αντίστοιχο πεδίο είναι αστρόβιλο, επομένως προέρχεται από δυναμικό, άρα $\vec{V}=\vec{\nabla}f$. Δηλαδή

$$A=\frac{\partial f}{\partial u_1},\ B=\frac{\partial f}{\partial u_2},\ A=\frac{\partial f}{\partial u_3}.$$

Η κλίση $\vec{V}=\vec{\nabla}f$ είναι κάθετη στην επιφάνεια $f(u_1,u_2,u_3)=c$. Αυτά είναι ειδική περίπτωση της Εξ. (1.12). Για να είναι πλήρες διαφορικό η διαφορική έκφραση της μοναδικής Εξ. (1.14), όπου υπάρχουν πολλές μεταβλητές (η μιία μπορεί να είναι ο χρόνος), οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες, οι αντίστοιχες των Εξ. (1.19) είναι οι εξής

$$\frac{\partial B_r}{\partial u_s}=\frac{\partial B_s}{\partial u_r}\quad r,s=1,2,...,m. \tag{1.20}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση $f(u)$ που το ολικό διαφορικό της είναι η διαφορική έκφραση της Εξ. (1.14). Η εύρεση της συνάρτησης αυτής μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους που εξαρτώνται από τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης. Μπορεί κάποιος να κάνει χρήση του γεγονότος ότι $\frac{\partial f}{\partial u_i}=B_i$. Επίσης ότι το ολοκλήρωμα μεταξύ δυο σημείων δεν εξαρτάται από τη διαδρομή (αστρόβιλο πεδίο) κ.λπ.

Στη γενική περίπτωση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1.13) που οι διαφορικές εκφράσεις τους δεν είναι κατ' ανάγκη ολικά διαφορικά, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε οι διαφορικές εξισώσεις να είναι πλήρως ολοκληρώσιμες ως σύστημα εξισώσεων, είναι οι συνθήκες του Frobenius,

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial B_{ls}}{\partial u_r}-\frac{\partial B_{lr}}{\partial u_s}\right)x_r y_s=0\ l=1,2,\dots,M \tag{1.21}$$

όπου τα x_r, y_s είναι δυο σύνολα λύσεων των

$$\sum_{r=1}^{m}B_{lr}x_r=0\ .\ l=1,2,...,M \tag{1.22}$$

Επειδή οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους, υπάρχουν γενικώς περισσότερες από μια λύσεις. Αν όλες ή μερικές από τις διαφορικές εκφράσεις του Pfaff, που αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, είναι πλήρη διαφορικά τότε για κάθε μια από αυτές ισχύει το κριτήριο της Εξ. (1.20).

Το κριτήριο του Frobenius, στην παραπάνω μορφή του, είναι μεν πολύ δύσκολο να εφαρμοστεί στην πράξη, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί.

Μια πιο χρηστική μορφή κριτηρίου Frobenius είναι αυτή που στηρίζεται στις διαφορικές μορφές (differential forms) που εισήγαγε ο Cartan. Το Παράρτημα Π1 είναι μια απλή χρήσιμη εισαγωγή στο θέμα.

Έστω ότι έχουμε σύστημα M διαφορικών εξισώσεων Pfaff . Το διαφορικό μέρος είναι διαφορικές μορφές-1 (βαθμού 1) σε χώρο n διαστάσεων, δηλαδή

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \mathrm{d}u_j \quad i = 1, 2, ..., M \ , \quad M < n \, . \tag{1.23}$$

Αν οι διαφορικές εξισώσεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, τότε η διαφορική μορφή-M (βαθμού M) που είναι γινόμενο-Λ (wedge product) των ανωτέρω M διαφορικών μορφών-1, είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή

$$\omega_1 \Lambda \omega_2 \Lambda ... \Lambda \omega_M \neq 0 \, . \tag{1.24}$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι διαφορικές εξισώσεις ως σύστημα είναι (πλήρως) ολοκληρώσιμες, αν ισχύει ταυτοτικά

$$\mathrm{d}\omega_i \Lambda \omega_1 \Lambda ... \Lambda \omega_M = 0, \ i = 1, 2, ..., M \, . \tag{1.25}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν M ανεξάρτητες σχέσεις, ολοκληρώματα, όπως στην (1.5). Αν ο χώρος των ανεξάρτητων μεταβλητών $(u_1, u_2, ..., u_n)$ είναι απλά συνεκτικός (θέτοντάς το απλά, αν δεν έχει τρύπες), τότε αν ισχύει ταυτοτικά η σχέση $\mathrm{d}\omega_i = 0$, αυτό οδηγεί στο ότι το ω_i είναι ολικό διαφορικό, Εξ. (1.20), και η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση, είναι ολοκληρώσιμη από μόνη της. Αυτά σημαίνουν ότι υπάρχει συνάρτηση $f = f(u_1, u_2, ..., u_n)$ της οποίας το ολικό διαφορικό, ισούται με το συγκεκριμένο ω , δηλαδή $df = \omega$. Αφού εξασφαλιστεί η ύπαρξη τέτοιας συνάρτησης, η εύρεσή της μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, ανάλογα με την έκφραση της διαφορικής μορφής όπως αναφέραμε στα προηγούμενα. Αν έχουμε μόνο μια εξίσωση τότε $M = 1$ και η Εξ. (1.25) γίνεται $\mathrm{d}\omega \Lambda \omega = 0$. Το κριτήριο της ολοκληρωσιμότητας είναι απαραίτητο να ισχύει, για να υπάρχουν αυτές που λέμε γνήσιες λύσεις που αναφέραμε προηγουμένως, δεν θα επεκταθούμε περισσότερο. Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε την ουσιώδη διαφορά λύσεων στην περίπτωση ολοκληρώσιμων και μη ολοκληρώσιμων δεσμών. Θα περιοριστούμε μόνο στη σχετικά απλή περίπτωση με μια διαφορική εξίσωση τριών μεταβλητών.

Η διαφορική εξίσωση είναι

$$A(x, y, z)\mathrm{d}x + B(x, y, z)\mathrm{d}y + C(x, y, z)\mathrm{d}z = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ολοκλήρωμα (επιφάνεια) της μορφής $f(x, y, z) = c$ (η εξίσωση δεν είναι ολοκληρώσιμη, δεν έχει γνήσια λύση). Θα βρούμε καταχρηστικές λύσεις της. Θεωρούμε μια αρκετά αυθαίρετη συνάρτηση

$$\chi(x, y, z) = 0 \, .$$

Αυτή παριστάνει επίσης μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Την διαφορίζουμε και παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \chi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \chi}{\partial z}\mathrm{d}z = 0 \, .$$

Με χρήση των δυο τελευταίων απαλείφουμε μια μεταβλητή και το διαφορικό της από την πρώτη εξίσωση. Διαλέγουμε να απαλείψουμε τα $z, \ \mathrm{d}z$.

Βρίσκουμε

$$\left(C\frac{\partial \chi}{\partial x} - A\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)\mathrm{d}x + \left(C\frac{\partial \chi}{\partial y} - B\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)\mathrm{d}y = 0 \, .$$

Εννοείται ότι έχει αντικατασταθεί και το z συναρτήσει των x, y με χρήση της δεύτερης σχέσης. Αυτή είναι της μορφής

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \ .$$

Αυτή, αν δεν είναι ταυτότητα, έχει πάντα γνήσια λύση της μορφής

$$f_1(x,y) = K = \text{σταθ.}$$

Πρόκειται για επιφάνεια με κυλινδρικό σχήμα (ανεξάρτητη του z). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν λύσεις (τροχιές, γραμμές) της αρχικής διαφορικής εξίσωσης, στον τρισδιάστατο χώρο οι οποίες είναι τομές της αυθαίρετης επιφάνειας που διαλέξαμε και της τελευταίας. Είναι γεγονός ότι αφού η αρχική επιφάνεια είναι αρκετά αυθαίρετη μπορεί να ληφθεί έτσι ώστε η τομή της με την τελευταία να δίνουν καταχρηστικές (τροχιές, λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης) που να ενώνουν δυο οποιαδήποτε σημεία στον χώρο. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν υπάρχει γνήσια λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατόν να ακολουθηθεί η παραπάνω διαδικασία για τις καταχρηστικές λύσεις της. Αυτό συμβαίνει διότι αν επιχειρηθεί να ακολουθηθεί, θα καταλήξουμε στο ότι η μια επιφάνεια είναι η γνωστή γνήσια λύση. Αυτό μπορεί κάποιος να το περιμένει διαισθητικά. Τότε η τελευταία διαφορική εξίσωση με τις δυο μεταβλητές είναι ταυτότητα, επομένως δεν οδηγεί σε γνήσια λύση.

Σε αυτή την περίπτωση οι καταχρηστικές λύσεις είναι τομές της γνήσιας λύσης (της σχετικής επιφάνειας στον τρισδιάστατο χώρο) και οποιασδήποτε άλλης λύσης (επιφάνειας στον τρισδιάστατο χώρο). Σημειώστε πως οι δυο αυτές επιφάνειες δεν έχουν μεταξύ τους εξάρτηση, όπως ισχύει για την προηγούμενη περίπτωση. Το ότι οι καταχρηστικές λύσεις (τροχιές, διαδρομές) βρίσκονται πάνω στην γνήσια λύση, δηλαδή στη συγκεκριμένη επιφάνεια η οποία δεν είναι αυθαίρετη, σημαίνει ότι δεν μπορούν να συνδεθούν δυο σημεία τα οποία δεν βρίσκονται και τα δυο πάνω σε μια τέτοια επιφάνεια, με τροχιές - λύσης λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Συνοψίζουμε λέγοντας ότι, αν η διαφορική εξίσωση έχει γνήσια λύση τότε υπάρχουν σημεία στη γειτονιά κάθε σημείου της τα οποία δεν μπορούν να «συνδεθούν» με αυτό με τροχιές - λύσεις.

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής έδειξε και το αντίστροφο, δηλαδή: Αν στη γειτονιά τυχαίου σημείου περιέχονται σημεία που δεν είναι προσιτά από αυτό κατά μήκος καμπυλών που πληρούν τη δεδομένη διαφορική εξίσωση (τύπου Pfaff), η εξίσωση είναι ολοκληρώσιμη. Σε αυτό στήριξε τη δική του διατύπωση του Δεύτερου Αξιώματος της Θερμοδυναμικής.

1.3 Είδη μετατοπίσεων

Αναφερόμαστε σε δεσμούς που εκφράζονται με εξισώσεις, δηλαδή σε αμφιμερείς δεσμούς. Όπως είδαμε, οι ολόνομοι δεσμοί μειώνουν τη διάσταση του (προσβάσιμου) θεσικού χώρου και την κινητικότητα. Οι μη ολόνομοι δεσμοί δεν μειώνουν τη διάσταση του (προσβάσιμου) θεσικού χώρου αλλά μειώνουν την κινητικότητα. Η διάσταση του θεσικού χώρου ισούται με τους θεσικούς βαθμούς ελευθερίας, που είναι το (ελάχιστο) πλήθος των ανεξάρτητων μεταξύ τους συντεταγμένων που μαζί με τις δεσμευτικές σχέσεις καθορίζουν πλήρως τη θέση όλων των σημείων του συστήματος. Οι κινητικοί βαθμοί ελευθερίας είναι το ελάχιστο πλήθος ανεξάρτητων μετατοπίσεων των γενικευμένων συντεταγμένων που μαζί με τις σχέσεις των δεσμών καθορίζουν πλήρως κάθε στοιχειώδη μετατόπιση όλων των σημείων του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε σύστημα με N σωμάτια και υπάρχουν L μη ολόνομες σχέσεις δεσμών (τύπου Pfaff) καθώς και M ολόνομοι δεσμοί, τότε έχουμε $3N-L-M$ κινητικούς βαθμούς ελευθερίας.

Οι θεσικοί βαθμοί ελευθερίας είναι $3N-M$. Αν υπάρχουν μόνο ολόνομοι δεσμοί τότε τα δυο είδη βαθμών ελευθερίας ταυτίζονται και τότε μπορούμε να μιλούμε απλώς για βαθμούς ελευθερίας, χωρίς άλλον προσδιορισμό. Η κατάσταση ενός μηχανικού συστήματος είναι το σύνολο $(q_1,q_2,...,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n)$. Αυτά είναι σημεία ενός χώρου, του λεγόμενου χώρου των καταστάσεων (καταστατικός χώρος) που έχει διάσταση $2n$.

Στα επόμενα θα αναφερόμαστε σχεδόν αποκλειστικά σε δεσμούς, που είναι ολοκληρωμένοι ολόνομοι και σε δεσμούς που εκφράζονται με την κινηματική τους μορφή των Εξ (1.11). Οι τελευταίοι μπορεί να είναι ολόνομοι ή μη ολόνομοι.

1.3.1. Πραγματική μετατόπιση

Αν για κάποιο σύστημα, οι ποσότητες $(q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))$ είναι λύσεις των εξισώσεων κίνησης, που μαζί με τις ταχύτητες $(\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), ..., \dot{q}_n(t))$ ικανοποιούν και τις εξισώσεις των δεσμών, τότε αυτές αποτελούν πεπερασμένες πραγματικές (θεσικές) μετατοπίσεις του συστήματος (actual displacement). Το σύνολο των $(q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))$ συνηθίζουμε να λέμε ότι αποτελεί ένα διάνυσμα πραγματικής πεπερασμένης μετατόπισης. Το σύνολο των αντίστοιχων απειροστών μετατοπίσεων, $\mathrm{d}q_1, \mathrm{d}q_2, ..., \mathrm{d}q_n$, που βρίσκονται από τις ανωτέρω λύσεις των εξισώσεων κίνησης και ικανοποιούν και τις εξισώσεις των δεσμών, είναι οι απειροστές πραγματικές μετατοπίσεις του συστήματος. Αν δεν υπάρχουν δεσμοί τότε προφανώς δεν χρειάζεται να ικανοποιείται καμιά πρόσθετη εξίσωση δεσμών.

1.3.2. Πιθανή μετατόπιση

Το σύνολο των απειροστών μετατοπίσεων $\mathrm{d}q_k \quad k = 1, 2, ..., n$ ενός συστήματος, που ικανοποιούν τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις των δεσμών,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\mathrm{d}q_k + A_l(q,t)\mathrm{d}t = 0 \quad l = 1, 2, ..., M \\ \text{ή} \quad &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\dot{q}_k + A_l(q,t) = 0 \quad l = 1, 2, ..., M \end{aligned} \tag{1.26}$$

αλλά δεν πληρούν κατ' ανάγκη και τις εξισώσεις κίνησης, λέγονται πιθανές μετατοπίσεις (possible displacements) και το στοιχειώδες διάνυσμα $\mathrm{d}q(\mathrm{d}q_1, \mathrm{d}q_2, ..., \mathrm{d}q_n)$ λέγεται διάνυσμα πιθανής μετατόπισης. Αν δεν υπάρχουν δεσμοί, τότε όλες οι απειροστές μετατοπίσεις θέσης είναι πιθανές μετατοπίσεις. Οι απειροστές πραγματικές μετατοπίσεις είναι μέλη του συνόλου των πιθανών μετατοπίσεων αλλά γενικώς δεν ισχύει το αντίστροφο.

1.3.3. Δυνατή μετατόπιση

Οι δυνατές (ή οιονεί ή εικονικές ή φανταστικές ή δυνητικές) μετατοπίσεις (virtual displacement), είναι απειροστές μετατοπίσεις του συστήματος, που γίνονται με $t = \text{σταθ}\ (\mathrm{d}t = 0)$. Στην περίπτωση που υπάρχουν δεσμοί είναι χρήσιμο να δούμε πως ορίζονται οι δυνατές μετατοπίσεις. Συγκεκριμένα, όταν οι δεσμοί είναι ολόνομοι ή μη ολόνομοι, οι χρήσιμες δυνατές μετατοπίσεις προσδιορίζονται κατά τετριμμένο τρόπο από τις εξισώσεις των δεσμών στη μορφή Pfaff με «πάγωμα» του χρόνου, δηλαδή θέτοντας $t = \text{σταθ.}$, $\mathrm{d}t = 0$. Για τη δυνατή μετατόπιση χρησιμοποιείται το σύμβολο δ αντί του d. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε ότι οι δυνατές μετατοπίσεις, δq, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\delta q_k = 0 \quad l = 1, 2, ..., M \quad . \tag{1.27}$$

Οι δυνατές και οι πιθανές μετατοπίσεις συμπίπτουν για καταστατικά συστήματα όπως και για σκληρόνομα ολόνομα συστήματα.

Ως δυνατές ταχύτητες ορίζονται τα $\delta\dot{q}_k$. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} &\delta q_k = q'_k - q_k, \quad \frac{\mathrm{d}(\delta q_k)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q'_k}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \delta(\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}) \\ &\frac{\mathrm{d}(\delta q_k)}{\mathrm{d}t} = \delta(\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}) = \delta\dot{q}_k, \qquad \mathrm{d}\delta q_k = \delta\mathrm{d}q_k. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Δηλαδή τα δ και d μετατίθενται.

Πιθανή είναι μια κατάσταση $(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις των δεσμών. Οι σχέσεις των δεσμών είναι:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\dot{q}_k + A_l(q,t) = 0 \\ \text{ή} \qquad &f_l(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0 \quad l = 1, 2, ..., M \quad . \end{aligned} \tag{1.29}$$

Αν δεν υπάρχουν δεσμοί, τότε κάθε κατάσταση του συστήματος είναι πιθανή κατάσταση. Αναφέρουμε ότι, αν ένα σύστημα περιγράφεται με διαφορικές εξισώσεις γραμμικές ως προς τις ταχύτητες, οι οποίες δεν είναι ολοκληρώσιμες, μια δυνατή μετατόπιση δεν οδηγεί από πιθανή σε πιθανή κατάσταση, ενώ αν είναι ολόνομο, δηλαδή οι εξισώσεις είναι ολοκληρώσιμες, μια δυνατή μετατόπιση πάντα οδηγεί από πιθανή σε πιθανή κατάσταση. Αν δεν υπάρχουν δεσμοί, κάθε δυνατή μετατόπιση οδηγεί από πιθανή σε πιθανή κατάσταση. Αφού οι δυνατές μετατοπίσεις ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\delta q_k = 0$, αυτές μετατρέπουν τις ανωτέρω εκφράσεις του πρώτου μέλους των δεσμευτικών σχέσεων (1.29), στις αντίστοιχες εκφράσεις

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q+\delta q, t)(\dot{q}_k + \delta\dot{q}_k) + A_l(q+\delta q, t) \\ &f_l(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, ..., q_n+\delta q_n, t). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Για να είναι η προκύπτουσα κατάσταση πιθανή πρέπει αυτές οι εκφράσεις να είναι μηδέν (παραλείποντας διαφορικά δεύτερης τάξης και άνω), δηλαδή πρέπει

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, ..., q_n+\delta q_n, t)(\dot{q}_k + \delta\dot{q}_k) + A_l(q+\delta q, t) = 0 \\ &f_l(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, ..., q_n+\delta q_n, t) = 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Αυτό συμβαίνει μόνο, αν οι δεσμοί είναι ολόνομοι.

Η απόδειξη είναι εύκολη όταν είναι γνωστές οι ολοκληρωμένες σχέσεις. Πράγματι τότε έχουμε

$$f_k(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0 \quad k = 1, 2, ..., M$$

$$f_k(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, ..., q_n+\delta q_n, t) = f_k(q_1, q_2, ..., q_n, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\delta q_i \quad k = 1, 2, ..., M$$

όμως από τον ορισμό των δυνατών μετατοπίσεων, Εξ. (1.27), προκύπτει ότι ο όρος με το άθροισμα είναι μηδέν, άρα

$$f_k(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, ..., q_n+\delta q_n, t) = f_k(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0$$

δηλαδή η δυνατή μετατόπιση οδηγεί στην ίδια σχέση, δηλαδή από πιθανή κατάσταση σε πιθανή κατάσταση.

Η απόδειξη για την πιο γενική περίπτωση διαφορικών σχέσεων οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε ολοκληρωμένες μορφές δεσμευτικών σχέσεων, άρα είναι «κρυμμένες» ολόνομες σχέσεις, στηρίζεται στη χρήση του κριτηρίου του Frobenius. Σημειώνουμε ότι η σταθεροποίηση του χρόνου σημαίνει ότι, όταν ο χρόνος «παγώνει», τα διάφορα μεγέθη κρατούν, κατά την δυνατή μετατόπιση, τις στιγμιαίες τιμές τους (π.χ. οι ταχύτητες).

1.4 Παραλλαγή

Έστω συνάρτηση των συντεταγμένων, των ταχυτήτων και του χρόνου. Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται δυναμικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση και το ολικό διαφορικό της είναι

$$
\begin{aligned}
f &= f(q,\dot{q},t) \\
\mathrm{d}f &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_l}\mathrm{d}q_l + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_l}\mathrm{d}\dot{q}_l + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

Παραλλαγή (variation) της συνάρτησης $f(q,\dot{q},t)$ που λέγεται απλώς και μεταβολή, είναι μεταβολή με τον χρόνο σταθερό, $\mathrm{d}t = 0$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\delta f = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_l}\delta q_l + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_l}\delta\dot{q}_l\ . \tag{1.33}$$

1.5 Δυνατό έργο

Πρέπει να τονίσουμε ότι πολλές φορές το $\mathrm{d}f$ δεν παριστάνει ολικό διαφορικό αλλά απλώς ένα απειροστό μέγεθος. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει πάντα συνάρτηση f της οποίας το απειροστό μέγεθος $\mathrm{d}f$ είναι ολικό διαφορικό. Στα πλαίσια της θερμοδυναμικής αυτό δηλώνεται με μια οριζόντια γραμμή πάνω ή στη μέση του d. Για παράδειγμα η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας που είναι ολικό διαφορικό γράφεται $\mathrm{d}U$, ενώ η στοιχειώδης θερμότητα, που δεν είναι ολικό διαφορικό, γράφεται ως $\overline{\mathrm{d}}Q$. Τέτοιες περιπτώσεις έχουμε και στη μηχανική αλλά δεν έχει καθιερωθεί ένας τέτοιος συμβολισμός και αυτό οδηγεί μερικές φορές σε παρανοήσεις. Ανάλογα ισχύουν στη μηχανική για το δf που μερικές φορές δεν παριστάνει διαφόριση με τον χρόνο σταθερό, αλλά απλώς στοιχειώδη ποσότητα που σχετίζεται με πάγωμα του χρόνου. Δεν έχει καθιερωθεί ο συμβολισμός $\overline{\delta}$ για τη δεύτερη περίπτωση, που απλά παριστάνει στοιχειώδη (απειροστή) ποσότητα. Ας έχουμε υπόψη ότι υπάρχουν αυτά τα μειονεκτήματα στους καθιερωμένους συμβολισμούς στη Μηχανική.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Το στοιχειώδες έργο δύναμης που ασκείται σε σωμάτιο το οποίο υφίσταται απειροστή πραγματική μετατόπιση, ισούται με αυτό που φαίνεται στην παρακάτω,

$$\mathrm{d}W = F_x(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\mathrm{d}x + F_y(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\mathrm{d}y + F_z(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\mathrm{d}z \tag{1.34}$$

Το στοιχειώδες έργο, γενικώς, δεν είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης της μορφής $W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$. Το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης της μορφής $W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$, είναι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W = {} & \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial z}\mathrm{d}z \\
& + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial \dot{x}}\mathrm{d}\dot{x} + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial \dot{y}}\mathrm{d}\dot{y} + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial \dot{z}}\mathrm{d}\dot{z} + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

Το δυνατό έργο, δηλαδή το έργο σε μια δυνατή μετατόπιση, είναι

$$\delta W = F_x(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\delta x + F_y(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\delta y + F_z(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\delta z \tag{1.36}$$

Η παραλλαγή, δηλαδή η μεταβολή με χρόνο σταθερό, (variation) μιας συνάρτησης $W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ είναι

$$\delta W = \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial z}\delta z$$
$$+\frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y} + \frac{\partial W(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial \dot{z}}\delta \dot{z}. \tag{1.37}$$

Τα ανωτέρω επεκτείνονται και στις περιπτώσεις που η περιγραφή γίνεται σε χώρους γενικευμένων συντεταγμένων, όπου εισάγεται η έννοια των γενικευμένων δυνάμεων.
Γενικώς το στοιχειώδες έργο δυνάμεων σε γενικευμένες συντεταγμένες δίνεται από σχέσεις της μορφής

$$\mathrm{d}W = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q,\dot{q},t)\mathrm{d}q_i\ . \tag{1.38}$$

Τα $\mathrm{d}q_i$ είναι οι πραγματικές μετατοπίσεις στον χώρο των θέσεων, κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος. Τα $Q_i(q,\dot{q},t)$ είναι οι λεγόμενες γενικευμένες συνιστώσες δύναμης, που γενικώς μπορεί να εξαρτώνται άμεσα από τη θέση, τις ταχύτητες και τον χρόνο.

Το δυνατό έργο δίνεται από αντίστοιχες σχέσεις της μορφής

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q,\dot{q},t)\delta q_i\ . \tag{1.39}$$

1.6 Μηδενικό δυνατό έργο δυνάμεων μερικών δεσμών

Μια έννοια πολύ θεμελιακή στην Αναλυτική Μηχανική, είναι η έννοια του δυνατού έργου των δυνάμεων, επί του μηχανικού συστήματος. Ενώ στη νευτώνεια εικόνα της μηχανικής υπάρχει ο διαχωρισμός σε εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις, στη μεθοδολογία της Αναλυτικής Μηχανικής, γίνεται διαχωρισμός σε ασκούμενες (ενεργητικές) δυνάμεις και σε δυνάμεις δεσμών (παθητικές). Στην Αναλυτική Δυναμική, ενδιαφέρουν κυρίως εκείνες οι περιπτώσεις που οι δυνάμεις δεσμών, κατά τις δυνατές μετατοπίσεις δεν παράγουν (δυνατό) έργο. Αυτού του είδους οι δυνάμεις δεσμών, λέγονται και ιδανικές δυνάμεις δεσμών και οι αντίστοιχοι δεσμοί λέγονται ιδανικοί δεσμοί. Αναφέρουμε μερικές τέτοιες περιπτώσεις.

1. Ας εξετάσουμε το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων των δεσμών που κάνουν ένα σύστημα σωματίων να είναι στερεό σώμα. Ας φανταστούμε δυο οποιαδήποτε σωμάτια του στερεού, που ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο. Η σχέση του γεωμετρικού δεσμού μεταξύ οποιωνδήποτε δυο τέτοιων σωματίων του στερεού είναι

$$r_{ji} = \sqrt{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2} = \text{σταθερό}. \tag{1.40}$$

Δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων είναι σταθερές ανεξάρτητα του προσανατολισμού και της κίνησης του μηχανικού συστήματος.

Αυτό σημαίνει ότι και

$$(\vec{r}_j - \vec{r}_i)\cdot(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \text{σταθερό}. \tag{1.41}$$

Οι δυνατές μετατοπίσεις οι συμβατές με τον δεσμό πληρούν τη σχέση

$$(\delta\vec{r}_j \text{-} \delta\vec{r}_i)\cdot(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = 0\ . \tag{1.42}$$

Το δυνατό έργο του ζεύγους των δυο αυτών δυνάμεων σε μια δυνατή μετατόπιση είναι

$$\delta W_{ij} = \delta W_{ji} = \vec{F}_{ij} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \delta\vec{r}_j \ . \tag{1.43}$$

Υποθέτουμε ότι για τις εσωτερικές δυνάμεις ισχύει η αρχή δράσης-αντίδρασης, της νευτώνειας θεώρησης. Άρα, η δύναμη που ασκεί το σωμάτιο *j* στο *i*, δηλαδή η $\vec{F}_{ij}$ είναι ίση κατά μέτρο και έχει αντίθετη φορά σε σχέση με τη δύναμη που ασκεί το *i* στο *j* , επομένως μπορούμε να γράψουμε $F_{ij} = G_{ij}(r_i - r_j)$ και θέτοντας $G_{ij} = G_{ji}$ καταλήγουμε στο ότι

$$\vec{F}_{ij} = G_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji}, \quad F_{ji} = G_{ji}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \ . \tag{1.44}$$

Τελικώς βρίσκουμε

$$\delta W_{ij} = G_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \delta\vec{r}_i + G_{ij}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \delta\vec{r}_j = G_{ij}(\delta\vec{r}_j - \delta\vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = 0 \ . \tag{1.45}$$

Επομένως, αν αθροίσουμε πάνω σε όλα τα ζεύγη δυνάμεων, βρίσκουμε ότι και το συνολικό δυνατό έργο είναι μηδέν, $\delta W = 0$.

Αν αλλάξουμε συντεταγμένες και θεωρήσουμε συντεταγμένες τις

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \ , \tag{1.46}$$

$$\text{τότε } \delta\vec{r}_{ij} = \delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j, \quad \delta\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = 0 \tag{1.47}$$

δηλαδή η μεταβολή είναι κάθετη στο διάνυσμα της απόστασης, πράγμα που αναμένεται αφού η απόσταση είναι σταθερή.

2. Ας δούμε την περίπτωση όπου ένα σώμα είναι αναγκασμένο να παραμένει σε επαφή με λεία, γενικώς, κινούμενη επιφάνεια. Η δύναμη αυτού του συνδέσμου, είναι κάθετη στο κοινό τοπικό επίπεδο επαφής. Κάθε στοιχειώδης δυνατή μετατόπιση, συμβατή με αυτόν τον σύνδεσμο (κάθε εξέλιξη στον χρόνο παγώνει), θα είναι κάθετη στη δύναμη, άρα το δυνατό έργο θα είναι μηδέν.

3. Η επόμενη περίπτωση αναφέρεται σε σώμα που είναι δέσμιο να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ενώ εφάπτεται σε, γενικώς, κινούμενη επιφάνεια. Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει στοιχειώδης σχετική μετατόπιση του σημείου επαφής του σώματος ως προς την επιφάνεια.

Αν η επιφάνεια είναι ακίνητη τότε το έργο της δύναμης που ασκεί πάνω στο κυλιόμενο σώμα είναι μηδέν αφού το σημείο εφαρμογής της δεν κινείται.

Αν η επιφάνεια κινείται τότε ισχύει το ίδιο γιατί κατά τη δυνατή μετατόπιση ο χρόνος παγώνει οπότε η επιφάνεια είναι στιγμιαία ακίνητη.

4. Η τελευταία περίπτωση αναφέρεται σε δυο σώματα που παραμένουν ενωμένα, έχοντας ένα κοινό σημείο, ανεξάρτητα από την κίνησή τους. Οι δυνάμεις αυτού του συνδέσμου (οι δυνάμεις αλληλεπίδρασής τους) είναι ίσες και αντίθετες, σύμφωνα με τη γνωστή αρχή δράση-αντίδραση, άρα κατά τη μετατόπιση του κοινού σημείου, η μια παράγει κάποιο έργο και η άλλη ίσο και αντίθετο, επομένως το άθροισμα είναι μηδέν.

Σημειώνουμε ότι αν υπάρχουν συγχρόνως πολλοί τέτοιο ιδανικοί δεσμοί, τότε ισχύουν τα ανωτέρω, για τον καθέναν χωριστά.

Παραδείγματα - Ειδικά θέματα

1. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0$. Δείξτε ότι είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα ότι είναι ολικό διαφορικό.
Βρείτε το ολοκλήρωμα $f(x,y,z) = c$. Η έκφραση αυτή ως δεσμός στη μηχανική είναι ολόνομος.

Λύση
Υπολογίζουμε το εξωτερικό διαφορικό $\mathrm{d}\omega$ της διαφορικής μορφής $\omega = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, έχουμε $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}z = 0$, αυτό σημαίνει ότι η διαφορική μορφή είναι ολικό διαφορικό, άρα η διαφορική εξίσωση είναι ολοκληρώσιμη οπότε ενώ το κριτήριο Frobenius $\mathrm{d}\omega\Lambda\omega = 0$ ισχύει, δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί.

Εφόσον ξέρουμε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα, αυτό μπορεί να υπολογιστεί με κάποια διαδικασία. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η διαδικασία είναι τετριμμένη αφού

$$\int \omega = \int x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \text{άρα } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

2. Να δειχθεί ότι η $5x^4y^2z^3\mathrm{d}x + 2x^5yz^3\mathrm{d}y + 3x^5y^2z^2\mathrm{d}z = 0$, είναι ολοκληρώσιμη και να βρεθεί το ολοκλήρωμά της $f(x,y,z) = c$.

Λύση

$\omega = 5x^4y^2z^3\mathrm{d}x + 2x^5yz^3\mathrm{d}y + 3x^5y^2z^2\mathrm{d}z$ άρα

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega = (10x^4yz^3\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x + 15x^4y^2z^2\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x)\\
&+(10x^4yz^3\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y + 6x^5yz^2\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y)\\
&+(15x^4y^2z^2\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}z + 6x^5yz^2\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z)\\
&= (-10x^4yz^3 + 10x^4yz^3)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y + (-15x^4y^2z^2 + 15x^4y^2z^2)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}z\\
&+(-6x^5yz^2 + 6x^5yz^2)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως η διαφορική μορφή ω είναι ολικό διαφορικό, άρα η διαφορική εξίσωση $\omega = 5x^4y^2z^3\mathrm{d}x + 2x^5yz^3\mathrm{d}y + 3x^5y^2\mathrm{d}z = 0$ είναι ολοκληρώσιμη.
Έστω $f(x,y,z) = c$ το ζητούμενο ολοκλήρωμα. Θα έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y^2z^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^5yz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^5y^2z^2.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ως προς x και βρίσκουμε $f(x,y,z) = x^5y^2z^3 + f_1(y,z)$

Από αυτήν και τη δεύτερη βρίσκουμε $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^5yz^3 = 2x^5yz^3 + \dfrac{\partial f_1(y,z)}{\partial y}$

άρα $\dfrac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = 0$ οπότε $f_1 = f_1(z)$. Με χρήση και της τρίτης βρίσκουμε $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^5y^2z^2 = 3x^5y^2z^2 + \dfrac{\mathrm{d}f_1(z)}{\mathrm{d}z}$

οπότε $\dfrac{\mathrm{d}f_1(z)}{\mathrm{d}z} = 0$, άρα $f_1 = \text{σταθερά}$, αυτό σημαίνει ότι $f(x,y,z) = x^5y^2z^3 = c$.

3. Δείξτε ότι το σύστημα $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z = 0,\ \ w\mathrm{d}w + \mathrm{d}z = 0$ είναι πλήρως ολοκληρώσιμο και βρείτε τα δυο ολοκληρώματα $f(x,y,z,w) = c_1,\ \ \mathrm{g}(x,y,z,w) = c_2$.

Λύση

$\omega_1 = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z,\ \ \omega_2 = w\mathrm{d}w + \mathrm{d}z$, $\omega_1 \Lambda \omega_2 \neq 0$ άρα οι δυο αυτές διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. $d\omega_1 = \mathrm{d}w\Lambda\mathrm{d}z$, $d\omega_2 = 0$. Αυτά δείχνουν ότι η δεύτερη εξίσωση είναι ολικό διαφορικό, από μόνη της. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Frobenius για την πρώτη εξίσωση, από μόνη της. Έχουμε $d\omega_1 \Lambda \omega_1 = y\mathrm{d}w\Lambda\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x + x\mathrm{d}w\Lambda\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y \neq 0$, άρα η πρώτη εξίσωση δεν είναι από μόνη της ολοκληρώσιμη. Όμως $d\omega_1\Lambda\omega_1\Lambda\omega_2 = 0$ και $d\omega_2\Lambda\omega_1\Lambda\omega_2 = 0$, επομένως το σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο.

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί $-w$ και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη διαφορική εξίσωση, οπότε βρίσκουμε ως γραμμικό συνδυασμό των δυο αρχικών διαφορικών εξισώσεων την $\omega_3 = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - w^2\mathrm{d}w = 0$. Φαίνεται αμέσως ότι αυτή είναι ολικό διαφορικό. Εξάλλου $\mathrm{d}\omega_3 = \mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y = 0$.

Καταλήγουμε στο ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα εξισώσεων $\omega_2 = w\mathrm{d}w + \mathrm{d}z = 0,\ \ \omega_3 = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - w^2\mathrm{d}w = 0$ του οποίου η κάθε μια εξίσωση είναι ολικό διαφορικό, άρα ολοκληρώσιμη.

Προφανώς βρίσκουμε $f(x,y,z,w) = \dfrac{1}{2}w^2 + z = c_1,\ \ g(x,y,z,w) = yx - \dfrac{1}{3}w^3 = c_2$.

Θα δείξουμε ότι αυτές είναι ισοδύναμες , δηλαδή οδηγούν ή αλλιώς, ικανοποιούν τις δεδομένες αρχικά διαφορικές εξισώσεις. Πράγματι, από τη διαφόρισή τους βρίσκουμε τις $w\mathrm{d}w + \mathrm{d}z = 0,\ \ y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - w^2\mathrm{d}w = 0$ Η πρώτη είναι η μια από τις αρχικές εξισώσεις, στη συνέχεια την πολλαπλασιάζουμε επί w και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη, οπότε καταλήγουμε στην άλλη από τις αρχικές εξισώσεις. Άρα οι δυο αρχικές επαληθεύονται από τα ολοκληρώματα $f = c_1,\ \ g = c_2$.

4. Θεωρήστε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y = 0,\ x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}z = 0$. Δείξτε ότι είναι ανεξάρτητες. Δείξτε ότι καμιά από μόνη της δεν ολοκληρώνεται, αλλά το σύστημα, ως σύνολο δυο εξισώσεων είναι ολοκληρώσιμο. Βρείτε δυο ολοκληρώματα του συστήματος. Κάντε την αντίστροφη διαδικασία για να βεβαιωθείτε ότι τα δυο ολοκληρώματα που βρήκατε, οδηγούν στις αρχικές διαφορικές εξισώσεις. Αυτό είναι ένα απλό παράδειγμα που δείχνει ότι, ενώ μπορεί καμιά από τις επιμέρους (ανεξάρτητες) διαφορικές εξισώσεις να είναι ολοκληρώσιμη από μόνη της, και οι δυο ως σύστημα είναι ολοκληρώσιμες.

Λύση

Έχουμε $\omega_1 = x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y,\ \ \omega_2 = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}z$. $\omega_1\Lambda\omega_2 = xy\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x + zy\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z \neq 0$, αυτό σημαίνει ότι οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες. Έχουμε $\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}x + \mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y = \mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y,\ \ \mathrm{d}\omega_2 = \mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z = \mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z$.

Επομένως,
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1\Lambda\omega_1 &= x\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x + z\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}y = x\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x \neq 0\\ \mathrm{d}\omega_2\Lambda\omega_2 &= x\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}z = x\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x \neq 0\end{aligned}$$

δηλαδή η καθεμιά εξίσωση, από μόνη της, δεν είναι ολοκληρώσιμη. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τις εκφράσεις $\mathrm{d}\omega_1\Lambda\omega_1\Lambda\omega_2,\ \ \mathrm{d}\omega_2\Lambda\omega_1\Lambda\omega_2$.

Χρησιμοποιούμε αποτελέσματα από τα παραπάνω και μετά από κάποιους υπολογισμούς καταλήγουμε στο ότι ισχύουν
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1\Lambda\omega_1\Lambda\omega_2 &= xy\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}x + zy\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z\\ &= 0+0+0=0.\end{aligned}$$

Είναι ευνόητο, αφού $\mathrm{d}\omega_1 = -\mathrm{d}\omega_2$, ότι ισχύει επίσης, $\mathrm{d}\omega_2\Lambda\omega_1\Lambda\omega_2 = 0$. Επομένως, το συμπέρασμα είναι ότι, ως σύνολο (σύστημα) δυο εξισώσεων, οι δεδομένες διαφορικές εξισώσεις είναι ολοκληρώσιμες. Για να βρούμε δυο ολοκληρώματά τους, εργαζόμαστε ως εξής: Στην αρχή προσθέτουμε τις δυο δεδομένες εξισώσεις (γραμμικός συνδυασμός), οπότε βρίσκουμε $2x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = 2x\mathrm{d}x + \mathrm{d}(yz) = 0$. Από αυτήν, με απλή ολοκλήρωση, βρίσκουμε ένα ολοκλήρωμα το $x^2 + yz = c_1$. Στη συνέχεια, αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (γραμμικός συνδυασμός), οπότε βρίσκουμε $z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z = 0$. Από αυτήν βρίσκουμε $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$. Μια απλή ολοκλήρωση δίνει ένα δεύτερο (ανεξάρτητο) ολοκλήρωμα που είναι το $\ln\frac{y}{z} = c_2$.

Οι διαφορικές εξισώσεις που είναι ολικά διαφορικά και είναι ισοδύναμες των αρχικών, βρίσκονται από διαφόριση των δυο ολοκληρωμάτων και είναι οι: $2x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = 0, \quad z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z = 0$. Από αυτές, με προσθαφαιρέσεις (γραμμικοί συνδυασμοί), μπορούμε να καταλήξουμε στις αρχικές (δεδομένες) διαφορικές εξισώσεις. Θα δούμε παρακάτω ότι ένα πρόβλημα Δυναμικής με δεσμευτικές σχέσεις τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις, μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, για δεσμούς μορφής Pfaff (παράθεση δεσμών) ή με χρήση των δυο ολοκληρωμάτων που βρήκαμε (κανόνας του πολλαπλασιασμού όπου τροποποιείται η λαγκρανζιανή).

5. Η δεσμευτική κινητική σχέση στον χώρο των τριών διαστάσεων είναι η διαφορική εξίσωση $\mathrm{d}y - z\mathrm{d}x = 0$. Αυτή δεν είναι ολοκληρώσιμη. Βρείτε λύση-διαδρομή που να ενώνει δυο τυχαία σημεία, έστω το x_1, y_1, z_1 και το x_2, y_2, z_2.

Λύση

Διαλέγουμε μια συνάρτηση τέτοια που να ισχύουν $y = f(x) \quad z = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Η $f(x)$ είναι (αρκετά αυθαίρετη) αλλά έχει επιλεγεί έτσι ώστε να έχει πρώτη παράγωγο και να ισχύουν

$$f(x_1) = y_1 \qquad \frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x} = z_1 \quad f(x_2) = y_2 \qquad \frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x} = z_2$$

Αντικαθιστώντας τα y, z στη διαφορική εξίσωση του δεσμού βρίσκουμε ότι αυτή ικανοποιείται κατά την ανωτέρω διαδρομή. Πράγματι, έχουμε

$$\mathrm{d}y - z\mathrm{d}x = \mathrm{d}f - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 0 .$$

Αυτά δείχνουν ότι η υπάρχει διαδρομή (καταχρηστική λύση) που πράγματι μας οδηγεί από το σημείο x_1, y_1, z_1 στο σημείο x_2, y_2, z_2.

Προβλήματα

1. Δείξτε ότι, στον τρισδιάστατο χώρο, η σχέση $\vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0$ είναι αναγκαία και ικανή, για να υπάρχει ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης $A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{dz}=0$.

2. Πότε η διαφορική μορφή $\mathrm{d}y-g(z)\mathrm{d}x=0$ είναι ολοκληρώσιμη;

3. Δείξτε ότι η $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{zdz}=0$ είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμά της $f(x,y,z)=c$.

4. Δείξτε ότι η $(6x+yz)\mathrm{d}x+(x\mathrm{z}-2y)\mathrm{d}y+(xy+2z)\mathrm{dz}=0$ είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμά της $f(x,y,z)=c$.

5. Δείξτε ότι η $yz\mathrm{d}x+2xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{dz}=0$ είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμά της $f(x,y,z)=c$.

6. Βρείτε αν η $\mathrm{z}\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y+zy\mathrm{dz}=0$ είναι ολοκληρώσιμη.

7. Δείξτε ότι η $yz(y+z)\mathrm{d}x+zx(z+x)\mathrm{d}y+xy(x+y)\mathrm{dz}=0$ είναι ολοκληρώσιμη.

8. A) Με τη μέθοδο του κριτηρίου Frobenius με τις διαφορικές μορφές, ελέγξτε αν οι διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x-a\cos\theta\mathrm{d}\varphi&=0\\ \mathrm{d}y-a\sin\theta\mathrm{d}\varphi&=0\end{aligned}$$

είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, ελέγξτε α) αν η κάθε μια διαφορική εξίσωση, από μόνη της, είναι ολοκληρώσιμη, β) αν οι ανωτέρω εξισώσεις είναι πλήρως ολοκληρώσιμες ως σύστημα εξισώσεων. Οι μεταβλητές είναι οι x,y,φ,θ. B) Κάντε το β), με χρήση του «δύσκολου» κριτηρίου Frobenius.

9. Βρείτε το γινόμενο-Λ της διαφορικής μορφής $x^2\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{dz}-x\mathrm{dz}\Lambda\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y$, επί

α) $1/x$ (σύνηθες γινόμενο),

β) $2x\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y$ (από αριστερά) και

γ) $xy\mathrm{d}x+\mathrm{zd}y$ (από αριστερά).

10. Θεωρήστε την περίπτωση της ρόδας που κινείται, ενώ είναι σε επαφή με οριζόντιο επίπεδο. Αγνοήστε την κύλιση χωρίς ολίσθηση και θεωρήστε ότι η ρόδα μπορεί να κινείται μόνο στο επίπεδό της. Βρείτε την εξίσωση αυτού του δεσμού. Είναι ο δεσμός ολόνομος; Αυτό είναι παρόμοιο με το πρόβλημα του πατινάζ.

11. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$. Μετασχηματίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_{\Omega} dxdydz$ σε ολοκλήρωμα όπου οι συντεταγμένες είναι τα u,v,w.

Θα βρείτε το γνωστό αποτέλεσμα όπου εισέρχεται η ιακωβιανή.

Κάντε τους υπολογισμούς όταν $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο γενικό αποτέλεσμα.

Υπόδειξη: Διαφορίστε τα $x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$ και σχηματίστε το γινόμενο-Λ των διαφορικών. Μετά από τις πράξεις, μέσα στα τελικά ολοκληρώματα, όπου υπάρχει το σύμβολο Λ να το αντικαταστήσετε με συνήθη πολλαπλασιασμό. Φυσικά το χωρίο ολοκλήρωσης $\Omega(x,y,z)$ θα μετασχηματιστεί στο $\Omega'(u,v,w)$.

12. Δείξτε ότι για την περίπτωση του δίσκου που κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει ενώ το επίπεδό του είναι κατακόρυφο, οι δεσμευτικές σχέσεις της κίνησής του μπορεί να γραφτούν στη μορφή $(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2-a^2(\mathrm{d}\varphi)^2=0,\ \mathrm{d}x\sin\theta-\mathrm{d}y\cos\theta=0$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη δεσμευτική εξίσωση δεν είναι γραμμική ως προς τα διαφορικά, δηλαδή δεν έχει μορφή εξίσωσης του Pfaff.

13. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Frobenius στη «δύσκολη» μορφή του και δείξτε ότι το σύστημα $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+w\mathrm{d}z=0,\quad w\mathrm{d}w+\mathrm{d}z=0$ είναι πλήρως ολοκληρώσιμο.

14. Βρείτε την (διαφορική) εξίσωση Pfaff για τις σχέσεις

α) $x^2+y^2+z^2-R^2=0$,

β) $\zeta(x)+\dfrac{1}{2}ay^2-z=0$ και γ) $\left(x-f(t)\right)^2+y^2-l^2=0$.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 1

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[3] E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.

[4] Α. Μαυραγάνης, *Αναλυτική Μηχανική*, ΕΜΠ, 1998.

[5] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems,* Plenum Press, 1977.

[6] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, second edition, Academic Press, 1970.

[7] H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry,* D. Van Nostrand Co. Inc., 1962.

[8] H. Flandres, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Dover Publications, N.Y., 1989.

[9] S.H. Weitraub, *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus*, Academic Press,1996.

[10] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics,* John Willey, 1971.

[11] A. R. Forsyth, *A Treatise On Differential Equations*, sixth Ed., Macmillan and Company Limited, 1956.

[12] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1953.

[13] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

[14] E. A. Desloge, *Suppression and restoration of constants in physical equations*, American Journal of Physics, Vol. 52, No. 4, pp. 312-316, April 1984.

[15] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β’ Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

Κεφάλαιο 2: Φορμαλισμός του Lagrange

2.1 Αρχή d’ Alembert

Μια τέτοια αρχή διατύπωσε πρώτα ο James Bernoulli αλλά αναπτύχτηκε στη συνέχεια από τον d’ Alembert και φέρει το όνομά του.

Ξεκινούμε με καρτεσιανές συντεταγμένες και με δυνάμεις τις καρτεσιανές δυνάμεις, διανύσματα, γνωστές από τη νευτώνεια θεώρηση της Μηχανικής. Σε αυτό το σημείο, αλλά και αργότερα, είναι χρήσιμο το Παράρτημα Π2 περί ειδών συνιστωσών δυνάμεων.

Η ιδέα της ανωτέρω αρχής ξεκινά από τη Στατική. Όταν ένα σύστημα από N υλικά σημεία ισορροπεί, τότε η συνολική δύναμη που ασκείται σε κάθε υλικό σημείο (σωμάτιο) του συστήματος είναι μηδέν,

$$\vec{F}_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., N . \tag{2.1}$$

Παριστάνουμε με $\delta\vec{r}_i$ την απειροστή δυνατή (εικονική) μετατόπιση του υλικού σημείου i, είναι μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας του, η οποία γίνεται «παγώνοντας» τον χρόνο $(\mathrm{d}t = 0)$. Είναι μετατόπιση συμβατή με τους συνδέσμους, οι οποίοι δε μεταβάλλονται κατά τη δυνατή μετατόπιση. Τονίζουμε ότι οι ταχύτητες παγώνουν, διατηρώντας κατά τη δυνατή μετατόπιση, τις τιμές που έχουν τη στιγμή t. Το δυνατό έργο της ολικής δύναμης πάνω σε κάθε ένα υλικό σημείο θα είναι μηδέν, διότι από την Εξ. (2.1) προκύπτει ότι ισχύουν

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., N . \tag{2.2}$$

Έστω ότι υπάρχουν M δεσμοί, τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχουν, γενικώς, οι ασκούμενες (ενεργητικές) δυνάμεις και οι δυνάμεις των δεσμών (παθητικές δυνάμεις). Η συνολική δύναμη πάνω σε κάθε υλικό σημείο μπορεί να αναλυθεί σε μια (συνολική) ενεργητική, $\vec{F}_{\mathrm{a}i}$, και μια (συνολική) δύναμη δεσμού, $\vec{F}_{\mathrm{c}i}$, οπότε

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{\mathrm{a}i} + \vec{F}_{\mathrm{c}i} . \tag{2.3}$$

Το δυνατό έργο που εκτελείται κατά τη δυνατή μετατόπιση, πάνω σε κάθε ένα σωμάτιο, είναι

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{F}_{\mathrm{a}i} \cdot \delta r_i + \vec{F}_{\mathrm{c}i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 . \tag{2.4}$$

Η συνολική δύναμη δεσμού, $\vec{F}_{\mathrm{c}i}$, πάνω στο σωμάτιο i, που οφείλεται στους M δεσμούς, είναι το άθροισμα των δυνάμεων από τον κάθε έναν δεσμό, $\vec{F}_{\mathrm{c}ji} \quad j = 1, 2, ..., M$, $\vec{F}_{\mathrm{c}i} = \sum_{j=1}^{M} \vec{F}_{\mathrm{c}ji}$. Αν αθροίσουμε τα δυνατά έργα για όλα τα υλικά σημεία του συστήματος, θα έχουμε για το συνολικό δυνατό έργο όλων των δυνάμεων επί του συστήματος

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\mathrm{a}i} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\mathrm{c}i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{2.5}$$

Υποθέτουμε ότι κάθε ένας δεσμός είναι ιδανικός δεσμός, οπότε για κάθε έναν δεσμό, το δυνατό συνολικό έργο των δυνάμεων του δεσμού πάνω σε όλα τα σωμάτια είναι μηδέν, δηλαδή $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\mathrm{c}ji} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, επομένως

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ci}\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\vec{F}_{cji}\cdot\delta\vec{r}_i=0\,. \tag{2.6}$$

Έτσι, η (2.5) δίνει

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ai}\cdot\delta\vec{r}_i=0\,. \tag{2.7}$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε χρονική στιγμή, κατά την ισορροπία, το συνολικό δυνατό έργο επί του συστήματος των ενεργητικών (ασκούμενων) δυνάμεων είναι μηδέν. Η Εξ. (2.7) αναφέρεται ως Αρχή των Δυνατών Έργων.

Οι δυνατές μετατοπίσεις $\delta\vec{r}_i \;\; i=1,2,\ldots,N$, όταν υπάρχουν δεσμοί, δεν είναι αυθαίρετες, δηλαδή δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, γι' αυτό από τη σχέση (2.7) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\vec{F}_{ai}=0$.

Η σχέση (2.7) είναι κάτι χρήσιμο που μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα σε ισορροπία και να βοηθήσει στη λύση προβλημάτων στατικής. Σε στοιχειώδες επίπεδο εφαρμόζεται στις απλές μηχανές όπως τροχαλίες, μοχλούς κ.λπ.

Στη συνέχεια, έγινε η προσπάθεια να αναχθούν τα προβλήματα της Δυναμικής σε προβλήματα Στατικής και να γενικευτεί η Αρχή των Δυνατών έργων και για τη Δυναμική. Ο θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής για κάθε υλικό σημείο ενός συστήματος γράφεται

$$\vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{p}}_i \;\; i=1,2,\ldots,N\,. \tag{2.8}$$

Από αυτή τη σχέση καταλήγουμε στη σχέση

$$\vec{F}_i-\dot{\vec{p}}_i=0 \;\; i=1,2,\ldots,N\,. \tag{2.9}$$

Ο όρος $-\dot{\vec{p}}_i$ λέγεται αντίστροφη ενεργός δύναμη (reversed effective force) ή αδρανειακή δύναμη ή δύναμη d' Alembert. Η Εξ. (2.9) μας λέει ότι για ένα σύστημα υλικών σημείων που, γενικώς, δεν βρίσκεται σε ισορροπία, κάθε στιγμή το διανυσματικό άθροισμα των πραγματικών δυνάμεων και των αντίστροφων ενεργών δυνάμεων, σε κάθε ένα σημείο, είναι μηδέν, δηλαδή αυτές οι δυνάμεις ισορροπούν. Αν φανταστούμε δυνατές μετατοπίσεις (ο χρόνος παγώνει), από την Εξ. (2.9) βρίσκουμε

$$\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i-\dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0\,. \tag{2.10}$$

Στη συνέχεια κάνουμε την ανάλυση των πραγματικών δυνάμεων, όπως και στα προηγούμενα. Υποθέτουμε ότι έχουμε ιδανικούς δεσμούς και καταλήγουμε στη σχέση $\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{ai}-\dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$. Για ευκολία αλλάζουμε συμβολισμό, δηλαδή παραλείπουμε τον δείκτη a στην ενεργητική δύναμη και γράφουμε αντί $\vec{F}_{ai}$ απλώς $\vec{F}_i$. Έτσι, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i-\dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0 \tag{2.11}$$

Έχουμε στη Στατική και στη Δυναμική, ότι το δυνατό έργο δW όλων των πραγματικών δυνάμεων στο σύστημα, είναι το άθροισμα των έργων των ενεργητικών (ασκούμενων) δυνάμεων και των δυνάμεων των δεσμών. Εφόσον οι δεσμοί είναι ιδανικοί, το δυνατό έργο τους είναι μηδέν, οπότε το συνολικό δυνατό έργο όλων των πραγματικών δυνάμεων στο σύστημα, ισούται με το έργο (μόνον) όλων των ενεργητικών δυνάμεων. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \,. \tag{2.12}$$

Η σχέση (2.11) είναι η Αρχή (του) d' Alembert, που είναι γενίκευση της Αρχής των Δυνατών Έργων, Εξ. (2.7). Προφανώς η Αρχή d' Alembert ισχύει και όταν δεν υπάρχουν δεσμοί.

Σημειώνουμε, όπως και πριν, ότι από την Εξ. (2.11) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0$$

διότι όταν υπάρχουν δεσμοί, τα $\delta \vec{r}_i$ δεν μπορεί το καθένα να ληφθεί αυθαίρετα σε σχέση με τα άλλα, διότι αλληλοεξαρτώνται, όπως είπαμε προηγουμένως.

2.2 Φορμαλισμός χωρίς δεσμούς

Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν δυνάμεις δεσμών (δηλαδή παθητικές δυνάμεις), υπάρχουν μόνο ασκούμενες (δηλαδή ενεργητικές) δυνάμεις και μπορεί κάποιος να προχωρήσει χωρίς χρήση της αρχής d' Alembert, όμως μπορεί να ξεκινήσει και με τη χρήση της η οποία ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο και όταν δεν υπάρχουν δεσμοί.

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα σωματίων που περιγράφεται με καρτεσιανές συντεταγμένες. Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί και με άλλες συντεταγμένες. Με μετασχηματισμό των συντεταγμένων από καρτεσιανές σε οποιεσδήποτε άλλες (γενικευμένες) συντεταγμένες, καταλήγουμε στις εξισώσεις (του) Lagrange που έχουν ίδια μορφή, ανεξάρτητα από το ποιες είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες. Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων Lagrange περιγράφουν την κίνηση του συστήματος στις νέες συντεταγμένες. Ο μετασχηματισμός των λύσεων στις καρτεσιανές οδηγεί στις λύσεις στις γενικευμένες συντεταγμένες. Οι ασκούμενες δυνάμεις μετασχηματίζονται σε γενικευμένες (συνιστώσες) δυνάμεις που κάθε μια σχετίζεται με μια γενικευμένη συντεταγμένη και λέγεται συνιστώσα γενικευμένης δύναμης της γενικευμένης συντεταγμένης. Οι σχέσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε είναι

$$\begin{aligned} & n = 3N \\ & \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \qquad i = 1, 2, ..., N \\ & q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \qquad j = 1, 2, ..., n \,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Εννοείται ότι για την περιοχή ισχύος αυτού του μετασχηματισμού πρέπει οι σχέσεις αυτές να μπορούν να αντιστραφούν. Θα σκιαγραφήσουμε τη μέθοδο και αφήνουμε ως άσκηση την απόδειξη των αποτελεσμάτων που δίνουμε. Γίνεται χρήση του Παραρτήματος Π3 για την κινητική ενέργεια σε γενικευμένες συντεταγμένες, η οποία ενέργεια σημειώνουμε ότι υπολογίζεται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Ξεκινούμε από τις εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα (στο αδρανειακό σύστημα) με τις ανωτέρω καρτεσιανές συντεταγμένες

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad i = 1, 2, ..., N \,. \tag{2.14}$$

Μετά από εφαρμογή των ανωτέρω μετασχηματισμών καταλήγουμε στις

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \; k = 1, 2, ..., n \,. \tag{2.15}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange. Στη Μηχανική και γενικότερα στη Φυσική, συνήθως λέγονται απλώς εξισώσεις Lagrange. Η κινητική ενέργεια εκφράζεται ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων, των γενικευμένων ταχυτήτων και του χρόνου, $T = T(q,\dot{q},t)$.

Η παράσταση στο δεξί μέλος των Εξ. (2.15), ορίζει την γενικευμένη συνιστώσα δύναμης τη σχετική με τη συντεταγμένη k , δηλαδή την q_k , που παριστάνεται με Q_k , δηλαδή

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \qquad k = 1,2,...,n . \tag{2.16}$$

Όταν όλες οι δυνάμεις προέρχονται από βαθμωτή δυναμική συνάρτηση $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t)$, δηλαδή όταν $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$, τότε έχουμε για τις γενικευμένες δυνάμεις

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad k = 1,2,...,n . \tag{2.17}$$

Η τελευταία έκφραση είναι η μερική παράγωγος της συνάρτησης $-V$ ως προς q_k , όπου $V = V(q,t)$, δηλαδή τα $\vec{r}_i$ έχουν αντικατασταθεί συναρτήσει των q_j . Επομένως

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{2.18}$$

Εφόσον το V δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες, έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1,2,...,n. \tag{2.19}$$

Η συνάρτηση (του) Lagrange, λαγκρανζιανή (lagrangian), ορίζεται από τη σχέση $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$. Θα δούμε παρακάτω την περίπτωση όπου η δυναμική συνάρτηση έχει μια ειδική μορφή εξάρτησης από τις ταχύτητες. Τότε η δυναμική συνάρτηση είναι της μορφής $U = U(q,\dot{q},t)$ και $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)$. Η μορφή $U(q,\dot{q},t)$ περιλαμβάνει τη μορφή $V(q,t)$ όταν δεν υπεισέρχονται ταχύτητες.

Όταν η λαγκρανζιανή υπολογίζεται με τον παραπάνω τρόπο, συνήθως, λέγεται «φυσιολογική» λαγκρανζιανή. Αυτό έχει τη σημασία του γιατί θα δούμε ότι για ένα σύστημα υπάρχουν πολλές διαφορετικές λαγκρανζιανές οι οποίες είναι ισοδύναμες αφού οδηγούν στις ίδιες (τελικές) εξισώσεις κίνησης. Η άμεση εξάρτηση αυτής της λαγκρανζιανής από τον χρόνο μπορεί να οφείλεται σε δεσμευτικές σχέσεις που εξαρτώνται από τον χρόνο, σε αλλαγή συστήματος αναφοράς, σε ύπαρξη δυνάμεων που εξαρτώνται από τον χρόνο.

Με τη λαγκρανζιανή, οι εξισώσεις κίνησης (2.19) γίνονται

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1,2,...,n . \tag{2.20}$$

Αυτή είναι η άλλη μορφή των εξισώσεων Lagrange.

Προς τιμήν του Lagrange, χρησιμοποιείται και ο όρος Λαγκρανζιανή Μηχανική (Lagrangian Mechanics). Ο ίδιος ο Lagrange στο πρώτο σχετικό σύγγραμμά του χρησιμοποιεί τον όρο Αναλυτική Μηχανική.

Είναι ευνόητο ότι οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης για συγκεκριμένο μηχανικό σύστημα, προκύπτουν από τις ανωτέρω γενικής μορφής εξισώσεις Lagrange, αφού δοθεί η συγκεκριμένη λαγκρανζιανή ή/και οι ενεργητικές γενικευμένες συνιστώσες δύναμης, για το μηχανικό σύστημα που εξετάζεται. Δηλαδή οι εξισώσεις του Lagrange είναι ένα είδος «συνταγής» που οδηγεί στις ειδικές (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης για κάθε συγκεκριμένο μηχανικό σύστημα.

Η αξία της λαγκρανζιανής διατύπωσης της μηχανικής συνίσταται στο ότι, εκτός των άλλων, η μορφή των εξισώσεων Euler-Lagrange δεν εξαρτάται από το ποιες είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες. Η σημασία όμως αυτής της διατύπωσης είναι μεγαλύτερη όταν υπάρχουν ολόνομοι δεσμοί, τότε μπορούμε να έχουμε τις εξισώσεις Lagrange και τις ειδικές για το σύστημα εξισώσεις κίνησης, ανεξάρτητες των δυνάμεων των δεσμών, ανεξάρτητες των δεσμών.

Αναφέρουμε εδώ ότι, στα πλαίσια της Κλασικής Μηχανικής, μπορούμε να βρούμε λαγκρανζιανές με τη συνταγή της φυσιολογικής λαγκρανζιανής, $L=T-U$, για τις συνήθεις βασικές μακροσκοπικές δυνάμεις του ηλεκτρομαγνητισμού και της (νευτώνειας) βαρύτητας. Αυτό γίνεται διότι αυτές οι δυνάμεις μπορούν να προκύψουν με γνωστό τρόπο, από δυναμική συνάρτηση $U(q,\dot{q},t)$.

Αυτό δεν μπορεί να γίνει για όλες τις περιπτώσεις μη βασικών μακροσκοπικών δυνάμεων, όπως για παράδειγμα είναι οι τριβές. Όμως μπορεί να δειχτεί ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις , μπορούμε να βρούμε λαγκρανζιανές και για συστήματα στα οποία δεν μπορεί να εφαρμοστεί η παραπάνω συνταγή $L=T-U$. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση οι (ειδικές) εξισώσεις κίνησης του συστήματος μπορεί να προκύψουν από τις εξισώσεις Lagrange. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω.

Σημειώνουμε το εξής: Έστω ότι για κάποιες γενικευμένες συντεταγμένες ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange, στη συνέχεια αν χρησιμοποιηθεί μετασχηματισμός μεταξύ αυτών των συντεταγμένων και νέων γενικευμένων συντεταγμένων, όπου μπορεί να εισέρχεται και ο χρόνος, τότε ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange και στο νέο σύστημα όπου η λαγκρανζιανή έχει μετασχηματιστεί σύμφωνα με αυτό τον μετασχηματισμό.

Πρέπει να πούμε ότι δεν είναι ανάγκη να ξεκινά κάποιος από καρτεσιανές συντεταγμένες, μπορεί να ξεκινήσει από οποιεσδήποτε συντεταγμένες και με μετασχηματισμό συντεταγμένων θα καταλήξει πάλι σε εξισώσεις Lagrange στις «νέες» συντεταγμένες. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού οι εξισώσεις Lagrange έχουν την ίδια μορφή για κάθε σύνολο συντεταγμένων.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε τα παρακάτω που σχετίζονται με αυτά τα τελευταία. Αν ξέρουμε τη λαγκρανζιανή εκφρασμένη ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό που οδηγεί σε άλλο σύστημα αναφοράς κινούμενο κατά οποιονδήποτε τρόπο ως προς το πρώτο, τότε η προκύπτουσα λαγκρανζιανή είναι σωστή λαγκρανζιανή και ως προς το νέο σύστημα, που μπορεί να μην είναι αδρανειακό. Τέτοιοι μετασχηματισμοί έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο.

Αυτό δεν ισχύει, γενικώς, για άλλα μεγέθη. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κινητική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια ως προς σύστημα αναφοράς σχετίζεται με τις ταχύτητες ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι αν ξεκινήσουμε με την κινητική ενέργεια ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα και μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες έτσι που να πάμε σε κινούμενο ως προς το πρώτο σύστημα αναφοράς, τότε θα έχουμε την κινητική ενέργεια ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς εκφρασμένη με συντεταγμένες του κινούμενου συστήματος αναφοράς. Η κινητική ενέργεια ως προς το κινούμενο σύστημα περιλαμβάνει τις «σχετικές» ταχύτητες ως προς αυτό και είναι εντελώς άλλη έκφραση από αυτή που προέκυψε με τον ανωτέρω μετασχηματισμό συστήματος αναφοράς.

Η λαγκρανζιανή χαρακτηρίζει το μηχανικό σύστημα ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς. Η μορφή της γενικώς αλλάζει με τους μετασχηματισμούς σημείου σε σχέση με τη μορφή στο αρχικό, αλλά εξακολουθεί να είναι λαγκρανζιανή και ως προς το νέο κινούμενο ως προς το πρώτο συστήματα αναφοράς.

Είναι χρήσιμο να κάνουμε κάποια σχόλια για τις διάφορες παραγώγους και τα σύμβολά τους. Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση των $q,\dot{q},t$ (δυναμική συνάρτηση), δηλαδή $f=f(q,\dot{q},t)$. Ότι έχουμε άμεση εξάρτηση από τα $q,\dot{q},t$, ορίσματα της f. Εννοείται ότι $q=q(t),\dot{q}=\dot{q}(t)$, αλλά δεν μας είναι γνωστές εκ των προτέρων οι τελευταίες. Έχουμε τα εξής είδη παραγώγων: $\frac{\partial f}{\partial q_r}$, όπου εννοείται ότι όλα τα (άλλα) ορίσματα της f είναι σταθερά, εκτός του q_r. $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r}$ όπου όλα τα ορίσματα της f είναι σταθερά εκτός του $\dot{q}_r$. $\frac{\partial f}{\partial t}$ όπου όλα τα ορίσματα της f είναι σταθερά εκτός του t. Η εξάρτηση από τον χρόνο είναι άμεση και χαρακτηρίζεται από την τελευταία μερική παράγωγο ως προς τον χρόνο, και έμμεση, εξαρτώμενη από τα $q=q(t),\dot{q}=\dot{q}(t)$. Αυτά σημαίνουν ότι ολική παράγωγος ως προς τον χρόνο είναι,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Αξίζει να τονίσουμε ότι η «συνταγή» $L = T - U$, όταν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, γίνεται ανεξάρτητα από το αν το σύστημα περιγραφής είναι αδρανειακό ή όχι. Όμως πρέπει να ξέρουμε πώς να υπολογίσουμε το U και το T στο μη αδρανειακό σύστημα. Θυμηθείτε ότι σε μη αδρανειακά συστήματα υπεισέρχονται και οι λεγόμενες ψευδοδυνάμεις ή αδρανειακές δυνάμεις.

Επειδή το μέγεθος U είναι συνήθως γνωστό σε αδρανειακά συστήματα, προτιμούμε πρώτα να γράφουμε την λαγκρανζιανή σε αδρανειακό σύστημα (τις πιο πολλές στη μορφή $V(q,t)$) και μετά με μετασχηματισμό να τη βρίσκουμε για οποιοδήποτε σύστημα, αδρανειακό ή όχι. Πολλές φορές ξεκινούμε και με καρτεσιανές συντεταγμένες, παρόλο που ούτε αυτό είναι απαραίτητο.Τέλος, σημειώνουμε ότι, αν η λαγκρανζιανή συστήματος πολλαπλασιαστεί επί σταθερά, οι εξισώσεις κίνησης μένουν ίδιες, είναι αναλλοίωτες. Αυτό δείχνεται εύκολα με απλή αντικατάσταση της L με $\text{σταθ} \times L = C \times L$ στις εξισώσεις Lagrange.

2.3 Φορμαλισμός με δεσμούς

Αυτός ο φορμαλισμός περιλαμβάνει ως ειδική περίπτωση την περίπτωση όπου δεν υπάρχουν δεσμοί.

2.3.1 Δυνάμεις δεσμών

Όπως είπαμε, οι δεσμοί ασκούν δυνάμεις και περιορίζουν την κίνηση μηχανικού συστήματος. Οι δυνάμεις αυτές των δεσμών, δεν έχουν γνωστή άμεση εξάρτηση από τη θέση, τις ταχύτητες και τον χρόνο, ενώ αυτό ισχύει για τις ενεργητικές δυνάμεις, οι οποίες είναι γνωστές συναρτήσεις της γενικής μορφής, $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Θα δούμε ότι από τις σχέσεις των δεσμών μπορούμε να έχουμε μια μερική γνώση για τις δυνάμεις των δεσμών. Ο πλήρης προσδιορισμός τους χρειάζεται τη λύση του προβλήματος για το μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε. Για να κατανοήσουμε τη διαφορά αναφέρουμε ότι αν για κάποια χρονική στιγμή δοθούν οι θέσεις, οι ταχύτητες και ο χρόνος, τότε οι ενεργητικές δυνάμεις είναι πλήρως καθορισμένες αυτή τη στιγμή, για τον προσδιορισμό τους δε χρειάζεται να βρεθεί συγκεκριμένη πραγματική κίνηση του συστήματος. Όμως, για κάποιο σύστημα υλικών σημείων όπου υπάρχουν δεσμοί, αυτό δεν ισχύει για τις δυνάμεις των δεσμών. Δηλαδή για τις ίδιες θέσεις, ταχύτητες και χρόνο οι δυνάμεις των δεσμών μπορεί να είναι διαφορετικές. Θυμηθείτε ότι μπορεί στο ίδιο σύστημα σωματίων οι δεσμοί να είναι ίδιοι, αλλά οι ενεργητικές δυνάμεις να είναι διαφορετικές, και επομένως, ακόμη και για ίδιες αρχικές συνθήκες, οι κινήσεις είναι διαφορετικές, πράγμα που επηρεάζει τις δυνάμεις δεσμών κάθε χρονική στιγμή. Οφείλουμε να τονίσουμε ότι οι δυνάμεις των δεσμών, σε αντίθεση με τις ενεργητικές δυνάμεις, μηδενίζονται όταν δεν υπάρχουν δεσμοί. Επίσης, οι θέσεις και ταχύτητες που υπάρχουν στις σχέσεις που δίνουν τις δυνάμεις δεσμών, είναι τέτοιες που να πληρούν τις σχέσεις των δεσμών, δηλαδή δεν είναι τόσο αυθαίρετες όπως είναι στην περίπτωση των ενεργητικών δυνάμεων. Θα ξεκινήσουμε με καρτεσιανές συντεταγμένες. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σύστημα N σωματίων που περιγράφονται με N διανύσματα θέσης $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν K' ολόνομοι και K μη ολόνομοι δεσμοί. Οι δεσμευτικές σχέσεις είναι $K' + K$ το πλήθος, ισχύει $K' + K < 3N$. Τις κατατάσσουμε έτσι που οι πρώτες K να είναι αυτές των μη ολόνομων δεσμών και οι υπόλοιπες K' αυτές των ολόνομων. Θα υποθέσουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις σχέσεις για τους ολόνομους δεσμούς σε ολοκληρωμένη μορφή (γεωμετρική μορφή) οι οποίες είναι,

$$f_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \quad l = K+1, K+2, ..., K+K' \quad K+K' < 3N \ . \tag{2.21}$$

Οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των καρτεσιανών συνιστωσών θέσης και του χρόνου, έχουμε,

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = x = (x_1, x_2, ..., x_{3N}, t)\,. \tag{2.22}$$

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που οι K μη ολόνομοι δεσμοί εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις γραμμικές ως προς τις παραγώγους πρώτης τάξεως ή στην αντίστοιχη μορφή με εξισώσεις Pfaff.

Μπορούμε όμως να γράψουμε τις δεσμευτικές σχέσεις με τις καρτεσιανές συντεταγμένες στην ολοκληρωμένη μορφή για την περίπτωση των ολόνομων δεσμών, αλλά και για τα δυο είδη δεσμών μπορούμε να τις έχουμε στη μορφή με παραγώγους πρώτης τάξεως (ή στη μορφή Pfaff):

$$
\begin{aligned}
& f_l(x_1, x_2, ..., x_{3N}, t) = 0 \\
& \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_l}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3N} A_{li}(x,t)\dot{x}_i + A_l(x,t) = 0 \\
& \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_l}{\partial t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{3N} A_{li}(x,t)\mathrm{d}x_i + A_l(x,t)\mathrm{d}t = 0 \\
& A_{li}(x,t) = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \quad A_l(x,t) = \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad l = K+1, K+2, ..., K+K'
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\dot{x}_i + A_j(x,t) = 0 \\
& \sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\mathrm{d}x_i + A_j(x,t)\mathrm{d}t = 0 \quad j = 1, 2, ..., K \\
& K' + K < 3N \quad .
\end{aligned}
$$

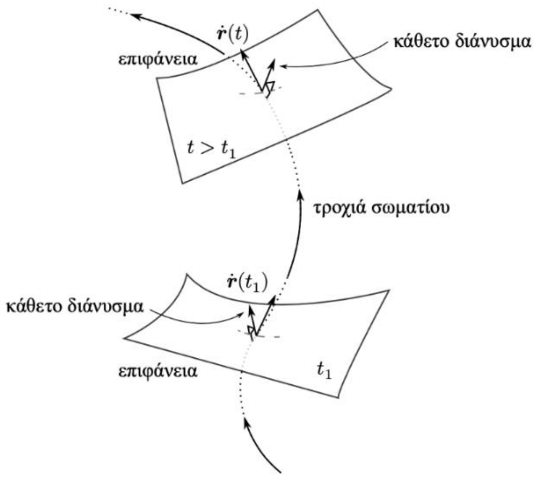
Για ευκολία διαλέξαμε την παραπάνω αρίθμηση των δεσμευτικών σχέσεων αλλά κάποιος μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε άλλη. Οι K το πλήθος μη ολόνομες σχέσεις δεν είναι ολοκληρώσιμες. Οι σχέσεις της πρώτης σειράς αποτελούν γεωμετρικούς δεσμούς και οι αντίστοιχες δυνάμεις δεσμών λέγονται δυνάμεις γεωμετρικού δεσμού, μπορούμε να τις λέμε και γεωμετρικές δυνάμεις. Όλες οι άλλες σχέσεις δεσμών αποτελούν κινηματικούς δεσμούς και οι αντίστοιχες δυνάμεις δεσμών λέγονται δυνάμεις κινηματικού δεσμού ή κινηματικές δυνάμεις. Στην περίπτωση ολόνομων δεσμών οι δεσμοί μπορεί να είναι γεωμετρικοί ή κινηματικοί και αντίστοιχα οι δυνάμεις των δεσμών, είναι δυνάμεις γεωμετρικού δεσμού (γεωμετρικές) ή δυνάμεις κινηματικού δεσμού (κινηματικές). Στην περίπτωση των μη ολόνομων δεσμών, οι δεσμοί είναι μόνο κινηματικοί και οι αντίστοιχες δυνάμεις είναι μόνο δυνάμεις κινηματικού δεσμού (κινηματικές).

Από τις γεωμετρικές μορφές μπορούμε να βρούμε με παραγώγιση ή διαφόριση τις κινηματικές μορφές. Αντίστροφα, με ολοκλήρωση μπορούμε να κάνουμε το αντίστροφο, οπότε το πολύ να έχουμε και μια προσθετική σταθερά. Η σταθερά έχει τιμή που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του χρονικά εξελισσόμενου συστήματος. Εννοείται ότι κατά την ανωτέρω διαδικασία, μπορεί οι δεδομένες κινηματικές μορφές να μην είναι ολικά διαφορικά ή ολοκληρώσιμες. Σε αυτή την περίπτωση θα χρειαστεί να πολλαπλασιαστούν επί ολοκληρωτικούς παράγοντες πριν την ολοκλήρωση ή ακόμη αν έχουμε πολλές εξισώσεις, να χρειαστεί να ληφθούν και συνδυασμοί τους και μετά να ολοκληρωθούν. Δηλαδή στην περίπτωση που υπάρχει ολοκληρωσιμότητα πάντα μπορούμε να καταλήξουμε σε σχέσεις που περιέχουν ολικά διαφορικά και τελικώς σε γεωμετρικές μορφές.

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση ολόνομου δεσμού, όπου έχουμε μόνο ένα σωμάτιο το οποίο μπορεί να κινείται στον τρισδιάστατο (θεσικό) χώρο και είναι δέσμιο να βρίσκεται συνεχώς πάνω σε μια δισδιάστατη επιφάνεια αυτού του θεσικού χώρου (γεωμετρικός δεσμός) και δεν υπάρχει τριβή.

Η μη ύπαρξη τριβής σημαίνει ότι η δύναμη ένεκα του δεσμού, είναι κάθετη στην δισδιάστατη επιφάνεια, και κατά τις δυνατές μετατοπίσεις το έργο της δύναμης του δεσμού είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει η αρχή d' Alembert. Αυτή η επιφάνεια παριστάνεται με μια μοναδική δεσμευτική σχέση, την $f(\vec{r},t) = f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, και έχουμε το Σχ.(2.1). Η επιφάνεια στον θεσικό χώρο, γενικώς, κινείται και μπορεί να μεταβάλλει σχήμα με τον χρόνο.

Το Σχ. (2.1) αναφέρεται σε δυο διαφορετικές σταθερές τιμές του χρόνου $t_1, t \;\; t_1 < t$.



Σχήμα 2.1 *Δισδιάστατη επιφάνεια δεσμού σε τρισδιάστατο θεσικό χώρο για ένα (δέσμιο) σωμάτιο.*

Το διάνυσμα με τις τρεις συνιστώσες $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$ είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, υπό την προϋπόθεση ότι στη συγκεκριμένη επιφάνεια και θέση τη δεδομένη χρονική στιγμή, οι παραπάνω μερικές παράγωγοι δεν είναι όλες μηδέν και επίσης όλες είναι πεπερασμένες. Μπορούμε πάντα να γράψουμε τη σχέση του συνδέσμου έτσι που αυτές οι παράγωγοι να μην είναι μηδέν. Για παράδειγμα, η σχέση $f_{\mathrm{a}}(x_1, x_2, x_3) = (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) = 0$ και η σχέση $f_{\mathrm{b}}(x_1, x_2, x_3) = (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)^2 = 0$ με $(s_1, s_2, s_3) =$ σταθ., παριστάνουν και οι δυο τον ίδιο γεωμετρικό δεσμό, δεσμεύουν το σωμάτιο να βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο διάνυσμα (s_1, s_2, s_3). Όμως πάνω στη συγκεκριμένη επιφάνεια

$$\frac{\partial f_{\mathrm{a}}}{\partial x_i} = s_i \neq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Ενώ

$$\frac{\partial f_{\mathrm{b}}}{\partial x_i} = 2(s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) x_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Επομένως για τον σκοπό μας είναι χρήσιμη για την περιγραφή του παραπάνω δεσμού, μόνο η μια από τις δυο παραπάνω εκφράσεις, δηλαδή η έκφραση,

$$f_{\mathrm{a}}(x_1, x_2, x_3) = (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) = 0$$

Μια άλλη έκφραση, η $f_{\mathrm{c}}(x_1, x_2, x_3) = (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)^{1/2} = 0$ δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί διότι οι παράγωγοί της ως προς τα x_i απειρίζονται. Η δύναμη του δεσμού $\vec{F}_{\mathrm{c}}$, θα είναι συγγραμμική με το κάθετο διάνυσμα και για κάθε μια καρτεσιανή συνιστώσα της θα ισχύει $F_{\mathrm{c}i} = \lambda(t) \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$ ή $\vec{F}_{\mathrm{c}} = \lambda(t) \vec{\nabla} f$. Βλέπουμε ότι κάναμε ένα βήμα για τον προσδιορισμό της δύναμης δεσμού. Η δύναμη είναι ίση με το γινόμενο μιας άγνωστης συνάρτησης του χρόνου (πολλαπλασιαστής Lagrange) $\lambda(t)$ επί την κλίση της δεδομένης (γνωστής) έκφρασης της οποίας έκφρασης ο μηδενισμός καθορίζει τον ολόνομο δεσμό. Αυτά γενικεύονται και για σύστημα πολλών σωματίων και με πολλούς ολόνομους δεσμούς.

Τώρα θα δούμε τι ισχύει για τις δυνάμεις των δεσμών στην πιο γενική περίπτωση πολλών σωματίων και πολλών δεσμών οι οποίοι δεσμοί δίνονται στη μορφή Pfaff (μπορεί να είναι ολόνομοι ή μη ολόνομοι). Οι εξισώσεις των δεσμών σε αυτές τις περιπτώσεις είναι,

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\mathrm{d}x_i + A_j(x,t)\mathrm{d}t = 0 \quad j = 1,2,\ldots,M \quad .$$

M είναι το πλήθος των δεσμών.

Για τις δυνατές μετατοπίσεις έχουμε

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\delta x_i = 0 \quad j = 1,2,\ldots,M \tag{2.24}$$

Το συνολικό έργο των δυνάμεων για κάθε έναν δεσμό είναι μηδέν, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{3N} F_{\mathrm{c}ji}(x,t)\delta x_i = 0 \quad j = 1,2,\ldots,M \ . \tag{2.25}$$

Αυτό δηλώνει ότι, για κάθε δεσμό και κάθε χρονική στιγμή, οι δυνατές μετατοπίσεις είναι κάθετες στις δυνάμεις των δεσμών. Αυτό είναι ανεξάρτητο από το αν οι δεσμοί είναι ολόνομοι ή όχι. Χρειάζεται να βρούμε πως σχετίζονται οι δυνάμεις των δεσμών με γνωστές εκφράσεις που υπολογίζονται από τις δεδομένες δεσμευτικές σχέσεις, όπως κάναμε και στην προηγούμενη απλή περίπτωση ενός σωματίου με έναν ολόνομο γεωμετρικό δεσμό. Παρόλο που μπορούμε διαισθητικά να καταλάβουμε τι γίνεται, θα ακολουθήσουμε την παρακάτω κάπως πιο αυστηρή διαδικασία: Πολλαπλασιάζουμε την κάθε μια από τις σχέσεις (2.24) επί μια αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου $\lambda_j(t)$ (πολλαπλασιαστής Lagrange) και αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την κάθε μια από τις (2.25), οπότε βρίσκουμε,

$$\sum_{i=1}^{3N}\Big(F_{\mathrm{c}ji}(x,t) - \lambda_j(t)A_{ji}(x,t)\Big)\delta x_i = 0 \quad j{=}1,2,\ldots,M \ . \tag{2.26}$$

Επειδή για κάθε δεσμό j ισχύει μια δεσμευτική σχέση μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων δx_i, αυτό σημαίνει ότι μόνο $3N-M$ από τις μετατοπίσεις δx_i είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Επομένως M από αυτές τις δυνατές μετατοπίσεις θα εξαρτιόνται από τις άλλες. Ας λάβουμε τις πρώτες M , δx_1, να εξαρτιόνται από τις υπόλοιπες. Αφού τα $\lambda_j(t)$ είναι αυθαίρετα μπορούμε να διαλέξουμε τα M πρώτα από αυτά έτσι ώστε να ισχύουν $\sum_{i=1}^{M} F_{\mathrm{c}ji}(x,t) - \lambda_j(t)A_{ji}(x,t) = 0, \ \ j = 1,2,\ldots M$.

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση $\sum_{i=\mathrm{M}+1}^{3N}\Big(F_{\mathrm{c}ji}(x,t) - \lambda_j(t)A_{ji}(x,t)\Big)\delta x_i = 0$. Σε αυτή τη σχέση τα δx_i είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, επομένως εύκολα συμπεραίνουμε ότι για κάθε έναν όρο του αθροίσματος έχουμε

$$F_{\mathrm{c}ji}(x,t) - \lambda_j(t)A_{ji}(x,t) = 0 \quad i{=}M+1, M+2,\ldots,3N \ .$$

Τελικώς ισχύουν

$$F_{\mathrm{c}ji}(x,t) = \lambda_j(t)A_{ji}(x,t) \quad i{=}1,2,\ldots,3N \ j = 1,2,\ldots,M \ . \tag{2.27}$$

Αυτές είναι οι σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων των δεσμών και μεγεθών που βρίσκονται από τις δεδομένες δεσμευτικές σχέσεις. Αυτό σημαίνει πως οι σχέσεις μηδενισμού του δυνατού έργου των (άγνωστων) δυνάμεων των δεσμών

$$\sum_{i=1}^{3N} F_{cji}(x,t)\delta x_i = 0 \quad j=1,2,\dots,M \ ,$$

είναι ισοδύναμες με τις δεδομένες (γνωστές) δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων,

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\delta x_i = 0 \quad j=1,2,\dots,M \tag{2.28}$$

Αυτές είναι οι λεγόμενες πρόσθετες ή βοηθητικές συνθήκες (side conditions, auxiliary conditions) που συνδέουν τις δυνατές μετατοπίσεις.

Τονίζουμε ότι, η Αναλυτική Μηχανική ασχολείται κυρίως με συστήματα για τα οποία οι δυνάμεις του κάθε δεσμού δεν παράγουν έργο κατά τις δυνατές μετατοπίσεις του συστήματος. Επίσης, συνήθως, οι δεσμοί (όπως στα προηγούμενα) μπορεί να εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις που εξαρτώνται γραμμικά από τις ταχύτητες ή έχουν την ισοδύναμη μορφή εξισώσεων Pfaff.

Όταν οι εξισώσεις των δεσμών είναι πιο γενικές, της μορφής $g_l(q,\dot{q},t)=0$, όπου η εξάρτηση από τις ταχύτητες δεν είναι γραμμική, τότε δεν μπορούμε να έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις Pfaff και την παραπάνω ανάλυση. Σε αυτή την περίπτωση οι βοηθητικές σχέσεις πρέπει να προσδιοριστούν από τις σχέσεις των δεσμών με κάποια διαδικασία που να βασίζεται στον μερικό προσδιορισμό των δυνάμεων των δεσμών. Πρέπει και σε αυτή την περίπτωση το δυνατό έργο των δυνάμεων του κάθε δεσμού να είναι μηδέν. Θα αναφερθούμε σε αυτό το θέμα αργότερα.

Η τελευταία γενίκευση μπορεί να περιλάβει ως μερική περίπτωση και τους δεσμούς που είναι γραμμικοί ως προς τις ταχύτητες.

2.3.2 Μετάβαση σε γενικευμένες συντεταγμένες

Στη συνέχεια θα δείξουμε με περισσότερη αυστηρότητα, ότι για κάθε ολόνομο δεσμό, οι δυνάμεις του δεσμού, δηλαδή οι παθητικές δυνάμεις, μπορεί να απαλειφθούν από τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης, πράγμα που απλουστεύει κατά πολύ την αντιμετώπιση σχετικών προβλημάτων. Συγχρόνως, για κάθε ολόνομο δεσμό, μπορεί να μειωθεί κατά ένα η διάσταση του θεσικού χώρου, οπότε έχουμε λιγότερες γενικευμένες συντεταγμένες.

Θα υποθέσουμε και πάλι ότι έχουμε N σωμάτια και M σχέσεις δεσμών του παραπάνω τύπου, εκ των οποίων οι K' είναι ολόνομοι και οι K είναι μη ολόνομοι, $M=K+K'<3N$. Έχουμε δει ότι οι ολόνομοι δεσμοί πλήθους K' περιορίζουν τον προσβάσιμο θεσικό χώρο ενός συστήματος και τον κάνουν να έχει διάσταση $n=3N-K'$. Με άλλα λόγια, ο αναγκαίος και ικανός αριθμός (γενικευμένων) συντεταγμένων που χρειάζεται για να καθορίσει τη θέση ενός συστήματος είναι $n=3N-K'$. Πρόκειται για τις γνήσιες συντεταγμένες. Τέτοιες συντεταγμένες μπορεί να είναι διάφορα φυσικά μεγέθη, όχι κατ' ανάγκη με διαστάσεις μήκους. Ενώ το πλήθος τους παριστάνεται συνήθως με n.

Ξεκινούμε και πάλι από καρτεσιανές συντεταγμένες και για τους K' ολόνομους δεσμούς χρησιμοποιούμε τις γεωμετρικές τους σχέσεις. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$f_l(x_1,x_2,\dots,x_{3N},t)=0 \quad l=1,2,\dots,K'$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\dot{x}_i + A_j(x,t)=0 \\ &\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\mathrm{d}x_i + A_j(x,t)\mathrm{d}t = 0 \quad j=1,2,\dots,K \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$K'+K<3N \ .$$

Στην περίπτωση των ολόνομων δεσμών, είναι δυνατόν να θεωρήσει κάποιος το σύστημα των εξισώσεων των γεωμετρικών δεσμευτικών σχέσεων πλήθους K' (και αν αυτό είναι δυνατόν), να λύσει αυτό το σύστημα έτσι ώστε να εκφραστούν K' από τις καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των υπόλοιπων $3N-K'=n$. Στη συνέχεια αντικαθιστά στη λαγκρανζιανή και έτσι η λαγκρανζιανή γίνεται συνάρτηση λιγότερων συντεταγμένων. Αυτή είναι άμεση ενσωμάτωση των (ολόνομων) δεσμευτικών σχέσεων.

Ανεξάρτητα από το αν ακολουθηθεί αυτή η μέθοδος ή όχι, οι απαραίτητες (γνήσιες) συντεταγμένες που χρειάζονται για τον καθορισμό της θέσης του συστήματος στον θεσικό χώρο είναι λιγότερες από τις αρχικές, όπως ήδη ξέρουμε από τα προηγούμενα. Με αυτές τις λιγότερες συντεταγμένες και με τη χρήση των σχέσεων των δεσμών μπορούμε να βρούμε τη θέση οποιουδήποτε σωματίου του συστήματος. Αυτό, σε πολλές περιπτώσεις, δεν είναι απαραίτητο να γίνει. Είναι ευνόητο ότι ο χώρος των γνήσιων συντεταγμένων θέσης είναι υπόχωρος του αρχικού (πλήρους) θεσικού χώρου.

Μπορεί να γίνει μετάβαση σε άλλες γενικευμένες συντεταγμένες πριν από οποιαδήποτε διαδικασία που θα οδηγήσει στη μείωση του πλήθους των συντεταγμένων θέσης. Αν ακολουθηθεί αυτή τη διαδικασία, πρέπει να γίνει και μετασχηματισμός των σχέσεων των δεσμών. Στη συνέχεια μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος που αναφέραμε στην αρχή για τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Όμως αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται σε απλές περιπτώσεις αλλά δεν χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις με πολλές γεωμετρικές δεσμευτικές σχέσεις. Φανταστείτε ένα στερεό σώμα το οποίο έχουμε προσεγγίσει να αποτελείται από $N=10^{10}$ υλικά σημεία. Αν γράψουμε όλους τους γεωμετρικούς δεσμούς μεταξύ όλων των σημείων που σχετίζονται με το γεγονός ότι οι αποστάσεις τους είναι σταθερές ανεξάρτητα από τη θέση του συστήματος στον χώρο, καταλαβαίνετε ότι θα έχουμε ένα τεράστιο πλήθος σχέσεων, είναι αδύνατο να εργαστούμε με κάτι τέτοιο. Θυμηθείτε ότι η θέση ενός στερεού σώματος στον χώρο των τριών διαστάσεων καθορίζεται από έξι ανεξάρτητες συντεταγμένες, δηλαδή οι εξισώσεις δεσμών είναι $3\times10^{10}-6$. Κανείς δεν ενδιαφέρεται να ξέρει τη θέση του καθενός υλικού σημείου του στερεού, παρόλο που μπορεί να τη βρει. Η μέθοδος που θα αναπτύξουμε είναι πιο βολική και ρεαλιστική.

Θυμίζουμε ότι οι μη ολόνομοι δεσμοί περιορίζουν την κινηματική του συστήματος αλλά δεν περιορίζουν τον θεσικό χώρο. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι κινηματικές εξισώσεις των μη ολόνομων δεσμών για να περιορίσουμε το πλήθος των απαραίτητων συντεταγμένων για τον καθορισμό της θέσης του συστήματος κάθε χρονική στιγμή. Το πλήθος των συντεταγμένων είναι το ίδιο με ή χωρίς τους μη ολόνομους δεσμούς. Εισάγουμε τους σχετικά αυθαίρετους καλά συμπεριφερόμενους (αντιστρεπτούς) μετασχηματισμούς συντεταγμένων θέσης:

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(x_1,x_2,...,x_{3N},t) \\ x_i &= x_i(q_1,q_2,...,q_{3N},t) \quad i=1,2,...,3N \ . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Εφόσον υπάρχουν K' ανεξάρτητοι ολόνομοι γεωμετρικοί δεσμοί και αντίστοιχες εξισώσεις, είναι βολικό να διαλέξουμε K' γενικευμένες συντεταγμένες με τέτοιο τρόπο που να εξαρτώνται από τις $x_i \;\; i=1,2,...,3N$ μόνον μέσω των γεωμετρικών σχέσεων των δεσμών. Επιλέγουμε να διαλέξουμε τις K' τελευταίες συντεταγμένες έτσι που να ισχύουν

$$q_{3N-K'+l}(x_1,x_2,...,x_{3N}) = \Phi_l\left(f_{K+1},f_{K+2},...,f_{K+K'}\right) \;\; l=1,2,...,K' . \tag{2.31}$$

$\Phi_l()$ είναι αυθαίρετες, καλά συμπεριφερόμενες, συναρτήσεις. Μπορεί κάποιος να διαλέξει τις $\Phi_l()$ να συμπίπτουν με τις f_{K+l}, αλλά αυτό δεν είναι πολλές φορές το πιο βολικό. Δηλαδή, υπάρχουν πολλοί τρόποι να διαλέξει κάποιος αυτές τις συναρτήσεις, οπότε διαλέγει τις πιο κατάλληλες για την περίπτωση. Πρέπει να τονίσουμε ξανά ότι στην πράξη σχεδόν ποτέ δε χρειάζεται να γραφτούν οι παραπάνω σχέσεις, μας αρκεί το ότι υπάρχουν τέτοιες σχέσεις. Το ότι δεν χρειάζεται να γραφτούν είναι και ένα από τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθοδολογίας. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις ώστε οι (2.31) να μπορεί να αντιστραφούν, οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις

$$f_{K+l} = f_{K+l}(q_{K+1},q_{K+2},...,q_{K+K'}) \;\; l=1,2,...,K' . \tag{2.32}$$

Επιλέγουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες που ορίζονται από τις (2.31) οπότε, εφόσον ισχύουν οι γεωμετρικοί δεσμοί που φαίνονται στην πρώτη σειρά των (2.29), βρίσκουμε

$$q_{K+l} = \Phi_l\left(0,0,...,0\right) \quad l = 1,2,...,K' . \tag{2.33}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι K' τελευταίες γενικευμένες συντεταγμένες είναι σταθερές ποσότητες, δηλαδή είναι ανεξάρτητες του χρόνου, άρα δεν μεταβάλλονται κατά την κίνηση του συστήματος.

Επομένως, καταλήξαμε στο ότι χρειάζεται να βρούμε πως εξελίσσονται στον χρόνο οι άλλες, δηλαδή πρώτες $n = 3N - K'$, συντεταγμένες, $q_1, q_2, ..., q_n$. Αν ενδιαφερόμαστε για τις θέσεις όλων των σωματίων του συστήματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη σειρά από τις σχέσεις (2.30). Όπως είπαμε, αυτό συνήθως δε χρειάζεται να γίνει. Ουσιαστικά με τον παραπάνω τρόπο, έγινε απαλειφή K' συντεταγμένων και ο θεσικός χώρος τώρα έχει διάσταση $n = 3N - K' < 3N$, δηλαδή μικρότερη από τη διάσταση $3N$, του αρχικού «πλήρους» χώρου. Αυτό είναι ένα είδος ενσωμάτωσης των δεσμών (embedding of constraints), όπου γίνεται μείωση του πλήθους των συντεταγμένων θέσης. Παραμένουν οι μη ολόνομοι δεσμοί του συστήματος οι οποίοι δεν μπορούν να ενσωματωθούν με τον ανωτέρω τρόπο, δηλαδή δεν μπορούν να περιορίσουν τη διάσταση του θεσικού χώρου, διότι δεν υπάρχουν για αυτούς γεωμετρικές σχέσεις οι οποίες να χρησιμοποιηθούν για την παραπάνω διαδικασία που ακολουθήθηκε για τους ολόνομους δεσμούς. Συνοψίζουμε λέγοντας ότι ξεκινήσαμε με σύστημα που είχε ολόνομους και μη ολόνομους δεσμούς, ενσωματώσαμε τους ολόνομους δεσμούς, ουσιαστικά τους απαλείψαμε, και καταλήξαμε σε περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος με λιγότερες γενικευμένες συντεταγμένες. Οι θεσικοί βαθμοί ελευθερίας περιορίστηκαν στους $n = 3N - K' < 3N$. Στον νέο θεσικό χώρο οι (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες δεν υπόκεινται στους ολόνομους δεσμούς αλλά μόνο στους μη ολόνομους. Στη συνέχεια θα μετασχηματίσουμε διάφορες σχέσεις έτσι ώστε να περιέχουν μόνο τις νέες (γνήσιες) συντεταγμένες. Εφόσον οι τελευταίες K' γενικευμένες συντεταγμένες είναι σταθερές, μπορούμε να γράψουμε, $q_{K+l} = \alpha_l \quad l = 1,2,...,K'$, οπότε από τις δεύτερες των σχέσεων (2.30) βρίσκουμε

$$x_i = x_i(q_1,q_2,...,q_n,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{K'},t) \qquad i = 1,2,...,3N . \tag{2.34}$$

Μπορεί κάποιος να καταλάβει από την αντιστροφή των (2.34), ότι οι σταθερές είναι δυνατόν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Διαφορίζοντας αυτές τις σχέσεις καταλήγουμε στις

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}\mathrm{d}t \quad i = 1,2,...,3N . \tag{2.35}$$

Παγώνουμε τον χρόνο οπότε από τις τελευταίες βρίσκουμε για τις δυνατές μετατοπίσεις:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad i = 1,2,...,3N . \tag{2.36}$$

Οι πιθανές μετατοπίσεις δίνονται από τις σχέσεις των μη ολόνομων δεσμών τύπου Pfaff που φαίνονται στις (2.29), δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}(x,t)\mathrm{d}x_i + A_j(x,t)\mathrm{d}t = 0 \quad j = 1,2,...,K . \tag{2.37}$$

Λαμβάνουμε υπόψη τις (2.35) και μετά από κάποιες πράξεις βρίσκουμε τη μορφή των μη ολόνομων εξισώσεων των δεσμών στις γνήσιες γενικευμένες συντεταγμένες,

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ji}(q,t)\mathrm{d}q_i + B_j(q,t)\mathrm{d}t = 0 \;\; j = 1,2,...,K$$
$$\text{ή} \;\; \sum_{i=1}^{n} B_{ji}(q,t)\dot{q}_i + B_j(q,t) = 0 \;\; j = 1,2,...,K \tag{2.38}$$
$$\text{όπου} \;\; B_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} A_{ji}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \;\; B_j = \sum_{i=1}^{3N} A_{ji}\frac{\partial x_i}{\partial t} + A_j \;\; .$$

Από την πρώτη σειρά συμπεραίνουμε ότι οι δυνατές μετατοπίσεις ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ji}(q,t)\delta q_i = 0 \;\; j = 1,2,...,K \, . \tag{2.39}$$

Στα επόμενα θα αλλάξουμε συμβολισμό και στη θέση των B_{ji}, B_j θα χρησιμοποιούμε ξανά τα σύμβολα που είχαμε με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή τα A_{ji}, A_j .

Αν δεν υπάρχουν μη ολόνομοι δεσμοί, το σύστημα με τους ενσωματωμένους ολόνομους δεσμούς λέγεται ότι είναι ένα ολόνομο σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας (δηλαδή χωρίς δεσμούς).

Θυμίζουμε ότι για το σύμβολο δ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις, για οποιεσδήποτε γενικευμένες συντεταγμένες, συμπεριλαμβανομένων των καρτεσιανών:

$$\mathrm{d}\delta q = \delta \mathrm{d}q, \quad \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}t} = \delta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \delta\dot{q} \; .$$

$\delta\dot{q}$ είναι οι δυνατές, δυνητικές (virtual) ταχύτητες. Οι σχέσεις μετασχηματισμού για τα διανύσματα θέσης των καρτεσιανών συντεταγμένων και τις (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες είναι προφανώς

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \;\; i = 1,2,...,N \\ q_j &= q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \;\; j = 1,2,...,n \; . \end{aligned} \tag{2.40}$$

Στην Αναλυτική Μηχανική, μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη μορφή των μεγεθών, T, V, U, L, Q, συναρτήσει των καρτεσιανών συντεταγμένων σε αδρανειακό σύστημα και να τα μετασχηματίσουμε στη μορφή με γνήσιες γενικευμένες συντεταγμένες. Φυσικά το ίδιο γίνεται για τους μη ενσωματωμένους δεσμούς. Έτσι όλα εκφράζονται συναρτήσει των n γνήσιων συντεταγμένων.

Δεν είναι ανάγκη να ξεκινούμε από καρτεσιανές συντεταγμένες, πολλές φορές έχουμε ένα μηχανικό σύστημα εκφρασμένο ήδη σε γενικευμένες συντεταγμένες και στη συνέχεια μπορούμε να προσθέσουμε επιπλέον δεσμούς στο σύστημα. Η μείωση του πλήθους των συντεταγμένων είναι ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε, εξαρτάται μόνο από τις ολόνομες δεσμευτικές σχέσεις.

2.3.3 Αρχή d' Alembert σε γενικευμένες συντεταγμένες

Η αρχή d' Alembert σε καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \, . \tag{2.41}$$

Υποθέτουμε ότι οι ολόνομοι δεσμοί έχουν ενσωματωθεί με τον παραπάνω τρόπο, ενώ μπορεί να υπάρχουν και πρόσθετοι μη ολόνομοι δεσμοί. Οι θεσικοί βαθμοί ελευθερίας είναι n και τόσες είναι και οι (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες. Θα μετασχηματίσουμε την παραπάνω αρχή ώστε να ισχύει για οποιεσδήποτε γενικευμένες συντεταγμένες. Για τον σκοπό αυτό τα $\ddot{\vec{r}}_i, \vec{F}_i, \delta\vec{r}_i$ πρέπει να γραφτούν ως συναρτήσεις των $q_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., n$.

Ας αρχίσουμε με τα $\delta\vec{r}_i$ (δυνατές μετατοπίσεις). Ξεκινούμε από τις Εξ. (2.40) και βρίσκουμε

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta q_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad i = 1, 2, ..., N\ . \tag{2.42}$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (2.41) τις (2.42) και καταλήγουμε στην

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\delta q_\alpha \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0\ . \tag{2.43}$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον όρο που έχει τη δύναμη στην Εξ. (2.43). Ο όρος αυτός είναι το δυνατό έργο των ενεργητικών δυνάμεων. Πράγματι, από τη γνωστή σχέση, $\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i$, αντικαθιστώντας τις δυνατές μετατοπίσεις από την εξίσωση (2.42) βρίσκουμε,

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta q_\alpha \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\ . \tag{2.44}$$

Εννοείται ότι όλα, όπως και οι δυνάμεις, έχουν εκφραστεί συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων q. Στη συνέχεια ορίζουμε ως γενικευμένη συνιστώσα δύναμης που σχετίζεται με τη συντεταγμένη q_α την ποσότητα

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\ ,\ \delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{2.44}$$

Στην (2.45) φαίνεται και η μορφή για το δυνατό έργο με γενικευμένες δυνάμεις και δυνατές μετατοπίσεις. Τώρα, στην Εξ. (2.43) θα ασχοληθούμε με τον όρο που περιέχει τις επιταχύνσεις (ο όρος αυτός περιέχει τις αναφερόμενες ως αδρανειακές δυνάμεις), και έχουμε

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\ . \tag{2.46}$$

Για τις ταχύτητες έχουμε

$$\vec{\upsilon}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

οπότε ισχύουν

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\ . \tag{2.47}$$

Για τον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος της Εξ. (2.46) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}q_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial q_\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Εισάγουμε τα αποτελέσματα των Εξ. (2.47) και Εξ. (2.48) στην Εξ. (2.46), πολλαπλασιάζουμε επί m_i και αθροίζουμε ως προς i, οπότε βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\cdot\frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - m_i\vec{\upsilon}_i\cdot\frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial q_\alpha}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},
\end{aligned}
$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματίων είναι $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\upsilon_i^2$. Εδώ την έχουμε μετασχηματίσει ώστε να είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων, $T = T(q,\dot{q},t)$, βλ. Παράρτημα Π3. Η Εξ. (2.43) γίνεται όπως φαίνεται στην πρώτη σειρά των εξισώσεων (2.49). Η δεύτερη σειρά αναφέρεται στην περίπτωση που κάποιες, αλλά όχι όλες οι δυνάμεις, προέρχονται από δυναμική συνάρτηση, τότε μόνο για αυτές ισχύει $L = T - V$, οι άλλες παριστάνονται με Q' .

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\delta q_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha\right)\right\} = 0 \\
&\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\delta q_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - Q'_\alpha\right)\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Αυτή είναι η αρχή του d' Alembert για γενικευμένες συντεταγμένες.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι δυνατές μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή δεχόμαστε ότι δεν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων. Έτσι ακολουθούμε την παρακάτω γνωστή διαδικασία, συγκεκριμένα: Αφού όλα τα δq_α είναι αυθαίρετα, μπορούμε να πάρουμε το πρώτο, δηλαδή το δq_1 μη μηδενικό και όλα τα άλλα μηδέν, στη συνέχεια το δεύτερο, το δq_2 , μη μηδενικό και όλα τα άλλα μηδέν, κ.ο.κ. Αυτό οδηγεί σε n ανεξάρτητες εξισώσεις Lagrange, της μορφής

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1,2,...,n \tag{2.50}
$$

ή της μορφής

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q'_\alpha, \ \alpha = 1,2,...,n. \tag{2.51}
$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι, το πολύ, δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις ως προς τον χρόνο. Αυτό φαίνεται αν αναπτύξουμε τις παραγώγους ως προς τον χρόνο. Έχουμε για την Εξ. (2.50) τις Εξ. (2,52), (ανάλογα ισχύουν για την Εξ. (2.51), όπου έχουμε αντί των T,Q τα L,Q'),

$$\sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial t\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha(q,\dot{q},t)\;. \tag{2.52}$$

Για να είναι δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις πρέπει $\det\dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}\neq 0$. Αυτό δεν ισχύει αν έχουμε γραμμική εξάρτηση από τις ταχύτητες.

Θυμίζουμε ξανά ότι για το δυνατό έργο των ασκούμενων γενικευμένων δυνάμεων ισχύει αυτό που είδαμε και στα προηγούμενα, δηλαδή:

$$\delta W=\sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j\;. \tag{2.53}$$

Παρατηρούμε και πάλι ότι ένα χαρακτηριστικό των εξισώσεων Euler-Lagrange είναι ότι η μορφή τους δεν εξαρτάται από το ποιες είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες.

Το άλλο σημαντικό, που έχουμε ήδη αναφέρει, είναι ότι στην περίπτωση ύπαρξης ολόνομων δεσμών μπορούμε να έχουμε τις εξισώσεις κίνησης ανεξάρτητες των δυνάμεων των δεσμών. Τονίζουμε ξανά ότι δεν είναι εύκολο να προσδιορίσει κάποιος τη λαγκρανζιανή ως προς μη αδρανειακά συστήματα, γι αυτό είναι καλύτερα να ξεκινά από αδρανειακό σύστημα, να προσδιορίζει τα T και V (ή U) ως προς συντεταγμένες του αδρανειακού συστήματος, στη συνέχεια να εφαρμόζει τον κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων μεταξύ αδρανειακού και μη αδρανειακού συστήματος και να εκφράζει τα T και V (ή U) συναρτήσει των συντεταγμένων του μη αδρανειακού. Στη συνέχεια εφαρμόζει τη «συνταγή»

$$L=T-V\,,\ \text{ή}\ L=T-U\,. \tag{2.54}$$

Παρόλο που σύμφωνα με όσα είπαμε είναι αυτονόητο ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange έχουν την ίδια μορφή ανεξάρτητα από τις γενικευμένες συντεταγμένες, μπορεί κάποιος να δείξει αυτό με απευθείας υπολογισμό. Δηλαδή να δείξει ότι, κάθε μετασχηματισμός μεταξύ (γενικευμένων) συντεταγμένων, όπου μπορεί να υπεισέρχεται και ο χρόνος, αφήνει αναλλοίωτη τη μορφή των εξισώσεων Euler-Lagrange. Αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί λέγονται σημειακοί μετασχηματισμοί ή μετασχηματισμοί σημείου.

2.4 Δυναμικά που εξαρτώνται από τις ταχύτητες

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυναμική συνάρτηση (δυναμικό) που εξαρτάται από τις ταχύτητες (γενικευμένο δυναμικό). Σε αυτή την περίπτωση οι γενικευμένες δυνάμεις οι οποίες προέρχονται από αυτό υπολογίζονται ως εξής

$$\begin{aligned}&U=U(q,\dot{q},t)\\&Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_j}\right),\quad j=1,2,...,n\end{aligned} \tag{2.55}$$

Η λαγκρανζιανή υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση και εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξισώσεις του Lagrange, δηλαδή έχουμε την αντίστοιχη της Εξ. (2.51), όπου μπορεί να υπάρχουν και δυνάμεις, Q', οι οποίες δεν προέρχονται από την εν λόγω δυναμική συνάρτηση.

$$\begin{aligned}&L(q,\dot{q},t)=T(q,\dot{q},t)-U(q,\dot{q},t)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q'_\alpha\qquad \alpha=1,2,...,n.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Οι δυνάμεις που γενικώς προέρχονται από δυναμικό το οποίο μπορεί να εξαρτάται και από τις ταχύτητες, λέγονται μονογενείς δυνάμεις, όλες οι άλλες λέγονται πολυγενείς δυνάμεις. Με δεδομένο ότι οι δυνάμεις δε μπορεί να εξαρτώνται από τις επιταχύνσεις, προκύπτει πως η εξάρτηση της U από τις ταχύτητες μπορεί να είναι μόνο γραμμική, δηλαδή έχουμε τη σχέση $U=\sum_{i=1}^{n}a_i(q,t)\dot{q}_i+a_0(q,t)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι για ένα σύστημα υπάρχει λαγκρανζιανή της μορφής $L=T-U(q,\dot{q},t)$, τότε οι προκύπτουσες από αυτήν εξισώσεις Lagrange είναι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)=0$$

Από αυτές προκύπτουν οι επιμέρους εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Είναι σαφές ότι έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i$$

όπου οι δυνάμεις Q_i προκύπτουν από την $U(q,\dot{q},t)$.

Έτσι φαίνεται ότι σε αυτή την περίπτωση, πράγματι, οι δυνάμεις υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$Q_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\,.$$

2.5 Ηλεκτρομαγνητική δύναμη - Αδρανειακές δυνάμεις

Χαρακτηριστική περίπτωση μονογενούς δύναμης που εξαρτάται από την ταχύτητα είναι η δύναμη Lorentz σε φορτισμένο σωματίδιο που κινείται μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν άλλου είδους δυνάμεις. Αυτή η δύναμη μπορεί να προέλθει από την παρακάτω δυναμική συνάρτηση $U=U(q,\dot{q},t)$ και την αντίστοιχη λαγκρανζιανή

$$\begin{aligned} U&=e_q\Phi-e_q\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}\\ L&=\frac{1}{2}m\upsilon^2-e_q\Phi+e_q\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}\end{aligned}\tag{2.57}$$

όπου e_q είναι το φορτίο του σωματιδίου, $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητά του, Φ είναι το βαθμωτό δυναμικό και $\vec{A}$ το διανυσματικό δυναμικό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Παίρνοντας ως συντεταγμένες τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματίου σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και γράφοντας τις εξισώσεις του Lagrange, καταλήγουμε σε εξισώσεις κίνησης όπου εμφανίζεται η γνωστή δύναμη Lorentz

$$\vec{F}=e_q\left(\vec{E}+(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\right).$$

Δηλαδή, αφού λάβουμε υπόψη ότι

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

βρίσκουμε ότι

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = e_q\left(\vec{E} + (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\right). \tag{2.58}$$

Σημειώνουμε πως ανάλογα ισχύουν για τις αδρανειακές δυνάμεις. Συγκεκριμένα, αν έχουμε ένα σωμάτιο του οποίου η κίνηση περιγράφεται με τις συντεταγμένες ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αξόνων (το οποίο είναι μη αδρανειακό σύστημα), τότε έχουμε την παρακάτω δυναμική συνάρτηση και αντίστοιχη λαγκρανζιανή.

$$\begin{aligned} U &= -m\vec{\upsilon}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r} - \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 \\ L &= \frac{1}{2}m\upsilon^2 + m\vec{\upsilon}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r} + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Βλέπουμε και εδώ γραμμική εξάρτηση από τις ταχύτητες, όπως και στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Υποθέσαμε ότι δεν ασκούνται συνήθεις δυνάμεις στο σωμάτιο, αν υπάρχουν και προέρχονται από δυναμική συνάρτηση αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη στις ανωτέρω σχέσεις. Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ είναι η ταχύτητα ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του στρεφόμενου συστήματος ως προς το (ακίνητο) αδρανειακό σύστημα και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα. Αυτά οδηγούν στις γνωστές εξισώσεις κίνησης, όπου εμφανίζονται το φαινόμενο Coriolis (χρησιμοποιείται και ο όρος δύναμη Coriolis), η φυγόκεντρος δύναμη και αν η γωνιακή ταχύτητα εξαρτάται από τον χρόνο, η δύναμη (του) Euler.

2.6 Ισοδύναμες λαγκρανζιανές

Η λαγκρανζιανή καθορίζει κατά μοναδικό τρόπο τις εξισώσεις κίνησης μηχανικού συστήματος αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν πολλές λαγκρανζιανές που οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις κίνησης, αυτές είναι ισοδύναμες λαγκρανζιανές. Αυτό είναι αντικείμενο μαθηματικής μελέτης μέχρι και τις μέρες μας. Εδώ θα περιοριστούμε σε μια απλή περίπτωση. Θα δείξουμε ότι αν σε κάποια λαγκρανζιανή προσθέσουμε μια συνάρτηση η οποία είναι ολική παράγωγος ως προς τον χρόνο κάποιας συνάρτησης (μόνο) των q,t τότε οι τελικές εξισώσεις κίνησης παραμένουν οι ίδιες. Σημειώνουμε όμως ότι αν δυο λαγκρανζιανές δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης αυτό δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι διαφέρουν κατά τη συνάρτηση που αναφέραμε παραπάνω. Τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το ζευγάρι (ισοδύναμων) λαγκρανζιανών

$$L_1 = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1q_2, \quad L_2 = \frac{1}{2}\left((\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 - (q_1)^2 - (q_2)^2\right).$$

Η L_2 είναι φανερό ότι περιγράφει δυο μη αλληλεπιδρώντες αρμονικούς ταλαντωτές μέσα σε ίδιο δυναμικό. Παρόλο που δεν είναι προφανές και η L_1 περιγράφει την ίδια περίπτωση. Ένα άλλο ζευγάρι ισοδύναμων λαγκρανζιανών είναι το ζευγάρι

$$L_1 = q^2\dot{q}^4 \quad , L_2 = q^3\dot{q}^6 .$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι το κάθε ένα από τα δυο παραπάνω ζευγάρια λαγκρανζιανών, οδηγεί σε ίδιες εξισώσεις κίνησης χωρίς να διαφέρουν κατά μια ολική παράγωγο κάποιας συνάρτησης των q,t.

Έστω τώρα ότι έχουμε τις λαγκρανζιανές

$$L = L(q,\dot{q},t), \quad L_1 = L + \frac{\mathrm{d}G(q,t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.60}$$

Θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις του Lagrange και κατά συνέπεια και οι τελικές (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης είναι ίδιες για τις δυο αυτές λαγκρανζιανές. Έχουμε για την λαγκρανζιανή $L = L(q,\dot{q},t)$ τις εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,2,...,n\,. \tag{2.61}$$

Τα Q αντιπροσωπεύουν δυνάμεις που δεν εκφράστηκαν με τη λαγκρανζιανή. Μπορεί να είναι μη μονογενείς δυνάμεις. Αναπτύσσουμε την έκφραση του πρώτου μέλους και βρίσκουμε για τις τελικές εξισώσεις κίνησης:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}\dot{q}_i+\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j,\quad j=1,2,...,n\,.$$

Οι εκφράσεις που παριστάνονται με το E_i, για τις οποίες ισχύουν $-E_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}$, είναι ένα είδος αυτών που λέγονται εκφράσεις του Euler. Αυτό είναι ανεξάρτητο από το αν ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange ή όχι. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τη λαγκρανζιανή της Εξ. (2.60), δηλαδή την $L_1=L_1(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+g(q,\dot{q},t)$, όπου

$$g(q,\dot{q},t)=\frac{\mathrm{d}G(q,t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial G}{\partial t}\,.$$

Έχουμε την αντίστοιχη έκφραση του Euler,

$$-E_{1i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L_1}{\partial q_i}\,.$$

Επομένως,

$$-E_{1i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L_1}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i},\quad i=1,2,...,n\,. \tag{2.62}$$

Για την $g(q,\dot{q},t)$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial G}{\partial q_i},\quad \frac{\partial g}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial t}\,. \tag{2.63}$$

Επίσης ισχύουν

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial q_i},\ i=1,2,...,n\,. \tag{2.64}$$

Έτσι καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,...,n..$$

Τελικώς, βρίσκουμε

$$-E_{1i} = -E_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \ i = 1, 2, ..., n .$$

Οι εκφράσεις Euler, είναι ίδιες ανεξάρτητα από το αν ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange ή όχι, δηλαδή για οποιεσδήποτε εξαρτήσεις $q_i = q_i(t)$ και όχι μόνο για την πραγματική κίνηση. Όμως ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange Εξ. (2.61), επομένως από τις τελευταίες προκύπτει ότι και για τη λαγκρανζιανή L_1 θα ισχύουν ακριβώς οι ίδιες εξισώσεις Lagrange. Δηλαδή οι παρακάτω εξισώσεις είναι ίδιες

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_1}{\partial q_i} = Q_i, \ \ i = 1, 2, ..., n . \tag{2.65}$$

Προφανώς και οι τελικές εξισώσεις κίνησης θα είναι ίδιες. Αυτή η περίπτωση είναι ένα είδος μετασχηματισμού βαθμίδας (gauge transformation). Σε αυτή την κατηγορία υπάγεται η περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, όπου ο κατωτέρω μετασχηματισμός του διανυσματικού και του βαθμωτού δυναμικού

$$\begin{aligned} &\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t) \\ &\phi \to \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.66}$$

(με ψ αυθαίρετη, διαφορίσιμη, συνάρτηση), δεν επηρεάζει τη δύναμη Lorentz και επομένως τις εξισώσεις κίνησης του φορτισμένου σωματιδίου.

2.7 Εξισώσεις Lagrange με δεσμούς. Υπολογισμός δυνάμεων δεσμών

Στα προηγούμενα δώσαμε τις εξισώσεις Lagrange με γενικευμένες συντεταγμένες αλλά χωρίς δεσμούς. Εισάγαμε τις γενικευμένες συντεταγμένες ενώ υποθέσαμε πως υπήρχαν μόνο ολόνομοι δεσμοί, έτσι μειώσαμε το πλήθος των συντεταγμένων του δυναμικού συστήματος που εξετάζουμε, αφού κάναμε ενσωμάτωση όλων των (ολόνομων) δεσμών και καταλήξαμε στις γνήσιες συντεταγμένες, οπότε οι εξισώσεις Lagrange αναφέρονταν σε σύστημα χωρίς δεσμούς.

Τώρα θα δούμε πως εργαζόμαστε όταν θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αλλά μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε και τις δυνάμεις των δεσμών, ολόνομων ή μη ολόνομων. Πολλές φορές, ενώ ξέρουμε ότι κάποιοι δεσμοί είναι ολόνομοι, δεν τους ενσωματώνουμε ώστε να διώξουμε τις δυνάμεις των δεσμών αυτών και να μειώσουμε το πλήθος των συντεταγμένων. Συνήθως δεν κάνουμε αυτή την ενσωμάτωση δεσμών όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις αυτών των ολόνομων δεσμών με τη μέθοδο που θα αναπτύξουμε παρακάτω. Για τους μη ολόνομους δεσμούς ακολουθούμε αυτή τη μέθοδο ακόμη και αν δεν μας ενδιαφέρουν οι δυνάμεις τους. Όλοι οι εναπομένοντες δεσμοί θα είναι στη μορφή Pfaff. Θα έχουμε επομένως τη σχέση της αρχής του d' Alembert, Εξ. (2.49), μαζί με δεσμευτικές διαφορικές εξισώσεις μεταξύ των γενικευμένων συντεταγμένων και του χρόνου,

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\delta q_\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - Q'_\alpha\right)\right\} = 0 \\ &\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\mathrm{d}q_k + A_l(q,t)\mathrm{d}t = 0, \quad l = 1, 2, ..., M \end{aligned} \tag{2.67}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι εδώ οι n το πλήθος δq , οι δυνατές μετατοπίσεις, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, άρα δεν μπορούμε να καταλήξουμε στις εξισώσεις κίνησης, Εξ. (2.51). Πρέπει με χρήση των δεσμευτικών σχέσεων να προσδιορίσουμε τις δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των δq_α . Είναι αυτές που ονομάσαμε στα προηγούμενα, πρόσθετες σχέσεις (συνθήκες) ή βοηθητικές σχέσεις (συνθήκες) (side conditions, auxiliary conditions). Όπως έχουμε ξαναπεί, αυτές οι δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων σχετίζονται με το γεγονός ότι κατά τις δυνατές μετατοπίσεις το έργο των δυνάμεων του κάθε δεσμού είναι μηδέν. Στη Μηχανική οι σχέσεις που προκύπτουν μεταξύ των δq (δυνατές μετατοπίσεις) από τις διαφορικές εξισώσεις των δεσμών των Εξ. (2.67) μορφής Pfaff, βρίσκονται θέτοντας στις ανωτέρω δεσμευτικές σχέσεις $\mathrm{d}t = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\delta q_k = 0, \quad l = 1, 2, ..., M \,. \tag{2.68}$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε διαλέγοντας κάποιες δυνατές μετατοπίσεις δq_α, $(n-M)$ το πλήθος, ως ανεξάρτητες, στη συνέχεια να εκφράσουμε τις υπόλοιπες ως συναρτήσεις αυτών, έτσι τελικώς καταλήγουμε σε εκφράσεις με μόνο ανεξάρτητες δυνατές μετατοπίσεις, οπότε μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις εξέλιξης με τον χρόνο του συστήματος. Αυτό είναι ένα άλλο είδος ενσωμάτωσης, είναι ενσωμάτωση των δυνατών μετατοπίσεων.

Δεν θα προχωρήσουμε έτσι αλλά θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Πολλαπλασιάζουμε τις Εξ. (2.68) επί τους πολλαπλασιαστές $\lambda_l(t)$ $l = 1, 2, ..., M$, οι οποίοι είναι γενικώς M συναρτήσεις του χρόνου που πρέπει να προσδιοριστούν και αφού αθροίσουμε στα l βρίσκουμε

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} \lambda_l(t) A_{lk}(q,t)\delta q_k = 0. \tag{2.69}$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε κατά μέλη την Εξ. (2.69) από την πρώτη από τις Εξ. (2.67) και βρίσκουμε τελικώς

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \delta q_\alpha \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{l\alpha}(q,t) - Q'_\alpha \right\} = 0 \tag{2.70}$$

Αφού έχουμε κρατήσει M δεσμευτικές σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι μεταξύ των n δυνατών μετατοπίσεων υπάρχουν μόνο $m = n - M$ ανεξάρτητες. Στη συνέχεια ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία, μπορούμε να διαλέξουμε τις πρώτες στη σειρά δυνατές μετατοπίσεις, πλήθους m, ως αυθαίρετες (ανεξάρτητες) και τις επόμενες M ως εξαρτημένες. Στη συνέχεια διαλέγουμε τους M πολλαπλασιαστές $\lambda_l(t)$ να πληρούν τις M το πλήθος σχέσεις

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{l\alpha}(q,t) - Q'_\alpha = 0, \quad \alpha = m+1, m+2, ..., n \,. \tag{2.71}$$

Επομένως η Εξ. (2.70) ανάγεται στην Εξ. (2.72) για τις m πρώτες ανεξάρτητες δυνατές μετατοπίσεις

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \delta q_\alpha \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{l\alpha}(q,t) - Q'_\alpha \right\} = 0 \,. \tag{2.72}$$

Αφού αυτές οι δυνατές μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες, ο κάθε όρος του αθροίσματος πάνω στα α =1,2,..,m θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{l\alpha}(q,t) - Q'_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., m \,. \tag{2.73}$$

Τελικώς οι Εξ. (2.71) και Εξ. (2.73) οδηγούν στις Εξ. (2.74)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lj}(q,t)-Q'_j=0,\ \ j=1,2,...,n\,. \tag{2.74}$$

Αυτές μαζί με τις εξισώσεις των δεσμών της Εξ. (2.67), στη μορφή

$$\sum_{k=1}^{n}A_{lk}(q,t)\dot{q}_k+A_l(q,t)=0,\quad l=1,2,...,M \tag{2.75}$$

μας λύνουν το πρόβλημα. Η παραπάνω διαδικασία, με τους πολλαπλασιαστές Lagrange, οδηγεί στην λεγόμενη παράθεση (adjoining) των σχέσεων των δυνατών μετατοπίσεων Εξ. (2.68) που σχετίζονται με τους δεσμούς, λέμε ότι έχουμε παράθεση των δεσμών.

Σημειώνουμε εδώ ότι, οι Εξ. (2.68), οι πρόσθετες συνθήκες (side conditions), δεν είναι απαραίτητο να οδηγούν από πιθανές σε πιθανές καταστάσεις. Δηλαδή οι μετατοπισμένες δεν ικανοποιούν κατ' ανάγκη τις Εξ. (2.75) των δεσμών. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε για την περίπτωση δεσμών Pfaff, είναι σε συμφωνία με όσα είπαμε στα προηγούμενα για τις δυνάμεις των δεσμών. Είναι μάλλον εύλογο από την Εξ. (2.74) ότι αφού ο όρος $\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lj}(q,t)$ προστίθεται στον όρο Q_j που αντιπροσωπεύει ασκούμενες γενικευμένες δυνάμεις, παριστάνει τις δυνάμεις των δεσμών.

Αν έχουμε ολόνομους δεσμούς, τότε από τις σχέσεις,

$$f_l(q,t)=0\quad l=1,2,...,M$$

καταλήγουμε στις ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\frac{df_l}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial t}\quad l=1,2,...M\\
&\text{άρα}\ \ \frac{df_l}{dt}=\sum_{k=1}^{n}A_{lk}\dot{q}_k+A_l\quad l=1,2,...M\\
&\text{όπου}\ \ A_{lk}=\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_k},\ A_l=\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Αυτό σημαίνει ότι για τη λύση του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_k}-Q'_j=0,\ \ j=1,2,...,n\\
&f_l(q,t)=0\ \ l=1,2,...,M\quad .
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Θα ακολουθήσουμε κατά κάποιον τρόπο την αντίστροφη πορεία για να επιβεβαιώσουμε και αλλιώς τις σχέσεις για τις δυνάμεις των δεσμών που ήδη ξέρουμε. Όταν υπάρχουν δεσμοί, υπεισέρχονται στις εξισώσεις Lagrange οι δυνάμεις των δεσμών όταν οι δεσμοί δεν είναι ολόνομοι. Επίσης υπεισέρχονται, όταν οι δεσμοί είναι ολόνομοι, δεν έχουν ενσωματωθεί και είναι στη μορφή Pfaff. Αυτό σημαίνει ότι οι γενικευμένες συνιστώσες (ολικής) δύναμης στις εξισώσεις Lagrange θα είναι το άθροισμα των ασκούμενων δυνάμεων, Q', και των δυνάμεων των δεσμών, Q_{c}. Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange στη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-Q_{cj}-Q'_j=0,\ \ j=1,2,...,n\ . \tag{2.78}$$

Αν με κάποιο τρόπο έχουμε βρει τις λύσεις $q = q(t)$ για το σύστημα, τότε με χρήση των (2.78) μπορούμε να βρούμε τις δυνάμεις των δεσμών, χωρίς τους πολλαπλασιαστές Lagrange. Αυτό έχει χρησιμότητα στην περίπτωση ολόνομων δεσμών, όπου προφανώς δεν έχει γίνει ενσωμάτωσή τους στη λαγκρανζιανή της εξίσωσης (2.78). Όμως έχουμε δείξει στην παράγραφο περί δυνάμεων δεσμών, ότι οι γενικευμένες συνιστώσες δυνάμεων για τους δεσμούς δίνονται από τις σχέσεις

$$Q_{cj}=\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lj}(q,t)\,. \tag{2.79}$$

Οπότε από τις Εξ. (2.78) και (2.79) καταλήγουμε ξανά στις (2.74) .

Αν έχουμε μη ενσωματωμένους ολόνομους δεσμούς σε ολοκληρωμένη μορφή,

$$f_l(q,t)=0,\quad l=1,2,...,M \tag{2.80}$$

θα δούμε ότι μπορούμε να τροποποιήσουμε τη λαγκρανζιανή L , έτσι ώστε αντί της αρχικής λαγκρανζιανής

$$L=L(q,\dot{q},t) \tag{2.81}$$

να έχουμε μια νέα λαγκρανζιανή L' για την οποία να ισχύει

$$L'=L(q,\dot{q},t)+\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)f_l(q,t)\,. \tag{2.82}$$

Αυτό αναφέρεται ως κανόνας του πολλαπλασιασμού. Από αυτή τη λαγκρανζιανή μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις Lagrange χωρίς να λάβουμε υπόψη τους δεσμούς σε αυτή τη φάση, δηλαδή θεωρούμε τις μεταβολές δq ανεξάρτητες. Έχουμε όμως εισαγάγει M πρόσθετες άγνωστες συναρτήσεις τις $\lambda_l(t)$ που πρέπει να προσδιοριστούν οπότε χρειάζονται και οι M το πλήθος σχέσεις των ολόνομων δεσμών.

Τελικώς, καταλήγουμε στη λύση του ίδιου προβλήματος με τις ίδιες εξισώσεις όπως πριν. Ξεκινούμε από την αρχή d’Alembert, τις δεύτερες από τις Εξ. (2.49), μαζί με την Εξ. (2.80), έχουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\delta q_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-Q'_\alpha\right)\right\}=0\\ &f_l(q,t)=0,\quad l=1,2,...,M\quad .\end{aligned} \tag{2.83}$$

Κατά τη δυνατή μεταβολή (variation) της f_l έχουμε,

$$\begin{aligned}\delta f_l&=f_l(q+\delta q,t)-f_l(q,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_i}\delta q_i\\ f_l(q+\delta q,t)&=f_l(q,t)+\delta f_l=f_l(q,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_i}\delta q_i=0.\end{aligned} \tag{2.84}$$

Η τελευταία προκύπτει διότι, για τις δυνατές μετατοπίσεις ισχύει η γνωστή σχέση (ένα είδος ορθογωνιότητας):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}A_{li}(q,t)\delta q_i=0. \tag{2.85}$$

Αυτό μας λέει ότι η σχέση του δεσμού, δηλαδή η δεύτερη σχέση στην Εξ. (2.83), ικανοποιείται και στα απειροστά γειτονικά σημεία που προκύπτουν κατά τη δυνατή μετατόπιση, δq. Δηλαδή έχουμε μετάβαση από πιθανή σε πιθανή κατάσταση. Ακολουθούμε και πάλι τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Η μετάβαση αυτή από πιθανή σε πιθανή κατάσταση μας οδηγεί στο ότι το παρακάτω άθροισμα είναι μηδέν

$$\delta\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)f_l(q,t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\frac{\partial f_l}{\partial q_i}\delta q_i=0\,. \tag{2.86}$$

Το $\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\frac{\partial f_l}{\partial q_i}$ είναι η i γενικευμένη συνιστώσα δύναμης του δεσμού.

Προσθέτουμε το μηδενικό άθροισμα της Εξ. (2.86), στις πρώτες από τις Εξ. (2.83). Τώρα θεωρούμε τα δq ανεξάρτητα οπότε καταλήγουμε τελικώς στις σχέσεις

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_j}-Q'_j=0,\quad j=1,2,...,n\\&L'=L(q,\dot q,t)+\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\,f_l(q,t)\\&f_l(q,t)=0\quad l=1,2,...,M\quad .\end{aligned} \tag{2.87}$$

Πηγαίνοντας αντίστροφα, εύκολα βρίσκουμε από αυτές τις Εξ. (2.77).

Επειδή τα $\lambda_l(t)$ είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου όπως είναι και τα $q_i(t)$, είναι δυνατόν να διευρύνουμε τις εξαρτημένες από τον χρόνο μεταβλητές (γενικευμένες συντεταγμένες) ώστε να συμπεριληφθούν σε αυτές και οι συναρτήσεις $\lambda_l(t)$, έτσι το σύνολο των νέων μεταβλητών (συντεταγμένων) γίνεται

$$\xi=\xi(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n+M})=\left\{q(q_1,q_2,...,q_n),\lambda(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_M)\right\}. \tag{2.88}$$

Έχουμε επομένως ότι η νέα λαγκρανζιανή είναι συνάρτηση των ξ_j και μπορεί και του χρόνου,

$$L'=L'(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n+M},t)\,. \tag{2.89}$$

Οι δυνατές μετατοπίσεις είναι $\delta\xi=(\delta q,\delta\lambda)$ και θεωρούνται ανεξάρτητες. Οι εξισώσεις Lagrange θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot\xi_j}\right)-\frac{\partial L'}{\partial \xi_j}=Q'_j,\quad j=1,2,...,n+M\,. \tag{2.90}$$

Δηλαδή έχουμε $n+M$ εξισώσεις και $n+M$ αγνώστους και δεν έχουμε σχέσεις δεσμών. Οι σχέσεις δεσμών ουσιαστικά εμπεριέχονται στις Εξ. (2.90). Με τη χρήση και της Εξ. (2.82) βρίσκουμε από τις Εξ. (2.90) τις γνωστές σχέσεις Εξ. (2.77) με τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις δυνάμεις των δεσμών.

2.8 Σχέσεις δεσμών με γραμμική εξάρτηση ως προς τις ταχύτητες

Θα ασχοληθούμε με δεσμούς της μορφής διαφορικών εξισώσεων όπου έχουμε γραμμική εξάρτηση από τις ταχύτητες, συγκεκριμένα:

$$g_l(q,\dot{q},t)=\sum_{k=1}^{n}A_{lk}(q,t)\dot{q}_k+A_l(q,t)=0,\quad l=1,2,...,M\ . \tag{2.91}$$

Αυτές οι σχέσεις μπορεί να περιγράφουν ολόνομους δεσμούς ή μη ολόνομους δεσμούς. Οι δυνατές μετατοπίσεις δq_k ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{k=1}^{n}A_{lk}(q,t)\delta q_k=0,\quad l=1,2,...,M\ . \tag{2.92}$$

Ισχύουν $A_{lk}=\dfrac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_k}$.

Με τον γνωστό τρόπο βρίσκουμε τις γνωστές εξισώσεις Lagrange που μαζί με τις Εξ. (2.91) δίνουν τη λύση του δυναμικού προβλήματος, δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lk}(q,t)-Q'_j=0,\quad j=1,2,...,n\\&g_l(q,\dot{q},t)=\sum_{k=1}^{n}A_{lk}(q,t)\dot{q}_k+A_l(q,t)=0,\quad l=1,2,...,M\ .\end{aligned} \tag{2.93}$$

Θα εξετάσουμε πότε άλλοτε, εκτός της περίπτωσης του Εδαφίου 2.7, μπορούμε να τροποποιήσουμε τη λαγκρανζιανή ώστε να έχει τη μορφή (κανόνας του πολλαπλασιασμού)

$$L'=L+\sum_{i=1}^{M}\mu_l(t)g_l,\quad g_l(q,\dot{q},t)=0\ \ l=1,2,...,M \tag{2.94}$$

από την οποία θα βρούμε τις εξισώσεις Lagrange για την L'. Θα δούμε ότι αυτό γίνεται μόνο αν οι ισοδύναμες εξισώσεις Pfaff είναι ολικά διαφορικά. Τέτοιοι δεσμοί είναι ολόνομοι.

Είδαμε στα προηγούμενα ότι όταν εφαρμόζεται ο κανόνας του πολλαπλασιασμού για την τροποποίηση της λαγκρανζιανής, τότε οι δυνατές μεταβολές (variations) για τις δεσμευτικές σχέσεις είναι μηδέν, Εξ. (2.84). Αυτό δεν ισχύει γενικώς για αυτήν εδώ την περίπτωση. Πράγματι, έχουμε

$$\delta g_l=g_l(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)-g_l(q,\dot{q},t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_l(q,\dot{q},t)}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_l(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\ . \tag{2.95}$$

Οι δυνάμεις των δεσμών κατά τη δυνατή μετατόπιση παράγουν έργο ίσο με μηδέν. Για τους δεσμούς της Εξ. (2.93) το έργο των δυνάμεων των δεσμών σχετίζεται με τις εκφράσεις

$$\sum_{k=1}^{n}A_{lk}(q,t)\delta q_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_l(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k=0\ \ l=1,2,...,M\ . \tag{2.96}$$

Αυτές καθορίζουν τις δεσμεύσεις μεταξύ των δq . Ο συνδυασμός των Εξ. (2.95) και (2.96), γενικώς, δεν οδηγεί στον μηδενισμό των δυνατών μεταβολών για τις $g_l(q,\dot{q},t)$, δηλαδή ισχύει γενικώς

$$\delta g_l(q,\dot{q},t) \neq 0 \ .$$

Θα δούμε στη συνέχεια τι πρέπει να ισχύει ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λαγκρανζιανή που φαίνεται στη σχέση (2.94). Επίσης θα δούμε ότι τότε ισχύει η σχέση $\delta g(q,\dot{q},t) = 0$.

Εισάγουμε τα G_{lj} με τις σχέσεις

$$G_{lj} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial g_l}{\partial q_j}, \quad j = 1,2,...,n \tag{2.97}$$

Η σχέση d'Alembert για την L' θα είναι η (2.98) και δεν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j} - Q'_j\right)\delta q_j = 0 \ . \tag{2.98}$$

Με χρήση της Εξ. (2.94) και (2.97) βρίσκουμε

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{l=1}^{M}\dot{\mu}_l\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{l=1}^{M}\mu_l G_{lj} - Q'_j\right)\delta q_j = 0 \ . \tag{2.99}$$

Τα δq_j είναι ανεξάρτητα, επομένως καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{l=1}^{M}\dot{\mu}_l\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{l=1}^{M}\mu_l G_{lj} - Q'_j = 0, \quad j = 1,2,...,n \\ &g_l = 0, \quad l = 1,2,...,M. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Τα $\dot{\mu}_l(t)$ είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου οπότε μπορούμε να γράψουμε $-\lambda'_l(t) = \dot{\mu}_l(t)$, δηλαδή έχουμε τα αντίστοιχα των $\lambda_l(t)$. Υπεισέρχονται πάλι οι συντελεστές A_{lj} και υπολογίζονται από τις σχέσεις των δεσμών, οι οποίες περιέχουν τις ταχύτητες στην πρώτη δύναμη.

Ξέρουμε ότι οι σωστές εξισώσεις κίνησης είναι οι Εξ. (2.93), επομένως για να είναι οι Εξ. (2.100) ίδιες με τις σωστές πρέπει

$$G_{lj} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{lj}}{\partial q_i} - \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i + \left(\frac{\partial A_{lj}}{\partial t} - \frac{\partial A_l}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{2.101}$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται αν για κάθε $\dot{q}_i$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial A_{lj}}{\partial q_i} - \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial A_{lj}}{\partial t} - \frac{\partial A_l}{\partial q_j} = 0 \ . \tag{2.102}$$

Αυτές οι σχέσεις είναι οι σχέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε η διαφορική έκφραση, Pfaff, η οποία είναι ισοδύναμη με την δεσμευτική σχέση στην Εξ. (2.93), να είναι ολικό διαφορικό (βλ. Εξ. (1.20)). Έτσι βρίσκουμε ότι οι Εξ. (2.100) γίνονται

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l'(t)\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j}-Q_j'=0,\ \ j=1,2,...,n\\ &g_l=0,\ l=1,2,...,M.\end{aligned} \tag{2.103}$$

Δηλαδή βρίσκουμε τις σωστές εξισώσεις, τις (2.93). Αυτό σημαίνει ότι οι Εξ. (2.98) από τις οποίες ξεκινήσαμε και είναι ισοδύναμες με τις τελευταίες είναι σωστές.

Επομένως όταν οι δεσμοί με τις ταχύτητες είναι τέτοιοι που οι αντίστοιχοί τους στη μορφή Pfaff είναι ολικά διαφορικά τότε μπορούμε να τροποποιήσουμε την λαγκρανζιανή με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού.

Αν οι δεσμευτικές σχέσεις περιέχουν τις ταχύτητες στην πρώτη δύναμη αλλά τα αντίστοιχα διαφορικά δεν είναι ολικά διαφορικά αλλά μπορούν να μετατραπούν σε ολικά διαφορικά πολλαπλασιάζοντας τα με κατάλληλους ολοκληρωτικούς παράγοντες, τότε ισχύουν τα ανωτέρω για τις προκύπτουσες, μετά τον πολλαπλασιασμό, δεσμευτικές σχέσεις οι οποίες είναι ολικά διαφορικά. Με αυτή την έννοια μπορούμε να πούμε ότι με κατάλληλη διαδικασία, η λαγκρανζιανή μπορεί να τροποποιηθεί με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού αν οι ανωτέρω δεσμοί είναι (κρυμμένοι) ολόνομοι δεσμοί.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι οι δυνατές μετατοπίσεις, Εξ. (2.92), που τώρα γράφονται όπως στην Εξ. (2.96), δεν παραβιάζουν τους δεσμούς, δηλαδή τις Εξ. (2.91).

Έχουμε

$$g_l(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)=g_l(q,\dot{q},t)+\delta g_l(q,\dot{q},t)\ . \tag{2.104}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}&\delta g_l=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial q_j}\delta q_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j(t)\\ &\delta\dot{q}_j(t)=\mathrm{d}\left(\delta q_j(t)\right)/\,\mathrm{d}t\\ &\delta g_l=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial q_j}\delta q_j(t)-\sum_{j=1}^{n}G_{lj}\delta q_j(t).\end{aligned} \tag{2.105}$$

Για τους ανωτέρω δεσμούς έχουμε την Εξ. (2.101), δηλαδή $G_{lj}=0$, επίσης οι δυνατές μετατοπίσεις οδηγούν στις σχέσεις της Εξ. (2.96), επομένως $\delta g_l=0$. Άρα από την Εξ. (2.105), εφόσον η αρχική κατάσταση είναι πιθανή και ισχύει η Εξ. (2.91), συμπεραίνουμε ότι και η μετατοπισμένη είναι πιθανή αφού ισχύει

$$g_l(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)=g_l(q,\dot{q},t)+\delta g_l(q,\dot{q},t)=0+0=0.$$

Επομένως, οι δυνατές αυτές μετατοπίσεις οδηγούν από πιθανή σε πιθανή κατάσταση.

Αξίζει να τονίσουμε τα παρακάτω. Όταν έχουμε ολόνομες σχέσεις οι σωστές, για τη μηχανική δυνατές μετατοπίσεις, οδηγούν από πιθανή σε πιθανή κατάσταση, δηλαδή οι δεσμευτικές σχέσεις ισχύουν και στις μετατοπισμένες θέσεις. Αυτό είναι προφανές για την περίπτωση της τροποποιημένης λαγκρανζιανής με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού, διότι όπως είδαμε η προστιθέμενη ποσότητα είναι μηδέν και για τις γειτονικές θέσεις, τις μετατοπισμένες. Το ίδιο όμως πρέπει να ισχύει και όταν οι δεσμοί ενσωματώνονται. Δε μπορούν να ενσωματωθούν δεσμοί που δεν οδηγούν από πιθανές σε πιθανές καταστάσεις, δηλαδή μη ολόνομοι δεσμοί.

Ο σωστός τρόπος αντιμετώπισης των μη ολόνομων δεσμών είναι η μέθοδος παράθεσης δεσμών. Αναφέραμε, χωρίς να αναπτύξουμε το θέμα, ότι μπορεί κάποιος να κάνει, και για ολόνομους και για μη ολόνομους δεσμούς, ενσωμάτωση των δυνατών μετατοπίσεων, στις σχέσεις της Αρχής d' Alembert και να λύσει το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, μπορεί να εκφράσει με χρήση των M δεσμευτικών σχέσεων μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων, M δυνατές μετατοπίσεις συναρτήσει των υπόλοιπων $n-M$. Αντικαθιστά αυτές στις εξισώσεις της Αρχής d’ Alembert, οπότε οι εξισώσεις που προκύπτουν αποτελούνται από προσθετέους που ο κάθε ένας είναι γινόμενο επί μια δυνατή μετατόπιση στην πρώτη δύναμη. Αυτές είναι ανεξάρτητες οπότε ο κάθε όρος μηδενίζεται. Έτσι βρίσκουμε τις διαφορικές εξισώσεις που λύνουν το πρόβλημα.

2.9 Εξισώσεις Lagrange με γενικούς δεσμούς

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε εξισώσεις δεσμών οι οποίες, αν περιλαμβάνουν και ταχύτητες, αυτές είναι στην πρώτη δύναμη. Τώρα θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση που οι δεσμοί δεν έχουν τον ανωτέρω περιορισμό αλλά είναι της γενικής μορφής, και μπορεί να είναι ολόνομοι ή μη ολόνομοι:

$$g_l(q,\dot{q},t)=0, \quad l=1,2,...,M \tag{2.106}$$

Σε αυτή τη γενική μεθοδολογία μπορεί να υπαχθούν οι μέχρι τώρα περιπτώσεις που εξετάσαμε. Ουσιαστικά το πρόβλημα που τίθεται είναι, στη γενική αυτή περίπτωση να βρούμε τη σχέση που συνδέει τις δυνατές μετατοπίσεις. Τονίζουμε ξανά ότι πρέπει κατά τις δυνατές μετατοπίσεις να έχουμε δυνατό έργο των δυνάμεων του κάθε δεσμού ίσο με μηδέν. Το δυνατό έργο δυνάμεων είναι πάντα της μορφής της Εξ. (1.39), οπότε για το έργο των δυνάμεων του κάθε δεσμού l, έχουμε

$$\delta W_l=\sum_{i=1}^{n}Q_{li}\delta q_i=0, \quad l=1,2,...,M \tag{2.107}$$

Όπως ξέρουμε οι δυνάμεις δεσμών δεν είναι πλήρως καθορισμένες πριν λυθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα, δηλαδή από την αρχή. Θα προσπαθήσουμε από τις γενικές σχέσεις των δεσμών (2.106) να βρούμε σχέσεις οι οποίες να συνδέονται με τις δυνάμεις των δεσμών, δηλαδή τις (2.107). Αυτό έγινε και στα προηγούμενα με τη χρήση πολλαπλασιαστών (Lagrange) που γενικώς είναι συναρτήσεις του χρόνου. Έτσι, και σε αυτήν τη γενική περίπτωση, από τις δεδομένες γνωστές σχέσεις των δεσμών, Εξ. (2.106), θα οδηγηθούμε στις δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων, βοηθητικές σχέσεις, οι οποίες μαζί με τις εξισώσεις της Αρχής d’ Alembert θα μας οδηγήσουν με τη γνωστή διαδικασία στην εύρεση των εξισώσεων Lagrange και στη λύση του προβλήματος. Ξέρουμε ότι, γενικώς, οι δυνατές μετατοπίσεις μπορεί να μην ικανοποιούν τις Εξ. (2.106), τις ικανοποιούν μόνον αν οι δεσμοί είναι ολόνομοι. Ας πάρουμε την ολική παράγωγο της Εξ. (2.106), οπότε βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}g_l}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial g_l}{\partial t}=0, \quad l=1,2,...,M\ . \tag{2.108}$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια «ελάχιστη υπόθεση», η οποία λέει ότι οι δυνάμεις των δεσμών επηρεάζουν τις επιταχύνσεις $\ddot{q}_j$ μόνο όπως καθορίζουν οι Εξ. (2.108). Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν τις (γενικευμένες) συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$\ddot{q}=(\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,...,\ddot{q}_n) \tag{2.109}$$

σε όρους που περιέχουν τις αντίστοιχες (γενικευμένες) συνιστώσες του $\dfrac{\partial g_l}{\partial \dot{q}}$, ενός διανύσματος παραγώγων πολλών διαστάσεων, δηλαδή του

$$\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}}=\left(\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_1},\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_2},...,\frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_n}\right), \quad l=1,2,...,M\ . \tag{2.110}$$

Όπως σε παρόμοιες περιπτώσεις, δεν πρέπει όλες αυτές οι συνιστώσες να είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι μια γενικευμένη συνιστώσα της επιτάχυνσης επηρεάζεται μόνο από την αντίστοιχη γενικευμένη συνιστώσα που ορίζουν οι Εξ. (2.110). Έτσι οδηγούμαστε στο ότι οι γενικευμένες συνιστώσες των δυνάμεων του κάθε ενός δεσμού είναι ανάλογες των συνιστωσών που ορίζουν οι Εξ. (2.110), με κάποιον πολλαπλασιαστικό παράγοντα που μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο. Έτσι, καταλήγουμε στο ότι για να ισχύει η αρχή του μηδενισμού των δυνατών έργων των δυνάμεων των δεσμών, πρέπει για τις δυνατές μετατοπίσεις δq να ισχύουν οι ακόλουθες πρόσθετες (ή βοηθητικές) σχέσεις:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_l(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = 0, \quad l = 1,2,...,M \,. \tag{2.111}$$

Αυτές θα χρησιμοποιηθούν με τους πολλαπλασιαστές Lagrange και προφανώς θα καταλήξουμε σε αντίστοιχες σχέσεις με αυτές των Εξ. (2.74) και Εξ. (2.75), δηλαδή στις

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) \frac{\partial g_l(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_j} - Q'_j = 0, \;\; j=1,2,...,n \\ &g_l(q,\dot{q},t) = 0, \quad l = 1,2,...,M \end{aligned} \tag{2.112}$$

Εύκολα φαίνεται ότι οι σχέσεις αυτές πράγματι ισχύουν και για την ειδική περίπτωση που έχουμε δεσμευτικές σχέσεις γραμμικές ως προς τις ταχύτητες. Στην ουσία τέτοιες ήταν οι περιπτώσεις που εξετάσαμε στα προηγούμενα.

2.10 Ταλαντώσεις

2.10.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις

Θεωρούμε ένα συντηρητικό μηχανικό σύστημα με n γνήσιες γενικευμένες συντεταγμένες, δεν υπάρχουν δεσμοί και δεν υπάρχει άμεση εξάρτηση από τον χρόνο. Επίσης δεν υπάρχει απόσβεση. Το σύστημα περιγράφεται ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς και βρίσκεται σε ισορροπία στο σημείο $\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, ..., \xi_{0n})$. Σε αυτό το σημείο οι δυνάμεις πάνω στο σύστημα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι στο συγκεκριμένο σημείο ισχύει

$$Q_i = -\frac{\partial V(\xi_0)}{\partial \xi_i} = 0 \,.$$

Ορίζουμε τα q_i με τις σχέσεις $q_i = \xi_i - \xi_{0i}$. Με αυτές τις συντεταγμένες το σημείο ισορροπίας είναι στη θέση $q_{0i} = (0,0,...,0)$, δηλαδή οι n συντεταγμένες θέσης είναι ίσες με μηδέν. Η ανωτέρω σχέση ισορροπίας γίνεται

$$Q_i = -\frac{\partial V(0)}{\partial q_i} = 0 \,. \tag{2.113}$$

Η ισορροπία μπορεί να είναι ευσταθής, ασταθής ή αδιάφορη αλλά και κάποιος συνδυασμός αυτών. Το τελευταίο μπορεί να συμβεί αν ως προς τις διάφορες συντεταγμένες υπάρχει διάφορο είδος ισορροπίας. Δεν θα καταπιαστούμε με αυτές τις λεπτομέρειες αλλά, για απλούστευση, θα θεωρούμε σιωπηλά ότι η ισορροπία είναι ευσταθής. Σε αυτή την περίπτωση η δυναμική συνάρτηση (ενέργεια) έχει ελάχιστο στο σημείο ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι στο συντηρητικό σύστημα δεν έχουμε εξάρτηση από τον χρόνο. Σχηματίζουμε το ανάπτυγμα Taylor για τη δυναμική ενέργεια περί το σημείο ισορροπίας. Έχουμε

$$V(q) = V(0) + \sum_i \frac{\partial V(0)}{\partial q_i} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + ...$$

Ο πρώτος, ο σταθερός όρος μπορεί να παραληφθεί και στο σημείο ισορροπίας ο δεύτερος όρος είναι μηδέν. Για μικρές ποκλίσεις από το σημείο ισορροπίας παραλείπουμε τους ανώτερους όρους και κρατούμε μόνο τον τρίτο. Θέτουμε $V_{ij} = V_{ji} = \dfrac{\partial^2 V(0)}{\partial q_i \partial q_j}$. Αυτές είναι σταθερές. Βρίσκουμε, κατά προσέγγιση,

$$V(q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij} q_i q_j \ .$$

Για την κινητική ενέργεια (αφού δεν υπεισέρχεται ο χρόνος) έχουμε

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}(q)\dot{q}_i \dot{q}_j \ . \text{ (βλέπε Παράρτημα Π3)}$$

Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor τα $M_{ij}(q)$ περί το σημείο ισορροπίας και έχουμε

$$M_{ij}(q) = M_{ij}(0) + \sum_k \frac{\partial M_{ij}(0)}{\partial q_k} q_k + \dots .$$

Στη δυναμική ενέργεια κρατήσαμε όρους μέχρι τετραγωνικής μορφής ως προς τα q_i. Η έκφραση για την κινητική ενέργεια είναι ήδη τετραγωνικής μορφής χωρίς προσεγγίσεις, επομένως για να έχουμε την ίδια προσέγγιση στην κινητική ενέργεια, κρατούμε στο ανάπτυγμα Taylor μόνο τον πρώτο, τον σταθερό όρο $M_{ij}(0)$. Τελικώς θέτουμε $T_{ij} = T_{ji} = M_{ij}(0)$ και καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j \\ V &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} q_i q_j \ . \end{aligned} \tag{2.114}$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος, οι εξισώσεις Lagrange και οι τελικές εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} & L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(T_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j - V_{ij} q_i q_j\right) \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \\ & \sum_{j=1}^{n}\left(T_{kj}\ddot{q}_j + V_{kj} q_j\right) = 0 \quad k = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{2.115}$$

Αναζητούμε για τις τελευταίες εξισώσεις της Εξ. (2.115) n λύσεις της μορφής $q_j = a_j \cos(\omega t + \varphi)$. Θα μπορούσαμε, κατά τα γνωστά, να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $Ca_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ όπου Ca_i μιγαδικό, αλλά δεν θα το κάνουμε. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα a_j. Καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα n συζευγμένων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(V_{ij}-\omega^2 T_{ij}\right)a_j=0,\quad i=1,2,...,n\,. \tag{2.116}$$

Αυτό είναι ένα είδος προβλήματος ιδιοτιμών και μπορεί να γραφτεί με μορφή μητρών ως εξής

$$\boldsymbol{Va}=\omega^2\boldsymbol{Ta}\;. \tag{2.117}$$

Είναι ευνόητο ποιες είναι οι συνιστώσες των μητρών $\boldsymbol{V},\boldsymbol{T}$ και του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ (διάνυσμα στήλης). Επειδή το σύστημα των εξισώσεων είναι ομογενές, έχει μη τετριμμένη λύση για τα a_j τότε και μόνον τότε, όταν η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι μηδέν, δηλαδή πρέπει

$$\det\left(V_{ij}-\omega^2 T_{ij}\right)=0. \tag{2.118}$$

Αυτή η εξίσωση είναι η χαρακτηριστική εξίσωση η οποία έχει n λύσεις, τις $\omega_k^2,\ k=1,2,...,n$. Τα $\omega_k\geq 0$ είναι οι (κυκλικές) ιδιοσυχνότητες ή χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος. Βάζουμε κάθε μια χωριστά αυτές τις ιδιοσυχνότητες στις Εξ. (2.116), οπότε προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τον προσδιορισμό των a_j.

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}\left(V_{ij}-\omega_k^2 T_{ij}\right)a_{jk}=0,\quad i=1,2,...,n\\ \left(\boldsymbol{V}-\omega_k^2\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{a}_k=0,\quad k=1,2,...,n.\end{gathered} \tag{2.119}$$

Για κάθε μια ιδιοσυχνότητα ω_k έχουμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{a}_k$ (διάνυσμα στήλης) με n συνιστώσες, τις $a_{1k},a_{2k},...,a_{nk}$, το οποίο προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή για κάθε k έχουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, άρα υπάρχουν n ιδιοδιανύσματα. Σημειώστε ότι τα συστήματα είναι ομογενή οπότε για κάθε ένα σύστημα η λύση του είναι μονοσήμαντη αλλά με μια αυθαίρετη πολλαπλασιαστική σταθερά. Μπορεί κάποιος να θεωρήσει κάποια συνιστώσα από τις a_{jk}, για δεδομένο k, γνωστή και να υπολογίσει τις άλλες συναρτήσει αυτής. Αυτά σημαίνουν ότι τα ιδιοδιανύσματα έχουν καθορισμένη διεύθυνση αλλά δεν έχουν καθορισμένο «μήκος». Μπορούμε να επιβάλλουμε στο καθένα κάποιο «μήκος», να το κανονικοποιήσουμε.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές (συχνότητες) είναι διαφορετικές (μη εκφυλισμένες). Για δυο διαφορετικές συχνότητες έχουμε

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}\left(V_{ij}-\omega_k^2 T_{ij}\right)a_{jk}=0,\quad i=1,2,...,n\\ \sum_{i=1}^{n}\left(V_{ij}-\omega_p^2 T_{ij}\right)a_{ip}=0,\quad j=1,2,...,n\;.\end{gathered} \tag{2.120}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις πρώτες εξισώσεις επί a_{ip} και αθροίζουμε στα i, πολλαπλασιάζουμε τις δεύτερες επί a_{jk} και αθροίζουμε στα j, στη συνέχεια σχηματίζουμε τη διαφορά τους και βρίσκουμε

$$\left(\omega_p^2-\omega_k^2\right)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ip}T_{ij}a_{jk}=0. \tag{2.121}$$

Ορίζουμε τη μήτρα $\boldsymbol{A}$ με συνιστώσες τα a_{ij}. Αφού οι συχνότητες για $p\neq k$ είναι διαφορετικές, για $p\neq k$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ip}T_{ij}a_{jk}=0\\ &\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}=0.\end{aligned} \tag{2.122}$$

Θέτουμε $p=k$ και κανονικοποιούμε τα διανύσματα όπως παρακάτω, δηλαδή έτσι ώστε το διπλό άθροισμα να είναι ίσο με 1. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ip}T_{ij}a_{jk}=\delta_{pk}\\ &\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{u}}.\end{aligned} \tag{2.123}$$

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{u}}$ είναι η μοναδιαία μήτρα.

Από τις πρώτες σχέσεις της Εξ. (2.120) και την Εξ. (2.123) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ip}V_{ij}a_{jk}=\omega_k^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ip}T_{ij}a_{jk}=\omega_k^2\delta_{pk}\\ &\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{u}}\boldsymbol{\lambda}.\end{aligned} \tag{2.124}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ είναι η διαγώνια μήτρα με διαγώνια στοιχεία τα $\omega_1^2,\omega_2^2,\ldots,\omega_n^2$.

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η μήτρα $\boldsymbol{A}$ διαγωνοποιεί τις μήτρες $\boldsymbol{V},\boldsymbol{T}$ με στοιχεία V_{ij},T_{ij} αντιστοίχως.

Η γενική λύση των εξισώσεων κίνησης που φαίνονται στην Εξ. (2.115) είναι επαλληλία των λύσεων με διαφορετικές ιδιοσυχνότητες. Δηλαδή έχουμε για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη

$$q_i=\sum_{j=1}^{n} C_j a_{ij}\cos(\omega_j t+\varphi_j),\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.125}$$

Τα C_j,φ_j προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, π.χ. από το γεγονός ότι τη στιγμή $t=0$ τα $q_i(0),\dot{q}_i(0)\quad i=1,2,\ldots,n$ είναι γνωστά.

Ορίζουμε τις λεγόμενες κανονικές συντεταγμένες και καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}&Q_j=C_j\cos(\omega_j t+\varphi_j)\\ &q_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Q_j=\sum_{j=1}^{n} C_j a_{ij}\cos(\omega_j t+\varphi_j),\quad i=1,2,\ldots,n\\ &\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}q.\end{aligned} \tag{2.126}$$

Κάναμε χρήση της τελευταίας σχέσης της Εξ. (2.123). Το διάνυσμα στήλης, $\boldsymbol{Q}$, έχει συνιστώσες τα $Q_j,\ j=1,2,\ldots,n$.

Μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} Q_p, \quad i = 1, 2, ..., n \\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Αντικαθιστούμε τα q στις σχέσεις για την κινητική ενέργεια και τη δυναμική ενέργεια, Εξ. (2.114) και χρησιμοποιούμε τη σχέση για τη λαγκρανζιανή της Εξ. (2.115), οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \dot{Q}_p^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \omega_p^2 Q_p^2 \\ L &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \left(\dot{Q}_p^2 - \omega_p^2 Q_p^2 \right). \end{aligned} \tag{2.128}$$

Οι γενικευμένες συντεταγμένες, Q, που προέκυψαν από τον μετασχηματισμό των Εξ. (2.127) οδηγούν σε αποσύζευξη των εξισώσεων κίνησης.

Πράγματι, με χρήση των εξισώσεων Lagrange, καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης για τα Q και τις λύσεις τους

$$\begin{aligned} &\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0 \\ &Q_i = C_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Τα C_i, φ_i εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Επαναλαμβάνουμε ότι στη γενική περίπτωση το σύστημα ταλαντεύεται συγχρόνως με πολλές συχνότητες, η γενική κίνηση είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Είναι ενδιαφέρον να δει κάποιος υπό ποιες αρχικές συνθήκες όλα τα μέρη του συστήματος ταλαντεύονται με την ίδια συχνότητα που δείχνουν οι σχέσεις (2.129). Αυτοί είναι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Από τις δεύτερες σχέσεις της Εξ. (2.126) φαίνεται ότι για μια συχνότητα (έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης) όλες οι γενικευμένες συντεταγμένες q_i κινούνται σε φάση ή σε αντίθεση φάσης.

Πράγματι, για μια μόνο συχνότητα, ω_l, θα έχουμε

$$\begin{aligned} q_1 &= C_l a_{1l} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \\ q_2 &= C_l a_{2l} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \\ &\;\;\vdots \\ q_n &= C_l a_{nl} \cos(\omega_l t + \varphi_l). \end{aligned} \tag{2.130}$$

Σημειώστε ότι τα a_{ij} μπορεί να είναι θετικά, αρνητικά ή μηδέν.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις εκφυλισμένες συχνότητες (ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης), $\omega_{k1} = \omega_{k2} = ... = \omega_{ks}$, δηλαδή υπάρχει βαθμός εκφυλισμού s. Σε αυτή την περίπτωση τα ιδιοδιανύσματα δεν μπορούν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα όπως γίνεται στην περίπτωση μη εκφυλισμού.

Εφαρμόζουμε τη γνωστή μέθοδο από τη γραμμική άλγεβρα και σχηματίζουμε s το πλήθος ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{a}_j$. Ξεκινούμε από τις Εξ. (2.119), για τη συχνότητα εκφυλισμού. Από τις εξισώσεις που προκύπτουν για τις συνιστώσες διαλέγουμε αυθαίρετα s ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στη συνέχεια κάνουμε χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας των λύσεων, Εξ. (2.122), (2.123).

Τέλος, χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση που αναφέραμε, δηλαδή πάλι την Εξ. (2.123). Οι εξισώσεις που καταλήγουμε είναι λιγότερες από τις συνιστώσες που χρειάζεται να προσδιορίσουμε. Έτσι διαλέγουμε αυθαίρετα κάποιες από αυτές και έτσι καταλήγουμε σε ίσο πλήθος ανεξάρτητων εξισώσεων και συνιστωσών που θα προσδιορίσουμε.

2.10.2 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Ας υποθέσουμε ότι ασκούνται στο σύστημα και «εξωτερικές» δυνάμεις, δυνάμεις εξαναγκασμού ή διεγείρουσες δυνάμεις ή δυνάμεις διέγερσης. Υποθέτουμε ότι ενδιαφερόμαστε για το μόνιμο φαινόμενο, χωρίς να εξετάζουμε το μεταβατικό φαινόμενο. Το μόνιμο φαινόμενο στα συστήματα με διέγερση εμφανίζεται αφού μηδενιστεί το μεταβατικό. Αυτό υποθέτει την ύπαρξη «τριβών» που εδώ αγνοούμε και υποθέτουμε ότι έχει αποκατασταθεί το μόνιμο φαινόμενο. Με άλλα λόγια θεωρούμε πως οι τριβές είναι πολύ μικρές ώστε να μην επηρεάζουν τα μεγέθη του μόνιμου φαινόμενου.

Για τη γενικευμένη συνιστώσα q_k παριστάνουμε την αντίστοιχη γενικευμένη συνιστώσα δύναμης με $g_k(t)$, η οποία υποθέτουμε ότι εξαρτάται μόνο από τον χρόνο. Οι εξισώσεις κίνησης χωρίς διεγείρουσες δυνάμεις, δηλαδή οι Εξ. (2.115), με διεγείρουσες δυνάμεις, $g_k(t)$, θα πάρουν τη μορφή

$$\begin{aligned} &L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - V_{ij}q_iq_j\right) \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = g_k \\ &\sum_{j=1}^{n}\left(T_{kj}\ddot{q}_j + V_{kj}q_j\right) = g_k \quad k = 1,2,...,n \quad . \end{aligned} \tag{2.131}$$

Θέλουμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης για τις κανονικές συντεταγμένες, Q_k. Χρειάζεται να έχουμε τις γενικευμένες συνιστώσες δύναμης, $G_k(t)$, για αυτές τις συντεταγμένες, Από όσα ξέρουμε για αλλαγές συντεταγμένων αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση $G_j = \sum_i g_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$. Με χρήση της Εξ. (2.127) βρίσκουμε $G_k(t) = \sum_l a_{lk} g_l(t)$. Στις κανονικές συντεταγμένες το πρώτο μέλος των τελευταίων εξισώσεων (κίνησης) στις (2.131), σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι $\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k$, η δύναμη του δευτέρου μέλους είναι η G_k. Επομένως με διέγερση έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = G_k(t), \quad k = 1,2,...,n \tag{2.132}$$

2.11 Το αντίστροφο πρόβλημα της Μηχανικής - Μη μοναδικότητα της λαγκρανζιανής

Τα συστήματα στα οποία αναφερθήκαμε μέχρι τώρα, είναι συστήματα των οποίων η λαγκρανζιανή είναι η φυσιολογική λαγκρανζιανή, $L = T - V$, $L = T - U$ ή προκύπτει από την φυσιολογική με προσθήκη μιας ολικής παραγώγου, ως προς τον χρόνο, κάποιας συνάρτησης της θέσης και του χρόνου, $L' = L + \frac{\mathrm{d}G(q,t)}{\mathrm{d}t}$. Η φυσιολογική λαγκρανζιανή υπάρχει στις περιπτώσεις που οι δυνάμεις μπορεί να προκύψουν από δυναμική συνάρτηση V,U κατά τα γνωστά. Με χρήση της λαγκρανζιανής και των εξισώσεων Euler-Lagrange βρίσκουμε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Υπάρχουν δυναμικά συστήματα των οποίων οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης είναι γνωστές αλλά δεν μπορεί να προκύψουν από λαγκρανζιανές που σχηματίζονται με τον ανωτέρω τρόπο. Σημειώνουμε ότι τα περισσότερα συγγράμματα Μηχανικής ασχολούνται μόνο με την περίπτωση λαγκρανζιανών όπως οι παραπάνω. Σε αυτό το σύγγραμμα ακολουθούμε, γενικώς, αυτή την πρακτική εκτός από αυτή την παράγραφο.

Το Αντίστροφο Πρόβλημα της Μηχανικής, ή αλλιώς Αντίστροφο Πρόβλημα της Θεωρίας Μεταβολών, συνίσταται στο εξής: δίνονται οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης και εξετάζεται αν μπορεί να βρεθεί κάποια λαγκρανζιανή η οποία με χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange να οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης. Η ιδέα είναι παλιά, ο H. Helmholtz έχει ασχοληθεί με το θέμα από το 1887, ο Darboux από το 1894. Αυτό είναι ένα ανοιχτό αντικείμενο μελέτης μέχρι σήμερα. Θα δούμε ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί να βρεθούν λαγκρανζιανές που οδηγούν στις δεδομένες εξισώσεις κίνησης. Αυτές οι λαγκρανζιανές μπορεί να μην σχετίζονται με λαγκρανζιανές που προκύπτουν ή ταυτίζονται με φυσιολογικές λαγκρανζιανές, δηλαδή με τη συνήθη μέθοδο της φυσιολογικής λαγκρανζιανής. Μπορεί το σύστημα να μη μπορεί να αποκτήσει λαγκρανζιανή με αυτό τον τρόπο. Η ύπαρξη λαγκρανζιανής είναι κάτι σημαντικό διότι μπορεί να χρησιμοποιείται σε θεωρήματα διατήρησης, επίσης για τον προσδιορισμό της χαμιλτονιανής και των κανονικών εξισώσεων κίνησης, τη θεμελίωση της θεωρίας Hamilton-Jacobi, τη Στατιστική Μηχανική κ.λπ. Αυτή η μεθοδολογία οδηγεί σε επιπλέον μη μοναδικότητα της λαγκρανζιανής.

Η λαγκρανζιανής της Κλασικής φυσικής έχει σχέση με την κβάντωση του συγκεκριμένου συστήματος. Η μη μοναδικότητα της λαγκρανζιανής και της αντίστοιχης χαμιλτονιανής δημιουργεί προβληματισμούς στο ποια είναι η κατάλληλη λαγκρανζιανή που οδηγεί στο σωστό κβαντικό σύστημα. Η συνήθης πρακτική που διδασκόμαστε είναι να ξεκινούμε από τη φυσιολογική λαγκρανζιανή.

Στην αρχή θα αναφέρουμε λίγα πράγματα για το Αντίστροφο Πρόβλημα. Έστω ότι έχουμε τις εξισώσεις κίνησης στην παρακάτω μορφή τους,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_j + B_i(q,\dot{q},t) = 0 \quad i=1,2,...,n. \tag{2.133}$$

Το αντίστροφο πρόβλημα συνίσταται στο να βρεθεί λαγκρανζιανή, ώστε αυτές οι εξισώσεις να προσδιοριστούν από εξισώσεις Euler-Lagrange, δηλαδή από τις

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1,2,...,n. \tag{2.134}$$

Μια πρώτη ιδέα είναι να απαιτήσουμε να ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_j + B_i(q,\dot{q},t) \quad i=1,2,...,n \tag{2.135}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει κατά πολλούς τρόπους, διότι έχουμε n εξισώσεις της μορφής (2.133) και n εξισώσεις τύπου (2.134) και μπορεί να συνδυαστεί οποιαδήποτε από τις πρώτες με οποιαδήποτε από τις δεύτερες. Για να ισχύει η (2.135) πρέπει η λαγκρανζιανή να είναι λύση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων που ακολουθεί

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_j + B_i(q,\dot{q},t) \quad i=1,2,...,n\,. \tag{2.136}$$

Στην απλή περίπτωση όπου $n=1$ (μονοδιάστατο πρόβλημα Δυναμικής), μια εξίσωση και μια άγνωστη συνάρτηση, υπάρχει πάντοτε λύση, αρκεί να ισχύουν κάποιοι σχετικά απλοί κανόνες κανονικότητας και συνέχειας. Όμως όταν $n>1$ έχουμε πολλές εξισώσεις και μια άγνωστη συνάρτηση, οι εξισώσεις μπορεί να μην είναι συμβατές μεταξύ τους και έτσι το πρόβλημα να μην έχει λύση. Μπορούμε να απαιτήσουμε να ισχύει η παρακάτω συνθήκη (2.137) αντί της πρώτης από τις (2.135),

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \;\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_j + B_i(q,\dot{q},t)=0 \\ &i=1,2,\ldots,n\ .\end{aligned} \qquad (2.137)$$

Αυτό που εννοούμε είναι ότι οι πρώτες και οι δεύτερες από τις Εξ. (2.137) είναι ισοδύναμες (έχουν ίδιες λύσεις), χωρίς να ισχύει η ισότητα (2.135). Για όποιον ενδιαφέρεται, υπάρχει σχετική βιβλιογραφία που έχουμε παραθέσει στο τέλος αυτού του βιβλίου.

Εδώ θα περιοριστούμε στην περίπτωση μονοδιάστατου προβλήματος ($n=1$), με «κατάλληλη μαθηματική συμπεριφορά». Τότε μπορεί να δειχτεί ότι η λαγκρανζιανή μπορεί να υπολογιστεί με τη μεθοδολογία που φαίνεται παρακάτω.

Ξεκινούμε από την εξίσωση κίνησης στη μορφή

$$\ddot{q}=G(q,\dot{q},t)\ . \qquad (2.138)$$

Η εξίσωση Lagrange είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0\ . \qquad (2.139)$$

Αναπτύσσουμε την ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο και με χρήση της (2.138) η (2.139) δίνει

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\dot{q}\frac{\partial^2 L}{\partial q\partial \dot{q}}-\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial \dot{q}}=\frac{G}{m}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}. \qquad (2.140)$$

Παραγωγίζουμε την (2.140) ως προς $\dot{q}$, καταλήγουμε στην

$$-\dot{q}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^2\partial q}-\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^2\partial t}=\frac{G}{m}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^3}+\frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}. \qquad (2.141)$$

Θέτουμε

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}=\Lambda(q,\dot{q},t) \qquad (2.142)$$

οπότε από την (2.141) καταλήγουμε στην

$$\ddot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}}+\dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial q}+\frac{\partial \Lambda}{\partial t}=-\frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\Lambda. \qquad (2.143)$$

Το πρώτο μέλος της (2.143) είναι η ολική παράγωγος $\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}$ οπότε η (2.143) γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(q,\dot{q},t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\Lambda(q,\dot{q},t)\,. \qquad (2.144)$$

Ολοκληρώνουμε την (2.142) δυο φορές ως προς $\dot{q}$ και έχουμε για τη λαγκρανζιανή την πιο γενική έκφραση

$$L=\int_{\beta}^{\dot q}(\dot q-y)\Lambda(q,y,t)\mathrm{d}y+\dot q f(q,t)+g(q,t)\,. \tag{2.145}$$

Το β είναι αυθαίρετη σταθερά. Οι συναρτήσεις f, g είναι δυνατό να προσδιοριστούν από τη (2.140) και τη (2.143). Μπορείτε να βεβαιωθείτε ότι αυτή είναι η λύση αντικαθιστώντας την (2.145) στην (2.142).

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την (2.145) στην (2.140) και βρίσκουμε

$$-\int_{\beta}^{\dot q}\left(y\frac{\partial\Lambda(q,y,t)}{\partial q}+\frac{\partial\Lambda(q,y,t)}{\partial t}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial g(q,t)}{\partial q}-\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}=\frac{G(q,\dot q,t)}{m}\Lambda(q,\dot q,t)\,. \tag{2.146}$$

Ισχύει

$$\frac{G}{m}\Lambda(q,\dot q,t)=\int_{\beta}^{\dot q}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{G(q,y,t)}{m}\Lambda(q,y,t)\right)\mathrm{d}y+\frac{G(q,\beta,t)}{m}\Lambda(q,\beta,t)\,. \tag{2.147}$$

Ο συνδυασμός των (2.146), (2.147) και (2.143) δίνει

$$\frac{\partial g(q,t)}{\partial q}-\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}=\frac{G(q,\beta,t)}{m}\Lambda(q,\beta,t)\,. \tag{2.148}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(q,t)$ έτσι ώστε $f(q,t)=\dfrac{\partial h(q,t)}{\partial q}$ οπότε η (2.148) γίνεται

$$g(q,t)=\frac{\partial h(q,t)}{\partial t}+\int_{\alpha}^{q}\frac{G(z,\beta,t)}{m}\Lambda(z,\beta,t)\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.149}$$

Η $c(t)$ αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου και το α είναι αυθαίρετη σταθερά.

Αντικαθιστούμε την (2.148) στην (2.145) και βρίσκουμε τη γενική λύση για τη λαγκρανζιανή, την Εξ. (2.150).

$$\begin{aligned}
&L=\int_{\beta}^{\dot q}(\dot q-y)\Lambda(q,y,t)\mathrm{d}y+\int_{\alpha}^{q}G(z,\beta,t)\Lambda(z,\beta,t)\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{d}\Omega(q,t)}{\mathrm{d}t}\\
&\Omega(q,t)=h(q,t)+c(t)\\
&\frac{\mathrm{d}\Lambda(q,\dot q,t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial\dot q}\Lambda(q,\dot q,t).
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Οι αυθαίρετες σταθερές α,β επηρεάζουν μόνο τη συνάρτηση $\Omega(q,t)$. Όμως, επειδή υπεισέρχεται μόνο το ολικό διαφορικό της ως προς τον χρόνο, η $\Omega(q,t)$ μπορεί να ληφθεί αυθαίρετα. Η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης στην Εξ. (2.150) είναι σχετικά πολύπλοκη και χρειάζεται τη γενική λύση $q=q(\alpha,\beta,t)$ της δεδομένης εξίσωσης κίνησης $\ddot q=G(q,\dot q,t)$.

Σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να βρεθεί λύση με απλό τρόπο, χωρίς τη χρήση της γενικής λύσης της $\ddot q=G(q,\dot q,t)$, θα περιοριστούμε σε τέτοια παραδείγματα.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια παρένθεση και θα πούμε δυο λόγια για τη γνωστή περίπτωση των δυο ισοδύναμων λαγκρανζιανών που αναφέραμε στα προηγούμενα. Οι λαγκρανζιανές είναι οι παρακάτω, οι οποίες όπως είπαμε, περιγράφουν δυο ασύζευκτους ίδιους αρμονικούς ταλαντωτές (δυο σωμάτια).

$$L_1 = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_1 q_2 , \quad L_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - q_1^2 - q_2^2 \right). \tag{2.151}$$

Χρησιμοποιούμε τη λαγκρανζιανή L_1 και βρίσκουμε για τη συζυγή ορμή του σωματίου 1 τη σχέση

$$p_1 = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_2 . \tag{2.152}$$

Στην Κβαντομηχανική ξέρουμε ότι τα p_1 και q_1 (ως τελεστές) δεν μετατίθενται, δηλαδή δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα, επομένως ούτε τα $\dot{q}_2 , q_1$ μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα, παρόλο που το κάθε ένα ανήκει σε άλλον από δυο ανεξάρτητους ταλαντωτές. Αν χρησιμοποιήσουμε την λαγκρανζιανή L_2 αυτό δεν ισχύει, πράγμα που δείχνει ότι δυο διαφορετικές λαγκρανζιανές που οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις κίνησης στην Κλασική Φυσική, δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα στην Κβαντομηχανική.

Θα μπορούσε να πει κάποιος ότι ξεκινώντας από την κλασική θεώρηση η επιλογή της κατάλληλης για το κβαντικό επίπεδο λαγκρανζιανής, είναι θέμα και του πειράματος. Αυτό, κατά κάποιο τρόπο, γίνεται στην περίπτωση που δεν υπάρχει κλασικό ανάλογο του συστήματος, π.χ. σπιν σωματιδίου κ.λπ.

Παραδείγματα – Ειδικά Θέματα

1. Δυνάμεις απωλειών

Οι εξισώσεις Lagrange, στην περίπτωση συστήματος με n (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες, όπου συνυπάρχουν δυνάμεις που απορρέουν από δυναμική συνάρτηση και δυνάμεις που δεν απορρέουν από δυναμική συνάρτηση, μπορεί να πάρουν τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \quad i=1,2,...,n .$$

Ισχύει γενικώς $L=T-U$. Οι γενικευμένες συνιστώσες δύναμης, Q_i, είναι αυτές που δεν απορρέουν από δυναμική συνάρτηση. Αυτές που απορρέουν είναι «μέσα» στο L. Στην περίπτωση αυτών των δυνάμεων Q_i, ανήκουν κάποιες δυνάμεις απωλειών (δυνάμεις τριβής). Υποθέτουμε ότι έχουμε σύστημα που αποτελείται από N σωμάτια που μπορεί να υπόκεινται και σε δεσμούς, επομένως $n \le 3N$. Θα υποθέσουμε ότι οι καρτεσιανές συνιστώσες των δυνάμεων τριβής κατά μήκος των τριών καρτεσιανών αξόνων, για κάθε ένα σωμάτιο, είναι ανάλογες της αντίστοιχης συνιστώσας της ταχύτητας του κάθε σωματίου του και έχουν αντίθετη προς αυτήν κατεύθυνση. Τότε μπορούμε να γράψουμε για τις τρεις καρτεσιανές συνιστώσες της κάθε μιας δύναμης τριβής, $\vec{F}_j,\ j=1,2,...,N$, ότι ισχύουν οι σχέσεις $F_{jx}=-k_{jx}(x_j,y_j,z_j)\dot{x}_j,\ F_{jy}=-k_{jy}(x_j,y_j,z_j)\dot{y}_j,\ F_{jz}=-k_{jz}(x_j,y_j,z_j)\dot{z}_j$. Οι συντελεστές k εξαρτώνται γενικώς από τη θέση του κάθε σωματίου και είναι θετικές ποσότητες. Τέτοιες δυνάμεις τριβής, μπορούν να βρεθούν με χρήση μιας συνάρτησης που λέγεται συνάρτηση (του) Rayleigh, την $R=R(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(k_{jx}\dot{x}_j^2+k_{jy}\dot{y}_j^2+k_{jz}\dot{z}_j^2\right)$. Δηλαδή η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από όλες τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σωματίων και γραμμικά από τα τετράγωνα των συνιστωσών των ταχυτήτων τους. Προφανώς έχουμε $F_{jx}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_j}, F_{jy}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{y}_j}, F_{jz}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{z}_j}$ ή $\vec{F}_j=-\vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_j}R$. Το έργο που παράγει το σύστημα για να υπερνικήσει την τριβή είναι $\mathrm{d}W=-\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot\mathrm{d}\vec{r}_j=-\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot\dot{\vec{r}}\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{N}\left(k_{jx}\dot{x}_j^2+k_{jy}\dot{y}_j^2+k_{jz}\dot{z}_j^2\right)\mathrm{d}t=2R\ \mathrm{d}t$. Δηλαδή για την ισχύ $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ που παράγεται από τις άλλες δυνάμεις, κατά την κίνηση του συστήματος, για να υπερνικηθούν οι δυνάμεις τριβής ισχύει $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=2R$, γι' αυτό η R λέγεται και συνάρτηση ισχύος. Από τις σχέσεις μετασχηματισμού $\vec{r}_j=\vec{r}_j(q_1,q_2,...,q_n,t),\ j=1,2,...,N,\ n=3N$, οι γενικευμένες συνιστώσες δύναμης τριβής είναι κατά τα γνωστά $Q_i'=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}=-\sum_{j=1}^{N}\vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_j}R\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}=-\sum_{j=1}^{N}\vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_j}R\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_j}{\partial\dot{q}_i}=-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}$.

Άρα $Q_i'=-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$. Η R έχει εκφραστεί ως προς $q,\dot{q}$ και ίσως τον χρόνο. Οι εξισώσεις Lagrange, στη γενική περίπτωση, γίνονται $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}=Q_i$.

Παράδειγμα τέτοιας δύναμης τριβής είναι η δύναμη Stokes, $\vec{F}_\mathrm{S}$ που είναι η δύναμη που ασκείται σε σφαίρα, ακτίνας a που κινείται μέσα σε ρευστό που έχει ιξώδες η, με σχετικά μικρή ταχύτητα, η δύναμη τριβής είναι $\vec{F}_\mathrm{S}=-6\pi\eta a\dot{\vec{r}}$. Εύκολα μπορείτε να βρείτε τη συνάρτηση Rayleigh για αυτή την περίπτωση.

Γενικότερα, μπορούμε να γράψουμε για τις δυνάμεις τριβής σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{F}_i = -h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i)\dfrac{\vec{\upsilon}_i}{\upsilon_i}, \vec{\upsilon}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}, i = 1,2,...,N$. Παντού θα ισχύει ότι $\upsilon_i > 0$, δηλαδή πρόκειται για την απόλυτη τιμή της ταχύτητας. Ορίζουμε ως συνάρτηση απωλειών την

$$R = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{\upsilon_i}\mathrm{d}\upsilon_i h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i) .$$

Ο μετασχηματισμός σε γενικευμένες συντεταγμένες δίνει

$$Q_j' = -\sum_{i=1}^{N} h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i)\frac{\vec{\upsilon}_i}{\upsilon_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i)\frac{\vec{\upsilon}_i}{\upsilon_i}\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j} = -\sum_{i=1}^{N} h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i)\frac{\partial\upsilon_i}{\partial\dot{q}_j}$$

διότι ισχύουν κατά τα γνωστά $\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j}, \vec{\upsilon}_i\cdot\dfrac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\left(\vec{\upsilon}_i\cdot\vec{\upsilon}_i\right)}{\partial\dot{q}_j} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\upsilon_i^2}{\partial\dot{q}_j} = \upsilon_i\dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial\dot{q}_j}$.

Επομένως, $Q_i' = -\sum_{i=1}^{N} h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i)\dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial\dot{q}_j} = -\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\upsilon_i}\mathrm{d}\upsilon_i h_i(\vec{r}_i,\upsilon_i) = -\dfrac{\partial R}{\partial\dot{q}_j}$.

Εννοείται ότι έχουμε χρησιμοποιήσει τον μετασχηματισμό συντεταγμένων οπότε τελικώς όλα έχουν εκφραστεί συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων και αντίστοιχων ταχυτήτων $\upsilon_i = \upsilon_i(q,\dot{q})$ και τα $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$.

Οι συνήθεις δυνάμεις τριβής (απωλειών) είναι:

Η κινητική τριβή $\vec{F} = -\mu N\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon},\ N$ η γνωστή κάθετη δύναμη.

Η δύναμη τριβής που ισχύει για σχετικά μικρές ταχύτητες μέσα σε ρευστά (νόμος του Stokes) $\vec{F} = -\beta\upsilon\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = -\beta\vec{\upsilon}, \beta > 0$.

Η δύναμη τριβής για σχετικά μεγάλες ταχύτητες μέσα σε ρευστά, $\vec{F} = -\gamma\upsilon^2\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = -\gamma\upsilon\vec{\upsilon}, \gamma > 0, \beta > 0$.

2. Επεξηγήσεις σχετικά με τη δυνατότητα ενσωμάτωσης ή όχι δεσμευτικών σχέσεων

Οι εξισώσεις για τη λύση προβλημάτων με δεσμούς στη μορφή Pfaff είναι οι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lk}(q,t) - Q_j' = 0, \quad j = 1,2,...,n$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\dot{q}_k + A_l(q,t) = 0, \quad l = 1,2,...,M \quad .$$

Οι δεύτερες M το πλήθος δεσμευτικές σχέσεις μπορεί να αντιπροσωπεύουν ολόνομους ή μη ολόνομους.

Τη σωστή διαδικασία για τη λύση προβλημάτων της παραπάνω μορφής την έχουμε αναλύσει στα προηγούμενα. Δε μπορούμε να απλοποιήσουμε πρώτα τη λαγκρανζιανή με χρήση των δεσμευτικών διαφορικών εξισώσεων Pfaff . Θα νόμιζε κάποιος ότι μπορούμε να εκφράσουμε M από τις ταχύτητες με χρήση των παραπάνω δεσμευτικών σχέσεων, συναρτήσει των υπόλοιπων $n-M$ και των q,t , να τις αντικαταστήσουμε στη λαγκρανζιανή ώστε να «απλουστευτεί» και μετά να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange κ.ο.κ. Αν μάλιστα οι μεταβλητές q_j που αντιστοιχούν σε αυτές τις ταχύτητες δεν υπάρχουν στη λαγκρανζιανή, νομίζει κάποιος ότι έτσι καταφέρνει να μειώσει τη διάσταση του θεσικού χώρου, δηλαδή να κάνει ενσωμάτωση δεσμών. Αυτά οδηγούν σε λάθος λύση ή σε κάτι που είναι άτοπο. Οι δεσμοί μπορεί να ενσωματωθούν με τη γνωστή διαδικασία μόνο αν είναι στη γεωμετρική τους μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι είναι ολόνομοι. Σημειώνουμε ξανά ότι η μείωση της διάστασης του θεσικού χώρου είναι ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη λαγκρανζιανή, εξαρτάται μόνο από τις δεσμευτικές σχέσεις.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητό το θέμα και να αποφεύγονται λάθη θα εξετάσουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Α) Έστω υλικό σημείο που κινείται σε επίπεδο χωρίς να ασκούνται πάνω του ενεργητικές δυνάμεις. Υπάρχει όμως η δεσμευτική σχέση $\dot{y}-t\dot{x}=0$. Θεωρήστε ότι η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση $T=\dfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης με τη γνωστή σωστή διαδικασία. Η λαγκρανζιανή είναι η κινητική ενέργεια.

Λύση

α) Μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι ο δεσμός δεν είναι ολόνομος, άρα δε μπορεί να γίνει μείωση της διάστασης του θεσικού χώρου, δε μπορεί να γίνει ενσωμάτωση της εξίσωσης του δεσμού στη λαγκρανζιανή. Η σωστή διαδικασία είναι η εξής:

Η δεσμευτική σχέση, που είναι γραμμική ως προς τις ταχύτητες, οδηγεί στη δεσμευτική σχέση μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων, $1\delta y-t\delta x=0$, βοηθητική σχέση. $A_{11}=1,\ A_{12}=-t$. Επομένως οι εξισώσεις Λαγκρανζ είναι $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}}-\dfrac{\partial T}{\partial y}=\lambda(t)A_{11},\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\dfrac{\partial T}{\partial x}=\lambda(t)A_{12}$. Οπότε έχουμε να λύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\ddot{y}=\lambda,\ \ \ddot{x}=-\lambda t,\ \ \dot{y}-t\dot{x}=0.$$

Απαλείφουμε το $\lambda(t)$ και βρίσκουμε ότι οι τελικές εξισώσεις κίνησης του σωματίου είναι $\ddot{x}(1+t^2)+\dot{x}t=0,\ \dot{y}-t\dot{x}=0$.

β) Στη συνέχεια ας αγνοήσουμε την παραπάνω σωστή διαδικασία και ας προχωρήσουμε με το (λάθος) τρόπο που αναφέραμε προηγουμένως. Στην κινητική ενέργεια δεν υπάρχουν οι συντεταγμένες αλλά μόνο οι ταχύτητες. Χρησιμοποιούμε τη δεδομένη δεσμευτική σχέση στη μορφή $\dot{y}=t\dot{x}$ για να απαλείψουμε το $\dot{y}$ από τη σχέση για την κινητική ενέργεια, το y δεν υπάρχει οπότε νομίζουμε ότι έτσι μειώνουμε τη διάσταση του θεσικού χώρου κατά ένα. Βρίσκουμε για τη «νέα» κινητική ενέργεια $T^*, T^*=\dfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2+t^2\dot{x}^2\right)=\dfrac{1}{2}\dot{x}^2\left(1+t^2\right)$.

Έχουμε την εξίσωση Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{x}}=0$$

άρα καταλήγουμε στη σχέση $\ddot{x}(1+t^2)+\dot{x}2t=0$. Αυτή με την δεδομένη δεσμευτική σχέση $\dot{y}-t\dot{x}=0$, υποτίθεται ότι λύνουν το πρόβλημα. Βλέπουμε ότι η παραβίαση της θεωρίας οδηγεί σε λάθος σύστημα εξισώσεων. Οι σωστές εξισώσεις είναι οι προηγούμενες οι οποίες βρέθηκαν με τη σωστή διαδικασία. Δε μπορεί να γίνει μείωση της διάστασης του θεσικού χώρου επειδή έτυχε η λαγκτρανζιαή να έχει κάποια ειδική μορφή.

Β) Θεωρούμε και πάλι το παραπάνω σωμάτιο με δεσμευτική σχέση την $\dot{y}-k\dot{x}=0$ όπου k είναι μια σταθερά.

Λύση

α) Ο δεσμός είναι ολόνομος. Ακολουθούμε στην αρχή την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και προηγουμένως στο Αα).

Έχουμε $1\delta y - k\delta x = 0$. Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -k\lambda(t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda(t).$$

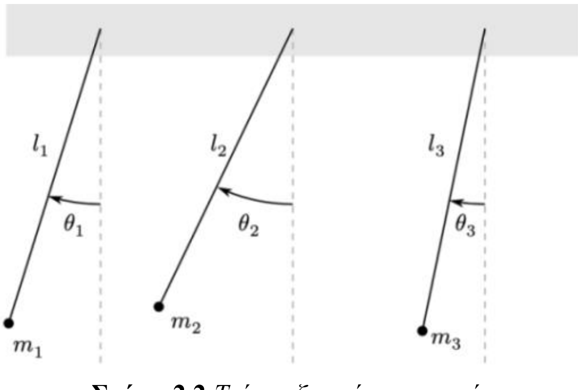
Επομένως $\ddot{x} = -k\lambda, \ \ddot{y} = \lambda$. Αυτές μαζί με τη δεσμευτική σχέση $\dot{y} - k\dot{x} = 0$ λύνουν το πρόβλημα. Απαλείφουμε το λ και τελικώς βρίσκουμε τις (σωστές) εξισώσεις κίνησης $\ddot{x} = 0, \ \ddot{y} = 0$.β). Κατόπιν, ακολουθούμε την αντίστοιχη διαδικασία που ακολουθήσαμε στο β) στην προηγούμενη περίπτωση.

Με χρήση της δεσμευτικής σχέσης αντικαθιστούμε το $\dot{y}$ με το ίσο του $k\dot{x}$ στην έκφραση της κινητικής ενέργειας. Έτσι έχουμε την τροποποιημένη έκφραση $T^* = \frac{1}{2}(k^2+1)\dot{x}^2$. Η εξίσωση Lagrange δίνει $\ddot{x}=0$. Αυτή σε συνδυασμό με τη δεσμευτική σχέση λύνουν το πρόβλημα. Είναι ευνόητο ότι ισχύει και πάλι η δεύτερη εξίσωση κίνησης $\ddot{y}=0$.

Βλέπουμε σε αυτή την περίπτωση του ολόνομου δεσμού οι δυο μέθοδοι δίνουν το ίδιο, σωστό, αποτέλεσμα. Αυτό αναμένεται διότι για τον ολόνομο δεσμό υπάρχει η ολοκληρωμένη (γεωμετρική) σχέση $y - kx = c = \text{σταθ}$.Έτσι, σε αυτή την περίπτωση μπορεί να μειωθεί η διάσταση του θεσικού χώρου αφού τα x, y δεν είναι ανεξάρτητα και αυτό δεν σχετίζεται με την ειδική μορφή κινητικής ενέργειας (λαγκρανζιανής). Δηλαδή, το y και το υπολογιζόμενο $\dot{y}$ από τη γεωμετρική σχέση μπορούν να αντικατασταθούν στην κινητική ενέργεια με τα ίσα τους, αντίστοιχα τα $kx+c$ και $k\dot{x}$. Στην περίπτωσή μας δεν υπάρχει εξάρτηση από το y αλλά μόνο από το $\dot{y}$ και γι' αυτό αντικαθίσταται μόνο το $\dot{y}$, καθόλα σωστό.

3. Συζευγμένα εκκρεμή

Στο Σχήμα 2,2, θεωρούμε τρία ίδια εκκρεμή μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, g, συζευγμένα μεταξύ τους. Εξετάζουμε μικρού πλάτους αιωρήσεις οπότε οι γωνίες εκτροπής $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ είναι αρκούντως μικρές. Είναι δεδομένο ότι (για τις σημειακές μάζες) ισχύουν $m_1 = m_2 = m_3 = m$ και επίσης δίνεται ότι $l_1 = l_2 = l_3 = l$. Οι μάζες των ράβδων των εκκρεμών είναι αμελητέες. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σύζευξη μεταξύ όλων των εκκρεμών και όχι μόνο μεταξύ των γειτονικών. Αυτό το δηλώνουμε με το γραμμοσκιασμένο παραλληλόγραμμο, χωρίς να εξετάζουμε πως μπορεί να επιτευχθεί κάτι τέτοιο. Θεωρήστε ότι, για μικρού πλάτους αιωρήσεις, ο όρος στη δυναμική συνάρτηση που χαρακτηρίζει τη σύζευξη μεταξύ των εκκρεμών i και j είναι $-\varepsilon mgl\theta_i\theta_j$ $-mgl\varepsilon\theta_i\theta_j$, όπου $\varepsilon \ll 1$. Θα μελετήσουμε την κίνηση αυτού του συστήματος το οποίο έχει τρεις γενικευμένες συντεταγμένες.



Σχήμα 2.2 *Τρία συζευγμένα εκκρεμή.*

Λύση

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $T = \dfrac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 \right)$. Η δυναμική ενέργεια για μικρού πλάτους ταλαντώσεις είναι $V = \dfrac{1}{2} mgl \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_3 - 2\varepsilon\theta_2\theta_3 \right)$.

Η μήτρα της κινητικής ενέργειας, $\boldsymbol{T}$, είναι διαγώνια με στοιχεία τα $T_{11} = T_{22} = T_{33} = ml^2$, όλα τα άλλα στοιχεία είναι μηδέν. Η μήτρα της δυναμικής ενέργειας, $\boldsymbol{V}$, είναι συμμετρική με τα εξής στοιχεία, $V_{11} = V_{22} = V_{33} = mgl,\ V_{12} = V_{13} = V_{21} = V_{23} = V_{31} = V_{32} = -\varepsilon mgl$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\left| \boldsymbol{V} - \omega^2 \boldsymbol{T} \right| = 0$. Αυτή οδηγεί στη σχέση

$$\begin{vmatrix} g - l\omega^2 & -g\varepsilon & -g\varepsilon \\ -g\varepsilon & g - l\omega^2 & -g\varepsilon \\ -g\varepsilon & -g\varepsilon & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $\left(\dfrac{l}{g}\omega^2 - 1 - \varepsilon \right)^2 \left(\dfrac{l}{g}\omega^2 - 1 - 2\varepsilon \right) = 0.$ Οι τρεις ρίζες για το ω^2 οδηγούν στις τρεις (θετικές) ρίζες για το ω εκ των οποίων οι δυο είναι ίδιες (εκφυλισμός). Έχουμε για τις ρίζες, $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\sqrt{1+\varepsilon},\quad \omega_3 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\sqrt{1-2\varepsilon}.$

Στην αρχή θα προσδιορίσουμε το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{a}_3$ για την ιδιοσυχνότητα ω_3. Από την Εξ. (2.119) έχουμε

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} - (1-2\varepsilon) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

άρα $$\begin{bmatrix} 2\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 2\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = 0.$$

Εφόσον το σύστημα έχει τρεις εξισώσεις και είναι ομογενές μόνο οι δυο από αυτές είναι ανεξάρτητες, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} 2\varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{23} - \varepsilon a_{33} &= 0 \\ -\varepsilon a_{13} + 2\varepsilon a_{23} - \varepsilon a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Έχουμε τρεις άγνωστες ποσότητες να προσδιορίσουμε οπότε θα κάνουμε χρήση και της τρίτης εξίσωσης που προκύπτει από την κανονικοποίηση του διανύσματος σύμφωνα με την Εξ. (2.123), η οποία δίνει

$$ml^2 \left(a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \right) = 1.$$

Το αποτέλεσμα είναι

$$a_{13}=a_{23}=a_{33}=\frac{1}{\sqrt{3ml}}.$$

Επομένως για τη συχνότητα $\omega_3=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1-2\varepsilon}$ η κίνηση καθορίζεται από τις σχέσεις

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{1}{\sqrt{3ml}}\cos(\omega_3 t+\varphi_3).$$

Δηλαδή και τα τρία εκκρεμή κινούνται σε φάση και με τα ίδια πλάτη.

Ας εξετάσουμε την εκφυλισμένη κατάσταση των συχνοτήτων $\omega_1=\omega_2=\omega_{12}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1+\varepsilon}$.

Εφαρμόζουμε την Εξ. (2.119) για την διπλά εκφυλισμένη συχνότητα οπότε έχουμε

$\left(\boldsymbol{V}-\omega_{12}^2\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{a}_1=0,\ \left(\boldsymbol{V}-\omega_{12}^2\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{a}_2=0.$ Από το πλήθος των 6 εξισώσεων, 3+3, διαλέγουμε μια από τις 3 πρώτες και μια (διαφορετική) από τις δεύτερες, τελικώς καταλήγουμε στις $a_{11}+a_{21}+a_{31}=0,\ a_{12}+a_{22}+a_{32}=0$. Δηλαδή έχουμε τα δυο ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{a}_1$ και $\boldsymbol{a}_2$ που πρέπει να είναι ορθοκανονικοποιημένα, Εξ. (2.123). Αυτό μας οδηγεί στη σχέση ορθογωνιότητας $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0$ και στις σχέσεις κανονικοποίησης $a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=\frac{1}{ml^2}$, $a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=\frac{1}{ml^2}$. Δηλαδή έχουμε το παρακάτω σύστημα με 5 εξισώσεις και 6 αγνώστους.

$$\begin{aligned}
&a_{11}+a_{21}+a_{31}=0\\
&a_{12}+a_{22}+a_{32}=0\\
&a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0\\
&a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=\frac{1}{ml^2}\\
&a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=\frac{1}{ml^2}.
\end{aligned}$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες των δυο ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ διαλέγουμε μια από τις συνιστώσες αυθαίρετα και έτσι προσδιορίζουμε τις άλλες 5. Ένεκα του εκφυλισμού υπάρχουν άπειρες επιλογές. Έστω $a_{31}=0$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&a_{31}=0\\
&a_{11}+a_{21}=0\\
&a_{12}+a_{22}+a_{32}=0\\
&a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0\\
&a_{11}^2+a_{21}^2=\frac{1}{ml^2}\\
&a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=\frac{1}{ml^2}.
\end{aligned}$$

Το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{a}_1$ έχει συνιστώσες, $a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2ml}}, a_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2ml}}, a_{31} = 0$.

Το $\boldsymbol{a}_2$ έχει συνιστώσες, $a_{12} = \frac{1}{\sqrt{6ml}}, a_{22} = \frac{1}{\sqrt{6ml}}, a_{32} = -\frac{2}{\sqrt{6ml}}$.

Για την περίπτωση του $\boldsymbol{a}_1$ η κίνηση των τριών εκκρεμών είναι

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml}}\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_1\right)$$
$$\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2ml}}\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_1\right)$$
$$\theta_3 = 0.$$

Τα δυο πρώτα κινούνται με το ίδιο πλάτος και αντίθετες φάσεις ενώ το τρίτο είναι ακίνητο. Είναι ευνόητο ότι η αυθαιρεσία στην επιλογή λύσεων μπορεί να μας οδηγήσει στην περίπτωση που το πρώτο είναι ακίνητο και τα άλλα δυο κινούνται με αντίθετες φάσεις, ακόμη μπορεί το δεύτερο να είναι ακίνητο και τα δυο άλλα να έχουν αντίθετες φάσεις. Αυτά είναι αποτέλεσμα του εκφυλισμού.

Για την περίπτωση του $\boldsymbol{a}_2$ έχουμε την κίνηση

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{6ml}}\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_2\right)$$
$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{6ml}}\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_2\right)$$
$$\theta_3 = -\frac{2}{\sqrt{6ml}}\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_2\right).$$

Τα δυο πρώτα εκκρεμή κινούνται σε φάση με ίδια πλάτη, το τρίτο με διπλάσιο πλάτος και αντίθετη φάση. Είναι ευνόητο ότι και εδώ ισχύουν τα ανάλογα με την περίπτωση του $\boldsymbol{a}_1$.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι, σύμφωνα με την πρώτη από τις Εξ. (2.126), οι

$$Q_1 = C_1\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_1\right)$$
$$Q_2 = C_2\cos\left(\omega_{12}t + \varphi_2\right)$$
$$Q_3 = C_3\cos\left(\omega_3 t + \varphi_3\right).$$

Δίνουμε τις σχέσεις για τον υπολογισμό των Q από τις γενικές λύσεις q όπου μπορεί να συνυπάρχουν πολλές συχνότητες. Αυτό γίνεται με χρήση των τελευταίων εξισώσεων στην Εξ. (2.126). Έχουμε τελικώς

$$Q_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}l(\theta_1 - \theta_2)$$
$$Q_2 = \sqrt{\frac{m}{6}}l(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3)$$
$$Q_3 = \sqrt{\frac{m}{3}}l(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

4. Εφαρμογή της λαγκρανζιανής μεθόδου στην ηλεκτροτεχνία

Αυτή είναι μια ενδιαφέρουσα χρήση της λαγκρανζιανής μεθόδου που δεν αφορά στη Μηχανική αλλά στην Ηλεκτροτεχνία. Συγκεκριμένα μπορεί κάποιος να αντιστοιχίσει στις γενικευμένες θέσεις μηχανικού συστήματος, τα ηλεκτρικά φορτία που ρέουν στους διάφορους βρόχους κυκλώματος ή που υπάρχουν σε πυκνωτές του κυκλώματος, δηλαδή $q(\text{συντεταγμένη}) \to e_q(\text{ηλεκτρικό φορτίο})$. Επίσης στη θέση των αντίστοιχων ταχυτήτων τις παραγώγους ως προς τον χρόνο των παραπάνω φορτίων, δηλαδή τα ρεύματα που κυκλοφορούν στο κύκλωμα, $\dot{q}(\text{ταχύτητα}) \to \dot{e}_q = i(\text{ηλεκτρικό ρεύμα})$. Οι όροι της κινητικής ενέργειας, στην περίπτωση κυκλώματος είναι οι όροι που αντιστοιχούν στην ενέργεια αυτεπαγωγών και αμοιβαίων επαγωγών, $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \to \frac{1}{2}L\dot{e}_q^2 = \frac{1}{2}Li^2$ και $\frac{1}{2}m_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \to \frac{1}{2}M_{kl}\dot{e}_{qk}^2\dot{e}_{ql}^2 = \frac{1}{2}M_{kl}i_k^2 i_l^2$. Οι όροι της δυναμικής ενέργειας αντιστοιχούν στις ενέργειες πυκνωτών, $V = \frac{1}{2}kq^2 \to \frac{1}{2}\frac{e_q^2}{C}$. Οι ενεργειακοί όροι που αντιστοιχούν στις δυνάμεις απωλειών αντιστοιχούν στις απώλειες ένεκα ωμικών αντιστάσεων, $\mathrm{R} = \frac{1}{2}Ri^2$. Αυτό δικαιολογείται επειδή $\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial i} = Ri$ οπότε η ισχύς που καταναλίσκεται στον αντιστάτη R, ισούται πράγματι με $i^2R = 2\mathrm{R}$, που είναι το ανάλογο της Μηχανικής που είδαμε στα προηγούμενα. Τέλος, αν υπάρχει πηγή τάσης $\upsilon = \upsilon(t)$ που τροφοδοτεί το κύκλωμα, αυτή είναι το αντίστοιχο της γενικευμένης συνιστώσας δύναμης της Μηχανικής, διότι το γινόμενο, $\upsilon \mathrm{d}e_q(\text{τάση επί φορτίο δια μέσου της πηγής})$, είναι το ηλεκτρικό έργο που παρέχει η πηγή το οποίο είναι το αντίστοιχο του γινόμενου $Q\mathrm{d}q$ που είναι το έργο της γενικευμένης δύναμης.

Να βρεθεί η (διαφορική) εξίσωση για κύκλωμα με L, C, R σε σειρά που τροφοδοτείται από πηγή, $\upsilon = \upsilon(t)$. Με αυτές τις αντιστοιχίες μπορεί κάποιος να προχωρήσει και να γράψει την εξίσωση του Lagrange και στη συνέχεια να βρει τη διαφορική εξίσωση για το κύκλωμα.

Λύση

Προφανώς το κύκλωμα χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή, το φορτίο του πυκνωτή, e_q, και την παράγωγό του ως προς το χρόνο, $\dot{e}_q = i$. Θα χρησιμοποιήσουμε την «φυσιολογική» λαγκρανζιανή. Σύμφωνα με τις παραπάνω αντιστοιχίες έχουμε

$$T = \frac{1}{2}L\dot{e}_q^2,\ V = \frac{1}{2}\frac{\dot{e}_q^2}{C},\ \mathrm{R} = \frac{1}{2}R\dot{e}_q^2,\ Q = \upsilon .$$

Επομένως, η λαγκρανζιανή του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι η $L = T - V = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $L = T - V = \frac{1}{2}L\dot{e}_q^2 - \frac{1}{2}\frac{e_q^2}{C}$. Η εξίσωση Lagrange είναι $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_q} - \frac{\partial L}{\partial e_q} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{e}_q} = \upsilon$. Από αυτή βρίσκουμε $L\ddot{e}_q + \frac{e_q}{C} + R\dot{e}_q = \upsilon$. Υποθέτουμε ότι οι φορές είναι τέτοιες ώστε να ισχύει $i = \dot{e}_q$, τότε βρίσκουμε $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{e_q}{C} + Ri = \upsilon$, παραγωγίζουμε αυτή τη σχέση ως προς τον χρόνο και τελικώς καταλήγουμε στη, $L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}i + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$. Αυτή είναι η γνωστή εξίσωση της ηλεκτροτεχνίας για το παραπάνω κύκλωμα με τα διάφορα στοιχεία σε σειρά.

5. Μηχανική ομοιότητα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μηχανικό σύστημα με κινητική ενέργεια της μορφής

$$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, M_{ij}=\text{σταθερές},$$

δηλαδή η κινητική ενέργεια είναι ομογενής συνάρτηση ως προς τις ταχύτητες, βαθμού ομογένειας 2, και με δυναμική ενέργεια της μορφής $V=V(q)$, η φυσιολογική λαγκρανζιανή του συστήματος είναι, $L=T-V$. Έστω ότι ως προς τις συντεταγμένες θέσης, η δυναμική ενέργεια είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού (ομογένειας) k. Αυτό σημαίνει ότι αν κάνουμε τον μετασχηματισμό κλίμακας (βαθμίδας) $q'=\alpha q$ θα βρούμε

$$V'=V'(q')=V(\alpha q_1,\alpha q_2,...,\alpha q_n)=\alpha^k V(q).$$

Υποθέτουμε ότι και ο χρόνος μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση $t'=\alpha^{1-k/2}t$. Είναι ευνόητο ότι αν εφαρμόσουμε και τους δυο αυτούς μετασχηματισμούς κλίμακας συγχρόνως για τις ταχύτητες θα έχουμε

$$\dot{q}_i'=\frac{\mathrm{d}q_i'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\alpha}{\alpha^{1-k/2}}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\alpha^{k/2}\dot{q}_i.$$

Λέμε ότι τα δυο συστήματα είναι μηχανικά όμοια. Το ένα προήλθε από το άλλο με χρήση του παραπάνω μετασχηματισμού κλίμακας (βαθμίδας).

Η κινητική ενέργεια θα γίνει

$$T'=T'(\dot{q}')=T(\dot{q}')=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}M_{ij}\alpha^{k/2}\dot{q}_i\alpha^{k/2}\dot{q}_j=\alpha^k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\alpha^k T(\dot{q}).$$

Επομένως, η νέα (φυσιολογική) λαγκρανζιανή συνδέεται με την αρχική σύμφωνα με τη σχέση

$$L'(q',\dot{q}',t')=T'-V'=\alpha^k T-\alpha^k V=\alpha^k L(q,\dot{q},t).$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι οι ίδιες και για τις δυο περιπτώσεις συντεταγμένων αφού η μια λαγκρανζιανή διαφέρει από την άλλη στη μορφή κατά μια πολλαπλασιαστική σταθερά. Αυτό συνεπάγεται ότι οι λύσεις, $q'=q'(t')$ και $q=q(t)$, και για τις δυο περιπτώσεις έχουν την ίδια συναρτησιακή μορφή, $f=f(w)$.

Το συμπέρασμα είναι ότι οι τροχιές του συστήματος στους χώρους q και q' έχουν ακριβώς την ίδια μορφή (είναι γεωμετρικά όμοιες), που σημαίνει ότι απλώς αλλάζουν γεωμετρικές διαστάσεις. Μπορούμε να γράψουμε ότι οποιαδήποτε «μήκη» (εφόσον μπορούν να οριστούν «μήκη») $\Delta l,\Delta l'$ στους χώρους των θέσεων, q,q' των τροχιών ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\Delta l'}{\Delta l}=\alpha$ όπως ισχύει για τις συντεταγμένες, δηλαδή $\frac{q_i'}{q_i}=\alpha$.

Αυτός είναι ο γεωμετρικός λόγος.

Για τους χρόνους των αντίστοιχων σημείων των τροχιών στους δυο χώρους ισχύει

$$\frac{t'}{t}=\alpha^{1-k/2}=\left(\frac{q_i'}{q_i}\right)^{1-k/2}$$

Αυτή η σχέση ισχύει και για οποιαδήποτε χρονικά διαστήματα των αντίστοιχων σημείων για τις κινήσεις

$q = q(t)$ και $q' = q'(t')$. Δηλαδή

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l}\right)^{1-k/2}.$$

Γενικώς, οι λόγοι διαφόρων αντίστοιχων φυσικών μεγεθών, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του γεωμετρικού λόγου. Παραδείγματα μερικών φυσικών μεγεθών είναι τα εξής,

$$\dot{q}_i' / \dot{q}_i = \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l}\right)^{k/2}, \ \frac{T'}{T} = \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l}\right)^{k}, \frac{V'}{V} = \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l}\right)^{k}, \frac{E'}{E} = \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l}\right)^{k}.$$

6. Μονοδιάστατη κίνηση σωματίου μέσα σε δυναμικό $V(q)$

Ισχύει η σχέση (εξίσωση κίνησης), $\ddot{q} = -\dfrac{1}{m}\dfrac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q} = G(q)$. Εφόσον $G = G(q)$, από τη θεωρία καταλήγουμε στη σχέση, $\dfrac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = 0$, δηλαδή η Λ είναι αυθαίρετη σταθερά, που εδώ απλώς πολλαπλασιάζει τη λαγκρανζιανή, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Lambda = 1$. Τα αυθαίρετα α, β μπορούμε να τα θεωρήσουμε μηδέν, $\alpha = 0, \beta = 0$.

Έχουμε για την περίπτωσή μας

$$L = \int_0^{\dot{q}} (\dot{q} - y)\mathrm{d}y - \frac{1}{m}\int_0^{q} \frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}\Omega(q,t)}{\mathrm{d}t}.$$

Παραλείπουμε τον τελευταίο όρο αφού είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης θέσης και χρόνου, οπότε βρίσκουμε την $L = \dfrac{1}{2}\dot{q}^2 - \dfrac{1}{m}\left[V(q) - V(0)\right]$. Παραλείπουμε τον σταθερό όρο και αφού πολλαπλασιάσουμε επί τη σταθερά m, καταλήγουμε στη γνωστή μας για την περίπτωση λαγκρανζιανή, $L = \dfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$. Πράγματι, με χρήση της εξίσωσης Lagrange, αυτή οδηγεί στη δεδομένη εξίσωση κίνησης από την οποία ξεκινήσαμε.

7. Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση

Δίνεται η διαφορική εξίσωση κίνησής του

$$\ddot{q} = -\frac{b}{m}\dot{q} - \frac{k}{m}q.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία πρέπει να βρούμε λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = \dfrac{b}{m}\Lambda$.

Παίρνουμε την λύση $\Lambda = \Lambda_0 \exp[(b/m)t], \ \Lambda_0 = \text{σταθ.}$ Χρησιμοποιούμε τη σχέση υπολογισμού της λαγκρανζιανής από τη θεωρία, όπου θέτουμε $\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \Omega(q,t) = 0$.

Τελικώς βρίσκουμε $L = \exp\left(\dfrac{b}{m}t\right)\left(\dfrac{\dot{q}^2}{2} - \dfrac{k}{m}\dfrac{q^2}{2}\right)$. Εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι αυτή πράγματι, με χρήση της εξίσωσης Λαγκρανζ οδηγεί στη δεδομένη, αρχική, εξίσωση κίνησης.

Προβλήματα

1. Δείξτε ότι ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση μηχανικού συστήματος σωματίων, όταν δεν υπάρχουν δεσμοί. Ξεκινήστε από τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα σε καρτεσιανές συντεταγμένες και για κάθε σωμάτιο χρησιμοποιήστε τις σημειακές εξισώσεις μετασχηματισμού από καρτεσιανές σε γενικευμένες συντεταγμένες, όπου υπεισέρχεται και ο χρόνος. Να μη γίνει χρήση της Αρχής Alembert.

2. Βρείτε μια λαγκρανζιανή για το απλό εκκρεμές και στη συνέχεια με χρήση της βρείτε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης για το απλό εκκρεμές. Θεωρήστε ως γνήσια γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία με την κατακόρυφο, δηλαδή την γωνία εκτροπής από την κατακόρυφο. Η φορά της κατακόρυφου να θεωρηθεί θετική προς τα κάτω. Για μικρές γωνίες εκτροπής, βρείτε την περίοδο του εκκρεμούς.

3. Θεωρήστε ότι η κινητική ενέργεια συστήματος είναι ομογενής τετραγωνική μορφή ως προς τις ταχύτητες, δηλαδή $T=\dfrac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_l\dot{q}_k$, $a_{lk}=a_{kl}$, και δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο. Στο σύστημα δρουν οι ενεργητικές (ασκούμενες) γενικευμένες δυνάμεις $Q_i=Q_i(q,\dot{q},t),\quad i=1,2,...,n$. Δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\ddot{q}_i+\sum_{l,m=1}^{n}\left[{lm \atop r}\right]\dot{q}_l\dot{q}_m=Q_r,\quad \left[{lm \atop r}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_m}+\frac{\partial a_{mr}}{\partial q_l}-\frac{\partial a_{lm}}{\partial q_r}\right),\ r=1,2,...,n$$

όπου $\left[{lm \atop r}\right]=\Gamma_{r,lm}$ είναι τα σύμβολα του Cristoffel πρώτου είδους.

4. Έστω μηχανικό σύστημα που αποτελείται από σωμάτιο-χάνδρα η οποία μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε στερεά ευθύγραμμη λεπτή ράβδο. Η ράβδος περιστρέφεται σε επίπεδο περί το ένα άκρο της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω. Το σύστημα είναι εκτός πεδίου βαρύτητας. Θεωρήστε πολικές συντεταγμένες, r,φ. Υποθέστε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $t=0,\ r(0)=r_0,\ \dot{r}(0)=0,\ \varphi(0)=0$. Θεωρήστε ως γνήσια συντεταγμένη τη συντεταγμένη r, αυτό σημαίνει ότι έχετε εμφυτέψει την εξίσωση του δεσμού. Γράψτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης που η λύση της προσδιορίζει την κίνηση της χάνδρας και βρείτε τη λύση με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες.

5. Έστω μηχανικό σύστημα που αποτελείται από σωμάτιο-χάνδρα η οποία μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε στερεά ευθύγραμμη λεπτή ράβδο. Η ράβδος περιστρέφεται σε επίπεδο περί το ένα άκρο της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Το σύστημα είναι εκτός πεδίου βαρύτητας. Υποθέστε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $t=0,\ r(0)=r_0,\ \dot{r}(0)=0,\ \varphi(0)=0$. Θεωρήστε ως γνήσιες συντεταγμένες τις πολικές συντεταγμένες r,φ, δηλαδή μην εμφυτέψετε την εξίσωση του δεσμού. Προσδιορίστε την εξίσωση του δεσμού σε διαφορική μορφή. Βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης που η λύση τους προσδιορίζει την κίνηση της χάνδρας και βρείτε τη λύση με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες. Προφανώς τα $r=r(t),\varphi=\varphi(t)$ πρέπει να είναι τα ίδια με αυτά που ισχύουν για το ίδιο πρόβλημα όταν έχει εμφυτευτεί η εξίσωση του δεσμού. Βρείτε τη δύναμη που ασκεί η περιστρεφόμενη ράβδος στο σωμάτιο, πρόκειται για δύναμη δεσμού.

6. Με Αναλυτική Μηχανική βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για ελεύθερο σωμάτιο, $L=T(q,\dot{q})$, σε σφαιρικές συντεταγμένες. Στο σωμάτιο ασκείται μια καρτεσιανή δύναμη, $\vec{F}$, με δεδομένες φυσικές συνιστώσες κατά μήκος των μοναδιαίων διανυσμάτων, $\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$.

7. Δίσκος ακτίνας a και μάζας m, ομοιόμορφα κατανεμημένης, είναι δέσμιος να κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο. Το επίπεδο του δίσκου να θεωρηθεί κατακόρυφο. Στο κέντρο του δίσκου ασκείται γνωστή δύναμη $\vec{F}$, που βρίσκεται στο επίπεδο του δίσκου. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του δίσκου. Δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας, $L=T$.

8. Θεωρήστε απλό εκκρεμές του οποίου το σημείο στήριξης κινείται στο επίπεδο του εκκρεμούς κατά γνωστό τρόπο, $x_0 = f(t), y_0 = g(t)$.

Γράψτε την εξίσωση κίνησης της αναλυτικής δυναμικής με μόνη γενικευμένη (γνήσια) συντεταγμένη τη γωνία απόκλισης φ του εκκρεμούς από την κατακόρυφο.

9. Θεωρήστε σωμάτιο δεμένο στο άκρο άμαζης στερεάς ράβδου η οποία μπορεί να περιστρέφεται περί το άλλο άκρο της σε κατακόρυφο επίπεδο μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Αυτό το άλλο άκρο της εκτελεί γνωστή κατακόρυφη κίνηση. Γράψτε την εξίσωση κίνησης της αναλυτικής δυναμικής. Δείξτε ότι η κίνηση θα ήταν ίδια αν το άκρο της ράβδου ήταν ακίνητο και το πεδίο βαρύτητας μεταβάλλονταν με τον χρόνο.

10. Σωμάτιο τοποθετείται (ακίνητο) στο ανώτατο σημείο ακίνητου κατακόρυφου κυκλικού βρόχου και από εκεί με μικρή διαταραχή ξεκινά να κινείται. Υποθέστε ότι το σωμάτιο είναι χάνδρα που ο βρόχος διαπερνά και ότι το σύστημα είναι μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Γράψτε την εξίσωση κίνησης της αναλυτικής δυναμικής, υπολογίστε τη δύναμη του δεσμού ως συνάρτηση της ταχύτητας και της θέσης του κινητού πάνω στον βρόχο (όχι συναρτήσει του χρόνου. Αν υποθέσετε ότι το σωμάτιο τοποθετείται στο εξωτερικό του βρόχου, βρείτε πότε θα ξεφύγει από τον βρόχο.

11. Θεωρήστε σύστημα πλαγιογώνιων συντεταγμένων xOy, που η γωνία μεταξύ των αξόνων x, y είναι θ (σταθερή). Πάνω σε σωμάτιο ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$ η οποία αναλύεται με τον κανόνα του παραλληλόγραμμου σε συνιστώσες F_x, F_y κατά μήκος των ανωτέρω δυο αξόνων για τους οποίους τα μοναδιαία διανύσματα είναι $\vec{e}_x, \vec{e}_y$. Θεωρήστε ως γενικευμένες συντεταγμένες του σωματίου τις πλαγιογώνιες συντεταγμένες x, y. Προσδιορίστε τις γενικευμένες συνιστώσες δύναμης Q_x, Q_y. Υπενθυμίζεται ότι $\mathrm{d}W = (F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y)\cdot(\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y)$ και $\delta W = (F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y)\cdot(\delta x\vec{e}_x + \delta y\vec{e}_y)$. Βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

12. α) Υποθέστε ότι οι γενικευμένες συνιστώσες δύναμης δεν εξαρτώνται από τις επιταχύνσεις και δείξτε ότι οι δυναμικές συναρτήσεις που μπορεί να εξαρτώνται από τις ταχύτητες είναι της γενικής μορφής

$$U(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(q,t)\dot{q}_j + a_0(q,t)\,.$$

β) Βρείτε τη δύναμη Lorentz που ασκείται σε σωματίδιο μάζας m που κινείται μέσα σε γνωστό (εξωτερικό) ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Δίνεται ότι η γενικευμένη δυναμική συνάρτηση είναι $U = e_q\Phi - e_q\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}$.

γ) Βρείτε την εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο. Θυμίζουμε ότι ισχύουν $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ $\quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$.

δ) Ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, η δυναμική συνάρτηση σωματίου είναι

$$U = -m\vec{\upsilon}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r} - \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + V(\vec{r})$$

Να προσδιοριστούν οι «δυνάμεις» που ασκούνται στο σωμάτιο. Να γραφτούν οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης.

13. Θεωρήστε στερεό κατακόρυφο δίσκο ο οποίος μπορεί να κινείται στο επίπεδο. Ο δίσκος χωρίζεται από μια διάμετρό του σε δυο τμήματα. Το ένα έχει ομοιόμορφη μη μηδενική πυκνότητα και το άλλο έχει πυκνότητα μηδέν. Ο δίσκος είναι δυνατό να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας. α) Με τις μεθόδους της Αναλυτικής Δυναμικής βρείτε την εξίσωση κίνησης, με γενικευμένη

συντεταγμένη κατάλληλη γωνία με την κατακόρυφο η οποία όταν ο δίσκος βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία είναι μηδέν. Βρείτε την εξίσωση κίνησης για μικρές τιμές της ανωτέρω γωνίας και τη λύση της. β) Με χρήση της νευτώνειας θεώρησης βρείτε την εξίσωση κίνησης.

14. Θεωρήστε σωμάτιο μάζας m που κινείται σε κυκλική τροχιά περί σταθερό σημείο που είναι η αρχή των συντεταγμένων. Η ελκτική δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο με κατεύθυνση προς το σταθερό σημείο είναι της μορφής $F = F(r) = -mg(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$.

Βρείτε τη συνθήκη για να είναι η κυκλική τροχιά ευσταθής. Να θεωρήσετε ότι για μικρές μεταβολές του r από την τιμή που έχει στην κυκλική τροχιά πρέπει οι μικρές μεταβολές να μεταβάλλονται αρμονικά με τον χρόνο (ένα είδος αρμονικής ταλάντωσης).

Αυτό σημαίνει πως οι τιμές του r δεν απομακρύνονται πολύ από την τιμή της κυκλικής τροχιάς. Υποθέστε ότι $F(r) = -\dfrac{K}{r^{\alpha}}$. Για ποιες τιμές του α είναι η κυκλική τροχιά ευσταθής;

Τι συμπεραίνετε για τις κυκλικές τροχιές στην περίπτωση που ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης; Εργαστείτε με αναλυτική δυναμική.

15. Εφαρμόστε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την περίπτωση που κάποιες από τις ασκούμενες (ενεργητικές) δυνάμεις του δυναμικού συστήματος είναι κρουστικές, δηλαδή ασκούνται επί πολύ μικρό χρονικό διάστημα αλλά είναι πολύ μεγάλες ώστε στον πολύ μικρό χρόνο που ασκούνται το ολοκλήρωμά τους ως προς τον χρόνο, δηλαδή η γενικευμένη ώθησή τους, να είναι πεπερασμένη. Θα βρείτε μια σχέση με μεγέθη λίγο πριν το κρουστικό φαινόμενο και λίγο μετά.

16. Έστω ότι έχετε τη λαγκρανζιανή $L_1 = A\dot{q}^2 + 2Cq\dot{q} + D\dot{q}t + Dq + E + Bq^2$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και προσδιορίστε τη λύση $q = q(t)$. Θεωρήστε ότι $\dot{q}(0) = 0,\ q(0) = q_0$.

Έστω, στη συνέχεια, η λαγκρανζιανή $L_2 = A\dot{q}^2 + Bq^2$. Για τις ίδιες αρχικές συνθήκες η λύση είναι η ίδια. Γιατί;

Υποθέστε ότι τα A, B, C, D, E είναι θετικές σταθερές.

17. Υποθέστε ότι έχετε σύστημα δυο σωματίων με μάζες $m_1,\ m_2$ που μπορούν να κινούνται στο επίπεδο μέσα σε κατακόρυφο, προς τα κάτω ομογενές σταθερό πεδίο βαρύτητας g. Τα σωμάτια δεν αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο. Ως γενικευμένες συντεταγμένες να ληφθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες, $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$ των δυο σωματίων αντιστοίχως, ως προς άξονες που ο x είναι οριζόντιος και ο y κατακόρυφος προς τα κάτω. Ακολουθήστε τη μέθοδο των εξισώσεων του Lagrange και βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης. Σχηματίστε την ολική μηχανική ενέργεια του κάθε ενός σωματίου και με χρήση των ανωτέρω (διαφορικών) εξισώσεων κίνησης δείξτε ότι η κάθε μια διατηρείται ανεξάρτητα από την άλλη.

18. Δυο υλικά σημεία με μάζες $m_1,\ m_2$ είναι μεταξύ τους δεμένα στα άκρα άμαζου ελατηρίου. Η μάζα (1) είναι στερεωμένη στο ταβάνι, η (2) κρέμεται (κατακόρυφα) δεμένη στην άλλη άκρη του ελατηρίου και το σύστημα είναι ακίνητο μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Κάποια στιγμή η μάζα (1) απαγκιστρώνεται από το ταβάνι και το όλο σύστημα κινείται σε κατακόρυφη ευθεία. α) Βρείτε τις εξισώσεις Lagrange με συντεταγμένες τις κατακόρυφες καρτεσιανές συντεταγμένες ως προς το σημείο στερέωσης της μάζας (1). β) Λύστε τις εξισώσεις κίνησης και προσδιορίστε τις κινήσεις των δυο μαζών. Στη συνέχεια, με χρήση των κινήσεων των δυο μαζών, βρείτε την επιμήκυνση του ελατηρίου συναρτήσει του χρόνου και την κίνηση του κέντρου μάζας.

19. Υποθέτουμε ότι έχουμε άμαζη στερεά ράβδο η οποία μπορεί να κινείται σε επίπεδο και της οποίας τα άκρα είναι δέσμια να κινούνται ενώ βρίσκονται συνεχώς πάνω σε δυο δεδομένες σταθερές γνωστές καμπύλες του επιπέδου. Στα άκρα της ράβδου υπάρχουν σωμάτια με δεδομένες μάζες. Κάποια χρονική στιγμή ασκείται σε ένα σημείο της κινούμενης υπό την επίδραση ασκούμενων δυνάμεων ράβδου, κάθετα σε αυτήν, πρόσθετη κρουστική δύναμη γνωστής γενικευμένης ώθησης. Βρείτε τις μεταβολές των ταχυτήτων των δυο σωματίων

μεταξύ των χρονικών στιγμών λίγο μετά και λίγο πριν το κρουστικό φαινόμενο. Η κρουστική δύναμη ασκείται επί πολύ μικρό χρονικό διάστημα αλλά είναι τόσο μεγάλη που η ώθησή της είναι πεπερασμένη.

20. α) Αν η λαγκρανζιανή για σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας περιέχει τις δυο πρώτες συντεταγμένες μόνο ως συνδυασμό της μορφής $aq_1 + bq_2$, όπου a, b σταθερές, δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά κίνησης και βρείτε την.
β) Σωμάτιο κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης με τιμή

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2}\right).$$

Βρείτε μια γενικευμένη δυναμική συνάρτηση που οδηγεί σε αυτή τη δύναμη. Αυτή είναι η δύναμη μεταξύ δυο κινούμενων φορτισμένων σωματίων στην ηλεκτροδυναμική του Weber.

21. Οποιοδήποτε σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων είναι εξίσου καλό με οποιοδήποτε άλλο για την περιγραφή της κίνησης ενός μηχανικού συστήματος. Η μετάβαση από ένα σύστημα σε άλλο γίνεται με μετασχηματισμό σημείου, δηλαδή, $q_i' = q_i'(q,t),\ i = 1, 2, ..., n$. Η αρχική λαγκρανζιανή του συστήματος εξαρτάται από τις αρχικές συντεταγμένες, $L = L(q, \dot{q}, t)$. Η νέα λαγκρανζιανή υπολογίζεται στις νέες συντεταγμένες, με απλή αντικατάσταση των εξισώσεων μετασχηματισμού, δηλαδή $L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(q',t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(q(q',t)\big), t\right)$. Αυτό συμβαίνει διότι οι συντεταγμένες q, q' περιγράφουν το ίδιο «φυσικό» σημείο στον χώρο των θέσεων, οπότε η λαγκρανζιανή, στο ίδιο σημείο, έχει την ίδια τιμή και για τα δυο είδη συντεταγμένων. Η μορφή της είναι, γενικώς, διαφορετική. Είναι ευνόητο ότι $\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial q_j'}\dot{q}_j' + \frac{\partial q_k}{\partial t}$. Δείξτε ότι αν η $L(q,t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τις λύσεις $q_i = q_i(t)$, τότε και η $L'(q', \dot{q}', t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τις λύσεις $q' = q'(t)$. Οι τελευταίες είναι ισοδύναμες με τις προηγούμενες με την έννοια ότι είναι οι προηγούμενες μετασχηματισμένες με τον σημειακό μετασχηματισμό, δηλαδή είναι εκφρασμένες ως προς τις νέες συντεταγμένες.

22. Θεωρήστε τη γνωστή περίπτωση του δίσκου που κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο και το επίπεδό του είναι κατακόρυφο. Κάντε χρήση των δεσμών αυτής της περίπτωσης σε μορφή διαφορικών εξισώσεων του Pfaff και βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης Προσδιορίστε τη λύση, δηλαδή τα $x = x(t), y = y(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$ υποθέτοντας ότι η αρχικές τους τιμές είναι $x = 0, y = 0, \varphi = 0, \theta = 0, \dot{\varphi} = \omega, \dot{\theta} = \Omega$. Προσδιορίστε τις γενικευμένες συνιστώσες δύναμης των δεσμών. Στη συνέχεια προσδιορίστε τις καρτεσιανές (φυσικές) δυνάμεις δεσμών.

23. Θεωρήστε τη γνωστή περίπτωση του δίσκου που κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο και το επίπεδό του είναι κατακόρυφο. Κάντε χρήση των δεσμών αυτής της περίπτωσης σε μη γραμμική μορφή και βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης Προσδιορίστε τη λύση, δηλαδή τα $x = x(t), y = y(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$, υποθέτοντας ότι η αρχικές τους τιμές είναι $x = 0, y = 0, \varphi = 0, \theta = 0, \dot{\varphi} = \omega, \dot{\theta} = \Omega$.

24. Υποθέστε ότι σωμάτιο μάζας m εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση. Η θέση του προσδιορίζεται από τη συντεταγμένη q. Το σωμάτιο κινείται προς τα κάτω μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας και ασκείται πάνω του δύναμη τριβής, $-\frac{b}{m}\dot{q}^2$. Η εξίσωση κίνησης είναι η γνωστή, $\ddot{q} = -g - \frac{b}{m}\dot{q}^2$, όπου ο άξονας της συντεταγμένης

q, είναι θετικός προς τα πάνω. Να δειχθεί ότι λαγκρανζιανή του συστήματος είναι η $L = \exp\left(\frac{2b}{m}q\right)\left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{mg}{2b}\right)$.

25. Για πύραυλο που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας ενώ δέχεται δύναμη τριβής της μορφής $-b\dot{q}$, η εξίσωση κίνησης είναι

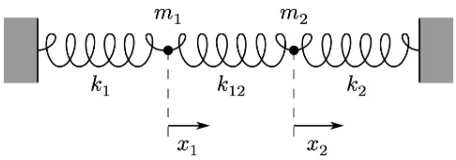
$$(m_0 - \mu t)\ddot{q} = -(m_0 - \mu t)g - b\dot{q} + \mu \upsilon_{\mathrm{r}}(t).$$

Ο άξονας για το q είναι θετικός προς τα πάνω. Έστω $m = m(t)$ είναι η μάζα του πυραύλου τη στιγμή t, και m_0 είναι η αρχική μάζα του πυραύλου. $\dot{m} = -\mu < 0$ είναι ο σταθερός ρυθμός μεταβολής αυτής της μάζας, $\upsilon_{\mathrm{r}}(t)$ είναι η ταχύτητα εκροής των αερίων της καύσης σχετικά με τον πύραυλο. Να δειχτεί ότι λαγκρανζιανή του συστήματος είναι η

$$L = (m_0 - \mu t)^{-b/\mu}\left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{[(m_0 - \mu t)g - \mu\upsilon_{\mathrm{r}}(t)]q}{m_0 - \mu t}\right).$$

26. Βρείτε τη λαγκρανζιανή για σωμάτιο που κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση μιας μοναδικής δύναμης που είναι η δύναμη τριβής, $-\gamma\dot{q}$, η οποία είναι αντίθετη της κίνησης. Η εξίσωση κίνησης είναι η $\ddot{q} + \gamma\dot{q} = 0$.

27. Μελετήστε τις ταλαντώσεις που εκτελούν οι σημειακές μάζες $m_1 = m_2 = m$, του Σχήματος Πρ. 2.27 . Η κίνηση γίνεται πάνω στην ευθεία των ελατηρίων οι κατευθύνουσες δυνάμεις (σταθερές) των ελατηρίων είναι $k_1 = k,\ k_{12},\ k_2 = k$. Το μεσαίο ελατήριο είναι η αιτία που υπάρχει σύζευξη. Το πρόβλημα αυτό είναι το πρόβλημα δυο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών. Οι γενικευμένες συντεταγμένες x_1, x_2, είναι οι μετατοπίσεις των μαζών 1,2 από τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Προσδιορίστε την κίνηση $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$, όταν $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Προσδιορίστε τις κανονικές συντεταγμένες. Δεν υπάρχει βαρύτητα.



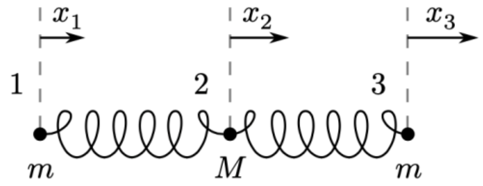
Σχήμα Πρ. 2.27.

28. Μελετήστε το γνωστό διπλό εκκρεμές όπου τα δυο μήκη είναι ίσα, l, και οι δυο σημειακές μάζες είναι ίσες, m. Η μελέτη να γίνει για μικρού πλάτους αιωρήσεις. Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης και τις κανονικές συντεταγμένες συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων.

29. Το πάνω άκρο ενός άμαζου ελατηρίου με σταθερά k είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στο κάτω άκρο του είναι δεμένη σημειακή μάζα m και επίσης ένα άλλο ίδιο ελατήριο που στο άλλο άκρο του είναι δεμένη σημειακή μάζα $2m$. Αρχικά τα ελατήρια ισορροπούν στην κατακόρυφη θέση μέσα στο πεδίο βαρύτητας, g. Βρείτε τις κανονικές συχνότητες και τις κανονικές συντεταγμένες συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων. Το σύστημα εκτελεί κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση.

30. Μελετήστε την κίνηση του συστήματος που φαίνεται στο Σχήμα Πρ. 2.30. Αυτό είναι μοντέλο για κλασική περιγραφή τριατομικού συμμετρικού μορίου. Υποθέστε ότι το σύστημα μπορεί να κινείται μόνο κατά μήκος

της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι σημειακές μάζες. Προσδιορίστε τις ιδιοσυχνότητες και βρείτε τις κανονικές συντεταγμένες συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων. Θεωρήστε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις μετατοπίσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Τα δυο ελατήρια είναι ίδια.



Σχήμα Πρ. 2.30.

31. Το Πρόβλημα 30, το οποίο αντιπροσωπεύει μοντέλο κλασικής φυσικής για τριατομικό μόριο, μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα με δυο γενικευμένες συντεταγμένες, αν υποθέσουμε ότι κατά την κίνηση του συστήματος το κέντρο μάζας του είναι ακίνητο. Θεωρήστε ως συντεταγμένες τις y_1, y_2 όπου το $y_1 = \xi_2 - \xi_1, y_2 = \xi_3 - \xi_2$. ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι οι συντεταγμένες των μαζών 1,2,3 αντιστοίχως. Με χρήση της ακινησίας του κέντρου μάζας κάντε απαλοιφή του ξ_2 .

32. Για το πρόβλημα του απλού εκκρεμούς προσδιορίστε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης για τη γωνία απόκλισης από την κατακόρυφο, όταν υπάρχει δύναμη τριβής που ασκείται στο σωμάτιο του εκκρεμούς η οποία είναι της μορφής (νόμος του Stokes) $\vec{F} = -k\dot{\vec{r}},\ k > 0,\ k = \text{σταθερά}$. Να λυθεί με τη μεθοδολογία περί δυνάμεων απωλειών. Βρείτε τη φυσιολογική λαγκρανζιανή και τη συνάρτηση Rayleigh και στη συνέχεια κάντε χρήση της εξίσωσης Euler-Lagrange για τον προσδιορισμό της (διαφορικής) εξίσωσης κίνησης.

33. Υποθέστε ότι έχετε δυο (άμαζα) ελατήρια με σταθερές k_1, k_2 και φυσικά μήκη l_1, l_2 αντιστοίχως. Το ελατήριο 1 έχει το ένα άκρο του ακλόνητα δεμένο σε ένα σημείο. Στο άλλο άκρο του είναι δεμένο υλικό σημείο μάζας m_1 . Σε αυτό το άκρο είναι δεμένο το ελατήριο 2 και στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου 2 είναι δεμένο υλικό σημείο μάζας m_2 . Το σύστημα είναι εκτός πεδίου βαρύτητας και μπορεί να κινείται πάνω σε ευθεία στην οποία βρίσκονται και τα δυο ελατήρια. Υποθέστε ότι στο κάθε ελατήριο ασκείται δύναμη τριβής της μορφής $-C_1\dot{x}_1, -C_2\dot{x}_2$ (Stokes), $C_1 > 0, C_2 > 0,$ C_1, C_2 σταθερές και $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ οι αντίστοιχες ταχύτητες των σωματίων. Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία με δυνάμεις απωλειών, βρείτε τη φυσιολογική λαγκρανζιανή του συστήματος και τη συνάρτηση απωλειών Rayleigh και στη συνέχεια από τις εξισώσεις Lagrange βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. Στο τέλος μετασχηματίστε σε μεταβλητές q_1, q_2 οι οποίες είναι οι απομακρύνσεις των δυο μαζών αντιστοίχως από τις θέσεις ισορροπίας τους.

34. Δείξτε ότι για την περίπτωση του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, αν το σύστημα υποστεί μετασχηματισμό κλίμακας όπου και ο χρόνος μετασχηματίζεται κατάλληλα κατά τα γνωστά, τότε η περίοδος του συστήματος μένει η ίδια, χωρίς να λύσετε τις εξισώσεις κίνησης αλλά με χρήση της θεωρίας περί μηχανικής ομοιότητας.

35. Με τη μέθοδο της μηχανικής ομοιότητας δείξτε ότι στην περίπτωση κεντρικής κίνησης τύπου Kepler, ισχύει ο σχετικός νόμος για τις περιόδους των τροχιών και αντίστοιχων διαστάσεων των τροχιών των πλανητών. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 .$$

36. Με τη μέθοδο της θεωρίας της μηχανικής ομοιότητας δείξτε ότι για την ελεύθερη πτώση υλικού σημείου μέσα σε σταθερό και ομοιόμορφο πεδίο βαρύτητας ο χρόνος πτώσης είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του αρχικού ύψους. Υποτίθεται ότι η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν.

37. Με τη μέθοδο της θεωρίας της μηχανικής ομοιότητας δείξτε ότι ο λόγος των χρονικών διαστημάτων, για την ίδια διαδρομή, για σωμάτια που έχουν διαφορετικές μάζες αλλά την ίδια δυναμική ενέργεια, είναι

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{\frac{m'}{m}} .$$

38. Με τη μέθοδο της θεωρίας της μηχανικής ομοιότητας δείξτε ότι ο λόγος των χρονικών διαστημάτων για την ίδια διαδρομή σωματιδίων που έχουν την ίδια μάζα αλλά δυναμικές ενέργειες που διαφέρουν κατά σταθερό συντελεστή, είναι $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{\frac{V}{V'}}$.

39. Θεωρήστε σωμάτιο που κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο μέσα σε πεδίο βαρύτητας, οπότε έχει δυναμική ενέργεια $V = gy$. Η κινητική του ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$.

Υπάρχει η δεσμευτική σχέση $\dot{y} - t\dot{x} = 0$. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

40. Υποθέστε ότι έχουμε ένα κυκλικό δακτυλίδι που το επίπεδό του είναι κατακόρυφο μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Μια μικρή χάνδρα ορισμένης μάζας είναι δέσμια να κινείται χωρίς τριβή κατά μήκος του δακτυλιδιού. Το δακτυλίδι περιστρέφεται περί την κατακόρυφη διάμετρό του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Θεωρήστε ως (μοναδική, γνήσια) συντεταγμένη τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία που ενώνει το κέντρο του κύκλου με τη χάνδρα με την κατακόρυφο. Αυτή η γωνία είναι μηδέν όταν η χάνδρα είναι στο κατώτερο σημείο του δακτυλιδιού και παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Προσδιορίστε τη λαγκρανζιανή για το σύστημα και βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης.

41. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός βαθμίδας (gauge transformation)

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t)$$
$$\phi'(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

δεν επηρεάζει τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης σωματιδίου που κινείται μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, αυτές μένουν αναλλοίωτες. Η βαθμωτή αυθαίρετη συνάρτηση $\psi(\vec{r},t)$ μερικές φορές λέγεται συνάρτηση βαθμίδας.

Σημείωση: Δε χρειάζεται να βρείτε τις εξισώσεις κίνησης.

42. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ακίνητο φορτισμένο σωμάτιο τοποθετημένο στην αρχή των συντεταγμένων είναι τον γνωστό του νόμου του Coulomb. Το μαγνητικό του πεδίο είναι μηδέν. Βεβαιωθείτε ότι αυτά μπορούν να υπολογιστούν αν υποθέσουμε ότι το διανυσματικό δυναμικό και το βαθμωτό δυναμικό του φορτίου είναι αντιστοίχως

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_q t}{r^2}\vec{e}_r, \quad V = 0 .$$

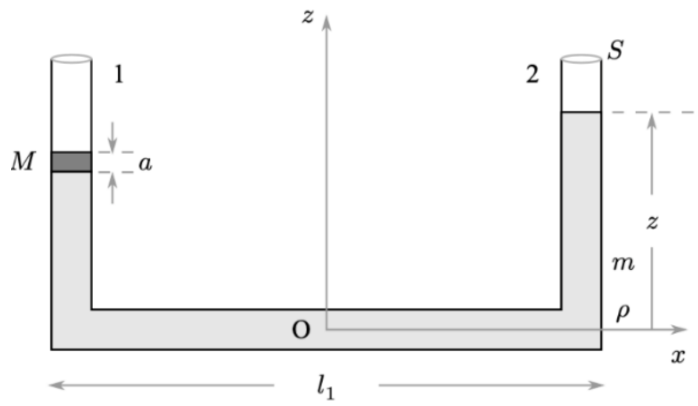
Χρησιμοποιήστε τον γνωστό μετασχηματισμό βαθμίδας με βαθμωτή συνάρτηση (βαθμίδας) την $\psi = -\frac{e_q t}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Πρέπει να βρείτε τα πιο συνήθη για την περίπτωση διανυσματικό και βαθμωτό δυναμικό.

Δηλαδή τα $\vec{A} = 0, \quad V = \dfrac{e_q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

43. Να λυθεί το Πρόβλημα 42 με τη μέθοδο ενσωμάτωσης των δυνατών μετατοπίσεων των δεσμών. Υπόδειξη: Βρείτε τη σχέση της Αρχής d' Alembert και τη δεσμευτική σχέση μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων. Από τις τελευταίες να εκφράσετε τη μια συναρτήσει της άλλης και να αντικαταστήσετε στην εξίσωση d' Alembert. Συνεχίστε από εκεί και πέρα.

44. Δίνεται η διάταξη του Σχήματος Πρ. 2.44. Πρόκειται για σωλήνα μικρής διατομής S ο οποίος περιέχει ασυμπίεστο υγρό πυκνότητας ρ «μήκους» l και το επίπεδό του είναι κατακόρυφο.

Στο πάνω άκρο του υγρού στο σκέλος 1 του σωλήνα τοποθετείται σώμα μάζας M το οποίο να θεωρηθεί ως έμβολο το οποίο συνεχώς θα είναι σε επαφή με το υγρό στην επιφάνεια του υγρού ακόμη και όταν το υγρό κινείται, υπάρχει στεγανότητα. Η κατακόρυφη διάσταση του εμβόλου (το ύψος του) είναι a. Η βαρύτητα είναι g, δεν υπάρχουν κανενός είδους τριβές. Θεωρήστε ότι η (γενικευμένη) συντεταγμένη για την περιγραφή της κίνησης είναι η συντεταγμένη της επιφάνειας του υγρού στο σκέλος 2 του σωλήνα, z. Βρείτε τη λαγκρανζιανή του συστήματος υγρού - μάζας M. Θεωρήστε ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη στάθμη με $z = 0$ και τον άξονα z θετικό προς τα πάνω (βλέπε σχήμα). Αν το σύστημα υγρού-σώματος μάζας M απομακρυνθεί από την ισορροπία και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο θα κινείται. Από την εξίσωση Lagrange βρείτε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης και τη λύση της. Θεωρήστε ότι η απομάκρυνση το $z = z_0$ τη στιγμή $t = 0$ και ότι αυτή τη στιγμή η ταχύτητα, $\dot{z}$ του συστήματος είναι μηδέν. Βρείτε την πίεση που ασκείται στο σώμα M από το υγρό κατά την ταλάντωση του συστήματος. Γιατί δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για αυτόν τον υπολογισμό την Αρχή του Πασκάλ;



Σχήμα Πρ. 2.44.

45. Θεωρήστε απλό εκκρεμές το οποίο κινείται σε δεδομένο κατακόρυφο επίπεδο. Η μάζα του σωματίου που κρέμεται, στο ελεύθερο άκρο του είναι m_2. Στο άλλο άκρο του υπάρχει σωμάτιο με μάζα m_1. Το άνω άκρο είναι δέσμιο έτσι που μπορεί να κινείται οριζόντια, κατά μήκος του άξονα y, χωρίς τριβή. Ο κατακόρυφος άξονας είναι ο z, θετικός προς τα κάτω. Το μήκος του εκκρεμούς είναι l και η βαρύτητα g. Θεωρήστε ως γνήσιες γενικευμένες συντεταγμένες, τη συντεταγμένη y του άνω άκρου και τη γνωστή απόκλιση του εκκρεμούς από την κατακόρυφο, φ. Προσδιορίστε τη λαγκρανζιανή του συστήματος.

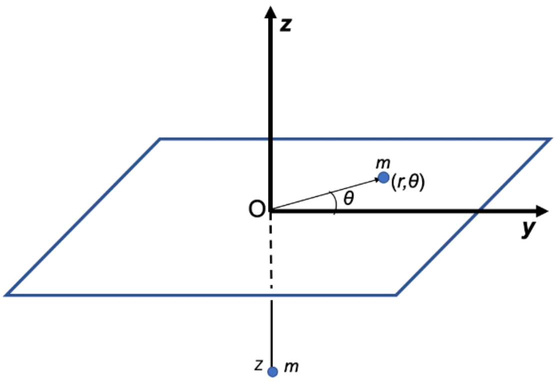
46. Μελετήστε την περίπτωση ομογενούς δίσκου (κυλίνδρου) ακτίνας R που κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Η μάζα του είναι m και η ένταση της βαρύτητας g. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε ως συντεταγμένες τη θέση, x, πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και τη γωνία, φ, περιστροφής του δίσκου περί άξονα κάθετο στο επίπεδό του. α) Λύστε το πρόβλημα αφού ενσωματώσετε τον δεσμό που δεν επιτρέπει την ολίσθηση. β) Στη συνέχεια βρείτε τη λύση με τη μέθοδο της τροποποίησης της λαγκρανζιανής αφού ο δεσμός είναι ολόνομος, γνωστός στην ολοκληρωμένη μορφή του. γ)

Εκφράστε τον δεσμό σε μορφή γραμμική ως προς τις πρώτες παραγώγους (ταχύτητες) και εφαρμόστε και πάλι τη μέθοδο μετατροπής της λαγκρανζιανής με τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού. Πότε μπορείτε και το κάνετε αυτό; Στη συνέχεια, με χρήση των λύσεων (είναι ίδιες για όλες τις περιπτώσεις), βρείτε τις δυνάμεις των δεσμών. Δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο με πολλαπλασιαστές Lagrange.

47. Με τη μέθοδο της Αναλυτικής Μηχανικής βρείτε τη δύναμη (δεσμού) που ασκείται σε άμαζο ελατήριο στο ακλόνητο άκρο του. Στο άλλο άκρο του είναι στερεωμένη σημειακή μάζα m. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k και το φυσικό του μήκος l. Το ελατήριο εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση στη διεύθυνση του. Δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις. Υπολογίστε την ίδια δύναμη με τη μέθοδο της νευτώνειας θεώρησης.

48. Δείξτε ότι οι λαγκρανζιανές $L_1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2x\dot{x} - 2y\dot{y} - 2z\dot{z}$ και $L_2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{x}y + x\dot{y} + \dot{x}z + x\dot{z} + \dot{y}z + y\dot{z}$ οδηγούν στις ίδιες (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης.
Δικαιολογήστε γιατί ισχύει αυτό.

49. Θεωρήστε τη διάταξη του Σχήματος Πρ. 2.49. Δεν υπάρχουν τριβές, το νήμα είναι άμαζο και εύκαμπτο και διέρχεται μέσα από πολύ μικρή τροχαλία στο σημείο O του οριζόντιου επιπέδου. Το μήκος του είναι l. Στα άκρα του νήματος είναι δεμένα δυο υλικά σημεία ίδιας μάζας m. Το ένα υλικό σημείο μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, το άλλο πάνω στην κατακόρυφο. Το ένα υλικό σημείο έχει συντεταγμένες τις (r,θ) και το άλλο την z. Επειδή ο άξονας z είναι θετικός προς τα πάνω, το $z<0$. Για τον προσδιορισμό της θέσης του συστήματος είναι αρκετές δυο (γνήσιες) συντεταγμένες, διαλέξτε ως τέτοιες τις r,θ. Από αυτές μπορείτε να βρείτε κάθε στιγμή την z. Πως θα την βρείτε; Βρείτε την κινητική ενέργεια και την δυναμική ενέργεια του συστήματος. Να βρεθούν οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης του συστήματος με χρήση της μεθόδου Lagrange. Δείξτε ότι η στροφορμή περί το O διατηρείται. Βρείτε την κυκλική συχνότητα ω_1 όταν το σωμάτιο στο επίπεδο εκτελεί κυκλική κίνηση περί το O.



Σχήμα Πρ. 2.49.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 2

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β’ Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[3] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[4] E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.

[5] Α. Μαυραγάνης, *Αναλυτική Μηχανική*, ΕΜΠ, 1998.

[6] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[7] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 1977.

[8] M. R. Flannery, *The Enigma of Nonholonomic Constraints*, American Journal of Physics, Vol. 73, pp. 265, 2005.

[9] Y. H. Chen, *Pars’s Acceleration Paradox*, J. Franklin Inst., Vol. 335B, No. 5., pp. 871- 875, 1998.

[10] L. A. Pars, *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann,1968.

[11] C.C. Yan, *Construction of Lagrangians and Hamiltonians from the equation of motion*, American Journal of Physics, Vol. 46, pp. 671, 1978.

[12] C. Leubnert and P. Krumm, *Lagrangians for simple systems with variable mass*, Eur. J. Phys., Vol. 11, pp. 31, 1990.

[13] A. Mizel, *Nonuniqueness of the Lagrangian Function*, report Univ. of Cal. Berkeley, May 20, 1995.

[14] R. G. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.

[15] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan and B. Vijayalakshmi, *Particles of half-integral or integral helicity by quantization of a nonrelativistic free particle, and relevant topics*, Phys. Rev. D. 18 (1950), 1978.

[16] S. Hojman and H. Harleston, *Equivalent Lagrangians: Multidimensional Case*, J. Math. Phys., Vol. 22, pp. 1414-1419, 1981.

[17] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[18] G. Marmo, E.J. Saletan, *Ambiguities in the Lagrangian and Hamiltonian Formalism: Transformation Properties*, Nuovo Cimento, D. 40B, pp. 67, 1977.

[19] J. F. Carinena, A. Ibort, G. Marmo, G. Morandi, *Geometry from Dynamics, Classical and Quantum*, Springer, 2015.

[20] H. von Helmholtz, *Über die Physikalische Bedeutung des Princips der Kleinsten Wirkung*, Z. Reine Angew. Math., Vol. 100, pp. 137, 1887.

[21] G. Darboux, *Lecons sur la theorie generale des surfaces et des applications geometriques du calcul infinitesimal*, IIIeme partie, Paris, Gauthiers-Villars, 1894.

[22] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Inc., 1998.

[23] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, 1962.

[24] A.O. Barut, *Electrodynamics of Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, 1964.

Κεφάλαιο 3: Αρχή του Hamilton. Στοιχεία θεωρίας μεταβολών

Η θεωρία μεταβολών είναι μια μαθηματική θεωρία που λέγεται και Λογισμός των Μεταβολών ή σωστότερα, Λογισμός Παραλλαγών (Calculus of Variations). Σχετίζεται με τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Προβλήματα που μπορούν να λυθούν με θεωρία μεταβολών υπάρχουν στις εργασίες των Αρχαίων Ελλήνων, π.χ. η Αρχή του Ήρωνος για το φως, το πρόβλημα της Διδώς (Διδούς) κ.α. Η θεωρία μεταβολών, στη μορφή που χρησιμοποιείται στη Μηχανική, σχετίζεται με την εύρεση της πραγματικής διαδρομής η οποία χαρακτηρίζεται από το ότι κατά μήκος της, κάποιο ολοκλήρωμα έχει στάσιμη τιμή. Η σύγκριση γίνεται με πολύ γειτονικές διαδρομές ως προς την ζητούμενη, δηλαδή την πραγματική. Οι μεταβολές του ολοκληρώματος είναι μηδέν σε προσέγγιση διαφορικών πρώτης τάξης. Σημειώνουμε ότι για να λύνεται το πρόβλημα πρέπει να υπάρχει οικογένεια αποδεκτών τροχιών που να διαφέρουν λίγο μεταξύ τους και σε αυτές να περιλαμβάνεται η ζητούμενη πραγματική τροχιά. Οι αποδεκτές τροχιές συνήθως χαρακτηρίζονται από συνέχεια, από κατά διαστήματα παραγωγισιμότητα και συνεχείς παραγώγους μέχρι την τάξη που χρειάζεται το συγκεκριμένο πρόβλημα. Θα θεωρούμε, χωρίς να το αναφέρουμε κάθε φορά, ότι ισχύουν οι απαραίτητες μαθηματικές προϋποθέσεις. Αυτό συνήθως καλύπτεται με την έκφραση: Οι συναρτήσεις είναι «καλά» συμπεριφερόμενες. Μπορεί να υπάρχουν και δεσμευτικές σχέσεις που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Η συνθήκη της στασιμότητας του ολοκληρώματος δεν μας λέει αν το ολοκλήρωμα θα έχει μέγιστη τιμή ή ελάχιστη ή πρόκειται για σημείο καμπής. Η στασιμότητα είναι το ανάλογο που συμβαίνει στη συνήθη θεωρία με συναρτήσεις, απλώς εδώ το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο. Δεν θα ασχοληθούμε συστηματικά με το θέμα του είδους της στασιμότητας. Αυτό μπορεί να μελετηθεί λαμβάνοντας τη δεύτερη μεταβολή (second variation), που είναι κάτι ανάλογο με τον αντίστοιχο έλεγχο στη συνήθη θεωρία με συναρτήσεις, όπου λαμβάνονται υπόψη οι δεύτερες παράγωγοι. Όπως θα δούμε, μπορούμε να αναφερόμαστε και σε προβλήματα Μηχανικής που σχετίζονται με ολοκληρώματα, χωρίς να εμπίπτουν στην θεωρία μεταβολών. Η χρησιμοποίηση στην Κλασική Δυναμική αρχών που σχετίζονται με ολοκληρω(μα)τικές σχέσεις, συνήθως οδηγούν στις (διαφορικές) εξισώσεις Euler-Lagrange. Η λύση όμως τέτοιων προβλημάτων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, χωρίς κατ' ανάγκη τη χρήση των εξισώσεων Euler-Langrange. Υπάρχουν διάφοροι τέτοιοι τρόποι που αναφέρονται ως απευθείας (direct) μέθοδοι. Δηλαδή, μπορεί να γίνει χρήση ακόμη και αριθμητικών μεθόδων για να βρεθούν οι λύσεις («τροχιές») που δίνουν την πραγματική χρονική εξέλιξη του συστήματος, για τις οποίες λύσεις, τα ολοκληρώματα γίνονται στάσιμα. Γενικώς, στη θεωρία μεταβολών, αν δεν ισχύουν παντού κατάλληλες συνθήκες συνέχειας, παραγωγισιμότητας κ.λπ., δεν είναι δυνατόν να βρεθούν για όλο το διάστημα ορισμού του προβλήματος εξισώσεις Euler-Lagrange, μπορεί όμως τέτοιες εξισώσεις να ισχύουν κατά διαστήματα. Σε διάφορα προβλήματα όπως τα παραπάνω με ολοκληρώματα, μπορεί να υπάρχουν και διάφορες παράμετροι που δεν «φεύγουν» με την ολοκλήρωση ή ακόμη μπορεί να υπάρχουν όροι που προστίθενται στο ολοκλήρωμα, γι' αυτό όταν σχηματίζουμε την παραλλαγή (μεταβολή) πρέπει να ληφθούν όλα αυτά υπόψη. Γενικώς, πολλά προβλήματα της Φυσικής όπως της δυναμικής διακριτών συστημάτων, της Θεωρίας Πεδίων, της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, της Υδροδυναμικής, του Ηλεκτρομαγνητισμού κ.λπ., μπορούν να αντιμετωπιστούν με παρόμοιες μεθόδους όπου εισέρχονται ολοκληρώματα. Τέτοια προβλήματα αφορούν σε συστήματα που εξελίσσονται στον χρόνο, δηλαδή είναι δυναμικά συστήματα.

3.1 Αρχή του Hamilton

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με την Αρχή (του) Hamilton και αργότερα θα δούμε πότε αυτή είναι αρχή μεταβολών. Ας ξεκινήσουμε από τις Εξ. (2.11). Καταλαβαίνουμε ότι η αρχή του d' Alembert αναφέρεται σε κάποια απειροστή ποσότητα η οποία είναι το ολικό δυνατό έργο των αδρανειακών και ασκούμενων δυνάμεων για κάποιο μηχανικό σύστημα. Αυτή η αρχή λέει ότι αυτή η ποσότητα είναι μηδέν.

Στη συνέχεια θα βρούμε την αρχή του Hamilton ξεκινώντας από την αρχή του d' Alembert. Ξεκινούμε από την έκφρασή της με την κινητική ενέργεια, όπως φαίνεται στην Εξ. (2.49), δηλαδή από τη σχέση

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\delta q_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-Q_\alpha\right)\right\}=0\,. \tag{3.1}$$

Ολοκληρώνουμε την Εξ. (3.1) μεταξύ δυο δεδομένων χρονικών στιγμών t_1, t_2 οι οποίες είναι αυθαίρετες, οπότε βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-Q_\alpha\right\}\delta q_\alpha \mathrm{d}t=0\,. \tag{3.2}$$

Στη συνέχεια απαιτούμε οι θέσεις $q_\alpha(t_1),\, q_\alpha(t_2)$ να είναι καθορισμένες, ίδιες για όλες τις μεταξύ τους τροχιές. Αυτό θα πει ότι οι παρακάτω δυνατές μετατοπίσεις είναι μηδέν, δηλαδή

$$\delta q_\alpha(t_1)=\delta q_\alpha(t_2)=0,\ \alpha=1,2,...,n\,. \tag{3.3}$$

Ολοκληρώνουμε παραγοντικά τον πρώτο όρο της Εξ. (3.2) οπότε εφόσον ισχύουν για τα άκρα της ολοκλήρωσης οι Εξ. (3.3) και επίσης αφού $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q_\alpha\right)=\delta\dot{q}_\alpha$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha \mathrm{d}t &= -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\alpha)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}\\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha \mathrm{d}t \quad .\end{aligned} \tag{3.4}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.4) στην Εξ. (3.2) βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j+Q_j\delta q_j\right\}\mathrm{d}t=0\,. \tag{3.5}$$

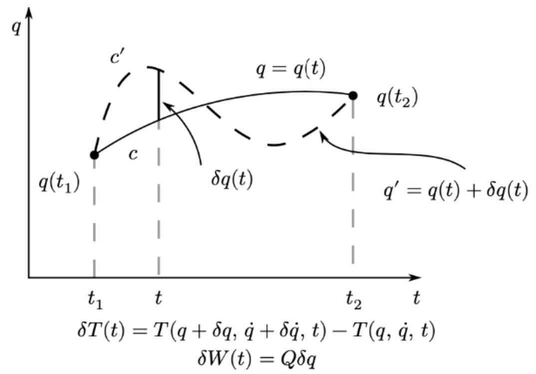
Όμως ισχύουν

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j\\ \delta T &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Επομένως από τις Εξ. (3.5) και (3.6) καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T+\delta W\right)\mathrm{d}t=0 \quad . \tag{3.7}$$

Η αρχή που εκφράζεται με τις Εξ. (3.7) προέκυψε από την αρχή του d’ Alembert, επομένως οι δυνατές μετατοπίσεις πρέπει να είναι τέτοιες που το ολικό δυνατό έργο των δυνάμεων του κάθε ενός δεσμού να είναι μηδέν. Σημειώνουμε επίσης ότι το δW δεν είναι πάντα δυνατή μεταβολή κάποιας συνάρτησης αλλά το στοιχειώδες έργο των ασκούμενων δυνάμεων κατά τη στοιχειώδη δυνατή μετατόπιση από την πραγματική τροχιά. Θα μπορούσε να δηλώνεται ως $\overline{\delta}W$. Το Σχ. 3.1 αναφέρεται στην περίπτωση με μια γενικευμένη συντεταγμένη. Είναι ευνόητο ότι το δT είναι πάντα δυνατή μεταβολή της συνάρτησης της κινητικής ενέργειας T του συστήματος. Η πραγματική τροχιά είναι η c και μια απειροστά γειτονική της είναι η c'.



Σχήμα 3.1 *Η γενική Αρχή του Χάμιλτον σε μια διάσταση.*

Το ολοκλήρωμα ως προς *t* είναι το όριο του αθροίσματος $(\delta T_i + \delta W_i)\Delta t_i$ κατά μήκος της πραγματικής τροχιάς όπου οι μεταβολές τύπου δ- είναι μεταξύ σημείων με ίδιο t που βρίσκονται σε οποιαδήποτε απειροστά γειτονική τροχιά σε σχέση με την πραγματική. Κάθε τροχιά περνά από τις δυο ακραίες δεδομένες θέσεις $q(t_1), q(t_2)$ κατά τις δυο δεδομένες χρονικές στιγμές t_1, t_2. Το ολοκλήρωμα είναι μηδέν όπως δηλώνει η Εξ. (3.7). Όπως θα δούμε παρακάτω, εδώ δεν έχουμε ένα πρόβλημα θεωρίας μεταβολών, απλώς καταλήξαμε σε μια ολοκληρω(μα)τική αρχή της Μηχανικής. Η Εξ. (3.7) είναι μια γενική έκφραση που αναφέρεται ως Αρχή του Hamilton. Αν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι μονογενείς (δηλαδή προκύπτουν από δυναμική συνάρτηση) τότε υπάρχει λαγκρανζιανή που μπορεί να το περιγράψει. Γενικώς σε αυτή την περίπτωση έχουμε,

$$\begin{aligned} &U = U(q, \dot q, t) \\ &\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned} \tag{3.8}$$

Επομένως ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_i} \delta q_i \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial U}{\partial \dot q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \\ &\int_{t_1}^{t_2} \delta W \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial U}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) \delta q_j \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_j} \delta q_j \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial U}{\partial \dot q_j} \delta \dot q_j \right) \mathrm{d}t \\ &= 0 - \int_{t_1}^{t_2} \delta U \mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Με χρήση και της Εξ. (3.7) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \delta W \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(T - U \right) \mathrm{d}t = 0 \\ &\int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.10}$$

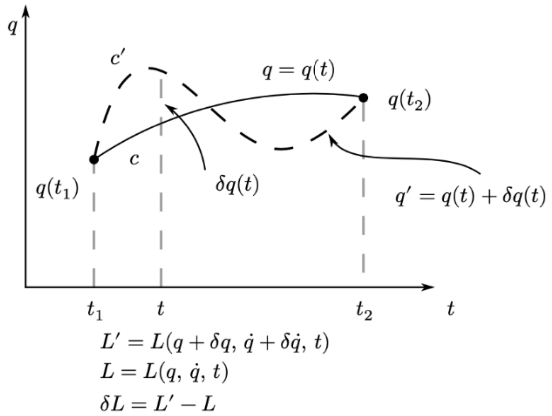
Το δ μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα διότι η έκφραση $\delta L = \delta\left(T - U\right)$ είναι δυνατή μεταβολή κάποιας συνάρτησης, δηλαδή είναι διαφορικό της L με t =σταθερό. Επομένως υπάρχει συνάρτηση που μπορεί να ολοκληρωθεί κατά μήκος τροχιάς που περνά από τα δυο ακραία δεδομένα σημεία. Έτσι έχουμε την αρχή του Hamilton στη μορφή

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = 0. \tag{3.11}$$

Αυτή η μορφή της αρχής του Hamilton λέει ότι η κίνηση ενός συστήματος με λαγκρανζιανή L , από μια αυθαίρετη δεδομένη στιγμή t_1 μέχρι μια αυθαίρετη δεδομένη στιγμή t_2 , είναι τέτοια που για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I (που λέγεται δράση ή ολοκλήρωμα δράσης) ισχύουν

$$\begin{gathered} I = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t \\ \delta I = 0 \quad . \end{gathered} \tag{3.12}$$

Το Σχ.3.2 απεικονίζει την κατάσταση. Η c είναι η πραγματική τροχιά και η c' είναι η απειροστά γειτονική της.



Σχήμα 3.2 *Η Αρχή του Χάμιλτον ως αρχή μεταβολών σε μια διάσταση.*

Η αρχή Hamilton στην ειδική μορφή των σχέσεων (3.12), η οποία ισχύει στην περίπτωση μονογενών δυνάμεων (το αντίστοιχο σύστημα λέγεται μονογενικό), είναι αρχή μεταβολών.

Καταλήξαμε στην αρχή του Hamilton ξεκινώντας από την αρχή d' Alembert, όμως η αρχή του Hamilton μπορεί να θεωρηθεί και ως βασική Αρχή της δυναμικής και μπορεί κάποιος να ξεκινήσει από αυτήν για τη θεμελίωση της Δυναμικής. Αν μερικές από τις δυνάμεις δεν προκύπτουν από δυναμική συνάρτηση τότε θα έχουμε αντί της σχέσης

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\mathrm{d}t = 0$$

την Εξ. (3.13)

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta L + \sum_{k=1}^{n} Q_k'\delta q_k\right)\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{3.13}$$

Αυτή είναι η πιο γενική μορφή της Αρχής Hamilton που δεν είναι αρχή μεταβολών. Εξυπακούεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις μπορεί να υπάρχουν και δεσμευτικές σχέσεις.

3.2 Πιθανές τροχιές

Οι τροχιές οι οποίες αποτελούνται από σημεία που αντιστοιχούν σε πιθανές καταστάσεις λέγονται πιθανές τροχιές. Επομένως συμπεραίνουμε ότι, όταν διαγράφεται η πιθανή τροχιά πληρούνται, αν υπάρχουν, οι αντίστοιχες σχέσεις δεσμών. Είναι ευνόητο ότι η πραγματική τροχιά είναι και πιθανή τροχιά. Επίσης, κάθε πιθανή τροχιά μπορεί να γίνει πραγματική τροχιά με την εφαρμογή κατάλληλων ασκούμενων δυνάμεων. Στην περίπτωση που δεν έχουμε δεσμούς (αν υπάρχουν ολόνομοι δεσμοί, έχουν εμφυτευτεί με την εισαγωγή των γενικευμένων συντεταγμένων) κάθε τροχιά είναι πιθανή τροχιά. Μια σημαντική απαίτηση που βάλαμε στα προηγούμενα είναι ότι όλες οι τροχιές, η πραγματική και οι γειτονικές, πρέπει να περνούν από τα ίδια σημεία σε δυο δεδομένες χρονικές στιγμές. Αν οι δεσμοί είναι ολόνομοι οι δυνατές μετατοπίσεις από πιθανή κατάσταση πάντοτε οδηγούν σε πιθανή κατάσταση, αν δεν είναι ολόνομοι αυτό δεν ισχύει.

Οι δυνατές μετατοπίσεις στην αναλυτική δυναμική είναι τέτοιες που το δυνατό έργο των δυνάμεων των δεσμών να είναι μηδέν.

3.3 Εξισώσεις Lagrange από την Αρχή Hamilton για διακριτά συστήματα

Στα προηγούμενα βρήκαμε την αρχή του Hamilton ξεκινώντας από την Αρχή του d' Alembert. Τώρα θα θεωρήσουμε ως βάση την αρχή του Hamilton και θα καταλήξουμε στις εξισώσεις Lagrange.

Στο Παράρτημα Π6 αναπτύσσεται η περίπτωση θεωρίας μεταβολών για χώρο με πολλές διαστάσεις, όπου οι εξαρτημένες, προς προσδιορισμό μεταβλητές, εξαρτώνται από πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές. Στο Παράρτημα αυτό δεν μελετούμε τι γίνεται αν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις. Η θεώρηση του Παραρτήματος Π6 είναι χρήσιμη στην Κλασική Θεωρία Πεδίων. Η περίπτωση των διακριτών συστημάτων της Δυναμικής, αναφέρεται σε μια διάσταση, δηλαδή υπάρχει μια ανεξάρτητη μεταβλητή που είναι ο χρόνος και οι εξαρτημένες από τον χρόνο μεταβλητές που θέλουμε να προσδιορίσουμε (για τον καθορισμό της κίνησης του συστήματος) είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες. Θα εξετάσουμε την περίπτωση των διακριτών συστημάτων αυτοτελώς, διότι θέλουμε να μελετήσουμε και την περίπτωση που υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις. Θα αναφερθούμε στην περίπτωση που οι πραγματικές (δηλαδή οι ασκούμενες) δυνάμεις είναι όλες μονογενείς και έχουν ενσωματωθεί οπότε περιγράφονται με μια λαγκρανζιανή. Σε αυτή την περίπτωση η Αρχή του Hamilton είναι αρχή μεταβολών. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Hamilton στη μορφή (3.13) ή (3.7). Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ανάλογη διαδικασία με αυτήν που ακολουθεί και πάλι θα καταλήξουμε σε εξισώσεις Lagrange. Σύμφωνα με την Αρχή Hamilton, η τιμή της δράσης (η οποία λέγεται και ολοκλήρωμα δράσης) πρέπει να είναι στάσιμη. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{3.14}$$

Θεωρούμε επίσης, ότι στο σύνορο της ολοκλήρωσης ισχύουν οι σχέσεις $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

Για τη δυνατή μεταβολή (variation) της λαγκρανζιανής έχουμε

$$\delta L(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \, . \tag{3.15}$$

Από τα προηγούμενα έχουμε

$$\delta\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}(\delta q_i)}{\mathrm{d}t} \, . \tag{3.16}$$

Κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)=\delta q_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}(\delta q_i)}{\mathrm{d}t}=\delta q_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$$

άρα

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\text{-}\delta q_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\ . \tag{3.17}$$

Από τις (3.14), (3.15), (3.17) βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\text{-}\delta q_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{3.18}$$

Το ολοκλήρωμα του πρώτου αθροίσματος περιλαμβάνει ολικό διαφορικό ως προς τον χρόνο οπότε γίνεται.

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i(t_2)\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i(t_1)\right). \tag{3.19}$$

Αυτοί οι συνοριακοί όροι είναι μηδέν διότι έχουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0\ .$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\delta q_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\right\}\mathrm{d}t=0\ . \tag{3.20}$$

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις για τους συνοριακούς όρους, αυτοί σχετίζονται με την άμεση εξάρτηση της λαγκρανζιανής από τις ταχύτητες. Αν δεν υπάρχει τέτοια εξάρτηση, τότε δεν εμφανίζονται τέτοιοι όροι. Αν λείπουν μερικές ταχύτητες τότε δεν εμφανίζονται οι αντίστοιχοι συνοριακοί όροι.

Αυτά σημαίνουν ότι για μη υπάρχουσες ταχύτητες δε χρειάζεται να γραφτούν σχέσεις μηδενισμού των αντίστοιχων δυνατών μετατοπίσεων στα άκρα. Αν δεν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις τότε τα $\delta q_i(t)$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έτσι μπορούμε να ακολουθήσουμε την καθιερωμένη διαδικασία, δηλαδή να θεωρήσουμε ότι μόνο ένα είναι μη μηδενικό και όλα τα άλλα είναι μηδέν. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στο ότι ο κάθε όρος του αθροίσματος είναι μηδέν, δηλαδή

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta q_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\right\}\mathrm{d}t=0\ . \tag{3.21}$$

Επειδή το κάθε $\delta q_i(t)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου, εκτός από τα σημεία t_1, t_2 όπου είναι μηδέν, μπορεί να επιλεγεί έτσι που να είναι παντού μηδέν εκτός από μια αρκούντως μικρή περιοχή γύρω από τη χρονική στιγμή t όπου για λόγους συνέχειας δεν αλλάζει το πρόσημο της παράστασης μέσα στην παρένθεση που πολλαπλασιάζει το $\delta q_i(t)$. Το $\delta q_i(t)$ διαλέγεται να είναι μηδέν έξω από αυτή την περιοχή ενώ μέσα στην περιοχή το $\delta q_i(t)\neq 0$ και διαλέγεται έτσι που να έχει το ίδιο πρόσημο με την ανωτέρω παρένθεση. Αυτό σημαίνει ότι η υπό ολοκλήρωση παράσταση είναι θετική ενώ το ολοκλήρωμά της είναι μηδέν, αυτό είναι άτοπο, επομένως η παράσταση της παρένθεσης είναι μηδέν. Αυτό λέγεται θεμελιώδες λήμμα του λογισμού μεταβολών το οποίο ισχύει για συνεχείς υπό ολοκλήρωση εκφράσεις. Έτσι τελικώς βρίσκουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad i=1,2,...,n\,. \tag{3.22}$$

Αξίζει να τονίσουμε το παρακάτω που συνήθως δεν αναφέρεται αλλά εννοείται σιωπηλά. Κατά τα μεθοδολογία της αρχής Hamilton, η αρχική και η τελική θέση του συστήματος είναι δεδομένες (γνωστές). Λύνουμε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης του συγκεκριμένου συστήματος, οι οποίες προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange. Οι λύσεις εξαρτώνται από $2n$ σταθερές. Κανονικά πρέπει να τις προσδιορίσουμε από τις δεδομένες τιμές των συντεταγμένων κατά την αρχική και τελική στιγμή. Όμως στην πράξη αγνοούμε αυτή τη διαδικασία και προσδιορίζουμε τις σταθερές, για παράδειγμα, από την αρχική θέση στον θεσικό χώρο και από τις αρχικές ταχύτητες. Είναι εύκολο να κατανοήσει κάποιος γιατί μπορούμε και ακολουθούμε αυτή την μη ορθόδοξη διαδικασία. Πράγματι, έχοντας τη γενική λύση με τις σταθερές, μπορούμε να τις προσδιορίσουμε από την αρχική και την τελική θέση, που είναι και το τυπικά σωστό. Προφανώς από τη λύση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις αρχικές ταχύτητες. Μπορούμε στη συνέχεια να πάμε αντίστροφα, δηλαδή να θεωρήσουμε και πάλι τη λύση της διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει από τις εξισώσεις Lagrange, με τις $2n$ σταθερές της, και να προσδιορίσουμε τις σταθερές με δεδομένα την αρχική θέση και τις υπολογισμένες προηγουμένως αρχικές ταχύτητες. Θα βρούμε την ίδια λύση με πριν και η τελική θέση θα είναι ίδια με πριν.

Ακόμη αξίζει να σημειώσουμε ότι πολλές φορές είναι δυνατόν το πρόβλημα και η λύση να μην περιορίζονται στο χρονικό διάστημα (t_1,t_2), αλλά να ισχύουν και έξω από αυτό. Αυτό δεν είναι περίεργο αφού οι ανωτέρω χρονικές στιγμές είναι αυθαίρετες.

Έστω ότι έχουμε δεσμούς στη μορφή διαφορικών εξισώσεων γραμμικών ως προς τις ταχύτητες ή σε μορφή Pfaff. Αυτό σημαίνει ότι οι δεσμοί είναι της μορφής των Εξ. (3.23)

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\dot{q}_k + A_l(q,t)=0, \quad l=1,2,...,M \\ \text{ή} \;\; \sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\mathrm{d}q_k + A_l(q,t)\mathrm{d}t=0, \quad l=1,2,...,M \;\;.\end{gathered} \tag{3.23}$$

Τώρα τα δq_i δεν είναι ανεξάρτητα. Θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange όπως κάναμε στα προηγούμενα, με τη διαφορά ότι εδώ έχουμε και ολοκληρώματα. Οι δυνατές μετατοπίσεις, που σχετίζονται με το γεγονός ότι το δυνατό έργο των δυνάμεων των δεσμών είναι μηδέν, προκύπτουν από τις ανωτέρω διαφορικές εξισώσεις των δεσμών. Συγκεκριμένα, από τις δεύτερες των Εξ. (3.23), μορφή Pfaff, θέτοντας $\mathrm{d}t=0$ καταλήγουμε στις (3.24).

$$\sum_{k=1}^{n} A_{lk}(q,t)\delta q_k = 0, \;\; l=1,2,...,M\,. \tag{3.24}$$

Αυτές είναι οι πρόσθετες (δεσμευτικές) σχέσεις μεταξύ των δq. Πολλαπλασιάζουμε την κάθε μια από αυτές επί μια άγνωστη συνάρτηση του χρόνου $\lambda_l(t)$, στη συνέχεια τις αθροίζουμε και ολοκληρώνουμε ως προς τον χρόνο μεταξύ t_1,t_2 και καταλήγουμε στις

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}\lambda_l(t)A_{lk}(q,t)\delta q_k\mathrm{d}t=0\,. \tag{3.25}$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τη σχέση $\int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = 0$ (από τις Εξ. (3.10)) και τις Εξ. (3.25) οπότε βρίσκουμε

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{lj}(q,t) \delta q_j \right) \mathrm{d}t = 0. \tag{3.26}$$

Αντικαθιστούμε το δL κατά τα γνωστά οπότε,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta q_j) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{lj}(q,t) \delta q_j \right) \mathrm{d}t = 0. \tag{3.27}$$

Ολοκληρώνουμε παραγοντικά τον δεύτερο όρο και κάνοντας χρήση των σχέσεων για τις δυνατές μετατοπίσεις στα άκρα του ολοκληρώματος, $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{lj}(q,t) \right) \delta q_j \mathrm{d}t = 0. \tag{3.28}$$

Κατόπιν, κάνουμε τον εξής συλλογισμό, τα δq_j δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, αφού υπάρχουν μεταξύ τους M δεσμευτικές σχέσεις. Επομένως δεν μπορούμε να διαλέξουμε διαδοχικά ένα από αυτά μη μηδενικό στο άθροισμα των ολοκληρωμάτων πάνω στα $j = 1, 2, ..., n$ και όλα τα άλλα μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε ένα από αυτά τα ολοκληρώματα του αθροίσματος είναι μηδέν. Υπάρχουν μόνο $m = n - M$ από αυτές τις δυνατές μετατοπίσεις που είναι ανεξάρτητες, οι άλλες M το πλήθος εξαρτώνται από αυτές. Μπορούμε να διαλέξουμε τις πρώτες m ως ανεξάρτητες (δεν είναι απαραίτητο να διαλέξουμε τις πρώτες, όμως η διάταξή τους είναι αυθαίρετη). Επειδή οι συναρτήσεις (πολλαπλασιαστές Lagrange) $\lambda_l(t)$ είναι αυθαίρετες μπορούμε να τις διαλέξουμε έτσι ώστε για τις τελευταίες M να ισχύουν οι σχέσεις .

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{lj}(q,t) = 0 \quad j = m+1, m+2, ..., n \tag{3.29}$$

Έτσι η Εξ. (3.28) γίνεται

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{lj}(q,t) \right) \delta q_j \mathrm{d}t = 0. \tag{3.30}$$

Τώρα όμως τα δq_j είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα επομένως ο κάθε όρος του αθροίσματος είναι μηδέν, δηλαδή

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) A_{lj}(q,t) \right) \delta q_j \mathrm{d}t = 0, \quad j = 1, 2, ..., m . \tag{3.31}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών και καταλήγουμε στις

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lj}(q,t),\ \ j=1,2,\ldots,m \tag{3.32}$$

Προφανώς από τις Εξ. (3.23), (3.29) και (3.32) καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)A_{lj}(q,t)=0,\ j=1,2,\ldots,n\\ \sum_{k=1}^{n}A_{lk}(q,t)\dot{q}_k+A_l(q,t)=0,\quad l=1,2,\ldots,M\end{gathered} \tag{3.33}$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε παράθεση δεσμών.

Σημειώνουμε ξανά, ότι οι ανωτέρω δυνατές μετατοπίσεις δεν είναι κατ' ανάγκη συμβατές με τις εξισώσεις των δεσμών, όπως αυτές φαίνονται στην Εξ. (3.33). Από όσα είπαμε στα προηγούμενα, μόνον όταν οι δεσμοί είναι ολόνομοι ισχύει η συμβατότητα αυτή. Τότε οι δυνατές μετατοπίσεις οδηγούν από πιθανή τροχιά σε πιθανή τροχιά. Τονίζουμε ξανά ότι, στη Μηχανική το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι, στη γενική περίπτωση, οι δυνατές μετατοπίσεις είναι τέτοιες που το δυνητικό (δυνατό) έργο των δυνάμεων δεσμών είναι μηδέν για κάθε έναν δεσμό. Στην περίπτωση που οι δεσμοί είναι ολόνομοι σε ολοκληρωμένη μορφή, τότε έχουμε τις δεσμευτικές σχέσεις

$$\begin{aligned}&f_l(q,t)=0,\quad l=1,2,\ldots,M\\ &\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}A_{li}\delta q_i=0\quad l=1,2,\ldots,M\\ &A_{li}=\frac{\partial f_l}{\partial q_i}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Ας σχηματίσουμε τη λαγκρανζιανή

$$L'=L+\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\,f_l(q,t)\ . \tag{3.35}$$

Αυτός είναι ο κανόνας του πολλαπλασιασμού. Η θεωρία μεταβολών δίνει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_j}=0,\ j=1,2,\ldots,m\ . \tag{3.36}$$

Ισχύουν

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ ,\ \ \frac{\partial L'}{\partial q_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j}+\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\frac{\partial f_l(q,t)}{\partial q_j}$$

Άρα βρίσκουμε τις σωστές εξισώσεις που λύνουν το πρόβλημα, βλέπε Εξ. (3.33),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{l=1}^{M}\lambda_l(t)\frac{\partial f_l}{\partial q_j}=0,\ f_l=0,\ \ j=1,2,\ldots,n\quad l=1,2,\ldots,M \tag{3.37}$$

3.4 Διευκρινίσεις για τις δεσμευτικές σχέσεις

Θα αναφερθούμε στο Μαθηματικό πρόβλημα της Θεωρίας Μεταβολών σε χώρο μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή σε μονοδιάστατο χώρο, όπως είναι τα προβλήματα των διακριτών συστημάτων της Μηχανικής, όπου η μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. Θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν πολλές εξαρτημένες μεταβλητές. Έστω ότι έχουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα Z , το οποίο είναι ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $F(y,y',x)$, το Z είναι συναρτησοειδές της F (συνάρτηση συνάρτησης).

$$\begin{gathered} Z = Z(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(y,y',x)\mathrm{d}x \\ y = y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x),\right), \;\; y'(x) = \left(\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}y_2(x)}{\mathrm{d}x}, ..., \frac{\mathrm{d}y_n(x)}{\mathrm{d}x}\right). \end{gathered} \tag{3.38}$$

Η συνάρτηση F είναι το ανάλογο της λαγκρανζιανής, το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Το μαθηματικό πρόβλημα της θεωρίας μεταβολών είναι να προσδιοριστούν οι n το πλήθος συναρτήσεις $y(x)$, που καθορίζουν μια πραγματική τροχιά στον χώρο των n διαστάσεων. Αυτό θα προέλθει από την εξής απαίτηση: Η δυνατή μεταβολή του συναρτησοειδούς Z που προκύπτει από τη διαφορά των τιμών του πάνω στην πραγματική τροχιά και σε κάθε αυθαίρετη απείρως γειτονική της, να είναι μηδέν. Αναφερόμαστε πάντοτε σε μεταβολές με προσέγγιση διαφορικών πρώτης τάξεως. Θυμίζουμε ότι οι δυνατές μεταβολές είναι μεταβολές όπου το x μένει σταθερό. Είναι ευνόητο ότι οι δυνατές μεταβολές των y είναι αυθαίρετες συναρτήσεις του x, $\delta y_i = \delta y_i(x)$. Θα υποθέσουμε ότι όλες οι τροχιές περνούν από τα δυο άκρα της ολοκλήρωσης, έτσι στα άκρα έχουμε τις συνοριακές συνθήκες $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0, \;\; i = 1,2,...,n$. Η αρχή μεταβολών μας λέει ότι

$$\begin{gathered} \delta Z = \delta\int_{x_1}^{x_2} F(y,y',x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y,y',x)\mathrm{d}x = 0 \\ \delta Z = \int_{x_1}^{x_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i'\right)\mathrm{d}x = 0. \end{gathered} \tag{3.39}$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία στην οποία αναφερθήκαμε στα προηγούμενα, στη Μηχανική, και καταλήγουμε σε δυο ολοκληρώματα, το ένα είναι ολοκλήρωμα ολικού διαφορικού ως προς x, οπότε με την ολοκλήρωση οδηγεί σε δυο όρους έναν στο κάθε άκρο της ολοκλήρωσης (σύνορο). Αυτοί οι όροι είναι μηδέν εφόσον έχουμε τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες. Έτσι, καταλήγουμε στις

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\delta y_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i}\right)\right\}\mathrm{d}x = 0\,. \tag{3.40}$$

Είναι ευνόητο ότι αν δεν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις θα οδηγηθούμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange, δηλαδή στις

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{3.41}$$

Θα θεωρήσουμε δεσμευτικές σχέσεις της γενικής μορφής,

$$g_l(y,y',x) = 0 \;\; l = 1,2,...,M. \tag{3.42}$$

Για αυτές τις συναρτήσεις οι δυνατές μεταβολές δίνουν

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial y_i}\delta y_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_l}{\partial y_i'}\delta y_i'=0,\quad l=1,2,...,M\,. \tag{3.43}$$

Αυτές είναι οι βοηθητικές ή πρόσθετες σχέσεις (side conditions, auxiliary conditions) της μαθηματικής θεωρίας μεταβολών. Γενικώς, δεν έχουν τη μορφή που έχουν οι βοηθητικές σχέσεις στη Μηχανική οι οποίες είναι της μορφής $\sum_i G_i\delta q_i=0.$ Οι τελευταίες, όπως έχουμε πει, συνδέονται με έναν συντελεστή αναλογίας (συνάρτηση του χρόνου) με τις σχέσεις των δυνατών έργων των δεσμών. Αυτές δεν περιέχουν επίσης τα $\delta\dot{q}$, αλλά μόνο τις δυνατές μετατοπίσεις δq. Αυτή είναι η ουσιώδης διαφορά μεταξύ της μαθηματικής θεωρίας μεταβολών και της αντίστοιχης θεωρίας στη Μηχανική. Εφόσον υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις, τα δy στην Εξ. (3.40) δεν είναι ανεξάρτητα άρα δεν μπορούμε να καταλήξουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Για να λύσουμε το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε τις Εξ. (3.43) και εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Πολλαπλασιάζουμε την κάθε μια από τις σχέσεις (3.43) επί μια συνάρτηση $\lambda_l(x)$ $l=1,2,...,M$, αθροίζουμε πάνω στα l, ολοκληρώνουμε ως προς x και βρίσκουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_1}^{x_2}\left[\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i}\delta y_i+\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i'}\delta y_i'\right]\mathrm{d}x=0. \tag{3.44}$$

Κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση στο δεύτερο ολοκλήρωμα και τις κατάλληλες πράξεις. Έχουμε,

$$\begin{gathered}\delta y_i'=\delta\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\delta y_i}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial(\lambda g_l)}{\partial y_i'}\delta y_i\right)=\delta y_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial(\lambda g_l)}{\partial y_i'}\right)+\frac{\partial(\lambda g_l)}{\partial y_i'}\delta y_i'.\end{gathered} \tag{3.45}$$

Επομένως το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i'}\delta y_i'=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\left[\sum_{l=1}^{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i'}\delta y_i\right)-\sum_{l=1}^{M}\delta y_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i'}\right)\right] \tag{3.46}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους αυτής της σχέσης είναι μηδέν αφού τα $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)$. Επομένως από τις Εξ. (3.44), (3.46) βρίσκουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_1}^{x_2}\delta y_i\left[\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i}-\sum_{l=1}^{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i'}\right)\right]\mathrm{d}x=0. \tag{3.47}$$

Αφαιρούμε από τις Εξ. (3.40) τις (3.47) οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{i=1}^{n}\delta y_i\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{y}_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)-\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i}+\sum_{l=1}^{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\left(\lambda_l g_l\right)}{\partial y_i'}\right)\right\}\mathrm{d}x=0\,. \tag{3.48}$$

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να εισαγάγουμε την παρακάτω νέα συνάρτηση, (κανόνας του πολλαπλασιασμού),

$$h(x,y,y') = F(x,y,y') + \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(x) g_l(x,y,y') \,. \tag{3.49}$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \delta y_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial h}{\partial y_i} \right) \mathrm{d}x = 0 \,. \tag{3.50}$$

Τα δy δεν είναι ανεξάρτητα αφού υπάρχουν μεταξύ τους M δεσμευτικές σχέσεις. Ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία για την περίπτωση και καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις Euler-Lagrange που μαζί με τις δεσμευτικές σχέσεις λύνουν το πρόβλημα,

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial h}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1,2,...,n \\ &g_l(x,y,y') = 0 \quad l = 1,2,...,M. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Μπορούμε να πάμε αντίστροφα, να ξεκινήσουμε με τη συνάρτηση της Εξ. (3.49), να σχηματίσουμε το αντίστοιχο συναρτησιακό και εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών να καταλήξουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Εδώ οι δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των δυνατών μετατοπίσεων των συντεταγμένων y δεν σχετίζονται με το έργο των δυνάμεων των δεσμών της Μηχανικής, το οποίο πρέπει να είναι μηδέν για κάθε έναν δεσμό. Οι βοηθητικές σχέσεις προκύπτουν από τις δεδομένες δεσμευτικές σχέσεις σχηματίζοντας τις δυνατές μεταβολές τους τις οποίες θέτουμε ίσες με μηδέν.

Είδαμε στα προηγούμενα ότι, στη Μηχανική μπορούμε να τροποποιήσουμε τη λαγκρανζιανή (μέθοδος του πολλαπλασιασμού) και να καταλήξουμε σε πρόβλημα (χωρίς δεσμούς) μόνο όταν οι δεσμοί της μορφής $g(q,\dot{q},t) = 0$, είναι από την αρχή ολικά διαφορικά ή μπορεί να γίνουν τέτοια με κατάλληλους ολοκληρωτικούς παράγοντες οπότε χρησιμοποιούνται τα προκύπτοντα ολικά διαφορικά τους. Σε αυτή την περίπτωση η εξάρτηση από τις ταχύτητες είναι γραμμική. Η εύκολη περίπτωση με ολοκληρωμένους ολόνομους δεσμούς της μορφής $f(q,t) = 0$, εξετάστηκε χωριστά.

Το συμπέρασμα είναι ότι, γενικώς, η θεωρία μεταβολών με δεσμούς στη Μηχανική δεν είναι ίδια με την αντίστοιχη στα Μαθηματικά. Στα Μαθηματικά πάντοτε μπορεί να γίνει τροποποίηση της λαγκρανζιανής με χρήση της μεθόδου του πολλαπλασιασμού. Αυτό στην περίπτωση της Μηχανικής μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα.

3.5 Εφαρμογές στη Γενική Σχετικότητα

Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν χώρο n διαστάσεων, γενικώς, μη ευκλείδειο. Στην πραγματικότητα έχουμε αυτό που στα μαθηματικά λέγεται πολλαπλότητα, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το θέμα. Μπορεί να δει κάποιος λεπτομέρειες σε βιβλία Γενικής Σχετικότητας ή βιβλία Μαθηματικών.

Ο χώρος είναι χώρος με μετρική, είναι χώρος Riemann. Τα σημεία του χώρου έχουν συντεταγμένες $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, το x είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου και τα x^i είναι οι ανταλλοίωτες (contravariant) συνιστώσες του. Οι λεγόμενες συναλλοίωτες (covariant), x_i, συνιστώσες συνδέονται με τις ανταλλοίωτες με σχέσεις της μορφής. $x_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x^j$. Ο χώρος είναι μετρικός, δηλαδή ορίζεται απόσταση μεταξύ δυο σημείων του χώρου. Για την απόσταση ή διάστημα ή μήκος (interval), $\mathrm{d}s$, μεταξύ δυο πολύ γειτονικών σημείων του χώρου, ισχύει η σχέση

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i, \;\; g_{ij} = g_{ji} \tag{3.52}$$

Τα $\mathrm{d}x^i$ είναι οι απειροστές διαφορές των συντεταγμένων μεταξύ γειτονικών σημείων. Τα g_{ij} είναι οι συναλλοίωτες συνιστώσες του μετρικού τανυστή του χώρου. Μερικές φορές, για να μην υπάρχει σύγχυση, χρησιμοποιείται ο όρος χωρική απόσταση (distance), για την απόσταση (μήκος) στον γνωστό μας τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Γενικώς οι τιμές των συνιστωσών του μετρικού τανυστή εξαρτώνται από τις συντεταγμένες θέσης του σημείου. Πολλές φορές χρησιμοποιείται η σύμβαση άθροισης των άνω και κάτω δεικτών (βωβοί δείκτες), χωρίς να δηλώνεται το $\sum$, δηλαδή το σύμβολο της άθροισης. Στην περίπτωση του γνωστού μας ευκλείδειου χώρου των τριών διαστάσεων, όταν χρησιμοποιούνται καρτεσιανές συντεταγμένες, ο μετρικός τανυστής είναι διαγώνιος και όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με τη μονάδα. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων συνιστωσών. Για τον ίδιο χώρο, όταν οι συντεταγμένες είναι (ορθογώνιες) σφαιρικές, κυλινδρικές κ.λπ., ο μετρικός τανυστής είναι διαγώνιος αλλά τα στοιχεία του είναι γενικώς διαφορετικά μεταξύ τους, επίσης υπάρχει διαφορά μεταξύ ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων συνιστωσών. Η γεωδαισιακή που διέρχεται από δυο σημεία ενός χώρου είναι μια καμπύλη που το μήκος της είναι στάσιμο. Η σύγκριση του μήκους της γεωδαισιακής γίνεται με τα μήκη πολύ γειτονικών καμπυλών που διέρχονται από τα δυο ίδια ακραία σημεία. Για την κίνηση δοκιμαστικών υλικών σημείων, δοκιμαστικών σωματίων, μέσα σε πεδίο βαρύτητας ισχύει ότι αυτά ακολουθούν της γεωδαισιακές του τετραχώρου, ο οποίος έχει μια συνιστώσα χρόνου και τρεις συνιστώσες συνήθους τρισδιάστατου χώρου. Αν δεν υπάρχει βαρύτητα ούτε άλλες δυνάμεις, τότε έχουμε την απλή περίπτωση της Ειδικής Σχετικότητας χωρίς δυνάμεις. Αναφερόμαστε σε δοκιμαστικά σωμάτια, δηλαδή σωμάτια τα οποία έχουν πολύ μικρή μάζα και μικρή έκταση, επίσης δεν έχουν σπιν, αυτά δεν επηρεάζουν το βαρυτικό πεδίο μέσα στο οποίο κινούνται. Αν δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις εκτός από την επίδραση της βαρύτητας, λέμε ότι τα σωμάτια εκτελούν ελεύθερη πτώση. Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσει κάποιος τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$ του (εξωτερικού) πεδίου βαρύτητας μέσα στο οποίο κινείται το δοκιμαστικό σωμάτιο. Αυτό γίνεται λύνοντας της εξισώσεις της βαρύτητας του Einstein, αλλά αυτό δεν είναι αντικείμενο αυτού του βιβλίου. Θα αναφερθούμε γενικά σε κάθε καμπύλο χώρο πολλών διαστάσεων, n. Εισάγουμε ένα αναλλοίωτο (βαθμωτό, scalar) μέγεθος, ως μια παράμετρο λ η οποία περιγράφει μια καμπύλη στον χώρο των n διαστάσεων, δηλαδή ισχύουν $x^i = x^i(\lambda)$. Μεταξύ δυο σημείων Α, Β για τις τιμές της παραμέτρου έχουμε $\lambda_{\mathrm{A}} < \lambda < \lambda_{\mathrm{B}}$ και στα σημεία Α, Β ισχύουν $x^i(\lambda_{\mathrm{A}}),\ x^i(\lambda_{\mathrm{B}})$. Με αφετηρία την (3.52), θεωρούμε τη λαγκρανζιανή που δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} &L(x,\dot{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j \\ &\dot{x}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Σχηματίζουμε το ολοκλήρωμα δράσης και κάνουμε κατά τα γνωστά δυνατή μεταβολή με $\lambda =$σταθερό.

$$\begin{aligned} &I = \int_{\lambda_{\mathrm{A}}}^{\lambda_{\mathrm{B}}} L(x,\dot{x})\mathrm{d}\lambda \\ &\delta I = 0, \quad \delta x^i(\lambda_{\mathrm{A}}) = \delta x^i(\lambda_{\mathrm{B}}) = 0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Αυτό μας οδηγεί στις εξισώσεις Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1,2,...,n\,. \tag{3.55}$$

Η L είναι ομογενής $2^{ου}$ βαθμού ως προς τις παραγώγους, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Euler ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 2L \tag{3.56}$$

Χρησιμοποιούμε τις (3.55) και την (3.56) οπότε κατά μήκος των λύσεων βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i \right) = \sum_{i} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\mathrm{d}\dot{x}^i}{\mathrm{d}\lambda} \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i \right) = 2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Από αυτήν βρίσκουμε ότι κατά μήκος των καμπυλών που είναι λύσεις του προβλήματος, δηλαδή για την πραγματική κίνηση, ισχύουν

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0, \quad L(x, \dot{x}) = \alpha^2 = \text{σταθ.} \tag{3.58}$$

Οι καμπύλες (λύσεις) που προκύπτουν από την αρχή μεταβολών της Εξ. (3.54), όπως θα δούμε παρακάτω, είναι γεωδαισιακές. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{3.59}$$

Έτσι, οι εξισώσεις Euler γίνονται όπως φαίνεται στη δεύτερη σειρά της Εξ. (3.60). Κατά μήκος των λύσεων ισχύει η πρώτη σειρά της Εξ. (3.60).

$$\begin{aligned} &L(x, \dot{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} \right)^2 = \alpha^2 \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(g_{ik} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{3.60}$$

Στις σχέσεις αυτές έχουμε χρησιμοποιήσει την άθροιση άνω και κάτω δεικτών, βωβοί δείκτες.

Είδαμε ότι (μόνον) κατά μήκος της λύσης (δηλαδή κατά την πραγματική κίνηση), έχουμε τη δεύτερη από την Εξ. (3.60). Όταν $\alpha \neq 0$, τότε η παράμετρος λ σχετίζεται με γραμμικό τρόπο με το διάστημα (μήκος) κατά μήκος της γεωδαισιακής. Πράγματι, από τη δεύτερη σχέση της Εξ. (3.60), έχουμε $s = \alpha\lambda + \beta$.

Τονίζουμε ότι τα $\mathrm{d}s, \ \mathrm{d}\lambda$ είναι αναλλοίωτες (βαθμωτές) ποσότητες. Σε αυτή την περίπτωση, συνήθως, διαλέγουμε ως παράμετρο το μήκος της καμπύλης της γεωδαισιακής, δηλαδή $\lambda = s$ οπότε $L = 1$. Έτσι οι σχέσεις (3.60) γίνονται,

$$\begin{aligned} &g_{ij}(x) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 1 \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(g_{ik} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{3.61}$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε ως λαγκρανζιανή την $L' = \sqrt{L}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} L' &= \sqrt{L} = \left(g_{ij}(x) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{d}s &= \left(g_{ij}(x) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\lambda = L'\mathrm{d}\lambda = \sqrt{L}\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{3.62}$$

οπότε καταλήγουμε στις εξισώσεις Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.63}$$

Αφού η $L = \text{σταθερά} \neq 0$ κατά την πραγματική κίνηση οι (3.63) ταυτίζονται με τις (3.55).

Είναι ευνόητο ότι κάθε λ που πληροί τη σχέση $s = \alpha\lambda + \beta$ οδηγεί σε $L = \text{σταθερό} \neq 0$ κατά την πραγματική κίνηση.

Η παράμετρος αυτού του είδους λέγεται συναφής παράμετρος (affine parameter). Τα προηγούμενα σημαίνουν ότι και η σχέση μεταβολών

$$.\delta\int \left(g_{ij}(x) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\lambda = \delta\int \mathrm{d}s = 0 \tag{3.64}$$

οδηγεί στις ίδιες λύσεις, είναι το ίδιο πρόβλημα με το προηγούμενο.

Οι σχέσεις (3.64) αποτελούν τον ορισμό των γεωδαισιακών, επομένως πράγματι η επιλογή (3.53) για τη λαγκρανζιανή οδηγεί στις γεωδαισιακές. Συνήθως, ως εξισώσεις των γεωδαισιακών λαμβάνονται οι (3.61), όπου η παράμετρος είναι το μήκος κατά μήκος της γεωδαισιακής. Θα δούμε ότι στη Σχετικότητα, πολλές φορές η επιλογή της παραμέτρου είναι τέτοια που η τιμή της λαγκρανζιανής κατά μήκος της γεωδαισιακής να μην είναι 1 αλλά να ισχύει $L = \alpha^2 = c^2$, όπου c το μέτρο της ταχύτητας του φωτός στο κενό. Στην περίπτωση της Ειδικής και της Γενικής Σχετικότητας ο χώρος είναι ο γνωστός τετραδιάστατος χώρος. Στην ειδική σχετικότητα έχουμε την απλούστερη μετρική του χώρου Minkowski. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για το πως ορίζονται οι συνιστώσες και η μετρική του τετραδιάστατου χώρου. Εδώ ακολουθούμε τη σύμβαση κατά την οποία ο δείκτης που καθορίζει τις συνιστώσες του τετραχώρου παίρνει τις τιμές 0,1,2,3. Η συνιστώσα x^0 είναι η συνιστώσα που ισούται ή σχετίζεται με τον χρόνο και οι άλλες, οι (x^1, x^2, x^3) είναι οι συνιστώσες του γνωστού μας τρισδιάστατου χώρου. Το τετραδιάνυσμα είναι το $x = (x^0, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, όπου οι χωρικές συνιστώσες μπορεί να μην είναι οι συνήθεις καρτεσιανές. Οι χωρικές συνιστώσες μπορεί να είναι μήκη, γωνίες, και γενικώς ότι είναι βολικό κατά περίπτωση. Συνήθως χρησιμοποιούνται ελληνικά γράμματα όπως τα μ, ν για να δηλωθούν δείκτες του τετραχώρου, δηλαδή 0,1,2,3 και λατινικά γράμματα όπως τα i, j για τους δείκτες του συνήθους τρισδιάστατου χώρου, δηλαδή 1,2,3. Στη Σχετικότητας έχουμε πάντα ότι για κίνηση σωματίων με μη μηδενική μάζα, κατά μήκος της γεωδαισιακής, το $\mathrm{d}s > 0,\ L \neq 0$. Το μήκος αυτό λέγεται χρονοειδές μήκος. Έχουμε φωτοειδές μήκος, αν $\mathrm{d}s = 0,\ L = 0$ κατά μήκος της γεωδαισιακής, πράγμα που ισχύει για κίνηση σωματίων με μηδενική μάζα, όπως είναι η περίπτωση των φωτονίων.

Η περίπτωση $\mathrm{d}s < 0,\ L \neq 0$ χαρακτηρίζει το χωροειδές μήκος που δεν σχετίζεται με πραγματικά σωματίδια.

Σημειώνουμε ότι ο ιδιόχρονος $\mathrm{d}\tau$ σχετίζεται με το αντίστοιχο τετραμήκος με τη σχέση $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau$. Πολλές φορές ως παράμετρος λαμβάνεται ο ιδιόχρονος αντί του τετραμήκους, και οι εξισώσεις τροποποιούνται κατά προφανή τρόπο. Οι σχέσεις (3.61) γίνονται

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}=c^2 \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{\kappa\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau},\quad \kappa=0,1,2,3
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

Σε αυτή την περίπτωση κατά την πραγματική κίνηση έχουμε $L=\alpha^2=c^2$.

Στα προηγούμενα αναφερθήκαμε στην περίπτωση που μπορεί να καλύψει σωματίδια με μη μηδενική μάζα. Η περίπτωση σωματιδίων με μηδενική μάζα χρειάζεται ελαφρά τροποποίηση στη μεθοδολογία. Οι γεωδαισιακές του τετραδιάστατου χώρου για σωματίδια με μηδενική μάζα έχουν μήκος ίσο με μηδέν, η λαγκρανζιανή κατά μήκος των γεωδαισιακών είναι μηδέν, επίσης δε μπορεί να οριστεί ιδιόχρονος διότι ο ιδιόχρονος αναφέρεται σε σύστημα που κινείται με το σωματίδιο και υπάρχει όταν το σωματίδιο κινείται με ταχύτητα μικρότερη του c. Θα ξεκινήσουμε με την υπόθεση ότι η μάζα είναι μη μηδενική οπότε κατά μήκος της γεωδαισιακής $\mathrm{d}s\neq 0,\ L\neq 0$ και στη συνέχεια θα πάμε στο όριο όπου $\mathrm{d}s\to 0,\ L\to 0$, δηλαδή στην περίπτωση σωματιδίων με μηδενική μάζα. Οι Εξ. (3.60) είναι οι σωστές εξισώσεις κίνησης που δείξαμε ότι ισχύουν για μη μηδενική μάζα. Στη συνέχεια θα βρούμε τη μορφή τους όταν η μάζα τείνει στο μηδέν.

Οι δεύτερες από αυτές τις εξισώσεις δεν μεταβάλλονται. Όμως αφού η σταθερά α τείνει στο μηδέν, οι δεύτερες εξισώσεις αλλάζουν, οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις για σωματίδια με μηδενική μάζα,

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda}=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=0 \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\kappa\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda},\quad \kappa=0,1,2,3\ .
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Η περιγραφή της κίνησης γίνεται ως προς αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων όπου η τροχιά (γεωδαισιακή) είναι της μορφής $x^{\mu}=x^{\mu}(\lambda)$. Το λ δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε τετραμήκος ή σε ιδιόχρονο. Εκτός από τη διατήρηση του L κατά την κίνηση, θα δούμε παρακάτω ότι αν υπάρχουν κάποιες συμμετρίες, μπορεί να βρεθούν και άλλες ποσότητες που διατηρούνται και έτσι να λυθούν προβλήματα με σχετικά εύκολο τρόπο. Για παράδειγμα, αν η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από κάποια συνιστώσα του τετραδιάστατου χώρου τότε η αντίστοιχη ποσότητα $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}$ διατηρείται (πρόκειται για τη λεγόμενη συζυγή γενικευμένη ορμή που σχετίζεται με τη συντεταγμένη θέσης x^{μ}).

Ας ξεκινήσουμε από τις εξισώσεις κίνησης (3.60), παίρνουμε την ολική παράγωγο ως προς λ και καταλήγουμε στις

$$
g_{ik}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}\lambda^2}+\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\lambda}=0\,. \tag{3.67}
$$

Πολλαπλασιάζουμε επί g^{mi} και λαμβάνουμε υπόψη ότι $g_{il}g^{kl}=g_{li}g^{lk}=\delta_i^{\ k}$, οπότε βρίσκουμε

$$
\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}\lambda^2}+g^{mi}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{\mathrm{d}\,x^k}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\lambda}=0\,. \tag{3.68}
$$

Από αυτές καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{\mathrm{d}\,x^k}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\lambda}=0\\&\text{όπου }\ \Gamma^i_{kl}=g^{im}\Gamma_{m,kl}\quad\text{και}\ \Gamma_{i,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=g_{ir}\Gamma^r_{kl}\ .\end{aligned}\tag{3.69}$$

Τα σύμβολα $\Gamma_{i,kl}$ είναι τα σύμβολα (του) Christoffel πρώτου είδους. Τα σύμβολα $\Gamma^i{}_{kl}$ είναι τα σύμβολα του Christoffel δευτέρου είδους.

3.6 Θεωρία Μεταβολών με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την περίπτωση που υπάρχουν γενικώς πολλές άγνωστες, εξαρτημένες, μεταβλητές (συναρτήσεις που πρέπει να προσδιοριστούν) ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή ήταν μία. Αυτό είναι χρήσιμο για τη μελέτη διακριτών μηχανικών συστημάτων όπου η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι μια, ο συνήθης χρόνος ή ο ιδιόχρονος στη Σχετικότητα, αν μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή, ή κάποια άλλη κατάλληλη παράμετρος. Υπάρχουν όμως και άλλες περιπτώσεις όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι πολλές. Αυτό αναφέρεται ως θεωρία συνεχών συστημάτων ή Θεωρία Πεδίων. Σε αυτή την περίπτωση οι προς προσδιορισμό συναρτήσεις (εξαρτημένες μεταβλητές) εξαρτώνται από πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές, οι οποίες στην κλασική Φυσική, είναι ο χρόνος και μια ή δυο ή και οι τρεις συντεταγμένες θέσης. Θα μελετήσουμε τα συνεχή συστήματα αργότερα. Στο Παράρτημα Π6 γίνεται η ανάλυση που αναφέρεται σε n το πλήθος εξαρτημένες μεταβλητές σε πολυδιάστατο χώρο. Για διδακτικούς λόγους, εδώ θα εξετάσουμε αυτοτελώς μερικές περιπτώσεις ειδικού ενδιαφέροντος, χωρίς τη χρήση του παραπάνω παραρτήματος.
Ξεκινούμε με την περίπτωση που υπάρχει μόνο μια συνάρτηση, η f, της οποίας σχηματίζουμε το συναρτησοειδές. Αυτή θα εξαρτάται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές x, y, μια εξαρτημένη $u(x, y)$, και τις πρώτες παραγώγους της ως προς x και y. Σε αυτή την περίπτωση υπάγεται η περίπτωση ταλαντευόμενης χορδής που η ταλάντωσή της γίνεται σε σταθερό επίπεδο κατά μήκος της. Τότε η μια ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος και η άλλη η θέση κατά μήκος της χορδής. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η απομάκρυνση κάθε ενός υλικού σημείου της χορδής από τη θέση ισορροπίας.

Χρειάζεται να βρούμε για ποιες συναρτήσεις $u(x, y)$ γίνεται στάσιμο το διπλό ολοκλήρωμα (συναρτησοειδές)

$$Z=\int_S f(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.\tag{3.70}$$

S είναι το δισδιάστατο χωρίο $S=(x, y)$ όπου γίνεται η ολοκλήρωση, και $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Υποθέτουμε ότι κατά τη δυνατή μεταβολή $\delta Z=0$ η συνάρτηση $u(x, y)$ δεν μεταβάλλεται στο σύνορο, c, του χωρίου S, δηλαδή $\delta u(x, y)\big|_c=0$. Κατά τη δυνατή μεταβολή, τα x, y είναι σταθερά και το χωρίο ολοκλήρωσης δεν μεταβάλλεται. Από την (3.70) βρίσκουμε,

$$\begin{aligned}\delta Z&=\int_S \delta f(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\ \delta f&=\frac{\partial f}{\partial u}\delta u+\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}\delta u_y.\end{aligned}\tag{3.71}$$

Έχουμε τις σχέσεις

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u\right)=\delta u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)+\frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}(\delta u)}{\mathrm{d}x}\\
=\delta u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)+\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\delta u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)+\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u_x\\
\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u\right)-\delta u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right).
\end{gathered}
\tag{3.72}
$$

Ισχύουν και οι σχέσεις που προκύπτουν θέτοντας όπου x το y . Από τις (3.71), (3.72) βρίσκουμε

$$
\begin{gathered}
\delta Z=\int_S\delta u\left\{\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
+\int_S\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta u\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\delta u\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.
\end{gathered}
\tag{3.73}
$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης (θεώρημα του Gauss), το τελευταίο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο, c , του δισδιάστατου χωρίου S =(x, y). Έχουμε επομένως για αυτό το ολοκλήρωμα συνόρου, δZ_{b} ,

$$
\delta Z_{\mathrm{b}}=\int_c\delta u\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial u_y}\mathrm{d}x\right).
\tag{3.74}
$$

Αυτό είναι μηδέν, αφού στο σύνορο, $\delta u\big|_c$=0. Επομένως από τις (3.73) προκύπτει ότι και το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Τα $\delta u(x,y)$ σε κάθε σημείο (x,y) είναι αυθαίρετα, επομένως σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα της θεωρίας μεταβολών ο μύστακας μέσα στο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, οπότε

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)-\frac{\partial f}{\partial u}=0\,.
\tag{3.75}
$$

Αυτή είναι η εξίσωση Euler-Lagrange για δυο ανεξάρτητες μεταβλητές και μια εξαρτημένη.

Παραδείγματα – Ειδικά θέματα

1. Συνοριακές συνθήκες

Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι οι συναρτήσεις - λύσεις των προβλημάτων της θεωρίας μεταβολών παίρνουν καθορισμένες τιμές στο σύνορο της περιοχής ολοκλήρωσης. Όμως σε πολλά προβλήματα μπορεί να μην υπάρχουν τέτοιες συνθήκες εκ των προτέρων στο σύνορο ή μπορεί οι συνθήκες στο σύνορο να είναι πιο γενικές. Είναι γνωστό πως αν έχουμε να λύσουμε μια συνήθη διαφορική εξίσωση τάξεως n, χρειαζόμαστε n το πλήθος συνοριακές συνθήκες για να έχουμε μοναδικότητα στη λύση. Στα προηγούμενα αυτές οι συνθήκες υπαγορεύονταν εξ αρχής, από το δεδομένο πρόβλημα. Αν δεν υπάρχουν εκ των προτέρων συνοριακές συνθήκες στο σύνορο, τότε μιλούμε για ελεύθερες (αδέσμευτες) συνοριακές τιμές. Γενικώς μπορεί οι δυνατές μεταβολές των άγνωστων συναρτήσεων και παραγώγων τους να μην είναι κατ' ανάγκη μηδέν στο σύνορο.

2. Φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες για ελεύθερα σύνορα

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα μεταβολών με συναρτησιακό το

$$Z=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y_x)\mathrm{d}x \quad y_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{3.76}$$

με μια άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ μιας μεταβλητής x, χωρίς δεδομένες εκ των προτέρων συνοριακές συνθήκες στα άκρα x_1,x_2. Απαιτούμε το συναρτησιακό Z να είναι στάσιμο. Για να είναι στάσιμο το συναρτησιακό πρέπει η δυνατή μεταβολή δZ να μηδενίζεται. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$\delta Z=\int_{x_1}^{x_2}\delta y\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\right]\mathrm{d}x+\left.\left(\delta y\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\right|_{x_1}^{x_2} \tag{3.77}$$

Υποθέτουμε ότι το Z είναι στάσιμο, για οποιεσδήποτε δυνατές μεταβολές δy στο σύνορο. Αφού ισχύει αυτό, αρχικά κάνουμε την επιλογή να ισχύουν $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$. Αυτό όμως οδηγεί στο ότι για τη λύση του προβλήματος, δηλαδή για την $y=y(x)$, το ολοκλήρωμα στην (3.77) είναι μηδέν και, κατά τα γνωστά, ισχύουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange. Αυτό σημαίνει ότι εξασφαλίσαμε ότι και σε αυτή την πιο γενική περίπτωση ισχύουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange και ότι πρέπει (προφανώς) ο δεύτερος όρος, ο όρος συνόρου, στην (3.77) να είναι μηδέν ανεξάρτητα από τις τιμές των δy στα άκρα. Αν αυτές δεν είναι μηδέν τότε πρέπει να ισχύει $\frac{\partial f}{\partial y_x}=0$ για $x=x_1$ και $x=x_2$. Αυτές είναι οι φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες (natural boundary conditions) του προβλήματος. Αν έχουμε πολλές άγνωστες μεταβλητές έτσι που το συναρτησιακό να έχει τη μορφή,

$$Z=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y_1,y_2,...,y_n,\dot{y}_1,\dot{y}_2,...,\dot{y}_n)\mathrm{d}x \quad \dot{y}_l=\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x} \tag{3.78}$$

τότε ισχύουν οι κατάλληλες εξισώσεις Euler-Lagrange και οι φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_l}=0,\ l=1,2,...,n \ \text{ στο σύνορο } x=x_1,\, x=x_2 \ . \tag{3.79}$$

Δίνουμε παρακάτω τις φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες για δυο περιπτώσεις σε δισδιάστατα προβλήματα. Θεωρούμε ότι ο συμβολισμός είναι αυτονόητος.

Αυτά τα παραδείγματα είναι:

Η περίπτωση με μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Τότε έχουμε,

$$Z=\int_S f(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{στο σύνορο } \int_c \left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\delta u \mathrm{d}s=0 \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0.$$

Η τελευταία σχέση είναι η φυσιολογική συνθήκη συνόρου και προκύπτει υποθέτοντας ότι το $\delta u\big|_c$ (στο σύνορο) είναι αυθαίρετο, οπότε ισχύει το γνωστό θεμελιώδες λήμμα της θεωρίας μεταβολών.

Για πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές έχουμε,

$$Z=\int_S f(x,y,u,u_x,u_y,\upsilon,\upsilon_x,\upsilon_y,\ldots)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{στο σύνορο } \int_c \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\delta u+\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\delta \upsilon+\ldots\right]\mathrm{d}s=0, \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0,\ \frac{\partial f}{\partial \upsilon_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0,\ldots$$

Οι τελευταίες είναι οι φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες.

Σε αυτές τις περιπτώσεις οι εκφράσεις (3.80), (3.81) για τις φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες, ισχύουν στο σύνορο, το οποίο είναι η κλειστή καμπύλη, c, η οποία περικλείει το δισδιάστατο χωρίο ολοκλήρωσης, S. Το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της κλειστής καμπύλης, c, του συνόρου παριστάνεται με $\mathrm{d}s$.

Η έννοια των φυσιολογικών συνοριακών συνθηκών μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε γενικεύσεις της θεωρίας μεταβολών, συμπεριλαμβανομένων αυτών που οι συνοριακές συνθήκες δίνονται εκ των προτέρων. Ως παράδειγμα δίνουμε την περίπτωση που το συναρτησοειδές δεν αποτελείται μόνο από ένα ολοκλήρωμα, αλλά είναι της πιο γενικής μορφής:

$$Z=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x-\varphi(y_0)+\psi(y_1),\ \ y_0=y(x_0),\ y_1=y(x_1). \tag{3.82}$$

Οι συναρτήσεις $\varphi,\ \psi$ επιλέγονται ανάλογα με το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε. Τα y_0, y_1 δεν είναι προκαθορισμένα.

Από την (3.82) βρίσκουμε,

$$\delta Z=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\left[\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\right]\Bigg|_{x_1}-\left[\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\right]\Bigg|_{x_0}=0. \tag{3.83}$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση Euler-Lagrange και σε δυο φυσιολογικές συνθήκες συνόρου:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,\quad \left.\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x_1}=0,\quad \left.\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x_0}=0. \tag{3.84}$$

Μπορούμε να δούμε στη συνέχεια πως από αυτές τις φυσιολογικές συνθήκες καταλήγουμε στις γνωστές προκαθορισμένες συνθήκες. Υποθέτουμε ότι,

$$\varphi(y)=l(y-a)^2,\quad \psi(y)=(y-b)^2 \tag{3.85}$$

οπότε οι συνοριακές συνθήκες γίνονται

$$\left.\frac{1}{2l}\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_0}+y_0-a=0,\quad \left.\frac{1}{2l}\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1}+y_1-b=0. \tag{3.86}$$

Πηγαίνουμε στο όριο όταν $l\to\infty$ και καταλήγουμε στην περίπτωση όπου οι τιμές στο σύνορο είναι καθορισμένες, δηλαδή $y_0=a,\ \ y_1=b$.

3. Ισοπεριμετρικά προβλήματα

Το όνομα, ισοπεριμετρικό, προέρχεται από τον αρχαίο μύθο της πριγκίπισσας Διδώς (ή Διδούς). Ο μύθος σχετίζεται με το εξής πρόβλημα, να βρεθεί επιφάνεια που να έχει μέγιστο εμβαδόν αν η περίμετρός της έχει δεδομένο μήκος. Αυτό είναι πρόβλημα που όπως θα δούμε μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη θεωρία μεταβολών. Έστω ότι έχουμε ισοπεριμετρικό πρόβλημα μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x και μιας εξαρτημένης $y(x)$. Η συνάρτηση είναι η $f=f(x,y,y')$. Ζητούμε το παρακάτω, συναρτησιακό να είναι στάσιμο, χωρίς να εξετάζουμε αν είναι μέγιστο,

$$Z=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x,\quad y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ . \tag{3.87}$$

Έχουμε προκαθορισμένες συνοριακές τιμές,

$$y(x_1)\text{=}y_1,\, y(x_2)\text{=}y_2\quad \text{άρα } \delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0\ . \tag{3.88}$$

Στα ισοπεριμετρικά προβλήματα υπάρχει ο περιορισμός ότι η $y=y(x)$ πληροί ολοκληρωτικές σχέσεις της μορφής

$$K_i=\int_{x_1}^{x_2} g_i(x,y,y')\mathrm{d}x=a_i=\text{σταθ.}\ \ i=1,2,...,n\ . \tag{3.89}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας πολυδιάστατους χώρους για τις ανεξάρτητες μεταβλητές και πολλές άγνωστες συναρτήσεις.

Επειδή κατά τις δυνατές μεταβολές πρέπει να ληφθούν υπόψη οι δεσμευτικές σχέσεις (3.89), κάνουμε χρήση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Χρησιμοποιούμε τις (3.87), (3.89). Αφού πάρουμε τις δυνατές μεταβολές των (3.87), (3.89) έχουμε,

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x, y, y')\mathrm{d}x = 0 \\ \delta K_i &= \int_{x_1}^{x_2} \delta g_i(x, y, y')\mathrm{d}x = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Οι δεσμευτικές σχέσεις-ολοκληρώματα ισχύουν και για τις παραλλαγμένες διαδρομές. Στη συνέχεια ακολουθούμε τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange, πολλαπλασιάζουμε τις δεύτερες σχέσεις επί n άγνωστες σταθερές λ_i, $i = 1, 2, ..., n$ αντιστοίχως και προσθέτουμε στην πρώτη σχέση. Αφού το Z είναι στάσιμο και εφόσον ισχύουν οι (3.90), θα είναι στάσιμο και το συναρτησιακό

$$Z_M = \int_{x_1}^{x_2} f_M dx\,, f_M = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i. \tag{3.91}$$

Υπολογίζουμε τις δυνατές μεταβολές, κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση, ο όρος συνόρου μηδενίζεται και καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\, y \left[\frac{\partial f_M}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_M}{\partial y'}\right] dx = 0. \tag{3.92}$$

Εδώ χρειάζεται λίγη σκέψη, η $\delta y = \delta y(x)$ δεν είναι τελείως αυθαίρετη συνάρτηση του x διότι πρέπει να είναι σε συμφωνία με τις (3.89) και τις δεύτερες από τις (3.90). Μπορεί κάποιος να ισχυριστεί, χωρίς μαθηματική αυστηρότητα, ότι η $\delta y(x)$ έχει «χάσει» n βαθμούς ελευθερίας. Οι n το πλήθος αυθαίρετες σταθερές, λ_i μπορεί να ρυθμιστούν έτσι που η αγκύλη στην (3.92) να είναι μηδέν ανεξάρτητα από τη $\delta y(x)$. Αυτό οδηγεί στην εξίσωση Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f_M}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_M}{\partial y'} = 0. \tag{3.93}$$

Δηλαδή, καταλήγουμε σε πρόβλημα με τροποποιημένη συνάρτηση, όπου αντί της f έχουμε την f_{M}, κανόνας πολλαπλασιασμού. Από την (3.93) προκύπτει γενικώς, συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Η λύση της έχει 2 άγνωστες σταθερές και επί πλέον τις n το πλήθος άγνωστες σταθερές λ_i. Αυτές οι $n+2$ σταθερές προσδιορίζονται από τις συνθήκες (3.88) στο σύνορο και τις (3.89). Αν έχουμε περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, οι σχέσεις τροποποιούνται κατάλληλα. Για παράδειγμα, αν έχουμε δυο ανεξάρτητες μεταβλητές θα έχουμε,

$$\begin{aligned} Z &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\mathrm{d}x, \quad y_j' = \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x} \quad j = 1, 2 \\ K_i &= \int_{x_1}^{x_2} g_i(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\mathrm{d}x = a_i = \text{σταθ.} \;\; i = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Από αυτές θα βρούμε,

$$Z_M = \int_{x_1}^{x_2} f_M dx\,, f_M = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \tag{3.95}$$

$$\frac{\partial f_M}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_M}{\partial y_1'} = 0, \; \frac{\partial f_M}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_M}{\partial y_2'} = 0.$$

Τώρα για τον προσδιορισμό όλων των σταθερών χρειάζονται και οι δεύτερες από τις (3.94).

4. Τροποποίηση λαγκρανζιανής - εξάλειψη συντεταγμένων

Ας υποθέσουμε ότι κάποιες συντεταγμένες (μεταβλητές) δεν υπάρχουν στη λαγκρανζιανή ενώ υπάρχουν οι αντίστοιχες ταχύτητές τους. Αυτές είναι αγνοήσιμες συντεταγμένες. Έστω n το πλήθος των $\dot{q}_i$ και m το πλήθος των αγνοήσιμων συντεταγμένων. Θεωρούμε ότι οι αγνοήσιμες συντεταγμένες είναι οι τελευταίες στην κατάταξη, δηλαδή από $i = n - m + 1$ μέχρι $i = n$. Οι μη αγνοήσιμες είναι οι πρώτες $n - m$.

Η έκφραση

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.96}$$

ορίζει τη γενικευμένη ορμή της μεταβλητής q_k. Οι εξισώσεις Lagrange γράφονται

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{3.97}$$

Για τις αγνοήσιμες q_k ισχύουν

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \tag{3.98}$$

Με χρήση των Εξ. (3.98) οι εξισώσεις Lagrange, Εξ. (3.97), με απλή ολοκλήρωση δίνουν

$$p_k = \text{σταθ.} = c_k. \tag{3.99}$$

Οι αγνοήσιμες q_k δεν υπάρχουν στις σχέσεις ορισμού Εξ. (3.94) , ενώ υπάρχουν τα $\dot{q}_k$. Αυτές οι σχέσεις γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.99) ως

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_k. \tag{3.100}$$

Από αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\dot{q}_k$ συναρτήσει των υπόλοιπων q_i και $\dot{q}_i$. Δηλαδή έχουμε

$$\dot{q}_k = f_k(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{n-m}, c_{n-m+1}, c_{n-m+2}, \ldots, c_n, t). \tag{3.101}$$

Αφού με χρήση των εξισώσεων Lagrange βρούμε τις εξισώσεις κίνησης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $\dot{q}_k$ με χρήση της Εξ. (3.101), οπότε έχουμε διαφορικές εξισώσεις στις οποίες δεν εμφανίζονται οι m το πλήθος αγνοήσιμες μεταβλητές (ούτε οι ταχύτητές τους) αλλά μόνο οι $n - m$ το πλήθος μη αγνοήσιμες. Το πρόβλημα έχει αναχθεί σε απλούστερο πρόβλημα με λιγότερες διαφορικές εξισώσεις και μεταβλητές. Δηλαδή αντί για πλήθος n έχουμε πλήθος $n - m$. Αφού προσδιορίσουμε τις $n - m$ συντεταγμένες $q_i = q_i(t)$, τις αντικαθιστούμε στις Εξ. (3.101) και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε και τις $q_k = q_k(t)$ για τις υπόλοιπες, που είναι οι αγνοήσιμες συντεταγμένες. Αυτή η διαδικασία έγινε αφού πρώτα καταλήξαμε στις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης. Δημιουργείται το ερώτημα αν μπορούμε να εξαλείψουμε τις αγνοήσιμες μεταβλητές από την αρχή, δηλαδή στο επίπεδο της λαγκρανζιανής κατά τη διατύπωση της θεωρίας μεταβολών.

Έχουμε το ολοκλήρωμα δράσης

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) dt. \tag{3.102}$$

Η αρχή Hamilton μας λέει ότι $\delta I = 0$ για αυθαίρετες δυνατές μετατοπίσεις των $q_i, i = 1, 2, \ldots, n$, εκτός των τιμών τους στα άκρα t_1, t_2 . Επομένως αν εξαλείψουμε από την λαγκρανζιανή τα $\dot{q}_k$ $k = n-m+1, n-m+2, \ldots, n$ με χρήση των Εξ. (3.101), τότε το πρόβλημα έχει αναχθεί, από την αρχή, σε πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές, $n-m$ το πλήθος. Σημειώνουμε ότι για να κάνουμε τη δυνατή μεταβολή με τη λαγκρανζιανή από την οποία έχουν εξαλειφθεί και οι ταχύτητες των αγνοήσιμων μεταβλητών, πρέπει να έχουμε τις Εξ. (3.100) να ισχύουν όχι μόνο για την πραγματική τροχιά αλλά και για τις παραλλαγμένες τροχιές. Η μεταβολή (παραλλαγή) του ολοκληρώματος δράσης μηδενίζεται (κατά τα γνωστά) για αυθαίρετες δυνατές μετατοπίσεις των $q_i, i = 1, 2, \ldots, n$, επομένως το ότι οι αγνοήσιμες συντεταγμένες υπολογίζονται με βάση τις Εξ. (3.100), δηλαδή με απλή ολοκλήρωση των Εξ. (3.101), δεν είναι πρόβλημα. Η συνθήκη όμως μηδενισμού των δυνατών μετατοπίσεων στα δυο ακραία σημεία του ολοκληρώματος είναι πρόβλημα, δεν ισχύει για τις αγνοήσιμες συντεταγμένες διότι οι μεταβολές τους είναι καθορισμένες από τον ανωτέρω τρόπο υπολογισμού τους. Ας επιχειρήσουμε να δείξουμε την αρχή του Hamilton $\delta I = 0$ με χρήση της Αρχής d' Alembert. Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα, υπολογίζουμε το δI :

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right\} dt - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \delta q_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \right\} dt. \tag{3.103}$$

Για την πραγματική κίνηση ισχύει η Αρχή d' Alembert:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0. \tag{3.104}$$

Σημειώνουμε ότι αυτό ισχύει ακόμη και όταν τα δq δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αλλά συνδέονται με δεσμούς. Επομένως η Εξ. (3.107) γίνεται,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right\} dt. \tag{3.105}$$

Χωρίζουμε τους όρους με τις μη αγνοήσιμες και με τις αγνοήσιμες συντεταγμένες, έχουμε

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-m} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=n-m+1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right\} dt. \tag{3.106}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα, με παραγοντική ολοκλήρωση, γίνεται

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-m} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right\} dt = \left(\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{3.107}$$

Αυτό είναι μηδέν διότι τα δq_i (για τα q που δεν είναι αγνοήσιμα) είναι μηδέν στα άκρα t_1, t_2 . Αν κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση του δεύτερου όρου που περιέχει τις αγνοήσιμες συντεταγμένες, αυτός δεν είναι μηδέν διότι τα αντίστοιχα δq_i δεν είναι μηδέν.

Σύμφωνα με τις Εξ. (3.94) και (3.99) έχουμε

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i = \text{σταθ.}$$

επομένως,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = \sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{dt} dt = \sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{q}_i dt = \sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_i dt. \tag{3.108}$$

Τελικώς, με χρήση των ανωτέρω η Εξ. (3.105) γίνεται

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left(L - \sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \dot{q}_i\right) dt = 0. \tag{3.109}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν τροποποιήσουμε τη λαγκρανζιανή ώστε να γίνει

$$L' = L - \sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \dot{q}_i. \tag{3.110}$$

έτσι το πρόβλημα τροποποιείται, γίνεται νέο πρόβλημα θεωρίας μεταβολών με ολοκλήρωμα δράσης το

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt\,. \tag{3.111}$$

Σημειώνουμε ότι η τροποποιημένη λαγκρανζιανή διαφέρει από την αρχική κατά τον προσθετέο $-\sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \dot{q}_i = \frac{dF(q)}{dt}$, οπότε αυτή οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις κίνησης.

Τώρα είναι ευνόητο ότι ο όρος από την παραγοντική ολοκλήρωση θα είναι μηδέν, επομένως δεν υπάρχει πρόβλημα στο να αντικατασταθούν στη λαγκρανζιανή L' τα $\dot{q}$ των αγνοήσιμων μεταβλητών με χρήση των Εξ. (3.101). Συνοψίζουμε τη διαδικασία εξάλειψης:

1. Γράφουμε τις Εξ. (3.107),δηλαδή τις $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_k$, για τις αγνοήσιμες συντεταγμένες.

2. Τροποποιούμε την αρχική λαγκρανζιανή L και καταλήγουμε στη νέα, L', Εξ. (3.110):

$$L' = L - \sum_{i=n-m+1}^{n} c_i \dot{q}_i.$$

3. Εξαλείφουμε τις ταχύτητες $\dot{q}$ των αγνοήσιμων q, υπολογίζοντας αυτές τις $\dot{q}$, από τις Εξ. (3.100) και αντικαθιστώντας στην Εξ. (3.110).

Έτσι το πρόβλημα θεωρίας μεταβολών έχει αναχθεί σε απλούστερο με λιγότερες μεταβλητές. Αφού υπολογιστούν αυτές οι μεταβλητές, τις αντικαθιστούμε κατά τα γνωστά στις Εξ. (3.101) και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε και την εξέλιξη στον χρόνο των αγνοήσιμων μεταβλητών.

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι έχουμε λαγκρανζιανή από την οποία λείπουν οι ταχύτητες κάποιων συντεταγμένων, m το πλήθος (έστω και πάλι τελευταίες στην κατάταξη), αυτές οι συντεταγμένες (μεταβλητές) λέγονται αλγεβρικές μεταβλητές. Για τις αλγεβρικές μεταβλητές, από τις εξισώσεις Lagrange βρίσκουμε

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\ i = n-m+1, n-m+2, \ldots, n\,. \tag{3.112}$$

Από αυτές, αν μπορούν να λυθούν, υπολογίζουμε τα q_i, $i = n-m+1, n-m+2, \ldots, n$, συναρτήσει των άλλων μεταβλητών, οπότε έχουμε

$$q_i = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m, t), i = n-m+1, n-m+2, \ldots, n. \tag{3.113}$$

Μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης και να αντικαταστήσουμε τα q των Εξ. (3.113), όπου υπάρχουν, οπότε έχουμε να λύσουμε σύστημα διαφορικών εξισώσεων με λιγότερες μεταβλητές, m το πλήθος. Αφού βρούμε τη λύση αντικαθιστούμε στις Εξ. (3.113) και προσδιορίζουμε και τις υπόλοιπες. Όμως σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, τώρα δεν θα υπάρχουν οι αντίστοιχοι όροι από την παραγοντική ολοκλήρωση για τις τελευταίες m μεταβλητές, διότι δεν υπάρχουν οι ταχύτητες που δημιουργούν αυτούς τους όρους. Επομένως η νέα λαγκρανζιανή L' βρίσκεται από την αρχική L, με απλή αντικατάσταση των μεταβλητών από τις Εξ. (3.113). Έτσι θα καταλήξουμε σε πρόβλημα θεωρίας μεταβολών με λιγότερες συντεταγμένες, από την αρχή. Μετά τη λύση του βρίσκουμε τις υπόλοιπες με χρήση των Εξ. (3.113).

5. Ισοδύναμα ολοκληρώματα δράσης

Με την έννοια ισοδύναμα εννοούμε μια ειδική κατηγορία μετασχηματισμού που οδηγεί σε ολοκλήρωμα δράσης από όπου με αρχή μεταβολών βρίσκουμε τις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Αυτό θα δούμε ότι σχετίζεται άμεσα με τον μετασχηματισμό βαθμίδας που είδαμε ότι ενώ τροποποιεί τη λαγκρανζιανή, οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις κίνησης.

Ας ξεκινήσουμε με το ολοκλήρωμα δράσης (ή τη δράση)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t\,. \tag{3.114}$$

Σχηματίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\,. \tag{3.115}$$

Η συνάρτηση $F(q,t)$ εξαρτάται από τη θέση και τον χρόνο και σε αυτό το ολοκλήρωμα υπεισέρχεται η ολική της παράγωγος ως προς τον χρόνο. Προφανώς ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

Προσθέτουμε τις (3.114) και (3.115) οπότε έχουμε τη νέα δράση $I_1 = I + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$.

Δηλαδή βρίσκουμε τη νέα δράση,

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t} \right)\mathrm{d}t = I + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}F(q,t) = I + F\left(q(t_2),t_2\right) - F\left(q(t_1),t_1\right). \tag{3.116}$$

Βλέπουμε ότι οι δυο δράσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά, αφού τα t_1, t_2 είναι σταθερά και οι τιμές $q(t_1), q(t_2)$ είναι καθορισμένες, σταθερές. Είναι ευνόητο ότι οι δυνατές μεταβολές αυτών είναι μηδέν. Σχηματίζουμε τη δυνατή μεταβολή της δράσης I_1 και βρίσκουμε,

$$\delta I_1 = \delta I + \delta F(q(t_2),t_2) - \delta F(q(t_1),t_1) = \delta I\,. \tag{3.117}$$

Οι δυο δράσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά, η οποία κατά τη δυνατή μεταβολή δεν παίζει ρόλο, άρα οι δυνατές μεταβολές των I, I_1 είναι ίσες. Αυτό είναι ανεξάρτητο του αν είναι μηδέν ή όχι. Αν ισχύει η αρχή Hamilton είναι και οι δυο μηδέν και με χρήση δεσμευτικών σχέσεων, αν υπάρχουν, καταλήγουμε και από τις δυο δράσεις στις ίδιες εξισώσεις Lagrange και τελικές εξισώσεις κίνησης.

Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι αυτό σχετίζεται με τροποποίηση της λαγκρανζιανής με προσθήκη σε αυτήν της ολικής παραγώγου συνάρτησης της θέσης και του χρόνου. Οι δυο λαγκρανζιανές δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, όπως ξέρουμε. Δηλαδή βρίσκουμε τη συσχέτιση με γνωστό μετασχηματισμό βαθμίδας. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από την τροποποίηση της λαγκρανζιανής αλλά προτιμήσαμε να ξεκινήσουμε ανεξάρτητα, από την τροποποίηση της δράσης.

6. Το πρόβλημα της Θεωρίας Μεταβολών με παραμετροποίηση των τροχιών

Ξεκινούμε από το συναρτησιακό $Z = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\mathrm{d}x, \quad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$. Εννοείται ότι όλες οι τροχιές, η πραγματική και οι γειτονικές περνούν από τα ίδια δυο ακραία σημεία στις θέσεις x_1, x_2, οπότε τα $y(x_1), y(x_2)$ είναι δεδομένα ίδια για όλες τις τροχιές. Ζητούμε την πραγματική διαδρομή (λύση) $y = y(x)$ η οποία οδηγεί σε στάσιμη τιμή του συναρτησιακού. Θα οδηγηθούμε και πάλι στην εξίσωση Euler-Lagrange. Εδώ αναφέρουμε αυτά που στις προηγούμενες περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι ισχύουν σιωπηρώς. Δηλαδή, πρέπει να υπάρχουν παράγωγοι της $y(x)$ μέχρι δεύτερης τάξης και να είναι συνεχείς, επίσης πρέπει να υπάρχουν οι παράγωγοι της f ως προς τα ορίσματά της και να είναι συνεχείς.

Λύση
Διαλέγουμε ένα σύνολο από πολύ γειτονικές διαδρομές (τροχιές) στις οποίες περιέχεται και η πραγματική διαδρομή. Αυτό πραγματοποιείται με παραμετροποίηση αυτών των πολύ γειτονικών τροχιών. Έστω ότι η σχετική παράμετρος παριστάνεται με το α. Η παραμετροποίηση για $\alpha = 0$ πρέπει να μας οδηγεί σε στάσιμη τιμή για το συναρτησιακό, δηλαδή στη λύση του προβλήματος, στην πραγματική τροχιά. Αυτή η παραμετροποίηση για αρκετά κοντινές τροχιές έχει τη μορφή $y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x)$.

$y(x,0) = y(x)$ είναι η πραγματική τροχιά (η λύση) και ισχύουν $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Οι συναρτήσεις $\eta(x), \eta(x)$ είναι συγκεκριμένες αλλά αυθαίρετες και, σύμφωνα με τα παραπάνω, πρέπει να έχουν μέχρι και δεύτερες παραγώγους συνεχείς. Είναι ευνόητο ότι το συναρτησιακό είναι συνάρτηση της παραμέτρου α, δηλαδή

$$Z(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x\right)\mathrm{d}x .$$

Εδώ ισχύει $\dot{y} = \dfrac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}$. Για στάσιμη τιμή έχουμε $\left.\dfrac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$. Όμως ισχύει,

$$\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right)\mathrm{d}x .$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}\mathrm{d}x .$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}\mathrm{d}x = \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}x .$$

Έχουμε τη σχέση $\left.\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{x=x_1,x_2} = \left.\frac{\partial y(x,0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial\left(\alpha\eta(x)\right)}{\partial \alpha}\right|_{x=x_1,x_2} = 0 + \eta(x)\big|_{x=x_1,x_2} = 0+0=0$.

Επειδή $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \eta(x)\mathrm{d}x \,.$$

Πρέπει να ισχύει $\left.\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, οπότε έχουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} \left.\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)\right|_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0 \,.$$

Το $\eta(x)$ είναι αυθαίρετο, οπότε σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα της θεωρίας μεταβολών καταλήγουμε στην εξίσωση (Euler-)Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \,.$$

Είναι ευνόητο ότι αν έχουμε πολλές συναρτήσεις $y_k \;\; k=1,2,...,n$, θα εισαχθούν αντίστοιχες συναρτήσεις $\eta_k(x)$, ενώ η παράμετρος θα είναι μία, η α, και θα καταλήξουμε σε n εξισώσεις Lagrange, μια για κάθε y_k.

7. Ελάχιστη απόσταση μεταξύ δυο σημείων στο επίπεδο

Το πρόβλημα που τίθεται είναι να βρεθεί η καμπύλη που ενώνει δυο δεδομένα σημεία που βρίσκονται σε ένα επίπεδο, έτσι που το μήκος της καμπύλης να είναι ελάχιστο.

Λύση

Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα, θα εφαρμόσουμε τη θεωρία μεταβολών που σημαίνει ότι θα βρούμε πότε έχουμε στάσιμη τιμή και θα υποθέσουμε ότι η στάσιμη τιμή αντιστοιχεί σε ελάχιστο μήκος. Θεωρούμε ότι έχουμε καρτεσιανές συντεταγμένες x, y. Ο άξονας x είναι οριζόντιος και ο y κατακόρυφος. Έστω ότι το αρχικό σημείο είναι το (0,0) δηλαδή στην αρχή των αξόνων. Η έκφραση $y = y(x)$ παριστάνει τυχαίο δρόμο που συνδέει το αρχικό σημείο (0,0) με το τελικό δεδομένο σημείο (x_1, y_1). Αν το στοιχειώδες μήκος πάνω σε αυτόν τον τυχαίο δρόμο είναι $\mathrm{d}s$, έχουμε $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ και $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,\; y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Το μήκος για τυχαία διαδρομή από τη θέση (0,0) μέχρι τη θέση (x_1, y_1) είναι $l_{01} = \int_0^1 \mathrm{d}s = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$. Η θεωρία μεταβολών μας λέει ότι $\delta l_{01} = 0$. Αυτό μας οδηγεί στην εξίσωση Lagrange και θέτοντας $f = \sqrt{1+y'^2}$ βρίσκουμε $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$ Όμως $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ άρα $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$, οπότε

$\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C = \text{σταθερό}$. Από αυτήν βρίσκουμε $y'^2(1-C^2) = C^2$ οπότε αν $C^2 < 1$, καταλήγουμε σε πραγματική γενική λύση, στην $y' = a = \text{σταθερό}$, άρα $y = ax + b$ όπου b μια άλλη σταθερά. Η καμπύλη είναι ευθεία, όπως αναμένουμε. Εφόσον η ευθεία περνά από το σημείο (0,0), έπεται ότι $b = 0$, $y = ax$. Το a προσδιορίζεται (αν θέλουμε) από την απαίτηση η ευθεία να περνά και από το σημείο (x_1, y_1), ισχύει $a = \dfrac{y_1}{x_1}$.

8. Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου

Αυτό είναι το πρόβλημα με το οποίο ο Jakob Bernoulli το 1696 έδωσε την αρχική ώθηση για την ανάπτυξη της θεωρίας μεταβολών. Το πρόβλημα συνίσταται στο να βρεθεί η καμπύλη που ενώνει δυο δεδομένα σημεία, πάνω σε ένα κατακόρυφο επίπεδο που βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας, όπου όταν υλικό σημείο αφεθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από το ανώτερο σημείο και διαγράφει τροχιά που είναι αυτή η καμπύλη (χωρίς τριβές), πηγαίνει στο κατώτερο σημείο στον ελάχιστο χρόνο. Δεν ελέγχουμε αν έχουμε πράγματι ελάχιστο χρόνο, απλώς βρίσκουμε στάσιμη διαδρομή.

Λύση

Θεωρούμε ότι έχουμε καρτεσιανές συντεταγμένες x, y. Ο άξονας x είναι οριζόντιος και ο y κατακόρυφος θετικός προς τα κάτω. Φανταζόμαστε ότι το αρχικό σημείο είναι το (0,0) δηλαδή στην αρχή των αξόνων. Έστω ότι $y = y(x)$ παριστάνει τυχαίο δρόμο που συνδέει το αρχικό σημείο (0,0) με το τελικό δεδομένο σημείο (x_1, y_1). Αν το στοιχειώδες μήκος πάνω σε αυτόν τον τυχαίο δρόμο είναι $\mathrm{d}s$, και η ταχύτητα του σωματίου σε τυχαία θέση είναι $\upsilon(y)$, ισχύει για το χρονικό διάστημα T_{01} από την αρχική στην τελική θέση

$$T_{01} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\upsilon(y)}$$

η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας δίνει $\dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = mgy$ άρα $\upsilon(y) = \sqrt{2gy}$. Προφανώς ισχύουν $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ άρα $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,\ y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Τελικώς για κάθε τροχιά έχουμε

$$T_{01} = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x .$$

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί ο δρόμος $y = y(x)$ που κάνει το ολοκλήρωμα στάσιμο (εδώ μπορεί να δειχτεί ότι έχει ελάχιστη τιμή). Θέτοντας

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

με τη θεωρία μεταβολών καταλήγουμε στην εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Εφόσον το f δεν εξαρτάται άμεσα από το x ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο θεώρημα διατήρησης που αναφέρεται αργότερα),

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right]y'=0$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y'-\frac{\partial f}{\partial y}y'=\frac{\partial f}{\partial y'}y''+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=0.$$

Άρα έχουμε $y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=C=\text{σταθερό}$.

Ισχύει $y'\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$ οπότε $\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=C$ και τελικώς $y(1+y'^2)=\frac{1}{C^2}=A$.

Από αυτήν βρίσκουμε

$$x=\int\sqrt{\frac{y}{A-y}}\mathrm{d}y.$$

Θέτουμε

$$y=\frac{A}{2}(1-\cos\theta)=A\sin^2\frac{\theta}{2}$$

οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$x=\int\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{A}{2}(\theta-\sin\theta)+B.$$

Η επιλογή μας $x_0=y_0=0$ σημαίνει ότι $\theta=0,\ y=0$, οπότε για τη σταθερά B ισχύει $B=0$. Η σταθερά A προσδιορίζεται από την απαίτηση η τροχιά να περνά από το σημείο (x_1,y_1). Έχουμε τις σχέσεις $x_1=\frac{A}{2}(\theta_1-\sin\theta_1),\ y_1=\frac{A}{2}(1-\cos\theta_1)$. Από αυτές μπορούμε να βρούμε τα A και θ_1. Προτιμούμε να αφήνουμε την τροχιά να εξαρτάται από μια παράμετρο, την A. Έτσι η τροχιά σε παραμετρική μορφή δίνεται από τις σχέσεις $x=\frac{A}{2}(\theta-\sin\theta),\ y=\frac{A}{2}(1-\cos\theta)$. Η λύση είναι μια κυκλοειδής καμπύλη.

9. Το πρόβλημα της ελαστικής ράβδου

Μια ελαστική ράβδος έχει σε κάθε σημείο της την ίδια διατομή. Η ράβδος έχει μήκος l .Η ανεξάρτητη μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο διάστημα $0,l$ χαρακτηρίζει τη θέση κατά μήκος της ράβδου. Υποθέτουμε ότι στη ράβδο ασκείται φόρτος δηλαδή κατανεμημένη δύναμη κάθετα στη ράβδο, δύναμη ανά μονάδα μήκους, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\rho_{\mathrm{L}}(x)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Η μετατόπιση των σημείων της ράβδου, υπό φόρτο, από τη θέση που έχουν όταν δεν υπάρχει φόρτος οπότε η ράβδος είναι ευθεία, παριστάνεται με $y=y(x)$. Η μετατόπιση y υποτίθεται αρκούντως μικρή. Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις ελαστικές δυνάμεις (ένεκα της παραμόρφωσης της ράβδου), αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $V_{\mathrm{e}}=\dfrac{k}{2}\displaystyle\int_0^l y''^2\mathrm{d}x,\ y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\ \ k=\text{σταθ.}$

Προφανώς η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στον φόρτο δίνεται από τη σχέση $V_{\mathrm{L}}=-\displaystyle\int_0^l \rho_{\mathrm{L}}y\mathrm{d}x$, όπου η (θετική) φορά του άξονα y είναι κατά τη φορά της δύναμης $\rho_{\mathrm{L}}\mathrm{d}x$ όταν το $\rho_{\mathrm{L}}>0$. Ζητείται να βρεθεί το σχήμα της ράβδου, $y=y(x)$, κατά την ισορροπία της. Να διερευνηθεί το πρόβλημα με διαφόρων τύπων συνοριακές συνθήκες.

Λύση

Στην ισορροπία, η ολική δυναμική ενέργεια πρέπει να είναι ελάχιστη, οπότε έχουμε να βρούμε τη στάσιμη τιμή του συναρτησιακού, $V=\displaystyle\int_0^l L\mathrm{d}x=\int_0^l\left(\frac{k}{2}y''^2-\rho_{\mathrm{L}}y\right)\mathrm{d}x$. Έχουμε την περίπτωση που η συνάρτηση $L=\dfrac{k}{2}y''^2-\rho_{\mathrm{L}}y$ του συναρτησιακού εξαρτάται από τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης $y''(x)$. Παίρνοντας τη δυνατή μεταβολή, μετά την παραγοντική ολοκλήρωση θα καταλήξουμε στην εξίσωση Euler-Lagrange και στον όρο συνόρου που πρέπει να ισούται με μηδέν. Συγκεκριμένα,

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial L}{\partial y''}=0$$

$$\text{άρα } k\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=\rho_{\mathrm{L}}(x).$$

$$\left[\left(\frac{\partial L}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\delta y+\frac{\partial L}{\partial y''}\delta y'\right]_0^l=0.$$

Επειδή αυτή η συνήθης διαφορική εξίσωση είναι τέταρτης τάξεως υπάρχουν στη λύση της τέσσερις σταθερές οι οποίες για να προσδιοριστούν χρειάζονται τέσσερις συνοριακές συνθήκες. Έτσι βρίσκεται λύση πλήρως καθορισμένη.

Α) Τα άκρα στα $0,l$ της ράβδου είναι πακτωμένα έτσι ώστε

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ \ y(l)=0,\ y'(l)=0.$$

Προφανώς $\delta y(0)=0,\ \delta y'(0)=0,\ \ \delta y(l)=0,\ \delta y'(l)=0.$ Δηλαδή ο όρος συνόρου είναι πράγματι μηδέν επειδή έχουν επιβληθεί οι (εξωτερικές) συνθήκες πάκτωσης των άκρων της ράβδου. Αυτές οι συνοριακές συνθήκες είναι τέσσερις οπότε καθορίζουν τη λύση πλήρως.

Β) Τα δυο άκρα στηρίζονται έτσι που ισχύουν $y(0)=0,\ y(l)=0$. Τα $\delta y'(0),\ \delta y'(l)$ είναι αυθαίρετα, αυτό σημαίνει ότι για να μηδενιστεί ο συνοριακός όρος πρέπει να ισχύουν $y''(0)=0,\ y''(l)=0$. Οι τέσσερις συνθήκες καθορίζουν πλήρως τη λύση.

Γ) Το ένα άκρο πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο έτσι που $y(0)=0,\ y'(0)=0$. Τα $y(l),\ y'(l)$ δεν καθορίζονται εκ των προτέρων.

Αυτά σημαίνουν ότι πρέπει να ισχύουν $y''(l)=0, y'''(l)=0$. Έχουμε και πάλι τις τέσσερις συνθήκες που χρειάζεται το πρόβλημα.

Δ) Και τα δυο άκρα ελεύθερα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε, και για τα δυο άκρα, μόνο φυσικές συνοριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, πρέπει $y''(0)=0,\ y''(l)=0,\quad y'''(0)=0,\ y'''(l)=0.$ Έχουμε και πάλι το σωστό πλήθος συνοριακών συνθηκών.

Αυτή η τελευταία περίπτωση έχει κάποιες ιδιομορφίες. Είναι ευνόητο ότι η ράβδος δεν μπορεί γενικώς να ισορροπεί υπό φόρτο χωρίς να στηρίζεται κάπου. Αν για παράδειγμα ο φόρτος (το φορτίο) είναι το βάρος της ράβδου που την υποθέτουμε οριζόντια, τότε για να ισορροπεί χρειάζονται γενικώς δυο κατακόρυφες προς τα πάνω δυνάμεις στήριξης. Τώρα θα θεωρήσουμε αυτές τις δυνάμεις στήριξης ως το όριο (συναρτήσεις δέλτα) συνεχούς κατανομής δυνάμεων που συμπεριλαμβάνονται στη συνάρτηση $\rho_{\mathrm{L}}(x)$. Από τη γενική θεωρία διαφορικών εξισώσεων, αποδεικνύεται ότι στη διαφορική εξίσωση $k\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}=\rho_{\mathrm{L}}(x)$, το δεξί μέλος μπορεί να είναι αυθαίρετο μόνο αν η ομογενής της διαφορική εξίσωση, $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}=0$, με τις συνοριακές συνθήκες της κάθε μιας περίπτωσης, δεν έχει άλλη λύση εκτός από την τετριμμένη λύση $y_{\mathrm{h}}(x)=0$.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις Α), Β) και Γ) οι συνοριακές συνθήκες ήταν τέτοιες ώστε η ομογενής διαφορική εξίσωση $\dfrac{\mathrm{d}^4 y(x)}{\mathrm{d}^4 x}=0$, δεν είχε μη τετριμμένες λύσεις με τις συνοριακές συνθήκες της κάθε περίπτωσης.

Όμως στην τελευταία περίπτωση, την (Δ), υπάρχουν δυο τέτοιες ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις, που πληρούν τις σχετικές συνοριακές συνθήκες. Οι λύσεις είναι οι $y_{\mathrm{h1}}(x)=1,\ \ y_{\mathrm{h2}}(x)=x$. Για αυτή την περίπτωση η θεωρία διαφορικών εξισώσεων λέει ότι για να έχει λύση το πρόβλημα συνοριακών τιμών πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των λύσεων της ομογενούς και της συνάρτησης του δεύτερου μέλους της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή της $\rho_{\mathrm{L}}(x)$,

$$\int_0^l y_{\mathrm{h1}}(x)\rho_{\mathrm{L}}(x)\mathrm{d}x=0,\ \int_0^l y_{\mathrm{h2}}(x)\rho_{\mathrm{L}}(x)\mathrm{d}x=0\,.$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις πρέπει να είναι ορθογώνιες.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε,

$$\int_0^l \rho_{\mathrm{L}}(x)\mathrm{d}x=0,\ \int_0^l x\rho_{\mathrm{L}}(x)\mathrm{d}x=0\,.$$

Το φυσικό νόημα των τελευταίων σχέσεων είναι πως πρέπει το άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν στη ράβδο να ισούται με μηδέν και επίσης, το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να ισούται με μηδέν. Αυτό μπορεί να γίνει με δυο εντοπισμένες δυνάμεις που ισορροπούν τις συνεχώς κατανεμημένες δυνάμεις, όπως για παράδειγμα τις δυνάμεις βαρύτητας ένεκα της κατανεμημένης μάζας της ράβδου.

10. Μελέτη της ταλάντωσης χορδής με χρήση της Θεωρίας Μεταβολών

Θεωρούμε ευθύγραμμη ομογενή ελαστική χορδή μήκους l, που βρίσκεται πάνω στον άξονα x, με τα άκρα της στις θέσεις $x=0,\ x=l$. Η χορδή ταλαντεύεται έτσι που η απομάκρυνση να είναι κατά μήκος του άξονα y που είναι κάθετος στον άξονα x.

Οι απομακρύνσεις $y=y(x,t)$ από τη θέση ισορροπίας είναι αρκούντως μικρές και t είναι ο χρόνος ο οποίος έχει τιμές στο διάστημα που μας ενδιαφέρει, έστω από 0 έως t_1, που είναι αυθαίρετο. Η απομάκρυνση $y(x,t)$ είναι αρκούντως μικρή άρα είναι πεπερασμένη. Δίνεται ότι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους της χορδής και η κινητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους, είναι αντιστοίχως,

$$T_1=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2,\quad V_1=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}F_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

όπου μ η μάζα ανά μονάδα μήκους της χορδής, $\mu(x)=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$, και $F_{\mathrm{t}}=\text{σταθ.}$ η μηχανική τάση με την οποία η χορδή είναι τεντωμένη.

Ανάλογα με την επιλογή της συνάρτησης $\delta y(x,t)$ στο σύνορο μπορεί να λυθούν διάφορα προβλήματα της χορδής, με διαφορετικές αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Α) Θα αντιμετωπιστεί το πρόβλημα στη γενική περίπτωση συνοριακών συνθηκών και μετά θα εξεταστεί η περίπτωση των φυσικών συνοριακών συνθηκών, ελεύθερο σύνορο.

Β) Στη συνέχεια θα εξεταστεί το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet και με συνθήκες Neumann.

Γ) Θα πούμε πολύ λίγα λόγια για την περίπτωση που η χορδή έχει άπειρο μήκος.

Λύση

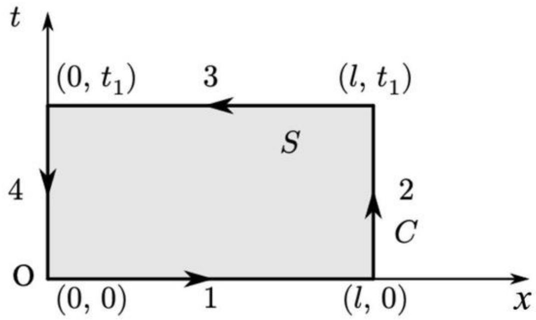
Α) Πρόκειται για δισδιάστατο μαθηματικό πρόβλημα, οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η θέση και ο χρόνος (x,t). Το πρόβλημα από πλευράς συντεταγμένων θέσης είναι μονοδιάστατο. Η ολική δυναμική ενέργεια της χορδής είναι $V=\int_0^l \frac{1}{2}F_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$ και η ολική κινητική είναι $T=\int_0^l \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x$. Από αυτές βρίσκουμε τη λαγκρανζιανή του συστήματος

$$L=T-V=\int_0^l\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}F_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,.$$

Σχηματίζουμε το ολοκλήρωμα δράσης (συναρτησιακό), $I=\int_0^{t_1} L\mathrm{d}t$ που τελικώς γίνεται

$$I=\int_0^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}F_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_S\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}F_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}S\,.$$

Το δισδιάστατο χωρίο ολοκλήρωσης είναι το ορθογώνιο στο επίπεδο (x,t) που ορίζεται από τα τέσσερα σημεία που δηλώνονται στην αγκύλη, $S=\left[(0,0),(l,0),(l,t_1),(0,t_1)\right]$ και φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3 *Ο χώρος θέσης-χρόνου στο πρόβλημα της χορδής.*

Θέτουμε $F = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}F_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$. Υποθέτουμε ότι ανεξάρτητα από την επιλογή των συνθηκών στο σύνορο πρέπει να ισχύει $\delta I = 0$. Με τη διαδικασία που αναφέραμε στα προηγούμενα, δηλαδή επιλέγοντας κατάλληλα την $\delta y(x,t)$, οδηγούμαστε στην εξίσωση Euler-Lagrange. Όμως πρέπει και ο όρος (ολοκλήρωμα) στο «μαθηματικό σύνορο» να είναι μηδέν. Δηλαδή έχουμε τις σχέσεις:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial y_t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \;\; y_t = \frac{\partial y}{\partial t}, y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{σύνορο} \int_c \left(\frac{\partial F}{\partial y_t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial F}{\partial y_x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\delta y \mathrm{d}s = 0.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι πάνω στον δρόμο c που είναι το σύνορο του ορθογώνιου S. Το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος του c είναι $\mathrm{d}s$. Βλέπε το παραπάνω σχήμα. Η εξίσωση Euler-Lagrange οδηγεί στη μερική διαφορική εξίσωση της ταλαντευόμενης χορδής, κυματική εξίσωση χορδής,

$$\mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F_{\mathrm{t}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Αν $\mu(x) = \mu = \text{σταθ.}$, καταλήγουμε στην πιο απλή κυματική εξίσωση της χορδής, δηλαδή στην

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \;\; w = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{t}}}{\mu}}$ = σταθ. = ταχύτητα διάδοσης όλων των κυμάτων στη χορδή, ανεξαρτήτως συχνότητας. Ας εξετάσουμε την περίπτωση φυσιολογικών συνοριακών συνθηκών. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι παντού στο σύνορο το $\delta y\big|_c$ είναι αυθαίρετο, τότε η χρήση του θεμελιώδους λήμματος της θεωρίας μεταβολών μάς οδηγεί στο ότι πρέπει στο σύνορο να ισχύει $\frac{\partial F}{\partial y_t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial F}{\partial y_x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 0.$ Από αυτήν βρίσκουμε για το σύνορο τη σχέση,

$$\mu\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_t\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Το σύνορο αποτελείται από τέσσερις ευθείες 1, 2, 3, 4 , οπότε:

α) κατά μήκος της ευθείας 1, δηλαδή μεταξύ των σημείων $(0,0),(l,0)$ ισχύουν $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}t=0$. Η σχέση συνόρου οδηγεί στη σχέση $\dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0$. Αυτή η σχέση ισχύει την αρχική στιγμή $t=0$, για όλα τα σημεία της χορδής. Δηλαδή η αρχική ταχύτητα του κάθε σημείου της χορδής είναι μηδέν. Όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η θέση και ο χρόνος, συνηθίζεται να ξεχωρίζουμε τις «συνοριακές» συνθήκες σε αυτές που αντιστοιχούν στον χρόνο που λέγονται αρχικές (μπορεί να είναι και τελικές) συνθήκες και σε αυτές που αντιστοιχούν στη θέση (συνήθους χώρου) οι οποίες λέγονται συνοριακές συνθήκες. Η παραπάνω φυσιολογική συνθήκη είναι αρχική συνθήκη.

β) Κατά μήκος της ευθείας 2 έχουμε $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}x=0$, επομένως η σχέση συνόρου δίνει για το άκρο της χορδής στη θέση l, για το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει,

$$0\le t\le t_1,\ \frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=0.$$

Με τη συνηθισμένη ορολογία που αναφέραμε προηγουμένως, αυτή είναι συνοριακή συνθήκη (συνθήκη που αναφέρεται στο σύνορο του θεσικού χώρου, δηλαδή του συνήθους χώρου) αφού ισχύει κάθε χρονική στιγμή για το άκρο με $x=l$.

γ) Κατά μήκος της ευθείας 3 ισχύουν $\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}t=0$, οπότε ανάλογα με την περίπτωση (α), έχουμε τη στιγμή $t=t_1$ για κάθε σημείο της χορδής $\dfrac{\partial y(x,t_1)}{\partial t}=0$. Δηλαδή η «τελική» ταχύτητα κάθε σημείου της χορδής είναι μηδέν.

δ) Η τελευταία ευθεία είναι η 4. Ανάλογα με την περίπτωση (β), έχουμε $\mathrm{d}s=-\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}x=0$ και η σχέση συνόρου δίνει $\dfrac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0$. Αυτή είναι συνοριακή συνθήκη με τη συνήθη έννοια, για την “αρχή» της χορδής και ισχύει κάθε χρονική στιγμή στο διάστημα χρόνου που μας ενδιαφέρει.

Οι συνθήκες στις οποίες καταλήξαμε είναι οι φυσιολογικές συνοριακές συνθήκες γιατί προέκυψαν από τη θεωρία μεταβολών, δεν μπήκαν εξ αρχής από εμάς.

Η προηγούμενη ανάλυση, οδηγεί στην περίπτωση χορδής που τα δυο άκρα της είναι δέσμια να κινούνται πάνω σε ευθείες κάθετες στη χορδή. Στα δυο άκρα, κάθε χρονική στιγμή, η εφαπτόμενη ευθεία στη χορδή είναι παράλληλη στον άξονα x. Αυτές οι συνθήκες σχετίζονται με το γεγονός ότι στα δυο «ελεύθερα» άκρα δε μπορεί να ασκηθούν δυνάμεις κάθετες στη χορδή. Τα άκρα της χορδής καταλήγουν σε κρίκους που κινούνται (χωρίς τριβή) κατά μήκος ράβδων κάθετων στη χορδή. Αν στη χορδή διαδίδονται στάσιμα κύματα, τότε στα άκρα έχουμε κοιλίες.

Β) Υποθέτουμε ότι παντού στο μαθηματικό σύνορο, δηλαδή κατά τη διαδρομή c, $\delta y\big|_c=0$. Δηλαδή το ολοκλήρωμα στο σύνορο είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι παντού στο σύνορο η απομάκρυνση είναι καθορισμένη. Προφανώς, ισχύει η εξίσωση Lagrange που οδηγεί στη γνωστή κυματική εξίσωση για τη χορδή. Στη συνέχεια παρατηρούμε τα εξής: Κατά τη διαδρομή 1 έχουμε $y(x,0)=f_0(x)$, η δυνατή μεταβολή είναι $\delta y(x,0)=0$. Αυτό σημαίνει ότι την αρχική χρονική στιγμή το σχήμα της χορδής είναι δεδομένο, αρχική συνθήκη. Κατά τη διαδρομή 2 έχουμε ότι $y(l,t)=y_l(t)$, δηλαδή το άκρο με $x=l$ κινείται κατά καθορισμένο τρόπο (διέγερση στο άκρο), μπορεί να είναι και ακίνητο, η δυνατή μεταβολή γράφεται ως $\delta y(l,t)=0$. Για τη διαδρομή 3 ισχύει το ανάλογο της 1, δηλαδή $y(x,t_1)=f_1(x)$, η δυνατή μεταβολή είναι $\delta y(x,t_1)=0$. Επομένως την τελική στιγμή, t_1, το σχήμα της χορδής είναι δεδομένο, τελική συνθήκη. Για την διαδρομή 4, ισχύει το ανάλογο της 2, δηλαδή $y(0,t)=y_0(t)$ και $\delta y(0,t)=0$. Αυτό σημαίνει ότι το άκρο με $x=0$ κινείται με καθορισμένο τρόπο (διέγερση άκρου), μπορεί να είναι και ακίνητο. Αυτό είναι πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet (Dirichlet boundary value problem).

Στη συνέχεια, ξεκινούμε από το ολοκλήρωμα στο σύνορο το οποίο για τη χορδή είναι

$$\int_c \left(\mu \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_t \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right) \delta y \mathrm{d}s = 0 .$$

Θεωρούμε ότι κατά μήκος των διαδρομών 2 και 4 το $\delta y\big|_c$ είναι αυθαίρετο ενώ στις άλλες διαδρομές 1, 3 είναι μηδέν, $\delta y\big|_c = 0$, αυτά οδηγούν στο ότι $y(x,0) = f_0(x)$, $y(x,t_1) = f_1(x)$ και $\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial y(l,t)}{\partial x} = 0$. Δηλαδή το αρχικό και τελικό σχήμα της χορδής είναι καθορισμένα και η κλίση στο αρχικό και τελικό σημείο είναι μηδέν. Αυτό είναι πρόβλημα συνοριακών τιμών Neuman.

Αυτό που δε φαίνεται να προκύπτει με την παραπάνω θεωρία μεταβολών που χρησιμοποιήσαμε, είναι ότι μπορεί κάποιος να δώσει την αρχική θέση της χορδής $y(x,0) = f_0(x)$ και τις αρχικές ταχύτητες $g_0(x) = \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}$ και μαζί με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα δυο άκρα να προσδιορίσει πλήρως την κίνηση της χορδής. Αυτές είναι συνθήκες τύπου Cauchy.

Γενικώς μπορεί κάποιος να εξετάσει συνδυασμούς των παραπάνω συνοριακών συνθηκών.

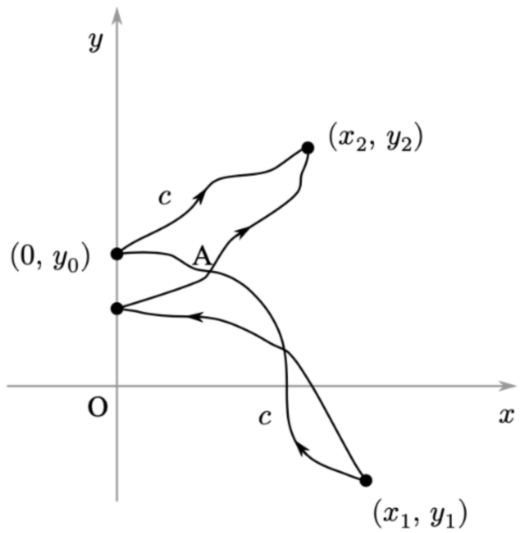
Χωρίς μαθηματική αυστηρότητα αναφέρουμε ότι η περίπτωση που το ένα ή και τα δυο άκρα της χορδής βρίσκονται στο άπειρο, μπορεί να αντιμετωπιστεί ως εξής: Μπορούμε να σκεφτούμε ότι για κάθε πεπερασμένη χρονική στιγμή η «παραμόρφωση» της χορδής εκτείνεται σε πεπερασμένο διάστημα, είναι εντοπισμένη. Αυτό σημαίνει ότι και οι αρχικές ή/και τελικές τιμές για τη χορδή, $y(x,t)$, και οι αντίστοιχες ταχύτητες $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, αναφέρονται σε πεπερασμένο διάστημα της χορδής, ενώ έξω από αυτό το διάστημα είναι μηδέν. Στη συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε δεδομένο πεπερασμένο χρόνο t και για αρκούντως μεγάλο x, τα $y(x,t), \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ τείνουν στο μηδέν ή είναι μηδέν. Αυτό δικαιολογείται διότι για κάθε πεπερασμένο t, η απομάκρυνση της χορδής και οι ταχύτητες των σημείων της, δεν έχουν προλάβει να αλλάξουν από την αρχική τους τιμή που είναι μηδέν, η διάδοση δεν είναι ακαριαία, δηλαδή έχουμε και πάλι εντοπισμένη διαταραχή. Παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες στο/στα άκρα της χορδής στο άπειρο, οδηγούν σε μηδενισμό των αντίστοιχων τμημάτων του ολοκληρώματος συνόρου, όπως πρέπει. Στην πράξη, αυτά σημαίνουν ότι η χορδή έχει αρκούντως μεγάλο μήκος έτσι ώστε για το χρονικό διάστημα περιγραφής που μας ενδιαφέρει, η «διαταραχή» να μην έχει φτάσει στο πολύ απομακρυσμένο άκρο, οπότε δεν έχουμε εκεί «ανάκλαση».

11. Μελέτη της ανάκλασης του φωτός με χρήση της Θεωρίας Μεταβολών

Υποθέτουμε ότι η διάδοση γίνεται στο επίπεδο xy όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.4. Το φως ξεκινά από το σημείο 1 (x_1, y_1), στο σημείο Α ($0, y_0$) συναντά το επίπεδο κάτοπτρο που είναι κατά μήκος του άξονα y , κάθετο στον άξονα x , ανακλάται και συνεχίζει την πορεία του μέχρι το σημείο 2(x_2, y_2) .

Λύση

Εφαρμόζουμε την Αρχή Ήρωνος-Fermat, δηλαδή η διαδρομή πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο χρόνος που χρειάζεται για να τη διατρέξει το φως να είναι ελάχιστος σε σχέση με πολύ γειτονικούς δρόμους. Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή, αυτό ισοδυναμεί με το ότι η διαδρομή πρέπει να έχει το ελάχιστο μήκος.



Σχήμα 3.4 *Η ανάκλαση του φωτός στη θεωρία μεταβολών.*

Όπως έχουμε πει και στα προηγούμενα το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με οποιονδήποτε τρόπο που μας οδηγεί στο ελάχιστο του συνολικού δρόμου. Επομένως μπορούμε να ακολουθήσουμε τον απλό τρόπο που είναι γνωστός και από τη Γενική Φυσική και από μαθήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης. Δηλαδή, μπορεί να θεωρήσουμε ως σταθερό το σημείο A, να δείξουμε ή να πάρουμε ως δεδομένο ότι η διαδρομή 1,A είναι ευθεία και ότι η διαδρομή A,2 είναι επίσης ευθεία. Το πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε στο τέλος είναι: ποιο είναι το σημείο $(0, y_0)$ όπου γίνεται η ανάκλαση, ώστε το άθροισμα των δυο ευθύγραμμων διαδρομών να είναι ελάχιστο. Αυτό που εννοούμε είναι ότι αν το σημείο ανάκλασης μετακινείται λίγο πάνω κάτω, οι γειτονικές θέσεις του οδηγούν σε μεγαλύτερες διαδρομές από την πραγματική. Έχει σημασία ότι κατά τις μικρές διαδρομές το A κινείται πάνω σε ευθεία (στην πραγματικότητα σε επίπεδο).

Για λόγους διδακτικούς, δεν θα ακολουθήσουμε αυτή την απλή διαδικασία αλλά την πιο πολύπλοκη, που ακολουθεί. Το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της διαδρομής του φωτός είναι

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y_x^2}\,|\mathrm{d}x| = F(y_x)|\mathrm{d}x| > 0,\ \ y_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, F(y_x) = \sqrt{1+y_x^2}\ .$$

$$Z = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}s \ \text{ και } \ \delta Z = \delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = 0\,.$$

Το σημείο $(0, y_0)$ θεωρούμενο ως σημείο πάνω στη διαδρομή 1,A το γράφουμε ως $(0_1, y_{01})$. Το ίδιο σημείο πάνω στη διαδρομή 2,A το γράφουμε ως $(0_2, y_{02})$. Αυτό όπως θα δούμε είναι χρήσιμο διότι υπάρχει ασυνέχεια στην παράγωγο y_x, σε αυτό το σημείο. Έχουμε

$$\delta Z = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{0_1} \delta F \mathrm{d}x + \int_{0_2}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = 0\,.$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y\right) - \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_x}\,.$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση και αφού λάβουμε υπόψη ότι $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ καθώς και ότι $\delta y(0_1) = \delta y(0_2) = \delta y(0) =$ αυθαίρετο, βρίσκουμε:

$$\delta Z=-\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y(0_1)+\int_{x_1}^{0_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_x}\mathrm{d}x-\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y(0_2)-\int_{0_1}^{x_2}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_x}\mathrm{d}x=0 .$$

Τα $\delta y=\delta y(x)$ είναι για την κάθε διαδρομή αυθαίρετα οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις $\left.\frac{\partial F}{\partial y_x}\right|_{0_1}=-\left.\frac{\partial F}{\partial y_x}\right|_{0_2}$ και $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_x}=0$ για τη διαδρομή 1,A και επίσης $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_x}=0$ για τη διαδρομή A,2.

Εύκολα προκύπτει ότι οι διαφορικές εξισώσεις οδηγούν σε ευθύγραμμες διαδρομές μεταξύ των σημείων (x_1,y_1) $(0,y_0)$ και των $(0,y_0)$ (x_2,y_2) αντιστοίχως. Μπορείτε να κάνετε τους υπολογισμούς μόνοι σας. Εδώ θα εξετάσουμε τη συνθήκη στο σημείο ($(0,y_0)$.

$\frac{\partial F}{\partial y_x}=\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}}$. Στη θέση $(0,y_0)$ ή καλύτερα στις θέσεις $(0,y_{01})$ $(0,y_{02})$ πάνω στις δυο ακτίνες που συναντιούνται στο κάτοπτρο (σημείο προσπτώσεως), έχουμε ότι $\sin\theta_1=\frac{y_x(0_1)}{\sqrt{1+y_x^2(0_1)}}$, όπου θ_1 είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας 1,A και του άξονα x και $\sin\theta_2=\frac{y_x(0_2)}{\sqrt{1+y_x^2(0_2)}}$, όπου θ_2 είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας A,2 και του άξονα x . Δηλαδή βρίσκουμε ότι $\sin\theta_1=-\sin\theta_2$, που ουσιαστικά σημαίνει ότι η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία ανακλάσεως. Τα πρόσημα σημαίνουν ότι οι δυο γωνίες είναι θετικές ή αρνητικές αν βρίσκονται πάνω ή κάτω από τον άξονα x . Οι γωνίες προσπτώσεως και ανακλάσεως είναι $|\theta_1|$ και $|\theta_2|$.

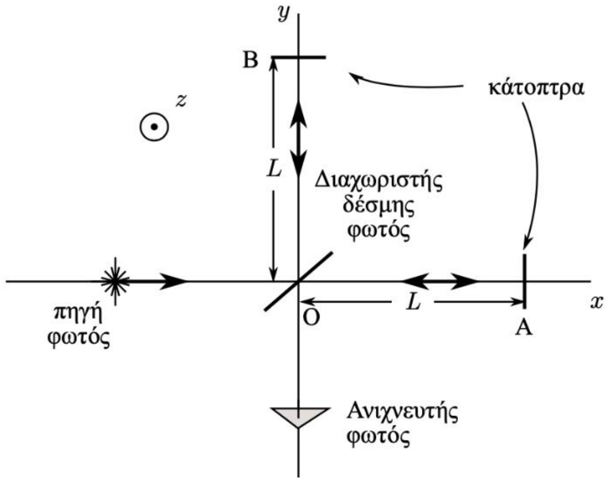
12. Εισαγωγή στα βαρυτικά κύματα και την ανίχνευσή τους με συμβολομετρία

Το θέμα της ύπαρξης και της ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων έχει απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα από τότε που διατυπώθηκε η Γενική Σχετικότητα (1916). Ο πρώτος που ασχολήθηκε με πειράματα άμεσης ανίχνευσής τους ήταν ο Joseph Weber στη δεκαετία των 1960. Η μέθοδος που ακολούθησε στηριζόταν στη δύναμη που ασκεί το βαρυτικό κύμα σε έναν κύλινδρο με μεγάλη μάζα. Ασκούνται δυνάμεις συμπίεσης και εφελκυσμού οπότε αναμένεται να προκαλούνται ταλαντώσεις στον κύλινδρο. Αυτό θα οδηγούσε σε συντονισμούς και η μέθοδος λέγεται μέθοδος με ανιχνευτές συντονισμού.

Ο Weber και οι συνεργάτες του έφτιαξαν εξαιρετικά ευαίσθητες συσκευές ανίχνευσης πάρα πολύ μικρών ταλαντώσεων, αλλά δεν μπόρεσαν να ανιχνεύσουν βαρυτικά κύματα. Από την ίδια περίοδο (μέσα των 1960) ξεκίνησε η ιδέα να γίνει και πάλι άμεση ανίχνευση με χρήση συμβολομετρίας με λέιζερ. Αυτό οδήγησε στον σχεδιασμό και κατασκευή τέτοιων ανιχνευτών στα 2000.

Η σημασία της ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων είναι σημαντική όχι μόνο για την επιβεβαίωση της Γενικής Σχετικότητας αλλά και της διάκρισης μεταξύ διαφόρων επεκτάσεων της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και την καλύτερη κατανόηση του σύμπαντος. Για πρώτη φορά το 2016 δυο συστήματα ανιχνευτών αυτού του τύπου, σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους στις ΗΠΑ, ανίχνευσαν για πρώτη φορά άμεσα βαρυτικά κύματα. Πρόκειται για το πρόγραμμα, συνεργασία LIGO (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory). Έμμεσα υπήρχε από πριν ανίχνευση στηριζόμενη στην απώλεια ενέργειας ένεκα παραγωγής βαρυτικών κυμάτων από διπλούς αστέρες. Θα ασχοληθούμε μόνο με τη συμβολομετρική μέθοδο ανίχνευσης.

Στο Σχήμα 3.5 φαίνεται το σχηματικό διάγραμμα της διάταξης ενός από τους δυο ανιχνευτές. Έχει τη μορφή συμβολομέτρου Michelson.



Σχήμα 3.5 *Διάγραμμα της διάταξης ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων.*

Στην προσέγγιση ασθενών βαρυτικών πεδίων, για τα πεδία των βαρυτικών κυμάτων ισχύει εξίσωση ελεύθερου κύματος παρόμοια με τη γνωστή εξίσωση κυμάτων. Σε αυτή την περίπτωση ο μετρικός τανυστής γράφεται $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, όπου $\eta_{\mu\nu}$ είναι ο γνωστός τανυστής του Minkowski.

Ισχύουν $h_{\mu\nu} << 1$. Μπορούμε να πούμε ότι σε ένα «επίπεδο» υπόβαθρο, $\eta_{\mu\nu}$, έχουμε μια μικρή διαταραχή, $h_{\mu\nu}$, που οφείλεται στα βαρυτικά κύματα και αυτή είναι που μας ενδιαφέρει. Δηλαδή έχουμε μια μικρή μεταβολή στον μετρικό τανυστή και ισχύει:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0 \ .$$

Αυτή είναι η συνήθης εξίσωση κυμάτων με ταχύτητα αυτήν της διάδοσης του φωτός στο κενό, c. Στην κατάλληλη αναπαράσταση, τα κύματα είναι εγκάρσια, κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης την οποία εδώ θα θεωρούμε πως είναι η $+z$ (θετική κατεύθυνση), η κάθετη στο επίπεδο του ανιχνευτή που φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης κυμάτων για μια συχνότητα Ω και διάδοση κατά μήκος του άξονα z, μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δυο ανεξάρτητων λύσεων, που σε μιγαδική μορφή είναι $\alpha_{11} e^{+}_{\mu\nu} \exp \mathrm{i}(kz - \Omega t)$ και $\alpha_{12} e^{\times}_{\mu\nu} \exp \mathrm{i}(kz - \Omega t)$, δηλαδή $h_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\left[\left(\alpha_{11} \mathrm{e}^{+}_{\mu\nu} + \alpha_{12} \mathrm{e}^{\times}_{\mu\nu} \right) \exp \mathrm{i}(kz - \Omega t) \right]$. Ισχύει η γνωστή σχέση $k = \dfrac{\Omega}{c}$. Οι δυο λύσεις αντιστοιχούν στην πόλωση + (plus, συν) και στην πόλωση × (cross, διαγώνια) αντιστοίχως. Τα $e^{+}_{\mu\nu}$ και $e^{\times}_{\mu\nu}$ είναι οι τελεστές επίπεδης πόλωσης των βαρυτικών κυμάτων που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση z. Υπάρχουν και κυκλικά πολωμένα κύματα (ανάλογα με αυτά που ισχύουν για τον Ηλεκτρομαγνητισμό) που είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών των δυο επίπεδων κυμάτων. Δεν θα αναφερθούμε σε αυτά τα κύματα. Ισχύουν οι σχέσεις

$$e^{+}_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad e^{\times}_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Έχουμε $\alpha_{11} = -\alpha_{22} = h_{xx} = -h_{yy}$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = h_{xy} = h_{yx}$ που γενικώς μπορεί να είναι και μιγαδικά. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$h_{\mu\nu}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&\alpha_{11}&\alpha_{12}&0\\0&\alpha_{12}&-\alpha_{11}&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}\exp\,\mathrm{i}\left(kz-\Omega t\right)\right]$$

Το κύμα με πόλωση + είναι ανάλογο του $\alpha_{xx}=\alpha_{11}$. Κύμα με πόλωση $\times$ είναι ανάλογο του $\alpha_{xy}=\alpha_{12}(=\alpha_{21})$. Η πιο γενική μορφή κύματος (διαταραχής) είναι υπέρθεση μονοχρωματικών κυμάτων, οπότε ισχύει

$$h_{\mu\nu}(z,t)=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&f_{+}(z-ct)&f_{\times}(z-ct)&0\\0&f_{\times}(z-ct)&-f_{+}(z-ct)&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

Τα βαρυτικά κύματα δεν μπορούν να ανιχνευτούν τοπικά, διότι σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, για μικρές περιοχές τα φαινόμενα της βαρύτητας μπορεί να εξαλειφθούν. Έτσι δεν μπορεί να ανιχνευτούν το βαρυτικά κύματα με χρήση ενός μόνο δοκιμαστικού σωματίου. Μπορεί να ανιχνευτούν από την επίδρασή τους πάνω σε δυο ή περισσότερα δοκιμαστικά σωμάτια που βρίσκονται σε διαφορετικά (απομακρυσμένα μεταξύ τους) σημεία στον χώρο. Θα ασχοληθούμε με το θέμα αυτό, με χρήση συμβολομετρίας και δυο δοκιμαστικά σωμάτια σε ελεύθερη πτώση μέσα στο πεδίο του βαρυτικού κύματος.

Η αρχή της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Η πηγή φωτός είναι ένα λέηζερ. Στη θέση O υπάρχει ημιδιαφανές πλακίδιο, διαχωριστής δέσμης φωτός. Η δέσμη φωτός από το λέηζερ χωρίζεται σε δυο δέσμες, μια κατά τον άξονα x και μια κατά τον y. Σε ίσες αποστάσεις από το O υπάρχουν κάτοπτρα, έχουμε OA=OB= L. Οι δέσμες ανακλώνται στα κάτοπτρα και επιστρέφουν στο O και μετά από διέλευση και ανάκλαση στον διαχωριστή φτάνουν στον ανιχνευτή φωτός. Η ανίχνευση στηρίζεται στο γεγονός ότι η διέλευση βαρυτικού κύματος από τη διάταξη μεταβάλει τις σχετικές φάσεις των συμβαλλόντων κυμάτων φωτός στον ανιχνευτή. Μια πρώτη σκέψη είναι ότι, η βαρύτητα επηρεάζει τον χώρο αλλά και το μήκος κύματος του φωτός κατά τον ίδιο τρόπο, επομένως είναι αδύνατο να ανιχνευτούν βαρυτικά κύματα με συμβολομετρία. Είναι σαν να λέμε ότι το μήκος που θέλουμε να μετρήσουμε και το μέτρο που θα χρησιμοποιήσουμε μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο από τη βαρύτητα οπότε η μέτρηση δεν θα διαφέρει από αυτήν όταν δεν υπάρχει βαρύτητα. Η παρακάτω ανάλυση θα δείξει ότι η μέθοδος της συμβολομετρίας οδηγεί σε ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων.

Έχουμε για τις συνιστώσες του τανυστή του βαρυτικού πεδίου ακτινοβολίας:

$$h_{11}=f_{+}(z-ct),\;\; h_{12}=f_{\times}(z-ct),\;\; h_{21}=h_{12}=f_{\times}(z-ct),\;\; h_{22}=-h_{11}=-f_{+}(z-ct)$$

Οι άλλες συνιστώσες του τανυστή είναι μηδέν. Για αρμονικό κύμα έχουμε

$$\begin{aligned}&h_{11}=\mathrm{Re}\left[\alpha_{11}\exp\,\mathrm{i}(kz-\Omega t)\right],\;\; h_{12}=\mathrm{Re}\left[\alpha_{12}\exp\,\mathrm{i}(kz-\Omega t)\right]\\&h_{21}=h_{12}=\mathrm{Re}\left[\alpha_{12}\exp\,\mathrm{i}(kz-\Omega t)\right],\;\; h_{22}=-h_{11}=-\mathrm{Re}\left[\alpha_{11}\exp\,\mathrm{i}(kz-\Omega t)\right]\end{aligned}$$

Οι άλλες συνιστώσες είναι μηδέν. Τα $h_{11},\ h_{22}$ σχετίζονται με βαρυτικά κύματα +, ενώ τα $h_{12},\ h_{21}$ με κύματα $\times$.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την παραμόρφωση που προκαλεί η διέλευση βαρυτικού κύματος σε μια κυκλική διάταξη δοκιμαστικών σωματίων που βρίσκονται στο επίπεδο x, y, με το z δεδομένο. Τα σωμάτια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, είναι αρχικώς ακίνητα σε έναν χώρο Minkowski. Το βαρυτικό κύμα επηρεάζει πολύ λίγο τη μετρική του χώρου, στην επίπεδη μετρική Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, προστίθεται το πεδίο ακτινοβολίας $h_{\mu\nu}$. Θυμίζουμε ότι έχουμε για τον πολύ λίγο διαταραγμένο χώρο Minkowski, τη σχέση $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Τώρα υποθέτουμε πως έχουμε αρμονικό κύμα τύπου +, $h_{xx} = h\,cos(\,kz - \Omega t)$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα βρίσκομε

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+h_{xx}(\mathrm{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-h_{xx}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Άρα $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1 - h_{xx}(t)\right)\mathrm{d}x^2 - \left(1 + h_{xx}(t)\right)\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$. Η φυσική (natural, φυσιολογική) χωρική απόσταση δυο υλικών σημείων μια χρονική στιγμή t, όταν έχουν συντεταγμένες (0,0,0) και $(0 + x, 0 + y, 0)$ $(z = \text{σταθ.})$ είναι

$$l^2 = \left(1 - h_{xx}(t)\right)x^2 + \left(1 + h_{xx}(t)\right)y^2 .$$

Επομένως $l^2 = \left(1 - h\cos(kz - \Omega t)\right)x^2 + \left(1 + h\cos(kz - \Omega t)\right)y^2$. Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στη φυσική απόσταση κατά τον άξονα x και ο δεύτερος κατά τον y.

Στο Σχ. 3.6 με ανοικτά κυκλάκια φαίνεται η αρχική κυκλική διάταξη των δοκιμαστικών σωματίων.

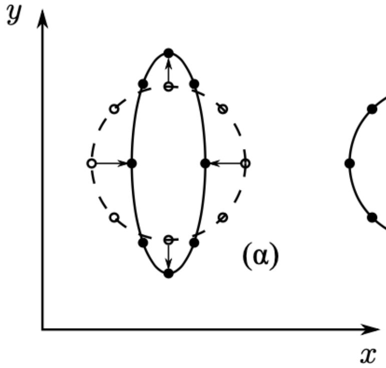
Όταν $(kz - \Omega t) = 2n\pi$, τότε $l^2 = \left(1 - h(t)\right)x^2 + \left(1 + h(t)\right)y^2 = x^2 + y^2 + h(y^2 - x^2)$, οπότε έχουμε ελλειπτική διάταξη όπως στο Σχήμα 3.6α.

Όταν $(kz - \Omega t) = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ τότε $l^2 = x^2 + y^2$, οπότε έχουμε κυκλική διάταξη, Σχήμα 3.6β.

Όταν $(kz - \Omega t) = (2n + 1)\pi$ τότε έχουμε τη διάταξη, έλλειψη, του Σχ. 3.6γ.

Όταν $(kz - \Omega t) = \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi$ έχουμε και πάλι κυκλική διάταξη, Σχ. 3.6δ, κοκ.

Ανάλογα ισχύουν για κύμα με πόλωση $\times$. Σε αυτή την περίπτωση οι σχηματισμοί, ως προς τους ίδιους άξονες x, y, θα έχουν περιστραφεί κατά 45^{o} αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού.



Σχήμα 3.6 *Επίδραση βαρυτικού κύματος σε δοκιμαστικά σωμάτια με κυκλική διάταξη.*

Συνεχίζουμε με την αρχή λειτουργίας της συμβολομετρικής μεθόδου ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων. Για ευκολία θεωρούμε ότι το βαρυτικό κύμα διαδίδεται κάθετα στο επίπεδο των δυο βραχιόνων που επίσης είναι κάθετοι μεταξύ τους, ΟΑ και ΟΒ, Σχ. 3.5. Το κύμα είναι τύπου +. Το σύστημα αξόνων είναι το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων x, y, z. Τα κάτοπτρα και ο διαχωριστής φωτός είναι τρεις δοκιμαστικές μάζες (ελεύθερες, δηλαδή σε ελεύθερη πτώση στο πεδίο βαρύτητας του κύματος. Αυτό επιτυγχάνεται διότι οι μάζες αυτές είναι εξαρτημένες από νήματα και αποτελούν τρία εκκρεμή που οι περίοδοί τους είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από την περίοδο και τη διάρκεια του βαρυτικού κύματος. Επίσης πολύ μεγαλύτερες από τη διάρκεια της μέτρησης. Η ελεύθερη πτώση που μας ενδιαφέρει νοείται στο επίπεδο xy. Το βαρυτικό πεδίο περιγράφεται σε σύστημα συντεταγμένων που είναι το λεγόμενο Transverse Traceless Gauge (Εγκάρσιας Βαθμίδας Μηδενικού Ίχνους). Ισχύει πως το βαρυτικό κύμα δεν επηρεάζει τη διαμήκη συνιστώσα, z. Η μετρική στο επίπεδο x, y είναι $ds^2 = c^2dt^2 - \left(1+h_+(t)\right)dx^2 - \left(1-h_+(t)\right)dy^2$. Χωρίς βαρύτητα $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2$, δηλαδή έχουμε μετρική Minkowski. Οι συντεταγμένες x, y ενός σημείου ή ενός «ελεύθερου» δοκιμαστικού σωματίου, είναι σταθερές ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή μη βαρυτικού κύματος. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η φυσική απόσταση μεταξύ του σημείου (0,0) και του σημείου $(\mathrm{d}x, 0)$ πάνω στον άξονα x, είναι $\mathrm{d}l_x^2 = (1+h_+)\mathrm{d}x^2$.

Για τον άξονα y έχουμε $\mathrm{d}l_y^2 = (1-h_+)\mathrm{d}y^2$. Δηλαδή, η φυσική απόσταση μεταξύ δυο δοκιμαστικών σωματίων σε ελεύθερη πτώση, μεταβάλλεται όταν διέρχεται βαρυτικό κύμα. Για κύμα τύπου + οι μεταβολές κατά μήκος των αξόνων είναι αντίθετες, όταν στην διεύθυνση x είναι μεγέθυνση, στην y είναι σμίκρυνση και αντιθέτως. Ας δούμε τώρα τι γίνεται με το φως. Υποθέτουμε ότι από το Ο ξεκινά παλμός φωτός κινούμενος κατά μήκος του x. Για το φως ισχύει $\mathrm{d}s^2 = 0$, άρα $c\mathrm{d}t^2 - (1+h_+)\mathrm{d}x^2 = 0$. Δηλαδή $\mathrm{d}t^2 = \frac{1}{c^2}(1+h_+)\mathrm{d}x^2$. Για τον άξονα y έχουμε $c\mathrm{d}t^2 - (1-h_+)\mathrm{d}y^2 = 0$ και $\mathrm{d}t^2 = \frac{1}{c^2}(1-h_+)\mathrm{d}y^2$. Επομένως, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η φυσική ταχύτητα του φωτός $\frac{\mathrm{d}l_x}{\mathrm{d}t}$ κατά μήκος του x και $\frac{\mathrm{d}l_y}{\mathrm{d}t}$ κατά μήκος του y, είναι η γνωστή c, δηλαδή δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη του βαρυτικού κύματος. Ας φανταστούμε στη συνέχεια ότι από το Ο στέλνονται ταυτόχρονα δυο παλμοί φωτός προς τα κάτοπτρα στις διευθύνσεις x και y. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε πότε γύρισε στο Ο παλμός που ξεκίνησε από το Ο και ανακλάστηκε στο κάτοπτρο Α. Υποθέτουμε ότι η τιμή του $h_+(t)$ δεν μεταβάλλεται σημαντικά από την τιμή που είχε τη στιγμή t_0 που ξεκίνησαν οι παλμοί μέχρι την επιστροφή τους στο Ο, $h_+(t) \approx h_+(t_0)$. Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος του βαρυτικού κύματος είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από τους χρόνους διαδρομής των παλμών στους δυο βραχίονες της διάταξης. Έστω t_1 η στιγμή που ο παλμός φτάνει στο Α, από τα προηγούμενα έχουμε για τον βραχίονα x, $t_1 - t_0 = \int_0^L \sqrt{1+h_+(t_0)}\mathrm{d}x$. Αφού $h_+ \ll 1$ έχουμε $\sqrt{1+h_+(t_0)} \approx 1 + \frac{1}{2}h_+(t_0)$, μετά την ολοκλήρωση βρίσκουμε $t_1 - t_0 = L\left(1+\frac{1}{2}h_+(t_0)\right)$. Για τον βραχίονα y βρίσκουμε $t_2 - t_0 = L\left(1-\frac{1}{2}h_+(t_0)\right)$, t_2 είναι ο χρόνος διαδρομής από τη θέση Ο στη θέση του κατόπτρου Β. Για τις αντίστροφες διαδρομές (τότε ισχύουν $\mathrm{d}x < 0,\ \mathrm{d}y < 0$) έχουμε αντιστοίχως: $t_{1\mathrm{O}} - t_1 = -\int_L^0 \sqrt{1+h_+(t_0)}\mathrm{d}x \approx -L\left(1+\frac{1}{2}h_+(t_0)\right)$, $t_{2\mathrm{O}} - t_2 = -\int_L^0 \sqrt{1-h_+(t_0)}\mathrm{d}x \approx -L\left(1-\frac{1}{2}h_+(t_0)\right)$, $t_{1\mathrm{O}}, t_{2\mathrm{O}}$ είναι οι χρόνοι αφίξεως στο Ο των παλμών που οδεύουν κατά μήκος του x και y αντιστοίχως. Αυτά σημαίνουν ότι οι χρόνοι αφίξεως των δυο παλμών που ξεκίνησαν συγχρόνως, διαφέρουν κατά $\Delta t = \frac{2L}{c}h_+(t_0)$. Ας φανταστούμε τώρα πως αντί για παλμούς έχουμε σύμφωνα αρμονικά κύματα φωτός λέηζερ. Έστω ότι τα δυο κύματα είναι συμφασικά όταν ξεκινούν. Είδαμε πως η φυσική ταχύτητα του φωτός είναι c. Ας παρακολουθήσουμε ένα (θετικό) «μέγιστο» του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, αυτά τα μέγιστα παίζουν τον ρόλο του παλμού που μελετήσαμε και εκπέμπονται με ρυθμό που εξαρτάται από τη συχνότητα του φωτός.

Για ευκολία στον συλλογισμό μας, ας υποθέσουμε ότι τα μέγιστα για τους δυο βραχίονες ξεκίνησαν τη στιγμή t_0. Αυτά σημαίνουν ότι κατά την άφιξη των δυο φωτεινών κυμάτων στον ανιχνευτή έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \Delta t\omega = \omega \dfrac{2L}{c} h_+(t_0)$. ω είναι η κυκλική συχνότητα του φωτός του λέηζερ. Αν χρησιμοποιήσουμε το μήκος κύματος του φωτός βρίσκουμε $\Delta\varphi = \dfrac{4\pi L}{\lambda} h_+(t_0)$. Η ένταση του φωτός στον ανιχνευτή εξαρτάται από τη διαφορά φάσης, $\Delta\varphi$, των δυο συμβαλλόντων φωτεινών κυμάτων, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος της βαρυτικής διαταραχής $h_+(t_0)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}&\cos(\omega t + \Delta\varphi) + \cos(\omega t) = 2\cos\frac{1}{2}(\omega t + \Delta\varphi + \omega t)\cos\frac{1}{2}(\omega t + \Delta\varphi - \omega t)\\ &= 2\cos(\Delta\varphi/2)\cos(\omega t + \Delta\varphi/2).\end{aligned}$$

Όταν δεν υπάρχει διαφορά φάσης, $\Delta\varphi = 0$, το πλάτος διπλασιάζεται, προσθετική συμβολή, όταν $\Delta\varphi = \pi$, έχουμε καταστροφική συμβολή, αλληλοαναίρεση, και το κύμα μηδενίζεται. Στην περίπτωσή μας το $\Delta\varphi$ είναι μικρό. Ο ανιχνευτής μας δίνει αυτή τη βαρυτική διαταραχή που αντιστοιχεί στο βαρυτικό κύμα. Η διαφορά φάσης εξαρτάται επίσης από το μήκος L των βραχιόνων. Οι βραχίονες πρέπει να έχουν μεγάλο μήκος για να είναι το φαινόμενο ανιχνεύσιμο. Εδώ αναφερόμαστε απλώς στην βασική αρχή του πειράματος, υπάρχουν βελτιώσεις, όπως η αύξηση του ενεργού μήκους των βραχιόνων αλλά γι' αυτό παραπέμπουμε στη σχετική βιβλιογραφία. Υπάρχει και άλλος τρόπος θεώρησης του ίδιου φαινομένου τον οποίο σκιαγραφούμε στα επόμενα. Στην προηγούμενη ανάλυση, ουσιαστικά χρησιμοποιήσαμε συντεταγμένες με χρήση κοσμικών γραμμών που διαγράφουν σημειακές δοκιμαστικές μάζες σε ελεύθερη πτώση. Αντί γι' αυτό, στη συνήθη πρακτική του εργαστηρίου γίνεται χρήση στερεών μετρητικών διατάξεων (στερεών ράβδων-μέτρων). Στη Γενική Σχετικότητα η κίνηση δεν γίνεται με χρήση της συνήθους βαρυτικής δύναμης αλλά με την καμπύλωση του χωρόχρονου. Στη φύση όμως υπάρχουν και οι μη βαρυτικές δυνάμεις, η επίδραση των οποίων μπορεί και περιγράφεται σε αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων, όπως πολλές φορές του εργαστηρίου. Είναι γεγονός πως στην προσέγγιση που μας ενδιαφέρει εδώ, των ασθενών βαρυτικών πεδίων, μπορούμε να ξεφύγουμε από την εικόνα της Γενικής Σχετικότητας και να χρησιμοποιήσουμε τη «νευτώνεια» θεώρηση όπου η βαρύτητα εισέρχεται ως δύναμη όπως και οι άλλες δυνάμεις. Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια αλλά η «γλώσσα» που χρησιμοποιείται είναι πιο συνηθισμένη. Ας μελετήσουμε το ίδιο φαινόμενο ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων. Τώρα φανταζόμαστε ότι χρησιμοποιούμε στερεούς κανόνες-μέτρα κατά μήκος των αξόνων x, y. Είδαμε ότι όταν το βαρυτικό κύμα πέρασε από το σύστημα των δοκιμαστικών μαζών, οι χρόνοι διαδρομής από την κεντρική μάζα προς τις δυο άλλες και πίσω, ήταν διαφορετικοί. Ας δούμε πως μπορούμε να περιγράψουμε το ίδιο πράγμα στη συνήθη γλώσσα του συστήματος του «εργαστηρίου». Αν υποθέσουμε ότι οι δοκιμαστικές μάζες κινούνται ένεκα της δύναμης του βαρυτικού κύματος, μπορούμε να έχουμε μια συνεπή εικόνα του φαινομένου. Αυτό που χρειάζεται είναι να σκεφτούμε ότι το βαρυτικό κύμα προκαλεί παλιρροϊκές δυνάμεις στο κάθε ζεύγος σωματίων και αυτό θα κάνει τα σωμάτια να κινηθούν η μια σε σχέση με την άλλη. Μπορεί να δειχτεί ότι, ένεκα του βαρυτικού κύματος, είναι σαν οι δυο μάζες να δέχονται δυνάμεις F_{W} που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

Για γραμμική πόλωση +, οι συνιστώσες είναι,

$$F_x = \frac{1}{2} mL \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2}, \quad F_y = \frac{1}{2} mL \frac{\partial^2 h_{yy}}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} mL \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2}$$

Για γραμμική πόλωση $\times$, οι συνιστώσες είναι,

$$F_x = \frac{1}{2} mL \frac{\partial^2 h_{xy}}{\partial t^2}, \quad F_y = \frac{1}{2} mL \frac{\partial^2 h_{xy}}{\partial t^2}$$

Η δύναμη είναι ανάλογη προς τη μάζα m των δοκιμαστικών σωματίων, όπως απαιτεί η Αρχή της Ισοδυναμίας. Επίσης η δύναμη είναι ανάλογη της μεταξύ τους απόστασης L. Αυτό είναι γνωστό για τις συνήθεις παλιρροϊκές δυνάμεις.

Τώρα η ερμηνεία του φαινομένου είναι: Στο σύνηθες σύστημα συντεταγμένων του «εργαστηρίου», η απόσταση μεταξύ των ελεύθερων μαζών μεταβάλλεται, όπως θα δούμε, κατά $\Delta L = \frac{1}{2} L h$. Αν x, y είναι οι διαφορές συντεταγμένων μεταξύ του κατόπτρου και του διαχωριστή, έχουμε για την πόλωση +

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} m L \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2}, \quad m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} m L \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2}$$

Έχουμε επομένως

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} L \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} L \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$h_{xx} = a\cos(kz - \Omega t), \quad \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2} = -a\Omega^2 \cos(kz - \Omega t)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - a\frac{1}{2} L\Omega^2 \cos(kz - \Omega t), \quad \text{τελικώς } x = a\frac{1}{2} L\cos(kz - \Omega t)$$

Επομένως

$$\Delta L = \frac{1}{2} L h_+ .$$

Ανάλογα ισχύουν για την πόλωση $\times$. Όλα τα προηγούμενα είναι σε συμφωνία με το Σχ. 3.6.

Στις δυο περιπτώσεις, στα δυο συστήματα συντεταγμένων, το ίδιο φαινόμενο και ειδικά η ίδια μέτρηση, περιγράφεται με τελείως διαφορετική γλώσσα. Στις Transverse Traceless συντεταγμένες, οι ελεύθερες μάζες κάνουν ελεύθερη πτώση, η κάθε μια είναι ακίνητη σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, έχει τις δικές της σταθερές συντεταγμένες, ανεξάρτητα από το πεδίο βαρύτητας. Ο χρόνος διαδρομής του φωτός μεταξύ δυο τέτοιων μαζών μεταβάλλεται επειδή μεταβάλλεται η μετρική του χωρόχρονου.

Στις συνήθεις συντεταγμένες του εργαστηρίου, μεταβάλλεται ο χρόνος διαδρομής του φωτός επειδή οι δοκιμαστικές μάζες μετακινούνται ως προς το σύστημα συντεταγμένων. Και οι δυο εικόνες είναι σωστές. Η δεύτερη εικόνα είναι πιο βολική για τον συνδυασμό του βαρυτικού κύματος με φαινόμενα «δυνάμεων θορύβου» διαφόρων μορφών. Η μέθοδος με τις Transverse traceless συντεταγμένες είναι καλύτερη όταν θέλουμε να εξετάσουμε άλλες περιπτώσεις, όπως όταν δοκιμαστικές μάζες διαχωρίζονται από μεγάλες αποστάσεις, συγκρίσιμες ή μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του βαρυτικού κύματος.

Σημειώνουμε ότι οι βραχίονες των δυο ανιχνευτών LIGO που βρίσκονται σε μεγάλη μεταξύ τους απόσταση, είναι στον ένα 4 km και στον άλλο 2 km. Αναφέρουμε απλώς ότι η δυνατότητα των ανιχνευτών είναι να ανιχνεύσουν μεταβολές μήκους των βραχιόνων της τάξης του

$$\frac{\Delta l}{l} = 10^{-21} .$$

Για $l = 4\ \text{km},\ \Delta l = 4\times 10^{-18}\ \text{m}$, μικρότερο κατά παράγοντα 1/1000 από την ακτίνα του πρωτονίου. Και όμως γίνεται!

Οι δυο ανεξάρτητες γραμμικές πολώσεις του βαρυτικού κύματος «διαφέρουν» κατά 45^{o} στο εγκάρσιο επίπεδο x, y. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα βαρυτικά κύματα σχετίζονται με έναν συμμετρικό τανυστή 2ης τάξης, $h_{\mu\nu}$. Από αυτό προκύπτει επίσης ότι το βαρυτόνιο (το κβάντο του βαρυτικού πεδίου) έχει σπιν 2. Στον ηλεκτρομαγνητισμό οι δυο ανεξάρτητες γραμμικές πολώσεις διαφέρουν κατά 90°. Αυτό οφείλεται στο ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σχετίζονται με ένα (τετρα)διανυσματικό πεδίο, το A_μ, που είναι τανυστής 1ης τάξης. Σε αυτό οφείλεται ότι το αντίστοιχο κβάντο (φωτόνιο) έχει σπιν ισο με 1.

13. Ολοκληρώματα Τροχιών

Ο φορμαλισμός των Ολοκληρωμάτων Τροχιών (Path Integral formulation) της Κβαντομηχανικής οφείλεται αρχικά στον Dirac αλλά διατυπώθηκε στην τελική μορφή της από τον Feynman. Η δράση ή (ολοκλήρωμα δράσης) στην Κλασική Μηχανική είναι στάσιμη κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος. Ας περιοριστούμε στην κίνηση ενός σωματιδίου σε μια διάσταση. Η λαγκρανζιανή είναι της μορφής $L = L(x, \dot{x}, t)$ και η δράση είναι $I = \int_{t_\mathrm{a}}^{t_\mathrm{b}} L(x, \dot{x}, t)\mathrm{d}t$. Για δεδομένη τροχιά $x = x(t)$ προσδιορίζεται η ταχύτητα $\dot{x} = \dot{x}(t)$ και από το ολοκλήρωμα υπολογίζεται η τιμή της δράσης για την εν λόγω τροχιά. Η πραγματική τροχιά είναι αυτή για την οποία η δράση είναι στάσιμη κατά τα γνωστά. Το κινητό τη στιγμή t_a βρίσκεται στη συγκεκριμένη θέση a, $x_\mathrm{a} = x(t_\mathrm{a})$ και τη στιγμή t_b βρίσκεται στη θέση b, $x_\mathrm{b} = x(t_\mathrm{b})$. Σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει μια τροχιά την οποία διαγράφει το κινητό για την οποία η δράση έχει μια συγκεκριμένη τιμή.

Στην περίπτωση της Κβαντομηχανικής (της μη σχετικιστικής), τα πράγματα είναι διαφορετικά, τώρα μιλούμε για την πιθανότητα να πάει το σωματίδιο από τη θέση a στη θέση b. Για να βρεθεί αυτή η πιθανότητα συμβάλουν όλες οι διαδρομές (τροχιές) μεταξύ αυτών των δυο σημείων. Η κάθε τροχιά υπεισέρχεται με ίδιο «βάρος» αλλά με διαφορετική φάση. Συγκεκριμένα, για κάθε μια τροχιά μεταξύ των $\mathrm{a,b}$ η τιμή του ολοκληρώματος δράσης εξαρτάται από την τροχιά, $x = x(t)$, και η συμβολή στο κβαντομηχανικό πλάτος, ισούται με μια σταθερά επί $\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} I[x(t)]\right)$. Το συνολικό πλάτος ισούται με το άθροισμα των πλατών όλων των τροχιών. Αυτό παριστάνεται με το σύμβολο $K(\mathrm{b,a})$ του λεγόμενου διαδότη. Έχουμε τον συμβολισμό

$$K(\mathrm{b,a}) = \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} I\left[x(t)\right]\right) \mathrm{D}\mathbf{x}(t).$$

Αυτό είναι το ολοκλήρωμα τροχιών, το $\mathrm{D}\mathbf{x}(t)$ δηλώνει ότι η ολοκλήρωση γίνεται σε όλες τις τροχιές. Η πιθανότητα μετάβασης από το a στο b δίνεται από τη σχέση: $P(\mathrm{b,a}) = |K(\mathrm{b,a})|^2$. Μπορεί να υπολογιστεί η κυματοσυνάρτηση κάθε χρονική στιγμή και για κάθε σημείο του συνήθους χώρου. Δείχνεται ότι ισχύει η εξίσωση Schroedinger. Μπορεί να δειχτεί ότι στο κλασικό όριο όπου $I >> \hbar$, το σωματίδιο ακολουθεί μια τροχιά για την οποία το I έχει στάσιμη τιμή. Αν όμως αυτό δεν ισχύει τότε όλες οι τροχιές συμβάλλουν στη διαδικασία.

Προβλήματα

1. Βρείτε τη μετρική, δηλαδή τα g_{ij}, α) στον συνήθη τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο, με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων, με χρήση σφαιρικών και με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. β) Βρείτε τη μετρική για δισδιάστατο ευκλείδειο χώρο, για καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες. γ) Βρείτε τη μετρική πάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R, με σφαιρικές συντεταγμένες, δ) πάνω σε (απέραντη) κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας διατομής R, με κυλινδρικές συντεταγμένες

2. Θεωρήστε ότι υλικό σημείο κινείται μέσα σε πεδίο βαρύτητας g ενώ βρίσκεται συνεχώς πάνω σε κατακόρυφο άξονα z, με τη θετική φορά προς τα κάτω. Γράψτε τη λαγκρανζιανή του προβλήματος. Στη συνέχεια θεωρήστε ότι είναι γνωστό πως η λύση του προβλήματος με άγνωστες παραμέτρους είναι της μορφής, $z = z(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2,\ \alpha, \beta, \gamma$ σταθερές. Υποθέστε ότι τη στιγμή $t_1 = 0$ το σωμάτιο είναι στη θέση $z_1 = 0$ και τη στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση z_2. Υπολογίστε τις παραμέτρους α, β συναρτήσει των ανωτέρω t_1, z_1, t_2, z_2. Στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα δράσης (ή τη δράση) $I = \int_0^{t_2} L\mathrm{d}t$. Ισχύει προφανώς ότι αυτό είναι γνωστό ως συνάρτηση της παραμέτρου γ που σημαίνει ότι για διάφορες λύσεις της ανωτέρω μορφής που υπακούν στις δεδομένες αρχική και τελική συνθήκη στο διάστημα $0(=t_1) \le t \le t_2$. Θεωρήστε ότι το $I = I(\gamma)$ είναι στάσιμο για μικρές μεταβολές της παραμέτρου. Προσδιορίστε με αυτή την απαίτηση το γ.

3. Θεωρήστε ότι μέσα στο πεδίο βαρύτητας g, σωμάτιο κινείται σε κατακόρυφο άξονα z που έχει θετική φορά προς τα κάτω. Υποθέστε ότι τη στιγμή $t = 0$ το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση $z = 0$ και αργότερα τη στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση z_2. Βρείτε τη λαγκρανζιανή L του σωματίου. Α) Θεωρήστε τη διαδρομή για την οποία ισχύει $z_{\mathrm{a}} = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} g t^2,\ \ \upsilon_0 = \frac{z_2}{t_2} - \frac{1}{2} g t_2$. Αυτή είναι συμβατή με την αρχική και τελική συνθήκη.

Υπολογίστε τη δράση (το ολοκλήρωμα δράσης) $I_{\mathrm{a}} = \int_0^{t_2} L\mathrm{d}t$ για την ανωτέρω διαδρομή. Στη συνέχεια παραμετροποιήστε τις γειτονικές προς την προηγούμενη τροχιές σύμφωνα με τη σχέση $z_{\mathrm{b}} = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} g t^2 + \varepsilon a t (t - t_2),\ \ 0 < \varepsilon << 1,\ a > 0$. Αυτή η σχέση είναι επίσης συμβατή με την αρχική και την τελική συνθήκη. Υπολογίστε το $I_{\mathrm{b}} = \int_0^{t_2} L\mathrm{d}t$ για αυτές τις γειτονικές (παραλλαγμένες) διαδρομές. Βρείτε τη διαφορά $\Delta I_{\mathrm{ba}} = I_{\mathrm{b}} - I_{\mathrm{a}}$. Β) Θεωρήστε τη διαδρομή $z_{\mathrm{c}} = bt,\ b = \frac{z_2}{t_2}$. Η αρχική και η τελική συνθήκες πληρούνται. Υπολογίστε το $I_{\mathrm{c}} = \int_0^{t_2} L\mathrm{d}t$ για την ανωτέρω διαδρομή. Στη συνέχεια κάντε την παραμετροποίηση $z_{\mathrm{d}} = bt + \varepsilon a t (t - t_2),\ \ 0 < \varepsilon << 1,\ a > 0$. Προφανώς και οι δυο συνθήκες πληρούνται. Υπολογίστε το $I_{\mathrm{d}} = \int_0^{t_2} L\mathrm{d}t$. Βρείτε τη διαφορά $\Delta I_{\mathrm{dc}} = I_{\mathrm{d}} - I_{\mathrm{c}}$.

Ποιά είναι η πραγματική διαδρομή που ακολουθεί το σωμάτιο;

4. Υποθέστε ότι έχετε ένα είδος γενικευμένης μηχανικής όπου η λαγκρανζιανή εξαρτάται και από δεύτερες παραγώγους των γενικευμένων συντεταγμένων ως προς τον χρόνο, δηλαδή $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t),\ q = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Εφαρμόστε την αρχή του Hamilton με τους περιορισμούς ότι στα άκρα

της ολοκλήρωσης οι «μεταβολές» (variations) όχι μόνο των q_i αλλά και των $\dot{q}_i$ είναι μηδέν και δείξτε ότι οι εξισώσεις των Euler-Lagrange παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 .$$

Θυμίζουμε ότι η αρχή του Hamilton λέει ότι $\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},\ddot{q},t)\mathrm{d}t=0$. Κάντε εφαρμογή για $L=-\frac{m}{2}q\ddot{q}-\frac{k}{2}q^2$. Να δουλέψετε την ειδική αυτή περίπτωση αυτοτελώς, δηλαδή χωρίς χρήση της γενικής θεωρίας που έχουμε δώσει.

5. α) Υποθέστε ότι ένα σύστημα κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας τροφοδοτείται από περιοδική τάση $\upsilon(t)$ της οποίας η περίοδος είναι T , $\upsilon(t)$ $0\le t<T$.
Να δείξετε ότι για δεδομένη μέση ισχύ $\bar{P}$ που καταναλώνει το ηλεκτρικό σύστημα, για να είναι η ενεργός τιμή του ρεύματος ελάχιστη, πρέπει το ρεύμα με το οποίο τροφοδοτείται το σύστημα να είναι της μορφής $i(t)=\frac{\bar{P}}{\upsilon_{\mathrm{rms}}}\upsilon(t)$. Αυτό σημαίνει ότι τα $\upsilon(t),i(t)$ πρέπει να έχουν την ίδια μορφή και να είναι συμφασικά (σε φάση). Τι είδους «φαινόμενο» φορτίο (φόρτος) πρέπει να παρουσιάζει το σύστημα; Θυμηθείτε την περίπτωση της αρμονικής τάσης. β) Θεωρήστε ένα κουτί με σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου που περιέχει ένα υγρό με ομοιόμορφη πυκνότητα ρ . Ο πυθμένας του κουτιού είναι οριζόντιος και το σύστημα βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας, g . Δείξτε ότι κατά την ισορροπία η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι οριζόντια.

6. α) Να εξεταστεί η περίπτωση κίνησης χορδής μήκους l ($0\le x\le l$) με πακτωμένα άκρα, πάνω στην οποία ασκείται κάθετα, εξωτερική δύναμη (φόρτος, φορτίο) τέτοια που $f(x,t)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$. Δηλαδή η $f(x,t)$ είναι ο φόρτος ανά μονάδα μήκους. β) Να εξεταστεί η περίπτωση ισορροπίας της χορδής, όταν η εξωτερική δύναμη είναι $f=f(x)$. Να γίνει εφαρμογή αν η χορδή είναι οριζόντια και η εξωτερική δύναμη είναι το ομοιόμορφα κατανεμημένο βάρος της, οπότε προφανώς $f=\frac{mg}{l}$.

7. Να λύσετε το πρόβλημα της Διδώς. Δηλαδή, να βρεθεί η επίπεδη κλειστή καμπύλη που έχει δεδομένο μήκος και περικλείει επίπεδη επιφάνεια με το μέγιστο εμβαδόν.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος. Να ακολουθηθεί η μέθοδος ισοπεριμετρικών προβλημάτων της θεωρίας μεταβολών. Υποθέστε ότι η καμπύλη έχει στο εσωτερικό της την αρχή των συντεταγμένων. α) Εργαστείτε σε πολικές συντεταγμένες, (r,φ) . β) Εκφράστε την καμπύλη σε καρτεσιανές συντεταγμένες παραμετρικά, δηλαδή, $x=x(\varphi),\ y=y(\varphi)$, όπου φ η γωνία των πολικών συντεταγμένων.

8. Βρείτε το σχήμα ομογενούς μη εκτατού εύκαμπτου νήματος που τα δυο του άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα και βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Να ακολουθηθεί η μέθοδος ισοπεριμετρικών προβλημάτων της θεωρίας μεταβολών (αλυσοειδής καμπύλη).

9. Βρείτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης που προκύπτει από τη λαγκρανζιανή α) $L=t^3x\ddot{x}^2-tx\dot{x}^2$ και β) από τη λαγκρανζιανή $L=t^2x\ddot{x}-t\dot{x}^2$.

10. Θεωρήστε ότι χορδή υπό μηχανική τάση F_t, εκτελεί αρκούντως μικρού πλάτους ταλαντώσεις. Στη χορδή δεν ασκούνται και άλλες δυνάμεις εκτός από τη μηχανική τάση. Η πυκνότητα μάζας της χορδής είναι $\rho(x)$, x η θέση κατά μήκος της χορδής. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους και τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους της χορδής, δίνονται αντιστοίχως, από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$T_1 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2, \quad V_1 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}F_t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 .$$

11. Βρείτε τον νόμο του Snell της διάθλασης του φωτός με χρήση της θεωρίας μεταβολών. Υποθέστε ότι οι ακτίνες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Τα δυο μέσα χωρίζονται με μια επίπεδη επιφάνεια κάθετη στο επίπεδο των ακτίνων. Η ταχύτητα του φωτός στο κάθε ένα μέσο είναι ίδια σε κάθε σημείο του μέσου και διαφορετική στα δυο μέσα. Εφαρμόζετε αυτό που λέγεται Αρχή Ήρωνος-Fermat. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, ο χρόνος που κάνει το φως να πάει από ένα σημείο σε κάποιο άλλο είναι ο ελάχιστος δυνατός. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ γειτονικών τροχιών.

12. Θεωρήστε το πρόβλημα της ανάκλασης του φωτός σε επίπεδο κάτοπτρο ξανά. Το φως κινείται στο μέσο διάδοσης με σταθερή ταχύτητα. Εφαρμόστε θεωρία μεταβολών και δείξτε ότι η προσπίπτουσα και η ανακλώμενη βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που είναι κάθετο στο κάτοπτρο και φυσικά ότι η γωνία προσπτώσεως είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεως. Εφαρμόζετε αυτό που λέγεται Αρχή Ήρωνος-Fermat. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, ο χρόνος που κάνει το φως να πάει από ένα σημείο σε κάποιο άλλο είναι ο ελάχιστος δυνατός. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ γειτονικών τροχιών.

Για ευκολία στους υπολογισμούς να πάρετε τα δυο σημεία πάνω στο επίπεδο xy των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων. Το κάτοπτρο να είναι πάνω στο επίπεδο yz. Θυμίζουμε ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε τρόπο για να λύσετε ένα πρόβλημα θεωρίας μεταβολών, οπότε για ευκολία, να λύσετε το πρόβλημα θεωρώντας ως δεδομένο ότι η διάδοση του φωτός μέσα σε μέσο όπου η ταχύτητά του είναι σταθερή, είναι σε ευθεία γραμμή. Έτσι η διαδικασία που θα ακολουθήσετε απαιτεί απλή εφαρμογή στοιχειώδους (Μαθηματικής) Ανάλυσης.

13. Υποθέστε ότι έχουμε χορδή απείρου μήκους ($0 \le x < +\infty$) που έχει πυκνότητα ανά μονάδα μήκους ρ = σταθερή. Η μηχανική τάση της χορδής είναι δεδομένη F_t, σταθερή. Στο άκρο $x=0$ της χορδής υπάρχει συνδεδεμένη σημειακή μάζα m, η οποία συνδέεται επίσης με ελατήριο σταθεράς k. Η θέση ισορροπίας της χορδής είναι και η θέση ισορροπίας του ελατηρίου-υλικού σημείου. Προσδιορίστε τη λαγκρανζιανή του συστήματος και με θεωρία μεταβολών βρείτε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης.

14. Το πρόβλημα του ταυτόχρονου, συνίσταται στο να βρεθεί επίπεδη καμπύλη, σε κατακόρυφο επίπεδο μέσα σε πεδίο βαρύτητας, g, τέτοια που από οποιοδήποτε σημείο της αφεθεί υλικό σημείο να την διαγράψει, φτάνει στο κατώτατο σημείο κινούμενο ίδιο χρονικό διάστημα. Η καμπύλη είναι μέρος κυκλοειδούς. Καταστρώστε το πρόβλημα και με οποιονδήποτε τρόπο καταλήξτε στο ανωτέρω συμπέρασμα.

15. Εφαρμόστε τη μέθοδο της εξάλειψης της γωνιακής συντεταγμένης στο πρόβλημα του Kepler. Η συντεταγμένη αυτή είναι αγνοήσιμη. Υποθέστε ότι η κίνηση είναι στο επίπεδο. Βρείτε την τροποποιημένη λαγκρανζιανή. Βρείτε την ενεργειακή συνάρτηση και δείξτε ότι ισούται με τη μηχανική ενέργεια. Δείξτε ότι αυτή διατηρείται. Από τη διατήρησή της δείξτε πως υπολογίζεται η πολική συντεταγμένη συναρτήσει του χρόνου, $r = r(t)$ και στη συνέχεια η γωνιακή, $\theta = \theta(t)$. Βεβαιωθείτε ότι καταλήγετε στις ίδιες εξισώσεις κίνησης όπως και με την καθιερωμένη μέθοδο, χωρίς την εξάλειψη.

16. Δείξτε πως λύνεται το πρόβλημα του σφαιρικού εκκρεμούς, εφαρμόζοντας τη μέθοδο εξάλειψης της αγνοήσιμης γωνιακής συντεταγμένης (αζιμουθιακή γωνία), φ, των σφαιρικών συντεταγμένων, στην περίπτωση του σφαιρικού εκκρεμούς.

17. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \dot{y}x$. Εφαρμόστε τη μέθοδο εξάλειψης της αλγεβρικής μεταβλητής x και λύστε το πρόβλημα.

18. Θεωρήστε την κίνηση ελεύθερου σωματίου στον χώρο. Η κινητική ενέργεια ισούται με τη λαγκρανζιανή και ισχύει η Αρχή Hamilton στη μορφή θεωρίας μεταβολών. Θεωρήστε ως δεδομένο, σαν αξίωμα, ότι για μικρές «διαδρομές» η αρχή αυτή μεταβολών λέει ότι πράγματι η τιμή του ολοκληρώματος δράσης είναι ελάχιστη. Με αυτό κάντε συλλογισμό που σας οδηγεί στο ότι η μάζα δε μπορεί να είναι αρνητική ποσότητα.

19. Θεωρήστε ότι το κυκλικά πολωμένο βαρυτικό κύμα περιγράφεται από δυο καταστάσεις με πίνακες, μήτρες, πόλωσης $e_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{+} + \mathrm{i}e_{\times}\right)$, $e_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{+} - \mathrm{i}e_{\times}\right)$. Είναι κάτι ανάλογο του κυκλικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Οι δείκτες R, L αναφέρονται σε δεξιόστροφη και αριστερόστροφη κυκλική πόλωση, ελικότητα. Βρείτε τους πίνακες αυτούς. Η στροφή κατά γωνία θ στο εγκάρσιο, ως προς τη διάδοση, επίπεδο x, y γίνεται με χρήση της μήτρας

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Η μήτρα στοφών δρα πάνω στις μήτρες πόλωσης. Ισχύει η γνωστή σχέση για τις μετασχηματισμένες μήτρες πόλωσης, $e' = \Lambda e \Lambda^{\mathrm{T}}$.

Για ευκολία περιοριστείτε στις μη μηδενικές (υπο)μήτρες 2x2 των 4x4 μητρών e. Τότε οι στροφές γίνονται με χρήση της $\Lambda = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$. Περιστρέψτε τη μήτρα e_{R} κατά θ. Για ποια τιμή θ_{inv} η μήτρα e_{R} μένει αναλλοίωτη ($e'_{\mathrm{R}} = e_{\mathrm{R}}$);

Στην κβαντική θεωρία πεδίου το σωματίδιο που προκύπτει από την κβάντωση του πεδίου έχει σπιν που υπολογίζεται από τη σχέση $S = \frac{2\pi}{\theta_{\mathrm{inv}}}$.

Μια ανάλογη διαδικασία για τον ηλεκτρομαγνητισμό οδηγεί σε γωνία $\theta_{\mathrm{inv}} = 2\pi$, πράγμα που σημαίνει ότι το σωματίδιο που προκύπτει από την κβάντωση του πεδίου, δηλαδή το φωτόνιο έχει σπιν ίσο με 1.

20. α) Για ελεύθερο δυνάμεων σωμάτιο που κινείται σε μια διάσταση, δείξτε ότι η τιμή της δράσης κατά την πραγματική κλασική κίνησή του, είναι: $I_{\mathrm{cl}} = \frac{m}{2}\frac{\left(x_{\mathrm{b}} - x_{\mathrm{a}}\right)^2}{t_{\mathrm{b}} - t_{\mathrm{a}}}$.

β) Για τον αρμονικό ταλαντωτή σε μια διάσταση, όπου $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)$, δείξτε ότι η δράση κατά την πραγματική κλασική κίνησή του είναι: $I_{\mathrm{cl}} = \frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_{\mathrm{a}}^2 + x_{\mathrm{b}}^2\right)\cos(\omega T) - 2x_{\mathrm{a}}x_{\mathrm{b}}\right]$, $T = t_{\mathrm{b}} - t_{\mathrm{a}}$. γ) Βρείτε την I_{cl} κατά την πραγματική κλασική κίνηση, για σωμάτιο που κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F. Ισχύει, $L = m\dot{x}^2/2 - Fx$.

21. α) Η κλασική γενικευμένη ορμή είναι $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ (μια διάσταση). Δείξτε ότι η ορμή στα ακραία σημεία της πραγματικής τροχιάς σωματίου δίνεται από τις σχέσεις:

$$p_{\mathrm{b}} = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_{\mathrm{b}}} = \frac{\partial I_{\mathrm{cl}}}{\partial x_{\mathrm{b}}}, \quad p_{\mathrm{a}} = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_{\mathrm{a}}} = -\frac{\partial I_{\mathrm{cl}}}{\partial x_{\mathrm{a}}}.$$

Σημείωση: Όταν μεταβάλλεται η θέση στο άκρο ο χρόνος στο άκρο είναι δεδομένος, αμετάβλητος.

β) Θεωρήστε ότι κλασικά η ενέργεια είναι (μια διάσταση), $E = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L$. Δείξτε ότι η ενέργεια στα ακραία σημεία δίνεται από τις σχέσεις:

$$E_{\mathrm{b}} = \dot{x}_{\mathrm{b}} \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_{\mathrm{b}}} - L(x_{\mathrm{b}}) = -\frac{\partial I_{\mathrm{cl}}}{\partial t_{\mathrm{b}}}, \; E_{\mathrm{a}} = \dot{x}_{\mathrm{a}} \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_{\mathrm{a}}} - L(x_{\mathrm{a}}) = \frac{\partial I_{\mathrm{cl}}}{\partial t_{\mathrm{a}}}.$$

Σημείωση: Όταν μεταβάλλεται ο χρόνος στο άκρο η συντεταγμένη του άκρου είναι δεδομένη, αμετάβλητη.

Και στις δυο περιπτώσεις, το I_{cl} είναι η δράση κατά την πραγματική κλασική κίνηση.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 3

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β' Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[3] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.

[4] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[5] E. A. Desloge, *Classical Mechanics*, *Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.

[6] Α. Μαυραγάνης, *Αναλυτική Μηχανική*, ΕΜΠ, 1998.

[7] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[8] E. Whittaker, *A Treatise in the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, 1965.

[9] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Univ. of Toronto Press, 1970.

[10] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 1977.

[11] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, 1987.

[12] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press, 1967.

[13] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972.

[14] M. Borneas, *Principle of Action with Higher Derivatives*, Phys. Rev., Vol. 186, pp. 1299, 1969.

[15] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. I, II*, John Wiley & Sons, 1989.

[16] C. G. Gray and E. F. Taylor, *When action is not least*, American Journal of Physics, Vol. 75 (5), pp. 434, May 2007.

[17] C. Caratheodory, *Theorem of Caratheodory*, Math. Annalen, Vol. 67, pp. 355, 1909.

[18] H. A. Buchdahl, *On the Unrestricted Theorem of Caratheodory and its Application in the Treatment of the Second Law of Thermodynamics*, American Journal of Physics, Vol. 17, pp. 212, 1949.

[19] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel Publishing Company, 1974.

[20] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover Publications, Inc., 1976.

[21] J. L. Martin, *General Relativity. A first course for physicists*, Pearson Education Limited, 1996.

[22] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[23] C. Moeller, *The Theory of Relativity*, Oxford Univ. Press, 1952.

[24] N. E. Mavromatos, *General Relativity and Cosmology (Notes)*, King's College, Univ. of London, May 2008.

[25] J. Weber, *Detection and Generation of Gravitational Waves*, Phys. Rev., D., Vol. 117, pp. 306-313, 1960.

[26] M. E. Gerstsenshtein and V. I. Pustovoit, *On the Detection of Low-Frequency Gravitational Waves*, Soviet Physics-JETP, Vol. 16, pp. 433-435, 1963.

[27] F. A. E. Pirani, *On the Physical Significance of the Riemann Tensor*, Republication, Gen. Relativ., Vol. 41, pp. 1215-1232, 2009.

[28] P. R. Saulson, *If light waves are stretched by gravitational waves, how can we use light as a ruler to detect gravitational waves?*, American Journal of Physics, Vol. 65, pp. 501, 1997.

[29] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett., Vol. 116 (061102), 2016.

[30] M. Hendry, *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*, Notes, Univ. of Glasgow, Dept of Phys. and Astronomy, October 2012.

[31] M. P. Hobson, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, *General Relativity. An Introduction for Physicists*, Cambridge Univ. Press, 2006.

[32] R. E. Vogt et al., *The Construction, Operation, and Supporting Research and Development of a Laser Interferometer Gravitational – Wave Observation,* (LIGO), submitted by the California Institute of Technology, Copyright 1979.

[33] Dan Green, *Cosmology with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., 2016.

[34] Dan Green, *One Hundred Physics Visualizations Using MATLAB,* World Scientific Publishing Co., 2014.

[35] Dan Green, *More Physics with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., 2015.

[36] Dan Green, *Stars and Space with Matlab Apps*, World Scientific Publishing Co., 2020.

[37] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

[38] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.
[39] Κ. Ταμβάκης, *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*, Leader Books, 2003.

Κεφάλαιο 4: Συμμετρίες και Θεωρήματα Διατήρησης για Διακριτά Συστήματα

Αργότερα, όταν ασχοληθούμε με Συνεχή Συστήματα, δηλαδή με Θεωρία Πεδίου, θα μελετήσουμε το (Πρώτο) Θεώρημα της Noether. Με αυτό το θεώρημα γίνεται μια καλύτερη , σε βάθος, κομψή και πολύ γενική θεώρηση σχετικά με τη διατήρηση μεγεθών, όταν αυτή συνδέεται με την ύπαρξη διαφόρων συμμετριών. Σε αυτό το σημείο δεν θα κάνουμε χρήση αυτού του πολύ σημαντικού θεωρήματος.
Το ζητούμενο είναι, χωρίς να λύσουμε το πρόβλημα, να μπορούμε να βρούμε ότι κάποιο μέγεθος (ποσότητα), συνάρτηση των $q, \dot{q}, t$, μένει σταθερό κατά τη διάρκεια της (πραγματικής) κίνησης του συστήματος. Αυτά λέγονται σταθερές (της) κίνησης ή ολοκληρώματα (της) κίνησης, ή ολοκληρώματα (τύπου) Liouville. Γενικώς ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (4.1), η πρώτη σειρά δείχνει ολοκληρώματα της κίνησης. Η δεύτερη σειρά δείχνει τι πρέπει να ισχύει ώστε η έκφραση $F_r(q,\dot{q},t)$ να είναι σταθερή όταν ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης.

$$\begin{aligned} &F_r(q,\dot{q},t) = C_r = \text{σταθ.} \\ &\frac{\mathrm{d}F_r(q,\dot{q},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_r}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial F_r}{\partial t} = 0 \\ &L = L(q,\dot{q},t) \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,...,n \quad . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Με έναν απλό τρόπο, χωρίς αυστηρότητα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα μηχανικό σύστημα με n (γνήσιες) γενικευμένες συντεταγμένες έχει $2n$ σταθερές της κίνησης. Αυτή η απλοϊκή διαδικασία είναι η εξής: Από τις εξισώσεις Lagrange καταλήγουμε σε n (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης. Επομένως οι λύσεις τους θα έχουν $2n$ σταθερές, C, οι οποίες μπορεί να προσδιοριστούν από κατάλληλα δεδομένα της κίνησης όπως είναι οι αρχικές συνθήκες. Ισχύουν οι σχέσεις,

$$\begin{aligned} &q_i = q_i(C_1, C_2, ..., C_{2n}, t) \\ &\dot{q}_i = \dot{q}_i(C_1, C_2, ..., C_{2n}, t), \quad i = 1,2,...,n \quad . \end{aligned}$$

Αντιστρέφουμε αυτές τις σχέσεις, δηλαδή λύνουμε ως προς τα $2n$ C_i και καταλήγουμε στις $2n$ σχέσεις, όπου ο χρόνος είναι μια παράμετρος,

$$F_r(q,\dot{q},t) = C_r = \text{σταθ. } r = 1,2,...,2n .$$

Δηλαδή εκφράσαμε τα C_i ως προς τα $q_i, \dot{q}_i$ που είναι επίσης $2n$ το πλήθος, ο χρόνος είναι μια πρόσθετη ανεξάρτητη μεταβλητή που εισέρχεται εδώ ως μια παράμετρος. Αυτά είναι $2n$ ανεξάρτητα ολοκληρώματα κίνησης. Μπορούμε να σχηματίσουμε συναρτήσεις αυτών της μορφής $G = G(F_1, F_2, ..., F_r)$, μια τέτοια συνάρτηση είναι επίσης ολοκλήρωμα κίνησης, όμως αυτό που μας ενδιαφέρει είναι τα ολοκληρώματα κίνησης να είναι ανεξάρτητα. Συνήθως ονομάζουμε συντηρητικές ή διατηρητικές ή διατηρούμενες (conservative) ποσότητες εκείνες που δεν έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο οπότε είναι της μορφής,

$$F_k(q,\dot{q}) = C_k = \text{σταθ.}$$

Τέτοιου είδους σημαντικές ποσότητες είναι εκείνες που σχετίζονται με την ισοτροπία του χώρου και την ομογένεια του χώρου και του χρόνου.

Αυτές οι σταθερές έχουν μεγάλη σημασία για τη Μηχανική διότι είναι προσθετικές. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα σύστημα αποτελείται από δυο συστήματα που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, τότε το άθροισμα δυο τέτοιων σταθερών μια από το κάθε σύστημα ισούται με τη αντίστοιχη σταθερά του όλου συστήματος. Σημειώνουμε εδώ ότι η λαγκρανζιανή, μπορεί να εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο αν η κινητική ενέργεια ή/και η δυναμική εξαρτώνται άμεσα από αυτόν. Για την κινητική ενέργεια αυτό μπορεί να συμβεί αν κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων υπεισέρχεται και ο χρόνος. Για τη δυναμική ενέργεια μπορεί να οφείλεται στον ίδιο λόγο αλλά και στο ότι υπάρχει αλληλεπίδραση του συστήματος με εξωτερικό αίτιο που εξαρτάται από τον χρόνο. Όταν η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, τότε για συστήματα σωματίων με n συντεταγμένες θέσης, υπάρχουν $2n-1$ ανεξάρτητα διατηρητικά μεγέθη.

Μπορούμε να κάνουμε τον ακόλουθο απλό συλλογισμό, ανάλογο του προηγούμενου: Εφόσον υπάρχουν n μεταβλητές q, προκύπτουν n διαφορικές εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης. Στις λύσεις αυτών των εξισώσεων κίνησης υπάρχουν $2n$ σταθερές, $C_1, C_2, ..., C_{2n}$, οι οποίες μπορεί να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Οι εξισώσεις κίνησης για τα συστήματα που εξετάζουμε τώρα, δεν εξαρτώνται από την αρχή του χρόνου, t_0. Μπορούμε να θεωρήσουμε το t_0 ως μια από τις ανωτέρω σταθερές του προβλήματος, η οποία μάλιστα είναι προσθετική στον χρόνο t, έστω αυτή με δείκτη $2n$, $C_{2n} = t_0$. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον χρόνο βάζοντας στη θέση του την έκφραση, $t+t_0$. Έτσι για τις λύσεις και τις ταχύτητές τους έχουμε σχέσεις της μορφής,

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(C_1, C_2, ..., C_{2n-1}, t+t_0) \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i(C_1, C_2, ..., C_{2n-1}, t+t_0), \quad i = 1, 2, ..., n \quad . \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας, εκφράζουμε τις $2n-1$ σταθερές C_i συναρτήσει μόνο των $q, \dot{q}$, ενώ απαλείφεται το $t+t_0$. Δηλαδή καταλήγουμε σε $2n-1$ ανεξάρτητα ολοκληρώματα κίνησης, τα οποία δεν έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο, $C_r = F_r(q, \dot{q}), \quad r = 1, 2, ..., 2n-1$, δηλαδή είναι πράγματι διατηρητικά (συντηρητικά) μεγέθη. Ένας απλοϊκός τρόπος να δούμε πως γίνεται αυτό είναι ο εξής: Ξεχωρίζουμε μια από τις παραπάνω $2n$ σχέσεις, έστω την τελευταία,

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n\left(C_1, C_2, ..., C_{2n-1}, t+t_0\right).$$

Λύνουμε ως προς $t+t_0$, οπότε έχουμε

$$t+t_0 = f(C_1, C_2, ...C_{2n-1}, \dot{q}_n) .$$

Απαλείφουμε με αντικατάσταση το $t+t_0$ από τις υπόλοιπες $2n-1$ σχέσεις, οπότε βρίσκουμε,

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i\left(C_1, C_2, ..., C_{2n-1}, f(C_1, C_2, ...C_{2n-1}, \dot{q}_n)\right), \; i = 1, 2, ..., 2n-1 \;.$$

Τώρα έχουμε $2n-1$ σχέσεις και $2n-1$ σταθερές C που μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των $q_i, \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$. Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο, που είναι οι εκφράσεις

$$C_r = F_r(q, \dot{q}), \quad r = 1, 2, ..., 2n-1.$$

Μια άλλη ιδέα είναι, να αντιστρέψουμε το αρχικό σύστημα με τις $2n$ σχέσεις στις οποίες υπάρχουν οι σταθερές $C_1, C_2, ..., C_{2n-1}$ και στον όρο $t+t_0$ η σταθερά $C_{2n} = t_0$. Έχουμε $2n$ και $2n$ σταθερές προς προσδιορισμό. Έτσι βρίσκουμε

$$\begin{aligned} C_r &= F_r(q, \dot{q}), \quad r = 1, 2, ..., 2n-1 \\ t+t_0 &= f(q, \dot{q}) \quad . \end{aligned}$$

Η πρώτη σειρά είναι αυτό που θέλαμε, δηλαδή τα διατηρούμενα μεγέθη, $2n-1$ το πλήθος. Η τελευταία σχέση γίνεται

$$t_0 = f(q,\dot{q}) - t \text{ ή } C_{2n} = F_{2n}(q,\dot{q},t).$$

Αυτή είναι σταθερά της κίνησης που εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο και δεν ανήκει στην κατηγορία των συντηρητικών μεγεθών. Αυτό είναι σύμφωνο με όσα είπαμε προηγουμένως, δηλαδή σύστημα με n συντεταγμένες θέσης έχει $2n$ ολοκληρώματα κίνησης. Στην περίπτωσή μας μόνο $2n-1$ ολοκληρώματα κίνησης είναι συντηρητικά μεγέθη. Γενικώς, από τα ολοκληρώματα κίνησης μπορούν να προσδιοριστούν οι λύσεις, του μηχανικού συστήματος με αντιστροφή τους. Δηλαδή από τις σχέσεις,

$$F_r(q,\dot{q},t) = C_r, \quad r = 1,2,...,2n$$

βρίσκουμε τα $q_i = q_i(C_1, C_2, ..., C_{2n}, t),\ \dot{q}_i = \dot{q}_r(C_1, C_2, ..., C_{2n}, t),\ i = 1,2,...,n$. Οι σταθερές καθορίζονται από κατάλληλα δεδομένα στοιχεία της κίνησης όπως είναι οι αρχικές συνθήκες.

Ενώ η ύπαρξη συμμετριών στο μηχανικό σύστημα οδηγεί σε ολοκληρώματα κίνησης κατά την πραγματική κίνηση, το αντίστροφο δεν συμβαίνει κατ' ανάγκη. Δηλαδή υπάρχουν σταθερές κίνησης που δεν σχετίζονται με συμμετρίες.

Μια απλή περίπτωση διατήρησης είναι η εξής, έστω ότι η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από κάποια συγκεκριμένη συντεταγμένη θέσης, έστω την q_r, ενώ μπορεί να περιέχει την αντίστοιχη ταχύτητα $\dot{q}_r$. Η συντεταγμένη αυτή λέγεται κυκλική ή αγνοήσιμη. Μερικοί λένε κυκλική αυτήν που δεν υπάρχει στην κινητική ενέργεια και αγνοήσιμη αυτήν που δεν υπάρχει στη λαγκρανζιανή. Χρησιμοποιείται και ο όρος κινοσθενική (kinosthenic) αντί του όρου αγνοήσιμη. Αν έχουμε αγνοήσιμη μεταβλητή, τότε λέμε ότι το σύστημα έχει μια συμμετρία και εννοούμε ότι η λαγκρανζιανή δεν μεταβάλλεται κατά μετατόπιση του συστήματος ως συνόλου στον θεσικό χώρο ως προς αυτή τη μεταβλητή. Ορίζουμε ως γενικευμένη ορμή που σχετίζεται με μια συντεταγμένη q_i την ποσότητα

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{4.2}$$

Αυτή λέγεται και κανονική ορμή ή συζυγής ορμή της q_i. Ορίζουμε ως λαγκρανζιανό σύστημα εκείνο που για την συντεταγμένη του q_r ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \tag{4.3}$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπεισέρχονται δεσμευτικές σχέσεις ή/και άλλες δυνάμεις. Αυτό μπορεί να ισχύσει για ολόνομα συστήματα με μονογενείς δυνάμεις. Τότε η λαγκρανζιανή από μόνη της καθορίζει τις εξισώσεις κίνησής του.

Αφού το $L(q,\dot{q},t)$ δεν εξαρτάται από την q_r προφανώς $\dfrac{\partial L}{\partial q_r} = 0$ άρα

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} = 0, \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \text{σταθερό}. \tag{4.4}$$

Αφού ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης του Lagrange, η ποσότητα p_r διατηρείται κατά την πραγματική κίνηση. Η τιμή της εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Αυτή η ιδέα οδηγεί στην εξής μεθοδολογία για τον προσδιορισμό σταθερών της κίνησης: Προσπαθούμε να βρούμε σημειακό μετασχηματισμό που να οδηγεί σε λαγκρανζιανή στην οποία κάποια ή κάποιες συντεταγμένες είναι αγνοήσιμες, τότε οι αντίστοιχες συζυγείς ορμές είναι σταθερές της κίνησης.

Αν έχουμε φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο για τα οποία ούτε το διανυσματικό ούτε το βαθμωτό δυναμικό εξαρτώνται από την καρτεσιανή συντεταγμένη x, τότε διατηρείται η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή

$$p_x = m\dot{x} + e_q A_x = \text{σταθερά} \tag{4.5}$$

Ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους σχετίζεται με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο για το οποίο ξέρουμε ότι έχει ορμή. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κλειστό σύστημα σωματίων, δηλαδή σύστημα όπου δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις τους με εξωτερικά πεδία αλλά μόνο μεταξύ τους και αυτές εκφράζονται με κεντρικές δυνάμεις μεταξύ όλων των ζευγαριών σωματίων. Επίσης, ας υποθέσουμε πως δεν υπάρχουν δεσμοί και ας περιοριστούμε σε καρτεσιανό χώρο. Οποιαδήποτε μετατόπιση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση στον χώρο του όλου συστήματος ως συνόλου, αφήνει τη λαγκρανζιανή αναλλοίωτη, τότε η συνιστώσα της ολικής ορμής του συστήματος, στην εν λόγω κατεύθυνση είναι σταθερά της κίνησης. Είναι διατηρητική ποσότητα. Προφανώς διατηρείται και η συνισταμένη ορμή ως διάνυσμα. Αυτό σχετίζεται με την ομογένεια του θεσικού χώρου. Ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του ίδιου πράγματος είναι ότι: Δεν παίζει ρόλο η παράλληλη μετατόπιση του συστήματος των αξόνων συντεταγμένων, ή καλύτερα, δεν παίζει ρόλο που είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Σημειώνουμε ότι η ορμή, σε αντίθεση με την ενέργεια που θα δούμε παρακάτω, είναι προσθετικό μέγεθος ανεξάρτητα με το αν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων του συστήματος. Στην περίπτωση του ίδιου μηχανικού συστήματος αν κάνουμε μια περιστροφή του συνολικού συστήματος περί κάποιον άξονα, η λαγκρανζιανή δεν μεταβάλλεται, τότε διατηρείται η ολική στροφορμή περί αυτόν τον άξονα. Φυσικά ο άξονας είναι αυθαίρετος οπότε διατηρείται και η διανυσματική στροφορμή ως προς οποιοδήποτε σημείο του θεσικού χώρου. Αυτό σχετίζεται με την ισοτροπία του θεσικού χώρου. Μια άλλη διατύπωση είναι ότι δεν παίζει ρόλο ο προσανατολισμός των αξόνων του συστήματος στον χώρο. Η στροφορμή είναι επίσης προσθετικό μέγεθος, ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων του συστήματος. Θα δούμε αμέσως τώρα τη συμμετρία συστήματος ως προς τη μετατόπιση στον χρόνο. Αυτό σχετίζεται με την ομογένεια στον χρόνο και μπορεί να ισχύει και για συστήματα που δεν είναι κλειστά. Ομογένεια στον χρόνο σημαίνει ότι δεν παίζει ρόλο από ποια χρονική στιγμή αρχίζει να μετριέται ο χρόνος. Σε αυτή την περίπτωση θα δούμε ότι διατηρείται η ενεργειακή συνάρτηση που, πολλές φορές, ταυτίζεται με την μηχανική ενέργεια του συστήματος.

4.1 Ενεργειακή συνάρτηση. Διατήρηση της ενέργειας

Υποθέτουμε ότι ασχολούμαστε με λαγκρανζιανά συστήματα στα οποία οι δεσμοί είναι ολόνομοι και έχουν εξαλειφθεί με εισαγωγή των κατάλληλων γενικευμένων συντεταγμένων. Ας θεωρήσουμε τη λαγκρανζιανή $L(q,\dot{q},t)$. Γενικώς θα έχουμε για την εξέλιξή της στον χρόνο

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.6}$$

Εφόσον μελετούμε πραγματική κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις του Lagrange οπότε

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \tag{4.7}$$

Άρα

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.8}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)+\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.9}$$

$$\text{Άρα}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=0\,. \tag{4.10}$$

Η παράσταση στην παρένθεση λέγεται, συνήθως, ενεργειακή συνάρτηση και συμβολίζεται με h.

$$h(q,\dot{q},t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\,. \tag{4.11}$$

Αυτή δεν είναι η χαμιλτονιανή, που θα δούμε αργότερα, παρόλο που έχουν σε κάθε αντίστοιχο σημείο του χώρου και του χρόνου την ίδια τιμή. Μερικές φορές χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο και για τις δυο, αφού η μια προκύπτει από την άλλη με απλή αντικατάσταση μεταβλητών με τις συναρτήσεις τους ως προς άλλες μεταβλητές. Καλό είναι σε αυτή την περίπτωση να γράφουμε για την ενεργειακή συνάρτηση $H(q,\dot{q},t)$. Η χαμιλτονιανή είναι συνάρτηση άλλων (μετασχηματισμένων) μεταβλητών, $H(q,p,t)$, όπου p παριστάνει τις συζυγείς ορμές.

Οι Εξ. (4.10) και (4.11) οδηγούν στην Εξ. (4.12)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{4.12}$$

Αν η λαγκρανζιανή είναι της μορφής $L=L(q,\dot{q})$, δηλαδή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, τότε $h=$ σταθερό, δηλαδή διατηρείται κατά τη διάρκεια της πραγματικής κίνησης του δυναμικού συστήματος. Είναι ευνόητο ότι σε αυτή την περίπτωση ούτε το h εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δηλαδή ισχύει, $h=h(q,\dot{q})$. Όμως δεν ισχύει κατ' ανάγκη και το αντίστροφο, μπορεί να ισχύει $h=h(q,\dot{q})$ αλλά για τη λαγκρανζιανή να ισχύει $L=L(q,\dot{q},t)$. Για αυτό είναι απαραίτητο το κριτήριο της Εξ. (4.12). Το $h=h(q,\dot{q})$ είναι ένα ολοκλήρωμα κίνησης και συνήθως ονομάζεται ολοκλήρωμα του Jacobi. Πρόκειται για συντηρητική (διατηρητική) ποσότητα (μέγεθος). Εδώ έχουμε συμμετρία που σχετίζεται με το γεγονός ότι η λαγκρανζιανή δεν επηρεάζεται από μετατόπιση στον χρόνο. Θα δούμε τώρα ότι σε ειδικές περιπτώσεις η συνάρτηση h είναι η (ολική) μηχανική ενέργεια του δυναμικού συστήματος. Υποθέτουμε ότι $L=T-U$. Σύμφωνα με το Παράρτημα Π3, η κινητική ενέργεια μηχανικού συστήματος γράφεται ως

$$T=T_0(q,t)+T_1(q,\dot{q},t)+T_2(q,\dot{q},t). \tag{4.13}$$

Ο πρώτος όρος είναι ανεξάρτητος από τις ταχύτητες, ο δεύτερος εξαρτάται γραμμικά από τις ταχύτητες και ο τελευταίος όρος είναι τετραγωνική μορφή ως προς τις ταχύτητες. Όλοι οι όροι είναι ομογενείς συναρτήσεις ως προς τις ταχύτητες, βαθμών 0, 1 και 2 αντίστοιχα. Το θεώρημα του Euler λέει ότι για μια ομογενή συνάρτηση f, βαθμού k ως προς τα x_i, $i=1,2,...,n$, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf \tag{4.14}$$

Σε πολλές περιπτώσεις η λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί σε ανάλογη μορφή όπως η κινητική ενέργεια, δηλαδή

$$L(q,\dot{q},t) = L_0(q,t) + L_1(q,\dot{q},t) + L_2(q,\dot{q},t) \tag{4.15}$$

όπου οι τρεις όροι έχουν ομογένεια 0,1,2 βαθμών αντιστοίχως όπως συμβαίνει στην κινητική ενέργεια. Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε ότι

$$h = 0\cdot L_0 + 1\cdot L_1 + 2\cdot L_2 - (L_0 + L_1 + L_2) = L_2 - L_0 \,. \tag{4.16}$$

Αν το $T = T_2(q,\dot{q})$ (αυτό συμβαίνει αν ο μετασχηματισμός συντεταγμένων δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο) και αν επιπλέον το δυναμικό δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες, δηλαδή,

$$U = V = V(q,t)\,,$$

τότε από τη σχέση

$$L(q,\dot{q},t) = L_2(q,\dot{q},t) + L_1(q,\dot{q},t) + L_0(q,t)$$

σε συνδυασμό με τη σχέση

$$L = T - V(q,t) = T_2(q,\dot{q}) - V(q,t)$$

είναι ευνόητο ότι ισχύουν

$$L_1(q,\dot{q},t) = 0\,,\ L_2 = T \ \text{ και } \ L_0 = -V\,,$$

οπότε η Εξ. (4.16) οδηγεί στην

$$h = T_2(q,\dot{q}) + V(q,t) = T(q,\dot{q}) + V(q,t) = E\,. \tag{4.17}$$

Θυμίζουμε ξανά ότι η ισχύς της σχέσης $T = T_2(q,\dot{q})$ οφείλεται στο ότι οι εξισώσεις μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές στις γενικευμένες συντεταγμένες δεν περιέχουν άμεσα τον χρόνο, βλέπε παράρτημα Π3. Αυτό σχετίζεται και με το ότι δεν υπάρχουν χρονοεξαρτώμενοι δεσμοί και με το ότι οι νέες γενικευμένες συντεταγμένες δεν ανήκουν σε κινούμενο σύστημα αναφοράς. Τότε έχουμε $T_1 = T_0 = 0$ και $T = T_2$. Η Εξ. (4.17) λέει ότι η ενεργειακή συνάρτηση είναι και η ολική μηχανική ενέργεια του δυναμικού συστήματος. Υπό αυτές τις συνθήκες και αν επιπλέον η δυναμική συνάρτηση (το δυναμικό) είναι $V = V(q)$, δηλαδή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, ούτε η λαγκρανζιανή θα εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$. Άρα σύμφωνα με την Εξ. (4.17) που τώρα γράφεται ως

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{4.18}$$

η ενέργεια διατηρείται κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος, δηλαδή

$$E = T + V = \text{σταθερή.}$$

Μας είναι γνωστό ότι συστήματα σαν το παραπάνω, για τα οποία διατηρείται η ενέργεια (είναι διατηρήσιμη, συντηρητική, ποσότητα.) λέγονται συντηρητικά συστήματα.

Τονίζουμε ξανά, πως ενώ η λαγκρανζιανή για κάθε δυναμικό σύστημα καθορίζεται πλήρως από τη σχέση

$$L = T - U$$

και αυτό ισχύει ανεξάρτητα από τις ειδικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται, η ενεργειακή συνάρτηση h για δεδομένο δυναμικό σύστημα, δεν είναι η ίδια αλλά εξαρτάται σε μέγεθος αλλά και σε μορφή (ως συνάρτηση) από τις ειδικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται. Για το ίδιο δυναμικό σύστημα το φυσικό νόημά της είναι διαφορετικό και εξαρτάται από τις χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες.

Ας δούμε ξανά τι γίνεται αν έχουμε δυναμική συνάρτηση της γενικής μορφής $U = U(q, \dot{q}, t)$. Ξεκινούμε από τη σχέση $h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$, σχηματίζουμε την $L = T - U$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι γενικώς ισχύει: $h = T_2 - T_0 + U - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$.

Αν υποθέσουμε ότι $T = T_2$, δηλαδή $T_0 = 0$, έχουμε

$$h = T + \left(U - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right).$$

Συνηθίζεται να ονομάζουμε την έκφραση στην παρένθεση, δυναμική ενέργεια του συστήματος, $V'(q, \dot{q}, t) = U - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$, η οποία όμως μπορεί να εξαρτάται και από τις ταχύτητες και από τον χρόνο, τότε έχουμε την ανάλογη σχέση (φορμαλιστικά) που έχουμε για την ολική ενέργεια, E, δηλαδή $h = E' = T + V'$. Ας προχωρήσουμε ακόμη ένα βήμα πιο πέρα και ας υποθέσουμε αυτό που έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα, δηλαδή ότι ισχύει $U = \sum_{i=1}^{n} a_i(q,t)\dot{q}_i + a_0(q,t)$. Τότε βρίσκουμε $V' = a_0(q,t) = V(q,t)$ και επομένως βρίσκουμε τη γνωστή σχέση $h = E = T(q, \dot{q}) + V(q,t)$.

Εδώ σημειώνουμε ότι αφού η δυναμική συνάρτηση εξαρτάται και από τον χρόνο, η έτσι οριζόμενη ολική μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος και έτσι μπορεί κάποιος να αμφισβητήσει τον όρο που δώσαμε, δυναμική ενέργεια. Παρόλα αυτά ο όρος χρησιμοποιείται, αλλά η αξία του είναι περισσότερο χρήσιμη όταν έχουμε σύστημα συντηρητικό, διατηρητικό, δηλαδή σύστημα που εκτός των άλλων και η δυναμική ενέργεια είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Τότε κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος, κάθε μεταβολή της κινητικής ενέργειας ($T = T_2$) αντισταθμίζεται από αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, $V = V(q)$ έτσι που η ολική ενέργεια, $E = T + V$, διατηρείται.

Είναι σαφές ότι η ενεργειακή συνάρτηση και η ενέργεια δεν είναι προσθετικές για αλληλεπιδρώντα συστήματα ή σωμάτια. Αυτό είναι ευνόητο διότι η δυναμική ενέργεια έχει όρους με τις συντεταγμένες τουλάχιστον δυο σωματίων. Αν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματίων ή των συστημάτων, τότε μόνο η h και η ενέργεια του συνολικού συστήματος, ισούται με το άθροισμα των ποσοτήτων αυτών που έχουν τα επιμέρους σωμάτια ή συστήματα.

Μερικές φορές η λαγκρανζιανή μπορεί να είναι άθροισμα όρων που ο καθένας είναι ανεξάρτητος του άλλου, τότε μπορεί να βρεθούν ολοκληρώματα κίνησης για κάθε όρο χωριστά. Τέλος, μπορεί αυτό να συμβεί αφού γίνει μετασχηματισμός συντεταγμένων.

Παραρτήματα – Ειδικά θέματα

1. Κίνηση σε πεδίο Schwarzschild

Βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης δοκιμαστικού σωματίου μέσα στο βαρυτικό πεδίο Schwarzschild. Μια μη τετριμμένη λύση των εξισώσεων του Einstein στον κενό χώρο, δηλαδή στον χώρο που είναι εκτός των πηγών του βαρυτικού πεδίου, είναι η λύση Schwarzschild με μετρική την εξής

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = c^2(1-a/r)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-a/r} - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 \\
&a = r_\mathrm{s} = \frac{2GM}{c^2}.
\end{aligned}
$$

a είναι η ακτίνα Schwarzschild, M είναι η μάζα σφαιρικής κατανομής ύλοενέργειας, με σφαιρική συμμετρία, χωρίς συστροφή (σπιν), ακίνητης στην αρχή των συντεταγμένων. G, c είναι οι γνωστές σταθερές. Υποθέστε ότι $r > a$. Οι συντεταγμένες θέσης και ο χρόνος συμπίπτουν με αυτά του Minkowski για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή του βαρυτικού πεδίου, $r >> a$, όπου το πεδίο είναι πρακτικώς μηδέν, οι συντεταγμένες για μεγάλες αποστάσεις είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Σε αυτό το σημείο απλά αναφέρουμε ότι, η ακτίνα $r = r_\mathrm{s}$ χαρακτηρίζει αυτό που λέγεται ορίζοντας γεγονότων (event horizon). Φως που πέφτει στο εσωτερικό του ορίζοντα γεγονότων παγιδεύεται, δε μπορεί να βγει έξω. Σε αυτή την περιοχή αντιστρέφεται το είδος των συντεταγμένων οι χωρομορφικές γίνονται χρονομορφικές και αντιστρόφως. Δεν μπορεί να υπάρξει τροχιά σωματίου, το σωμάτιο οδεύει προς το κέντρο. Αν ένα σώμα έχει ακτίνα μικρότερη της r_s αυτό σημαίνει πως έχει γίνει μαύρη τρύπα.

Λύση

Για την περίπτωσή μας οι συντεταγμένες του τετραχώρου είναι (t, r, θ, φ). Έχουμε για τη μετρική του τετραχώρου

$$
\begin{aligned}
&g_{00} = g_{tt} = c^2(1-a/r),\ \ g_{11} = g_{rr} = -1/(1-a/r), \\
&g_{22} = g_{\theta\theta} = -r^2,\ \ g_{33} = g_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Όλες οι μη διαγώνιες συνιστώσες είναι μηδέν, $g_{\mu\nu} = 0,\ \mu \neq \nu$.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στη θεωρία μεταβολών, η λαγκρανζιανή για «ελεύθερο» δοκιμαστικό σωμάτιο είναι

$$
\begin{aligned}
&L = c^2(1-a/r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-a/r} - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \\
&\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}.
\end{aligned}
$$

Σημειώνουμε ότι για τον Ήλιο $a_\mathrm{s} \approx 3,0\ \mathrm{km}$ και για τη Γη $a_\mathrm{e} \approx 8,9\ \mathrm{mm}$.

Πολλές φορές, όταν $a/r << 1$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την έκφραση $\dfrac{1}{1-a/r} \approx 1 + a/r$.

Θεωρούμε ευνόητο ότι η κίνηση γίνεται σε επίπεδο οπότε λαμβάνουμε ως επίπεδο κίνησης αυτό με $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Έτσι η λαγκρανζιανή γίνεται

$$L = c^2(1-a/r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-a/r} - r^2\dot{\varphi}^2$$
$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Το σωμάτιο κινείται πάνω σε γεωδαισιακή. Για σωμάτιο μη μηδενικής μάζας παίρνουμε ως παράμετρο της γεωδαισιακής τον ιδιόχρονο, δηλαδή $\lambda = \tau$. Η λαγκρανζιανή είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα (σταθερά) κίνησης. Συγκεκριμένα ισχύει

$$L = c^2(1-a/r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-a/r} - r^2\dot{\varphi}^2 = c^2 = \text{σταθ.}$$
$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}.$$

Η L έχει διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα μάζας.

Η L δεν εξαρτάται άμεσα από τα t, φ οπότε έχουμε και τις ακόλουθες δυο σταθερές κίνησης, αντιστοίχως

$$c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot{t} = E_m = \text{σταθ.}, \; r^2\dot{\varphi} = l_m = \text{σταθ.}$$

Μπορεί να δειχτεί ότι, εφόσον έχουμε στατικό πεδίο, ισχύει

$$E_m = \frac{c^2\sqrt{1-a/r}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \upsilon = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-a/r}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}, \; \mathrm{d}l^2 = -\frac{1}{1-a/r}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\varphi^2 .$$

Η E_m αντιπροσωπεύει την ενέργεια ανά μονάδα μάζας του κινούμενου σωματίου και η l_m αντιπροσωπεύει στροφορμή ανά μονάδα μάζας του σωματίου. Το ότι η E_m που είναι διατηρούμενη ποσότητα κατά την κίνηση του σωματίου, ταυτίζεται με την ενέργεια φαίνεται από το γεγονός ότι για $r >> a$ η σχέση αυτή ταυτίζεται με τη σχέση για τη σχετικιστική μηχανική ενέργεια στον χώρο Minkowski, ειδική Σχετικότητα. Από τις τρεις αυτές σχέσεις βρίσκουμε σχέση η οποία είναι αντίστοιχη της σχέσης που ισχύει για την περίπτωση της νευτώνειας μηχανικής, για τη διατήρηση της ενέργειας, εδώ έχουμε

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E_m^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\left\{c^2 + \left(\frac{l}{r}\right)^2\right\} = (E_m^2 - c^2) + \frac{2GM}{r} - \frac{l_m^2}{r^2} + \frac{2GM}{c^2}\frac{l_m^2}{r^3}.$$

Η αντίστοιχη της νευτώνειας περίπτωσης για τη διατήρηση της ενέργειας (ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης) είναι

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2E_m + \frac{2GM}{r} - \frac{l_m^2}{r^2}.$$

Αν αγνοήσουμε τους σταθερούς όρους και το γεγονός ότι οι χρόνοι (παράμετροι) είναι διαφορετικοί, τ, t αντιστοίχως, παρατηρούμε ότι στη Γενική Σχετικότητα υπάρχει ο επιπλέον όρος με εξάρτηση $\frac{1}{r^3}$.

Προφανώς ισχύει η σχέση $\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$. Η σχέση $r=r(\varphi)$ είναι η εξίσωση της τροχιάς του σωματίου χωρίς τη χρήση παραμέτρου, όπως είναι ο χρόνος τ. Από τις τέσσερις αυτές σχέσεις προκύπτει η

$$\frac{l_m^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=(E_m^2-c^2)+\frac{ac^2}{r}-\frac{l_m^2}{r^2}+\frac{al_m^2}{r^3}.$$

Η νευτώνεια θεώρηση δίνει

$$\frac{l_m^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=2E_m+\frac{2GM}{r}-\frac{l_m^2}{r^2}.$$

Επίσης η εξίσωση κίνησης για τη μεταβλητή r είναι,

$$\ddot{r}-\frac{l_m^2}{r^3}+\frac{GM}{r^2}+\frac{3GM}{c^2}\frac{l_m^2}{r^4}=0.$$

Ο τελευταίος όρος «δύναμης» αντιστοιχεί στον όρο δυναμικής ενέργειας με εξάρτηση $1/r^3$ που είδαμε προηγουμένως.

Η νευτώνεια περίπτωση δίνει

$$\ddot{r}-\frac{l_m^2}{r^3}+\frac{GM}{r^2}=0 \quad .$$

Εύκολα μπορεί κάποιος να βρει και την άλλη (τελική διαφορική) εξίσωση κίνησης που περιέχει μέχρι και δεύτερες παραγώγους της γωνίας φ. Στην περίπτωση κινούμενου σωματίου χωρίς μάζα η διαδικασία πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα $\mathrm{d}s=0$, οπότε η τιμή της διατηρούμενης λαγκρανζιανής κατά την κίνηση (δηλαδή κατά μήκος της γεωδαισιακής) είναι μηδέν,

$$L=c^2(1-a/r)\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-a/r}-r^2\dot{\varphi}^2=0$$

$$\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία όπως πριν καταλήγουμε πάλι στις διατηρούμενες ποσότητες

$$c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot{t}=E_\lambda=\text{σταθ.},\, r^2\dot{\varphi}=l_\lambda=\text{σταθ.}$$

Εδώ τα E_λ, l_λ έχουν διαστάσεις που εξαρτώνται από τις διαστάσεις της παραμέτρου λ. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$, από την έκφραση για τη λαγκρανζιανή βρίσκουμε

$$\frac{l_m^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=(E_m^2-c^2)-\frac{l_m^2}{r^2}+\frac{al_m^2}{r^3}.$$

Παρατηρούμε ότι τώρα λείπει από το δεύτερο μέλος ο όρος με το $1/r$.

2. Διάνυσμα Laplace-Runge-Lenz

Δείξτε ότι στην περίπτωση της κίνησης σωματίου σε κεντρικό δυναμικό του τύπου $-k/r<0$ (πρόβλημα του Kepler), το διάνυσμα Laplace-Runge-Lenz (LRL), $\vec{A}=\vec{p}\times\vec{L}-mk\vec{r}/r$, είναι σταθερά της κίνησης. Αναφερόμαστε σε μη σχετικιστική κίνηση.

Λύση

Το ότι το διάνυσμα LRL είναι σταθερά της κίνησης μπορεί να δειχτεί με χρήση του θεωρήματος της Noether ένεκα υπάρξεως κάποιας ασυνήθιστης συμμετρίας. Το πρόβλημα του Kepler είναι μαθηματικά ισοδύναμο με σωμάτιο που κινείται ελεύθερο πάνω σε σφαίρα σε τετραδιάστατο χώρο. Το σύστημα είναι συμμετρικό υπό την επίδραση ορισμένων περιστροφών σε αυτόν τον τετραδιάστατο χώρο, υπάρχει συμμετρία SO(4). Αυτό οδηγεί στη διατήρηση του παραπάνω διανύσματος. Εδώ θα ακολουθήσουμε την απλή θεώρηση, χωρίς τη χρήση της παραπάνω συμμετρίας. Αν κεντρική δύναμη $f(r)$ ασκείται σε σωμάτιο μάζας με ορμή $\vec{p}$, έχουμε τον νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{f}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=f(r)\vec{e}_r\,. \tag{4.19}$$

Η στροφορμή $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ διατηρείται αφού έχουμε κεντρική δύναμη, άρα $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$, επομένως με χρήση αυτής της σχέσης και θέτοντας $\vec{p}=m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot c)\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}\times\vec{L})&=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\times\vec{L}+\vec{p}\times\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\times\vec{L}=mf(r)\vec{e}_r\times\left(\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\\&=f(r)\frac{m}{r}\left(\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)-r^2\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right).\end{aligned} \tag{4.20}$$

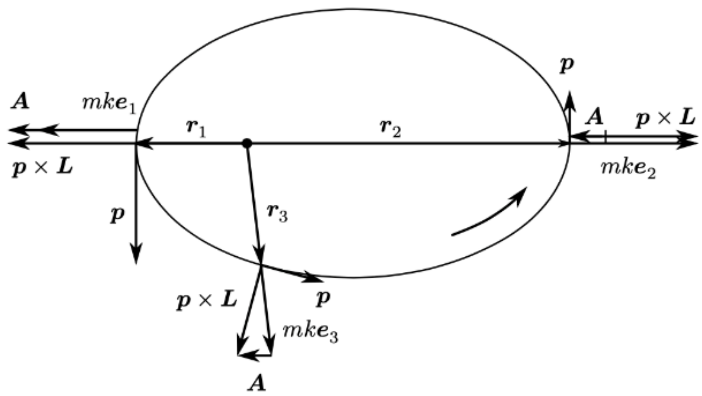
Με χρήση και της ταυτότητας $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{r})=2\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2)=2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}\times\vec{L})=-mf(r)r^2\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}-\frac{\vec{r}}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)=-mf(r)r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{4.21}$$

Στην περίπτωση της κεντρικής δύναμης της μορφής όπως στο πρόβλημα του Kepler, δηλαδή όταν έχουμε $f(r)=-k/r^2$, καταλήγουμε, τελικώς, στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}\times\vec{L}-mk\vec{e}_r\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=0,\ \text{άρα πράγματι}\ \vec{A}=\text{σταθερό}\,. \tag{4.22}$$

Το Σχήμα 4.1 που ακολουθεί δίνει κάποιες εξηγήσεις για τα διάφορα διανύσματα που υπεισέρχονται στο πρόβλημα των ελλειπτικών τροχιών Kepler, σε διάφορα σημεία της τροχιάς.



Σχήμα 4.1 *Διάνυσμα L-R-L στο πρόβλημα Kepler.*

Το διατηρούμενο αυτό διάνυσμα δεν βρέθηκε για πρώτη φορά από τους τρεις των οποίων το όνομα φέρει. Έχει χρησιμοποιηθεί από τον W. Lenz σε μια εργασία του σχετική με την παλιά κβαντική θεώρηση του ατόμου του υδρογόνου. Ο W. Pauli με χρήση αυτού του διανύσματος (με εισαγωγή τελεστών και της θεωρίας των μητρών) βρήκε τις ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου χωρίς τη χρήση της εξίσωσης του Schroedinger. Αυτό έγινε λίγο πριν κάνει το ίδιο ο Schroedinger με χρήση της εξίσωσής του. Είναι ενδιαφέρον ότι με χρήση αυτού το διανύσματος μπορεί να βρει, ευκολότερα, διάφορες σχέσεις της κίνησης τύπου Kepler και τη σχέση που περιγράφει τις τροχιές, δηλαδή την $r = r(\varphi)$ που είναι η εξίσωση της τροχιάς σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες.

3. Θεώρημα του Bertrand

Το θεώρημα (του) Bertrand λέει ότι, στην περίπτωση της κεντρικής κίνησης η κίνηση είναι κλειστή (επαναλαμβανόμενη) τροχιά, μόνον όταν η δύναμη είναι ελκτική της μορφής $\propto r^n$ όπου $n=-2$ ή $n=1$. Δηλαδή στην περίπτωση της κίνησης τύπου Kepler ή κίνησης υπό την επίδραση δύναμης τύπου Hook, ισοτροπικός αρμονικός ταλαντωτής (σε τρεις διαστάσεις).

Λύση

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος εκτός του αρχικού τρόπου που ακολούθησε ο Bertrand. Ακολουθούμε έναν από αυτούς. Θεωρούμε ότι είναι γνωστό ότι η κίνηση γίνεται στο επίπεδο και χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες (r,φ).

Θεωρούμε ότι είναι γνωστό πως διατηρείται η ενέργεια E και η στροφορμή l περί άξονα κάθετο στο επίπεδο κίνησης, ο οποίος διέρχεται από το ελκτικό κέντρο. Θέτοντας $u=1/r$ καταλήγουμε στην «εξίσωση ενέργειας»

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}u^2+\frac{m}{l^2}V\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{m}{l^2}E=E_m. \tag{4.23}$$

Αυτή η σχέση μας λέει ότι είναι σαν να έχουμε μονοδιάστατη κίνηση υλικού σημείου μάζας ίσης με τη μονάδα, μέσα σε «ενεργό» (ισοδύναμο) δυναμικό της μορφής

$$W(u)=\frac{1}{2}u^2+\frac{m}{l^2}V\left(\frac{1}{u}\right). \tag{4.24}$$

Στη συνέχεια αντί για $V\left(\frac{1}{u}\right)$ θα γράφουμε απλώς $V(u)$. Ξαναγράφουμε την Εξ. (4.23) στη μορφή

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + W(u) = E_m . \tag{4.25}$$

Θεωρούμε τον δισδιάστατο χώρο με συντεταγμένες (u, u_φ), $u_\varphi = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$, ουσιαστικά πρόκειται για ένα είδος δισδιάστατου χώρου των φάσεων. Προφανώς έχουμε

$$u_\varphi(u) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\sqrt{2\left(E_m - W(u)\right)} . \tag{4.26}$$

Από τον ορισμό του $u = 1/r$ προκύπτει ότι ενδιαφέρει η περίπτωση που $u > 0$.

Στον δισδιάστατο αυτό χώρο η Εξ. (4.26) παριστάνεται από μια συνεχή (φασική) καμπύλη συμμετρική ως προς τον άξονα u . Ένεκα της συμμετρίας μπορούμε να περιοριστούμε μόνο στον ένα κλάδο αυτόν με $u_\varphi > 0$. Αν η τιμή της ενέργειας E είναι τέτοια που η καμπύλη $r = r(\varphi)$, τροχιά του σωματίου σε πολικές συντεταγμένες, είναι κλειστή, τότε η παραπάνω φασική καμπύλη περνά από δυο σημεία τα $(u_1, 0)$ και $(u_2, 0)$ που βρίσκονται πάνω στον άξονα u . Ισχύουν, $u_2 = 1/r_1, u_1 = 1/r_2$, $r_1 < r < r_2$, $u_1 < u < u_2$. Τα r_1, r_2 είναι πεπερασμένα και είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του r που αντιστοιχεί στη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του u κατά μήκος της κλειστής φασικής καμπύλης $u_\varphi = u_\varphi(u)$. Αυτά αντιστοιχούν στο περίκεντρο και το απόκεντρο της καμπύλης $r = r(\varphi)$, δηλαδή στα αψιδωτά (apsidal) της σημεία. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $u > 0$. Η επιφάνεια που περικλείεται από αυτή την κλειστή φασική καμπύλη είναι

$$A = 2\int_{u_1}^{u_2} u_\varphi \mathrm{d}u = 2\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{2\left(E_m - W(u)\right)}\mathrm{d}u . \tag{4.27}$$

Από την Εξ. (4.26) προκύπτει η σχέση

$$\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\left(E_m - W(u)\right)}} . \tag{4.28}$$

Επομένως η γωνία μεταξύ δυο διαδοχικών απόκεντρων ή περίκεντρων δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\Phi = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\left(E_m - W(u)\right)}} . \tag{4.29}$$

Από τις Εξ. (4.27), (4.29) προκύπτει ότι ισχύει

$$\Delta\Phi = \frac{\partial A}{\partial E_m} . \tag{4.30}$$

Για κάποιες τιμές της ενέργειας το $r_2 \to +\infty$ οπότε η $r = r(\varphi)$ εκτείνεται στο άπειρο, δεν είναι κλειστή (επαναλαμβανόμενη) τροχιά. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μόνο ένα αψιδωτό σημείο το περίκεντρο. Αφού $r_2 \to +\infty$ θα έχουμε $u_1 = 1/r_2 = 0$ και για το εμβαδόν της Εξ. (4.27) στον φασικό χώρο έχουμε

$$A = 2\int_0^{u_2} \sqrt{2\left(E_m - W(u)\right)}\mathrm{d}u\ . \tag{4.31}$$

Η Εξ. (4.29) γίνεται

$$\Delta\Phi = 2\int_0^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\left(E_m - W(u)\right)}} = 2\varphi_0. \tag{4.32}$$

φ_0 είναι η γωνία μεταξύ της ασύμπτωτης (ευθείας) της τροχιάς $r = r(\varphi)$ και της ευθείας μεταξύ του ελκτικού κέντρου και του σημείου της καμπύλης που απέχει ελάχιστη απόσταση από αυτό (περίκεντρο).

Θα εξετάσουμε τις φασικές καμπύλες $u_\varphi = u_\varphi(u)$ για μικρές αποκλίσεις τους από την μορφή τους για ευσταθή κυκλική κίνηση. Για κυκλικές τροχιές $r = r(\varphi)$ έχουμε $u_\varphi = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = 0$, διότι τότε $r =$ σταθερό. Επομένως η ενέργεια για κυκλική τροχιά είναι σύμφωνα με την Εξ. (4.25) $E_{m0} = W(u_0)$ όπου το u_0 είναι το σημείο ακρότατου της $W(u)$, δηλαδή $W'(u_0) = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}u}(u_0) = 0.$ Για ευσταθείς κυκλικές τροχιές μπορεί να δειχτεί ότι ισχύει $W''(u_0) = \dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}t^2}(u_0) > 0$. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (4.24) και βρίσκουμε ότι το u_0 προσδιορίζεται από τη σχέση

$$u_0 + \frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u}(u_0) = 0\ . \tag{4.33}$$

Η ενέργεια για κυκλική τροχιά δίνεται από τη σχέση

$$E_{m0} = \frac{1}{2}u_0^2 + \frac{m}{l^2}V(u_0)\ . \tag{4.34}$$

Η συνθήκη ευστάθειας σημαίνει ότι

$$1 + \frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}(u_0) > 0. \tag{4.35}$$

Η καμπύλη στον χώρο u, u_φ για κυκλική τροχιά είναι ένα σημείο το $(u_0, 0)$. Αν η ενέργεια μεταβληθεί κατά μικρή ποσότητα δE έτσι που στροφορμή l να μείνει σταθερή, έχουμε ότι $u = u_0 + \delta u, E_m = E_{m0} + \delta E_m$, οπότε για τη φασική καμπύλη έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + W(u_0 + \delta u) = E_{m0} + \delta E_m\ . \tag{4.36}$$

Αναπτύσσουμε το δυναμικό W σε σειρά Taylor μέχρι τη δεύτερη τάξη στην περιοχή του $u = u_0$ και χρησιμοποιούμε τη συνθήκη για κυκλικές τροχιές οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}(\delta u)^2\left(1+\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2}(u_0)\right)=\delta E_m\,. \tag{4.37}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\delta u=u-u_0$ και καταλήγουμε στο ότι έχουμε φασική καμπύλη η οποία είναι έλλειψη με κέντρο το $(u_0,0)$ και ημιάξονες

$$\begin{aligned}a&=\sqrt{2\delta E_m}\\ b&=\sqrt{\frac{2\delta E_m}{1+\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2}(u_0)}}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Υπολογίζουμε τη γωνία Θ μεταξύ του απόκεντρου και του αμέσως επόμενου περίκεντρου με χρήση της σχέσης

$$\Theta=\frac{\Delta\Phi}{2}\,. \tag{4.39}$$

Η επιφάνεια που περικλείεται από τη φασική καμπύλη είναι

$$A=\frac{2\pi\delta E_m}{\sqrt{1+\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2}(u_0)}}\,. \tag{4.40}$$

Με χρήση της Εξ. (4.30) βρίσκουμε,

$$\Theta=\frac{\pi}{\sqrt{2+\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2}(u_0)}}\,. \tag{4.41}$$

Γενικώς η γωνία Θ εξαρτάται από την ενέργεια E_0 και τη στροφορμή l, $\Theta=\Theta(E_0,l)$.

Πρέπει να βρεθεί τέτοια δυναμική συνάρτηση (δυναμική ενέργεια, δηλαδή δυναμικό) ώστε η γωνία αυτή να μην εξαρτάται από αυτές τις ποσότητες. Αυτό μπορεί να γίνει αν

$$1+\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}u^2}(u_0)=c=\text{σταθερά}\,. \tag{4.42}$$

Με χρήση και της Εξ. (4.33) καταλήγουμε στη σχέση

$$\left.\left(1-u\frac{\mathrm{d}\ln\frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u}}{\mathrm{d}u}\right)\right|_{u_0}=c. \tag{4.43}$$

Απαιτούμε αυτή η σχέση να ισχύει σε όλη την επιτρεπτή περιοχή τιμών για το u_0. Αυτό σημαίνει ότι αυτή η εξίσωση είναι στην ουσία διαφορική εξίσωση με άγνωστη (προς προσδιορισμό) συνάρτηση το $V(u)$, χωρίς τον περιορισμό που αναφέρεται στη θέση $u = u_0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι η λύση της είναι

$$V(u) = \frac{C}{2-c} u^{2-c} .$$

Για $c = 2$ ξεκινούμε από τη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε τη λύση για το δυναμικό η οποία είναι λογαριθμικής μορφής, $\propto \ln u$ άρα και $\propto \ln r$. Η τροχιά που προκύπτει είναι περιορισμένη (δεν πάει στο άπειρο) αλλά δεν είναι κλειστή οπότε απορρίπτεται. Για απλούστευση γράφουμε τη λύση στη μορφή

$$V(u) = Ku^s . \tag{4.44}$$

Από τη συνθήκη ευστάθειας Εξ. (4.35) προκύπτει ότι $c > 0$, οπότε αφού $c = 2 - s > 0$ θα πρέπει να ισχύει ότι $s < 2$.

Αντικαθιστούμε το c στην Εξ. (4.41) και βρίσκουμε

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{2-s}} . \tag{4.45}$$

Για να είναι αυτές οι ελαφρά διαταραγμένες (σε σχέση με την κυκλική) τροχιές κλειστές (δηλαδή επαναλαμβανόμενες), πρέπει το $\sqrt{2-s}$ να είναι ρητός αριθμός (πηλίκο ακεραίων). Όμως για να οδηγεί το δυναμικό σε περιορισμένες τροχιές που να είναι όλες κλειστές πρέπει η γωνία Θ να είναι ανάλογη του π, όπου ο συντελεστής αναλογίας (όπως στην Εξ. (4.45)) να είναι ρητός αριθμός, όχι μόνο για τις ελαφρά διαταραγμένες τροχιές που αναφερθήκαμε στα προηγούμενα, αλλά για κάθε περιορισμένη τροχιά. Συνοψίζουμε, η σχέση που πρέπει να ισχύει για τις κλειστές τροχιές, δηλαδή η σχέση (4.45) δείξαμε ότι ισχύει μόνο για E_m που δεν διαφέρει πολύ από το E_{m0}. Χρειάζεται να βρούμε γενικότερες συνθήκες για τις οποίες κάθε περιορισμένη τροχιά είναι κλειστή.

Για δυναμικό της μορφής της Εξ. (4.44), το u_0 προσδιορίζεται από την Εξ. (4.33) από όπου έχουμε

$$u_0^{s-2} = -\frac{l^2}{mKs} . \tag{4.46}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι τα K, s δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Αφού $u_0 > 0$, ισχύει ότι $Ks < 0$. Έτσι πρέπει να εξετάσουμε δυο περιπτώσεις, α) $K > 0, s < 0$ και β) $K < 0, s > 0$. Στην περίπτωση α) το $V(u) \to 0$ όταν $u \to +\infty$ και $V(u) \to +\infty,$ όταν $u \to 0$.

Η ενέργεια για κυκλική τροχιά είναι

$$E_{m0} = W(u_0) = \frac{u_0^2}{2} + \frac{m}{l^2} K u_0^s . \tag{4.47}$$

Με χρήση και της Εξ. (4.46) καταλήγουμε στη σχέση

$$E_{m0} = u_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s} \right) > 0 . \tag{4.48}$$

Για το μονοδιάστατο δυναμικό έχουμε

$$W(u)=\frac{1}{2}u^2+\frac{m}{l^2}Ku^s . \tag{4.49}$$

Για αρκούντως μικρές τιμές του u έχουμε ότι $W(u)\approx\frac{m}{l^2}Ku^s$ και για αρκούντως μεγάλες τιμές του u καταλήγουμε στη σχέση $W(u)\approx\frac{1}{2}u^2$. Αυτή η συμπεριφορά του δυναμικού και επειδή $E_0>0$, οδηγούν στο ότι για ενέργειες E_m , τέτοιες που να ισχύει η σχέση $E_m>E_{m0}$ οι τροχιές είναι πάντοτε περιορισμένες. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το όριο της φασικής καμπύλης που συνδέεται με περιορισμένες τροχιές καθώς η ενέργεια τείνει στο άπειρο. Για τα σημεία (επαναφοράς) στα οποία αντιστοιχούν τα u_1,u_2 όταν $E>>E_{m0}$, ισχύουν

$$\begin{aligned} &u_1\to 0\\ &\frac{1}{2}u_2^2\approx E_m. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Για τον προσδιορισμό της οριακής φασικής καμπύλης όταν $E_m\to\infty$, χρησιμοποιούμε την εξίσωση της ενέργειας, Εξ. (4.23) και την Εξ. (4.44) οπότε βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}u^2+\frac{m}{l^2}Ku^s=E_m . \tag{4.51}$$

Αφού $s<0$, όταν $E_m\to\infty$ μπορούμε να αγνοήσουμε τον τρίτο όρο του πρώτου μέλους και με χρήση της δεύτερης σχέσης από την Εξ. (4.50) βρίσκουμε

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=u_2^2=2E_m . \tag{4.52}$$

Από αυτήν συμπεραίνουμε ότι το όριο της φασικής καμπύλης καθώς το $E_m\to\infty$, είναι ένα ημικύκλιο ακτίνας $\sqrt{2E_m}$. Οπότε το εμβαδόν της περικλειόμενης επιφάνειας είναι $A=\pi E_m$. Η συμπεριφορά στο όριο της γωνίας $\varTheta(E_m)$ μπορεί να βρεθεί από τις Εξ. (4.30) και (4.39), οπότε έχουμε

$$\lim_{E_m\to\infty}\varTheta(E_m)=\frac{1}{2}\frac{\partial(\pi E_m)}{\partial E_m}=\frac{\pi}{2} . \tag{4.53}$$

Οπότε σε συνδυασμό με την Εξ. (4.45) βρίσκουμε ότι η συνθήκη για να είναι όλες οι περιορισμένες τροχιές κλειστές είναι

$$\sqrt{2-s}=2 . \tag{4.54}$$

Επομένως αφού $s=-2$ η δυναμική συνάρτηση (το δυναμικό) είναι

$$V=Ku^{-2}=Kr^2 . \tag{4.55}$$

Αυτό είναι το δυναμικό του ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή.

Τώρα θα αναλύσουμε την περίπτωση β) με $K<0, s>0$. Επειδή ισχύει η συνθήκη ευστάθειας χρειάζεται να εξεταστεί μόνο η περίπτωση $0<s<2$. Το μονοδιάστατο δυναμικό είναι

$$W(u)=\frac{1}{2}u^2-\frac{m}{l^2}|K|u^s . \tag{4.56}$$

Για αρκούντως μεγάλες τιμές του u ο επικρατέστερος όρος είναι ο πρώτος, δηλαδή $W(u)\approx\frac{1}{2}u^2$. Για μικρές τιμές του u το δυναμικό αυτό τείνει στο μηδέν και κυριαρχεί ο δεύτερος όρος, δηλαδή $W(u)\approx-\frac{m}{l^2}|K|u^s$. Επομένως, όπως μπορεί να διαπιστωθεί και από την Εξ. (4.48), η ελάχιστη τιμή του $W(u)$, η οποία καθορίζει την κυκλική τροχιά, είναι αρνητική.

Όλες οι περιορισμένες τροχιές έχουν ενέργειες E_m, στο διάστημα $0>E_m>E_{m0}$. Η οριακή τροχιά για $E_m\to0^-$ έχει μόνο ένα αψιδωτό σημείο σε πεπερασμένη απόσταση (το άλλο είναι στο άπειρο), διότι σε αυτή την περίπτωση $u_1=\frac{1}{r_2}\to0$. Αυτό σημαίνει ότι όταν $E_m=0$ η τροχιά είναι ανοιχτή. Επομένως

$$\lim_{E_m\to0}\Theta(E_m)=\varphi_0 .$$

Η φ_0 δίνεται από την Εξ. (4.32) για $E_m=0$. Επομένως ισχύει

$$\lim_{E_m\to0}\Theta(E_m)=\int_0^{u_2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{-2W(u)}} . \tag{4.57}$$

Η u_2 βρίσκεται από τη σχέση

$$W(u_2)=0 . \tag{4.58}$$

Από τις Εξ. (4.56) και (4.58) βρίσκουμε ότι ισχύει η σχέση

$$u_2^{s-2}=\frac{l^2}{2m|K|} . \tag{4.59}$$

Το μονοδιάστατο δυναμικό παίρνει τη μορφή

$$W(u)=\frac{1}{2}u^2\left(1-\left(\frac{u}{u_2}\right)^{s-2}\right). \tag{4.60}$$

Από αυτήν και την Εξ. (4.57) βρίσκουμε

$$\lim_{E_m\to0}\Theta(E_m)=\int_0^{u_2}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\left(\frac{u}{u_2}\right)^{s-2}-1}} . \tag{4.61}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής σύμφωνα με τη σχέση

$$x^2 = \left(\frac{u}{u_2}\right)^{2-s} . \tag{4.62}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{2}{2-s}\frac{\mathrm{d}x}{x} . \tag{4.63}$$

Με τον συνδυασμό των τριών τελευταίων σχέσεων καταλήγουμε στη σχέση

$$\lim_{E_m \to 0} \Theta(E_m) = \frac{2}{2-s}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2-s} . \tag{4.64}$$

Αυτό το αποτέλεσμα συμπίπτει με αυτό της Εξ. (4.45) μόνον αν $\sqrt{2-s} = 2-s$, πράγμα που ισχύει μόνον όταν $s=1$. Επομένως σε αυτή την περίπτωση, το δυναμικό για όλες τις περιορισμένες κλειστές τροχιές είναι της μορφής

$$V = -|K|u = -\frac{|K|}{r} . \tag{4.65}$$

Από τα βασικά δυναμικά που υπάρχουν στη φύση, πρόκειται για το νευτώνειο δυναμικό, συμπεριλαμβανομένου του ελκτικού δυναμικού Coulomb. Το συμπέρασμα είναι ότι τα μόνα κεντρικά δυναμικά τα οποία οδηγούν σε κλειστές τροχιές είναι το δυναμικό τύπου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή και το νευτώνειου τύπου δυναμικό, συμπεριλαμβανομένου του ελκτικού δυναμικού Coulomb. Αυτή είναι η διατύπωση του θεωρήματος του Beltrand.

4. Θεώρημα virial

Η λέξη virial είναι από τα Λατινικά όπου σημαίνει δύναμη ή ενέργεια. Θα αποδείξουμε το θεώρημα virial. Αυτό είναι ένα χρήσιμο θεώρημα της μηχανικής το οποίο είναι στατιστικού χαρακτήρα. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα σωματίων πάνω στα οποία ασκούνται δυνάμεις (ενεργητικές και δυνάμεις δεσμών). Υποθέτουμε ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι συνάρτηση τετραγωνικής μορφής ως προς τις ταχύτητες. Υποθέτουμε ακόμη ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε πεπερασμένο μέρος του χώρου με πεπερασμένες ταχύτητες, μπορεί το σύστημα να είναι και περιοδικό. Θα δείξουμε ότι

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle .$$

Το δεύτερο μέλος λέγεται το (ή η) virial (του Clausius) του συστήματος. Οι μέσοι όροι λαμβάνονται ως προς τον χρόνο και για χρονικό διάστημα ίσο με μια περίοδο ή για χρονικό διάστημα που τείνει στο ∞.

Λύση

Ξεκινούμε από τις σχέσεις $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i,\ \ G = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$. Στη συνέχεια βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i .$$

Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους γίνεται

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = 2T \;.$$

Ο δεύτερος όρος του δευτέρου μέλους γίνεται, με χρήση του θεμελιώδους νόμου του Νεύτωνα,

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \;.$$

Επομένως βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = 2T + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \;.$$

Λαμβάνουμε τη μέση τιμή του πρώτου και του δεύτερου μέλους αυτής της σχέσης για το χρονικό διάστημα $0 < t < \tau$, οπότε έχουμε

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left\langle 2T \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle ,$$

Οπότε

$$\left\langle 2T \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \frac{1}{\tau}\big(G(\tau) - G(0)\big) \;.$$

Αν η κίνηση είναι περιοδική και ως τ ληφθεί μια περίοδος, τότε $G(\tau) = G(0)$, οπότε το δεύτερο μέλος είναι μηδέν. Αν η κίνηση δεν είναι περιοδική αλλά όλες οι συντεταγμένες και ταχύτητες είναι πεπερασμένες οπότε και η G είναι πεπερασμένη (άρα είναι φραγμένη) , τότε λαμβάνοντας τον χρόνο τ αρκούντως μεγάλο, μπορούμε να πούμε ότι η έκφραση του δευτέρου μέλους μπορεί να γίνει αρκούντως μικρή, δηλαδή μπορεί να ληφθεί ίση με μηδέν. Έτσι καταλήγουμε τελικώς στη σχέση

$$\left\langle T \right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle .$$

Αυτή η σχέση εκφράζει το θεώρημα virial.

Προβλήματα

1. Θεωρήστε σωμάτιο μάζας m που κινείται μέσα σε δεδομένο πεδίο βαρύτητας και η δυναμική του ενέργεια είναι $V=V(r)$, δηλαδή ασκείται πάνω του κεντρική δύναμη. Θεωρήστε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις σφαιρικές συντεταγμένες του σωματίου r,θ,φ. Υποθέστε ότι $\upsilon \ll c$ και ότι ισχύει η κλασική θεωρία του Νεύτωνα για τη βαρύτητα. Βρείτε τη λαγκρανζιανή και από τις εξισώσεις των Euler-Langrange βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για τις γενικευμένες συντεταγμένες. Δείξτε ότι η κίνηση γίνεται σε ένα σταθερό επίπεδο. Στη συνέχεια υποθέστε ότι η κίνηση γίνεται στο σταθερό επίπεδο για το οποίο $\theta=\pi/2$, οπότε ουσιαστικά μπορείτε να εργαστείτε σε πολικές συντεταγμένες r,φ. Τώρα η λαγκρανζιανή εξαρτάται μόνο από αυτές τις δυο γενικευμένες συντεταγμένες r,φ. Δείξτε ότι διατηρείται η στροφορμή περί άξονα κάθετο στο επίπεδο κίνησης που περνά από την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι διατηρείται η μηχανική ενέργεια $E=T+V$. Δείξτε ότι για δεδομένη στροφορμή l, μπορείτε να ορίσετε μια ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\mathrm{eff}}=V_{\mathrm{eff}}(l,r)$ για το σωμάτιο έτσι που το πρόβλημα να γίνει μονοδιάστατο πρόβλημα με μόνη γενικευμένη συντεταγμένη το r. Σε ότι ακολουθεί υποτίθεται η τροχιά είναι ευσταθής. Δείξτε ότι όταν η τροχιά του σωματίου είναι κύκλος ακτίνας r_0 τότε το V_{eff} είναι ελάχιστο για $r=r_0$. Προσδιορίστε το r_0. Στη συνέχεια υποθέστε ότι η τροχιά είναι περίπου κύκλος και ότι το r δεν είναι ακριβώς ίσο με r_0 αλλά υπάρχει μια μικρού πλάτους ταλάντωση του r με κέντρο το r_0. Αναπτύξτε την ενεργό δυναμική ενέργεια στην περιοχή του r_0 και κρατήστε μέχρι τον όρο δευτέρου βαθμού ως προς την απομάκρυνση $r-r_0$. Βρείτε την κυκλική συχνότητα ω_φ «ταλάντωσης» του φ, δηλαδή την κυκλική συχνότητα της γωνιακής κίνησης $\varphi=\varphi(t)$.

Από το παραπάνω ανάπτυγμα της ενεργού δυναμικής ενέργειας προσδιορίστε την κυκλική συχνότητα ω_r της ακτινικής ταλάντωσης. Αν αυτές οι δυο συχνότητες είναι ίσες, τότε η κίνηση αντιστοιχεί σε επαναλαμβανόμενη κλειστή σταθερή τροχιά. Αν οι δυο συχνότητες διαφέρουν λίγο, τότε θα είχαμε αυτό που λέμε μετάπτωση της τροχιάς. Κάντε εφαρμογή για την περίπτωση της κίνησης πλανητών οπότε σύμφωνα με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης και αν ο Ήλιος είναι ακίνητος τότε έχουμε

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}.$$

Βρείτε τις δυο συχνότητες, ω_φ,ω_r. Τι βλέπετε;

Η Γενική Σχετικότητα δίνει μια μικρή (για το πλανητικό μας σύστημα) διόρθωση για τη δυναμική ενέργεια που μπαίνει στην ανωτέρω νευτώνεια περιγραφή. Επίσης ο χρόνος που υπεισέρχεται δεν είναι ο συνήθης απόλυτος χρόνος, t, της Νευτώνειας μηχανικής, αλλά ο ιδιόχρονος τ της Γενικής Σχετικότητας, οπότε $\varphi=\varphi(\tau)$, $r=r(\tau)$. Ο όρος που πρέπει να προστεθεί στην ενέργεια ως μικρή διόρθωση είναι $-\dfrac{GMm(L/m)^2}{c^2r^3}$. Κάντε την ανωτέρω διαδικασία και αφού προσδιορίσετε τα ω_φ,ω_r βρείτε τη διαφορά τους $\omega_\varphi-\omega_r\left(=\dfrac{3GM}{r_0}\omega_\varphi\right)$, υποθέστε ότι $\omega_\varphi+\omega_r\approx 2\omega_\varphi$. Αυτή η διαφορά έχει τη μεγαλύτερη τιμή για τον πλανήτη Ερμή. Κάντε εφαρμογή για την περίπτωση του Ερμή. Ισχύουν, περίοδος κίνησης του Ερμή περί τον Ήλιο $T=7,60\times10^6\,\mathrm{s}$, γήινο έτος $T_{\mathrm{E}}=3,16\times10^7\,\mathrm{s}$, μάζα Ήλιου $M=1,99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, μέση ακτίνα τροχιάς του Ερμή $r_0=5,80\times10^{10}\,\mathrm{m}$, $G=6,67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$, $c=3,00\times10^8$ m/s. Βρείτε τη γωνία μετάπτωσης ανά περιφορά περί τον Ήλιο. Θα βρείτε ότι η τιμή της γωνίας μετάπτωσης του Ερμή σε χρόνο ίσο με 100 γήινα χρόνια είναι 43 δεύτερα λεπτά της μοίρας. Με χρήση λογισμικού πακέτου σχεδιάστε την τροχιά του Ερμή, $r=r(\varphi)$, για πολλές περιφορές. Αν το κρίνετε, μπορείτε να δώσετε μη ρεαλιστικές τιμές ώστε να φανεί η μετάπτωση.

2. Το διάστημα στη μετρική Schwarzschild δίνεται από τη σχέση

$$(\mathrm{d}s)^2=(c\mathrm{d}\tau)^2=c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)(\mathrm{d}t)^2-\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-\dfrac{2GM}{c^2r}}-r^2(\mathrm{d}\theta)^2-r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\,.$$

Η μετρική αυτή ισχύει για το εξωτερικό σφαιρικής κατανομής μάζας M , που μπορεί και να πάλλεται ακτινικά. Τα t,r,θ,φ είναι οι συντεταγμένες του συγκεκριμένου σημείου του τετραχώρου. Το φυσικό τους νόημα είναι ότι πρόκειται για τις συντεταγμένες Minkowski όταν δεν υπάρχει βαρύτητα, ή είναι οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν σε παρατήρηση από πολύ μακρινές αποστάσεις από την κατανομή μάζας, οπότε ισχύει $\frac{2GM}{c^2r}<<1$. Οι χωρικές συντεταγμένες r,θ,φ είναι οι γνωστές σφαιρικές συντεταγμένες. Προσδιορίστε τη λαγκρανζιανή δοκιμαστικού σωματίου μέσα στο παραπάνω πεδίο βαρύτητας. Υποθέστε ότι εκτελεί περιορισμένη κίνηση, δηλαδή δεν φτάνει στο άπειρο και επίσης δεν πλησιάζει πολύ κοντά στο κέντρο της κατανομής. Υποθέστε ότι $\theta=\frac{\pi}{2}$. Ο χρόνος είναι ο ιδιόχρονος τ .Βρείτε τρία ολοκληρώματα της κίνησης. Εντοπίστε τον πρόσθετο όρο στην ενεργό δυναμική συνάρτηση σε σχέση με την περίπτωση της μη Σχετικιστικής Μηχανικής, δηλαδή τον όρο $-\frac{GMm(l/m)^2}{c^2r^3}$. Υποθέστε ότι $u=\frac{1}{r}$ και δείξτε ότι $\varphi-\varphi_0=\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\alpha u^3-u^2+\beta u+\gamma\right)}}$, $(\alpha,\beta,\gamma$ σταθερές$)$, και $u=u_0,\varphi=\varphi_0$ είναι ένα σημείο της τροχιάς. Αυτή η σχέση για μικρό α οδηγεί στον υπολογισμό της μετάπτωσης της τροχιάς ενός πλανήτη που είναι $\Delta\varphi\approx 2\pi+\pi\frac{3GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_P}\right)$, τα r_A,r_P αντιστοιχούν στο σύνηθες αφήλιο και περιήλιο (της περίπου) ελλειπτικής τροχιάς. Αν υποθέσουμε ότι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης είναι a και η εκκεντρότητά της είναι ε, έχουμε τη σχέση $\Delta\varphi\approx 2\pi+\pi\frac{6GM}{c^2a(1-\varepsilon^2)}$. Κοιτάξτε τους πίνακες με τα χαρακτηριστικά των πλανητών μας και εξηγήστε γιατί το φαινόμενο είναι έντονο μόνο για τον Ερμή.

3. Για την κίνηση σωματίου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων με δυναμική συνάρτηση $V(r)$, δείξτε ότι στη μη σχετικιστική περίπτωση για την τροχιά έχουμε τη σχέση,

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2+\frac{2m}{l^2}V(1/u)=\frac{2m}{l^2}E,\;\; u=\frac{1}{r}\,.$$

Τα r,φ είναι οι γνωστές πολικές συντεταγμένες με αρχή των αξόνων το ελκτικό κέντρο. Είναι γνωστό ότι αν θεωρήσουμε ότι ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης ή κάποιος ανάλογος (π.χ. του Coulomb), αυτό οδηγεί στην παρακάτω λύση η οποία εκφράζει επαναλαμβανόμενη τροχιά της μορφής

$\frac{1}{r}=C\left[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right]$, συγκεκριμένα είναι έλλειψη. Οι σταθερές C,ε,φ_0 εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και τη συγκεκριμένη αλληλεπίδραση, ε είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς.

Κάντε χρήση της Ειδικής Σχετικότητας και δείξτε ότι ισχύει η σχέση,

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2+\frac{2m}{l^2}\left(1+\frac{E}{mc^2}\right)V\left(1/u\right)-\frac{1}{c^2l^2}\left(V\left(1/u\right)\right)^2=\frac{2m}{l^2}E\left(1+\frac{E}{2mc^2}\right).$$

Βρείτε τη σχέση που ισχύει όταν $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$. Στην περίπτωση βαρυτικής έλξης έχουμε $k = GMm$. Με βάση τα προηγούμενα, δικαιολογήστε γιατί μπορεί να υπάρχει μετάπτωση της τροχιάς. Υπολογίστε την για την περίπτωση του Ερμή και συγκρίνετέ την με αυτήν της Γενικής Σχετικότητας. Πρέπει να βρείτε, $\Delta\varphi \approx 2\pi + \pi \frac{GM}{c^2 a(1-\varepsilon^2)}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάποιο λογισμικό και να σχεδιάσετε το $r = r(\varphi)$ για πολλές περιφορές. Αν νομίζετε, μπορείτε να δώσετε μη ρεαλιστικές τιμές στις σταθερές ώστε να φανεί πιο έντονα το φαινόμενο. Σε αυτή την περίπτωση, που έχουμε μόνο Ειδική Σχετικότητα, η μετάπτωση είναι περίπου το 1/6 της μετάπτωσης από την περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας. Σε 100 γήινα χρόνια η μετάπτωση είναι περίπου 7,2 δεύτερα λεπτά της μοίρας.

4. Αναφερόμαστε σε επίπεδη κίνηση, όλα τα σώματα έχουν επίπεδα σχήματα. Μια στεφάνη ακτίνας a με μάζα m ομοιόμορφα κατανεμημένη, κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο δηλαδή κεκλιμένη ευθεία, που είναι η υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου, μια σφήνα. Η σφήνα έχει μάζα M και η υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου της σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο (ακίνητο) επίπεδο, ευθεία. Η μια κάθετη πλευρά του τριγώνου μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή στο ακίνητο οριζόντιο επίπεδο. Οι κινήσεις γίνονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Διαλέξτε ως γενικευμένες συντεταγμένες την x που καθορίζει την (οριζόντια) θέση του κεκλιμένου επιπέδου ως προς το οριζόντιο επίπεδο και την s που καθορίζει τη θέση του κέντρου της στεφάνης ως προς το κεκλιμένο επίπεδο. Βρείτε τέσσερις ανεξάρτητες σταθερές της κίνησης για το σύστημα.

5. Έστω μη σχετικιστικό σύστημα σωματίων στα οποία ασκούνται μόνο αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους (κλειστό σύστημα). Τα αντίστοιχα δυναμικά εξαρτώνται μόνο από τις μεταξύ των σωματιδίων αποστάσεις. Δείξτε ότι διατηρείται η ολική ενέργεια του συστήματος, η ολική ορμή του συστήματος και η ολική στροφορμή του συστήματος.

6. Εφαρμόστε το θεώρημα virial για την περίπτωση που για τις δυνάμεις ισχύουν, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$. Στη συνέχεια υποθέστε ότι έχετε ένα μόνο σωμάτιο στο οποίο ασκείται κεντρική ελκτική δύναμη με δυναμική συνάρτηση, $V = V(r) = ar^{n+1} < 0$, δείξτε ότι για την κινητική και τη δυναμική ενέργεια ισχύει $\langle T \rangle = -\frac{n+1}{2}\langle V \rangle$.

Δείξτε ότι αυτή η σχέση μπορεί επίσης να προκύψει όταν το V είναι ομογενής συνάρτηση της συντεταγμένης r, με βαθμό ομογένειας $n+1$. Βεβαιωθείτε ότι για την περίπτωση $n = -2$, ελκτική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου, έχουμε $\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle$.

7. Με χρήση του διανύσματος Laplace-Runge-Lenz βρείτε την εξίσωση της τροχιάς για το πρόβλημα Kepler.

8. Θεωρήστε το γνωστό πρόβλημα των δυο σωμάτων. Πρόκειται για δυο υλικά σημεία. Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι τέτοια που η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι της μορφής $\frac{1}{2}kr^2$, όπου r η μεταξύ τους απόσταση και k θετική σταθερά. Βρείτε τη λαγκρανζιανή του συστήματος. Πόσες (γνήσιες) συντεταγμένες έχει το πρόβλημα; Σύμφωνα με τη μεθοδολογία περί κλειστών συστημάτων που αναφέραμε, πόσες ανεξάρτητες σταθερές κίνησης υπάρχουν;

Υπόδειξη: Είναι βολικό να ξεκινήσετε χρησιμοποιώντας διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ για τα δυο σωμάτια. Είναι χρήσιμο να αξιοποιήσετε το γεγονός ότι η ολική λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δυο λαγκρανζιανών που δεν έχουν κοινές συντεταγμένες. Οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη μοναδική αρχική λαγκρανζιανή, είναι οι ίδιες με αυτές που προκύπτουν από τις δυο λαγκρανζιανές μαζί. Αυτό είναι σημαντικό διότι ορίζουν δυο διαφορετικές ενεργειακές συναρτήσεις. Με χρήση των συμμετριών των λαγκρανζιανών, πρέπει να καταλήξετε σε τόσες σταθερές κίνησης, όσες προβλέψατε παραπάνω.

9. Θεωρήστε την περίπτωση του γνωστού μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή. Διατηρείται η φυσιολογική λαγκρανζιανή, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση $L = T - V$;

10. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2}k_1\dot{x}^2 - k_2 xt,\ k_1, k_2$ θετικές σταθερές . Βρείτε αν η ποσότητα $F = k_1\dot{x} + \frac{k_2}{2}t^2$, η οποία μάλιστα εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, διατηρείται ή όχι κατά την κίνηση που προκύπτει από την ανωτέρω λαγκρανζιανή.

11. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + at\dot{x} + bx^2,\ m, a, b$ σταθερές. Υπολογίστε την ενεργειακή συνάρτηση $h = h(q, \dot{q}, t)$. Θα δείτε ότι δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο. Είναι η h σταθερά της κίνησης;

12. Έστω η λαγκρανζιανή κάποιου συστήματος,

α) $L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (aq_1 + bq_2),\ a, b$ σταθερές. Βεβαιωθείτε ότι υπάρχουν οι εξής 4 ανεξάρτητες σταθερές κίνησης. Αυτό είναι σύμφωνο με τη θεωρία όπου για 2 συντεταγμένες αναμένονται 4 σταθερές κίνησης.

$$F_1 = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \left(aq_1 + bq_2\right) = \text{σταθ.}, F_2 = m\left(b\dot{q}_1 - a\dot{q}_2\right) = \text{σταθ.}$$

$$F_3 = m\dot{q}_2 + bt = \text{σταθ.}, F_4 = q_1 - \frac{a}{2m}t^2 - \dot{q}_1 t = \text{σταθ.}\ .$$

β) Προσπαθήστε να βρείτε 3 συντηρητικές ποσότητες (ολοκληρώματα κίνησης που δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο). Υπόδειξη: Μπορείτε να λάβετε υπόψη ότι η λαγκρανζιανή ισούται με άθροισμα δυο λαγκρανζιανών που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Επίσης μπορείτε να αποδείξετε τη δεύτερη σχέση , ξεκινώντας με τον μετασχηματισμό συντεταγμένων (σημείου), $Q_1 = aq_1 + bq_2,\ Q_2 = q_2$ κ.λπ.

13. Θεωρήστε σωμάτιο που κινείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας, g . Η κίνηση γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο και περιγράφεται ως προς αδρανειακό σύστημα. Ο κατακόρυφος άξονας y , είναι θετικός προς τα κάτω, ο οριζόντιος είναι ο x . Βρείτε τη λαγκρανζιανή σε αυτές τις συντεταγμένες. Με χρήση των εξισώσεων Lagrange βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Βρείτε την ενεργειακή συνάρτηση και την ενέργεια με αυτές τις συντεταγμένες. Είναι αυτά τα μεγέθη σταθερές της κίνησης; Στη συνέχεια θεωρήστε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς αρχίζει να κινείται προς τα κάτω έτσι που η θέση της αρχής του ως προς το προηγούμενο να είναι $y_0 = \frac{1}{2}gt^2, x_0 = 0$. Οι συντεταγμένες ως προς αυτό είναι x', y', ο άξονας y' είναι θετικός προς τα κάτω. Βρείτε τον σημειακό μετασχηματισμό συντεταγμένων μεταξύ των δυο συστημάτων. Ποια είναι η λαγκρανζιανή με συντεταγμένες τις x', y'. Βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις νέες συντεταγμένες. Εκφράστε ως προς τις νέες συντεταγμένες την ενέργεια και την ενεργειακή συνάρτηση (ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς). Αυτές διατηρούνται; Στη συνέχεια βρείτε τη λαγκρανζιανή «πηγαίνοντας πάνω» στο επιταχυνόμενο δεύτερο σύστημα αναφοράς, με συντεταγμένες τις x', y'. Πως σχετίζεται με τη λαγκρανζιανή που υπολογίσατε προηγουμένως με συντεταγμένες τα x', y'. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης με χρήση των εξισώσεων Lagrange. Συμφωνούν με τις σχέσεις που βρήκατε για αυτές τις συντεταγμένες προηγουμένως; Ποια είναι η ενεργειακή συνάρτηση και η ενέργεια σε αυτή την περίπτωση; Είναι σταθερές της κίνησης;

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 4

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.
[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β’ Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.
[3] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.
[4] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.
[5] E. A. Desloge, *Classical Mechanics*, *Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.
[6] Α. Μαυραγάνης, *Αναλυτική Μηχανική*, ΕΜΠ, 1998.
[7] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.
[8] E. Whittaker, *A Treatise in the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, 1965.
[9] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 1977.
[10] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, 1987.
[11] I. Damian, *Symmetries and Conservation Laws in Theories with Higher Derivatives*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 39, pp. 2141, 2000.
[12] J. L. C. Quilantan, J. L. del Rio-Correa and M. A. R. Medina, *Alternative proof of Bertrand’s theorem using phase space approach*, Revista Mexicana de Fisica, Vol. 42, 5, pp. 867-877, 1996.
[13] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.
[14] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

Κεφάλαιο 5: Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός της Δυναμικής στην Ειδική Σχετικότητα

Σε ό,τι ακολουθεί, μπορεί να είναι χρήσιμο το Παράρτημα Π4. Σε αυτό το Κεφάλαιο, θα περιοριστούμε στην κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η γενική περίπτωση συστήματος τέτοιων σωματιδίων με μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις είναι πολύπλοκη στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας. Ακόμη και χωρίς αλληλεπιδράσεις οι γνωστές έννοιες από τη νευτώνεια μηχανική, όπως κέντρο μάζας κ.λπ., πρέπει να οριστούν με ιδιαίτερη προσοχή. Για την περίπτωση που θα αναπτύξουμε εδώ, υπάρχουν δυο τρόποι αντιμετώπισης, ο ένας τρόπος είναι πιο εύκολος και στηρίζεται σε απλές γενικεύσεις της νευτώνειας μηχανικής ώστε να συμπεριλάβει τα σχετικιστικά φαινόμενα σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, σύστημα (του) Lorentz. Ο άλλος τρόπος είναι ο (εμφανώς) συναλλοίωτος φορμαλισμός [(manifestly) covariant formulation]. Σε αυτόν τον φορμαλισμό ο χρόνος μαζί με τον χώρο σχηματίζουν τον χωρόχρονο και εισάγονται ως οι τέσσερις συνιστώσες ενός τετραδιανύσματος. Γενικώς, όλα τα φυσικά μεγέθη είναι συνιστώσες τανυστών, τετραδιανυσμάτων, είναι σπίνορες ή είναι αναλλοίωτα μεγέθη (scalar, βαθμωτά). Με αυτό τον τρόπο γίνεται προφανές το συναλλοίωτο των σχέσεων σε μετασχηματισμούς του Lorentz. Αυτός είναι ο πιο κομψός τρόπος και ανεξάρτητος από το (αδρανειακό) σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται, αλλά είναι λίγο πιο δύσκολος στην κατανόηση και χρήση.

5.1 Απλή διαδικασία για την εύρεση μιας σχετικιστικής λαγκρανζιανής

Στην αρχή θα ακολουθήσουμε την πρώτη διαδικασία που αναφέραμε προηγουμένως. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια λαγκρανζιανή που μας οδηγεί στις εξισώσεις του Lagrange με χρήση της αρχής του Hamilton. Έχουμε την αρχή μεταβολών του Hamilton

$$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0 \tag{5.1}$$

Οι σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης που πρέπει να βρούμε για ένα σωματίδιο, σε καρτεσιανές συντεταγμένες και αδρανειακό σύστημα αναφοράς (του Lorentz), είναι

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = F_i, \;\; p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad i = 1,2,3\,. \tag{5.2}$$

Μια κατάλληλη λαγκρανζιανή, με δυναμική συνάρτηση $V(x,t)$ η οποία δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες, είναι η

$$\begin{aligned} &L(x,\dot{x},t) = L_{\text{free}}(x,\dot{x},t) + L_{\text{inter}} = L_{\text{free}} - V(x,t) \\ &x = (x_1,x_2,x_3),\; \dot{x}(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3) \end{aligned} \tag{5.3}$$

όπου $L_{\text{free}}(x,\dot{x},t)$ είναι η λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου (ελεύθερη λαγκρανζιανή, δηλαδή χωρίς αλληλεπίδραση) και $L_{\text{inter}} = -V(x,t)$ είναι η λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης με εξωτερική δυναμική συνάρτηση (δυναμικό). Στη συνέχεια κάνουμε την ακόλουθη επιλογή για την ελεύθερη λαγκρανζιανή,

$$L_{\text{free}}(x,\dot{x},t) = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2) \tag{5.4}$$

Υπάρχουν και άλλες επιλογές για τη λαγκρανζιανή που οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις του Lagrange, αλλά αυτή εδώ γίνεται διότι οδηγεί στο ότι η παρακάτω Εξ. (5.9) δίνει και την ενέργεια του συστήματος και επίσης οι συζυγείς ορμές υπολογίζονται όπως και στη νευτώνεια μηχανική. Η αρχή μεταβολών του Hamilton μας οδηγεί στις εξισώσεις του Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0, \quad i=1,2,3\,. \tag{5.5}$$

Έχουμε όμως

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}=p_i, \quad i=1,2,3\,. \tag{5.6}$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης για αυτή τη λαγκρανζιανή των Εξ. (5.3) και Εξ. (5.4) είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}=F_i, \quad i=1,2,3\,. \tag{5.7}$$

Βρήκαμε τις Εξ. (5.2) που θέλαμε, επομένως αυτή η επιλογή της λαγκρανζιανής είναι μια σωστή επιλογή. Παρά τις δυσκολίες που αναφέραμε για συστήματα πολλών σωματιδίων, μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις για σύστημα με πολλά σωματίδια, μη αλληλεπιδρώντα μεταξύ τους, θεωρώντας ως λαγκρανζιανή του συστήματος το άθροισμα των λαγκρανζιανών των επιμέρους σωματιδίων για συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για N σωματίδια η γενικευμένη ορμή του συστήματος θα είναι κατά τα γνωστά

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1,2,\ldots,3N\,. \tag{5.8}$$

Η ενεργειακή συνάρτηση είναι και σε αυτή τη σχετικιστική περίπτωση

$$h=\sum_{i=1}^{3N}\dot{q}_i p_i-L\,. \tag{5.9}$$

Αν $L=L(q,\dot{q})$, δηλαδή η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, τότε η h διατηρείται κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος αφού ισχύει η γνωστή σχέση

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Γενικώς η ανωτέρω σχετικιστική λαγκρανζιανή $L=L(q,\dot{q},t)$, δεν είναι άθροισμα ομογενών συναρτήσεων ως προς τις ταχύτητες άρα ούτε και ομογενής βαθμού 2, γι' αυτό δεν μπορούμε να πούμε εκ των προτέρων ότι η h είναι η ενέργεια του συστήματος.

Αν κάνουμε τον υπολογισμό της h από τις Εξ. (5.3), (5.4) και Εξ. (5.9), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} h &= \sum_{l=1}^{N}\frac{m_l {\upsilon_l}^2}{\sqrt{1-{\beta_l}^2}}+\sum_{l=1}^{N}m_l c^2\sqrt{1-{\beta_l}^2}+V(x,t) \\ &= \sum_{l=1}^{N}\frac{m_l c^2}{\sqrt{1-\beta_l^2}}+V(x,t)=T(\dot{x})+\sum_{l=1}^{N}m_l c^2+V(x,t)=E \\ & x=(x_1,x_2,\ldots,x_{3N}), \quad \dot{x}=(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\ldots,\dot{x}_{3N}) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Παρατηρούμε ότι και στη σχετικιστική περίπτωση η h είναι η ολική ενέργεια (δηλαδή κινητική+δυναμική) και μάλιστα είναι η σχετικιστική ενέργεια αφού περιλαμβάνει και τις ενέργειες ηρεμίας των σωματιδίων. Η ολική ενέργεια διατηρείται αν η δυναμική συνάρτηση, άρα και η λαγκρανζιανή, δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο.

Έστω η περίπτωση της εξωτερικής ηλεκτρομαγνητικής επίδρασης σε φορτισμένο κινούμενο σωματίδιο, η κατάλληλη λαγκρανζιανή είναι

$$\begin{aligned} &L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q_\mathrm{e}\Phi + q_\mathrm{e}\vec{A}\cdot\vec{\upsilon} \\ &\Phi = \Phi(x,t),\ \vec{A} = \vec{A}(x,t). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Εδώ η λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης είναι

$$L_\mathrm{inter} = -q_\mathrm{e}\Phi + q_\mathrm{e}\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}\,. \tag{5.12}$$

Η γενικευμένη ορμή είναι

$$p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + q_\mathrm{e}A_i, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{5.13}$$

Η ενεργειακή συνάρτηση ισούται με τη σχετικιστική ενέργεια, συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} &h = \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + e_\mathrm{q}\Phi(x,t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e_\mathrm{q}\Phi(x,t) \\ &= T(\dot{x}) + mc^2 + e_\mathrm{q}\Phi(x,t) = E \\ &x = (x_1, x_2, x_3),\ \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \\ &E = h. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Δηλαδή η σχετικιστική ενέργεια δίνεται από την ίδια σχέση Εξ. (5.10). Η ενεργειακή συνάρτηση και η ίση της (σχετικιστική) μηχανική ενέργεια εξαρτώνται μόνο από το βαθμωτό δυναμικό. Η σχετικιστική μηχανική ενέργεια είναι άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας, της κινητικής ενέργειας και του όρου της δυναμικής συνάρτησης που περιέχει το βαθμωτό δυναμικό, αυτή είναι ουσιαστικά η δυναμική ενέργεια. Στο κινούμενο σωματίδιο μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ασκείται ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_\mathrm{e} = q_\mathrm{e}\vec{E} = -q_\mathrm{e}\vec{\nabla}\Phi(x,t) - q_\mathrm{e}\dfrac{\partial\vec{A}(x,t)}{\partial t}$ και μαγνητική δύναμη $\vec{F}_\mathrm{m} = q_\mathrm{e}\vec{\nabla}\times\vec{A}(x,t)$.

Στη μηχανική ενέργεια υπεισέρχονται όροι που σχετίζονται με την ηλεκτρική δύναμη που προκύπτει από την κλίση του βαθμωτού δυναμικού, δηλαδή ο όρος είναι το βαθμωτό δυναμικό επί το φορτίο. Η μαγνητική δύναμη δεν προκύπτει με τέτοιο τρόπο και δεν παράγει έργο κατά την κίνηση του φορτίου. Ούτε ο άλλος όρος της ηλεκτρικής δύναμης προκύπτει έτσι, είναι όρος που οφείλεται στην ηλεκτρομαγνητική επαγωγή και μπορεί να παράγει έργο επί του σωματιδίου. Τελικώς συμπεραίνουμε ότι οι όροι που περιέχουν το διανυσματικό δυναμικό δεν παίζουν ρόλο στη μηχανική ενέργεια και επομένως το διανυσματικό δυναμικό δεν υπεισέρχεται στη μηχανική ενέργεια. Έχουμε αναφέρει ξανά ότι μπορεί να οριστεί ως δυναμική ενέργεια, το μέγεθος

$$V(q,t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - U(q,\dot{q},t)\,.$$

Η μηχανική ενέργεια είναι

$$E = T + V(q,t) + E_0\,.$$

Η ενέργεια ηρεμίας, E_0, δεν χρειάζεται στη μη σχετικιστική μηχανική, διότι σε αυτή την περίπτωση, είναι πάντοτε σταθερή αφού δεν γίνεται μετατροπή ενέργειας ηρεμίας σε κινητική ή δυναμική ενέργεια. Δηλαδή, ίδια ισχύουν για μη σχετικιστική μηχανική με τη διαφορά πως δεν υπάρχει ο όρος ενέργειας ηρεμίας.

5.2 Εμφανώς συναλλοίωτος λαγκρανζιανός φορμαλισμός

Σε ότι ακολουθεί σε αυτή την ενότητα, ισχύει η άθροιση άνω και κάτω δεικτών που χρησιμοποιείται στον τανυστικό λογισμό. Η αρχή του Hamilton θα είναι σε μορφή εμφανώς συναλλοίωτη (manifestly covariant). Αυτό σημαίνει ότι κατά την πραγματική κίνηση, το ολοκλήρωμα δράσης πρέπει να είναι μια παγκόσμια βαθμωτή ποσότητα (ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς). Κατά την πραγματική κίνηση, ο χρόνος δεν θα είναι ανεξάρτητος από τις συντεταγμένες θέσης και μαζί τους θα σχηματίζει ένα τετραδιάνυσμα. Για την περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος στον θεσικό χώρο στον φορμαλισμό με θεωρία μεταβολών πρέπει να διαλέξουμε μια βαθμωτή παράμετρο. Αυτά σημαίνουν ότι και η λαγκρανζιανή θα είναι βαθμωτό μέγεθος. Επίσης, με αυτή τη φιλοσοφία, η λαγκρανζιανή πρέπει να είναι συνάρτηση όχι των συνήθων συντεταγμένων αλλά συντεταγμένων του χώρου του Minkowski (τετραχώρος) και των παραγώγων τους ως προς την ανωτέρω παράμετρο. Θα ασχοληθούμε μόνο με σύστημα ενός σωματιδίου με μη μηδενική μάζα. Μια βαθμωτή παράμετρος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος στον θεσικό χώρο, είναι ο ιδιόχρονος (κύριος χρόνος) του σωματιδίου (proper time) τ. Σε αυτή την περίπτωση, κατά την πραγματική κίνηση, οι συνιστώσες της γενικευμένης ταχύτητας u, $u^\nu = \dfrac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \dot{x}^\nu$ δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά ικανοποιούν τη δεσμευτική σχέση

$$u \cdot u = u_\nu u^\nu = c^2 \tag{5.15}$$

Θυμίζουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &u = (u^0, u^1, u^2, u^3) \;\; u^\nu = \dot{x}^\nu = \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \quad \nu\text{=0,1,2,3} \\ &x^0 = ct,\; x^1 = x,\;\; x^2 = y,\;\; x^3 = z \\ &\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \left((\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Η λαγκρανζιανή ελεύθερου σωματιδίου της Εξ. (5.4), $L_{\text{free}} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}$, μπορεί να γραφτεί ως

$$L_{\text{free}} = -\frac{mc}{\gamma}\sqrt{u_\alpha u^\alpha}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.17}$$

Το ολοκλήρωμα δράσης γίνεται

$$I = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u_\alpha u^\alpha}\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.18}$$

Η εξίσωση κίνησης που περιμένουμε να πάρουμε εφαρμόζοντας την αρχή του Hamilton είναι η $\dfrac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \dot{u}^\alpha = 0$ που προφανώς ισχύει για ελεύθερο σωματίδιο. Όμως, όπως είπαμε, έχουμε τη δεσμευτική σχέση της Εξ. (5.15) ή την ισοδύναμή της

$$u_\alpha \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = u_\alpha \dot{u}^\alpha = 0\,. \tag{5.19}$$

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης του θέματος. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι αυτή η δεσμευτική σχέση ισχύει και για τις γειτονικές μη πραγματικές τροχιές και να χειριστεί το θέμα με χρήση της τεχνικής των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Εδώ θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία όπου η δεσμευτική σχέση δεν ισχύει για τις παραλλαγμένες διαδρομές αλλά μόνο για την τελική, την πραγματική διαδρομή. Ουσιαστικά οι Εξ. (5.15), (5.19) δεν είναι συνήθεις, δυναμικές, δεσμευτικές σχέσεις της κίνησης, είναι μια γεωμετρική συνέπεια του τρόπου που ορίστηκε το τ . Αυτές οι δεσμευτικές σχέσεις μας λένε ότι δε μπορούμε να βρισκόμαστε στον όλο τετραδιάστατο χώρο του u . Είμαστε περιορισμένοι σε μια τρισδιάστατη επιφάνεια του όλου χώρου. Ο Dirac ονομάζει τέτοιες δεσμευτικές σχέσεις ασθενείς εξισώσεις. Σύμφωνα με αυτή την ιδέα μπορούμε να θεωρήσουμε τα u^ν ανεξάρτητα και αφού γίνουν όλες οι παραγωγίσεις, στο τέλος να χρησιμοποιηθούν οι ανωτέρω δεσμευτικές σχέσεις. Η διαφορική παράσταση μέσα στο ολοκλήρωμα στην Εξ. (5.18) είναι το στοιχειώδες μήκος στον τετραχώρο, πράγματι

$$\mathrm{d}s = \sqrt{u_\alpha u^\alpha}\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}$$

όπου

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1,\ g_{11} = -1,\ g_{22} = -1,\ g_{33} = -1 \\ &g_{\mu\nu} = 0,\ \ \mu \neq \nu,\ \mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Κατά την κίνηση και στην περίπτωση της Ειδικής Σχετικότητας, το τετραμήκος είναι στάσιμο. Λαμβάνουμε ως παράμετρο περιγραφής της κίνησης μια παράμετρο θ που το χαρακτηριστικό της είναι πως είναι μονότονη συνάρτηση του ιδιόχρονου τ , κατά μήκος της πραγματικής τροχιάς. Κατά τα άλλα είναι αυθαίρετη παράμετρος. Αυτά μας οδηγούν στο να αντικατασταθεί το ολοκλήρωμα δράσης της Εξ. (5.18) με το ολοκλήρωμα δράσης

$$I = -mc\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\theta}}\mathrm{d}\theta \tag{5.20}$$

Κατά μήκος της κίνησης (μόνο), $L = -mc^2 = \text{σταθ.}$ Οι συντεταγμένες είναι συναρτήσεις του θ, $x^\alpha = x^\alpha(\theta)$. Αφού δεν έχουμε δεσμευτική σχέση, μπορούμε να κάνουμε τις δυνατές μεταβολές ελεύθερα. Ορίζουμε $x'^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\theta}$. Η αρχή των μεταβολών, αρχή του Hamilton, δίνει τις εξισώσεις των Euler- Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{5.21}$$

Οπότε έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{x'^\alpha}{\left(x'_\beta x'^\alpha\right)^{1/2}} = 0 \tag{5.22}$$

Σε αυτό το σημείο που καταλήξαμε στη (διαφορική) εξίσωση για την πραγματική κίνηση, επιβάλουμε τη δεσμευτική σχέση (5.15) οπότε έχουμε

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\theta}}\mathrm{d}\theta = c\mathrm{d}\tau$$

Η σχέση (5.22) ισχύει κατά την (πραγματική) κίνηση, το θ γίνεται τ , οπότε ο παρονομαστής είναι μια σταθερά, έτσι βρίσκουμε τις γνωστές σχέσεις

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = \ddot{x}^\alpha = 0 \tag{5.23}$$

που είναι οι σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης ελεύθερου σωματιδίου. Το τετραμήκος της πραγματικής διαδρομής (κοσμικής τροχιάς του σωματιδίου) στον τετραχώρο, σε αυτή την περίπτωση, γίνεται μέγιστο. Δηλαδή έχουμε τον μέγιστο ιδιόχρονο μεταξύ των δυο άκρων. Η τροχιά είναι γεωδαισιακή τροχιά. Στην περίπτωση φορτισμένου σωματιδίου σε εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο η μορφή για την λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης είναι αυτή της Εξ. (5.12), ξεκινούμε με την ολική λαγκρανζιανή

$$L = -\left(mc\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} + q_\mathrm{e}\dot{x}^\alpha A_\alpha(x)\right) \tag{5.24}$$

Με την προηγούμενη διαδικασία βρίσκουμε

$$I = -\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[mc\sqrt{g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta} + q_\mathrm{e}x'^\alpha A_\alpha(x)\right]\mathrm{d}\theta \tag{5.25}$$

Τελικώς καταλήγουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0\,. \tag{5.26}$$

Μετά από πράξεις αυτή γίνεται

$$m\ddot{x}^\alpha + q_\mathrm{e}\dot{A}^\alpha(x) - q_\mathrm{e}\dot{x}_\beta\frac{\partial A^\beta(x)}{\partial x_\alpha} = 0\,. \tag{5.27}$$

Όμως έχουμε

$$\dot{A}^\alpha = \dot{x}_\beta\partial^\beta A^\alpha, \qquad \left(\partial^\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)$$

άρα

$$m\ddot{x}^\alpha = q_\mathrm{e}\left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right)\dot{x}_\beta\,. \tag{5.28}$$

Παράδειγμα

Σχετικιστική κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}=\vec{e}_z B$.
Το βαθμωτό δυναμικό $\Phi=0$. Δείξτε ότι κατάλληλο διανυσματικό δυναμικό είναι το $\vec{A}(x,y,z)=\dfrac{B}{2}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x)=A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y$, όπου x, y, z είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματιδίου.

Λύση
Θα δείξουμε ότι το μαγνητικό πεδίο μπορεί να προέρχεται από το διανυσματικό δυναμικό.
Έχουμε, $\vec{A}(x,y,z)=\dfrac{B}{2}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x)$, $A_x=-\dfrac{B}{2}y,\ A_y=\dfrac{B}{2}x,\ A_z=0$.

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = B\vec{e}_z .
\end{aligned}
$$

Η δυναμική συνάρτηση είναι $U=-q_e\vec{\upsilon}\cdot\vec{A}$.

Στη συνέχεια είναι βολικό να μεταβούμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Έχουμε $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$, οπότε $\dot{x}=\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\dot{\varphi},\ \dot{y}=\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\dot{\varphi}$.

$U=-\dfrac{q_e B}{2}\rho^2\dot{\varphi}$. Η λαγκρανζιανή είναι

$$
L=-mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}+\frac{q_e B}{2}\rho^2\dot{\varphi},\quad \upsilon^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2
$$

$$
L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}{c^2}}+\frac{q_e B}{2}\rho^2\dot{\varphi}.
$$

Εφόσον η λαγκρανζιανη δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, διατηρείται η ενεργειακή συνάρτηση που συμπίπτει με την ενέργεια.

$$
\gamma(\upsilon)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}}
$$

$$
E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}}=m\gamma(\upsilon)c^2=\text{σταθ.}
$$

Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερά της κίνησης, $\upsilon=\upsilon(0)=\text{σταθ.}$, $\gamma(\upsilon)=\text{σταθ.}$
Γράφουμε τις εξισώσεις Lagrange.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ ,\ q_1=\rho, q_2=\varphi, q_3=z\ .
$$

Αφού $\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}$ = σταθ., $\gamma(\upsilon)=$ σταθ., μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$m\gamma(\upsilon)\ddot{\rho}-m\gamma(\upsilon)\rho\dot{\varphi}^2-q_eB\rho\dot{\varphi}=0$$
$$m\gamma(\upsilon)\frac{\mathrm{d}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)}{\mathrm{d}t}+q_eB\rho\dot{\rho}=0$$
$$\gamma(\upsilon)\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}=0\ .$$

Από την τελευταία διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι $\dot{z}=\upsilon_z=\upsilon_z(0)=\text{σταθ.}$ Σημειώνουμε ότι η αρχή των αξόνων μπορεί να ληφθεί οπουδήποτε στον χώρο. Το μόνο που πρέπει να ισχύει είναι ο άξονας z να έχει την κατεύθυνση του $\vec{B}$. Με αυτό στο μυαλό μας, ψάχνουμε για άξονες τέτοιους που να ισχύει $\rho=R=$ σταθ. Επομένως $\dot{\rho}=0,\ \ddot{\rho}=0$.

Η πρώτη εξίσωση οδηγεί τελικώς στη σχέση,

$$\dot{\varphi}=-\frac{q_eB}{m\gamma(\upsilon)}:=-\omega_{\mathrm{c}}\ ,\ \omega_{\mathrm{c}}=\frac{q_eB}{m\gamma(\upsilon)}=\text{σταθ.}$$

ω_{c} είναι η κυκλική συχνότητα κυκλοτρονίου (κυκλοτρονική συχνότητα). Δηλαδή έχουμε ελικοειδή κίνηση περί τον άξονα z. Δηλαδή μετατόπιση με σταθερή ταχύτητα υ_z κατά μήκος του z και περιστροφική κίνηση περί τον ίδιο άξονα, με σταθερή γωνιακή συχνότητα ω_{c} και ακτίνα R. Η ακτίνα προσδιορίζεται από τη σχέση,

$\upsilon^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2=\text{σταθ.}$ Έχουμε $\upsilon_{\mathrm{T}}^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2=\upsilon^2-\upsilon_z^2=\text{σταθ.}$ Πρόκειται για την ταχύτητα στο κάθετο στον άξονα z επίπεδο, εγκάρσια ταχύτητα. Οπότε αφού $\rho=R=$ σταθ. Έχουμε $R=\dfrac{\upsilon_{\mathrm{T}}}{\omega_{\mathrm{c}}}=\dfrac{m\gamma(\upsilon)\upsilon_{\mathrm{T}}}{q_eB}$ ή $p_{\mathrm{T}}=m\gamma(\upsilon)\upsilon_{\mathrm{T}}=q_eBR$. Η τελευταία σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό (μέτρηση) της εγκάρσιας (σχετικιστικής) ορμής p_{T} σωματιδίου όταν είναι γνωστές οι άλλες ποσότητες.

Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Με βάση τα ανωτέρω, από το πεδίο $\vec{B}$ και την αρχική διανυσματική ταχύτητα $\vec{\upsilon}(0)$ μπορούμε να βρούμε τη θέση του συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις που αναφέραμε προηγουμένως. Τελικώς μπορούμε να πούμε ότι για κάθε αρχική διανυσματική ταχύτητα φορτισμένου σωματιδίου θα έχουμε την κίνηση που περιγράψαμε προηγουμένως. Η θέση του άξονα της ελικοειδούς κίνησης και η ακτίνα προσδιορίζονται από όσα αναφέραμε στην ανάλυσή μας.

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Προβλήματα

1. Θεωρήστε σωματίδιο μάζας m το οποίο κινείται σε ευθεία, άξονα x. Η δυναμική συνάρτηση (δυναμικό) είναι της μορφής $V(x)$. Η σχετικιστική κινητική ενέργειά του είναι

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2, \ \dot{x} = \upsilon .$$

Σχηματίστε τη λαγκρανζιανή με τη διαδικασία $L = T - V$. Με χρήση της εξίσωσης του Lagrange δείξτε ότι δεν καταλήγετε στην αναμενόμενη σχετικιστική (διαφορική) εξίσωση κίνησης. Δεχτείτε ότι και για την περίπτωση της σχετικιστικής ορμής ισχύει η γνωστή σχέση που ορίζει τη γενικευμένη ορμή από τη λαγκρανζιανή. Με βάση αυτό, βρείτε τη λαγκρανζιανή $L_{\mathrm{f}} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ για ελεύθερο (δυνάμεων) σωματίδιο . Στη συνέχεια δείξτε ότι η λαγκρανζιανή $L(x,\dot{x}) = L_{\mathrm{f}}(\dot{x}) - V(x)$ οδηγεί στη σωστή εξίσωση κίνησης

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} = 0 \quad .$$

2. Ας θεωρήσουμε σύστημα N μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με σχετικιστική λαγκρανζιανή την

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N} L_\alpha(x,\dot{x},t) = -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha c^2 \sqrt{1-\beta_\alpha^{\ 2}}, \quad \beta_\alpha^{\ 2} = \frac{\upsilon_\alpha^{\ 2}}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2).$$

Δείξτε ότι διατηρείται η ορμή του συστήματος.

3. Θεωρήστε τη σχετικιστική κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου q_e, μέσα σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \vec{e}_z B$. Το βαθμωτό δυναμικό $\Phi = 0$. Θεωρήστε διανυσματικό δυναμικό της μορφής $\vec{A}(x,y,z) = \frac{B}{2}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x) = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y$, όπου x, y, z είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματιδίου. Υπολογίστε τη λαγκρανζιανή. Με τη μέθοδο του Lagrange δείξτε ότι το σωματίδιο εκτελεί ελικοειδή κίνηση περί άξονα παράλληλο προς το $\vec{B}$, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα και τη θέση του άξονα περιστροφής με δεδομένες τις αρχικές τιμές, $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \dot{x}(0) = \upsilon_{0x}, \dot{y}(0) = \upsilon_{0y}, \dot{z}(0) = \upsilon_{0z}$.

Στη συνέχεια υπολογίστε την ενεργειακή συνάρτηση και την ενέργεια και χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη λύση, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ αλλά μόνο τις εξισώσεις κίνησης, βρείτε αν διατηρούνται κατά την κίνηση. Βρείτε την έκφραση για τη μηχανική ορμή, την ηλεκτρομαγνητική ορμή και τις αντίστοιχες στροφορμές περί τον άξονα Oz των συντεταγμένων. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη λύση, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ αλλά μόνο τις εξισώσεις κίνησης, δείξτε ότι η ολική στροφορμή περί αυτόν τον άξονα διατηρείται ενώ δεν διατηρείται η κάθε μια από τις δυο χωριστά. Δείξτε ότι και οι δυο ανωτέρω στροφορμές περί τον ανωτέρω άξονα περιστροφής διατηρούνται. Το τελευταίο, παρόλο που είναι ευνόητο, επιβεβαιώστε το αφού κάνετε χρήση της σχέσης που δίνει τη θέση αυτού του άξονα συναρτήσει των αρχικών τιμών και το ότι η περιστροφή στο επίπεδο x, y γίνεται σε κύκλο (η ακτίνα είναι σταθερή).

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 5

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.
[2] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.
[3] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, 1987.
[4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Inc., 1998.
[5] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, 1962.
[6] A.O. Barut, *Electrodynamics of Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, 1964.
[7] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

Κεφάλαιο 6: Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μια άλλη θεώρηση της μηχανικής που αναφέρεται ως φορμαλισμός του Hamilton, χαμιλτονιανός φορμαλισμός. Από πλευράς φυσικής δεν προστίθεται κάτι καινούργιο, όμως πρόκειται για μια πιο δυνατή μέθοδο εργασίας με τις αρχές της φυσικής που είναι ήδη καθιερωμένες. Η χαμιλτονιανή μέθοδος δεν είναι ανώτερη από τη λαγκρανζιανή μέθοδο κατά την άμεση λύση προβλημάτων της μηχανικής. Το προσόν αυτής της μεθόδου είναι ότι είναι η βάση της προχωρημένης θεωρητικής μηχανικής και βάζει τα θεμέλια για θεωρητικές επεκτάσεις σε πολλές περιοχές της φυσικής. Τέτοιες περιπτώσεις στα πλαίσια της ίδιας της μηχανικής είναι η θεωρία των Hamilton-Jacobi, διαταραχές και χάος. Έξω από την μηχανική την ίδια, αυτός ο φορμαλισμός παρέχει ένα μεγάλο μέρος από τη γλώσσα της στατιστικής μηχανικής και της κβαντομηχανικής. Σε ό,τι ακολουθεί, υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις είναι μονογενείς, τα συστήματα είναι ολόνομα χωρίς δεσμούς, δηλαδή οι δεσμοί έχουν απαλειφτεί με την κατάλληλη επιλογή (γνήσιων) γενικευμένων συντεταγμένων, έχουμε δηλαδή λαγκρανζιανά συστήματα. Στην περίπτωση που στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό υπάρχουν ολόνομοι ολοκληρωμένοι δεσμοί, είναι δυνατό να γίνεται τροποποίηση της λαγκρανζιανής με πολλαπλασιαστές Lagrange, στη συνέχεια να υπολογιστεί η τροποποιημένη χαμιλτονιανή και να γραφτούν, για αυτήν οι εξισώσεις Hamilton. Ο γενικός τρόπος χειρισμού διαφόρων δεσμών στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, γίνεται με τη διαδικασία του Dirac με χρήση αγκυλών, που λέγοντα αγκύλες Dirac. Η μέθοδος χρησιμοποιείται για μετάβαση στην κβαντομηχανική όταν υπάρχουν δεσμοί.

6.1 Εξισώσεις του Hamilton

Οι εξισώσεις Lagrange αντιπροσωπεύουν εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς τον χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση καθορίζεται από $2n$ αρχικές τιμές. Αυτές μπορεί να είναι οι τιμές των n $q_i(t)$ και οι τιμές των n $\dot{q}(t)$ κάποια χρονική στιγμή t_1, ή οι τιμές των n $q_i(t)$ δυο χρονικές στιγμές t_1, t_2, δηλαδή έχουμε $2n$ αρχικά μεγέθη. Οι n γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες. Θα δούμε ότι οι εξισώσεις (του) Hamilton είναι $2n$ το πλήθος και είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Οι εξισώσεις Hamilton συνηθίζεται να λέγονται και κανονικές εξισώσεις. Μπορεί κάποιος να καταλήξει στις εξισώσεις Hamilton χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange και τον μετασχηματισμό του Legendre, αλλά μπορεί να ακολουθήσει και άλλη μέθοδο, μπορεί να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Legendre (βλέπε παράρτημα Π5). Οι μεταβλητές στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό είναι οι $q, \dot{q}$, ενώ στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό είναι οι q, p όπου p_i οι συζυγείς ορμές, όπως θα δούμε σε λίγο.

Στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό που θα αναπτύξουμε δε μπορεί να υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών q, p, αυτές είναι ανεξάρτητες. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα αργότερα.

Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμό Legendre ως προς τις ταχύτητες $\dot{q}$. Οι ταχύτητες θα θεωρούνται ως ενεργητικές μεταβλητές ανεξάρτητες των q και όλες οι άλλες είναι παθητικές μεταβλητές, είναι παράμετροι που δεν συμμετέχουν στον μετασχηματισμό. Αυτές είναι οι $n+1$ το πλήθος q, t. Ακολουθούμε ανάλογη μεθοδολογία όπως στο Παράρτημα Π5, αλλά για πολλές μεταβλητές. Μπορεί να δειχτεί ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Legendre στη λαγκρανζιανή.

1) Εισάγουμε τις νέες μεταβλητές, τις συζυγείς ορμές ή απλά ορμές με τη σχέση,

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \; i = 1, 2, ..., n. \tag{6.1}$$

2) Εισάγουμε τη νέα συνάρτηση $H'(q, \dot{q}, p, t)$ που θα μας οδηγήσει στη χαμιλτονιανή, δηλαδή τη συνάρτηση

$$H' = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \; . \tag{6.2}$$

3) Λύνουμε (αντιστρέφουμε) τις Εξ. (6.1) ως προς $\dot{q}$ οπότε $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$. Αντικαθιστούμε στην (6.2). Έτσι καταλήγουμε στην χαμιλτονιανή

$$\begin{aligned} H = H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(p, t) - L(q, \dot{q}(q, t), t). \\ \text{Δηλαδή, } H = H(q, p, t) = H(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n, t) \ . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Διαφορίζουμε την (6.2) και βρίσκουμε,

$$\mathrm{d}H' = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \ .$$

Όμως από τον ορισμό $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, οπότε

$$\mathrm{d}H' = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial t} \ .$$

Από τη διαφόριση της (6.3) έχουμε,

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t} \ .$$

Ισχύει $\mathrm{d}H' = \mathrm{d}H$, οπότε εξισώνουμε τους αντίστοιχους όρους των δυο προηγούμενων και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \\ &\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Οι δύο πρώτες είναι σχέσεις μεταξύ των παθητικών μεταβλητών. Η τελευταία είναι η αντεστραμμένη εξίσωση ορισμού $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, δεν είναι κάτι καινούργιο.

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε $\dot{p}_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Σε αυτό το σημείο λαμβάνουμε υπόψη ότι ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange, δηλαδή το σύστημα κινείται, εκτελεί πραγματική κίνηση. Τότε $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, οπότε από τις δυο τελευταίες και εφόσον $\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$, βρίσκουμε ότι,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ .$$

Αυτές μαζί με τις $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ αποτελούν τις εξισώσεις Hamilton ή κανονικές εξισώσεις, δηλαδή τις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{6.5}$$

Είναι σύστημα από $2n$ διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο. Είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες n εξισώσεις δεύτερης τάξης του Lagrange. Παρόλο που, όπως είπαμε, οι n πρώτες από τις κανονικές εξισώσεις είναι οι αντεστραμμένες εξισώσεις ορισμού των συζυγών ορμών Εξ. (6.1) και δεν δίνουν επομένως τίποτα καινούργιο, όμως σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις του Hamilton μπορεί να ληφθούν ως η αρχή και όχι ότι προήλθαν από τον μετασχηματισμό του λαγκρανζιανού φορμαλισμού. Δηλαδή μπορεί να ξεκινήσουμε με μια χαμιλτονιανή που δεν έχει σημασία πως τη βρήκαμε, από αυτήν γράφουμε τις εξισώσεις Hamilton. Τότε η Εξ. (6.1) δεν προϋπάρχει και δεν χρειάζεται για τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό.

Συνοψίζοντας, τα βασικά χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού είναι:

Πίνακας 6.1 *Τα βασικά χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού*

	Παλιό σύστημα	**Νέο σύστημα**
Συνάρτηση:	λαγκρανζιανή $L(q,\dot{q},t)$	χαμιλτονιανή $H(q,p,t)$
Ενεργητικές Μεταβλητές	ταχύτητες, $\dot{q}$	ορμές, p
Παθητικές μεταβλητές και στις δυο περιπτώσεις: συντεταγμένες θέσης και χρόνος, q,t.		

Ο δυϊκός χαρακτήρας του μετασχηματισμού εκφράζεται με το επόμενο σχήμα, που είναι γενίκευση για πολλές μεταβλητές αυτών που αναφέρονται στο παράρτημα Π5:

$$\begin{aligned}
& p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}, && \dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i}, \\
& H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(q,p,t) - L\big(q,\dot{q}(q,p,t),t\big), && L = \sum_{i=1}^{n} p_i(q,\dot{q},t)\dot{q}_i - H\big(q,p(q,\dot{q},t),t\big) \\
& H = H(q,p,t), && L = L(q,\dot{q},t).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Δηλαδή ο δυϊκός χαρακτήρας του μετασχηματισμού Legandre σημαίνει ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη λαγκρανζιανή και με μια διαδικασία να καταλήξουμε στη χαμιλτονιανή και επίσης να ακολουθήσουμε ακριβώς ίδια διαδικασία αντίστροφα, και από τη χαμιλτονιανή να καταλήξουμε στη λαγκρανζιανή.

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που μπορούμε να απλοποιήσουμε την ανωτέρω διαδικασία εύρεσης της χαμιλτονιανής. Όπως ξέρουμε, μερικές φορές η λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ομογενών όρων ως προς τις ταχύτητες, βαθμών 0,1,2. Τότε η ενεργειακή συνάρτηση h που ορίζεται από την Εξ. (4.11) που είναι η ίδια με την Εξ. (6.2) η οποία ορίζει την H', δίνεται από τη σχέση

$$h = L_2 - L_0. \tag{6.7}$$

Τα h, H', H είναι εκφράσεις του ίδιου μεγέθους ως προς διαφορετικές μεταβλητές. Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το ίδιο σύμβολο για όλες, το H. Αν εκφράσουμε τις ταχύτητες με τη χρήση των Εξ. (6.1) συναρτήσει των q,p,t, βρίσκουμε από την $h(q,\dot{q},t) = L_2 - L_0$, τη χαμιλτονιανή,

$$H(q,p,t) = L_2 - L_0. \tag{6.8}$$

Αν επιπλέον $T_1 = T_0 = 0$, το T δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, τότε $L_2 = T(q,\dot{q})$. Όπως έχουμε ξαναπεί στην παράγραφο 4.1 αυτό μπορεί να συμβεί, π.χ. αν οι σχέσεις που μετασχηματίζουν από τις καρτεσιανές στις γενικευμένες συντεταγμένες δεν περιέχουν άμεσα τον χρόνο. Στην ίδια παράγραφο είδαμε ότι αν επιπλέον η δυναμική συνάρτηση δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες οπότε $V = V(q,t)$, τότε $L_0 = -V$. Σε αυτή την περίπτωση

$$h = T(q,\dot{q}) + V(q,t) = E \,, \tag{6.9}$$

δηλαδή η ενεργειακή συνάρτηση είναι η ολική μηχανική ενέργεια. Αν εκφράσουμε με χρήση των Εξ. (6.1) τις ταχύτητες συναρτήσει των q, p, t τότε, αν ξέρουμε την έκφραση της ολικής ενέργειας, καταλήγουμε στη χαμιλτονιανή, διότι τώρα

$$H(q,p,t,) = E = T + V \,. \tag{6.10}$$

Στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό η κίνηση ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται στον θεσικό χώρο με τις ανεξάρτητες συντεταγμένες $q_i(t), \quad i = 1,2,\dots,n$. Στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό η κίνηση ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται στον φασικό χώρο (phase space) όπου οι ανεξάρτητες συντεταγμένες είναι τα $q(t), p(t)$.

6.2 Αγνοήσιμες συντεταγμένες και θεωρήματα διατήρησης

Ανεξάρτητα του πως βρήκαμε τη χαμιλτονιανή του συστήματος που εξετάζουμε, αν λείπει από τη χαμιλτονιανή η συντεταγμένη r , τότε η αντίστοιχη κανονική εξίσωση του Hamilton δίνει

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0, \; p_r = \text{σταθερά της κίνησης} \,. \tag{6.11}$$

Αν μια συντεταγμένη λείπει από τη λαγκρανζιανή (είναι αγνοήσιμη, κυκλική), προφανώς θα λείπει και από τη χαμιλτονιανή όταν ακολουθείται η προηγούμενη διαδικασία για να κατασκευάσουμε τη χαμιλτονιανή από τη λαγκρανζιανή.

Αν η H δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, τότε με χρήση και των εξισώσεων του Hamilton θα δείξουμε ότι είναι σταθερά της κίνησης. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}H(q,p,t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\
&\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει κατά την κίνηση, άρα

$$H(q,p) = \text{σταθερά της κίνησης} \,. \tag{6.13}$$

Αν η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο και η χαμιλτονιανή προσδιορίζεται από τη λαγκρανζιανή όπως περιγράψαμε πριν, τότε ούτε η χαμιλτονιανή θα εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο.

Αν οι εξισώσεις μετασχηματισμού δεν περιέχουν άμεσα τον χρόνο και η δυναμική συνάρτηση δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες ($V = V(q,t)$), τότε η ενέργεια ισούται με την ενεργειακή συνάρτηση και με τη χαμιλτονιανή αφού η τελευταία είναι η ενεργειακή συνάρτηση με διαφορετικές συντεταγμένες, δηλαδή τις (q,p) ,

$$E = h, \quad E = H = T + V \,. \tag{6.14}$$

Αν επιπλέον η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο (εδώ, αυτό σημαίνει ότι $V = V(q)$), τότε έχουμε, $E = H = T + V =$ σταθερά της κίνησης, διατηρούμενη ποσότητα.

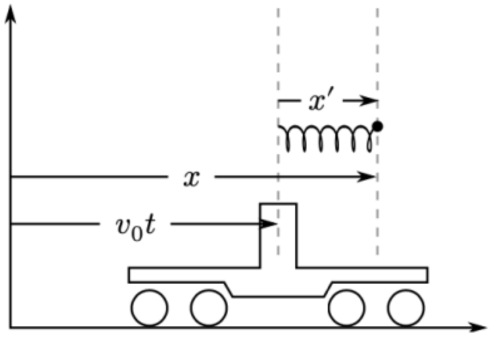
Γενικώς, αν η λαγκρανζιανή ή η χαμιλτονιανή μένουν αναλλοίωτες στη μορφή ως προς διάφορους μετασχηματισμούς, π.χ. σε περιστροφές περί άξονα, τότε υπάρχει κάποια συζυγής γενικευμένη ορμή, η στροφορμή περί τον εν λόγω άξονα, που διατηρείται. Αυτά, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, εκφράζονται πολύ καλύτερα με χρήση του πρώτου θεωρήματος της Noether. Το να είναι η χαμιλτονιανή ή η ενεργειακή συνάρτηση σταθερά της κίνησης είναι ανεξάρτητο από το αν είναι ίσες με τη μηχανική ενέργεια. Επίσης μπορεί οι ανωτέρω εξισώσεις μετασχηματισμού να εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο ενώ η χαμιλτονιανή ή η λαγκρανζιανή να μην εξαρτάται, τότε διατηρείται η χαμιλτονιανή ή η ενεργειακή συνάρτηση αλλά δεν είναι ίσες με την ενέργεια.

Η ενεργειακή συνάρτηση ή η χαμιλτονιανή μπορεί να διατηρείται για κάποιες συντεταγμένες και για άλλες όχι. Επίσης μπορεί να είναι η ενέργεια για κάποιες και για άλλες να μην είναι.

Σημειώνουμε ότι το κριτήριο για τη διατήρηση της ενεργειακής συνάρτησης είναι $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$. Για τη χαμιλτονιανή το κριτήριο διατήρησής της είναι $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Προσοχή στα κριτήρια! Αν, για παράδειγμα, η έκφραση της μηχανικής ενέργειας δεν περιέχει άμεσα τον χρόνο, αυτό δεν σημαίνει πως αυτή διατηρείται.

Το απλό μονοδιάστατο παράδειγμα που ακολουθεί είναι χρήσιμο για την κατανόηση αυτών των εννοιών. Στο Σχ.(6.1) έχουμε ένα σωμάτιο μάζας m στερεωμένο στο άκρο ελατηρίου με σταθερά επαναφοράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε καρότσι που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0. Η θετική φορά είναι προς τα δεξιά. Έστω x η συντεταγμένη του σωματίου ως προς το ακίνητο (αδρανειακό) σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο κινείται το καρότσι. Προφανώς και το καρότσι είναι αδρανειακό σύστημα. Έστω x' η συντεταγμένη του σωματίου ως προς το σταθερό στο καρότσι άκρο του ελατηρίου, δηλαδή ως προς το κινούμενο με το καρότσι σύστημα αναφοράς. Ο μετασχηματισμός μεταξύ x και x' είναι μετασχηματισμός που περιέχει άμεσα και τον χρόνο. Ας περιγράψουμε την κίνηση με βάση τη συντεταγμένη x. Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από την επιμήκυνση του ελατηρίου.



Σχήμα 6.1 *Αρμονικός ταλαντωτής στερεωμένος σε καρότσι που κινείται με σταθερή ταχύτητα.*

Για ευκολία, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κατάλληλη κατασκευή τέτοια που το «φυσικό μήκος» του ελατηρίου είναι μηδέν, δηλαδή όταν $x' = 0$ η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου είναι μηδέν. Θεωρούμε επίσης ότι τη στιγμή $t = 0$ το δεμένο στο καρότσι άκρο του ελατηρίου περνά από την αρχή του ακίνητου συστήματος αναφοράς.

Θα ξεκινήσουμε να υπολογίζουμε τα διάφορα μεγέθη ως προς το αδρανειακό (ακίνητο σύστημα) αναφοράς, με συντεταγμένη την x. Η δυναμική ενέργεια είναι

$$V(x,t) = \frac{1}{2} k \left(x - \upsilon_0 t \right)^2 . \tag{6.15}$$

Έχουμε για την κινητική ενέργεια ως προς το ακίνητο σύστημα

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 . \tag{6.16}$$

Επομένως

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(x-\upsilon_0 t\right)^2 . \tag{6.17}$$

Το δυναμικό δεν εξαρτάται από την ταχύτητα $\dot{x}$. Η ενεργειακή συνάρτηση, η ενέργεια και η γενικευμένη ορμή είναι:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-\upsilon_0 t)^2 = T + V = E \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \dot{x} = p/m. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε βρίσκουμε ότι η χαμιλτονιανή είναι:

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x-\upsilon_0 t)^2 = E \tag{6.19}$$

Έχουμε ότι $h = E,\ H = E$. Αφού η $\dfrac{\partial L}{\partial t} \neq 0,\ \dfrac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ δεν διατηρούνται η h και η H κατά την κίνηση του συστήματος, άρα δεν διατηρείται ούτε η ενέργεια. Αυτό είναι κατανοητό διότι ο δεσμός ο οποίος αναγκάζει το άκρο του ελατηρίου που είναι στερεωμένο στο καρότσι να κινείται με ταχύτητα υ_0, ασκεί δύναμη (δεσμού) που εκτελεί έργο επί του ελατηρίου κατά την (πραγματική) κίνηση, εφόσον το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται με τον χρόνο.

Έστω στη συνέχεια ότι χρησιμοποιούμε και πάλι ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς, ως συντεταγμένη την x', θα έχομε:

$$x = x' + \upsilon_0 t . \tag{6.20}$$

Αυτός είναι ο μετασχηματισμός μεταξύ συντεταγμένων που περιέχει άμεσα και τον χρόνο. Για την κινητική ενέργεια, για τη δυναμική συνάρτηση και για τη λαγκρανζιανή , ως προς το ακίνητο σύστημα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \dot{x}' + \upsilon_0 \\ &T(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = T'(\dot{x}') = \frac{1}{2}m(\dot{x}'+\upsilon_0)^2 = \frac{m\left(\dot{x}'\right)^2}{2} + m\upsilon_0\dot{x}' + \frac{m\upsilon_0^2}{2} \\ &V(x,t) = \frac{1}{2}k\left(x-\upsilon_0 t\right)^2 = V'(x',t) = \frac{k}{2}(x')^2 \\ &L(x,\dot{x},t) = T - V = L'(x',\dot{x}') = \frac{m\left(\dot{x}'\right)^2}{2} + m\upsilon_0\dot{x}' + \frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{k}{2}(x')^2 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Ισχύουν

$$p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + m\upsilon_0, \; \dot{x}' = \frac{p'}{m} - \upsilon_0 .$$

Η h' και η H' είναι:

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{2} m x^{\dot{}'2 \frac{1}{2}'2 \frac{1}{2}_0 2'} \\ H' &= \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kx'^2 - p'\upsilon_0 \neq E'. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Εφόσον $\frac{\partial L'}{\partial t} = 0$ και $\frac{\partial H'}{\partial t} = 0$ τα h', H' διατηρούνται κατά την πραγματική κίνηση, αλλά, όπως σημειώσαμε και θα δούμε παρακάτω, δεν είναι η ενέργεια του συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς που εργαζόμαστε. Με τα παραπάνω κριτήρια δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η ενέργεια διατηρείται. Η ενέργεια του συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα, με μεταβλητές τα $x', \dot{x}'$ και x', p', είναι:

$$\begin{aligned} & E' = T' + V' = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\upsilon_0\dot{x}' + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{k}{2}x'^2 \\ & p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'}, \; \dot{x}' = \frac{p'}{m} - \upsilon_0 \\ & E'(x', p') = \frac{p'^2}{2m} + \frac{k}{2}\dot{x}'^2. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Επομένως, πράγματι $h'(x', \dot{x}') \neq E'(x', \dot{x}')$ και $H'(x', p') \neq E'(x', p')$. Θα εξετάσουμε χωριστά τι γίνεται με την ενέργεια. Η ενέργεια είναι ανεξάρτητη του χρόνου, ας δούμε αν διατηρείται ή όχι. Υπολογίζουμε την έκφραση $\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t}$ και την εξίσωση κίνησης την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την εξέλιξη της ενέργειας με τον χρόνο κατά την πραγματική κίνηση:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'(m\ddot{x}' + kx') + m\upsilon_0\ddot{x}' \\ & m\ddot{x}' + kx' = 0 \\ & \text{άρα} \quad \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t} = m\upsilon_0\ddot{x}' \neq 0. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t} \neq 0$, επομένως η ενέργεια παρόλο που δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δεν διατηρείται κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος.

Ας μεταβούμε τώρα στο κινούμενο σύστημα αναφοράς όπου θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση με συντεταγμένη την x' που είναι και το πλέον «φυσιολογικό» να κάνουμε. Αυτό το σύστημα είναι επίσης αδρανειακό επομένως δεν υπάρχουν αδρανειακές δυνάμεις, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&T'' = \frac{1}{2}mx'^2,\ V'' = \frac{k}{2}x'^2 \\
&E'' = T'' + V'' = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{k}{2}x'^2 \\
&L'' = T'' - V'' = \frac{1}{2}mx'^2 - \frac{k}{2}x'^2 \\
&h'' = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{k}{2}x'^2 \\
&p' = \frac{\partial L''}{\partial \dot{x}'},\ \dot{x}' = \frac{p'}{m} \\
&E'' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{k}{2}x'^2,\ H'' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{k}{2}x'^2.
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Όπως αναμέναμε ισχύουν $h'' = E'',\ H'' = E'',\ \dfrac{\partial L''}{\partial t} = 0,\ \dfrac{\partial H''}{\partial t} = 0$, επομένως τα h'', E'', H'' διατηρούνται.

Τώρα θα ξεκινήσουμε από την λαγκρανζιανή στο ακίνητο σύστημα, με συντεταγμένη την x και με απλή εφαρμογή του μετασχηματισμού από x σε x' θα δούμε σε τι καταλήγουμε.

$$
\begin{aligned}
&L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - \upsilon_0 t)^2 \\
&x = x' + \upsilon_0 t,\ \dot{x} = \dot{x}' + \upsilon_0 \\
&L'' = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 - \frac{1}{2}kx'^2 + m\upsilon_0\dot{x}' + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Η λαγκρανζιανή που βρίσκουμε διαφέρει από αυτήν που βρήκαμε κάνοντας υπολογισμούς ως προς το κινούμενο σύστημα, όμως η διαφορά είναι κατά μια σταθερά και μια ολική παράγωγο συνάρτησης του x'. Αυτό σημαίνει ότι και αυτή η λαγκρανζιανή είναι σωστή λαγκρανζιανή του συστήματος και οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Από όλες τις συναρτήσεις που αναφέραμε μόνο η λαγκρανζιανή μπορεί να πει κάποιος ότι είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων συμπεριλαμβανομένου του συστήματος αναφοράς. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να αναφερόμαστε σε λαγκρανζιανή κάποιου μηχανικού συστήματος, γενικώς, χωρίς αναφορά στις γενικευμένες συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται.

6.3 Η διαδικασία του Routh

Ο χαμιλτονιανός φορμαλισμός δεν βοηθά στην κατευθείαν λύση μηχανικών προβλημάτων. Έχουμε διπλάσιες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης σε σχέση με την περίπτωση του λαγκρανζιανού φορμαλισμού όπου έχουμε τις μισές διαφορικές εξισώσεις αλλά δεύτερης τάξης. Στην πράξη απαλείφουμε τις συζυγείς ορμές και καταλήγουμε στη λύση διαφορικών εξισώσεων του Lagrange που είναι οι μισές αλλά δεύτερης τάξης. Η μεθοδολογία με τις εξισώσεις του Hamilton είναι χρήσιμη για αγνοήσιμες συντεταγμένες. Έστω ότι η συντεταγμένη q_n είναι αγνοήσιμη, τότε $L = L(q_1, q_2, ..., q_{n-1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t)$, παρόλα αυτά πρέπει κανείς να συμπεριλάβει την αντίστοιχη εξίσωση του Lagrange για να λύσει το δυναμικό πρόβλημα. Στην περίπτωση όμως του χαμιλτονιακού φορμαλισμού έχουμε ότι για τη συζυγή ορμή $p_n = \alpha_n$=σταθερά και η χαμιλτονιανή γίνεται

$$H(q_1, q_2, ..., q_{n-1}, p_1, p_2, ... p_{n-1}, \alpha_n, t)$$

Δηλαδή το πρόβλημα είναι πρόβλημα με $n-1$ συντεταγμένες. Η σταθερά α_n προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Προφανώς η εξέλιξη με τον χρόνο της αγνοήσιμης συντεταγμένης προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης που ακολουθεί αφού προσδιοριστούν τα υπόλοιπα $q_i(t), p_i(t)\ i = 1, 2, ..., n-1$. Έτσι θα έχουμε

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H(q(t), p(t), \alpha_n, t)}{\partial \alpha_n}, \quad q_n(t) = \int \frac{\partial H(q(t), p(t), \alpha_n, t)}{\partial \alpha_n} \mathrm{d}t$$

Η διαδικασία του Routh εκμεταλλεύεται τα πλεονεκτήματα του χαμιλτονιακού φορμαλισμού στην περίπτωση αγνοήσιμων συντεταγμένων συνδυάζοντάς τον με τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό. Αυτό που γίνεται είναι ότι μετασχηματίζει κανείς μόνο ως προς τις αγνοήσιμες συντεταγμένες από $\dot{q}$ σε p ενώ αφήνει τις άλλες απείραχτες. Έτσι για τις αγνοήσιμες καταλήγει σε εξισώσεις του Hamilton ενώ για τις άλλες σε εξισώσεις του Lagrange. Αυτό γίνεται με χρήση μιας συνάρτησης που παίζει τον ρόλο και λαγκρανζιανής και χαμιλτονιανής και λέγεται routhian (ρουθιανή).

Έστω ότι οι αγνοήσιμες συντεταγμένες είναι οι $q_{s+1}, q_{s+2}, ..., q_n$ δηλαδή οι q_i, $i = s+1, s+2, ..., n$ δηλαδή οι τελευταίες $n-s$ το πλήθος. Ορίζουμε τη ρουθιανή ως προς αυτές με τα εξής βήματα όπως κάναμε και για τον προσδιορισμό της χαμιλτονιανής

$$\begin{aligned} R' &= \sum_{i=s+1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t) \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = s+1, s+2, ..., n \\ R &= R(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, p_{s+1}, p_{s+2}, ..., p_n, t) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Διαφορίζουμε την πρώτη σχέση οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R' &= \sum_{i=s+1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i + \sum_{i=s+1}^{n} p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=s+1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.28}$$

Από τη διαφόριση της τρίτης έχουμε

$$\mathrm{d}R = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i + \sum_{i=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i + \frac{\partial R}{\partial t} \mathrm{d}t\,. \tag{6.29}$$

Προφανώς $\mathrm{d}R' = \mathrm{d}R$ άρα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, 2, ..., s \\ &\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \qquad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad\quad i = s+1, s+2, ..., n \\ &\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Η σχέση $\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$ για $i > s$, ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο διότι τα p_i είναι σταθερές της κίνησης και η R δεν εξαρτάται από τα q_i, $i = s+1, s+2, ..., n$. Οι εξισώσεις που ισχύουν για $i = 1, 2, ..., s$ ουσιαστικά μας λένε ότι ισχύουν οι εξισώσεις του Lagrange για τις μη αγνοήσιμες συντεταγμένες με τη ρουθιανή στη θέση της λαγκρανζιανής, δηλαδή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., s \tag{6.31}$$

Οι υπόλοιπες εξισώσεις με $i = s+1, s+2, ..., n$, δηλαδή για τις αγνοήσιμες συντεταγμένες είναι οι εξισώσεις του Hamilton με τη ρουθιανή στη θέση της χαμιλτονιανής, δηλαδή είναι οι δεύτερη σειρά των σχέσεων της Εξ. (6.30), δηλαδή έχουμε

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad i = s+1, s+2, ..., n \quad . \tag{6.32}$$

Είναι ευνόητο ότι μια συντεταγμένη που δεν υπάρχει στη λαγκρανζιανή δεν θα υπάρχει ούτε στη ρουθιανή. Οι συζυγείς ορμές p_i, $i = s+1, s+2, ..., n$ είναι σταθερές της κίνησης, $p_i = \alpha_i$, $i = s+1, s+2, ..., n$ και προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Έτσι η ρουθιανή μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση μόνο των μη αγνοήσιμων συντεταγμένων, των ταχυτήτων τους και του χρόνου.

$$R = R(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, ..., \alpha_n, t) \ . \tag{6.33}$$

Ένα απλό παράδειγμα της μεθόδου του Routh είναι η επίπεδη κίνηση σωματίου σε κεντρικό δυναμικό της μορφής $V(r) = -\dfrac{k}{r^n}$. Εργαζόμαστε σε πολικές συντεταγμένες και έχουμε προφανώς,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r^n} \ . \tag{6.34}$$

Η θ είναι αγνοήσιμη.

$$\begin{aligned} R' &= p_\theta \dot{\theta} - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r^n} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ R &= \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{k}{r^n}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Για το μη αγνοήσιμο r η εξίσωση του Lagrange δίνει

$$m\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{nk}{r^{n+1}} = 0 \ . \tag{6.36}$$

Για την αγνοήσιμη θ έχουμε από τις εξισώσεις του Hamilton

.

$$\dot{p}_\theta = 0, \quad \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$
$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = l \tag{6.37}$$

Το l διατηρείται και είναι η στροφορμή ως προς τον άξονα κάθετο στο επίπεδο κίνησης που περνά από το ελκτικό κέντρο.

6.4 Οι εξισώσεις του Hamilton από μια αρχή μεταβολών

Όπως είδαμε οι εξισώσεις του Lagrange μπορεί να βγουν από μια αρχή μεταβολών (παραλλαγών) , δηλαδή την αρχή του Hamilton. Θα βρούμε μια αρχή μεταβολών (παραλλαγών) που να μας οδηγεί στις εξισώσεις του Hamilton. Τέτοιες μεθοδολογίες είναι χρήσιμες διότι επεκτείνονται εύκολα σε συστήματα που δεν βρίσκονται στην περιοχή της μηχανικής. Ας ξεκινήσουμε από την αρχή του Hamilton, για συστήματα που περιγράφονται πλήρως από λαγκρανζιανή χωρίς να υπάρχουν δεσμοί και άλλες ενεργητικές δυνάμεις. Αυτή η αρχή αναφέρεται σε τροχιές στον θεσικό χώρο των n διαστάσεων. Έχουμε

$$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{6.38}$$

Οι μεταβλητές στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό είναι τα q, p (που πρέπει να) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Είμαστε στον φασικό χώρο με $2n$ διαστάσεις. Χρησιμοποιούμε τη σχέση που ορίζει από τη λαγκρανζιανή τη χαμιλτονιανή οπότε έχουμε

$$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = 0 \quad . \tag{6.39}$$

Αυτή αναφέρεται ως τροποποιημένη αρχή του Hamilton (modified Hamilton's principle).
Εφόσον η υπό ολοκλήρωση παράσταση

$$f(q,p,\dot{q},\dot{p},t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)$$

είναι συνάρτηση των q, p καθώς επίσης και των χρονικών παραγώγων τους $\dot{q}, \dot{p}$ (εδώ βέβαια δεν υπάρχουν τα $\dot{p}_i$) και του χρόνου t , η αρχή παραλλαγών θα οδηγήσει στις εξισώσεις του Lagrange. Έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \,. \tag{6.40}$$

Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i \quad \frac{\partial f}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad .$$

Επομένως

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \,. \tag{6.41}$$

Δηλαδή βρίσκουμε τις εξισώσεις του Hamilton. Εδώ πρέπει να τονίσουμε τα εξής, στην περίπτωση της θεωρίας παραλλαγών (μεταβολών) στα άκρα της ολοκλήρωσης απαιτούμε οι μεταβολές των συντεταγμένων να είναι μηδέν. Δηλαδή όλες οι τροχιές περνούν από τα ίδια αρχικό και τελικό σημεία. Εδώ ο χώρος είναι ο χώρος των φάσεων δηλαδή οι μεταβλητές, που είναι οι συντεταγμένες του χώρου αυτού είναι τα q, p άρα είναι φυσικό να απαιτήσουμε ότι

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=\delta p_i(t_1)=\delta p_i(t_2)=0\,.$$

Μια προσεκτική ματιά σε όσα είπαμε στα προηγούμενα δείχνει ότι η απαίτηση αυτή χρειάζεται όταν υπάρχουν οι παράγωγοι των μεταβλητών γιατί έτσι μετά την παραγοντική ολοκλήρωση που χρησιμοποιείται, φεύγουν οι όροι που προκύπτουν οι οποίοι έχουν ως παράγοντες τις ανωτέρω μεταβολές στα άκρα των συντεταγμένων. Αν δεν υπάρχει κάποια παράγωγος δεν χρειάζεται η αντίστοιχη δεσμευτική σχέση της μεταβλητής διότι δεν υπάρχουν οι όροι συνόρου. Στην περίπτωσή μας εφόσον ξεκινήσαμε από τη λαγκρανζιανή για να καθορίσουμε τη χαμιλτονιανή, η προκύπτουσα έκφραση στο ολοκλήρωμα τροποποιημένης δράσης δεν περιέχει παραγώγους ως προς τον χρόνο των μεταβλητών p_i άρα δεν χρειάζεται να απαιτήσουμε να ισχύουν $\delta p_i(t_1)=\delta p_i(t_2)=0$.

Όμως υπάρχουν πλεονεκτήματα να απαιτήσουμε κάτι τέτοιο επειδή ο χαμιλτονιανός φορμαλισμός μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητος του λαγκρανζιανού. Όπως συμβαίνει με τη λαγκρανζιανή, υπάρχουν διαφορετικές χαμιλτονιανές που οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις Hamilton, ίδιες εξισώσεις κίνησης. Μπορούμε να βρούμε διαφορετικές τέτοιες χαμιλτονιανές με τον εξής γνωστό τρόπο: Όταν χρησιμοποιούμε την Αρχή Hamilton, μπορούμε να προσθέσουμε στην υπό ολοκλήρωση ποσότητα την ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο οποιασδήποτε καλά συμπεριφερόμενης συνάρτησης των συντεταγμένων και του χρόνου και αυτό να οδηγήσει στις ίδιες εξισώσεις Hamilton, ίδιες εξισώσεις κίνησης. Θυμίζουμε ότι αυτό συμβαίνει διότι τα άκρα ολοκλήρωσης είναι ίδια για όλες τις τροχιές στις ίδιες αρχική και τελική χρονικές στιγμές. Στην περίπτωσή μας η συνάρτηση είναι της μορφής $F(q,p,t)$ και η παράγωγός της $\dfrac{\mathrm{d}F(q,p,t)}{\mathrm{d}t}$ που προφανώς μπορεί να εισαγάγει παραγώγους και των p_i, οπότε χρειάζονται οι δεσμευτικές σχέσεις στο σύνορο (στα άκρα) και για τα p_i. Ένα απλό παράδειγμα είναι η προσθήκη στη χαμιλτονιανή ενός όρου της μορφής $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$ αυτό οδηγεί στη σχέση

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}-\dot{p}_i q_i - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t=0\,.$$

Από αυτήν εύκολα προκύπτουν οι ίδιες εξισώσεις Hamilton που προκύπτουν χωρίς την προσθήκη του όρου αυτού, πρέπει όμως να δεσμεύσουμε τα p_i στα άκρα ώστε να ισχύουν και για αυτά οι σχέσεις $\delta p_i(t_1)=\delta p_i(t_2)=0$.

6.5 Η αρχή της ελάχιστης δράσης

Πρόκειται γενικώς για στάσιμη κατάσταση της δράσης και όχι πάντα για ελάχιστη δράση. Παρόλα αυτά έχει επικρατήσει ο όρος ελάχιστη δράση. Αυτή η αρχή σχετίζεται με τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Αναφέρεται σε συστήματα που διατηρείται η χαμιλτονιανή, δηλαδή η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο,

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0\,.$$

Σε αυτή την περίπτωση εισάγεται μια άλλη έννοια μεταβολής μεγεθών η λεγόμενη μεταβολή τύπου Δ. Στην περίπτωση της γνωστής μεταβολής τύπου δ όλες οι παραλλαγμένες τροχιές αρχίζουν και τερματίζουν στα ίδια σημεία στον θεσικό χώρο κατά τις ίδιες χρονικές στιγμές t_1, t_2 με την πραγματική τροχιά. Επομένως για τα ακραία σημεία όλων των τροχιών ισχύουν $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Στην περίπτωση της μεταβολής τύπου Δ οι παραλλαγμένες τροχιές έχουν άκρα που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους από αυτούς της πραγματικής τροχιάς και τα άκρα της κάθε μιας τροχιάς στον θεσικό χώρο είναι γενικώς διαφορετικά. Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τις τροχιές, όπως μπορούμε να κάνουμε και για τις μεταβολές τύπου δ, με χρήση μιας παραμέτρου, έστω α, οπότε έχουμε για τις διάφορες τροχιές, $q_i(t,\alpha)\quad i=1,2,...,n$. Το $\alpha = 0$ για την πραγματική τροχιά, δηλαδή

$$q_i(t) = q_i(t,0) \quad i=1,2,...,n\,. \tag{6.42}$$

Έστω ότι κάνουμε την παραμετροποίηση

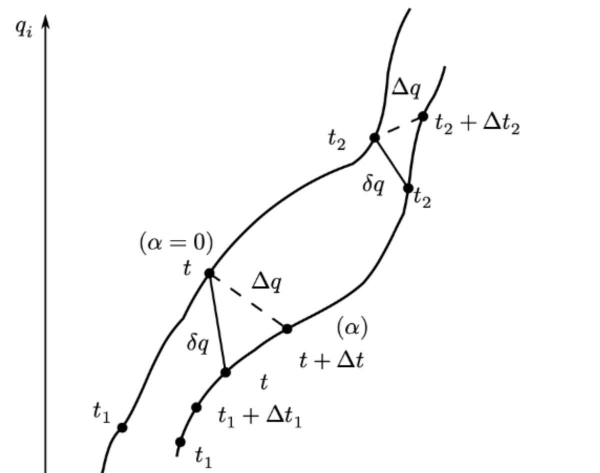
$$q_i(t,\alpha) = q_i(t) + \alpha\eta_i(t) \quad i=1,2,...,n\,. \tag{6.43}$$

Θα περιοριστούμε σε μικρές τιμές του α, δηλαδή σε απειροστές μεταβολές, «απειροστά» κοντά τροχιές. Οι συναρτήσεις $\eta_i(t)$ είναι αυθαίρετες αλλά παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Για να μπορούμε να έχουμε τη δυνατότητα διαφορετικών χρόνων t_1 και διαφορετικών χρόνων t_2 για κάθε παραλλαγμένη τροχιά (στα άκρα), κατά τη μεταβολή-Δ, τα αντίστοιχα σημεία είναι όπως φαίνεται στο Σχ.(6.2), όπου εικονίζεται η πραγματική και μια τύπου Δ παραλλαγμένη τροχιά, για την απλή περίπτωση δυο μεταβλητών στον θεσικό χώρο. Δηλαδή, στην γενική αυτή περίπτωση, τα αντίστοιχα σημεία της πραγματικής τροχιάς και της οποιασδήποτε παραλλαγμένης δεν μπορεί να έχουν ίδια t, ενώ αυτό γίνεται αν όλοι οι αρχικοί χρόνοι t_1 είναι ίσοι μεταξύ τους και αντιστοίχως οι τελικοί t_2. Αυτό ισοδυναμεί με το γεγονός ότι, οι αντίστοιχοι χρόνοι $t+\Delta t$ στην παραλλαγμένη τροχιά των χρόνων t της πραγματικής τροχιάς εξαρτώνται και από την παράμετρο α. Με χρήση της απλής περίπτωσης του Σχ. 6.2 μπορούμε να καταλήξουμε, σε πρώτη προσέγγιση ως προς μικρές μεταβολές, στη σχέση

$$\Delta q_i = \delta q_i(t) + \dot{q}_i(t)\Delta t\,.$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε αυτή τη σχέση χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση της Εξ. (6.43). Από την παραμετροποίηση έχουμε για οποιαδήποτε αντίστοιχα σημεία ότι

$$\Delta q_i = q_i(t+\Delta t,\alpha) - q_i(t,0) = q_i(t+\Delta t,0) - q_i(t,0) + \alpha\eta_i(t+\Delta t).$$



Σχήμα 6.2 *Η μεταβολή-Δ στον θεσικό χώρο.*

Σε πρώτη προσέγγιση, για μικρές ποσότητες $\alpha, \Delta t$ έχουμε

$$\Delta q_i = \dot{q}_i(t)\Delta t + \delta q_i(t)\,. \tag{6.44}$$

Προφανώς η μεταβολή-Δ δεν μπορεί να εναλλαχτεί με τη συνήθη διαφόριση d, ενώ αυτό γίνεται για τη μεταβολή-δ. Για τα άκρα 1,2 έχουμε για κάθε παραλλαγμένη τροχιά $\Delta t(1) = \Delta t_1, \Delta t(2) = \Delta t_2$, αυτά είναι προφανώς συναρτήσεις της παραμέτρου α της αντίστοιχης τροχιάς. Οι Εξ. (6.44) δίνουν για τα άκρα

$$\begin{aligned} \Delta q_i(1) &= \delta q_i(1) + \dot{q}_i(1)\Delta t_1 \\ \Delta q_i(2) &= \delta q_i(2) + \dot{q}_i(2)\Delta t_2. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Ας υπολογίσουμε τη μεταβολή-Δ του ολοκληρώματος δράσης, $\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$.

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(0)\mathrm{d}t\,. \tag{6.46}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους ισχύει

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha)\mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} L(\alpha)\mathrm{d}t\,. \tag{6.47}$$

Κάνοντας πρώτη προσέγγιση στα απειροστά για το δεύτερο και τρίτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της Εξ. (6.47), βρίσκουμε από την Εξ. (6.46)

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(0)\mathrm{d}t. \tag{6.48}$$

Επειδή τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέλους έχουν τα ίδια άκρα t_1, t_2, μπορούμε να πάρουμε ως αντίστοιχα σημεία της πραγματικής και της παραλλαγμένης τροχιάς σημεία όπου $\Delta t = 0$. Τότε όμως σύμφωνα με την Εξ. (6.44) οι μεταβολές Δ και δ συμπίπτουν οπότε

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \delta L\mathrm{d}t. \tag{6.49}$$

Για τη μεταβολή-δ έχουμε προφανώς ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\mathrm{d}t = \left.\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \mathrm{d}t\,. \tag{6.50}$$

Ο όρος από την παραγοντική ολοκλήρωση δεν μηδενίζεται διότι τα $\delta q_i(1), \delta q_i(2)$ στα άκρα δεν μηδενίζονται στην περίπτωση της μεταβολής-Δ. Ισχύουν οι εξισώσεις του Lagrange και η σχέση $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, επομένως οι Εξ. (6.49) και (6.50) οδηγούν στην

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \left(L(t)\Delta t + \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \right)\Bigg|_1^2 . \tag{6.51}$$

Τα $\delta q_i(t_1), \delta q_i(t_2)$ στην Εξ. (6.51) είναι οι μεταβολές που φαίνονται στο Σχ.(6.2) για τα αντίστοιχα σημεία των άκρων της πραγματικής και της παραλλαγμένης τροχιάς. Στη συνέχεια θέλουμε να εκφράσουμε τη μεταβολή -Δ του ολοκληρώματος της Εξ. (6.51) ως προς τις μεταβολές Δq_i των q_i μεταξύ παραλλαγμένης και πραγματικής τροχιάς για τα ακραία αντίστοιχα σημεία τους λαμβάνοντας υπόψη και τους διαφορετικούς χρόνους για τα άκρα της πραγματικής και της παραλλαγμένης τροχιάς. Οι σχέσεις της Εξ. (6.54) οδηγούν από την Εξ. (6.51) στην

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \left(L\Delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \Delta t + \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i \right)\Bigg|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i - H\Delta t \right)\Bigg|_1^2 . \tag{6.52}$$

Το επόμενο βήμα για να βρούμε τη λεγόμενη αρχή της ελάχιστης δράσης είναι να βάλουμε τους παρακάτω περιορισμούς.

1. Θεωρούμε μόνο δυναμικά συστήματα που η H δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο οπότε είναι σταθερά της κίνησης.

2. Η παραλλαγή είναι τέτοια που η H διατηρείται και στην παραλλαγμένη όπως και στην πραγματική τροχιά (στον θεσικό χώρο) αλλά για κάθε διαφορετική τροχιά έχει, γενικώς, διαφορετικό μέγεθος H_α για κάθε μια παραλλαγμένη τροχιά και διαφορετική (γενικώς) H_0 για την πραγματική.

3. Για τα άκρα των παραλλαγμένων τροχιών θέτουμε $\Delta q_i(1) = \Delta q_i(2) = 0$, ενώ $\Delta t_1 \neq 0,\ \Delta t_2 \neq 0$. Δηλαδή οι τροχιές τέμνονται στα άκρα (1) και (2) στον θεσικό χώρο δυο διαφορετικές στιγμές, άρα έχουμε ότι τα H_α είναι όλα ίσα οπότε $H_\alpha = H_0$=σταθερά.

Έτσι η Εξ. (6.52) γίνεται

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = -H_0\left(\Delta t_2 - \Delta t_1\right). \tag{6.53}$$

Υπό τις ίδιες συνθήκες έχουμε για το ολοκλήρωμα της δράσης

$$\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \mathrm{d}t - H_0(t_2 - t_1) . \tag{6.54}$$

Για την μεταβολή-Δ αυτής της έκφρασης έχουμε ότι

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \Delta\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \mathrm{d}t - H_0(\Delta t_2 - \Delta t_1) . \tag{6.55}$$

Από τις Εξ. (6.53) και (6.55) βρίσκουμε την αρχή της ελάχιστης δράσης που φαίνεται στην Εξ. (6.56)

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \mathrm{d}t = 0 . \tag{6.56}$$

Παλιά το ολοκλήρωμα στην Εξ. (6.56) λέγονταν δράση ή ολοκλήρωμα δράσης, σήμερα όμως έτσι λέγεται το ολοκλήρωμα της αρχής του Hamilton, και το ολοκλήρωμα της Εξ. (6.56) λέγεται απλουστευμένη (ή συνοπτική) δράση (abbreviated action).

Η αρχή της ελάχιστης δράσης μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Έστω ότι η κινητική ενέργεια είναι τετραγωνική μορφή ως προς τις ταχύτητες χωρίς άμεση εξάρτηση από τον χρόνο, δηλαδή έχει τη μορφή

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \,. \tag{6.57}$$

Έστω επιπλέον ότι η δυναμική συνάρτηση δεν εξαρτάται άμεσα από τα ταχύτητες, $V = V(q,t)$, τότε οι κανονικές ορμές προσδιορίζονται μόνο από το T και ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i = 2T$$

τότε η αρχή της ελάχιστης δράσης παίρνει τη μορφή

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} T\mathrm{d}t = 0 \,. \tag{6.58}$$

Έστω επίσης ότι διατηρείται η κινητική ενέργεια, τότε η αρχή της ελάχιστης δράσης γίνεται

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0 \,. \tag{6.59}$$

Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στην περίπτωση στερεού στο οποίο δεν εφαρμόζονται ασκούμενες δυνάμεις αλλά μόνο δυνάμεις δεσμών τέτοιες που για οποιαδήποτε μετατόπιση του στερεού δεν παράγουν έργο. Η Εξ. (6.59) δείχνει γιατί στην αρχή της ελάχιστης δράσης χρειάζεται να επιτρέπονται και διαφορετικοί χρόνοι άκρων, δηλαδή διαφορετικά διαστήματα χρόνου διαγραφής των τροχιών.

Η σχέση της Εξ. (6.59) λέει ότι, υπό τις ανωτέρω προϋποθέσεις, από όλες τις πιθανές τροχιές μεταξύ δυο σημείων, όπου η ενέργεια διατηρείται κατά την διαγραφή των τροχιών, το σύστημα κινείται κατά μήκος εκείνης της τροχιάς (πραγματική) για την οποία ο χρόνος διαδρομής είναι ο μικρότερος (πιο σωστά είναι στάσιμος). Μπορούμε να φτιάξουμε ένα θεσικό χώρο όπου τα M_{jk} της Εξ. (6.57) να σχηματίζουν τον μετρικό τανυστή του χώρου. Το στοιχείο μήκους $\mathrm{d}\rho$ αυτού του, γενικώς καμπύλου και μη ορθογώνιου, χώρου θα δίνεται από την Εξ. (6.60)

$$(\mathrm{d}\rho)^2 = \sum_{j,k=1}^{n} M_{jk}(q)\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k \,. \tag{6.60}$$

Η κινητική ενέργεια θα είναι

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 \,. \tag{6.61}$$

Από αυτήν βρίσκουμε

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{2T}} \,. \tag{6.62}$$

Αλλάζουμε ανεξάρτητη μεταβλητή στην Εξ. (6.58) οπότε η αρχή της ελάχιστης δράσης γίνεται

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} T\mathrm{d}t = \Delta\int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{T/2}\,\mathrm{d}\rho = \Delta\int_{A_1A_2} \sqrt{T/2}\,\mathrm{d}\rho = 0 \ . \tag{6.63}$$

Τελικώς έχουμε

$$\Delta\int_{A_1A_2} \sqrt{H_0 - V(q)}\,\mathrm{d}\rho = 0 \ . \tag{6.64}$$

Σε αυτή τη σχέση δεν εμφανίζεται άμεσα ο χρόνος και έχουμε μόνο τροχιές χωρίς να φαίνεται πως διαγράφονται συναρτήσει του χρόνου. Θυμίζουμε ότι οι παραλλαγμένες τροχιές και η πραγματική τροχιά περνούν όλες από τα δυο ίδια σημεία A_1, A_2, του θεσικού χώρου. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (6.60) βρίσκουμε

$$\Delta\int_{A_1A_2} \sqrt{H_0 - V(q)}\,\mathrm{d}\rho = \Delta\int_{A_1A_2} \sqrt{H_0 - V(q)}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k} \ . \tag{6.65}$$

Η Εξ. (6.64), όπως και η ισοδύναμή της Εξ. (6.65), λέγεται συχνά μορφή του Jacobi της αρχής της ελάχιστης δράσης. Αυτή η αρχή μπορεί να γραφτεί σε πιο πρακτική μορφή, εκφράζοντας τις καμπύλες συναρτήσει μιας μεταβλητής θ που μεταβάλλεται μονότονα κατά τη διαγραφή της κάθε καμπύλης στον θεσικό χώρο και κατά τη μεταβολή-Δ ισχύει ότι το θ=σταθερό. Η θ παίζει τον ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής της θεωρίας παραλλαγών και αφού κατά τη μεταβολή-Δ η (ανεξάρτητη) μεταβλητή ολοκλήρωσης θ είναι σταθερή, η μεταβολή-Δ γίνεται μεταβολή-δ. Σύμφωνα με τα ανωτέρω θα έχουμε

$$\begin{aligned} & q_r = q_r(\theta), \quad r = 1, 2, \ldots, n \\ & \Delta\int_{A_1A_2} \sqrt{H_0 - V(q)}\,\mathrm{d}\rho = \Delta\int_{A_1A_2} \sqrt{H_0 - V(q)}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k} \\ & =\delta\int_{A_1A_2} \sqrt{H_0 - V(q)}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}\theta}}\mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} & q_i' = \frac{\mathrm{d}q_i(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \\ & f = f(q, q', \theta) = \sqrt{H_0 - V(q)}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}q_i'q_k'} \ . \end{aligned} \tag{6.67}$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε πρόβλημα θεωρίας παραλλαγών τύπου μεταβολών-δ οπότε θα καταλήξουμε στις γνωστές εξισώσεις του Euler, δηλαδή ισχύουν

$$\begin{aligned} & \delta\int_{A_1A_2} f(q, q', \theta)\mathrm{d}\theta = \int_{A_1A_2} \delta f(q, q', \theta)\mathrm{d}\theta = 0 \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Μερικές φορές αντί της θ μπορεί η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι μια από τις συντεταγμένες θέσης. Τονίζουμε ότι καταλήξαμε σε εξισώσεις της Διαφορικής Γεωμετρίας, χωρίς τον χρόνο, δηλαδή έχουμε τις τροχιές χωρίς να εμφανίζεται η κίνηση του συστήματος. Αν δεν υπάρχουν ενεργητικές (ασκούμενες) δυνάμεις τότε το T είναι σταθερό κατά την κίνηση και η αρχή του Jacobi λέει ότι το σημείο του συστήματος στον ανωτέρω θεσικό χώρο ακολουθεί δρόμο μεταξύ δυο σημείων που είναι στάσιμος. Ισοδύναμα λέμε ότι το σημείο κινείται πάνω σε γεωδαισιακή καμπύλη.

Η αρχή της ελάχιστης δράσης στη μορφή της αρχής του Fermat βρίσκει πολλές χρήσιμες εφαρμογές στη γεωμετρική οπτική και την «οπτική» δεσμών ηλεκτρονίων.

Υπάρχουν και άλλες παρόμοιες αρχές μεταβολών στην κλασική μηχανική. Ένα παράδειγμα είναι η αρχή της ελάχιστης καμπυλότητας του Hertz. Σύμφωνα με αυτήν την αρχή, για την περίπτωση που δεν υπάρχουν ασκούμενες δυνάμεις παρά μόνο δυνάμεις των συνδέσμων, το σημείο που περιγράφει το σύστημα κινείται σε τροχιά ελάχιστης καμπυλότητας. Επίσης υπάρχει η αρχή του ελάχιστου εξαναγκασμού.

Παραδείγματα – Ειδικά θέματα

1. Πότε τα στάσιμα σημεία είναι σημεία ελάχιστου

Θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα που μας λέει πότε ένα στάσιμο σημείο του ολοκληρώματος της οποιασδήποτε μορφής δράσης είναι πραγματικά σημείο ελάχιστου. Ας θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στον θεσικό χώρο ενός μηχανικού συστήματος. Έστω ένα σημείο Α μιας πραγματικής τροχιάς στο θεσικό χώρο. Έστω ότι από το ίδιο σημείο περνά και μια άλλη πραγματική τροχιά που σχηματίζει μικρή γωνία με την πρώτη στο σημείο Α. Έστω ότι η δεύτερη τροχιά συναντά την πρώτη σε ένα άλλο σημείο, έστω Β. Φανταζόμαστε ότι ενώ η πρώτη τροχιά παραμένει σταθερή η δεύτερη μεταβάλλεται ενώ συναντά στο σταθερό σημείο Α την πρώτη, τότε θα μεταβάλλεται επίσης η θέση του σημείου Β. Η οριακή θέση του σημείου Β όταν η γωνία στο Α μεταξύ των δυο πραγματικών τροχιών τείνει στο μηδέν, λέγεται κινητική εστία (kinetic focus) του Α στην πρώτη τροχιά ή λέμε ότι το Β είναι το συζυγές σημείο του Α. Το θεώρημα λέει αυτό που ακολουθεί. Το ολοκλήρωμα κατά μήκος της πραγματικής τροχιάς μεταξύ δυο δεδομένων σημείων είναι πραγματικό ελάχιστο, με την προϋπόθεση ότι κατά τη διαδρομή από το αρχικό σημείο του ολοκληρώματος φτάνουμε στο τελικό χωρίς να συναντήσουμε την κινητική εστία του αρχικού σημείου. Αν φτάνουμε στο τελικό σημείο συναντώντας κατά τη διαδρομή την κινητική εστία, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το ολοκλήρωμα είναι ελάχιστο ή όχι. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι για αρκούντως μικρά διαστήματα στα οποία υπολογίζεται το ολοκλήρωμα, αυτό έχει ελάχιστο.

Μια απλή περίπτωση είναι η περίπτωση σωματίου δεσμευμένου να κινείται σε λεία σφαιρική επιφάνεια χωρίς τη δράση ασκούμενων δυνάμεων. Οι πραγματικές τροχιές είναι μέγιστοι κύκλοι. Η απλουστευμένη δράση κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς, ανεξάρτητα του αν είναι μέγιστος κύκλος ή όχι (αρκεί η ενέργεια να είναι δεδομένη, σταθερή) είναι ανάλογη του μήκους της τροχιάς. Η κινητική εστία οποιουδήποτε σημείου Α είναι το διαμετρικά αντίθετο σημείο του Α το A'. Το θεώρημα που αναφέραμε λέει ότι οποιοδήποτε τόξο μέγιστου κύκλου που ενώνει οποιαδήποτε δυο σημεία έχει ελάχιστο μήκος σε σχέση με τις τροχιές πάνω στη σφαίρα που ενώνουν τα ίδια αυτά σημεία, αρκεί το μήκος του τόξου αυτού να είναι μικρότερο από το μισό του μήκους ενός μέγιστου κύκλου της σφαίρας.

2. Γενικά χαρακτηριστικά της κίνησης συστήματος

Γενικώς, η πραγματική κίνηση ενός συγκεκριμένου μηχανικού συστήματος στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, μπορεί να προσδιοριστεί από τις (αρχικές) θέσεις και ταχύτητες κάποια δεδομένη (αρχική) στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι τα τρία μεγέθη $(q(t),\dot{q}(t),t)$ μιας πραγματικής κίνησης δεν μπορεί να ανήκουν σε δυο ή περισσότερες διαφορετικές κινήσεις του ίδιου μηχανικού συστήματος. Αυτό προκύπτει από τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange που είναι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Εξαίρεση αποτελούν ιδιάζοντα σημεία που είναι σημεία ισορροπίας, όπου $(\dot{q}(t)=0,\ddot{q}(t)=0,t)$. Σε αυτά μπορεί να τείνουν πολλές κινήσεις ή καμία.

Στην περίπτωση του χαμιλτονιανού φορμαλισμού, η πραγματική κίνηση ενός συγκεκριμένου μηχανικού συστήματος, μπορεί να προσδιοριστεί από τις θέσεις και ορμές κάποια δεδομένη (αρχική) στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι τα τρία μεγέθη $(q(t),p(t),t)$ μιας πραγματικής κίνησης δεν μπορεί να ανήκουν σε δυο ή περισσότερες διαφορετικές κινήσεις του ίδιου μηχανικού συστήματος. Αυτό προκύπτει από τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης του Hamilton οι οποίες είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Εξαίρεση αποτελούν και πάλι ιδιάζοντα σημεία, δηλαδή σημεία ισορροπίας όπου $(\dot{q}(t)=0,\dot{p}(t)=0,t)$. Θα αναφερθούμε περισσότερο στα σημεία ισορροπίας, αργότερα. Η κίνηση προκύπτει από τη λύση των εξισώσεων του λαγκρανζιανού ή του χαμιλτονιανού φορμαλισμού. Γενικώς πρόκειται για συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Αν οι εξισώσεις αυτές δεν περιέχουν άμεσα τον χρόνο τότε είναι αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις και το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα λέγεται αυτόνομο. Για ένα μη αυτόνομο σύστημα η λύση των εξισώσεων κίνησης θα είναι για τις περιπτώσεις των δυο φορμαλισμών, αντίστοιχα, της μορφής

$$q_i = q_i(q_0,\dot{q}_0,t_0,t),\quad i=1,2,...,n$$

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_0,p_0,t_0,t) \\ p_i &= p_i(q_0,p_0,t_0,t),\quad i=1,2,...,n \end{aligned} \tag{6.69}$$

Για ένα αυτόνομο σύστημα η λύση των εξισώσεων κίνησης θα είναι για τις περιπτώσεις των δυο φορμαλισμών, αντίστοιχα, της μορφής

$$
\begin{aligned}
&q_i = q_i(q_0, \dot{q}_0, t), \quad i = 1, 2, ..., n \\
&q_i = q_i(q_0, p_0, t) \\
&p_i = p_i(q_0, p_0, t), \quad i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
\tag{6.70}
$$

Υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των αυτόνομων και των μη αυτόνομων συστημάτων. Σε ένα μη αυτόνομο σύστημα η κίνηση, μετά την αρχική στιγμή, εξαρτάται εκτός από τις αρχικές τιμές $q_0, \dot{q}_0$ ή αντίστοιχα q_0, p_0 και από την αρχική στιγμή t_0. Με άλλα λόγια για τις ίδιες αρχικές τιμές $q_0, \dot{q}_0$ ή q_0, p_0 έχουμε γενικώς διαφορετικές κινήσεις αν οι αρχικοί χρόνοι t_0 είναι διαφορετικοί. Σε ένα αυτόνομο σύστημα η κίνηση μετά την αρχική στιγμή δεν εξαρτάται από το t_0 αλλά μόνο από τις αρχικές τιμές $q_0, \dot{q}_0$ ή q_0, p_0. Ένα σύστημα που περιγράφεται πλήρως μόνο από τη λαγκρανζιανή του χωρίς πρόσθετες ενεργητικές δυνάμεις και δεσμούς, θα είναι αυτόνομο αν $L = L(q, \dot{q})$. Ανάλογα ισχύουν για σύστημα στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, είναι αυτόνομο αν $H = H(q, p)$. Η περιγραφή δυναμικών συστημάτων γίνεται σε διάφορους χώρους, όπως φαίνεται στα επόμενα.

α) Ο θεσικός χώρος έχει διάσταση n και αποτελείται από το σύνολο των σημείων θέσης, δηλαδή των συντεταγμένων θέσης $(q_1, q_2, ..., q_n)$. Αυτό το σημείο (θέσης) του θεσικού χώρου διαγράφει μια καμπύλη κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος, αφού κατά την κίνηση $q_i = q_i(t)$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ένα συγκεκριμένο δυναμικό σύστημα μπορεί να διαγράφει διάφορες καμπύλες στον θεσικό χώρο που η κάθε μια εξαρτάται από τις αρχικές θέσεις και ταχύτητες του συστήματος σε κάποια, κάθε φορά, αρχική χρονική στιγμή. Οι καμπύλες που διαγράφει κατά την κίνησή του το μηχανικό σύστημα στον θεσικό χώρο, μπορεί να τέμνονται μεταξύ τους. Πράγματι, οποιοδήποτε σημείο μιας τέτοιας αρχικής καμπύλης μπορεί να ληφθεί ως αρχικό σημείο κατά μια νεοεπιλεγόμενη αρχική στιγμή και γενικώς, με διαφορετικές αρχικές ταχύτητες (ή αντίστοιχα αρχικές συζυγείς ορμές) από αυτές που έχει το μηχανικό σύστημα στο σημείο του θεσικού χώρου κατά τη διαγραφή της αρχικής καμπύλης. Είναι ευνόητο ότι από αυτή τη νέα χρονική στιγμή και μετά η εξέλιξη του συστήματος με τον χρόνο θα είναι διαφορετική, άρα από το σημείο της αρχικής καμπύλης θα ξεκινήσει μια άλλη καμπύλη πραγματικής κίνησης του ίδιου μηχανικού συστήματος στον θεσικό χώρο, άρα οι καμπύλες γενικώς τέμνονται.

β) Ως γεγονός θεωρείται ο συνδυασμός $(q_1, q_2, ..., q_n, t)$. Αυτός ο συνδυασμός είναι ένα σημείο του χώρου των γεγονότων που έχει διάσταση $n+1$. Είναι ευνόητο ότι και σε αυτόν τον χώρο καμπύλες που περιγράφουν την κίνηση κάποιου δεδομένου μηχανικού συστήματος μπορεί να τέμνονται διότι κάθε σημείο μιας αρχικής πραγματικής καμπύλης κίνησης μπορεί να ληφθεί ως αρχικό σημείο όπου οι ταχύτητες (ή οι ορμές) να είναι διαφορετικές από αυτές της αρχικής κίνησης. Αυτό θα οδηγήσει σε άλλη καμπύλη κίνησης που θα τέμνει την αρχική.

γ) Ο χώρος των καταστάσεων έχει συντεταγμένες τα $(q, \dot{q})$ άρα έχει διάσταση $2n$. Καμπύλες που παριστάνουν πραγματική κίνηση κάποιου μη αυτόνομου μηχανικού συστήματος μπορεί να τέμνονται, όμως, δεν μπορούν να τέμνονται την ίδια χρονική στιγμή διότι τότε, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες (θέσεων και ταχυτήτων ή ορμών, την ίδια αρχική χρονική στιγμή), θα είχαμε δυο διαφορετικές εξελίξεις του ίδιου μηχανικού συστήματος, πράγμα που δεν γίνεται. Εξαίρεση αποτελούν τα σημεία ισορροπίας . Αν η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, οπότε είναι σταθερά της κίνησης και έχουμε αυτόνομο μηχανικό σύστημα, τότε οι καμπύλες στον χώρο $(q, \dot{q})$ δεν τέμνονται εκτός των σημείων ισορροπίας.

δ) Στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό μπορεί να έχουμε ως χώρο των καταστάσεων, τον χώρο των φάσεων, δηλαδή τα σημεία (q, p), με διάσταση $2n$. Γενικώς, για μη αυτόνομα μηχανικά συστήματα, οι καμπύλες που περιγράφουν την πραγματική κίνηση σε αυτόν τον χώρο μπορεί να τέμνονται, όμως δεν μπορούν να τέμνονται την ίδια χρονική στιγμή διότι τότε, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες (θέσεων και συζυγών ορμών την ίδια αρχική χρονική στιγμή) θα είχαμε δυο διαφορετικές εξελίξεις του ίδιου μηχανικού συστήματος πράγμα που δεν γίνεται. Εξαίρεση αποτελούν τα σημεία ισορροπίας που αναφέραμε στην αρχή.

Αν η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, οπότε είναι σταθερά της κίνησης και το σύστημα είναι αυτόνομο, τότε οι καμπύλες στον χώρο των φάσεων δεν τέμνονται εκτός των σημείων ισορροπίας. Οι καμπύλες στον χώρο των φάσεων λέγονται και φασικές καμπύλες ή φασικές τροχιές.

ε) Ο χώρος κατάστασης-χρόνου αποτελείται από τα σημεία $(q,\dot{q},t)$, άρα έχει διάσταση $2n+1$. Αυτή η περίπτωση καλύπτεται από όσα αναφέραμε στο (γ). Οι καμπύλες δεν τέμνονται παρά μόνο σε σημεία ισορροπίας.

στ) Μπορούμε να αναφερόμαστε και στον χώρο (q,p,t). Η περίπτωση καλύπτεται από όσα είπαμε στο (δ). Οι καμπύλες δεν τέμνονται παρά μόνο σε σημεία ισορροπίας.

Είναι δυνατό να κατανοήσουμε με απλό τρόπο τι γίνεται σε ιδιάζοντα σημεία εξετάζοντας την ειδική περίπτωση του απλού εκκρεμούς παράγραφος 6.8. που ακολουθεί. Θα δούμε ότι στην περίπτωση του φασικού χώρου, αν το σύστημα βρίσκεται σε ιδιάζον σημείο, σημείο ισορροπίας, τότε παραμένει εκεί συνεχώς. Υπάρχουν τροχιές στον φασικό χώρο οι οποίες οριακά καθώς ο χρόνος τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τείνουν σε ιδιάζοντα σημεία.

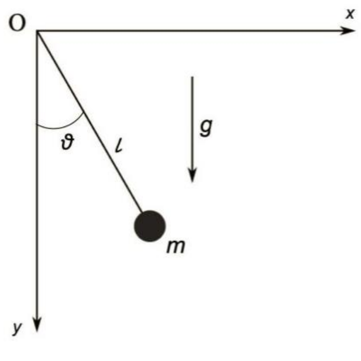
3. Το απλό εκκρεμές στον χώρο των φάσεων

Έστω η περίπτωση του απλού εκκρεμούς του Σχ.(6.3). Η κίνηση θεωρείται στο επίπεδο και η μοναδική γενικευμένη θεσική συντεταγμένη είναι το θ. Η χαμιλτονιανή είναι

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\,\cos\theta\,. \tag{6.71}$$

Το μηχανικό σύστημα είναι αυτόνομο, η χαμιλτονιανή διατηρείται κατά την κίνησή του. Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton είναι

$$\dot{\theta}=\frac{p}{ml^2},\quad \dot{p}=-mgl\,\sin\theta\,. \tag{6.72}$$



Σχήμα 6.3 *Απλό εκκρεμές.*

Η χαμιλτονιανή είναι η ενέργεια του συστήματος και είναι σταθερή

$$\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\,\cos\theta=E\,. \tag{6.73}$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε

$$p = \pm\sqrt{2ml^2(E + mgl\ \cos\theta)}\ . \tag{6.74}$$

Αν η ενέργεια έχει τιμές που να επαληθεύεται η σχέση

$$E < mgl \tag{6.75}$$

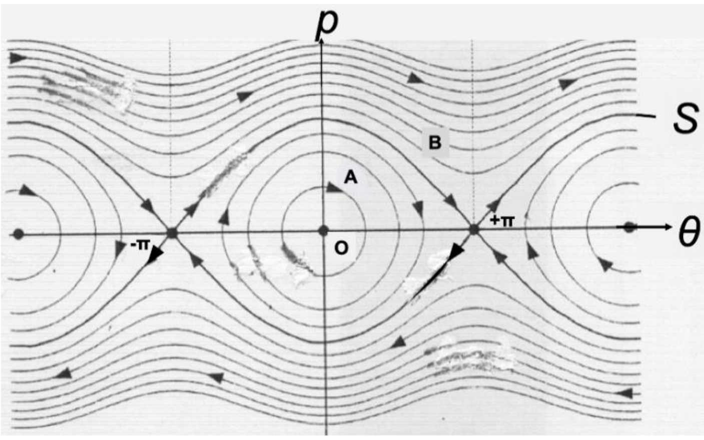
τότε θα έχουμε για τη γωνία θ τον περιορισμό

$$\begin{gathered} E + mgl\ \cos\theta > 0 \\ \text{ή } \cos\theta > -\frac{E}{mgl}\ . \end{gathered} \tag{6.76}$$

Αυτό σημαίνει ότι για τέτοιες τιμές της ενέργειας η κίνηση θα περιορίζεται να έχει θ τέτοια που

$$\begin{gathered} -\theta_{\mathrm{m}} < \theta < \theta_{\mathrm{m}}\ . \\ \text{Όπου } 0 < \theta_{\mathrm{m}} = \arccos\left(-\frac{E}{mgl}\right) < \pi\ . \end{gathered} \tag{6.77}$$

Η κίνηση θα παριστάνεται στον φασικό χώρο, στο Σχ.(6.4), με τις κλειστές φασικές καμπύλες της περιοχής Α.



Σχήμα 6.4 *Φασικές καμπύλες απλού εκκρεμούς.*

Το ιδιάζον σημείο Ο είναι σημείο (ευσταθούς) ισορροπίας, διότι για αυτό το σημείο ισχύουν $\theta = 0,\ p$=0 (επομένως $E + mgl = 0,\ E = -\ mgl$) και από τις εξισώσεις κίνησης προκύπτει πράγματι η συνθήκη ισορροπίας, δηλαδή ότι $\dot{\theta} = 0,\ \dot{p} = 0$. Η ολική μηχανική ενέργειά του είναι μόνο δυναμική ($-mgl$) και είναι η ελάχιστη δυναμική ενέργεια που μπορεί να έχει. Το σωμάτιο βρίσκεται στο κατώτατο σημείο ακίνητο, οπότε ξέρουμε ότι αυτή είναι και θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αυτό είναι ένα μεμονωμένο σημείο από όπου δεν διέρχεται καμία τροχιά (φασική καμπύλη).

Έστω ότι η ενέργεια είναι αρκετά μεγάλη, δηλαδή

$$E > mgl\ . \tag{6.78}$$

Σε αυτή την περίπτωση το θ μπορεί να είναι οποιοδήποτε και οι φασικές καμπύλες φαίνονται στην περιοχή Β του Σχ.(10.4). Τα βέλη δείχνουν πως διαγράφονται η καμπύλες με την εξέλιξη στον χρόνο. Για μια τιμή ενέργειας έχουμε δυο καμπύλες μια πάνω από τον άξονα των θ και μια κάτω από αυτόν που διαγράφονται με αντίθετες φορές. Ειδική περίπτωση είναι αυτή που για την ενέργεια ισχύει

$$E = mgl \ . \tag{6.79}$$

Αυτή είναι η περίπτωση που το εκκρεμές έχει τόση ενέργεια όση του χρειάζεται για να φτάσει οριακά στο ανώτατο σημείο της διαδρομής του.

Η σχετική καμπύλη στον χώρο των φάσεων στο Σχ.(6.4) είναι η S. Αυτή χωρίζει τον φασικό χώρο στις περιοχές A και B. Η καμπύλη S λέγεται διαχωριστική (separatrix). Η Εξ. (6.74) γράφεται για αυτή την περίπτωση

$$p = \pm\sqrt{2m^2 g l^3 (1+\cos\theta)} \ . \tag{6.80}$$

Το πρόσημο + αντιστοιχεί στον άνω φασικό χώρο όπου $p > 0$ και το – στον κάτω φασικό χώρο όπου $p < 0$.

Από την πρώτη των Εξ. (6.72) βρίσκουμε ότι για τη διαχωριστική καμπύλη ισχύει

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(1+\cos\theta)} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\theta}{2} \ . \tag{6.81}$$

Άρα

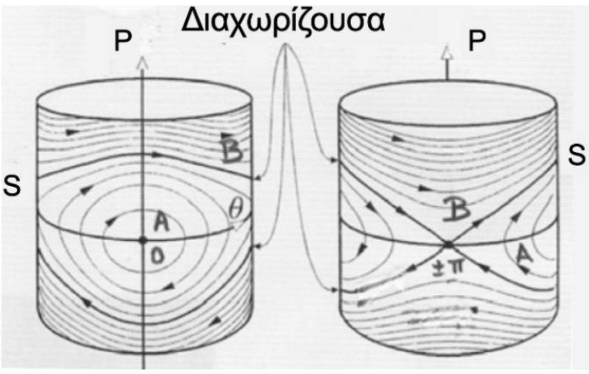
$$\begin{gathered} \pm\sqrt{\frac{g}{l}}t = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_0+\pi}{4}\right)\right) \\ \theta \neq \pm\pi. \end{gathered} \tag{6.82}$$

Τελικώς

$$\begin{gathered} \theta = 4\arctan\left(\exp\left(\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right)\tan\left(\frac{\theta_0+\pi}{4}\right)\right) - \pi \\ \theta \neq \pm\pi. \end{gathered} \tag{6.83}$$

Η άνω διαχωριστική φασική καμπύλη, με $p > 0$, καθώς $t \to +\infty$ τείνει στο ιδιάζον σημείο (ασταθούς ισορροπίας) +π και καθώς $t \to -\infty$ τείνει στο ιδιάζον σημείο (ασταθούς ισορροπίας) –π. Η κάτω διαχωριστική καμπύλη, με $p < 0$, καθώς $t \to +\infty$ τείνει στο –π και καθώς $t \to -\infty$ τείνει στο +π.

Επειδή για το εκκρεμές η μεταβλητή θ είναι περιοδική με περίοδο 2π, μπορούμε να απεικονίσουμε τον χώρο των φάσεων στην επιφάνεια κυλίνδρου όπως στο Σχ.(6.5).



Σχήμα 6.5 *Κυλινδρική απεικόνιση του χώρου των φάσεων απλού εκκρεμούς.*

Τώρα τα σημεία +π και –π συμπίπτουν. Είναι φανερό ότι στην περιοχή Α έχουμε ταλάντωση, στην περιοχή Β έχουμε περιστροφική κίνηση, με αυτή την απεικόνιση ουσιαστικά και τα δυο είδη είναι κλειστές τροχιές. Για την τιμή της ενέργειας της διαχωριστικής καμπύλης έχουμε ουσιαστικά τρεις κινήσεις μια στο κάτω τμήμα όπου η διαδρομή στον χρόνο είναι από +π προς –π, μια στο άνω τμήμα όπου η κίνηση είναι από –π προς +π και μια που είναι ισορροπία στο +π ή (ισοδύναμα) στο –π.

4. Το θεώρημα του Ostrogradsky

Στα πλαίσια της Μηχανικής θεμελιωδών διακριτών συστημάτων, όπως και στα πλαίσια των θεμελιωδών Θεωριών Πεδίου, οι εξισώσεις Λαγκρανζ οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Η χρήση διαφορικών εξισώσεων κίνησης με ανώτερες παραγώγους για την περίπτωση υλικών σωματιδίων ή θεμελιωδών Θεωριών Πεδίου, δημιουργεί προβλήματα. Ένα γνωστό παράδειγμα όπου δημιουργείται πρόβλημα είναι από την Κλασική Ηλεκτροδυναμική, συγκεκριμένα είναι η θεώρηση και της αντίδρασης ακτινοβολίας κινούμενου φορτισμένου σωματιδίου. Η εξίσωση κίνησης είναι διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως. Αυτό έχει ως συνέπεια την ύπαρξη (run away) λύσεων που αντιστοιχούν σε επιταχυνόμενη (εκθετική εξέλιξη με τον χρόνο) κίνηση ακόμη και αν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη που να δρα στο σωμάτιο. Η αποφυγή τέτοιων λύσεων οδηγεί σε «μικρή» παραβίαση της αρχής της αιτιότητας. Γενικώς, παρουσιάζεται η λεγόμενη αστάθεια Ostrogradsky. Δηλαδή μπορεί να καταλήξουμε σε ασταθή συστήματα.

Τέτοιες εξισώσεις κίνησης μπορεί να προέλθουν από λαγκρανζιανές οι οποίες εξαρτώνται από παραγώγους ανώτερης τάξης. Σημειώνουμε ότι στην συνήθη περίπτωση η εξάρτηση της λαγκρανζιανής από παραγώγους περιορίζεται μέχρι την πρώτη τάξη.

Το Θεώρημα του Ostrogradsky ερμηνεύει γιατί τέτοιες λαγκρανζιανές οδηγούν σε προβληματικές καταστάσεις. Θα περιοριστούμε σε διακριτά μονοδιάστατα συστήματα και εννοείται ότι ανάλογα ισχύουν για περισσότερες διαστάσεις όπως επίσης για Θεωρίες Πεδίων. Ας ξεκινήσουμε με μια συνήθη λαγκρανζιανή για ένα σωμάτιο. Έχουμε

$$L = L(q, \dot{q}, t)\,. \tag{6.84}$$

Θα επαναλάβουμε πράγματα που έχουμε ξαναδεί και θα βρούμε τη χαμιλτονιανή κ.λπ. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θεωρία μεταβολών, με συνοριακές συνθήκες τις γνωστές $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, τελικώς ισχύουν

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \end{gathered} \tag{6.85}$$

Αν ισχύει

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0\,, \tag{6.86}$$

Δηλαδή αν, όπως λέγεται, δεν υπάρχει εκφυλισμός τότε υπάρχει πράγματι η $\ddot{q}$ στη δεύτερη σχέση στις Εξ. (6.85) και μπορούμε να λύσουμε ως προς $\ddot{q}$ και να έχουμε

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, t)\,. \tag{6.87}$$

Αυτή είναι ουσιαστικά η σχέση η γνωστή από τον Νεύτωνα. Δηλαδή έχουμε διαφορική εξίσωση κίνησης δεύτερης τάξης οπότε η λύση της (κινηματική εξίσωση) θα έχει δυο σταθερές που μπορεί να είναι η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
&q = f_q(q_0, \dot{q}_0, t_0) \\
&q_0 = q(t_0),\ \dot{q}_0 = \dot{q}(t_0).
\end{aligned}
\tag{6.88}
$$

Αυτό σημαίνει ότι στον κανονικό φορμαλισμό (εξισώσεις του Hamilton στον χώρο των φάσεων) θα υπάρχουν δυο κανονικές συντεταγμένες, πράγμα που ήδη μας είναι γνωστό.

Ακολουθώντας την συνήθη διαδικασία (μετασχηματισμός Legendre κ.λπ.) αυτές οι συντεταγμένες είναι οι

$$
Q = q, \quad P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ . \tag{6.89}
$$

Εφόσον δεν υπάρχει εκφυλισμός, η σχέση στην Εξ. (6.86) μπορεί να αντιστραφεί ώστε να προσδιοριστεί η ταχύτητα συναρτήσει της ορμής της θέσης και του χρόνου, οπότε προσδιορίζουμε τη χαμιλτονιανή, ισχύουν

$$
\begin{aligned}
&\dot{q} = \dot{q}(Q, P, t) \\
&H(Q, P, t) = P\dot{q}(Q, P, t) - L\big(Q, \dot{q}(Q, P, t), t\big).
\end{aligned}
\tag{6.90}
$$

Από τη χαμιλτονιανή βρίσκουμε τις εξισώσεις Hamilton

$$
\dot{Q} = \frac{\partial H(Q, P, t)}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H(Q, P, t)}{\partial Q} \ . \tag{6.91}
$$

Αν δεν υπάρχει εξάρτηση από τον χρόνο, τότε η χαμιλτονιανή διατηρείται και στις περιπτώσεις ενδιαφέροντος συμπίπτει με την ενέργεια.

Ένα γνωστό παράδειγμα είναι ο μονοδιάστατος απλός αρμονικός ταλαντωτής, όπου έχουμε

$$
\begin{aligned}
&L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \\
&P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \dot{q} = \frac{P}{m} \\
&H(Q, P) = E(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2.
\end{aligned}
\tag{6.92}
$$

Παρατηρούμε ότι η χαμιλτονιανή (η ενέργεια) είναι σίγουρα φραγμένη από κάτω, συγκεκριμένα στην παραπάνω έκφρασή της το κάτω φράγμα της είναι το μηδέν,

$$
H(Q, P) = E(Q, P) \geq 0 \ . \tag{6.93}
$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια την περίπτωση που πρώτος ανέλυσε ο Ostrogradsky.

Θα θεωρήσουμε λαγκρανζιανή με μέγιστη παράγωγο τη δεύτερη παράγωγο, τότε με χρήση της θεωρίας μεταβολών και με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες που σημειώνουμε, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \\
&\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \\
&\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0,\ \delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) = 0.
\end{aligned}
\tag{6.94}
$$

Δηλαδή προκύπτει μια διαφορετική εξίσωση Euler-Lagrange. Μπορεί να δειχτεί ότι αν δεν υπάρχει εκφυλισμός τότε $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \neq 0$ οπότε η εξίσωση Euler-Lagrange μπορεί να γραφτεί ως

$$\ddddot{q} = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}, t). \tag{6.95}$$

Αυτή διαφέρει από τη συνήθη διαφορική εξίσωση (6.84), δεύτερης τάξης του Νεύτωνα. Η λύση της θα περιέχει τέσσερεις σταθερές που μπορεί να είναι οι αρχικές τιμές

$$\begin{gathered} q_0 = q(0),\ \dot{q}_0 = \dot{q}(0),\ \ddot{q}_0 = \ddot{q}(0),\ \dddot{q}_0 = \dddot{q}(0), \text{ οπότε} \\ q(t) = G(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, \dddot{q}_0, t). \end{gathered} \tag{6.96}$$

Οι τέσσερις σταθερές (αρχικές τιμές) δείχνουν ότι πρέπει να υπάρχουν τέσσερις κανονικές συντεταγμένες. Για τη μετάβαση στις κανονικές μεταβλητές υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι, ακολουθούμε τη μέθοδο του Ostrogradsky, που ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με το θέμα. Εισήγαγε δυο συντεταγμένες, την αρχική και την πρώτη παράγωγό της, και στη συνέχεια όρισε τις συζυγείς ορμές τους, δηλαδή

$$\begin{aligned} Q_1 &= q, & P_1 &= \frac{\partial L(q,\dot{q},\ddot{q},t)}{\partial \dot{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q,\dot{q},\ddot{q},t)}{\partial \ddot{q}}, \\ Q_2 &= \dot{q}, & P_2 &= \frac{\partial L(q,\dot{q},\ddot{q},t)}{\partial \ddot{q}}. \end{aligned} \tag{6.97}$$

Ο ορισμός της P_2 ταιριάζει με τον συνήθη ορισμό, ο ορισμός της P_1, θυμίζει τη σχετική έκφραση στην τρίτη σχέση των Εξ. (6.91).

Η μη ύπαρξη εκφυλισμού σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός του χώρου των φάσεων (6.97) μπορεί να αντιστραφεί και έτσι θα βρεθεί το $\ddot{q}$ ως συνάρτηση των Q_1, Q_2, P_2, t.

Πράγματι η αντιστροφή της τελευταίας από τις σχέσεις στην Εξ. (6.97), θα δώσει το $\ddot{q}$ ως συνάρτηση των $q, \dot{q}, P_2$, δεν υπάρχει εξάρτησή του από το P_1. Στη συνέχεια με χρήση της πρώτης και της τρίτης σχέσης βρίσκουμε τη σχέση $\ddot{q} = \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2, t)$.

Η αντίστοιχη χαμιλτονιανή βρίσκεται εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Legendre για τα $\dot{q} = q^{(1)} = q^{(1)}\left(Q_2\right) = Q_2,\ \ddot{q} = q^{(2)} = q^{(2)}\left(Q_1, Q_2, P_2, t\right)$, δηλαδή τελικώς

$$\begin{aligned} &H(Q_1,Q_2,P_1,P_2) = P_1 q^{(1)}\left(Q_2\right) + P_2 q^{(2)}\left(Q_1,Q_2,P_2,t\right) - L(Q_1,Q_2,\ddot{q}(Q_1,Q_2,P_2,t),t) \\ &= P_1 Q_2 + P_2 \ddot{q}(Q_1,Q_2,P_2,t) - L(Q_1,Q_2,\ddot{q}(Q_1,Q_2,P_2,t),t). \end{aligned} \tag{6.98}$$

Οι εξισώσεις Hamilton οι οποίες δίνουν την εξέλιξη του συστήματος με τον χρόνο είναι

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i},\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial P_i},\ \ i = 1, 2. \tag{6.99}$$

Ξεκινώντας από αυτές, εύκολα βρίσκει κανείς την εξίσωση Euler-Lagrange. Αν η λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου τότε η χαμιλτονιανή, η οποία στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι η ενέργεια, διατηρείται.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω χαμιλτονιανή εξαρτάται γραμμικά από την P_1, αυτό σημαίνει ότι δεν είναι φραγμένη από κάτω, σε αντίθεση με την περίπτωση του συνήθους αρμονικού ταλαντωτή. Αυτό ισχύει για κάθε σύστημα αυτού του τύπου με δεύτερη παράγωγο στη λαγκρανζιανή το οποίο δεν είναι εκφυλισμένο.

Ένα απλό παράδειγμα που αποτελεί μια τροποποίηση του αρμονικού ταλαντωτή είναι ένα απλό σύστημα με λαγκρανζιανή

$$L = -\frac{\varepsilon m}{2\omega^2}\ddot{q}^2 + \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2, \ \ \frac{1}{4} > \varepsilon > 0\,. \tag{6.100}$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange και η λύση της είναι

$$\begin{aligned} &-m\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\ddddot{q} + \ddot{q} + \omega^2 q\right) = 0 \\ &q(t) = C_+\cos(k_+t) + S_+\sin(k_+t) + C_-\cos(k_-t) + S_-\sin(k_-t). \end{aligned} \tag{6.101}$$

Λαμβάνουμε υπόψη τις αρχικές τιμές των διαφόρων μεγεθών οπότε ισχύουν

$$\begin{aligned} &k_\pm = \omega\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}} \\ &C_+ = \frac{k_-^2 q_0 + \ddot{q}_0}{k_-^2 - k_+^2}, \quad S_+ = \frac{k_-^2\dot{q}_0 + \dddot{q}_0}{k_+(k_-^2 - k_+^2)}, \\ &C_- = \frac{k_+^2 q_0 + \ddot{q}_0}{k_+^2 - k_-^2}, \quad S_- = \frac{k_+^2\dot{q}_0 + \dddot{q}_0}{k_-(k_+^2 - k_-^2)}. \end{aligned} \tag{6.102}$$

Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} &P_1 = m\dot{q} + \frac{\varepsilon m}{\omega^2}\dddot{q} \quad \Leftrightarrow \quad \dddot{q} = \frac{\omega^2 P_1 - m\omega^2 Q_2}{\varepsilon m}, \\ &P_2 = -\frac{\varepsilon m}{\omega^2}\ddot{q}, \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{\omega^2 P_2}{\varepsilon m}. \end{aligned} \tag{6.103}$$

Θεωρούμε ότι η χαμιλτονιανή ισούται με την ενέργεια οπότε έχουμε για την ενέργεια συναρτήσει διαφορετικών μεγεθών

$$\begin{aligned} E &= P_1 Q_2 - \frac{\omega^2}{2\varepsilon m}P_2^2 - \frac{m}{2}Q_2^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q_1^2 \\ &= \frac{\varepsilon m}{\omega^2}\dot{q}\,\dddot{q} - \frac{\varepsilon m}{2\omega^2}\ddot{q}^2 + \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \\ &= \frac{m}{2}\sqrt{1-4\varepsilon}\,k_+^2(C_+^2 + S_+^2) - \frac{m}{2}\sqrt{1-4\varepsilon}\,k_-^2(C_-^2 + S_-^2). \end{aligned} \tag{6.104}$$

Βλέπουμε ότι υπάρχει θετικός όρος και αρνητικός όρος. Ο χώρος των φάσεων και ο θεσικός χώρος είναι απεριόριστοι, επομένως η ενέργεια μπορεί να είναι από $-\infty$ έως $+\infty$. Η μη ύπαρξη κάτω φράγματος οδηγεί σε αστάθεια, η οποία μπορεί να εκδηλώνεται με απομάκρυνση από πιθανή ισορροπία όταν εισάγονται έστω και πολύ μικρές διαταραχές.

Για λόγους πληρότητας δίνουμε τις σχέσεις για μέγιστη παράγωγο N τάξης.

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^{(N)}, t)$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i}\frac{\partial L}{\partial q^{(i)}}=0\\
&Q_i=q^{(i-1)},\quad P_i=\sum_{j=i}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{j-i}\frac{\partial L}{\partial q^{(j)}}.
\end{aligned}
\tag{6.105}
$$

Όταν δεν υπάρχει εκφυλισμός τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς την μέγιστη παράγωγο στην εξίσωση κίνησης που είναι τάξης $2N$. Μη εκφυλισμός σημαίνει

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial q^{(N)}\partial q^{(N)}}\neq 0\,. \tag{6.106}
$$

Δηλαδή μπορεί να βρεθεί η $q^{(N)}$ από την

$$
P_N=\frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \tag{6.107}
$$

τελικώς ως συνάρτηση των $Q_1,Q_2,...,Q_N$ και του P_N και t, δηλαδή

$$
q^{(N)}=q^{(N)}\left(Q_1,Q_2,...,P_N,t\right).
$$

Η χαμιλτονιανή είναι

$$
\begin{aligned}
H&=\sum_{i=1}^{N}P_i q^{(i)}(Q_1,Q_2,...,Q_N,P_N)-L\Big(Q_1,Q_2,...,q^{(N)}(Q_1,Q_2,...,Q_N,P_N,t),t\Big)\\
&=P_1Q_2+P_2Q_3+...+P_{N-1}Q_N+P_N q^{(N)}\left(Q_1,Q_2,...,Q_N,P_N,t\right)\\
&-L\Big(Q_1,Q_2,...,q^{(N)}(Q_1,Q_2,...,Q_N,P_N,t),t\Big).
\end{aligned}
\tag{6.108}
$$

Είναι φανερό ότι οι $N-1$ πρώτοι όροι του αθροίσματος είναι μη φραγμένοι και από κάτω και από πάνω. Οι εξισώσεις Hamilton είναι.

$$
\dot{Q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i},\quad \dot{P}_i=-\frac{\partial H}{\partial Q_i} \tag{6.109}
$$

Το πρόβλημα της «αστάθειας» μπορεί να αντιμετωπιστεί με διάφορους τρόπους, για παράδειγμα μπορεί κάποιος να φτιάξει θεωρία με εκφυλισμό.

Υπάρχει προσπάθεια να θεμελιωθεί η Γενική Σχετικότητα με βάση λαγκρανζιανή με ανώτερες παραγώγους. Με αυτό τον τρόπο επιχειρούν να ερμηνεύσουν την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος χωρίς τη χρήση σκοτεινής ενέργειας. Σημειώνουμε ότι η λαγκρανζιανή της συνήθους Γενικής Σχετικότητας έχει δεύτερες παραγώγους αλλά η εξάρτηση από αυτές είναι γραμμική, οπότε υπάρχει εκφυλισμός και έτσι η συνήθης Γενική Σχετικότητα δε παρουσιάζει την αστάθεια που αναφέραμε. Τέτοιες ιδέες δοκιμάζονται σε θεωρίες στοιχειωδών σωματιδίων όπως στη Θεωρία Χορδών.

5. Εξισώσεις Χάμιλτον για σχετικιστική κίνηση μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Η λαγκρανζιανή φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι,

$$L=-mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}-q_e\Phi(x,t)+q_e\vec{\upsilon}\cdot\vec{A}(x,t)\ .$$

Θεωρούμε καρτεσιανές συντεταγμένες, $x=(x_1,x_2,x_3),\ \vec{\upsilon}=\dot{x}=(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)\ ,\ \ \gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}$

$\vec{A}=(A_1(x,t),A_2(x,t),A_3(x,t))$.

Οι συζυγές ορμές είναι

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\gamma m\dot{x}_i+q_eA_i\ .$$

Από το Κεφ.5 ξέρουμε ότι $h=E=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}+e_q\Phi(x,t)$.

Επομένως η χαμιλτονιανή υπολογίζεται, αφού με χρήση της προ τελευταίας σχέσης απαλείψουμε τις ταχύτητες από την τελευταία, μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$H(x,p,t)=\sqrt{\left(mc^2\right)^2+c^2\sum_{i=1}^{3}\left(p_i-q_eA_i(x,t)\right)^2}+e_q\Phi(x,t)\ .$$

Προβλήματα

1. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton (κανονικές εξισώσεις κίνησης) για το σφαιρικό εκκρεμές. Δείξτε τη διαδικασία που θα σας οδηγήσει στην εύρεση της κίνησης του συστήματος , $\varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t)$.

2. Υποθέστε ότι το δυναμικό ενός μονοδιάστατου συστήματος είναι
$H = \dfrac{p^2}{2m} - mAtx$, όπου $A =$ σταθερά.

α) Λύστε το πρόβλημα με χρήση των κανονικών εξισώσεων του Hamilton.

β) Θεωρήστε ότι παίρνετε ως αρχή του χρόνου τη στιγμή t_0 , ο χρόνος από εκεί και πέρα είναι τ δηλαδή $\tau = t - t_0$. Γράψτε τη λύση ως προς τον χρόνο τ με αρχικές συνθήκες τις ίδιες, δηλαδή $\tau = 0, \ x = 0, \ p = m\upsilon_0$. δ) Κάντε τα ίδια για την περίπτωση όπου $H = \dfrac{p^2}{2m} - mBx$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να προβλέψετε αυτή τη διαφορά χωρίς να βρείτε τις λύσεις;

3. Θεωρήστε το γνωστό πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή σε καρότσι που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Εργαστείτε με τον φορμαλισμό του Lagrange. Θεωρήστε ως συντεταγμένη την x η οποία είναι η καρτεσιανή συντεταγμένη ως προς το ακίνητο (αδρανειακό) σύστημα αναφοράς. Βρείτε τη λύση $x = x(t)$ υποθέτοντας ότι τη στιγμή $t = 0, \ x = a, \ \dot{x} = \upsilon_0$. Δείτε με άμεσο υπολογισμό ότι η ενεργειακή συνάρτηση που είναι και η ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται. Θεωρήστε ως γενικευμένη συντεταγμένη την x' που είναι η καρτεσιανή συντεταγμένη μετρούμενη στο κινούμενο καρότσι. Βρείτε τη λύση $x'(t)$ και μάλιστα με αρχικές συνθήκες τις μετασχηματισμένες προηγούμενες αρχικές συνθήκες στη νέα συντεταγμένη, δηλαδή τη στιγμή $t = 0, \ x' = a, \ \dot{x}' = 0$. Με άμεσο υπολογισμό δείτε τι συμβαίνει για την ενεργειακή συνάρτηση και για την ενέργεια.

4. Εξετάστε το γνωστό πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή σε καρότσι που όμως το καρότσι κινείται με σταθερή επιτάχυνση, χωρίς αρχική ταχύτητα. Εργαστείτε με τον φορμαλισμό του Lagrange.

5. Έστω ότι η δυναμική ενέργεια σωματίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση $V = V_0 \ln \dfrac{r}{r_0}$,
V_0, r_0 σταθερά.

α) Υπολογίστε τη συνάρτηση του Hamilton.

β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης Hamilton.

γ) Βρείτε τρία μεγέθη που είναι σταθερές της κίνησης. Εργαστείτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, φ, z).

6. Θεωρήστε ορθογώνιες συντεταγμένες x, z σε κατακόρυφο επίπεδο, όπου z θετικό προς τα πάνω. Εφαρμόστε την αρχή της ελάχιστης δράσης για την περίπτωση βολής σωματίου υπό γωνία α στο ανωτέρω επίπεδο, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας και βρείτε τη διαφορική εξίσωση για τις τροχιές. Λύστε αυτή την εξίσωση και βρείτε την τροχιά του σωματίου, $z = z(x)$ αφού δεχτείτε ότι ισχύουν οι δεσμευτικές συνθήκες όταν $x = 0$ ισχύουν $z = 0, \upsilon = \upsilon_0, \ \tan\alpha = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

7. Από τη χαμιλτονιανή με μια γενικευμένη συντεταγμένη, $H(q, p, t)$. Με χρήση του μετασχηματισμού Legendre βρείτε τη λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q}, t)$ και εφόσον ισχύουν για τη χαμιλτονιανή οι εξισώσεις Hamilton, δείξτε ότι για τη λαγκρανζιανή ισχύει η εξίσωση Lagrange.

8. Αν η λαγκρανζιανή μετασχηματιστεί, κατά τα γνωστά, ως εξής:

$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \dfrac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t}$, δείξτε ότι για την αντίστοιχη μετασχηματισμένη συζυγή ορμή και μετασχηματισμένη χαμιλτονιανή, ισχύουν

$$p' = p + \frac{\partial F(q,t)}{\partial q}$$
$$H'(q,p',t) = H\left(q, p(q,p',t), t\right) - \frac{\partial F(q,t)}{\partial t}.$$

Εξετάστε την περίπτωση με μια (γενικευμένη) συντεταγμένη. Εύκολα μπορεί να μεταβεί κάποιος στην περίπτωση με πολλές συντεταγμένες, όπου απλώς θα υπάρχουν κατάλληλα αθροίσματα.

9. Θεωρήστε τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή με λαγκρανζιανή $L = \dfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \dfrac{1}{2}kq^2$. Βρείτε την εξίσωση Hamilton. Μετασχηματίστε τη λαγκρανζιανή στην $L' = L + \dfrac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t}$, $F(q) = aq^2 + bt$. Βρείτε την εξίσωση Hamilton. Δείξτε ότι και οι δυο εξισώσεις Hamilton οδηγούν στην ίδια εξίσωση κίνησης της γενικής μορφής $\ddot{q} = \ddot{q}(q,\dot{q},t)$. Με χρήση του αποτελέσματος του προηγούμενου Προβλήματος 8, λύστε το πρόβλημα απευθείας.

10. Δίνεται η χαμιλτονιανή $H = \dfrac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \dfrac{1}{2}\left(x-y\right)^2$ και ο μετασχηματισμός, $X = x - y, Y = y$. Βρείτε τη λαγκρανζιανή στις αρχικές συντεταγμένες. Βρείτε την ενεργειακή συνάρτηση και την ενέργεια σε αυτές τις συντεταγμένες. Ποιά είναι η ενεργειακή συνάρτηση, η ενέργεια και η χαμιλτονιανή στις νέες συντεταγμένες; Ποιές από όλες τις παραπάνω εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι διατηρήσιμα μεγέθη;

11. Φορτισμένο σωματίδιο κινείται μη σχετικιστικά μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Από τη δεδομένη λαγκρανζιανή βρείτε τη χαμιλτονιανή και τις κανονικές εξισώσεις κίνησης.

12. Η κινητική ενέργεια υλικού σημείου το οποίο κινείται σε ένα επίπεδο, σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $T = \dfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Δεν υπάρχουν ενεργητικές δυνάμεις αλλά το σωμάτιο είναι δέσμιο να κινείται σε κύκλο ακτίνας ίσης με τη μονάδα. Γράψτε τη δεσμευτική σχέση. Υπολογίστε την τροποποιημένη λαγκρανζιανή με πολλαπλασιαστή Lagrange (μέθοδος του πολλαπλασιασμού). Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης με χρήση των εξισώσεων Lagrange. Στη συνέχεια από την τροποποιημένη λαγκρανζιανή προσδιορίστε την (τροποποιημένη) χαμιλτονιανή. Βρείτε τις εξισώσεις Hamilton. Αφού απαλείψετε τις συζυγείς ορμές, βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις δεύτερης τάξης για τα x, y. Συγκρίνετε με τις εξισώσεις με τη μέθοδο Lagrange.

13. Λύστε το πρόβλημα βολής σωματίου μάζας m μέσα στο πεδίο βαρύτητας με τη μέθοδο των εξισώσεων Hamilton. Αυτό που ενδιαφέρει είναι τα $x = x(t), y = y(t)$. Το σωμάτιο κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Χρησιμοποιήστε καρτεσιανούς άξονες x, y, με τον άξονα y κατακόρυφο, θετικό προς τα πάνω.

14. Σωμάτιο μάζας m κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης. Να χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες r, φ για τον καθορισμό της θέσης του σωματίου στο επίπεδο. Η δύναμη δίνεται από τη σχέση: $F = -kr$. Βρείτε την κινητική ενέργεια και τη δυναμική συνάρτηση (ή τη δυναμική ενέργεια) του σωματίου. Βρείτε τη λαγκρανζιανή και τη χαμιλτονιανή. Γράψτε τις κανονικές εξισώσεις κίνησης, εξισώσεις Hamilton. Γράψτε τη σχέση της στροφορμής του σωματίου περί την αρχή των αξόνων και με χρήση των εξισώσεων Hamilton δείξτε ότι διατηρείται κατά την (πραγματική) κίνηση του σωματίου.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 6

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β’ Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[3] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.

[4] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[5] Σ. Ι. Ιχτιάρογλου, *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

[6] E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.

[7] Α. Μαυραγάνης, *Αναλυτική Μηχανική*, ΕΜΠ, 1998.

[8] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[9] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Univ. of Toronto Press, 1970.

[10] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 1977.

[11] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, 1987.

[12] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *A Variational Principle for Nonholonomic Systems*, American Journal of Physics, Vol. 38, pp. 892, 1970.

[13] I. Damian, *Symmetries and Conservation Laws in Theories with Higher Derivatives*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 39, pp. 2141, 2000.

[14] M. Borneas, *Principle of Action with Higher Derivatives*, Phys. Rev., Vol. 186, pp. 1299, 1969.

[15] C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I: Partial Differential Equations of the First Order*, English Translation by Robert B. Dean and Julius J. Brandstatter, Holden-Day, 1965.

[16] C. G. Gray and E. F. Taylor, *When action is not least*, American Journal of Physics, Vol. 75 (5), pp. 434, May 2007.

[17] C.C. Yan, *Construction of Lagrangians and Hamiltonians from the equation of motion*, American Journal of Physics, Vol. 46, pp. 671, 1978.

[18] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[19] G. Marmo, E.J. Saletan, *Ambiguities in the Lagrangian and Hamiltonian Formalism: Transformation Properties*, Nuovo Cimento, D. 40B, pp. 67, 1977.

[20] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

[21] R. P. Woodard, The Theorem of Ostrogradsky, arXiv: 1506.02210v2 [hep-th] 9 Aug 2015.

Κεφάλαιο 7: Κανονικοί Μετασχηματισμοί

Η χρήση των κανονικών εξισώσεων οδηγεί σε εύκολη λύση προβλημάτων στα οποία η χαμιλτονιανή είναι σταθερά της κίνησης (δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο) και όλες οι θεσικές συντεταγμένες είναι αγνοήσιμες. Τότε έχουμε

$$H = H(q, p) = \text{σταθερά της κίνησης}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{7.1}$$
$$p_i = \alpha_i = \text{σταθερό}$$
$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

a

Άρα θα έχουμε

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \tag{7.2}$$

Επομένως τα ω_i είναι σταθερά κατά την κίνηση και έχουμε τις λύσεις (την κίνηση)

$$q_i = q_i(t) = \omega_i t + \beta_i \,. \tag{7.3}$$

Το ιδανικό θα ήταν να μπορούσαμε να βρούμε κατάλληλους μετασχηματισμούς οι οποίοι να μας οδηγούσαν σε περιγραφή με θεσικές συντεταγμένες που να ήταν όλες αγνοήσιμες, όπως παραπάνω. Αυτό δεν είναι εφικτό πάντοτε.

Όμως μερικές φορές η αλλαγή γενικευμένων συντεταγμένων και γενικευμένων ορμών μπορεί να απλουστεύσει αρκετά το πρόβλημα.

Είναι γνωστό ότι οι μετασχηματισμοί σημείου (point transformations) $Q_i = Q_i(q,t)$ μετασχηματίζουν ένα σύστημα το οποίο αρχικά περιγράφεται με τις συντεταγμένες q_i, να περιγράφεται με τις νέες συντεταγμένες Q_i και ως προς αυτές τις συντεταγμένες ισχύουν οι εξισώσεις του Lagrange. Οι εξισώσεις κίνησης κάθε συγκεκριμένου μηχανικού συστήματος ως προς Q είναι ίδιες με αυτές που προκύπτουν από τις εξισώσεις κίνησης του ίδιου συστήματος ως προς q αν οι τελευταίες μετασχηματιστούν με τον ανωτέρω μετασχηματισμό. Η λαγκρανζιανή είναι η ίδια με την έννοια ότι οι αρχικές μεταβλητές της έχουν μετασχηματιστεί σύμφωνα με τον ανωτέρω μετασχηματισμό με απλή αντικατάσταση. Οι σημειακοί μετασχηματισμοί δρουν στον θεσικό χώρο. Στην περίπτωση των εξισώσεων του Hamilton (κανονικές εξισώσεις), θέλουμε να βρούμε γενικότερους μετασχηματισμούς, $Q_i = Q_i(q, p, t)$, $P_i = P_i(q, p, t)$, που να μετασχηματίζουν τις συντεταγμένες του φασικού χώρου q, p σε αντίστοιχες Q, P και οποιαδήποτε χαμιλτονιανή από $H(q, p, t)$ να μπορεί να μετασχηματιστεί κατάλληλα (όχι κατ' ανάγκη με απλή αντικατάσταση) σε κάποιαν άλλη χαμιλτονιανή $K(Q, P, t)$ και να ισχύουν για αυτά τα μετασχηματισμένα μεγέθη του μηχανικού συστήματος, οι αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις κίνησης. Οι μετασχηματισμοί που έχουν αυτή την ιδιότητα, λέγονται κανονικοί μετασχηματισμοί (canonical transformations), ή μετασχηματισμοί επαφής (contact transformations). Πρέπει να τονίσουμε ότι ένας μετασχηματισμός για να είναι κανονικός πρέπει να συμπεριφέρεται ως τέτοιος για κάθε μηχανικό σύστημα του οποίου η χαμιλτονιανή είναι συνάρτηση των ίδιων μεταβλητών q, p, t του μετασχηματισμού. Αν συμπεριφέρεται σαν κανονικός για ορισμένες μόνο χαμιλτονιανές, τότε δεν είναι κανονικός μετασχηματισμός. Δηλαδή ο κανονικός μετασχηματισμός δεν εξαρτάται από συγκεκριμένο μηχανικό σύστημα. Για τους κανονικούς μετασχηματισμούς θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\
&Q_i = Q_i(q,p,t), \quad P_i = P_i(q,p,t) \\
&H(q,p,t) \to K(Q,P,t) \\
&\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί $Q_i = Q_i(q,t), \quad P_i = P_i(q,t)$, λέγονται και διευρυμένοι μετασχηματισμοί σημείου (extended point transformations).

Για να ισχύουν οι κανονικές εξισώσεις για συγκεκριμένο μηχανικό σύστημα, πρέπει πριν και μετά τον μετασχηματισμό να ισχύει η τροποποιημένη αρχή του Hamilton, δηλαδή

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{7.5}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{7.6}$$

Ας υποθέσουμε ότι για τις αρχικές μεταβλητές ισχύει η Εξ. (7.5) και επομένως οι αντίστοιχες εξισώσεις του Hamilton. Είναι ευνόητο ότι οι εξισώσεις του Hamilton που θα προκύψουν δεν αλλάζουν αν η παρένθεση του ολοκληρώματος πολλαπλασιαστεί επί μια σταθερά έστω λ. Επίσης είναι γνωστό από τη θεωρία μεταβολών ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι ίδιες αν προστεθεί στην υπό ολοκλήρωση ποσότητα η ολική παράγωγος ως προς τον χρόνο κάποιας αυθαίρετης συνάρτησης των ανεξάρτητων μεταβλητών (εδώ του χώρου των φάσεων, δηλαδή γενικευμένων συντεταγμένων και γενικευμένων ορμών) και του χρόνου. Αυτά σημαίνουν ότι αν θεωρήσουμε ότι ισχύει η Εξ. (7.7)

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{7.7}$$

θα ισχύει και η Εξ. (7.6), επομένως για τις μετασχηματισμένες μεταβλητές Q,P θα ισχύουν οι μετασχηματισμένες εξισώσεις του Hamilton. Μπορούμε αρχικά να θεωρήσουμε την F ως συνάρτηση μόνο των νέων μεταβλητών και του χρόνου ή μόνο των αρχικών μεταβλητών και του χρόνου. Αυτό είναι ευνόητο διότι ο όρος που την περιέχει μπορεί να μεταβεί από το δεύτερο στο πρώτο μέλος, να προστεθεί ή να αφαιρεθεί χωρίς να αλλάξουν οι εξισώσεις Hamilton. Θα δούμε παρακάτω ότι αν ισχύουν κατάλληλες προϋποθέσεις και άλλοι συνδυασμοί $2n$ αρχικών και τελικών μεταβλητών μαζί με τον χρόνο, αποτελούν ανεξάρτητες μεταβλητές και όλα τα μεγέθη μπορούν να εκφραστούν ως προς αυτές. Η F, η οποία παρόλο που και αυτή λέγεται γεννήτρια συνάρτηση, στην πραγματικότητα μπορεί να συνδέεται με μια γεννήτρια συνάρτηση F_{g} η οποία με τη διαδικασία που θα δούμε παρακάτω γεννά κανονικό μετασχηματισμό. Η F_{g} πρέπει να είναι συνάρτηση n αρχικών και n τελικών μεταβλητών και γενικώς και του χρόνου για να μπορεί να συνδέσει τις αρχικές με τις μετασχηματισμένες μεταβλητές. Στα άκρα της ολοκλήρωσης θα ισχύουν

$$\begin{aligned}
&\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=\delta p(t_1)=\delta p(t_2)=0 \\
&\delta Q(t_1)=\delta Q(t_2)=\delta P(t_1)=\delta P(t_2)=0.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Αυτό χρειάζεται για να πάρουμε από τη διαδικασία παραλλαγών τις εξισώσεις Hamilton.

Η σταθερά λ μπορεί να σχετιστεί με αυτό που λέμε μετασχηματισμό κλίμακας (scale transformation).

Θα δούμε ότι μπορούμε να εξετάσουμε την περίπτωση με $\lambda = 1$ χωρίς να χαθεί η γενικότητα. Μετασχηματισμός κλίμακας είναι αυτός που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες του φασικού χώρου ως εξής,

$$q_i' = \mu q_i, \quad p_i' = \nu p_i$$

για παράδειγμα, αλλάζοντας τις μονάδες μέτρησής τους.

Ας εφαρμόσουμε αυτό τον μετασχηματισμό στις εξισώσεις Hamilton. Ας κάνουμε απλή αντικατάσταση των μεταβλητών για να πάρουμε μια νέα χαμιλτονιανή από την αρχική, τότε θα έχουμε τη χαμιλτονιανή εκφρασμένη συναρτήσει των q_i', p_i', δηλαδή $H = H\left(q(q'), p(p'), t\right)$.

Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} \\
&\frac{\partial H\left(q(q'), p(p'), t\right)}{\partial p_i'} = \frac{\partial H\left(q,p,t\right)}{\partial p_i}\frac{\partial p_i(p_i')}{\partial p_i'} = \frac{\dot{q}_i}{\nu} = \frac{\dot{q}_i'}{\nu\mu} \\
&\frac{\partial H\left(q(q'), p(p'), t\right)}{\partial q_i'} = \frac{\partial H\left(q,p,t\right)}{\partial q_i}\frac{\partial q_i(q_i')}{\partial q_i'} = -\frac{\dot{p}_i'}{\nu\mu}.
\end{aligned}$$

Αυτές δεν οδηγούν ακριβώς σε εξισώσεις Hamilton. Όμως αν πάρουμε ως μετασχηματισμένη χαμιλτονιανή την $H'(q',p',t) = \mu\nu H\left(q(q'), p(p')\right)$, θα έχουμε

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \quad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}$$

Δηλαδή προκύπτουν εξισώσεις Hamilton.

Επομένως προκύπτει ότι αν υποθέσουμε ότι

$$\mu\nu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i' - H'\right) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

και επίσης θέσουμε $\lambda = \mu\nu$, βρίσκουμε την Εξ. (7.7).

Αυτά σημαίνουν ότι μπορούμε πάντα να κάνουμε ενδιάμεσα κατάλληλο μετασχηματισμό κλίμακας έτσι που το λ να πολλαπλασιαστεί επί το $1/\lambda$ ώστε να καταλήξουμε στο ότι η Εξ. (7.7) να γίνει τελικώς, μετά από αναδιάταξη των όρων, όπως φαίνεται στις Εξ. (7.9), (7.10) με $\lambda = 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i + \left(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F. \tag{7.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i + \left(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}. \tag{7.10}$$

Οι μετασχηματισμοί που ικανοποιούν αυτή τη σχέση με τις παραγώγους ή τα διαφορικά είναι κανονικοί μετασχηματισμοί και επομένως οδηγούν σε κανονικές εξισώσεις κίνησης στον μετασχηματισμένο χώρο των φάσεων. Ο μετασχηματισμός με $\lambda \neq 1$ λέγεται διευρυμένος κανονικός μετασχηματισμός (extended canonical transformation). Για $\lambda = 1$ έχουμε (απλό) κανονικό μετασχηματισμό. Επειδή, εκτός των άλλων, υπάρχει η απαίτηση οι κανονικοί μετασχηματισμοί να διατηρούν τις τιμές των αγκυλών Poisson (που θα δούμε παρακάτω) δεν θεωρούμε ως κανονικούς μετασχηματισμούς τους διευρυμένους διότι δεν τις διατηρούν.

Αν δεν υπάρχει ο χρόνος στον μετασχηματισμό, οπότε $Q_i = Q_i(q,p),\ \ P_i = P_i(q,p)$, τότε λέμε ότι έχουμε περιορισμένο κανονικό μετασχηματισμό. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι πλήθους $2n$. Οι Εξ. (7.9), (7.10) ισχύουν για κάθε κανονικό μετασχηματισμό όταν όλα έχουν εκφραστεί ως συναρτήσεις των $2n$ παλιών συντεταγμένων και του χρόνου q,p,t ή των $2n$ «νέων» συντεταγμένων και του χρόνου Q,P,t. Δηλαδή ισχύουν πάντοτε όταν μεταβλητές είναι μόνο οι παλιές και ο χρόνος ή μόνο οι νέες και ο χρόνος. Αυτό γίνεται διότι σε κάθε κανονικό μετασχηματισμό οι παλιές μεταβλητές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και το ίδιο ισχύει για τις νέες μεταβλητές. Έχουμε επομένως πάντοτε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i(q,p,t)\mathrm{d}Q_i(q,p,t) + \big(K(Q(q,p,t),P(q,p,t),t) - H(q,p,t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}F(q,p,t) \\
&\sum_{i=1}^{n} p_i(Q,P,t)\mathrm{d}q_i(Q,P,t) - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i + \big(K(Q,P,t) - H(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}F\big(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t\big) = \mathrm{d}F(Q,P,t).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Ουσιαστικά οι Εξ. (7.9), (7.10) και (7.11) λένε ότι το πρώτο τους μέλος είναι ολική παράγωγος ή ολικό διαφορικό ως προς τον χρόνο κάποιας συνάρτησης F των αρχικών ή των τελικών συντεταγμένων και γενικώς και του χρόνου. Από αυτές τις σχέσεις μπορούμε με δεδομένο τον κανονικό μετασχηματισμό να βρούμε την $F(q,p,t)$ ή την $F(Q,P,t)$.

Τις σχέσεις (7.9), (7.10) μπορούμε να τις γράψουμε ως προς μεταβλητές οποιουδήποτε συνδυασμού $2n$ παλιών και νέων συντεταγμένων και ορμών (μαζί με τον χρόνο) αρκεί αυτές να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Το αν ένας τέτοιος συνδυασμός αποτελείται από ανεξάρτητες μεταβλητές εξαρτάται από τον συγκεκριμένο κανονικό μετασχηματισμό, γενικώς δεν είναι όλοι οι συνδυασμοί, συνδυασμοί ανεξάρτητων μεταβλητών. Θα δούμε ότι ο αντίστροφος ενός κανονικού μετασχηματισμού είναι κανονικός μετασχηματισμός.

Αν υπάρχει ο αντίστροφος, είναι και αυτός κανονικός μετασχηματισμός. Αυτό προκύπτει εύκολα διότι για τον αντίστροφο μετασχηματισμό, από Q,P,t που τώρα είναι αρχικές μεταβλητές και η K είναι η αρχική χαμιλτονιανή, πάμε στις q,p,t που τώρα είναι οι τελικές μεταβλητές και η H είναι η τελική χαμιλτονιανή, βρίσκουμε από τη δεύτερη από τις Εξ. (7.11) ότι ισχύει η ίδια σχέση που ισχύει για τον προηγούμενο μετασχηματισμό με τη διαφορά ότι η F γίνεται $-F$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i(Q,P,t)\mathrm{d}q_i(Q,P,t) + \big(H(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t) - K(Q,P,t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}\big(-F(Q,P,t)\big).
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε πως φτιάχνουμε κανονικούς μετασχηματισμούς χρησιμοποιώντας μια γεννήτρια συνάρτηση F_{g} η οποία σχετίζεται με την F και, όπως είπαμε, είναι συνάρτηση n παλαιών και n νέων μεταβλητών και ίσως και του χρόνου που όλες είναι $2n+1$ ανεξάρτητες μεταβλητές. Αντιστρόφως, θα δούμε πως από έναν κανονικό μετασχηματισμό μπορούμε να βρούμε μια γεννήτρια συνάρτηση F_{g}. Όπως ήδη αναφέραμε, το κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να περιορίζει την επιλογή των ανεξάρτητων μεταβλητών. Αν για παράδειγμα έχουμε μετασχηματισμό με $Q = q$ είναι ευνόητο ότι δεν μπορούμε να έχουμε ανεξάρτητες μεταβλητές τα q,Q,t γιατί τα q,Q δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Τα κριτήρια περί ανεξαρτησίας των συνδυασμών μεταβλητών θα φανούν καλύτερα, αργότερα.

Θα δούμε ότι αν ο μετασχηματισμός εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο τότε και η γεννήτρια συνάρτηση εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο και η χαμιλτονιανή δεν διατηρεί τη μορφή της κατά τον μετασχηματισμό. Ακριβέστερα, δεν μπορεί να προκύψει από την παλιά με απλή αντικατάσταση των σχέσεων που συνδέουν τις παλιές και τις νέες μεταβλητές. Με αυτή την έννοια δεν είναι αναλλοίωτη στη μορφή.

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τις παρακάτω ειδικές κατηγορίες βασικών μετασχηματισμών όπου θα έχουμε γεννήτριες συναρτήσεις των $2n$ ανεξάρτητων μεταβλητών της μορφής

$$F_1(q,Q,t), \quad F_2(q,P,t), \quad F_3(p,Q,t), \quad F_4(p,P,t).$$

Ξανατονίζουμε ότι πάντοτε στις γεννήτριες συναρτήσεις F_{g} πρέπει να υπάρχει ανάμειξη αρχικών και τελικών συντεταγμένων εφόσον ενδιαφερόμαστε να δημιουργήσουμε από τη γεννήτρια συνάρτηση μετασχηματισμούς οι οποίοι εξ ορισμού συνδέουν τις αρχικές με τις τελικές συντεταγμένες. Επομένως, οι συναρτήσεις $F(q,p,t)$, $F(Q,P,t)$ που αναφέραμε στα προηγούμενα και περιέχουν μόνο παλιές ή μόνο νέες συντεταγμένες και ορμές, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες ως γεννήτριες συναρτήσεις, μπορούν όμως να μετατραπούν σε γεννήτριες συναρτήσεις κάνοντας χρήση της διαδικασίας που θα ακολουθήσουμε παρακάτω. Σε όλα που ακολουθούν μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί την Εξ. (7.9) ή την Εξ. (7.10), θα χρησιμοποιούμε σε όλες τις περιπτώσεις την Εξ. (7.9).

1. Περίπτωση $F_1(q,Q,t)$ **.**

Πρέπει τα q_i, Q_i να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ξεκινούμε από την Εξ. (7.9) που έχει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i + \big(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\big)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F(q,p,t).$$

Το γεγονός ότι τα q,Q είναι ανεξάρτητα σημαίνει ότι οι άλλες μεταβλητές μπορούν να εκφραστούν ως προς αυτές, δηλαδή

$$p_i = p_i(q,Q,t), \quad P_i = P_i(q,Q,t)\,.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i(q,Q,t)\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i(q,Q,t)\mathrm{d}Q_i + \Big[K\big(Q,P(q,Q,t),t\big) - H\big(q,p(q,Q,t),t\big)\Big]\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}F\big(q,p(q,Q,t),t\big) = \mathrm{d}F\big(q,Q,t\big)\end{aligned} \tag{7.12}$$

Γράφουμε $\mathrm{d}F\big(q,p(q,Q,t),t\big) = \mathrm{d}F\big(q,Q,t\big)$ και εννοούμε ότι έχουμε απλή αντικατάσταση χωρίς να προστεθεί κάποιος άλλος όρος. Με αυτή την έννοια λέμε ότι δεν «αλλοιώνεται» η μορφή της F, το σωστότερο είναι ότι έχει την ίδια τιμή στα αντίστοιχα σημεία.

Έχουμε

$$\mathrm{d}F(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_i}\mathrm{d}Q_i + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i(q,Q,t)\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i(q,Q,t)\mathrm{d}Q_i + \Big[K\big(Q,P(q,Q,t),t\big) - H\big(q,p(q,Q,t),t\big)\Big]\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_i}\mathrm{d}Q_i + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.13}$$

Θέτουμε $F_1(q,Q,t)=F(q,p(q,Q,t),t)=F(q,Q,t)$.

Η ανεξαρτησία των διαφορικών οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις

$$
\begin{gathered}
p_i=\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i}, \quad P_i=-\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \\
K(Q,P,t)=H\left(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t\right)+\frac{\partial F_1\left(q(Q,P,t),Q,t\right)}{\partial t}.
\end{gathered} \tag{7.14}
$$

Η τελευταία από αυτές τις σχέσεις δίνει τη μετασχηματισμένη χαμιλτονιανή. Παρατηρούμε ότι δεν είναι αναγκαίο το ενδιάμεσο βήμα στην Εξ. (7.13) της αντικατάστασης των P και p στα K και H .

Στην περίπτωση F_1 μπορούμε κατά κάποιο τρόπο να ταυτίσουμε τη συνάρτηση F με την F_1. Από τις σχέσεις της Εξ. (7.14) με δεδομένη την $F_1(q,Q,t)$ και εφόσον ισχύει η παρακάτω Εξ. (7.17) βρίσκουμε τις εξισώσεις του κανονικού μετασχηματισμού ως εξής: Λύνουμε τις $2n$ πρώτες εξισώσεις ως προς τα Q_i,P_i οπότε βρίσκουμε τον κανονικό μετασχηματισμό $Q_i=Q_i(q,p,t),\ \ P_i=P_i(q,p,t)$. Για να γίνει αυτό πρέπει να μπορούν να αντιστραφούν οι πρώτες από τις Εξ. (7.14) για να πάρουμε τις $Q_i=Q_i(q,p,t)$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στις δεύτερες από τις Εξ. (7.14) και βρίσκουμε τις $P_i=P_i(q,p,t)$. Οι πρώτες των Εξ. (7.14) είναι της μορφής $p_i=p_i(q,Q,t)$, επομένως για να μπορούν να αντιστραφούν και να δώσουν τα $Q_i=Q_i(q,p,t)$ πρέπει να ισχύει για την ιακωβιανή ορίζουσα το κριτήριο,

$$
\left|\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right|\neq 0\,. \tag{7.15}
$$

Σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $[\ \ ]$ για να δηλώσουμε μια μήτρα και στην περίπτωση ορθογώνιας μήτρας την αντίστοιχη ορίζουσα με το σύμβολο $|\ \ |$. Εδώ θα έχουμε δισδιάστατες περιπτώσεις. Τα στοιχεία τους στη γνωστή δισδιάστατη απεικόνιση συμβολίζονται με A_{ij} όπου ο “πρώτος” δείκτης i παριστάνει σειρά και ο “δεύτερος” j στήλη. Στην περίπτωση της Εξ. (7.15) ο “πάνω” δείκτης παριστάνει γραμμή και ο “κάτω” στήλη, δηλαδή $A_{ij}=\dfrac{\partial p_i}{\partial Q_j}$. Αυτό θα ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις που θα ακολουθήσουν. Επίσης θυμίζουμε ότι όταν έχουμε ανώτερες παραγώγους έχουμε τον συμβολισμό $Y_{x_1x_2\ldots x_k}=\dfrac{\partial^k Y}{\partial x_k\partial x_{k-1}\ldots\partial x_1}$. Πρώτα υπολογίζεται η παράγωγος ως προς x_1 μετά ως προς x_2 κοκ μέχρι την τελευταία ως προς x_k .

Αν έχουμε την απλή περίπτωση δισδιάστατης μήτρας ή ορίζουσας με ανεξάρτητες μεταβλητές $q=(q_1,q_2,...,q_n)$ και $p=(p_1,p_2,...,p_n)$ αν οι δεύτερες παράγωγοι του τύπου

$$
Y_{q_ip_j}=\frac{\partial^2 Y}{\partial p_j\partial q_i}
$$

είναι στοιχεία μήτρας ή ορίζουσας τότε τα i δηλώνουν τις αντίστοιχες σειρές και τα j τις αντίστοιχες στήλες στη γνωστή αναπαράσταση.

Οι πρώτες από τις Εξ. (7.14) σε συνδυασμό με την Εξ. (7.15) οδηγούν στην

$$\left|\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right| = \left|\frac{\partial^2 F_1(q,Q,t)}{\partial Q_j \partial q_i}\right|. \tag{7.16}$$

Επομένως η σχέση για την αντιστροφή, που είναι η (7.15), μας λέει ότι για να είναι μια δεδομένη συνάρτηση, γεννήτρια τύπου $F_1(q,Q,t)$, πρέπει να ισχύει το παρακάτω κριτήριο: Η σχετική hessian (χεσιανή) ορίζουσα να μην είναι μηδέν, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial^2 F_1(q,Q,t)}{\partial Q_j \partial q_i}\right| \neq 0. \tag{7.17}$$

Μπορούμε να δείξουμε άμεσα ότι υπάρχει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός. Πράγματι, αντιστρέφοντας τις δεύτερες από τις Εξ. (7.14) βρίσκουμε τα $q_i = q_i(Q,P,t)$. Για να γίνεται αυτό πρέπει να ισχύει

$$\left|\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right| \neq 0\,. \tag{7.18}$$

Με τη βοήθεια των δεύτερων από τις Εξ. (7.14) βρίσκουμε ότι αυτό είναι αλήθεια αφού ισχύει η Εξ. (7.17), οπότε

$$\left|\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right| = -\left|\frac{\partial^2 F_1(q,Q,t)}{\partial q_j \partial Q_i}\right| \neq 0. \tag{7.19}$$

Επομένως ισχύει η Εξ. (7.18) και έτσι η αντιστροφή γίνεται. Αντικαθιστώντας τα $q_i = q_i(Q,P,t)$ στις πρώτες σχέσεις των Εξ. (7.14) βρίσκουμε τα $p_i = p_i(Q,P,t)$. Θα δούμε παρακάτω ότι και αυτός, αφού είναι ο αντίστροφος, είναι κανονικός μετασχηματισμός. Από την τελευταία των Εξ. (7.14) βρίσκουμε τη νέα χαμιλτονιανή.

Προσοχή! Σε αυτή τη σχέση πρώτα κάνουμε τη μερική παραγώγιση της $F_1(q,Q,t)$ ως προς τον χρόνο και κατόπιν αντικαθιστούμε στην προκύπτουσα συνάρτηση τις εκφράσεις $q_i(Q,P,t)$, $p_i(Q,P,t)$ οπότε βρίσκουμε τη νέα χαμιλτονιανή $K(Q,P,t)$. Η νέα χαμιλτονιανή, όταν υπάρχει η άμεση εξάρτηση από τον χρόνο, δεν βρίσκεται με απλή αντικατάσταση των νέων μεταβλητών συναρτήσει των παλιών στην αρχική $H(q,p,t)$.

Πρέπει να τονιστεί ότι αν δεν ισχύει η Εξ. (7.15) και επομένως και η Εξ. (7.17), η δεδομένη $F_1(q,Q,t)$ δεν είναι γεννήτρια συνάρτηση κανονικού μετασχηματισμού.

Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός μπορούμε να ελέγξουμε αν μπορεί να υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού τύπου $F_1(q,Q,t)$ όπως φαίνεται παρακάτω. Είδαμε ότι η $F_1(q,Q,t)$ βρίσκεται από τη σχέση

$$F_1(q,Q,t) = F\left(q, p(q,Q,t), t\right)$$

όπου έχει γίνει αντικατάσταση του p ως συνάρτησης των q,Q,t. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μπορεί να λυθεί η σχέση μετασχηματισμού $Q = Q(q,p,t)$ ως προς p οπότε θα έχουμε το $p = p(q,Q,t)$. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει η σχετική ιακωβιανή ορίζουσα να μην είναι μηδέν, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right| \neq 0. \tag{7.20}$$

Όταν μας δίνεται ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων και ορμών, για να υπάρχει γεννήτρια του μετασχηματισμού τύπου $F_1(q,Q,t)$, το κριτήριο είναι η τελευταία σχέση (7.20) για την ιακωβιανή. Αφού υπάρχει γεννήτρια ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

2. Περίπτωση $F_2(q,P,t)$ **.**

Τώρα πρέπει τα q,P να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι όλα μπορούν να γίνουν συναρτήσεις των q,P,t . Θα δούμε ότι σε αυτή την περίπτωση η γεννήτρια συνάρτηση δεν μπορεί να ταυτιστεί με την F , με την έννοια της απλής αντικατάστασης μεταβλητών όπως κάναμε στην περίπτωση F_1 . Πρέπει να δούμε πώς να τροποποιήσουμε την Εξ. (7.9) ώστε στο πρώτο μέλος να υπάρχουν μόνο διαφορικά των q,P,t και στο δεύτερο μέλος το $\mathrm{d}F_2(q,P,t)$.

Ξεκινούμε και πάλι από την Εξ. (7.9). Εφόσον τα q,P είναι ανεξάρτητα θα μπορούμε να έχουμε τις σχέσεις

$$p_i = p_i(q,P,t),\ \ Q_i = Q_i(q,P,t).$$

Επομένως

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i(q,P,t)\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\mathrm{d}Q_i(q,P,t) + \left[K\left(Q(q,P,t),P,t\right) - H\left(q,p(q,P,t),t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}F\left(q,p(q,P,t),t\right) = \mathrm{d}F\left(q,P,t\right).\end{aligned} \tag{7.21}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Q_i(q,P,t) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\mathrm{d}P_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}F(q,P,t) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_j}\mathrm{d}P_j + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Επομένως μετά από αλλαγή του ονόματος των δεικτών και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα q,P είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i(q,P,t)\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(P_jQ_j)}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(P_jQ_j)}{\partial P_i}\mathrm{d}P_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(P_jQ_j)}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+\sum_{i=1}^{n} Q_i\mathrm{d}P_i + \left[K\left(Q(q,P,t),P,t\right) - H\left(q,p(q,P,t),t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_i}\mathrm{d}P_i + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.23}$$

Μεταφέρουμε τους όρους 2,3,4 από το πρώτο στο δεύτερο μέλος και εφόσον και το t είναι ανεξάρτητη μεταβλητή έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(q,P,t)\mathrm{d}q_i + \left[K\left(Q(q,P,t),P,t\right) - H\left(q, p(q,P,t),t\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(F + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right)}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(F + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right)}{\partial P_i}\mathrm{d}P_i + \frac{\partial\left(F + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right)}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{7.24}$$

Θέτουμε

$$F_2(q,P,t) = F\left(q, p(q,P,t),t\right) + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j(q,P,t)\ . \tag{7.25}$$

Ένεκα της ανεξαρτησίας των $\mathrm{d}q, \mathrm{d}P, \mathrm{d}t$ καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{gathered} p_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_i} \\ K(Q,P,t) = H\left(q(Q,P,t), p(Q,P,t),t\right) + \frac{\partial F_2(q(Q,P,t),P,t)}{\partial t}. \end{gathered} \tag{7.26}$$

Η παραπάνω λεπτομερής διαδικασία μας οδηγεί στο να ακολουθήσουμε την παρακάτω πιο απλουστευμένη πορεία για να βρούμε τις Εξ. (7.26). Εννοείται και πάλι ότι όλα τα μεγέθη είναι συναρτήσεις των q, P, t παρόλο που πολλές φορές δεν το σημειώνουμε. Προσθέτουμε και στα δυο μέλη της Εξ. (7.9) το ολικό διαφορικό

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i\ .$$

Έτσι έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i + \left(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(F + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right).$$

Θέτουμε

$$F_2(q,P,t) = F(q,P,t) + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\ .$$

Προφανώς τώρα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i + \left(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_2(q,P,t).$$

Από αυτή τη σχέση αναπτύσσοντας το ολικό διαφορικό της $F_2(q,P,t)$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i = H(q,p,t)\mathrm{d}t - K(Q,P,t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\mathrm{d}P_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)\mathrm{d}P_i + \left(K(Q,P,t) - H(q,p,t) - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Εφόσον τα $\mathrm{d}q_i, \mathrm{d}P_i, \mathrm{d}t$ είναι ανεξάρτητα, οι παρενθέσεις είναι η καθεμιά ίση με μηδέν, άρα έχουμε πάλι την Εξ. (7.26).

Για να βρούμε τις σχέσεις μετασχηματισμού $P_i = P_i(q,p,t)$ πρέπει να μπορούν να αντιστραφούν οι πρώτες των Εξ. (7.26). Γι' αυτό πρέπει η ιακωβιανή ορίζουσα να είναι μη μηδενική, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right| \neq 0. \tag{7.27}$$

Επομένως αφού ισχύει

$$\left|\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right| = \left|\frac{\partial^2 F_2(q,P,t)}{\partial P_j \partial q_i}\right|. \tag{7.28}$$

για να είναι γεννήτρια κανονικού μετασχηματισμού τύπου $F_2(q,P,t)$, η δεδομένη συνάρτηση, πρέπει η τελευταία χεσιανή ορίζουσα με την $F_2(q,P,t)$ να μην είναι μηδενική. Δηλαδή, το κριτήριο (7.27) δίνει

$$\left|\frac{\partial^2 F_2(q,P,t)}{\partial P_j \partial q_i}\right| \neq 0. \tag{7.29}$$

Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός μπορούμε να ελέγξουμε αν μπορεί να υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού τύπου $F_2(q,P,t)$ όπως φαίνεται παρακάτω.

Είδαμε ότι η $F_2(q,P,t)$ βρίσκεται από τη σχέση

$$F_2(q,P,t) = F\left(q, p(q,P,t), t\right) + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i \left(q, p(q,P,t), t\right)$$

όπου έχει γίνει αντικατάσταση του p ως συνάρτησης των q,P,t. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μπορεί να λυθεί η σχέση μετασχηματισμού $P = P(q,p,t)$ ως προς p οπότε θα έχουμε το $p = p(q,P,t)$. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει η σχετική ιακωβιανή ορίζουσα να μην είναι μηδέν, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right| \neq 0.$$

Αν μας δίνεται ο μετασχηματισμός, αυτό είναι το κριτήριο ώστε να υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_2(q,P,t)$ για αυτόν, αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

3. Περίπτωση $F_3(p,Q,t)$.

Τώρα οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τα p,Q,t. Μπορούμε να ακολουθήσουμε την αναλυτική μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Όμως θα προτιμήσουμε την ανάλογη της δεύτερης απλοποιημένης διαδικασίας που ακολουθήσαμε στην περίπτωση F_2. Θα μετασχηματίσουμε την Εξ. (7.9) ώστε στο πρώτο μέλος να έχουμε τα διαφορικά των ανεξάρτητων συντεταγμένων που είναι μάλιστα στη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i \quad . \tag{7.30}$$

Προσθέτουμε και στα δυο μέλη της Εξ. (7.9) το ολικό διαφορικό

$$\mathrm{d}\left(-\sum_{i=1}^{n} q_i p_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i \,. \tag{7.31}$$

Έτσι βρίσκουμε

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i + \big(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\big)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(F - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right). \tag{7.32}$$

Θέτουμε

$$F_3(p,Q,t) = F\big(q(p,Q,t),p,t\big) - \sum_{i=1}^{n} q_i(p,Q,t)p_i \,. \tag{7.33}$$

Επομένως βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n} q_i(p,Q,t)\mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} P_i(p,Q,t)\mathrm{d}Q_i + \Big(K\big(Q,P(p,Q,t),t\big) - H\big(q(p,Q,t)\big),p,t\Big)\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}F_3(p,Q,t). \end{aligned} \tag{7.34}$$

Αφού πάρουμε το ολικό διαφορικό της $F_3(p,Q,t)$ έχουμε μετά από αναδιάταξη των όρων

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-q_i - \frac{\partial F_3}{\partial p_i}\right)\mathrm{d}p_i + \sum_{i=1}^{n}\left(-P_i - \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\right)\mathrm{d}Q_i + \left(K - H - \frac{\partial F_3}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{7.35}$$

Εφόσον τα $\mathrm{d}p_i, \mathrm{d}Q_i, \mathrm{d}t$ είναι ανεξάρτητα καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} &q_i = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_i} \\ &K(Q,P,t) = H\big(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t\big) + \frac{\partial F_3\big(p(Q,P,t),Q,t\big)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Τελικώς, με χειρισμούς όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς που μας οδηγούν στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες και την έκφραση της νέας χαμιλτονιανής.
Για να προσδιορίζεται ο κανονικός μετασχηματισμός από τις Εξ. (7.36) πρέπει να αντιστρέφονται οι πρώτες από αυτές, άρα πρέπει η αντίστοιχη ιακωβιανή να είναι μη μηδενική, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right| \neq 0 \,. \tag{7.37}$$

Όμως από αυτές τις ίδιες έχουμε

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right| = -\left|\frac{\partial^2 F_3(p,Q,t)}{\partial Q_j \partial p_i}\right|. \tag{7.38}$$

Επομένως για να είναι γεννήτρια τύπου $F_3(p,Q,t)$, η δεδομένη συνάρτηση πρέπει να ισχύει για τη σχετική χεσιανή η σχέση

$$\left|\frac{\partial^2 F_3(p,Q,t)}{\partial Q_j \partial p_i}\right| \neq 0. \tag{7.39}$$

Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός μπορούμε να ελέγξουμε αν μπορεί να υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού τύπου $F_3(p,Q,t)$ όπως φαίνεται παρακάτω.

Είδαμε ότι η $F_3(p,Q,t)$ βρίσκεται από τη σχέση

$$F_3(p,Q,t) = F\left(q(p,Q,t), p, t\right) - \sum_{i=1}^{n} q_i(p,Q,t) p_i$$

όπου έχει γίνει αντικατάσταση του q ως συνάρτησης των p,Q,t. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μπορεί να λυθεί η σχέση μετασχηματισμού $Q = Q(q,p,t)$ ως προς q οπότε θα έχουμε το $q = q(p,Q,t)$. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει η σχετική ιακωβιανή ορίζουσα να μην είναι μηδέν, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right| \neq 0.$$

Αυτό είναι το κριτήριο, όταν μας δίνεται ο μετασχηματισμός, για να υπάρχει γεννήτρια τύπου $F_3(p,Q,t)$, τότε ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

4. Περίπτωση $F_4(p,P,t)$.

Τώρα ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τα p,P,t. Ακολουθούμε την απλή διαδικασία. Ξεκινούμε από την Εξ.7.9 και προσπαθούμε να έχουμε στο πρώτο μέλος όρους με διαφορικά των p,P που είναι μάλιστα της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i,\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i \quad . \tag{7.40}$$

Προσθέτουμε και στα δυο μέλη της Εξ. (7.9) το ολικό διαφορικό

$$\mathrm{d}\left(-\sum_{i=1}^{n} q_i p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i \right) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i \quad . \tag{7.41}$$

Έτσι έχουμε

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i + \left(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(F - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i\right). \tag{7.42}$$

Θέτουμε

$$F_4(p,P,t) = F\left(q(p,P,t), p, t\right) - \sum_{i=1}^{n} q_i(p,P,t) p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i(p,P,t) P_i \ . \tag{7.43}$$

Οπότε καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n} q_i(p,P,t)\mathrm{d}p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i(p,P,t)\mathrm{d}P_i \\ &+\left(K\left(Q(p,P,t),P,t\right) - H\left(q(p,P,t),p,t\right)\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_4(p,P,t). \end{aligned} \tag{7.44}$$

Αναπτύσσουμε το ολικό διαφορικό του δευτέρου μέλους και με την ανάλογη διαδικασία όπως και πριν καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} &q_i = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_i} \\ &K(Q,P,t) = H\left(q(Q,P,t), p(Q,P,t)\right) + \frac{\partial F_4(p(Q,P,t),P,t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{7.45}$$

Από αυτές προσδιορίζουμε τους μετασχηματισμούς που μας οδηγούν στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες και στη νέα χαμιλτονιανή. Η σχέση που πρέπει να ισχύει ώστε η $F_4(p,P,t)$ να είναι γεννήτρια κανονικού μετασχηματισμού προκύπτει από την απαίτηση να αντιστρέφονται οι πρώτες από τις Εξ. (7.45), οπότε πρέπει

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\right| \neq 0. \tag{7.46}$$

Από αυτές όμως έχουμε ότι

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\right| = -\left|\frac{\partial^2 F_4(p,P,t)}{\partial P_j \partial p_i}\right|. \tag{7.47}$$

Δηλαδή, αν μας δίνεται συνάρτηση των συντεταγμένων και συζυγών ορμών, για να είναι αυτή γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_4(p,P,t)$, πρέπει να ισχύει το κριτήριο

$$\left|\frac{\partial^2 F_4(p,P,t)}{\partial P_j \partial p_i}\right| \neq 0. \tag{7.48}$$

Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός μπορούμε να ελέγξουμε αν μπορεί να υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού τύπου $F_4(p,P,t)$ όπως φαίνεται παρακάτω.

Είδαμε ότι η $F_4(p,P,t)$ βρίσκεται από τη σχέση

$$F_4(p,P,t)=F\left(q(p,P,t),p,t\right)-\sum_{i=1}^{n}q_i(p,P,t)p_i+\sum_{i=1}^{n}Q_i\left(q(p,P,t),p,t\right)P_i$$

όπου έχει γίνει αντικατάσταση του q ως συνάρτησης των p,P,t. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μπορεί να λυθεί η σχέση μετασχηματισμού $P=P(q,p,t)$ ως προς q οπότε θα έχουμε το $q=q(p,P,t)$. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει η σχετική ιακωβιανή ορίζουσα να μην είναι μηδέν, δηλαδή

$$\left|\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right|\neq 0.$$

Αυτό είναι το κριτήριο ώστε για δεδομένο μετασχηματισμό να υπάρχει γεννήτρια τύπου $F_4(p,P,t)$, ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Μπορεί κάποιος να μετασχηματίσει από μια οποιαδήποτε περίπτωση, αν υπάρχει, σε άλλη, αν υπάρχει, με απλό ή πολλαπλό μετασχηματισμό Legendre. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει να ισχύουν κατάλληλες προϋποθέσεις ύπαρξης του μετασχηματισμού Legendre.

Πολλοί κανονικοί μετασχηματισμοί δεν μπορούν να αναχθούν σε κάποια από τις παραπάνω απλές μορφές αλλά σε κάποια μικτή περίπτωση όπως η επόμενη. Όμως για κάθε κανονικό μετασχηματισμό υπάρχει πάντα κάποιου είδους γεννήτρια συνάρτηση, απλού ή μεικτού τύπου.

5. Μια μικτή περίπτωση $F_{23}=F_{23}(q_1,p_2,Q_2,P_1,t)$.

Μπορούμε να έχουμε μικτές περιπτώσεις των ανωτέρω απλών μορφών γεννητριών συναρτήσεων. Δηλαδή, μπορεί μερικές μεταβλητές να ακολουθούν μια από τις ανωτέρω τέσσερις απλές μορφές και άλλες άλλη. Ως παράδειγμα ας δούμε την ακόλουθη απλή περίπτωση όπου έχουμε (αρχικό) χώρο των φάσεων με συντεταγμένες $(q,p)=(q_1,q_2,p_1,p_2)$ και τελικό με $(Q,P)=(Q_1,Q_2,P_1,P_2)$.

Έστω ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι της μορφής της Εξ. (7.49), με ανεξάρτητες μεταβλητές τα q_1,P_1,p_2,Q_2,t .

$$F_{23}(q_1,P_1,p_2,Q_2,t)\,. \tag{7.49}$$

Αυτή είναι μεικτού τύπου F_2 και F_3 και γι' αυτό συμβολίζεται ως F_{23}. Θα διατάξουμε τις εμπλεκόμενες μεταβλητές σε διάταξη παλιών και νέων γράφοντας τη γεννήτρια ως $F_{23}=F_{23}(q_1,p_2,Q_2,P_1,t)$.

Ξεκινούμε και πάλι όπως πριν από την Εξ. (7.9) για $n=2$, δηλαδή την

$$p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2-P_1\mathrm{d}Q_1-P_2\mathrm{d}Q_2+\big(K(Q,P,t)-H(q,p,t)\big)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F\,. \tag{7.50}$$

Εφαρμόζουμε την απλή μεθοδολογία οπότε θα καταλήξουμε να έχουμε στο πρώτο μέρος μόνο διαφορικά της μορφής

$$p_1\mathrm{d}q_1,\ q_2\mathrm{d}p_2,\ Q_1\mathrm{d}P_1,\ P_2\mathrm{d}Q_2\,. \tag{7.51}$$

Για να το πετύχουμε προσθέτουμε και στα δυο μέλη της Εξ. (7.50) το ολικό διαφορικό

$$\mathrm{d}(-q_2p_2+P_1Q_1)=-q_2\mathrm{d}p_2-p_2\mathrm{d}q_2+P_1\mathrm{d}Q_1+Q_1\mathrm{d}P_1. \tag{7.52}$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$
\begin{aligned}
&-q_2 \mathrm{d}p_2 + p_1 \mathrm{d}q_1 - P_2 \mathrm{d}Q_2 + Q_1 \mathrm{d}P_1 + \big(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}\big(F - q_2 p_2 + P_1 Q_1\big).
\end{aligned} \tag{7.53}
$$

Θέτουμε

$$
\begin{aligned}
&F_{23}(q_1, p_2, Q_2, P_1, t) = F\big(q_1, q_2(q_1, p_2, Q_2, P_1, t), p_1(q_1, p_2, Q_2, P_1, t), p_2, t\big) \\
&+Q_1(q_1, p_2, Q_2, P_1, t) P_1 - q_2(q_1, p_2, Q_2, P_1, t)\, p_2
\end{aligned} \tag{7.54}
$$

οπότε βρίσκουμε τη σχέση

$$
\begin{aligned}
&-q_2\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)\mathrm{d}p_2 + p_1\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)\mathrm{d}q_1 - P_2\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)\mathrm{d}Q_2 \\
&+Q_1\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)\mathrm{d}P_1 + \left(K - H\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_{23}\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right).
\end{aligned} \tag{7.55}
$$

Για ευκολία στη γραφή δεν γράφουμε τις εξαρτήσεις των K, H από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Αναπτύσσουμε το ολικό διαφορικό του δευτέρου μέλους και τελικώς με ανάλογη όπως πριν διαδικασία καταλήγουμε στις εξισώσεις που θα μας δώσουν τον κανονικό μετασχηματισμό, δηλαδή στις

$$
\begin{aligned}
&p_1 = \frac{\partial F_{23}\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)}{\partial q_1}, \quad Q_1 = \frac{\partial F_{23}\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)}{\partial P_1} \\
&q_2 = -\frac{\partial F_{23}\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)}{\partial p_2}, \quad P_2 = -\frac{\partial F_{23}\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)}{\partial Q_2} \\
&K(Q,P,t) = H\big(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t\big) + \frac{\partial F_{23}\left(q_1, p_2, Q_2, P_1, t\right)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{7.56}
$$

Αντιστρέφοντας την πρώτη και την τρίτη (μαζί ως σύστημα εξισώσεων) βρίσκουμε τα $Q_2 = Q_2(q,p,t),\ P_1 = P_1(q,p,t)$ και αντικαθιστώντας στις δεύτερη και τέταρτη βρίσκουμε τα $Q_1 = Q_1(q,p,t),\ \ P_2 = P_2(q.p,t)$ δηλαδή βρίσκουμε όλες τις σχέσεις του κανονικού μετασχηματισμού. Για να μπορούν να αντιστραφούν η πρώτη και η τρίτη μαζί, θεωρούμε ως διάταξη των μεταβλητών τη q, p και Q, P αντιστοίχως, οπότε πρέπει να ισχύει για την ιακωβιανή ορίζουσα

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \dfrac{\partial q_2}{\partial P_1} \\
\dfrac{\partial p_1}{\partial Q_2} & \dfrac{\partial p_1}{\partial P_1}
\end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.57}
$$

Με χρήση της Εξ. (7.56) βρίσκουμε ότι για τη χεσιανή ορίζουσα με τη γεννήτρια F_{23} ισχύει

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \dfrac{\partial q_2}{\partial P_1} \\
\dfrac{\partial p_1}{\partial Q_2} & \dfrac{\partial p_1}{\partial P_1}
\end{vmatrix} = -
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial^2 F_{23}}{\partial Q_2 \partial p_2} & \dfrac{\partial^2 F_{23}}{\partial P_1 \partial p_2} \\
\dfrac{\partial F_{23}}{\partial Q_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial F_{23}}{\partial P_1 \partial q_1}
\end{vmatrix} \tag{7.58}
$$

Επομένως για να είναι δεδομένη συνάρτηση γεννήτρια τύπου $F_{23}(q_1, P_1, p_2, Q_2, t)$, πρέπει η παρακάτω χεσιανή ορίζουσα να είναι μη μηδενική, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F_{23}}{\partial Q_2 \partial p_2} & \dfrac{\partial^2 F_{23}}{\partial P_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial F_{23}}{\partial Q_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial F_{23}}{\partial P_1 \partial q_1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.59}$$

Ας δούμε τώρα τι πρέπει να ισχύει ώστε δεδομένος κανονικός μετασχηματισμός να έχει γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_{23}(q_1, p_2, Q_2, P_1, t)$.

Οι σχέσεις του δεδομένου μετασχηματισμού θα είναι

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q, p, t) = Q_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \\ Q_2 &= Q_2(q, p, t) = Q_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \\ P_1 &= P_1(q, p, t) = P_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \\ P_2 &= P_2(q, p, t) = P_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t). \end{aligned}$$

Η $F_{23}(q_1, p_2, Q_2, P_1, t)$ υπολογίζεται από τη σχέση (7.54) επομένως πρέπει να μπορεί να λυθεί το σύστημα της δεύτερης και τρίτης σχέσης του δεδομένου μετασχηματισμού ως προς q_2, p_1 ώστε να υπολογιστούν ως συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών. Έχουμε έτσι τα $q_2 = q_2(q_1, p_2, Q_2, P_1, t),\ p_1 = p_1(q_1, p_2, Q_2, P_1, t)$. Αντικαθιστούμε αυτά τα μεγέθη στην πρώτη και τέταρτη σχέση του μετασχηματισμού οπότε έχουμε και τα $Q_1 = Q_1(q_1, p_2, Q_2, P_1, t),\ P_2 = P_2(q_1, p_2, Q_2, P_1, t)$, οπότε όλα μπορούν να εκφραστούν ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Για να γίνεται αυτό πρέπει να μπορεί να γίνει η λύση (αντιστροφή) της δεύτερης και τρίτης σχέσης ως προς q_2, p_1 . Αυτό γίνεται αν η παρακάτω σχετική ιακωβιανή ορίζουσα είναι μη μηδενική. Δηλαδή, για δεδομένο μετασχηματισμό, το κριτήριο ύπαρξης γεννήτριας τύπου $F_{23}(q_1, P_1, p_2, Q_2, t)$ είναι

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Τότε αυτός είναι κανονικός μετασχηματισμός.

7.1 Εύρεση γεννήτριας συνάρτησης από τις εξισώσεις κανονικού μετασχηματισμού

Όταν δίνεται ένας μετασχηματισμός υπάρχουν διάφορα κριτήρια που μας λένε αν είναι κανονικός ή όχι. Ένα κριτήριο είναι η ύπαρξη γεννήτριας συνάρτησης όπως αναλύσαμε στα προηγούμενα. Παρακάτω θα δούμε κριτήριο που βασίζεται στον συμπλεκτικό φορμαλισμό και κριτήρια που σχετίζονται με τις αγκύλες του Poisson. Ένα άλλο κριτήριο θα προκύψει από αυτά που θα αναπτύξουμε στην παράγραφο 7.2. Οι διαδικασίες που περιγράψαμε μέχρι τώρα οδηγούν από δεδομένη γεννήτρια συνάρτηση σε κανονικούς μετασχηματισμούς. Μπορούμε όμως να κάνουμε και το αντίστροφο, δηλαδή να δίνονται οι εξισώσεις μετασχηματισμού $Q_i = Q_i(q, p, t),\ \ P_i = P_i(q, p, t)$ και να θέλουμε να βρούμε, αν υπάρχει, την F_g . Η μέθοδος που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι να αντιστρέψουμε κατάλληλα τις εξισώσεις μετασχηματισμού και να εκφράσουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές συναρτήσει αυτών που θέλουμε να είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και του χρόνου. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις κατάλληλες για την περίπτωση σχέσεις που συνδέουν τις μερικές παραγώγους της F_g με μεταβλητές του χώρου των φάσεων πριν και μετά τον μετασχηματισμό. Αυτές μπορούμε, κατ' αρχή, να τις ολοκληρώσουμε και να βρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση. Φυσικά η γεννήτρια συνάρτηση είναι απροσδιόριστη κατά μια προσθετική αυθαίρετη συνάρτηση μόνο του χρόνου. Είναι προφανές ότι, αφού υπεισέρχονται μόνο οι μερικές παράγωγοι της γεννήτριας συνάρτησης ως προς μεταβλητές του χώρου των φάσεων, οι εξισώσεις μετασχηματισμού δεν εξαρτώνται από αυτή την προσθετική συνάρτηση του χρόνου. Αυτό επηρεάζει μόνο τη μορφή της νέας χαμιλτονιανής αλλά δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κίνησης. Το ποια είναι δυνατόν να είναι η μορφή της $F_g(q,Q,p,P,t)$ εξαρτάται από τις δυνατότητες αντιστροφής που καθορίζουν ποιες μεταβλητές μπορεί να ληφθούν ως ανεξάρτητες. Εφόσον βρεθεί γεννήτρια, ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Αν η περίπτωση δεν εμπίπτει σε καμιά από τις απλές περιπτώσεις που αναφέραμε, τότε είναι κάποιο είδος μεικτής περίπτωσης και πρέπει να ακολουθήσουμε ανάλογη διαδικασία όπως στην ανωτέρω μεικτή περίπτωση 5 για να βρούμε για τη συγκεκριμένη περίπτωση τις εξισώσεις με τις μερικές παραγώγους της F_g.

Έστω ο μετασχηματισμός

$$Q = p^2 + q, \quad P = p + t \tag{7.60}$$

Παρόλο που δε χρειάζεται, σημειώνουμε ότι αυτός είναι κανονικός μετασχηματισμός. Μπορούμε να το διαπιστώσουμε με διάφορους τρόπους. Ας εφαρμόσουμε το κριτήριο των αγκυλών Poisson που φαίνεται στο σχετικό κεφάλαιο παρακάτω, βρίσκουμε ότι ισχύει η Εξ. (7.61), που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

$$[Q,P] = 1. \tag{7.61}$$

Εφόσον έχουμε μόνο δυο μεταβλητές είναι ευνόητο ότι η γεννήτρια συνάρτηση θα υπάγεται σε μια από τις απλές περιπτώσεις που αναφέραμε προηγουμένως, δηλαδή τις (1) –(4). Πράγματι μπορεί να εφαρμοστεί η διαδικασία όπου $F_g = F_1(q,Q,t)$ διότι η πρώτη σχέση του μετασχηματισμού μπορεί να αντιστραφεί και να δώσει το $p = p(q,Q,t)$. Η γενική σχέση που πρέπει να ισχύει για να μπορεί να γίνεται αντιστροφή είναι ότι η ορίζουσα της μήτρας $\dfrac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_j}$ να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή

$$\left| \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_j} \right| \neq 0 . \tag{7.62}$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε μόνο ένα στοιχείο μήτρας και πράγματι γενικώς ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = 2p \neq 0 . \tag{7.63}$$

Εξάλλου φαίνεται αμέσως ότι γίνεται η αντιστροφή της

$$Q = Q(q,p,t) = p^2 + q \tag{7.64}$$

και δίνει

$$p = \left(Q - q\right)^{1/2} . \tag{7.65}$$

Προφανώς και το P μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των q,Q,t. Πράγματι έχουμε

$$P = p + t = \left(Q - q\right)^{1/2} + t\,. \tag{7.66}$$

Προχωρούμε στον προσδιορισμό της $F_1(q,Q,t)$. Χρησιμοποιούμε τις πρώτες σχέσεις της Εξ. (7.14) σε συνδυασμό με τις Εξ. (7.65), (7.66) και καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q} &= \left(Q-q\right)^{1/2} \\ \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q} &= -\left(Q-q\right)^{1/2} - t. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς q, θεωρώντας τα Q,t σταθερές παραμέτρους οπότε βρίσκουμε

$$F_1(q,Q,t) = -\frac{2}{3}\left(Q-q\right)^{3/2} + f_1(Q,t) \tag{7.68}$$

όπου η $f_1(Q,t)$ συνάρτηση που θα προσδιοριστεί. Ολοκληρώνουμε τη δεύτερη εξίσωση από τις Εξ. (7.67) ως προς Q θεωρώντας τα q,t σταθερές παραμέτρους οπότε βρίσκουμε

$$F_1(q,Q,t) = -\frac{2}{3}\left(Q-q\right)^{3/2} - tQ + f_2(q,t)\,. \tag{7.69}$$

Για να παριστάνουν την ίδια συνάρτηση οι Εξ. (7.68) και (7.69) πρέπει να ισχύει.

$$\begin{aligned} &F_1(q,Q,t) = -\frac{2}{3}\left(Q-q\right)^{3/2} + f_1(Q,t) = -\frac{2}{3}\left(Q-q\right)^{3/2} - tQ + f_2(q,t) \\ &f_1(Q,t) = -tQ + f_2(q,t)\,. \end{aligned} \tag{7.70}$$

Αυτό σημαίνει ότι αφού η $f_2(q,t)$ δεν εξαρτάται από το Q, αυτή είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου,

$$f_2(q,t) = f_3(t)\,. \tag{7.71}$$

Άρα

$$F_1(q,Q,t) = -\frac{2}{3}\left(Q-q\right)^{3/2} - tQ + f_3(t)\,. \tag{7.72}$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε το αντίστροφο, δηλαδή να ξεκινήσουμε από τη γεννήτρια της Εξ. (7.72) και να επαληθεύσουμε ότι βρίσκουμε πράγματι τον κανονικό μετασχηματισμό της Εξ. (7.60). Πράγματι

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q} = \left(Q-q\right)^{1/2} \\
P &= -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q} = \left(Q-q\right)^{1/2} + t.
\end{aligned}
\tag{7.73}
$$

Από αυτές προφανώς βρίσκουμε τις Εξ. (7.60)

$$
Q = p^2 + q, \quad P = p + t \;.
$$

Η άλλη δυνατότητα που έχουμε είναι να επιχειρήσουμε να βρούμε γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_2(q,P,t)$. Για να μπορούμε να έχουμε ανεξάρτητες μεταβλητές τα q,P,t πρέπει να μπορούμε να κάνουμε τις σχετικές αντιστροφές, άρα πρέπει

$$
\left|\frac{\partial P_i(q,p,t)}{\partial p_j}\right| \neq 0. \tag{7.74}
$$

Αυτό ισχύει πράγματι διότι έχουμε

$$
\frac{\partial P}{\partial p} = 1 \neq 0. \tag{7.75}
$$

Εύκολα φαίνεται πως γίνεται η αντιστροφή και βρίσκουμε,

$$
p = P - t, \quad Q = (P-t)^2 + q \tag{7.76}
$$

Μπορείτε στη συνέχεια να προχωρήσετε μόνοι σας και να βρείτε την $F_2(q,P,t)$.

Ακόμη μπορούμε να βρούμε και γεννήτρια τύπου $F_3(p,Q,t)$. Αυτό γίνεται διότι μπορούμε να αντιστρέψουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού και να εκφράσουμε τα q,P συναρτήσει των p,Q . Για να γίνεται τέτοια αντιστροφή πρέπει να ισχύει

$$
\left|\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_j}\right| \neq 0 \;. \tag{7.77}
$$

Στην περίπτωσή μας πράγματι ισχύει,

$$
\frac{\partial Q}{\partial q} = 1 \neq 0 \,. \tag{7.78}
$$

Έχουμε από την αντιστροφή

$$
q = Q - p^2 \,. \tag{7.79}
$$

Προχωρούμε στην εύρεση της $F_3(p,Q,t)$. Χρησιμοποιούμε τις δυο τελευταίες από τις Εξ. (7.36) οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p} &= -q = -Q + p^2 \\ \frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q} &= -P = -p - t. \end{aligned} \tag{7.80}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς p την πρώτη από τις Εξ. (7.80), θεωρώντας τα Q,t σταθερές παραμέτρους και τη δεύτερη ως προς Q θεωρώντας τα p,t σταθερές παραμέτρους οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} F_3(p,Q,t) &= -Qp + \frac{1}{3}p^3 + f_1(Q,t) \\ F_3(p,Q,t) &= -Qp - Qt + f_2(p,t). \end{aligned} \tag{7.81}$$

Προφανώς ισχύουν,

$$\begin{aligned} f_1(Q,t) &= -Qt \\ f_2(p,t) &= p^3/3 + f_3(t). \end{aligned} \tag{7.82}$$

Βρίσκουμε επομένως ότι

$$F_3(p,Q,t) = -Qp + \frac{1}{3}p^3 + f_3(t). \tag{7.83}$$

Και πάλι κάνοντας το αντίστροφο βρίσκουμε από τη γεννήτρια συνάρτηση της Εξ. (7.83) τον μετασχηματισμό από όπου ξεκινήσαμε. Πράγματι

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p} = Q - p^2 \\ P &= -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q} = p + t. \end{aligned} \tag{7.84}$$

Άρα

$$Q = p^2 + q, \quad P = p + t.$$

Από εκεί και πέρα η διαδικασία είναι όπως στις άλλες περιπτώσεις που μελετήσαμε.

Η μόνη άλλη απλή περίπτωση που θα μπορούσαμε να έχουμε είναι η περίπτωση $F_4(p,P,t)$. Όμως αυτό δεν μπορεί να γίνει διότι δεν μπορούμε να εκφράσουμε τις μεταβλητές ως προς p,P,t. Πράγματι για να γίνεται αυτό θα πρέπει

$$\left|\frac{\partial P_i(q,p,t)}{\partial q_j}\right| \neq 0. \tag{7.85}$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0\,. \quad (7.86)$$

Συνοψίζοντας αναφέρουμε ότι:Ένα κριτήριο για να είναι ο δεδομένος μετασχηματισμός $Q_i = Q_i(q,p,t),\ \ P_i = P_i(q,p,t)$ κανονικός, είναι να μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $F_{\rm g}(q,Q,p,P,t)$ που γεννά, με τον γνωστό τρόπο, τον δεδομένο μετασχηματισμό.

7.2 Ένα άλλο κριτήριο για να είναι ένας μετασχηματισμός κανονικός

Θα αναπτύξουμε παρακάτω και ένα άλλο κριτήριο για να βρίσκουμε αν ένας δεδομένος μετασχηματισμός είναι κανονικός. Ξεκινούμε από τη βασική Εξ. (7.9) η οποία είναι

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i + \big(K(Q,P,t) - H(q,p,t)\big)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F. \quad (7.87)$$

Ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος είναι μια αυθαίρετη σταθερή παράμετρος, $t = t_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathrm{d}t = 0$, οπότε η Εξ. (7.87) γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i = \delta F \quad (7.88)$$

ή απλώς

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i = \mathrm{d}F, \quad t = t_0 = \text{σταθερό}. \quad (7.89)$$

Αυτό μας οδηγεί στο κριτήριο που λέει ότι, ένας κανονικός μετασχηματισμός, για χρόνο αυθαίρετο που λαμβάνεται ως σταθερή παράμετρος, οδηγεί στο ότι η διαφορά των διαφορικών εκφράσεων του πρώτου μέλους είναι ολικό διαφορικό για σταθερό χρόνο, μιας συνάρτησης F των $2n$ μεταβλητών και του χρόνου. Φυσικά εννοείται ότι όλα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει ανεξάρτητων συντεταγμένων και του χρόνου. Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, είναι σίγουρο ότι για κανονικούς μετασχηματισμούς, σε αυτές τις εκφράσεις μπορεί να είναι ανεξάρτητες συντεταγμένες τα q,p ή τα Q,P. Εφόσον έχουμε ολικό διαφορικό ως προς τις ανεξάρτητες συντεταγμένες, αυτό που μπορούμε να κάνουμε για να βρούμε (για παράδειγμα) την $F(q,p,t)$ είναι το εξής:

Εκφράζουμε όλα συναρτήσει των q,p,t, και θέτουμε όπου $t = t_0 =$ σταθερό,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i(q,p,t_0)\mathrm{d}Q_i(q,p,t_0) = \mathrm{d}F(q,p,t_0)\,. \quad (7.90)$$

στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την έκφραση του πρώτου μέλους στον χώρο των q,p, μεταξύ ενός αυθαίρετου σημείου q_0, p_0 και του σημείου q,p, ακολουθώντας μια οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ τους. Προφανώς ακολουθούμε κάποια που μας βολεύει.

Στη συνέχεια θέτουμε όπου t_0 το t. Αν έχουμε κάνει σωστά τους υπολογισμούς και εφόσον ο μετασχηματισμός είναι κανονικός θα έχουμε την $F(q,p,t)$ ως άθροισμα μιας έκφρασης που θα είναι συνάρτηση μόνο των q,p,t και μιας άλλης έκφρασης που θα είναι συνάρτηση μόνο των σταθερών q_0, p_0 και του χρόνου t,

$$F(q,p,t)=f(q,p,t)+g(q_0,p_0,t)\,.$$

Ξανατονίζουμε ότι, γενικώς, αυτή η συνάρτηση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως είναι ως γεννήτρια συνάρτηση, με απλή αντικατάσταση των συντεταγμένων (αν αυτό μπορεί φυσικά να γίνει με κατάλληλες αντιστροφές των εξισώσεων μετασχηματισμού), ώστε να καταλήξει να είναι συνάρτηση του χρόνου και n αρχικών και n μετασχηματισμένων μεταβλητών. Η συνάρτηση αυτή με απλή κατάλληλη αντικατάσταση μεταβλητών (αν μπορεί να γίνει αυτό) ώστε να μετατραπεί σε συνάρτηση των q,Q,t, δίνει μόνο τη σωστή γεννήτρια τύπου $F_1(q,Q,t)$. Αυτό αναμένεται διότι η μορφή που ξεκινήσαμε έχει στο πρώτο μέλος τα $p\mathrm{d}q,\ P\mathrm{d}Q$ οπότε αν τα q,Q είναι ανεξάρτητα τότε είμαστε στην περίπτωση $F_1(q,Q,t)$.

Για τις άλλες περιπτώσεις πρέπει η ανωτέρω F να αλλάξει μορφή όπως έγινε στις ειδικές περιπτώσεις που περιγράψαμε με προσθήκη κατάλληλων όρων οι οποίοι, σύμφωνα με την παρούσα φιλοσοφία, μπορεί να θεωρηθούν ως συναρτήσεις των q,p,t. Είναι καλό να διατυπώσουμε αυτό το κριτήριο για τις ειδικές περιπτώσεις γεννητριών συναρτήσεων που εξετάσαμε παραπάνω, F_1,F_2,F_3,F_4. Δίνουμε απλώς τα αποτελέσματα, τα οποία μπορεί κάποιος να βρει εύκολα. Είναι ευνόητο ότι η εύρεση της γεννήτριας για την κάθε περίπτωση ακολουθεί την ανάλογη διαδικασία που παρουσιάσαμε προηγουμένως με ολοκλήρωση σε αυθαίρετο δρόμο στον αντίστοιχο χώρο, $(q,Q),(q,P),(p,Q),(p,P)$ για τις τέσσερις περιπτώσεις.

Περίπτωση $F_1(q,Q,t)$.

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(q,Q,t_0)\mathrm{d}q_i-\sum_{i=1}^{n}P_i(q,Q,t_0)\mathrm{d}Q_i=\mathrm{d}F_1(q,Q,t_0)\,. \tag{7.91}$$

Περίπτωση $F_2(q,P,t)$.

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(q,P,t_0)\mathrm{d}q_i+\sum_{i=1}^{n}Q_i(q,P,t_0)\mathrm{d}P_i=\mathrm{d}F_2(q,P,t_0). \tag{7.92}$$

Περίπτωση $F_3(p,Q,t)$.

$$-\sum_{i=1}^{n}q_i(p,Q,t_0)\mathrm{d}p_i-\sum_{i=1}^{n}P_i(p,Q,t_0)\mathrm{d}Q_i=\mathrm{d}F_3(p,Q,t_0). \tag{7.93}$$

Περίπτωση $F_4(p,P,t)$.

$$-\sum_{i=1}^{n}q_i(p,P,t_0)\mathrm{d}p_i+\sum_{i=1}^{n}Q_i(p,P,t_0)\mathrm{d}P_i=\mathrm{d}F_4(p,P,t_0). \tag{7.94}$$

Μια μεικτή περίπτωση $F'(q_1,p_2,P_1,Q_2,t)$.

$$\begin{aligned}&p_1(q_1,p_2,Q_2,P_1,t_0)\mathrm{d}q_1-q_2(q_1,p_2,Q_2,P_1,t_0)\mathrm{d}p_2-P_2(q_1,p_2,Q_2,P_1,t_0)\mathrm{d}Q_2\\&+Q_1(q_1,p_2,Q_2,P_1,t_0)\mathrm{d}P_1=\mathrm{d}F'\left(q_1,p_2,Q_2,P_1,t\right).\end{aligned} \tag{7.95}$$

Η γενική περίπτωση που περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω περιπτώσεις (γενική μεικτή) είναι πιο πολύπλοκη. Τώρα θα δούμε συγκεκριμένη περίπτωση. Ας ξεκινήσουμε από τον μετασχηματισμό που είδαμε και στα προηγούμενα

$$Q = p^2 + q, \quad P = p + t \,. \tag{7.96}$$

Θα βρούμε συνάρτηση $F(q, p, t)$ τέτοια που να ισχύει η Εξ. (7.90), δηλαδή η

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} P_i(q, p, t_0)\mathrm{d}Q_i(q, p, t_0) = \mathrm{d}F(q, p, t_0) \,. \tag{7.97}$$

Αντικαθιστούμε από τις Εξ. (7.96) και έχουμε

$$\mathrm{d}F(q, p, t_0) = p\mathrm{d}q - (p + t_0)\mathrm{d}(p^2 + q) = -t_0\mathrm{d}q - 2p(p + t_0)\mathrm{d}p \tag{7.98}$$

Εδώ τα πράγματα είναι απλά και δεν χρειάζεται η επιλογή κάποιας διαδρομής για την ολοκλήρωση μεταξύ q_0, p_0 και q, p διότι ο κάθε ένας όρος με τα διαφορικά εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή του διαφορικού, άρα το αποτέλεσμα είναι

$$F(q, p, t_0) = -qt_0 - 2p^3/3 - p^2 t_0 + f(q_0, p_0, t_0) \,. \tag{7.99}$$

Οπότε θέτοντας όπου t_0 το t έχουμε τελικώς

$$F(q, p, t) = -qt - 2p^3/3 - p^2 t + f(q_0, p_0, t) \,. \tag{7.100}$$

Αφού υπάρχει η $F(q, p, t)$ ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Για διδακτικούς λόγους ας διαλέξουμε τη διαδρομή από q_0, p_0 μέχρι q_0, p με $q =$ σταθερό και στη συνέχεια από q_0, p μέχρι q, p με $p =$ σταθερό. Θα έχουμε από την Εξ. (7.98)

$$\begin{aligned} F(q, p, t_0) &= \int_{p_0}^{p} -2p(p + t_0)\mathrm{d}p + \int_{q_0}^{q} -t_0\mathrm{d}q \\ &= -\frac{2}{3}p^3 + \frac{2}{3}p_0^3 - t_0 p^2 + t_0 p_0^2 - t_0 q + t_0 q_0. \end{aligned} \tag{7.101}$$

Βάζουμε όπου t_0 το t και έτσι πράγματι βρίσκουμε την Εξ. (7.100).

Ας πάρουμε τώρα την Εξ. (7.100) και ας αγνοήσουμε τον τελευταίο προσθετέο για ευκολία. Έτσι έχουμε

$$F(q, p, t) = -qt - 2p^3/3 - p^2 t. \tag{7.102}$$

Αν από τις σχέσεις μετασχηματισμού Εξ. (7.96) εκφράσουμε τα p, P ως προς q, Q και αντικαταστήσουμε στην Εξ. (7.102), βρίσκουμε την ίδια συνάρτηση με αυτήν της Εξ. (7.72), χωρίς τον τελευταίο προσθετέο, δηλαδή βρίσκουμε τη σωστή γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_1(q, Q, t)$.

$$F_1(q, Q, t) = F(q, Q, t) = -\frac{2}{3}\left(Q - q\right)^{3/2} - tQ. \tag{7.103}$$

Ας κάνουμε τώρα κάτι που είναι λάνθασμένο. Από τις σχέσεις του μετασχηματισμού (7.96) βρίσκουμε τα $q = q(p, Q, t)$, $P = P(p, Q, t)$ και κάνοντας μια απλή αντικατάσταση στην Εξ. (7.102) τελικά βρίσκουμε

$$F(p,Q,t) = -\frac{2}{3}p^3 - Qt\ . \qquad (7.104)$$

Παρατηρούμε ότι με απλή αντικατάσταση δεν βρήκαμε τη γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_3(p,Q,t)$ που σύμφωνα με την Εξ. (7.83) είναι

$$F_3(p,Q,t) = -Qp + \frac{1}{3}p^3 - Qt. \qquad (7.105)$$

Ας ακολουθήσουμε τώρα τη σωστή διαδικασία και όπως στην Εξ. (7.33) ας προσθέσουμε στα δυο μέλη στην Εξ. (7.102) τον όρο $-\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$, που εδώ είναι απλώς ο όρος $-qp$, τότε βρίσκουμε

$$F_3(q,p,t) = F(q,p,t) - qp = -qt - 2p^3/3 - p^2 t - pq. \qquad (7.106)$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές όπως πριν, τώρα καταλήγουμε πράγματι στη γεννήτρια τύπου $F_3(p,Q,t)$, δηλαδή βρίσκουμε την Εξ. (7.105), δηλαδή την

$$F_3(p,Q,t) = -Qp + \frac{1}{3}p^3 - Qt. \qquad (7.107)$$

Το ίδιο βρίσκουμε αν στην Εξ. (7.104) προσθέσουμε τον όρο $-pq$ αν πρώτα αντικαταστήσουμε το q αφού το εκφράσουμε ως προς p,Q , δηλαδή προσθέτουμε τον όρο

$$-p(Q - p^2). \qquad (7.108)$$

Πράγματι βρίσκουμε πάλι τη σωστή Εξ. (7.107).

7.3 Αγκύλες του Poisson

Έστω η συνάρτηση $f(q,p,t)$, των μεταβλητών (q,p,t) κάποιου χαμιλτονιανού μηχανικού συστήματος το οποίο έχει χαμιλτονιανή $H(q,p,t)$. Αυτές οι συναρτήσεις (ποσότητες) λέγονται δυναμικές ποσότητες ή δυναμικές μεταβλητές ή δυναμικές συναρτήσεις. Η ολική παράγωγος ως προς τον χρόνο της συνάρτησης αυτής είναι

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \qquad (7.109)$$

Ισχύουν οι εξισώσεις του Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ . \qquad (7.110)$$

Οι Εξ. (7.109) και (7.110) δίνουν

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left[f, H \right]_{qp}$$

$$\left[f, H \right]_{qp} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \tag{7.111}$$

Η αγκύλη $\left[f, H \right]_{qp}$ λέγεται αγκύλη (του) Poisson των f και H ως προς τις συζυγείς μεταβλητές (q, p). Αν η ποσότητα $f(q, p, t)$ είναι σταθερά της κίνησης τότε

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left[f, H \right]_{qp} = 0. \tag{7.112}$$

Αν μια ποσότητα που είναι σταθερά της κίνησης, δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δηλαδή είναι της μορφής $f(q, p)$, τότε έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \left[f, H \right]_{qp} = 0. \tag{7.113}$$

Δηλαδή μια σταθερά της κίνησης, η οποία δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, έχει αγκύλη Poisson με τη χαμιλτονιανή ίση με μηδέν. Γενικότερα, ορίζεται η αγκύλη Poisson ως προς (q, p), για δυο δυναμικές συναρτήσεις $f(q, p, t),\ \ g(q, p, t)$ η παράσταση

$$\left[f, g \right]_{qp} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \tag{7.114}$$

Εύκολα από τον ορισμό προκύπτει ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις για τις αγκύλες του Poisson, όπου για απλούστευση δεν γράφουμε ως δείκτες τα q, p.

1) Αντισυμμετρία, $\left[f, g \right] = -\left[g, f \right]$.

2) Αν $c =$ σταθερά ανεξάρτητη από τα (q, p, t), τότε $\left[f, c \right] = 0$.

3) $\left[f, f \right] = 0.$

4) Γραμμικότητα, $\left[f_1 + f_2, g \right] = \left[f_1, g \right] + \left[f_2, g \right]$.

5) Κανόνας του πολλαπλασιασμού, $[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + [f_1, g] f_2$

6) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[f, g \right] = \left[\dfrac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \dfrac{\partial g}{\partial t} \right]$.

7) $\left[f, q_i \right] = -\dfrac{\partial f}{\partial p_i}$.

8) $\left[f, p_i \right] = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}$.

Από τις (7), (8) βάζοντας όπου f τα q_i και τα p_i, βρίσκουμε τις θεμελιώδεις σχέσεις των αγκυλών του Poisson, δηλαδή τις

9) $\left[q_i, q_j\right] = 0.$

10) $\left[p_i, p_j\right] = 0.$

11) $\left[q_i, p_j\right] = \delta_{ij}$ (το δέλτα του Kronecker).

Ισχύει επίσης η ταυτότητα του Jacobi, η οποία λέει ότι, αν u, υ, w είναι τρεις δυναμικές συναρτήσεις, τότε έχουμε

12) Ταυτότητα του Jacobi, $\left[u,\left[\upsilon, w\right]\right]+\left[\upsilon,\left[w,u\right]\right]+\left[w,\left[u,\upsilon\right]\right]=0.$

Αυτή αποδεικνύεται πιο δύσκολα και η διαδικασία φαίνεται στο Παράρτημα Π6.

Θα δείξουμε ότι ισχύει το Θεώρημα του Poisson το οποίο λέει ότι, αν $f(q, p, t)$ και $g(q, p, t)$ είναι σταθερές της κίνησης τότε και η αγκύλη Poisson $[f, g]$ είναι σταθερά της κίνησης, δηλαδή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f, g] = 0. \tag{7.115}$$

Έχουμε.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + \left[[f, g], H\right] \tag{7.116}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (6) και την ταυτότητα του Jacobi και καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f, g] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] - \left[[g, H], f\right] - \left[[H, f], g\right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} - [H, f], g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} - [H, g]\right] \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g\right] + \left[f, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right] = 0 + 0. \end{aligned} \tag{7.117}$$

Παρακάτω στο Κεφ. 10.4 για τη συμπλεκτική μορφή του χαμιλτονιανού φορμαλισμού, θα δειχτεί ότι οι αγκύλες του Poisson είναι αναλλοίωτες σε (απλούς) κανονικούς μετασχηματισμούς $(\lambda = 1)$, δηλαδή έχουν την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τις κανονικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται. Αυτό σημαίνει ότι πράγματι δεν χρειάζεται να γράφονται οι δείκτες q, p στις αγκύλες Poisson. Επομένως μπορούμε να γράφουμε τις αγκύλες του Poisson χωρίς δείκτες.

$$\left[F, G\right]_{qp} = \left[F, G\right]_{QP} = \left[F, G\right] \tag{7.118}$$

Σημειώνουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε διευρυμένο κανονικό μετασχηματισμό, βλέπε στην αρχή στο Κεφ. 7, τότε οι αγκύλες δεν είναι αναλλοίωτες αλλά πολλαπλασιάζονται επί τον συντελεστή λ ο οποίος διαφέρει από μετασχηματισμό σε μετασχηματισμό. Αυτή είναι μια αιτία που ορίζουμε ως κανονικό τον μετασχηματισμό με $\lambda = 1$. Στη συνέχεια ορίζουμε τις αγκύλες του Lagrange. Ας φανταστούμε στον χώρο των φάσεων μια δισδιάστατη επιφάνεια που καθορίζεται από δυο παραμέτρους u, υ. Για αυτή την επιφάνεια θα έχουμε $q_i = q_i(u, \upsilon),\ \ p_i = p_i(u, \upsilon)$. Η αγκύλη του Lagrange ορίζεται από την Εξ. (7.119).

$$\left\{u, \upsilon\right\}_{qp} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial \upsilon} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial \upsilon} \right). \tag{7.119}$$

Προφανώς ισχύει ότι $\left\{u, \upsilon\right\} = -\left\{\upsilon, u\right\}$.

Εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις

α) $\left\{q_i, q_i\right\} = 0.$

β) $\left\{p_i, p_i\right\} = 0.$

γ) $\left\{q_i, p_j\right\} = \delta_{ij}$, δ_{ij} = το δέλτα του Kronecker.

Οι εκφράσεις αυτές είναι οι θεμελιώδεις αγκύλες του Lagrange. Ισχύει η εξής σχέση για $2n$ ανεξάρτητες συναρτήσεις, u_i, $i = 1, 2, ..., 2n$, στον χώρο των φάσεων

$$\sum_{l=1}^{2n} \left\{u_l, u_i\right\} \left[u_l, u_j\right] = \delta_{ij} . \tag{7.120}$$

Είναι σαν οι αγκύλες του Poisson να είναι το αντίστροφο των αγκυλών του Lagrange. Ισχύει και για τις αγκύλες του Lagrange ότι είναι αναλλοίωτες σε κανονικούς μετασχηματισμούς άρα δεν χρειάζεται να γράφονται οι δείκτες q, p. Δηλαδή

$$\left\{u, \upsilon\right\}_{qp} = \left\{u, \upsilon\right\}_{QP} = \left\{u, \upsilon\right\} . \tag{7.121}$$

Αξίζει να πούμε ότι για την κβάντωση μπορεί να ακολουθηθεί η εξής διαδικασία που οφείλεται στον Dirac: Οι κλασικές αγκύλες Poisson έχουν τις γνωστές ιδιότητες, αντισυμμετρία, γραμμικότητα, κανόνα πολλαπλασιασμού και ταυτότητα του Jacobi. Θεωρούμε τις ποσότητες $\hat{f}, \hat{g}$ που έχουν αντίστοιχες κλασικές ποσότητες f, g, συναρτήσεις των κανονικών μεταβλητών q, p. Οι $\hat{f}, \hat{g}$ δεν είναι αλγεβρικές (αριθμητικές) ποσότητες. Δεχόμαστε ότι γι' αυτές ισχύουν οι ανωτέρω ιδιότητες των αγκυλών Poisson, με τη διαφορά ότι τώρα πρέπει να τηρείται η διάταξη των μεγεθών όπως τις έχουμε σημειώσει. Ο Dirac δείχνει ότι ισχύει

$$\left(\hat{f}, \hat{g}\right) := \hat{f}\,\hat{g} - g\hat{f} = i\hbar[\hat{f}, \hat{g}]$$

όπου

$$\left(\hat{f}, \hat{g}\right) := \hat{f}\,\hat{g} - g\hat{f}$$

είναι ο λεγόμενος μεταθέτης των μεγεθών $\hat{f}, \hat{g}$ και $[\hat{f}, \hat{g}]$ είναι η λεγόμενη κβαντική αγκύλη Poisson των $\hat{f}, \hat{g}$.

Θα προσδιορίσουμε τις κβαντικές συνθήκες, που είναι συνθήκες μεταξύ των $\hat{f}, \hat{g}$. Υποθέτουμε ότι είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι οι απλούστερες μορφές κβαντικών αγκυλών Poisson (θεμελιώδεις αγκύλες Poisson) έχουν τις ίδιες τιμές με τις αντίστοιχες κλασικές αγκύλες Poisson. Οι απλούστερες τέτοιες κλασικές αγκύλες είναι μεταξύ των κανονικών μεταβλητών q, p.

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\left[q_i, q_j\right] = 0, \ \left[p_i, p_j\right] = 0, \ \left[q_i, p_j\right] = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, ..., n \ .$$

Έτσι καταλήγουμε στις θεμελιώδεις κβαντικές συνθήκες για τους μεταθέτες,

$$\hat{q}_i \hat{q}_j - \hat{q}_j \hat{q}_i = 0, \ \hat{p}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{p}_i = 0, \ \hat{q}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{p}_i = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, ..., n \, .$$

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την κλασική Φυσική, στην κβαντική Φυσική μπορεί να μην ισχύει η εναλλαγή μεταξύ μεγεθών. Αυτό σχετίζεται με την αρχή της αβεβαιότητας.

Για όλες τις περιπτώσεις που υπάρχει το κλασικό ανάλογο ενός κβαντικού συστήματος οι θεμελιώδεις κβαντικές συνθήκες αποτελούν τη βάση για την εύρεση των μεταθετών μεταξύ των διαφόρων δυναμικών συναρτήσεων. Μπορεί να χρειάζεται κάθε φορά κάποια διαδικασία, όπως η συμμετροποίηση της κλασικής έκφρασης ή ξεκίνημα από καρτεσιανές συντεταγμένες και άλλες διαδικασίες που περιγράφονται σε ειδικά συγγράμματα και δημοσιευμένες εργασίες. Ακόμη μπορεί να εμφανίζονται τελικώς και όροι με ανώτερες δυνάμεις του $\hbar$.

Σημειώνουμε ότι δεν περιμένουμε να μπορούμε να μεταβούμε με απλό τρόπο από την κλασική στην κβαντική θεώρηση, θα ήταν σαν να λέγαμε πως η κλασική φυσική περιλαμβάνει ή είναι ισοδύναμη με την κβαντική. Αντίθετα, η κβαντική περιλαμβάνει ως όριο την κλασική, όταν $\hbar \rightarrow 0$. Μπορούμε να πούμε ότι οι αγκύλες Poisson της Κλασικής Μηχανικής αντιστοιχούν σε μεταθέτες της Κβαντικής Φυσικής (αρχή της αντιστοιχίας). Οι ιδιότητες των αγκυλών Poisson της Κλασικής Φυσικής έχουν τις αντίστοιχές τους στην Κβαντική Φυσική με τους μεταθέτες. Τα κβαντικά μεγέθη $\hat{f}, \hat{g}$, είναι οι γνωστοί μας τελεστές της Κβαντομηχανικής.

Αν $\hbar \rightarrow 0$, τότε καταλήγουμε στο ότι όλες οι φυσικές ποσότητες μπορεί να εναλλαχτούν, δηλαδή έχουμε σε ισχύ ιδιότητες της Κλασικής Φυσικής. Δεν υπάρχει αβεβαιότητα στην κλασική περίπτωση.

7.4 Συμπλεκτική μορφή του χαμιλτονιανού φορμαλισμού

Οι εξισώσεις του Hamilton μπορούν να γραφτούν σε συμπλεκτική μορφή όπως φαίνεται στη συνέχεια. Ο όρος συμπλεκτική μορφή σημαίνει ότι οι θέσεις και οι συζυγείς ορμές εμπλέκονται και εμφανίζονται ως συνιστώσες ενός διανύσματος-στήλης. Πράγματι, σχηματίζουμε τα διανύσματα-στήλες $\boldsymbol{\eta}$ και $\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$, με συνιστώσες τα q, p και τις παραγώγους της χαμιλτονιανής ως προς τα q, p, αντίστοιχα, δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} &\eta_i = q_i, \quad \eta_{n+i} = p_i \\ &\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta_{n+i}} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad i \leq n. \end{aligned} \tag{7.122}$$

Επίσης σχηματίζουμε την αντισυμμετρική μήτρα (πίνακα) $\boldsymbol{J}$, με διαστάσεις $2n \times 2n$, όπου χρησιμοποιούμε τη μήτρα-μονάδα (μοναδιαία) $\boldsymbol{I}$, διαστάσεων $n \times n$. Έχουμε επομένως

$$
\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ . \\ q_n \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_2} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{7.123}
$$

Προφανώς οι εξισώσεις Hamilton γράφονται σε συμπλεκτική μορφή ως εξής

$$
\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}\,\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,. \tag{7.124}
$$

Η μήτρα $\boldsymbol{J}$ λέγεται η μήτρα της συμπλεκτικής δομής και ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
J_{ik} &= -J_{ki} \\
\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} &= -\boldsymbol{J} \\
\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{J}^{-1} = -\boldsymbol{J} \\
\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{J}^{2} &= -\boldsymbol{I} \\
\det \boldsymbol{J} &= |\boldsymbol{J}| = 1
\end{aligned} \tag{7.125}
$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι με το ίδιο σύμβολο $\boldsymbol{I}$, παριστάνουμε τις μοναδιαίες μήτρες διάστασης $n\times n$ και $2n\times 2n$.Θα βρούμε τη συνθήκη ώστε ένας μετασχηματισμός της μορφής

$$
Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t)\,. \tag{7.126}
$$

να είναι κανονικός μετασχηματισμός.
Οι σχέσεις αυτές μπορεί να γραφτούν στη συμπλεκτική μορφή

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\zeta} = (Q_1, Q_2, ..., Q_n, P_1, P_2, ...P_n, t) \\
\zeta_i = \zeta_i(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{2n}, t),\ i = 1, 2, ..., 2n \\
\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}, t)
\end{gathered} \tag{7.127}
$$

Ισχύουν προφανώς οι σχέσεις

$$\begin{aligned} &\zeta_i = Q_i, \quad \zeta_{n+i} = P_i \\ &\frac{\partial H}{\partial \zeta_i} = \frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta_{n+i}} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{7.128}$$

Θα βρούμε τη λεγόμενη συμπλεκτική συνθήκη που είναι η συνθήκη η οποία πρέπει να ισχύει, ώστε ο ανωτέρω μετασχηματισμός να είναι κανονικός.

Η ιακωβιανή $2n \times 2n$ μήτρα , $\boldsymbol{M}$, του μετασχηματισμού είναι

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} . \tag{7.129}$$

Υποθέτουμε ότι αυτή η μήτρα είναι ομαλή οπότε οι σχέσεις μετασχηματισμού αντιστρέφονται και δίνουν τις

$$\begin{aligned} &\eta_i = \eta_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}, t), \ i = 1, 2, \ldots, 2n \\ &\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\zeta, t) \end{aligned} \tag{7.130}$$

Από αυτές βρίσκουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\dot{\eta}_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} \dot{\zeta}_j \\ &\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} + \boldsymbol{M}^{-1} \dot{\boldsymbol{\zeta}}. \end{aligned} \tag{7.131}$$

Αν $H'(\boldsymbol{\zeta}, t)$ είναι η χαμιλτονιανή με τις συντεταγμένες μετασχηματισμένες, έχουμε

$$\begin{aligned} &H'(\boldsymbol{\zeta}, t) = H(\boldsymbol{\eta}, t) \\ &\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial H'}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \end{aligned} \tag{7.132}$$

Ισχύουν οι εξισώσεις του Hamilton, Εξ. (7.124) οι οποίες με τη βοήθεια των Εξ. (7.131), (7.132) και με πολλαπλασιασμό επί $\boldsymbol{M}$, δίνουν

$$\boldsymbol{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = 0. \tag{7.133}$$

Αυτή η σχέση μας οδηγεί στις

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{JM}^{\mathrm{T}})^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \\
&= \boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} \left\{ \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}} - (\boldsymbol{JM}^{\mathrm{T}})^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \right\} \\
&= \boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} \left\{ \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}} - (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{J}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \right\} \\
\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} \left\{ \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{\zeta}} + (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.134}$$

Αν υπάρχει δυναμική συνάρτηση $R(\boldsymbol{\zeta}, t)$ τέτοια που να ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \tag{7.135}$$

τότε η τελευταία σχέση της Εξ. (7.134) γράφεται

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \left(H' + R \right)}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \tag{7.136}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να ισχύουν οι εξισώσεις του Hamilton, Εξ. (7.124), με τις νέες μεταβλητές, πρέπει στην Εξ. (7.136) να έχουμε ότι

$$\boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}\ . \tag{7.137}$$

Αυτή είναι η συμπλεκτική συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ο μετασχηματισμός της Εξ. (7.127) να είναι κανονικός. Ορίζουμε μια νέα χαμιλτονιανή (καμιλτονιανή) σύμφωνα με τη σχέση $K = H' + R$, τότε η Εξ. (7.136) δίνει τις εξισώσεις του Hamilton στη μορφή

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{J} \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$$

Αν έχουμε εκτεταμένο κανονικό μετασχηματισμό τότε δεν ισχύει η συμπλεκτική συνθήκη αλλά η σχέση

$$\boldsymbol{MJM}^{\mathrm{T}} = \lambda \boldsymbol{J}\ . \tag{7.138}$$

Μήτρες όπως η $\boldsymbol{M}$ που πληρούν τη συμπλεκτική συνθήκη Εξ. (7.137) λέγονται συμπλεκτικές μήτρες. Πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν, όταν ισχύει η συμπλεκτική συνθήκη, υπάρχει συνάρτηση R τέτοια που να ισχύει η Εξ. (7.135).

Η Εξ. (7.135) με τη βοήθεια της Εξ. (7.137) δίνει

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = -\boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \tag{7.139}$$

Το αριστερό μέλος της Εξ. (7.139) είναι μια στήλη-διάνυσμα $\boldsymbol{A}$ με συνιστώσες

$$A_1 = \frac{\partial R}{\partial \zeta_1}, A_2 = \frac{\partial R}{\partial \zeta_2}, \ldots, A_{2n} = \frac{\partial R}{\partial \zeta_{2n}}. \tag{7.140}$$

Είναι ευνόητο ότι για κάθε ζευγάρι συνιστωσών του $\boldsymbol{A}$, ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_i}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \zeta_i} = \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta_j \partial \zeta_i} - \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} = 0 \\ &\frac{\partial A_i}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \zeta_i} = 0. \end{aligned} \tag{7.141}$$

Όλα αυτά μπορούμε ακόμη να ισχυριστούμε ότι συμβαίνουν, διότι το αριστερό μέλος της Εξ. (7.139) είναι η βαθμίδα (gradient) της συνάρτησης R ως προς $\boldsymbol{\zeta}$, Εξ. (7.140), οπότε το σχετικό θεώρημα λέει ότι ο στροβιλισμός (curl ή rot) της βαθμίδας ως προς $\boldsymbol{\zeta}$ είναι μηδέν. Το τελευταίο οδηγεί στην Εξ. (7.141) που δείξαμε χωρίς αναφορά στο θεώρημα αυτό. Για το δεύτερο μέλος της Εξ. (7.139) γράφουμε

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}. \tag{7.142}$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω πρέπει να ισχύουν για αυτό το $\boldsymbol{B}$ η δεύτερες εξισώσεις της Εξ. (7.141), δηλαδή

$$\frac{\partial B_i}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial B_j}{\partial \zeta_i} = 0. \tag{7.143}$$

Σύμφωνα με την Εξ. (7.142) έχουμε

$$B_l = \sum_{i,k=1}^{2n} J_{li} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial t}. \tag{7.144}$$

Έτσι καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} &B_{lr} = \sum_{i,k=1}^{2n} J_{li} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \zeta_r \partial t} - \sum_{i,k=1}^{2n} J_{ri} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \zeta_l \partial t} = 0 \\ &\sum_{i,k=1}^{2n} J_{li} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \zeta_r \partial t} = \sum_{i,k=1}^{2n} J_{ri} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \zeta_l \partial t}. \end{aligned} \tag{7.145}$$

Η δεύτερη εξίσωση της Εξ. (7.145) γράφεται

$$\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{M}^{-1}}{\partial t} = \left(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{M}^{-1}}{\partial t}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}}{\partial t}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}. \tag{7.146}$$

Από την Εξ. (7.137) έχουμε τις σχέσεις

$$\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = -(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}. \tag{7.147}$$

Επομένως η Εξ. (7.146) γίνεται

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\frac{\partial \boldsymbol{M}^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}}{\partial t}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left((\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\right) = 0.\end{gathered} \tag{7.148}$$

Από την Εξ. (7.137) προκύπτει ότι

$$(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{J}. \tag{7.149}$$

Οπότε αφού η μήτρα $\boldsymbol{J}$ είναι η γνωστή μήτρα της συμπλεκτικής δομής με συνιστώσες σταθερούς αριθμούς (1,-1,0), προφανώς ισχύει η δεύτερη από τις σχέσεις της Εξ. (7.148), άρα εξασφαλίζεται η ύπαρξη της R και η ισχύς της συμπλεκτικής σχέσης της Εξ. (7.137) ως ικανής για να είναι ο μετασχηματισμός των Εξ. (7.126) κανονικός.

Αντιστρέφοντας τη διαδικασία μπορούμε να δούμε ότι η συνθήκη είναι και αναγκαία. Ανεξάρτητα από το αν ακολουθούμε τη διαδικασία των γεννητριών συναρτήσεων για τους κανονικούς μετασχηματισμούς ή τη συμπλεκτική διαδικασία, αποδεικνύεται ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μια ομάδα:

1. Ο μετασχηματισμός-μονάδα (μοναδιαίος) είναι κανονικός.
2. Αν ένας μετασχηματισμός είναι κανονικός, τότε είναι κανονικός και ο αντίστροφός του.
3. Δυο διαδοχικοί κανονικοί μετασχηματισμοί (η πράξη του γινομένου για τις ομάδες) ορίζουν ένα μετασχηματισμό που είναι κανονικός.
4. Η πράξη του γινομένου είναι προσεταιριστική, $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

7.5 Αναλλοίωτο των αγκυλών του Poisson σε κανονικούς μετασχηματισμούς στον συμπλεκτικό φορμαλισμό

Από τον ορισμό των αγκυλών Poisson Εξ. (7.114) προκύπτει ότι, η αγκύλη Poisson ως προς τις μεταβλητές $\boldsymbol{\eta}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$[u, \upsilon]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}\frac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \tag{7.150}$$

Οι θεμελιώδεις αγκύλες του Poisson, δηλαδή οι σχέσεις (9), (10) και (11) στο Εδάφιο 7.2 γράφονται

$$[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}]_{\eta} = \boldsymbol{J}. \tag{7.151}$$

Έστω οι μετασχηματισμένες μεταβλητές Q, P που στη συμπλεκτική μορφή παριστάνονται με το $\boldsymbol{\zeta}$. Προφανώς αν θέσουμε όπου u μια συνιστώσα του $\boldsymbol{\zeta}$ και όπου υ επίσης μια συνιστώσα του $\boldsymbol{\zeta}$, θα έχουμε σύμφωνα με την Εξ. (7.150) για κάθε ζεύγος ζ_k, ζ_r συνιστωσών τη σχέση

$$[\zeta_k, \zeta_r]_{\eta} = \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}\frac{\partial \zeta_r}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \tag{7.152}$$

Αυτή μπορεί να γραφτεί πιο συνοπτικά ως

$$[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}]_{\eta} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \tag{7.153}$$

Οι μερικές παράγωγοι στο δεύτερο μέλος ορίζουν την ιακωβιανή μήτρα του μετασχηματισμού, $\boldsymbol{M}$, Εξ. (7.129), επομένως η Εξ. (7.153) γίνεται

$$[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}]_{\eta} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} . \tag{7.154}$$

Αφού ο μετασχηματισμός $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\zeta}$ είναι κανονικός, ισχύει η συμπλεκτική συνθήκη, $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$ οπότε

$$[\zeta,\zeta]_{\eta} = \boldsymbol{J} . \tag{7.155}$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η Εξ. (7.155) τότε ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Οι Εξ. (7.151), (7.155) είναι οι θεμελιώδεις αγκύλες Poisson, σχέσεις (9), (10) και (11), σε συμπλεκτική μορφή. Προφανώς από την Εξ. (7.151) έχουμε

$$[\zeta,\zeta]_{\zeta} = \boldsymbol{J} . \tag{7.156}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι θεμελιώδεις αγκύλες Poisson έχουν την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τις κανονικές συντεταγμένες ως προς τις οποίες υπολογίστηκαν. Δηλαδή οι θεμελιώδεις αγκύλες Poisson είναι αναλλοίωτες σε κανονικούς μετασχηματισμούς.

Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες (7.155) και (7.156) για να είναι ένας μετασχηματισμός κανονικός μπορούν να γραφτούν ως

$$\begin{aligned} &\left[P_i, P_j\right] = 0, \left[Q_i, Q_j\right] = 0, \left[Q_i, P_j\right] = \delta_{ij} \\ &\left[q_i, q_j\right] = 0, \left[p_i, p_j\right] = 0, \left[q_i, p_j\right] = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{7.157}$$

Είδαμε από την Εξ. (7.154) ότι το αναλλοίωτο είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η μήτρα μετασχηματισμού $\boldsymbol{M}$ συμπλεκτική (δηλαδή για αυτήν ισχύει η συμπλεκτική συνθήκη $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$). Επομένως, το αναλλοίωτο των θεμελιωδών αγκυλών του Poisson είναι τελείως ισοδύναμο με τη συμπλεκτική συνθήκη για να είναι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων του χώρου των φάσεων κανονικός. Θα δείξουμε ότι κάθε αγκύλη Poisson είναι αναλλοίωτη σε κανονικούς μετασχηματισμούς. Πράγματι, για κανονικό μετασχηματισμό $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\zeta}$, έχουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} . \tag{7.158}$$

Επομένως οι αγκύλες Poisson της Εξ. (7.150) γίνονται

$$[u,\upsilon]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \frac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \tag{7.159}$$

Αφού ο μετασχηματισμός είναι κανονικός ισχύει η συμπλεκτική συνθήκη άρα

$$\left[u,\upsilon\right]_{\eta}=\left(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\,\frac{\partial\upsilon}{\partial\boldsymbol{\eta}}=\left(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\,\frac{\partial\upsilon}{\partial\boldsymbol{\zeta}}\overset{\mathrm{def}}{=}\left[u,\upsilon\right]_{\zeta}. \tag{7.160}$$

Επομένως οι αγκύλες Poisson είναι αναλλοίωτες σε κανονικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή είναι κανονικές αναλλοίωτες συναρτήσεις. Έχουν την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τις κανονικές μεταβλητές ως προς τις οποίες υπολογίζονται και δεν χρειάζεται στον συμβολισμό των αγκυλών να δηλώνονται συγκεκριμένες κανονικές μεταβλητές.

Είναι ευνόητο από τα παραπάνω ότι αναφερόμαστε σε (απλούς) κανονικούς μετασχηματισμούς και όχι σε εκτεταμένους κανονικούς μετασχηματισμούς. Στην περίπτωση των εκτεταμένων κανονικών μετασχηματισμών οι αγκύλες Poisson δεν είναι αναλλοίωτες αλλά πολλαπλασιάζονται επί λ κατά τον μετασχηματισμό, άρα διαφέρουν από μετασχηματισμό σε μετασχηματισμό. Σε αυτή την περίπτωση η Εξ. (7.155) και η Εξ. (7.160) γίνονται

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}]=\lambda\boldsymbol{J}\\&[u,\upsilon]_{\zeta}=\lambda[u,\upsilon]_{\eta}.\end{aligned} \tag{7.161}$$

Δηλαδή οι τιμές των αγκυλών δεν είναι οι ίδιες.

7.6 Αναλλοίωτα ολοκληρώματα του Poincare

Υπάρχει μια σειρά από ολοκληρώματα στον χώρο των φάσεων, που είναι κανονικά αναλλοίωτα. Ένας κανονικός μετασχηματισμός $\boldsymbol{\eta}\to\boldsymbol{\zeta}$ μετασχηματίζει ένα χώρο των φάσεων με συντεταγμένες $\boldsymbol{\eta}=(q,p)$ σε χώρο των φάσεων με συντεταγμένες $\boldsymbol{\zeta}=(Q,P)$.

Έστω το ολοκλήρωμα της Εξ. (7.162) σε ένα χωρίο Ω , στον αρχικό χώρο των φάσεων, που είναι ένα είδος υπερεπιφάνειας με διαστάσεις $2n$. Το πλήθος των διαστάσεων είναι αυτό του χώρου των φάσεων, οπότε μπορούμε να λέμε ότι πρόκειται για ολοκλήρωμα «όγκου».

$$\int_{\Omega}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2...\mathrm{d}p_n\,. \tag{7.162}$$

Ο μετασχηματισμός αυτού του ολοκληρώματος, με κάποιον μετασχηματισμό συντεταγμένων, οδηγεί σε ίσο ολοκλήρωμα στο μετασχηματισμένο χωρίο Ω' . Θα έχουμε τη γνωστή σχέση για τον μετασχηματισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{\Omega}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2...\mathrm{d}p_n=\int_{\Omega'}\left\|\boldsymbol{M}\right\|\mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2...\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2...\mathrm{d}P_n\,. \tag{7.163}$$

Όπου $\left\|\boldsymbol{M}\right\|$ είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας $\left|\boldsymbol{M}\right|$ της ιακωβιανής μήτρας μετασχηματισμού των συντεταγμένων, $\boldsymbol{M}$. Για κανονικό μετασχηματισμό ισχύει η συμπλεκτική συνθήκη

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}\,,$$

επομένως, παίρνοντας τις ορίζουσες και των δυο μελών, βρίσκουμε

$$\left|\boldsymbol{M}\right|^2\left|\boldsymbol{J}\right|=\left|\boldsymbol{J}\right|. \tag{7.164}$$

Έχουμε τη γνωστή σχέση $\left|\boldsymbol{J}\right|=1$ επομένως

$$\left|\boldsymbol{M}\right|^2=1, \quad \left|\boldsymbol{M}\right|=\pm 1, \quad \left\|\boldsymbol{M}\right\|=1 . \tag{7.165}$$

Άρα πραγματικά ισχύει

$$\int_{\Omega}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2...\mathrm{d}p_n=\int_{\Omega'}\mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2...\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2...\mathrm{d}P_n . \tag{7.166}$$

Δηλαδή το πολλαπλό ολοκλήρωμα (πολλαπλότητα $2n$)

$$J_n=\int_{\Omega}\mathrm{d}\eta=\int_{\Omega}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2...\mathrm{d}p_n \tag{7.167}$$

είναι αναλλοίωτο σε κανονικούς μετασχηματισμούς. Επειδή το χωρίο μπορεί να ληφθεί οσοδήποτε μικρό, κατά τα γνωστά, συμπεραίνουμε ότι το στοιχειώδες χωρίο είναι αναλλοίωτο σε κανονικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\zeta=\mathrm{d}\eta\\&\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2...\mathrm{d}p_n=\mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2...\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2...\mathrm{d}P_n.\end{aligned} \tag{7.168}$$

Το ολοκλήρωμα J_n είναι ένα από τα αναλλοίωτα σε κανονικούς μετασχηματισμούς ολοκληρώματα στον χώρο των φάσεων, που λέγονται αναλλοίωτα ολοκληρώματα του Poincare. Τα αναλλοίωτα ολοκληρώματα του Poincare είναι

$$\begin{aligned}J_1&=\int_{\Omega_2}\sum_{i=1}^{n}dq_idp_i\\J_2&=\int_{\Omega_4}\sum_{\substack{i,k=1\\i<k}}^{n}dq_idp_idq_kdp_k\\J_3&=\int_{\Omega_6}\sum_{\substack{i,k=1\\i<j<k}}^{n}dq_idp_idq_jdp_jdq_kdp_k\\&\;\;\vdots\\J_n&=\int_{\Omega_{2n}}dq_1dq_2...dq_ndp_1dp_2...dp_n\end{aligned} \tag{7.169}$$

Το J_1 είναι πολλαπλό ολοκλήρωμα σε «επιφάνεια» ή «όγκο» (χωρίο) διάστασης 2, το J_2 είναι σε «επιφάνεια» ή «όγκο» διάστασης 4, το J_3 είναι σε «επιφάνεια» ή «όγκο» διάστασης 6, και ούτω καθεξής, μέχρι το τελευταίο ολοκλήρωμα J_n που δεν έχει αθροίσματα και είναι σε «επιφάνεια» διάστασης $2n$, δηλαδή στον συνολικό «όγκο» του χώρου των φάσεων. Αυτοί οι όγκοι και επιφάνειες λέγονται και υπερεπιφάνειες.

7.7 Εξισώσεις κίνησης με αγκύλες Poisson

Ας ξεκινήσουμε από την πρώτη από τις Εξ. (7.111), χωρίς δείκτες, δηλαδή την Εξ. (7.170)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left[f,H\right] \tag{7.170}$$

και ας θέσουμε όπου f διαδοχικά τα q_i και p_i, οπότε βρίσκουμε τις Εξ. (7.171) που είναι οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton, δηλαδή έχουμε τις κανονικές εξισώσεις κίνησης με αγκύλες του Poisson.

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H] \tag{7.171}$$

Αν στην Εξ. (7.170) $f = H$, δηλαδή η χαμιλτονιανή, τότε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = \frac{\partial H}{\partial t} + 0 = \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \tag{7.172}$$

Αν η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο (ξαναβρίσκουμε το γνωστό αποτέλεσμα), τότε είναι σταθερά της κίνησης διότι

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{7.173}$$

Αν η f δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, και επιπλέον η αγκύλη Poisson με τη χαμιλτονιανή είναι μηδέν, τότε η f είναι σταθερά της κίνησης. Πράγματι από την Εξ. (7.112) ή την Εξ. (7.170), έχουμε τότε ότι

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \tag{7.174}$$

7.8 Απειροστοί κανονικοί μετασχηματισμοί και θεωρήματα διατήρησης

Ας θεωρήσουμε τον απειροστό κανονικό μετασχηματισμό, με μορφή γεννήτριας συνάρτησης F_2, που φαίνεται στην Εξ. (7.175). Το ε θεωρείται απειροστό.

$$\begin{aligned} &Q_i = q_i + \delta q_i, \quad P_i = p_i + \delta p_i \\ &F_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \varepsilon G(q, P, t) \\ &p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad P_i - p_i = \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ &Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad Q_i - q_i = \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i}. \end{aligned} \tag{7.175}$$

Οι ενδιαφέρουσες σχέσεις είναι οι

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad P_i = p_i + \delta p_i$$
$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{7.176}$$
$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}.$$

Έχουμε θεωρήσει ότι για απειροστές μεταβολές των p_i, ένεκα της συνέχειας της $G(q,P,t)$, μπορούμε να πούμε ότι $G(q,P,t) = G(q, p_i + \delta p_i, t) \approx G(q, p_i, t)$. Συνηθίζεται να λέγεται γεννήτρια συνάρτηση του (απειροστού) μετασχηματισμού εκτός της F_2 και η G.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή που φαίνεται στην Εξ. (7.177), όταν $G = H$, τότε

$$G = H(q,p,t), \quad \varepsilon = \mathrm{d}t$$
$$\delta q_i = \mathrm{d}t \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}q_i \tag{7.177}$$
$$\delta p_i = -\mathrm{d}t \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}p_i.$$

Δηλαδή η πραγματική κίνηση (μετατόπιση) του μηχανικού συστήματος σε στοιχειώδη χρόνο $\mathrm{d}t$, μπορεί να γίνει με απειροστό κανονικό μετασχηματισμό που έχει γεννήτρια, G, τη χαμιλτονιανή. Οι κανονικοί μετασχηματισμοί, όπως προαναφέραμε, αποτελούν ομάδα, άρα η πεπερασμένη μετατόπιση πραγματοποιείται με διαδοχικές απειροστές μετατοπίσεις αυτής της μορφής. Επομένως, η χαμιλτονιανή είναι η γεννήτρια της πραγματικής κίνησης στον χρόνο.

Έστω η περίπτωση μετασχηματισμού που φαίνεται στην Εξ. (7.178)

$$f = f(q,p,t), \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \ \ \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$
$$\delta f = f(q+\delta q, p+\delta p, t) - f(q,p,t)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \tag{7.178}$$
$$\delta f = \varepsilon \left[f, G \right].$$

Αν $f = H$, $\delta H = \varepsilon[H,G]$ και αν η G δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο και είναι και σταθερά της κίνησης, τότε εφόσον ισχύει γενικώς η σχέση

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + [G,H]$$

θα έχουμε $[G,H] = 0$, επομένως

$$\delta H = \varepsilon[H,G] \tag{7.179}$$
$$\delta H = 0.$$

Δηλαδή, οι δυναμικές συναρτήσεις που είναι σταθερές της κίνησης, αν δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο, είναι γεννήτριες απειροστών κανονικών μετασχηματισμών που αφήνουν την τιμή της χαμιλτονιανής αναλλοίωτη. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι, οι συναρτήσεις, οι οποίες είναι σταθερές της κίνησης που δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο, είναι οι γεννήτριες συναρτήσεις εκείνων των απειροστών μετασχηματισμών οι οποίοι αφήνουν την τιμή της χαμιλτονιανής ίδια (αναλλοίωτη).

Οι ιδιότητες συμμετρίας καθορίζουν ποιοι είναι οι μετασχηματισμοί που δεν μεταβάλλουν την τιμή της χαμιλτονιανής.

Αν το φυσικό σύστημα είναι συμμετρικό υπό ορισμένη διαδικασία μεταβολής , τότε (εννοούμε ότι) η τιμή της χαμιλτονιανής δεν θα μεταβάλλεται από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συμμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι μερικές φορές είναι δυνατόν να βρούμε όλες τις ανεξάρτητες σταθερές κίνησης (με την έννοια Lagrange) εξετάζοντας τις ιδιότητες συμμετρίας της χαμιλτονιανής. Αυτό θα μας οδηγήσει στην (πλήρη) λύση του συστήματος που έτσι γίνεται ευκολότερα.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα εύρεσης σταθερών της κίνησης εξετάζοντας τις συμμετρίες της χαμιλτονιανής. Αν η συντεταγμένη q_r είναι αγνοήσιμη, δηλαδή η χαμιλτονιανή, H , είναι ανεξάρτητη από αυτήν, τότε η H είναι αναλλοίωτη σε στοιχειώδη (απειροστό) κανονικό μετασχηματισμό της παρακάτω μορφής (πρόκειται για μετατόπιση μόνο ως προς την q_r)

$$\delta q_i = \varepsilon A(q,p,t)\delta_{ri},\ \delta p_i = 0\,. \tag{7.180}$$

Σύμφωνα με τις Εξ. (7.175), (7.176) αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να προκύψει από γεννήτρια της μορφής $G = G(p_r)$, διότι πράγματι τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0 \\
&\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}\delta_{ri} \\
&\text{ή } \delta q_i = 0 \ i \neq r\ , \quad \delta q_r = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_r}.
\end{aligned} \tag{7.181}$$

Αφού η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από το q_r , τότε κατά την παραπάνω μετατόπιση, δεν αλλάζει η τιμή της H άρα $\delta H = 0$. Έτσι από την Εξ. (7.179) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\delta H = 0 = \varepsilon [H, G(p_r)] \\
&[H, G(p_r)] = 0.
\end{aligned} \tag{7.182}$$

Δηλαδή κάθε συνάρτηση $G(p_r)$ της συζυγούς ορμής της αγνοήσιμης συντεταγμένης και η ίδια η συζυγής ορμή, είναι σταθερά της κίνησης. Δηλαδή βρίσκουμε το γνωστό αποτέλεσμα διατήρησης της συζυγούς ορμής.

Ας εξετάσουμε και τον απειροστό κανονικό μετασχηματισμό για απειροστή περιστροφή $\mathrm{d}\theta$ των σημείων του συστήματος περί τον άξονα z , αυτή είναι η λεγόμενη ενεργητική ερμηνεία της περιστροφής. Για περιστροφή των αξόνων περί τον άξονα z (παθητική ερμηνεία) ισχύουν οι γνωστές σχέσεις μεταξύ αρχικών x, y, z και τελικών συντεταγμένων X, Y, Z ,

$$\begin{aligned}
X &= x\cos\theta + y\sin\theta \\
Y &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\
Z &= z
\end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε στροφή των σημείων του συστήματος αυτό αντιστοιχεί σε αντικατάσταση του θ με $-\theta$. Τελικώς για απειροστή στροφή του συστήματος με σταθερούς τους άξονες συντεταγμένων θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&X_i = x_i - y_i \mathrm{d}\theta \\
&Y_i = y_i + x_i \mathrm{d}\theta \\
&Z_i = z_i \\
&\delta x_i = -y_i \mathrm{d}\theta, \quad \delta y_i = x_i \mathrm{d}\theta, \quad \delta z_i = 0.
\end{aligned} \tag{7.183}$$

Ανάλογα ισχύουν για τις συζυγείς ορμές

$$\delta p_{ix} = -p_{iy} \mathrm{d}\theta, \quad \delta p_{iy} = p_{ix} \mathrm{d}\theta, \quad \delta p_{iz} = 0. \tag{7.184}$$

Η κατάλληλη γεννήτρια αυτού του απειροστού μετασχηματισμού, δηλαδή απειροστής στροφής, με $\varepsilon = \mathrm{d}\theta$ είναι

$$G = \sum_{i=1}^{n} (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) \, . \tag{7.185}$$

Πράγματι αυτή δίνει τις προηγούμενες σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\delta x_i = \mathrm{d}\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -y_i \mathrm{d}\theta, \quad \delta y_i = \mathrm{d}\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i \mathrm{d}\theta, \quad \delta z_i = \mathrm{d}\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iz}} = 0 \\
&\delta p_{ix} = -\mathrm{d}\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -p_{iy} \mathrm{d}\theta, \quad \delta p_{iy} = -\mathrm{d}\theta \frac{\partial G}{\partial y_i} = p_{ix} \mathrm{d}\theta, \quad \delta p_{iz} = -\mathrm{d}\theta \frac{\partial G}{\partial z_i} = 0.
\end{aligned} \tag{7.186}$$

Το φυσικό νόημα αυτής της γεννήτριας είναι ότι ισούται με τη συνιστώσα z της γενικευμένης στροφορμής ως προς την αρχή των καρτεσιανών συντεταγμένων, $G = L_z$.

Έχουμε γενικώς,

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & z_i \\ p_{ix} & p_{iy} & p_{iz} \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_x \sum_{i=1}^{n} \left(y_i p_{iz} - z_i p_{iy} \right) + \vec{e}_y \sum_{i=1}^{n} \left(z_i p_{ix} - x_i p_{iz} \right) + \vec{e}_z \sum_{i=1}^{n} \left(x_i p_{iy} - y_i p_{ix} \right) \\
&= \vec{e}_x L_x + \vec{e}_y L_y + \vec{e}_z L_z
\end{aligned} \tag{7.187}$$

Αν η χαμιλτονιανή δεν μεταβάλλεται με την ανωτέρω περιστροφή τότε έχουμε, τις αντίστοιχες των Εξ. (7.182) σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\delta H = 0 = \varepsilon [H, L_z] \\
&[H, L_z] = 0.
\end{aligned} \tag{7.188}$$

Ισχύει $\dfrac{\partial L_z}{\partial t} = 0$, οπότε από τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial L_z}{\partial t} + [L_z, H]$ βρίσκουμε $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = 0$.

Δηλαδή η γενικευμένη στροφορμή L_z διατηρείται. Ο άξονας z είναι αυθαίρετος άρα για τυχαίο άξονα με μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}$ μπορούμε να γράψουμε $G=\vec{L}\cdot\vec{e}$. Υπάρχουν ενδιαφέροντα θεωρήματα, ανάλογα των αντίστοιχων κβαντικών για τις διάφορες συνιστώσες της στροφορμής και το μέτρο της. Όλα τα ανωτέρω μπορούν να αποδοθούν κομψά στον συμπλεκτικό φορμαλισμό.

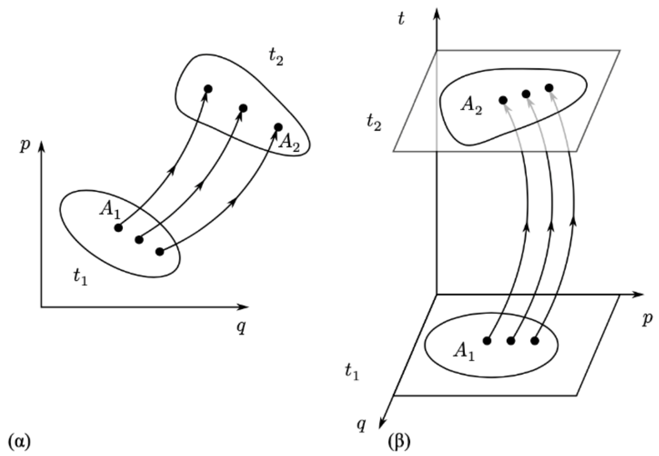
Μπορεί να δειχτεί ότι η αγκύλη Poisson για οποιεσδήποτε δυο από τις συνιστώσες της στροφορμής L_i (ή l_i) δεν είναι μηδέν. Ξέρουμε ότι η αγκύλη Poisson για δυο κανονικές μεταβλητές είναι μηδέν, οπότε συμπεραίνουμε ότι αν μια από αυτές τις συνιστώσες ληφθεί ως κανονική μεταβλητή οι δυο άλλες που είναι κάθετες προς αυτήν δεν μπορεί να ληφθούν ως κανονικές μεταβλητές μαζί με την πρώτη. Όμως οποιαδήποτε συνιστώσα της στροφορμής μπορεί να ληφθεί ως κανονική μεταβλητή μαζί με το τετράγωνο L^2 (ουσιαστικά το μέτρο) της στροφορμής, διότι μπορεί να δειχτεί ότι η αγκύλη Poisson του L^2, (ή l^2) με οποιαδήποτε καρτεσιανή συνιστώσα της στροφορμής ισούται με μηδέν. Αυτά έχουν τα αντίστοιχά τους στην κβαντομηχανική. Στην κβαντομηχανική αντίστοιχα των αγκυλών Poisson είναι οι (κβαντομηχανικοί) μεταθέτες. Το γεγονός ότι στην κλασική φυσική δεν μπορούν δυο συνιστώσες της στροφορμής να είναι συγχρόνως κανονικές γενικευμένες ορμές έχει το αντίστοιχό του στην κβαντομηχανική. Κανονικές ορμές μπορεί να είναι το τετράγωνο της στροφορμής και οποιαδήποτε καρτεσιανή συνιστώσα της. Τα αντίστοιχα στην κβαντομηχανική είναι ότι, δεν μπορούν δυο συνιστώσες της στροφορμής να έχουν συγχρόνως ιδιοτιμές, ενώ το τετράγωνο της στροφορμής με οποιαδήποτε καρτεσιανή συνιστώσα της στροφορμής μπορεί να έχουν ταυτόχρονα ιδιοτιμές.

Παραδείγματα – Ειδικά θέματα

1. Το Θεώρημα του Liouville

Έχουμε δει ότι η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος κατά την πραγματική του κίνηση μπορεί να παρασταθεί στον χώρο των φάσεων, που έχει $2n$ διαστάσεις, με μια καμπύλη. Επίσης μπορεί να παρασταθεί με μια καμπύλη στον χώρο των καταστάσεων που περιλαμβάνει και τον χρόνο μαζί με τις ανεξάρτητες μεταβλητές (συντεταγμένες) του χώρου των φάσεων, δηλαδή έχει διαστάσεις $2n+1$. Για διαφορετικές τιμές αυτών των μεταβλητών του χώρου των φάσεων, σε μια (αρχική) χρονική στιγμή, το ίδιο σύστημα διαγράφει διάφορες τροχιές σε καθέναν από τους δυο ανωτέρω χώρους.

Αν το σύστημα είναι αυτόνομο (δηλαδή η χαμιλτονιανή του δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο) τότε οι τροχιές στον χώρο των φάσεων δεν τέμνονται, εξαίρεση αποτελούν μερικά μεμονωμένα ανώμαλα σημεία, σημεία ισορροπίας. Αν το σύστημα δεν είναι αυτόνομο, τότε οι τροχιές στον χώρο των καταστάσεων δεν τέμνονται, με πιθανή εξαίρεση στα ανώμαλα σημεία. Το Σχ.(7.1) δείχνει τις δυο περιπτώσεις.



Σχήμα 7.1 *α) Φασικές καμπύλες αυτόνομου συστήματος. β) Καμπύλες στον χώροτων καταστάσεων μη αυτόνομου συστήματος.*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο (μια συλλογή, ensemble) από διαφορετικές (αρχικές) καταστάσεις ενός δυναμικού συστήματος που βρίσκονται σε μια περιοχή A_1, μια αρχική χρονική στιγμή t_1. Τη χρονική στιγμή t_2 η συλλογή αυτή θα βρίσκεται στην περιοχή A_2. Ανάλογα με το είδος του μηχανικού συστήματος χρησιμοποιούμε το Σχ.(7.1α) ή (7.1β) αντιστοίχως για αυτόνομο και μη αυτόνομο. Αφού οι καμπύλες δεν τέμνονται, κανένα σημείο της συλλογής δεν μπορεί να διασχίσει τις περικλείουσες τις περιοχές A κατά την εξέλιξη του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος ΔN των σημείων των περιοχών A_1, A_2 είναι το ίδιο. Όμως έχουμε δει ότι το στοιχείο «όγκου» του χώρου των φάσεων παραμένει αναλλοίωτο σε κανονικούς μετασχηματισμούς, Εξ. (7.168). Αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε στοιχείο όγκου με μικρές όλες τις διαστάσεις του, σε ένα σημείο στον χώρο των φάσεων, που περιέχει δεδομένο πλήθος καταστάσεων μια αρχική χρονική στιγμή, θα έχουμε ότι κατά την εξέλιξη του συστήματος αυτό παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή

$$\mathrm{d}\Omega_n = \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2...\mathrm{d}p_n = \mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2...\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2...\mathrm{d}P_n. \qquad (7.189)$$

Η εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος με τον χρόνο, περιγράφεται από κανονικό μετασχηματισμό, που είναι επαλληλία απειροστών κανονικών μετασχηματισμών, άρα κατά την εξέλιξη του συστήματος το $\mathrm{d}\Omega_n$ παραμένει σταθερό, παρόλο που μπορεί το σχήμα του να μεταβάλλεται. Αυτό είναι το θεώρημα του Liouville. Αν ορίσουμε ως πυκνότητα της συλλογής στον χώρο των φάσεων το μέγεθος $D = \dfrac{\Delta N}{\Delta\Omega_n}$, θα έχουμε ότι το D θα είναι σταθερό με τον χρόνο, δηλαδή είναι μια σταθερά της κίνησης, $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0$. Αν θεωρήσουμε την πυκνότητα αυτή ως συνάρτηση της θέσης στον χώρο των φάσεων και (άμεσα) του χρόνου, δηλαδή ως μια δυναμική συνάρτηση, $D = D(q, p, t)$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= [H, D]. \end{aligned} \tag{7.190}$$

Η άμεση εξάρτηση αυτής της πυκνότητας από τον χρόνο, σημαίνει ότι σε δεδομένο σταθερό σημείο στον χώρο των φάσεων, δηλαδή για q, p σταθερά, το $D(q, p, t)$ μεταβάλλεται με τον χρόνο. Τα ανωτέρω βρίσκουν εφαρμογή στη Στατιστική Μηχανική. Είναι δύσκολο αν έχουμε ένα δυναμικό σύστημα αποτελούμενο από μεγάλο πλήθος (της τάξης των 10^{23}) δομικών λίθων (σωμάτια) να μελετήσουμε την κίνηση του συστήματος με ένα τεράστιο πλήθος συντεταγμένων. Εκτός των άλλων, μας είναι αδύνατο να έχουμε τις αρχικές συντεταγμένες του συστήματος στον χώρο των φάσεων. Έτσι περιγράφουμε το σύστημα μέσα στα πλαίσια της Στατιστικής Φυσικής (Μηχανικής), όπου ενδιαφερόμαστε για μακροσκοπικά μεγέθη που είναι μέσες τιμές μικροσκοπικών μεγεθών. Η μεθοδολογία είναι να εξετάσουμε την εξέλιξη μεγάλου αριθμού συλλογών (με διαφορετικές γειτονικές αρχικές συνθήκες) του μηχανικού συστήματος. Η κάθε συλλογή είναι ένα σμήνος σημείων σε μια πολύ μικρή περιοχή στον χώρο των φάσεων, κάποια χρονική στιγμή. Από την Εξ. (7.190) συμπεραίνουμε ότι αν το εξεταζόμενο (θερμοδυναμικό) σύστημα σωματίων βρίσκεται σε στατιστική ισορροπία, τότε σε δεδομένο σταθερό σημείο στον χώρο των φάσεων η πυκνότητα D δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλαδή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο. Έχουμε

$$\begin{gathered} D = D(q, p), \quad \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \\ [H, D] = 0. \end{gathered} \tag{7.191}$$

2. Απλά παραδείγματα κανονικών μετασχηματισμών

Ας θεωρήσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $F_2(q, P, t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(q, t) P_i + g(q, t)$. Οι συναρτήσεις $f(q, t),\ g(q, t)$ είναι αυθαίρετες. Ξέρουμε ότι ισχύουν

$$Q_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i} \ .$$

Στην περίπτωσή μας αυτό οδηγεί στη σχέση

$$Q_i = f_i(q, t) \ .$$

Παρατηρούμε ότι οι νέες συντεταγμένες θέσεις εξαρτιόνται μόνο από τις παλιές συντεταγμένες θέσης και τον χρόνο και όχι από τις παλιές ορμές. Αυτό σημαίνει πως η παραπάνω γεννήτρια είναι γεννήτρια σημειακού μετασχηματισμού. Εφόσον τα $f(q, t), g(q, t)$ είναι αυθαίρετα κάθε σημειακός μετασχηματισμός μπορεί να παραχθεί από μια κατάλληλη γεννήτρια της παραπάνω μορφής, οπότε κάθε σημειακός μετασχηματισμός είναι κανονικός. Οι άλλες σχέσεις που ισχύουν είναι

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i}, \text{ οπότε } p_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(q, t)}{\partial q_i} P_j + \frac{\partial g(q, t)}{\partial q_i} \ .$$

Από αυτές με αντιστροφή βρίσκονται τα $P_i = P_i(q, p, t)$.

Ειδική περίπτωση είναι όταν $g(q,t)=0,\ f_j(q,t)=q_j$. Τότε έχουμε τον μετασχηματισμό – μονάδα , δηλαδή

$$P_i = p_i,\ Q_i = q_i .$$

Ένας άλλος μετασχηματισμός είναι ο μετασχηματισμός με γεννήτρια την $F_3(p,Q)=\sum_{j=1}^{n} p_j Q_j$. Αυτή οδηγεί στον μετασχηματισμό όπου αλλάζει το πρόσημο των μεταβλητών. Έχουμε τις σχέσεις $q_i = -\dfrac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_i},\ P_i = -\dfrac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_i}$, επομένως πράγματι βρίσκουμε $Q_i=-q_i,\ P_i=-p_i$.

Η γεννήτρια συνάρτηση πρώτου είδους $F_1(q,Q,t)$, με τη συγκεκριμένη μορφή, $F_1(q,Q)=\sum_{j=1}^{n} q_j Q_j$, από τις γνωστές σχέσεις $p_i = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i},\ P_i = -\dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i}$, γεννά τον μετασχηματισμό $Q_i = p_i,\ P_i = -q_i$. Τώρα οι νέες συντεταγμένες θέσης είναι ίδιες με τις παλιές ορμές και οι νέες ορμές είναι ίδιες με τις παλιές θέσεις με αλλαγμένο πρόσημο. Μπορείτε να δείξετε ότι και η γεννήτρια $F_4(p,P)=\sum_{j=1}^{n} p_i P_i$ γεννά τον ίδιο μετασχηματισμό. Αυτό δείχνει ότι η διάκριση μεταξύ συντεταγμένων θέσης και ορμών είναι κάπως τεχνητή. Οι ορμές και οι «θέσεις» είναι ανεξάρτητα σύνολα μεταβλητών. Χρειάζονται και τα δυο για την περιγραφή της κίνησης στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό.

Μπορούμε να καταλάβουμε ότι αυτός είναι κανονικός μετασχηματισμός και από τις εξισώσεις Hamilton $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i},\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$. Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε τα αρχικά p_i με τα q_i, οι εξισώσεις παραμένουν στην κανονική τους μορφή αν και τα αρχικά $-p_i$ αντικαταστήσουν τα q_i. Δηλαδή αυτός ο μετασχηματισμός της (σχεδόν) εναλλαγής των μεταβλητών μέσα σε κάθε ένα ζευγάρι q_i, p_i είναι πράγματι κανονικός. Η γεννήτρια $F_{12}=q_1P_1+q_2Q_2$ είναι μικτού τύπου, F_1 και F_2 και οδηγεί στον μετασχηματισμό $Q_1=q_1,\ P_1=p_1,\ \ Q_2=p_2,\ P_2=-q_2$.

3. Χαμιλτονιανός φορμαλισμός με δεσμούς - Αγκύλες του Dirac.

Ο συνήθης φορμαλισμός του Hamilton της Αναλυτικής Δυναμικής, προϋποθέτει ότι οι μεταβλητές του χώρου των φάσεων q, p είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, δεν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ τους. Αυτό δεν είναι πάντα αληθές. Ακόμη και όταν δεν υπάρχουν (ολόνομες) δεσμευτικές σχέσεις στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, από όπου μπορούμε να ξεκινήσουμε για να καταλήξουμε στον χαμιλτονιανό, μπορεί να υπάρξουν τέτοιες δεσμευτικές σχέσεις στον χαμιλτονιανό. Αυτό γίνεται για ιδιάζουσες (γενικευμένες) λαγκρανζιανές οι οποίες έχουν γραμμική εξάρτηση ως προς μερικές γενικευμένες ταχύτητες. Ακόμη χειρότερα μπορεί να μην υπάρχουν καθόλου κάποιες ταχύτητες. Λαγκρανζιανές με γραμμική εξάρτηση από ταχύτητες απαντούν στη θεωρία πεδίων για σωματίδια. Για την ακρίβεια, πρόκειται για λαγκρανζιανές πυκνότητες. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η λαγκρανζιανή πυκνότητα από την οποία προκύπτει η (σχετικιστική) εξίσωση Dirac για ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια. Αυτές είναι και οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις για τη Φυσική με δεσμούς στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Η εφαρμογή της συνήθους χαμιλτονιανής μεθόδου σε αυτή την περίπτωση οδηγεί σε ασυνέπειες (σε αντιφάσεις). Συνοψίζουμε ότι ο συνήθης χαμιλτονιανός φορμαλισμός δεν επαρκεί σε διάφορες περιπτώσεις που είναι: α) Όταν η λαγκρανζιανή είναι το πολύ γραμμική ως προς τουλάχιστον μια συντεταγμένη θέσης. β) Όταν υπάρχουν επιπλέον (περιττοί) βαθμοί ελευθερίας τύπου βαθμίδας (gauge), ουσιαστικά όταν υπάρχουν άλλοι αφύσικοι βαθμοί που πρέπει να «εξαλειφτούν» (fixed). Σημειώνουμε ότι οι θεωρίες στοιχειωδών σωματιδίων είναι αυτού του τύπου και λέγονται θεωρίες βαθμίδας (gauge theories). γ) Όταν υπάρχουν άλλοι δεσμοί που θέλουμε να επιβάλουμε.

Η μεθοδολογία του Dirac όπου λαμβάνονται υπόψη οι δεσμευτικές σχέσεις στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, οδηγεί στη (σωστή) λύση τέτοιων προβλημάτων. Ο Dirac ενδιαφερόταν για την κβάντωση συστημάτων με δεσμούς ξεκινώντας από τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό της Κλασικής Φυσικής. Όταν δεν υπάρχουν δεσμοί, η κβάντωση γίνεται με χρήση της συνήθους χαμιλτονιανής και μπορεί να χρησιμοποιηθούν αγκύλες Poisson. Υπάρχουν συγκεκριμένοι κανόνες που μας οδηγούν από τη δυναμική του Hamilton στην κβαντική δυναμική. Στην περίπτωση με δεσμούς η συνήθης μεθοδολογία οδηγεί και σε αυτή την περίπτωση σε αντιφάσεις. Η χρήση των αγκυλών Dirac λύνει το πρόβλημα. Οι αγκύλες Dirac που είναι γενίκευση των αγκυλών Poisson, έχουν τις ίδιες ιδιότητες με αυτές του Poisson και χρησιμοποιούνται με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούνται οι αγκύλες Poisson στην κανονική περίπτωση χωρίς δεσμούς. Με αφορμή ένα απλό παράδειγμα το οποίο αναφέρεται στη βιβλιογραφία που παραθέτουμε, θα αναπτύξουμε τη μεθοδολογία του Dirac και θα δούμε την αναγκαιότητά της για να οδηγηθούμε στις σωστές εξισώσεις κίνησης και σε σωστή κβάντωση, δηλαδή με συνέπεια, χωρίς αντιφάσεις.

Μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις εργασίες του Dirac και άλλων για μια πιο αυστηρή και πλήρη θεώρηση του αντικειμένου. Παρόλο που η κβάντωση που ενδιαφέρει είναι αυτή που αναφέρεται σε πεδία, θα ασχοληθούμε με τον φορμαλισμό για διακριτά συστήματα. Θεωρούμε ότι το σύστημα που εξετάζουμε είναι λαγκρανζιανό, αν δεν είναι αλλά υπάρχουν ολόνομοι δεσμοί μπορούμε να τροποποιήσουμε την αρχική λαγκρανζιανή με πολλαπλασιαστές Lagrange, μέθοδος του πολλαπλασιασμού. Στη νέα λαγκρανζιανή εισάγονται ως επιπλέον γενικευμένες συντεταγμένες οι πολλαπλασιαστές Lagrange, που είναι προς προσδιορισμό συναρτήσεις του χρόνου. Έτσι έχουμε λαγκρανζιανή χωρίς δεσμούς, λαγκρανζιανό σύστημα και προχωρούμε.Άλλος τρόπος να προχωρήσουμε είναι να εκφράσουμε κάποιες από τις συντεταγμένες (μεταβλητές) συναρτήσει των υπόλοιπων, να τις αντικαταστήσουμε στην αρχική λαγκρανζιανή οπότε και πάλι έχουμε τελική λαγκρανζιανή χωρίς δεσμούς. Δηλαδή καταλήγουμε σε λαγκρανζιανό σύστημα. Η άλλη διαδικασία είναι να γράψουμε τη λαγκρανζιανή χωρίς δεσμούς και να σημειώσουμε τους ολόνομους δεσμούς. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τη χαμιλτονιανή από τη λαγκρανζιανή και στους δεσμούς που μπορεί να προκύψουν επισυνάπτουμε και τους αρχικούς ολόνομους δεσμούς.

Α) Σύστημα που έχει λαγκρανζιανή γραμμική ως προς όλες τις ταχύτητες

Αυτή η περίπτωση ανήκει στις πολύ ενδιαφέρουσες περιπτώσεις από πλευράς Φυσικής.

Θεωρούμε φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο που μπορεί να κινείται μη σχετικιστικά στο επίπεδο x, y κάθετο στη διεύθυνση του πεδίου B_0. Η λαγκρανζιανή του σωματιδίου με καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$L = \frac{1}{2} m\vec{\upsilon}^2 + e_q \vec{A}\cdot\vec{\upsilon} - V(x, y).$$

Το $V(x, y)$ είναι δεδομένο εξωτερικό δυναμικό (δυναμική συνάρτηση).

Μπορούμε να γράψουμε για το διανυσματικό δυναμικό,

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x).$$

Επομένως,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{e_q B_0}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x, y).$$

Θέτουμε $K = \dfrac{e_q B_0}{2}$, οπότε βρίσκουμε:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + K(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x, y)$$

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι το K είναι αρκετά μεγάλο, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι πολύ μεγάλο, η μάζα είναι πολύ μικρή έτσι που να μπορεί να παραληφθεί ο όρος της κινητικής ενέργειας, τότε η λαγκρανζιανή γίνεται γραμμική ως προς τις ταχύτητες. Έχουμε

$$L = K(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x,y).$$

Από τις εξισώσεις Lagrange βρίσκουμε, χωρίς κανένα πρόβλημα αφού δεν υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις, τις σωστές εξισώσεις κίνησης, δηλαδή τις

$$\dot{y} = \frac{1}{2K}\frac{\partial V}{\partial x},\ \dot{x} = -\frac{1}{2K}\frac{\partial V}{\partial y}$$

Παρόλο που δε χρειάζεται στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, υπολογίζουμε τις συζυγείς ορμές, αυτές είναι

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -Ky,\ \ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = Kx.$$

Στη συνέχεια σε συνδυασμό με τις προηγούμενες, βρίσκουμε ότι

$$\dot{p}_x = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x},\ \dot{p}_y = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Αυτές οι τέσσερεις σχέσεις που προήλθαν από τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, είναι οι σωστές σχέσεις.

Ας επιχειρήσουμε στη συνέχεια να κάνουμε χρήση του χαμιλτονιανού φορμαλισμού. Θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Legendre, όπως φαίνεται στο Παράρτημα Π5, όταν η συνάρτηση, που εδώ είναι η λαγκρανζιανή, είναι γραμμική ως προς τις ταχύτητες. Θα υπολογίσουμε μια αρχική χαμιλτονιανή, που μερικοί ονομάζουν απλοϊκή χαμιλτονιανή, από τη γνωστή σχέση

$$H(x,p_x,y,p_y,\dot{x},\dot{y}) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L(x,\dot{x},y,\dot{y}).$$

Απαλείφουμε τις ταχύτητες με χρήση του ορισμού των συζυγών ορμών, οπότε βρίσκουμε

$$H(x,y,p_x,p_y) = H(x,y) = V(x,y).$$

Οι ορμές έχουν εξαφανιστεί από τη χαμιλτονιανή. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή την απλοϊκή χαμιλτονιανή και γράψουμε τις εξισώσεις Hammilton, βρίσκουμε λάθος εξισώσεις, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = 0,\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = 0$$
$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x},\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Αυτές είναι διαφορετικές από τις προηγούμενες που βρήκαμε με τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, οι οποίες ήταν οι σωστές. Επομένως οι τελευταίες είναι λάθος. Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό των συζυγών ορμών, τότε από τις δυο τελευταίες θα βρούμε τις

$$\dot{y} = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial x},\ \dot{x} = -\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial y}$$

που είναι μάλιστα διαφορετικές από τις δυο πρώτες του χαμιλτονιακού φορμαλισμού, δηλαδή είναι πολλά τα λανθασμένα εξαγόμενα, υπάρχει ασυνέπεια.

Τώρα θα λύσουμε σωστά το πρόβλημα κάνοντας χρήση των ιδεών του Dirac, που σημαίνει ότι λαμβάνουμε υπόψη σωστά την ύπαρξη δεσμευτικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών του χώρου των φάσεων. Σημειώνουμε ότι παρόλο που ξεκινήσαμε χωρίς δεσμούς στον φορμαλισμό Lagrange, στον φορμαλισμό Hamilton προκύπτουν δεσμευτικές σχέσεις όπως φαίνεται στη συνέχεια. Πράγματι, κατά τον ορισμό των συζυγών ορμών οι ταχύτητες δεν υπάρχουν στις σχέσεις που βρήκαμε, οι σχέσεις που προκύπτουν είναι,

$$p_x + Ky = 0, \;\; p_y - Kx = 0.$$

Αυτές όμως είναι δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του χώρου των φάσεων (x, y, p_x, p_y).

Αναφέρουμε δυο λόγια για το σύμβολο $\approx$ που χρησιμοποιείται στη μεθοδολογία Dirac. Παρόλο που το σύμβολο $\approx$ έχει καθιερωθεί ως το σύμβολο για το περίπου ίσο, εδώ σημαίνει «ασθενής ισότητα» (weak equality), σε αντίθεση με την ισχυρή (strong) ισότητα =. Ασθενής ισότητα μεταξύ δυο παραστάσεων $f \approx g$ σημαίνει ότι είναι ίσες μόνο όταν πληρούνται οι υπάρχουσες δεσμευτικές σχέσεις στον φασικό χώρο διάστασης $2n$, δηλαδή δεν είναι ίσες παρά μόνο στον περιορισμένο φασικό χώρο που καθορίζουν οι δεσμευτικές σχέσεις, ο οποίος στο παραπάνω παράδειγμα έχει διάσταση $2n-M$. Είναι ισχυρά ίσες $f = g$, αν είναι ίσες ανεξάρτητα από τις δεσμευτικές σχέσεις. Ισχύουν δηλαδή σε όλο τον φασικό χώρο. Στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό οι ασθενείς ισότητες θα ληφθούν υπόψη (θα ισχύουν) αφού βρεθούν οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης, ή ισοδύναμα αφού υπολογιστούν οι αγκύλες Poisson, όχι προηγουμένως. Δε φαίνεται να υπάρχει ενιαίος συμβολισμός για τα παραπάνω είδη ισοτήτων, για παράδειγμα, ο Dirac αρχικά χρησιμοποίησε το σύμβολο = για την ασθενή ισότητα και το σύμβολο $\equiv$ (που έχει καθιερωθεί για το ταυτοτικά ίσο) για την ισχυρή. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε εμείς εδώ φαίνεται να είναι ο επικρατέστερος.

Οι παραπάνω δεσμοί λέγονται πρωτογενείς (πρωτεύοντες) δεσμοί. Πρωτογενείς είναι δεσμοί που προκύπτουν από τις εξισώσεις ορισμού των συζυγών ορμών ή επιλέγονται ως επί πλέον δεσμοί στον χώρο των φάσεων από την αρχή. Σε ό, τι ακολουθεί, οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες σημαίνουν άθροιση.

Στην αρχή θα προχωρήσουμε με μια κάπως γενική θεώρηση του προβλήματος. Έστω λαγκρανζιανή της γενικής μορφής, $L = L(q,\dot{q})$, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν δεσμοί στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό. Μπορούμε να συνεχίσουμε εξισώνοντας την έκφραση $\delta H(q,\dot{q},p)$ που εμφανίζεται όταν εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Legendre με την έκφραση για τη χαμιλτονιανή $\delta H(q,p)$. Αυτός είναι ο πιο εύκολος τρόπος. Όμως θα ακολουθήσουμε μέθοδο που χρησιμοποιεί την τροποποιημένη αρχή Hamilton. Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα στην τροποποιημένη αρχή Hamilton, είναι $f(q,p,\dot{q},\dot{p}) = p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q})$.

Ισχύουν $p_i = \dfrac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}, \;\; i = 1,2,...,n$.

Σημειώνουμε και το $\dot{p}$ παρόλο που δεν υπάρχει. Η τροποποιημένη αρχή Hamilton είναι:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta f(q,p,\dot{q},\dot{p})\mathrm{d}t = 0$$

Υπολογίζουμε τη δυνατή μεταβολή $\delta f(q,p,\dot{q},\dot{p})$:

$$\delta f(q,p,\dot{q},\dot{p}) = \dot{q}\delta p_i + p_i\delta\dot{q}_i - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}\delta p_i .$$

Το ολοκλήρωμα αφού ληφθούν υπόψη οι γνωστές συνοριακές συνθήκες με τις οποίες απαλείφεται το ολοκλήρωμα συνόρου, γίνεται:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta q_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)+\delta p_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\right]\mathrm{d}t=0\,.$$

ή

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta q_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)+\delta p_i\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\right]\mathrm{d}t=0\,.$$

Όπως είπαμε, από τις σχέσεις ορισμού των συζυγών ορμών $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, μπορεί να προκύψουν μερικές δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ κάποιων q, p, έστω $\varphi_m(q,p)=0\;\; m=1,2,...,M$, πρωτογενείς δεσμοί. Αυτό σημαίνει ότι τα $\delta q, \delta p$ δεν είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επομένως δε μπορούμε να θεωρήσουμε μηδέν την κάθε μια παρένθεση χωριστά. Η ιδέα του Dirac ήταν να ανεξαρτητοποιήσουμε τις ανωτέρω μεταβολές με μέθοδο παρόμοια με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange που χρησιμοποιούμε στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, έχουμε

$$\delta\varphi_m(q,p)=\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}\delta p_i=0\;\; m=1,2,...,M\;\;.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί έναν συντελεστή u_m την κάθε μια από αυτές και αθροίζουμε , οπότε βρίσκουμε

$$u_m\delta\varphi_m(q,p)=u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}\delta q_i+u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}\delta p_i=0\; m=1,2,...,M.$$

Τα u_m είναι πολλαπλασιαστές που πρέπει να υπολογιστούν, όμως δεν είναι κατ' ανάγκη συναρτήσεις των q, p, μπορεί να εξαρτώνται και από ταχύτητες που σύμφωνα με τα προηγούμενα δεν μπόρεσαν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των q, p.

Προσθέτουμε την τελευταία παράσταση, που είναι μηδέν, στην υπό ολοκλήρωση έκφραση του τελευταίου ολοκληρώματος,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta q_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}+u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}\right)+\delta p_i\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}+u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}\right)\right]\mathrm{d}t=0\,.$$

Με τη γνωστή διαδικασία καταλήγουμε στις τελικές σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_i=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}+u_m\frac{\partial \varphi_m(q,p)}{\partial p_i}\\
&\dot{p}_i=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}-u_m\frac{\partial \varphi_m(q,p)}{\partial q_i}\quad i=1,2,...,n\\
&\varphi_m(q,p)=0\;\; m=1,2,...,M\quad .
\end{aligned}$$

Οι πρωτογενείς δεσμοί είναι M το πλήθος. Θα προχωρήσουμε κάνοντας χρήση αγκυλών Poisson. Όπως είπαμε προηγουμένως, τα u_k μπορεί να μην είναι συναρτήσεις μόνο των q, p αλλά και ταχυτήτων, επομένως δεν υπάρχει τρόπος υπολογισμού αγκυλών Poisson αυτών των μεγεθών (ποσοτήτων). Παρόλα αυτά σχηματίζουμε (δηλώνουμε) τέτοιες αγκύλες Poisson υποθέτοντας ότι επεκτείνουμε τις ιδιότητες των συνήθων αγκυλών Poisson ώστε να ισχύουν και για αυτές τις μη υπολογίσιμες αγκύλες Poisson. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

1. Αντισυμμετρία $[f,g]=-[g,f]$
2. Γραμμικότητα $[f_1+f_2,g]=[f_1,g]+[f_2,g]$
3. Κανόνας πολλαπλασιασμού $[fg,h]=[f,h]g+f[g,h]$
4. Ταυτότητα Jacobi $\left[f,[g,h]\right]+\left[h,[f,g]\right]+\left[g,[h,f]\right]=0.$

Τώρα εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι με χρήση των αγκυλών Poisson, οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης γράφονται,

$$\dot{q}_i \approx [q_i,H]+u_m[q_i,\varphi_m]$$
$$\dot{p}_i \approx [p_i,H]+u_m[p_i,\varphi_m] \quad m=1,2,\ldots,M.$$

Τονίζουμε ξανά ότι, κατά τους υπολογισμούς εμφανίζονται όροι που δεν ορίζονται, αλλά επειδή είναι της μορφής $[q_i,u_m]\varphi_m$ είναι ασθενικά μηδέν, γι' αυτό μηδενίζονται στο τελικό αποτέλεσμα.

Για κάθε $f=f(q,p)$ έχουμε $\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \; i=1,2,\ldots,n$. Χρησιμοποιούμε τις προτελευταίες εξισώσεις κίνησης οπότε έχουμε: $\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i}+u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}\right\}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\left\{-\frac{\partial H}{\partial q_i}-u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}\right\}$, μετά από αναδιάταξη των όρων βρίσκουμε

$$\dot{f}\approx[f,H]+u_m[f,\varphi_m] \quad m=1,2,\ldots,M.$$

Δηλαδή ισχύει η ίδια σχέση που ισχύει για τα q, p. Αυτή είναι πιο γενική και περιλαμβάνει τις σχέσεις για τα q, p ως ειδικές περιπτώσεις. Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί και αυτή στη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{f}&\approx[f,H+u_m\varphi_m]=[f,H]+[f,u_m\varphi_m]\\&=[f,H]+[f,u_m]\varphi_m+u_m[f,\varphi_m]\approx[f,H]+u_m[f,\varphi_m]\end{aligned}$$

Η αγκύλη στον όρο $[f,u_m]\varphi_m$ δεν ορίζεται, παρόλα αυτά στο τελευταίο βήμα έγινε, όπως και προηγουμένως, χρήση του γεγονότος ότι $\varphi_m\approx 0$, οπότε αυτός ο όρος μηδενίζεται. Όπως λέμε, οι αγκύλες Poisson δεν «σέβονται» τους δεσμούς, επομένως πρώτα πρέπει να υπολογίζουμε τις αγκύλες Poisson και μετά να χρησιμοποιούμε τους δεσμούς.

Τα τελευταία μας οδηγούν στο να θεωρήσουμε την τροποποιημένη (λεγόμενη ολική) χαμιλτονιανή $H_{\mathrm{T}}=H+u_m\varphi_m,\; m=1,2,\ldots,M$, τότε προφανώς ισχύει

$$\dot{f}\approx[f,H_{\mathrm{T}}]\approx[f,H]+u_m[f,\varphi_m],\quad m=1,2,\ldots,M.$$

Στη συνέχεια ακολουθούμε τη διαδικασία των Dirac και Bergman, σύμφωνα με αυτήν, τα φ_m, (που είναι οι πρωτογενείς δεσμοί) απαιτούμε να ικανοποιούν τις λεγόμενες συνθήκες συνέπειας (consistency conditions).

Συγκεκριμένα, πρέπει οι δεσμοί να ικανοποιούνται κάθε χρονική στιγμή έστω και ασθενικά. Αυτό σημαίνει, $\dot{\varphi}_i \approx 0$ δηλαδή $\dot{\varphi}_i = \left[\varphi_i, H_\mathrm{T}\right] = \left[\varphi_i, H\right] + u_m\left[\varphi_i, \varphi_m\right] \approx 0,\ \ m = 1,2,\ldots,M\ \ i = 1,2,\ldots,M$. Όπως προηγου-μένως, οι όροι $\left[\varphi_i, u_m\right]\varphi_m$ στο τέλος έχουν μηδενιστεί.

Αυτή η διαδικασία για τους πρωτογενείς δεσμούς, μπορεί να οδηγήσει στις εξής περιπτώσεις για τον κάθε έναν δεσμό:

1) Σε εξίσωση που είναι ασυνεπής, π.χ. 1=0. Αυτό σημαίνει ότι η λαγκρανζιανή δεν είναι αποδεκτή, οδηγεί σε ασυνεπείς εξισώσεις κίνησης. Η λαγκρανζιανή δε μπορεί να είναι τελείως αυθαίρετη αλλά πρέπει να είναι τέτοια που να μην οδηγεί σε ασυνέπειες.
2) Σε εξίσωση που είναι ταυτότητα 0=0, ίσως ασθενικά.
3) Εξίσωση που δεν περιέχει u_k οπότε είναι δεσμός μεταξύ των q, p. Αυτός είναι νέος διαφορετικός δεσμός αν δεν σχετίζεται με τους πρωτογενείς δεσμούς, αν σχετίζεται στην ουσία ανήκει σε αυτούς. Τέτοιοι δεσμοί λέγονται δευτερεύοντες ή δευτερογενείς δεσμοί.
4) Εξίσωση που περιέχει τα u_k, δηλαδή είναι δεσμευτική μεταξύ των u_k.

Έστω ότι με την ανωτέρω διαδικασία για τους M πρωτογενείς δεσμούς, προέκυψαν M_1 δευτερογενείς δεσμοί και $M - M_1$ δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των u_k. Τώρα έχουμε $J_1 = M + M_1$ δεσμούς, πρωτογενείς και δευτερογενείς. Πρέπει να ισχύουν για όλους ίδιες συνθήκες συνέπειας όπως για τους πρωτογενείς, δηλαδή θα έχουμε και για τους πρόσθετους (δευτερογενείς) δεσμούς τις σχέσεις

$$\dot{\varphi}_i \approx 0,\ \ \text{δηλαδή}\ \ \dot{\varphi}_i = \left[\varphi_i, H_\mathrm{T}\right] = \left[\varphi_i, H\right] + u_m\left[\varphi_i, \varphi_m\right] \approx 0,\ \ m = 1,2,\ldots,M\ \ i = M+1, M+2,\ldots,J_1 .$$

Επαναλαμβάνουμε την ανωτέρω διαδικασία με την H_T ώσπου να μην προκύπτουν νέοι δευτερογενείς δεσμοί, αλλά μόνο δεσμευτικές σχέσεις για τα u_m. Έστω ότι προέκυψαν συνολικά M' δευτερογενείς δεσμοί. Το σύνολο J των δεσμών θα είναι το άθροισμα του πλήθους των πρωτογενών και των δευτερογενών δεσμών, $J = M + M'$. Όλοι αυτοί οι δεσμοί θα παριστάνονται με το ίδιο σύμβολο, έχουμε $\varphi_i \approx 0,\ \ i = 1,2,\ldots,J$. Οι τελικές δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των $u_m,\ m = 1,2,\ldots,M$, είναι

$$\dot{\varphi}_i \approx 0,\ \ \text{οπότε}\ \ \dot{\varphi}_i = \left[\varphi_i, H_\mathrm{T}\right] = \left[\varphi_i, H\right] + u_m\left[\varphi_i, \varphi_m\right] \approx 0,\ \ m = 1,2,\ldots,M\ \ i = 1,2,\ldots,J .$$

Οι αγκύλες Poisson $\left[\varphi_i, \varphi_m\right]$ αποτελούν μια μήτρα $J \times M$, όπου γενικώς $M < J$.

Από τις τελευταίες σχέσεις θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τους αγνώστους συντελεστές u_m. Έχουμε γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με J το πλήθος εξισώσεις και M αγνώστους u_m προς προσδιορισμό, δηλαδή:

$$\left[\varphi_i, H\right] + u_m\left[\varphi_i, \varphi_m\right] \approx 0,\ \ m = 1,2,\ldots,M\ \ i = 1,2,\ldots,J .$$

Η λύση του συστήματος χρειάζεται η χρήση της θεωρίας συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Εδώ θα σκιαγραφήσουμε τη διαδικασία. Πρέπει το πλήρες, το μη ομογενές σύστημα, να έχει λύση αλλιώς η λαγκρανζιανή δεν είναι αποδεκτή. Έστω η λύση είναι της μορφής $U_m(q,p),\ m = 1,2,\ldots,M$. Αν το ομογενές σύστημα $u_m\left[\varphi_i, \varphi_m\right] \approx 0,\ \ m = 1,2,\ldots,M\ \ i = 1,2,\ldots,J$ δεν έχει άλλη λύση εκτός της τετριμμένης μηδενικής, τότε μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως τα u_m αφού ισχύει για τη λύση $u_m = U_m(q,p)$. Κατόπιν, από τις εξισώσεις κίνησης για τα q, p με αγκύλες Poisson ή χωρίς αυτές τις αγκύλες, προσδιορίζονται πλήρως τα $q_i = q_i(t),\ p_i = p_i(t)$. Αν το ομογενές σύστημα έχει A λύσεις, έστω τις $V_{am}(q,p),\ a = 1,2,...,A$, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι το εξής άθροισμα, $u_m = U_m(q,p) + \upsilon_a V_{am}(q,p)$.

Τα $\upsilon_a = \upsilon_a(t),\ \ a = 1,2,...,A$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου. Για την ολική χαμιλτονιανή έχουμε

$$
\begin{aligned}
&H_{\mathrm{T}} = H + U_m\varphi_m + \upsilon_a V_{am}\varphi_m\\
&= H' + \upsilon_a\varphi_\alpha\\
&H' = H + U_m\varphi_m\\
&\varphi_a = V_{am}\varphi_m \quad m = 1,2,...,M \quad a = 1,2,...,A.
\end{aligned}
$$

Η ύπαρξη των αυθαίρετων συναρτήσεων του χρόνου υ_a σημαίνει ότι έχουμε μια μαθηματική μεθοδολογία με αυθαίρετα χαρακτηριστικά. Αποτέλεσμα αυτού είναι οι δυναμικές μεταβλητές σε μελλοντικούς χρόνους να μην καθορίζονται πλήρως από τις αρχικές δυναμικές μεταβλητές, η γενική λύση περιέχει αυθαίρετες συναρτήσεις.

Τώρα θα κάνουμε έναν άλλο διαχωρισμό των δεσμών. Θα αναφερθούμε σε δεσμούς πρώτης τάξης (first class) και σε δεσμούς δεύτερης τάξης (second class). Μια δυναμική συνάρτηση $R = R(q,p)$ είναι πρώτης τάξης αν έχει αγκύλες Poisson με όλους τους δεσμούς φ_i, που είναι τουλάχιστον ασθενικά μηδέν. Δηλαδή $\left[R,\varphi_i\right] \approx 0$. Οι μόνες ποσότητες που είναι ασθενικά μηδέν είναι οι δεσμοί, επομένως αυτή η αγκύλη Poisson θα είναι ισχυρά ίση με μια γραμμική συνάρτηση των δεσμών, δηλαδή $\left[R,\varphi_i\right] = r_{ij}\varphi_j$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η δυναμική συνάρτηση είναι δεύτερης τάξης. Αυτό σημαίνει ότι για μερικούς τουλάχιστον δεσμούς δεν ισχύουν οι σχέσεις $\left[R,\varphi_i\right] \approx 0$. Αυτός ο διαχωρισμός δεν έχει σχέση με τον διαχωρισμό σε πρωτογενείς και δευτερογενείς δεσμούς. Με εφαρμογή του ορισμού, μπορεί να δειχθεί ότι οι αγκύλες Poisson δυο μεγεθών τα οποία είναι πρώτης τάξης είναι επίσης πρώτης τάξης. Επίσης εύκολα δείχνεται ότι οι ανωτέρω ποσότητες H' και φ_a είναι πρώτης τάξης.

Το συμπέρασμα είναι ότι η ολική χαμιλτονιανή H_{T} είναι άθροισμα μιας χαμιλτονιανής που είναι συνάρτηση πρώτης τάξης, H' και ενός αυθαίρετου γραμμικού συνδυασμού δεσμών πρώτης τάξης που ο κάθε ένας είναι ειδικός γραμμικός συνδυασμός πρωτογενών δεσμών. Επίσης η H_{T} είναι πρώτης τάξης. Ο αριθμός των ανεξάρτητων αυθαίρετων συναρτήσεων του χρόνου που υπάρχουν στη γενική λύση, ισούται με το πλήθος των τιμών του δείκτη a δηλαδή με το A. Αυτός ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων πρωτογενών δεσμών πρώτης τάξης αφού όλοι υπάρχουν στην ολική χαμιλτονιανή, $H_{\mathrm{T}} = H' + \upsilon_a\varphi_a\ a = 1,2,...,A$.

Θα παριστάνουμε όλους τους πρωτογενείς και δευτερογενείς δεσμούς που είναι πρώτης τάξης με το σύμβολο γ_i. Οι υπόλοιποι πρωτογενείς και δευτερογενείς δεσμοί, έστω πλήθους S, είναι δεύτερης τάξης και θα παριστάνονται με $\chi_i\ i = 1,2,...,S$. Ο Dirac έδειξε ότι η τετραγωνική αντισυμμετρική μήτρα (πίνακας) $M_{ij} = \left[\chi_i,\chi_j\right]$ των δεσμών δεύτερης τάξης δεν είναι ιδιάζουσα, δηλαδή η ορίζουσά της δεν μηδενίζεται, $\det M_{ij} \neq 0$. Δηλαδή η μήτρα έχει αντίστροφη, την M_{ij}^{-1}, ισχύει $M_{ij}^{-1}M_{jk} = \delta_k^i$. Επειδή κάθε αντισυμμετρική μήτρα με περιττό πλήθος γραμμών (και στηλών) έχει μηδενική ορίζουσα, αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος S των χ_i είναι άρτιος αριθμός. Η συνθήκη συνέπειας

$$\left[\varphi_i, H\right] + u_m\left[\varphi_i, \varphi_m\right] \approx 0, \quad m = 1,2,...,M \;\; i = 1,2,...,J$$

για τα γ_i ικανοποιείται ταυτοτικά. Για τα χ_i έχουμε

$$\left[\chi_i, H\right] + M_{ij}u_j \approx 0 \;\; j, i = 1,2,...,S \, .$$

Για δευτερογενείς δεσμούς δεύτερης τάξης $u_i = 0$. Λύνουμε ως προς u_i και έχουμε

$u_i = M_{ij}^{-1}\left[\chi_j, H\right]$ για κάθε πρωτογενή δεσμό χ_j και
$0 = M_{ij}^{-1}\left[\chi_j, H\right]$ για κάθε δευτερογενή δεσμό χ_j.

Αυτά σημαίνουν ότι όλοι οι πολλαπλασιαστές u_m που ανήκουν στους πρωτογενείς δεσμούς δεύτερης τάξης καθορίζονται πλήρως από τις συνθήκες συνέπειας. Οι υπόλοιποι πολλαπλασιαστές που ανήκουν στους ανεξάρτητους πρωτογενείς δεσμούς πρώτης τάξης περιέχουν αυθαίρετους συντελεστές συναρτήσεις του χρόνου, υ_a. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση κίνησης $\dot{f} \approx \left[f, H\right] + u_m\left[f, \varphi_m\right] \;\; m = 1,2,...,M$ και βρίσκουμε $\dot{f} \approx \left[f, H\right] + \left[f, \varphi_a\right]\upsilon_a - \left[f, \chi_i\right]M_{ij}^{-1}\left[\chi_j, H\right]$. Τα φ_a είναι οι πρωτογενείς δεσμοί πρώτης τάξης.

Από αυτήν δείχνεται εύκολα ότι όλοι οι δεσμοί ισχύουν κάθε χρονική στιγμή, ασθενικά.

Παροτρυνόμενοι από την τελευταία σχέση ορίζουμε την αγκύλη Poisson για δυο δυναμικές μεταβλητές $f(q, p), g(q, p)$, ως εξής

$$\left[f, g\right]_{\mathrm{D}} := \left[f, g\right] - \left[f, \chi_\alpha\right]M_{\alpha\beta}^{-1}\left[\chi_\beta, g\right].$$

Για φυσικά συστήματα όπου δεν υπάρχουν αυθαίρετοι πολλαπλασιαστές, υ_a (λέγονται συστήματα δεύτερης τάξης), έχουμε

$$\dot{f} \approx \left[f, H\right]_{\mathrm{D}}.$$

Αυτό θα ισχύει αν δεν υπάρχουν πρωτογενείς δεσμοί πρώτης τάξης. Αποδεικνύεται ότι οι αγκύλες Dirac έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις αγκύλες Poisson και επιπλέον, κάθε δυναμική συνάρτηση $f(q, p)$ έχει αγκύλες Dirac με όλους τους δεσμούς δεύτερης τάξης, ίσες με μηδέν. $\left[f, \chi_\alpha\right]_{\mathrm{D}} = \left[f, \chi_\alpha\right] - \left[f, \chi_\beta\right]M_{\beta\gamma}^{-1}\left[\chi_\gamma, \chi_\alpha\right] = 0$. Η f μπορεί να είναι οποιοσδήποτε δεσμός δεύτερης τάξης, χ_i.

Ας σχολιάσουμε αυτά που έχουν προκύψει μέχρι τώρα από πλευράς Φυσικής. Η φυσική κατάσταση ενός (φυσικού) συστήματος καθορίζεται πλήρως (μονοσήμαντα) μόνο από τις τιμές των q, p χωρίς τις αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου υ_a. Για την περιγραφή του φυσικού συστήματος στον χρόνο χρειάζονται οι αρχικές τιμές αυτών των μεταβλητών, δηλαδή οι q_0, p_0. Δηλαδή η αρχική (φυσική) κατάσταση ενός (φυσικού) συστήματος καθορίζεται πλήρως από αυτές, δεν χρειάζονται αρχικές τιμές για τις αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου, υ_a. Κάθε αρχική δυναμική μεταβλητή του (φυσικού) συστήματος είναι πλήρως καθορισμένη από τις ανωτέρω αρχικές τιμές στον φασικό χώρο, $f_0 = f(q_0, p_0)$. Πρέπει σε μεταγενέστερους χρόνους η φυσική κατάσταση να καθορίζεται πλήρως (μονοσήμαντα) από την αρχική κατάσταση. Όμως, σύμφωνα με τα ανωτέρω, τα q, p σε μεταγενέστερους χρόνους δεν είναι πλήρως καθορισμένα από τα αρχικά q_0, p_0 διότι υπεισέρχονται και οι ανωτέρω αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου. Με άλλα λόγια, η φυσική κατάσταση δεν καθορίζει πλήρως (μονοσήμαντα) ένα σύνολο από q, p παρόλο που ένα σύνολο από q, p καθορίζει μονοσήμαντα μια φυσική κατάσταση. Υπάρχουν πολλές επιλογές των q, p που αντιστοιχούν στην ίδια φυσική κατάσταση. Επομένως τίθεται το πρόβλημα να βρεθούν όλα τα διαφορετικά σύνολα των q, p που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη φυσική κατάσταση, ανεξάρτητα από το μαθηματικό αποτέλεσμα της ύπαρξης των αυθαίρετων συναρτήσεων. Όλες οι τιμές των q, p μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή οι οποίες προέρχονται από μια συγκεκριμένη αρχική φυσική κατάσταση πρέπει να αντιστοιχούν (ανήκουν) στην ίδια φυσική κατάσταση στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μπορεί να δειχτεί ότι οι απειροστοί κανονικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι μετασχηματίζουν τις δυναμικές μεταβλητές με τον χρόνο, έτσι που η φυσική κατάσταση να μένει η ίδια, έχουν ως γεννήτριες συναρτήσεις δεσμούς πρώτης τάξης. Στα παραπάνω ασχοληθήκαμε μόνο με πρωτογενείς δεσμούς πρώτης τάξης, όμως υπάρχουν γεννήτριες συναρτήσεις που κάνουν την ανάλογη δουλειά και οφείλονται σε δευτερογενείς δεσμούς πρώτης τάξης. Με αυτό ως δεδομένο εισάγεται η εκτεταμένη χαμιλτονιανή (extended Hamiltonian) η οποία περιλαμβάνει και τους δευτερογενείς πρωτεύοντες δεσμούς με συντελεστές u_k. Όλοι αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι οι γνωστοί μας μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge transformations). Λέμε ότι υπάρχει συμμετρία βαθμίδας στο σύστημα. Είδαμε ότι αυτό σχετίζεται με την ύπαρξη των αυθαίρετων συναρτήσεων του χρόνου που είδαμε προηγουμένως. Το φυσικό νόημα της ύπαρξης τέτοιων συμμετριών είναι ότι έχουμε περισσότερες μεταβλητές (βαθμούς ελευθερίας) από ότι χρειάζονται για την πλήρη περιγραφή της κατάστασης του συστήματος. Υπάρχουν πλεονάζοντες βαθμοί. Για να μην εμφανίζονται πλεονάζοντες βαθμοί εισάγονται δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, συνθήκες βαθμίδας, οι οποίες λέμε διορθώνουν αυτούς τους πλεονασμούς (fix the gauges). Αν κάνουμε πλήρη διόρθωση, τότε θα έχουμε μόνο όσους βαθμούς ελευθερίας χρειάζονται και δεν θα έχουμε στο φυσικό σύστημα αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου. Αυτό που γίνεται είναι να εισαχθούν πρόσθετες δεσμευτικές σχέσεις και από αυτές με τη μέθοδο των Dirac-Bergman θα βρεθούν και άλλες. Τελικώς με τη λύση του προβλήματος θα προσδιοριστούν όλες οι (αρχικές) μεταβλητές.

Θα προχωρήσουμε έχοντας ως στόχο την κβάντωση του φυσικού συστήματος.

Με τη διαδικασία που αναπτύξαμε στα προηγούμενα καταλήξαμε σε δυο ειδών δεσμευτικές σχέσεις (δεσμούς), δεσμούς πρώτης τάξης, γ_i και δεσμούς δεύτερης τάξης, χ_i. Τώρα στους δεσμούς πρώτης τάξης συμπεριλαμβάνουμε και δευτερογενείς δεσμούς. Από τους ορισμούς τους ισχύουν:

$$\left[\gamma_i,\gamma_j\right]\approx 0,\;\; \left[\gamma_i,\chi_j\right]\approx 0,\;\; \left[\chi_i,\chi_j\right]\approx M_{ij},\; \det M_{ij}\neq 0\,.$$

Οι δεσμοί δεύτερης τάξης προσδιορίζουν μονοσήμαντα ένα πλήθος από τους συντελεστές u_m. Οι δεσμοί πρώτης τάξης είναι γεννήτορες μετασχηματισμών βαθμίδας. Διώχνουμε τους επιπλέον βαθμούς ελευθερίας επιβάλλοντας κατάλληλες συνθήκες βαθμίδας της μορφής $\Omega_i(q,p)=0$. Για κάθε γ_i θα έχουμε και μια τέτοια συνθήκη. Για να βρούμε τις επιπλέον τέτοιες συνθήκες μπορεί να χρειαστεί να εφαρμόσουμε τις συνθήκες συνέπειας για κάθε $\Omega_i(q,p)$, μέχρι που να μην παίρνουμε καινούργιες συνθήκες. Αποδεικνύεται ότι για να διώξουμε όλους τους επιπλέον βαθμούς ελευθερίας (που σχετίζονται με τα γ_i) πρέπει η ορίζουσα της τετραγωνικής μήτρας των $\left[\gamma_i,\Omega_j\right]$ να είναι μη μηδενική. Στη συνέχεια το σύνολο με στοιχεία τα χ,γ,Ω που παριστάνουμε με τα Φ_A, θεωρείται ως νέο σύνολο δεσμών δεύτερης τάξης. Αυτό γίνεται διότι μπορεί να δειχτεί ότι η ορίζουσα της τετραγωνικής μήτρας των Φ_A, που έχει στοιχεία όλες τις εκφράσεις $\left[\gamma_i,\gamma_j\right]$, $\left[\gamma_i,\chi_j\right]$, $\left[\chi_i,\chi_j\right]$, $\left[\gamma_i,\Omega_j\right]$, $\left[\chi_i,\Omega_j\right]$, $\left[\Omega_i,\Omega_j\right]$, είναι μη μηδενική.

Η αγκύλη Dirac δυο (δυναμικών) συναρτήσεων των q, p είναι: $\left[f,g\right]_{\mathrm{D}}=\left[f,g\right]-\left[f,\Phi_A\right]C_{AB}^{-1}\left[\Phi_A,g\right]$, όπου η μήτρα C_{AB}^{-1} είναι η αντίστροφη της μήτρας C_{AB} με στοιχεία $c_{AB}=\left[\Phi_A,\Phi_B\right]$.

Είναι δυνατόν οι δεσμοί πρώτης τάξης μαζί με τις αρχικές συνθήκες βαθμίδας να προσδιορίζουν πλήρως τις περιττές μεταβλητές, έτσι έχουμε πρόβλημα με μόνο τις απαραίτητες μεταβλητές και οι δεσμοί που μένουν είναι δεύτερης τάξης. Με αυτό τον τρόπο φτιάχνουμε τις αγκύλες Dirac με αυτούς τους δεσμούς και προχωρούμε στην κβάντωση.

Εδώ κάνουμε μια παρένθεση. Θα επιχειρήσουμε να κβαντώσουμε κάποιο φυσικό σύστημα με δεσμούς χρησιμοποιώντας τη συνήθη μέθοδο με αγκύλες Poisson. Σε δυο από τις ανωτέρω κλασικές ποσότητες χ_i, χ_j που είναι διαφορετικοί δεσμοί και σύμφωνα με τα όσα είπαμε θα αντιστοιχεί ο μεταθέτης

$$\left(\hat{\chi}_i, \hat{\chi}_j\right) = \hat{\chi}_i \hat{\chi}_j - \hat{\chi}_j \hat{\chi}_i = \mathrm{i}\hbar\left[\chi_i, \chi_j\right] = \mathrm{i}\hbar c$$

όπου το c μπορεί να μην είναι σταθερά αλλά σίγουρα δεν είναι μηδέν. Όμως στην κβαντική Φυσική $\hat{\chi}\psi = \chi\psi = 0$ όπου ψ είναι η κυματοσυνάρτηση που καθορίζει την κβαντική κατάσταση, χ είναι η τιμή του δεσμού, δηλαδή μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι ο μεταθέτης θα είναι μηδέν αφού θα δίνει μηδέν για κάθε ψ. Πρόκειται για αντίφαση, υπάρχει ασυνέπεια, αφού στην αρχή βρήκαμε ότι ο μεταθέτης είναι μη μηδενικός. Το πρόβλημα λύνεται με τη χρήση της αγκύλης Dirac. Από τον ορισμό, είναι εύκολο να δειχτεί ότι οι αγκύλες Dirac έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις αγκύλες Poisson και επίσης για κάθε δεσμό Φ_A από τους παραπάνω και κάθε δυναμική συνάρτηση $g = g(q, p)$ έχουμε $\left[\Phi_A, g\right]_{\mathrm{D}} \approx 0$. Όταν υπάρχουν δεσμοί η κβάντωση γίνεται με χρήση της αγκύλης Dirac με ανάλογο όπως πριν τρόπο, δηλαδή:

$$\left(\hat{f}, \hat{g}\right) = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} = \mathrm{i}\hbar[\hat{f}, \hat{g}]_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}\hbar[f, g]_{\mathrm{D}}.$$

Εφόσον ισχύει η τελευταία ιδιότητα τώρα δεν υπάρχει αντίφαση στην προηγούμενη περίπτωση διότι η κλασική αγκύλη Dirac θα είναι μηδέν, όπως και ο μεταθέτης.

Τώρα θα συνεχίσουμε με το απλό παράδειγμα που αναφέραμε και προηγουμένως.

Ξεκινούμε με τη αρχική (απλοϊκή) χαμιλτονιανή που βρήκαμε,

$$H = V(x, y).$$

Από τις σχέσεις για τις συζυγείς ορμές έχουμε στην ουσία δυο πρωτεύοντες δεσμούς, οι οποίοι με τον γνωστό τρόπο προκύπτει ότι είναι δεύτερης τάξης, άρα

$$\chi_1 = p_x + Ky \approx 0, \ \chi_2 = p_y - Kx \approx 0.$$

Η γενικευμένη (ολική) χαμιλτονιανή για το παραπάνω παράδειγμά μας είναι

$$H_{\mathrm{T}} = V(x, y) + u_1(Ky + p_x) + u_2(Kx - p_y).$$

Από τη συνθήκη συνέπειας $\dot{\chi}_j = \left[\chi_j, H_{\mathrm{T}}\right] \approx 0$, έχουμε

$$\left[\chi_1, H_{\mathrm{T}}\right] = \left[\chi_1, V(x, y)\right] + u_1\left[\chi_1, \chi_1\right] + u_2\left[\chi_1, \chi_2\right] = -\frac{\partial V}{\partial x} + u_2 2K \approx 0.$$

Αυτός δεν είναι δευτερεύων δεσμός αλλά συνθήκη συνέπειας για τον αυθαίρετο συντελεστή u_2 που τον προσδιορίζει πλήρως. $u_2 = -\dfrac{1}{2K}\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

Ομοίως, $\left[\chi_2, H_{\mathrm{T}}\right] = \dfrac{\partial V}{\partial y} + u_1 2K \approx 0$, οπότε καθορίζεται πλήρως ο u_1, $u_1 = -\dfrac{1}{2K}\dfrac{\partial V}{\partial y}$.

Δεν υπάρχουν άλλοι δευτερεύοντες δεσμοί.

Ισχύει $\dot{x} = [x, H_{\mathrm{T}}] = [x, H] + u_1[x, \chi_1] + u_2[x, \chi_2]$. Οι άλλες σχέσεις είναι παρόμοιες, $\dot{y} = [y, H_{\mathrm{T}}]$, $\dot{p}_x = [p_x, H_{\mathrm{T}}]$, $\dot{p}_y = [p_y, H_{\mathrm{T}}]$, οπότε μετά από την αντικατάσταση των συντελεστών u_m στην H_{T} και μερικές πράξεις βρίσκουμε,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2K}\frac{\partial V}{\partial y}\ ,\ \dot{y} = -\frac{1}{2K}\frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ \dot{p}_x = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ \dot{p}_y = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y}\ .$$

Δηλαδή βρίσκουμε τις σωστές σχέσεις που βρήκαμε με τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό.

Επειδή δεν υπάρχουν αυθαίρετοι παράγοντες $\upsilon_a(t)$, μπορούμε για τις εξισώσεις κίνησης να χρησιμοποιήσουμε και τη σχέση,

$$\dot{f} \approx [f, H]_{\mathrm{D}}\ .$$

Θα προσδιορίσουμε τους θεμελιώδεις κβαντικούς μεταθέτες για αυτό το σύστημα.
Για τις αγκύλες Dirac ισχύει η σχέση

$$[f, g]_{\mathrm{D}} = [f, g] - [f, \varphi_k] M_{kl}^{-1} [\varphi_l, g]$$

Οι δεσμοί είναι οι ανωτέρω δεύτερης τάξης.

Η μήτρα τους είναι η 2Χ2 μήτρα $M_{ij} = [\chi_i, \chi_j]$. Τα $[f, \chi_k]$, $[\chi_l, g]$ μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι αντιστοίχως διάνυσμα-γραμμή και διάνυσμα-στήλη. Έχουμε $[\chi_1, \chi_2] = -[\chi_2, \chi_1] = -K - K = -2K$ και προφανώς $[\chi_i, \chi_i] = 0$.

Ισχύουν $[f, f] = [f, f]_{\mathrm{D}} = 0$. Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε τις θεμελιώδεις αγκύλες Dirac που δεν είναι αυτής της μορφής, δηλαδή τις

$$[x, y]_{\mathrm{D}},\ [x, p_x]_{\mathrm{D}},\ [x, p_y]_{\mathrm{D}},\ [y, p_x]_{\mathrm{D}},\ [y, p_y]_{\mathrm{D}},\ [p_x, p_y]_{\mathrm{D}}.$$

Για τη μήτρα βρίσκουμε $M = 2K\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ άρα $M^{-1} = \dfrac{1}{2K}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Έχουμε $[x, y] = [x, y] - \left([x, \chi_1]\ \ [x, \chi_2]\right)\dfrac{1}{2K}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\chi_1, y] \\ [\chi_2, y] \end{pmatrix}$.

$[x, y] = 0,\ [x, \chi_1] = 1,\ [x, \chi_2] = 0,\ [\chi_1, y] = 0,\ [\chi_2, y] = 1$.

Τελικώς $[x, y]_{\mathrm{D}} = -\dfrac{1}{2K}$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε $[x, p_x]_{\mathrm{D}} = \dfrac{1}{2}$, $[x, p_y]_{\mathrm{D}} = 0$, $[y, p_x]_{\mathrm{D}} = 0$, $[y, p_y]_{\mathrm{D}} = \dfrac{1}{2}$, $[p_x, p_y]_{\mathrm{D}} = -\dfrac{K}{2}$.

Τελικώς οι μη μηδενικοί θεμελειώδεις μεταθέτες είναι:

$$\left(\hat{x}, \hat{y}\right) = -\mathrm{i}\hbar\frac{1}{2K},\ \left(\hat{x}, \hat{p}_x\right) = \left(\hat{y}, \hat{p}_y\right) = \mathrm{i}\hbar\frac{1}{2}\ ,\ \left(\hat{p}_x, \hat{p}_y\right) = -\mathrm{i}\hbar\frac{K}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι οι δυο συντεταγμένες και οι δυο συζυγείς ορμές δε μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα, υπάρχουν σχέσεις απροσδιοριστίας.

Β) Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Εδώ θα κάνουμε κάτι που είναι κάπως πρωθύστερο αφού μέχρι αυτό το σημείο δεν έχουμε μιλήσει εκτενώς για πεδία. Στόχος μας είναι να φανεί η χρησιμότητα του φορμαλισμού Dirac στην κβαντική θεωρία πεδίων. Διαλέξαμε την πολύ γνωστή, την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Δεν θα κάνουμε όλους τους υπολογισμούς, απλά θα σκιαγραφήσουμε τη μεθοδολογία.

Στη θεωρία πεδίων οι μεταβλητές είναι διάφορες εκφράσεις που είναι συναρτήσεις του χρόνου και της θέσης. Η λαγκρανζιανή είναι $L = \int_O \mathcal{L}\, \mathrm{d}^3 x$, $\mathcal{L}$ είναι η λαγκρανζιανή πυκνότητα, O είναι ο όγκος στον οποίο εκτείνεται το φυσικό σύστημα, μπορεί να είναι και μέχρι το άπειρο. Εργαζόμαστε με καρτεσιανές συντεταγμένες. Επίσης κάνουμε χρήση του ορθολογισμένου φυσιολογικού (φυσικού, natural) συστήματος μονάδων που χρησιμοποιείται στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων, όπου $c=1$. Εδώ κάνουμε εξαίρεση και δεν θεωρούμε το $\hbar$ ίσο με μονάδα, όπως γίνεται σε αυτό το σύστημα, για να φαίνεται η κβάντωση. Στο σύνορο του όγκου O, ισχύουν οι γνωστές σχέσεις μηδενισμού των δυνατών μεταβολών. Θυμίζουμε ότι οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τιμές 0,1,2,3. Οι λατινικοί δείκτες παίρνουν τιμές 1,2,3. Επαναλαμβανόμενοι πάνω και κάτω δείκτες σημαίνει άθροιση. Στην περίπτωση της ηλεκτροδυναμικής μια κατάλληλη λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι η $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$. Σημειώνουμε ότι εφόσον το φορτίο διατηρείται ισχύει $\partial_\mu J^\mu = 0$. Ισχύουν οι σχέσεις $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, όπου A^μ είναι το τετραδυναμικό που είναι ένα είδος πεδίου. Θυμίζουμε ότι έχει τέσσερις συνιστώσες που είναι το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό αντίστοιχα, δηλαδή $A^\mu(\vec{x},t) = A^\mu(x) = \left(\Phi(\vec{x},t) = \Phi(x),\ \vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(x)\right),\ \mu = 0,1,2,3$, x είναι το γνωστό τετραδιάνυσμα του χώρου Minkowfski, $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$ J^μ είναι το τετραδιάνυσμα του ρεύματος με τέσσερις συνιστώσες, $J^\mu(\vec{x},t) = J^\mu(x) = (\rho, \vec{J}) = (J_0, J_1, J_2, J_3) = (J_0, J_x, J_y, J_z)$. ρ είναι η πυκνότητα φορτίου και J_1, J_2, J_3 οι συνιστώσες της συνήθους πυκνότητας ρεύματος, $\vec{J} = \rho\vec{\upsilon}$. Ο μετρικός τανυστής είναι ο γνωστός g, με συνιστώσες $g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ g_{\mu\nu} = 0\ \mu \neq \nu$, $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$.

Εννοείται πως ότι κάνουμε αναφέρεται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Ο ορισμός των πεδιακών ορμών (πυκνότητες ορμών) είναι $\pi^\mu(x) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)} = -F^{0\mu}$. Από αυτή τη σχέση ορισμού των συζυγών ορμών (που είναι αντίστοιχες) των A^μ και τους ορισμούς των $F^{\mu\nu}$, βρίσκεται ότι ισχύει ο πρωτογενής δεσμός $\pi^0(x) = 0$.

Ένας τρόπος να προχωρήσουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αυτός ο δεσμός καθορίζει πλήρως το π^0 κάθε χρονική στιγμή. Επίσης καθορίζεται και το A^0 αν επιβάλουμε τη συνθήκη βαθμίδας Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A^i = 0$, τότε βρίσκουμε τη σχέση $\nabla^2 A^0 = J^0$ από όπου έχουμε $A^0 = \int_O d^3 y \dfrac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}$.

Αφού διώξαμε (βρήκαμε) τα π^0, A^0, μπορούμε να προχωρήσουμε με μόνο τους δεσμούς $\partial_i A^i = 0$ και $\partial_i \pi^i - J^0 = 0$ που μπορείτε να δείτε ότι είναι σύνολο δεσμών δεύτερης τάξης. Υπολογίζουμε τις αγκύλες Dirac μόνο με αυτούς και προχωρούμε στην κβάντωση.

Θα συνεχίσουμε με τον άλλο τρόπο όπου δεν θεωρούμε γνωστές τις χρονικές συνιστώσες των A^μ, π^μ. Είναι ο τρόπος που περιγράψαμε προηγουμένως. Από τη λαγκρανζιανή πυκνότητα με τη συνήθη διαδικασία (προσαρμοσμένη για πεδία), βρίσκουμε την (απλοϊκή) χαμιλτονιανή πυκνότητα

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\pi_i\pi^i + A_0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + A^\mu J_\mu \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη συνέπειας για τον πρωτογενή δεσμό φ_1 και βρίσκουμε τον δευτερογενή δεσμό $\varphi_2 = [\varphi_1, \mathrm{H}] = \partial_i\pi^i - J^0 = 0$. Ισχύουν οι σχέσεις $[\varphi_2, \varphi_1] \approx 0,\ [\varphi_2, \mathrm{H}] \approx 0$. Επομένως με αυτή τη διαδικασία δε βρίσκεται άλλος δευτερεύων δεσμός. Τώρα εισάγουμε τη (δεσμευτική) σχέση βαθμίδας $\Omega_2 = \partial_i A^i = 0$. Παρατηρούμε ότι $[\Omega_2, \varphi_2] \neq 0$ οπότε ο Ω_2 «διορθώνει» τον μετασχηματισμό βαθμίδας για τον οποίο γεννήτρια είναι ο δεσμός φ_2. Οι φ_2, Ω_2 είναι συζυγείς. Εφαρμογή της συνθήκης συνέπειας για τον δεσμό φ_2 οδηγεί στον δεσμό $\Omega_1 = [\Omega_2, \mathrm{H_T}] \approx \partial^i\partial_i A_0 \approx 0$. Ισχύει $[\Omega_1, \varphi_1] \neq 0$, επομένως ο Ω_1 διορθώνει τον δεσμό φ_1 και μεταξύ τους είναι συζυγείς. Τελικώς υπολογίζουμε τις αγκύλες Dirac για το σύνολο των δεσμών που είναι σύνολο δεσμών δεύτερης τάξης. Αυτοί είναι οι $(\varphi_1, \varphi_2, \Omega_2, \Omega_1)$. Μετά από πολλούς πολύπλοκους υπολογισμούς βρίσκουμε για τις θεμελιώδεις αγκύλες Dirac

$$\left[A^\mu(t,\vec{x}), \pi_\nu(t,\vec{y})\right]_{\mathrm{D}} = \left(\delta^\mu{}_\nu - g_{\nu 0}\delta^\mu{}_0\right)\delta^\mu{}_\nu\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \partial^\mu\partial_\nu \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} .$$

Οι παράγωγοι ∂_i είναι ως προς τα x_i.

Οι συνδυασμοί οι οποίοι έχουν μόνο A^μ ή μόνο π^μ είναι μηδέν. Επίσης μηδέν είναι και όσες έχουν τη μια τουλάχιστο μεταβλητή να είναι χρονική μεταβλητή, δηλαδή με δείκτη μηδέν. Οι υπόλοιπες μη μηδενικές είναι οι

$$\left[A_i(t,\vec{x}), \pi^j(t,\vec{y})\right]_{\mathrm{D}} = \delta_i{}^j\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_i\partial^j \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} .$$

Το δεύτερο μέλος που μπορεί να γραφτεί ως

$$\delta^3_{\mathrm{T}i}{}^j(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{2}{3}\delta_i{}^j\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|^3}\left\{\delta_i{}^j - \frac{3(x^i-y^i)(x_j-y_j)}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}\right\}$$

είναι η λεγόμενη εγκάρσια συνάρτηση δέλτα. Αναφέρουμε ότι για κάθε διανυσματική συνάρτηση θέση (θεωρούμε ότι ο χρόνος είναι μια σταθερή παράμετρος που δεν την σημειώνουμε) έχουμε την ανάλυσή της σε εγκάρσια και διαμήκη συνάρτηση, $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_{\mathrm{T}}(\vec{x}) + \vec{A}_{\mathrm{L}}(\vec{x})$ όπου $\vec{\nabla}\times\vec{A}_{\mathrm{T}}(\vec{x}) = 0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\mathrm{L}}(\vec{x}) = 0$. Ισχύει η εξής σχέση $A^j_{\mathrm{T}}(\vec{x}) = \int_O \mathrm{d}^3y\,\delta^3_{\mathrm{T}i}{}^j(\vec{x}-\vec{y})A^i(\vec{y})$. Αυτό δείχνει ότι η εγκάρσια συνάρτηση δέλτα «προβάλει» το διάνυσμα στο εγκάρσιο μέρος του. Υπάρχει και διαμήκης συνάρτηση δέλτα.

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τους (κβαντικούς) μεταθέτες. Οι μη μηδενικοί μεταθέτες είναι οι $\left(\hat{A}_i(t,\vec{x}), \hat{\pi}^j(t,\vec{x})\right) = \mathrm{i}\hbar\left[A_i(t,\vec{x}), \pi^j(t,\vec{x})\right]_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}\hbar\delta^3_{\mathrm{T}i}{}^j(\vec{x}-\vec{y})$.

Αυτό που ενδιαφέρει στην κβαντική θεωρία πεδίου είναι οι (κβαντικοί) μεταθέτες των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας. Στην αρχή βρίσκονται οι συντελεστές Fourier που προκύπτουν από την ανάλυση Fourier των A^i, π^i. Αυτοί οι κλασικοί συντελεστές εκφράζονται συναρτήσει των A^i, π^i με ολοκληρώματα όγκου στον χώρο των θέσεων, $\vec{x}$. Οι αγκύλες Dirac αυτών των συντελεστών εκφράζονται ως προς τις αγκύλες Dirac των A^i, π^i. Τελικώς, από την παραπάνω κβαντική συνθήκη για τους τελεστές των A^i, π^i βρίσκονται οι μεταθέτες των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας, που είναι ο τελικός στόχος μας.

Προβλήματα

1. α)Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $Q=\ln\left(\dfrac{\sin p}{q}\right), P=\dfrac{q}{\tan p}$ είναι κανονικός και βρείτε μια γεννήτρια συνάρτηση F_g για αυτόν. β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \;\; P_1 = p_1 - 2p_2 \\ Q_2 &= p_2 \;\; P_2 = -2q_1 - q_2 \end{aligned}$$

είναι κανονικός μετασχηματισμός. Βρείτε μια γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού.

2. Η χαμιλτονιανή κάποιου συστήματος είναι $H(q,p)=\dfrac{1}{2}p^2$. Έστω ο μετασχηματισμός $q=Q,\;\; p=f(P)$ όπου η $f(P)$ είναι αυθαίρετη αντιστρέψιμη συνάρτηση. Με χρήση των εξισώσεων Hamilton βρείτε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης για τα q,p. Μετασχηματίστε αυτές τις εξισώσεις και βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για τα Q,P. Θεωρήστε ότι ο μετασχηματισμός αυτός μετασχηματίζει κάθε χαμιλτονιανή σύμφωνα με τη σχέση $K(P)=\int f(P)\mathrm{d}P$. Δείξτε ότι στις μεταβλητές Q,P οι εξισώσεις Hamilton δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Κάντε τα ίδια για σύστημα με χαμιλτονιανή την $H(q,p)=p^2/2+q^2/2$. Τι βλέπετε; Υπολογίστε την αγκύλη του Poisson $[q,p]_{Q,P}$. Είναι γενικώς ο μετασχηματισμός κανονικός; Σχολιάστε.

3. α) Πότε ο μετασχηματισμός

$$Q=p^2+\alpha q, \quad P=p+\beta t$$

είναι κανονικός μετασχηματισμός. Τα α,β είναι σταθερές.

β) Δείξτε ότι η συνάρτηση που γεννά τον κανονικό μετασχηματισμό $Q=\ln(1+q^{1/2}\cos p),\; P=2(1+q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p$ είναι η $F_3=-(\mathrm{e}^Q-1)^2\tan p$.

4. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί είναι κανονικοί:

α) $Q=q^2+(p^2/a^2),\;\; P=\dfrac{a}{2}\arctan\left(\dfrac{p}{aq}\right).$

β)
$$Q_1=q_1^2+p_1^2,\;\; Q_2=\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+p_1^2+q_2^2\right)$$
$$P_1=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_1}{p_1}\right),\;\; P_2=-\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right).$$

5. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός

$$Q=\ln\left(\frac{\sin p}{q}\right),\;\; P=q\cot p$$

είναι κανονικός. Βρείτε μια συνάρτηση $F(q,p)$ της οποίας το ολικό διαφορικό να είναι:

$$\mathrm{d}F(q,p) = p\mathrm{d}q - P(q,p)\mathrm{d}Q(q,p).$$

Ελέγξτε ποιες από τις απλές μορφές γεννητριών συναρτήσεων $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$ μπορεί να γεννήσουν αυτόν τον κανονικό μετασχηματισμό. Βρείτε μια από αυτές.

6. Βρείτε κανονικό μετασχηματισμό τέτοιον που η χαμιλτονιανή σωματίου σε κατακόρυφη ελεύθερη πτώση μέσα στο πεδίο βαρύτητας να γίνει $K(Q,P) = P.$ Λύστε το πρόβλημα βρίσκοντας τα $Q(t), P(t)$ και μετασχηματίστε για να βρείτε τη συνήθη λύση.

7. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός που λέγεται εκτεταμένος σημειακός μετασχηματισμός, δηλαδή ο μετασχηματισμός

$$Q_i = Q_i(q,t), \quad P_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial q_j(Q,t)}{\partial Q_i}$$

είναι κανονικός μετασχηματισμός.

8. Αν για κάποιον κανονικό μετασχηματισμό υπάρχουν δυο γεννήτριες συναρτήσεις τύπου οποιουδήποτε από τους γνωστούς F_1, F_2, F_3, F_4, τότε οι δυο γεννήτριες συνδέονται με κατάλληλο μετασχηματισμό Legendre.

9. Προσδιορίστε τους κανονικούς μετασχηματισμούς που γεννούν οι παρακάτω γεννήτριες συναρτήσεις:

$$\text{α) } F_1(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i$$

$$\text{β) } F_4(p,P,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i P_i$$

10. Η χαμιλτονιανή κάποιου μηχανικού συστήματος είναι $H(q,p,t) = q + t\mathrm{e}^p$. Με τον κανονικό μετασχηματισμό $Q = q + t\mathrm{e}^p,\ \ P = p$ το σύστημα πάει στις νέες μεταβλητές Q, p .

α) Βρείτε δυο γεννήτριες συναρτήσεις αυτού του μετασχηματισμού.

β) Ποια είναι η νέα χαμιλτονιανή;

11. α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x_1,x_2,x_3) = mx_1^2/2 + g(x_2,x_3)$. Ελέγξτε αν υπάρχει ο μετασχηματισμός κατά Legendre ως προς τη μεταβλητή x_1 και βρείτε τη μετασχηματισμένη κατά Legendre F . β) Κάντε το ίδιο για την $f(x) = x^\alpha/\alpha$.

12. Υποθέστε ότι υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση κανονικού μετασχηματισμού τύπου $F_2(q,P,t)$ και ισχύουν οι γνωστές σχέσεις που συνδέουν τον μετασχηματισμό με την $F_2(q,P,t)$. Στη συνέχεια υποθέστε ότι υπάρχει γεννήτρια τύπου $F_3(p,Q,t)$. Κάνοντας μετασχηματισμό Legendre στην $F_2(q,P,t)$ συνδέστε την $F_3(p,Q,t)$ με την $F_2(q,P,t)$ και δείξτε ότι ισχύουν οι γνωστές σχέσεις που συνδέουν τον κανονικό μετασχηματισμό με τη γεννήτρια $F_3(p,Q,t)$.

13. Προσδιορίστε τον κανονικό μετασχηματισμό που γεννά η γεννήτρια συνάρτηση $F_3(p,Q,t) = -(\tan p)(\mathrm{e}^Q - 1)$.

14. Υποθέστε ότι έχουμε εκτεταμένο κανονικό μετασχηματισμό οπότε ισχύει

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q,p,t)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}, \quad \lambda \neq 1.$$

α) Υποθέστε ότι υπάρχει γεννήτρια συνάρτηση του εκτεταμένου κανονικού μετασχηματισμού, τύπου $F_1(q,Q,t)$. Με χρήση αυτής της γεννήτριας συνάρτησης, βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τις αρχικές και τις μετασχηματισμένες γενικευμένες συντεταγμένες και την αρχική χαμιλτονιανή H, με τη νέα χαμιλτονιανή K.

β) Κάντε το ίδιο για γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_3(p,Q,t)$.

15. Λάβετε υπόψη ότι ο μετασχηματισμός $Q = p^2 + q, \quad P = p + t$ είναι κανονικός μετασχηματισμός. Θεωρήστε τη χαμιλτονιανή $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m}$.

Με χρήση του ανωτέρω κανονικού μετασχηματισμού βρείτε τις εξισώσεις Hamilton στις συντεταγμένες Q,P. Λύστε τις εξισώσεις αυτές και βρείτε τα $Q = Q(t,\alpha,\beta), P = P(t,\alpha,\beta)$ όπου α,β σταθερές παράμετροι. Μετασχηματίστε στις συντεταγμένες q, p και βρείτε (τη γνωστή) λύση στη μορφή $q = q(t,\alpha,\beta)$, προσδιορίζοντας τις σταθερές α,β έτσι ώστε $q(0,\alpha,\beta) = 0, \ \dot{q}(0,\alpha,\beta) = \upsilon_0$.

16. Θεωρήστε τη στροφορμή υλικού σημείου περί την αρχή των αξόνων, $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, με χρήση των αγκυλών Poisson δείξτε ότι αν οι καρτεσιανές συνιστώσες $l_1 = l_x$ και $l_2 = l_y$ είναι σταθερές της κίνησης, τότε είναι και η $l_3 = l_z$. Αυτό ισχύει αν ξεκινήσουμε με οποιεσδήποτε δύο από τις τρεις και βγάζουμε το ίδιο συμπέρασμα για την τρίτη. Δηλαδή αν δυο συνιστώσες είναι σταθερές της κίνησης, το διάνυσμα $\vec{l}$ είναι σταθερά της κίνησης.

17. Δείξτε ότι $\left[l^2, l_i\right] = 0$, όπου $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2, \ l_1 = l_x, l_2 = l_y, l_3 = l_z$. Θυμηθείτε την κβαντομηχανική.

18. Με χρήση των αγκυλών του Poisson δείξτε ότι το διάνυσμα Laplace-Runge-Lenz, $\vec{A} = \dfrac{1}{m}\vec{p} \times \vec{l} - \dfrac{\vec{r}}{r}$ είναι διανυσματική σταθερά της κίνησης για κεντρική κίνηση Kepler.

19. Σωμάτιο μάζας ίσης με τη μονάδα είναι δέσμιο να κινείται σε κύκλο ακτίνας ίσης με τη μονάδα. Δεν υπάρχουν τριβές ούτε άλλες ενεργητικές δυνάμεις. Να εργαστείτε σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Γράψτε τη λαγκρανζιανή και τον (ολόνομο) δεσμό. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης με τη λαγκρανζιανή μέθοδο. Στη συνέχεια ακολουθήστε τη μεθοδολογία Dirac και βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. Υπολογίστε τους θεμελιώδεις μεταθέτες του αντίστοιχου κβαντικού συστήματος.

20. Βρείτε τον κανονικό μετασχηματισμό που γεννά η γεννήτρια συνάρτηση $F_{\mathrm{g}} = q_1 P_1 + q_2 Q_2$. Τι τύπος γεννήτρια συνάρτηση είναι αυτή;

21. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $q = \sqrt{2P}\sin Q, \ p = \sqrt{2P}\cos Q$, είναι κανονικός.

Δίνεται η χαμιλτονιανή, $H(q,p) = \dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{1}{2}q^2$. Με χρήση αυτού του κανονικού μετασχηματισμού, βρείτε τη μετασχηματισμένη χαμιλτονιανή $H(Q,P)$. Από τις εξισώσεις Hamilton για αυτήν βρείτε τη λύση $Q = Q(t), P = P(t)$. Προσδιορίστε τα $q = q(t), p = p(t)$.

22. Δίνεται η χαμιλτονιανή, $H=\omega^2 p(q+t)^2$. Βρείτε τη λύση για τη συντεταγμένη θέσης $q=q(t)$. Η λύση δεν είναι πολύ εύκολη με αυτές τις μεταβλητές q,p. Είναι καλό να γίνει μετασχηματισμός σε άλλες μεταβλητές Q,P. Να χρησιμοποιηθεί ο εξαρτώμενος από τον χρόνο μετασχηματισμός, $Q=q+t, P=p$. Δείξτε ότι η γεννήτρια συνάρτηση, $F_2(q,P)=qP+Pt$ που εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, είναι γεννήτρια αυτού του μετασχηματισμού, άρα ο μετασχηματισμός είναι κανονικός. Βρείτε τη νέα χ(κ)αμιλτονιανή $K=K(Q,P,t)$. Από τη σχετική εξίσωση Hamilton βρείτε τη λύση $Q=Q(t)$ και στη συνέχεια, με αντιστροφή βρείτε τη λύση $q=q(t)$.

23. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού μεταξύ δυο ζευγαριών μεταβλητών είναι $Q=\ln\left(1+q^{1/2}\cos p\right),\ P=2\left(1+q^{1/2}\cos p\right)q^{1/2}\sin p$. Δείξτε ότι $F_3(p,Q)=-\left(\mathrm{e}^Q-1\right)^2\tan p$, είναι γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού, επομένως ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

24. Έστω ο μετασχηματισμός, $Q_1=q_1q_2,\ Q_2=\dfrac{1}{2}(q_1^2-q_2^2)$. Αφού ο μετασχηματισμός μετασχηματίζει τα q,Q μεταξύ τους, χωρίς να υπάρχει εξάρτηση από τα p,P, πρόκειται για κανονικό μετασχηματισμό. Βρείτε γεννήτρια συνάρτηση της περίπτωσης $F_2=F_2(q_1,P_1,q_2,P_2)$. Μπορείτε να περιοριστείτε σε συνάρτηση της μορφής $F_2=f_1(q_1,q_2)P_1+f_2(q_1,q_2)P_2$. Να προσδιορίσετε και το άλλο μέρος του μετασχηματισμού για τα P, δηλαδή τα $P_1=P_1(q,p),\ P_2=P_2(q,p)$.

25. α) Δίνεται η λαγκρανζιανή για σωμάτιο μάζας m που κινείται στο επίπεδο x,y, $L=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+ax\dot{y}-\dfrac{1}{2}k_1x^2-\dfrac{1}{2}k_2y^2,\ a,k_1,k_2=$ σταθ.
Με τη μέθοδο του Lagrange να προσδιοριστεί η κίνηση του σωματίου, $x=x(t), y=y(t)$.

β) Βρείτε τη χαμιλτονιανή, πρέπει να βρείτε, $H=\dfrac{1}{2m}p_x^2+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2$. Προσοχή δε μπορείτε να αντιστρέψετε για να βρείτε το $\dot{y}=\dot{y}(p_y)$, όμως μπορείτε να διώξετε τον σχετικό όρο αντικαθιστώντας το $p_y=p_y(x)$. Γράψτε τις εξισώσεις Hamilton. Συγκρίνετε με τις σωστές διαφορικές εξισώσεις που βρήκατε με τη μέθοδο Lagrange στο α). Τι παρατηρείτε;

Σημείωση: Στη χαμιλτονιανή μεθοδολογία που αναπτύξαμε πρέπει να μην υπάρχουν δεσμευτικές σχέσεις στον φασικό χώρο. Εδώ όμως αυτό δεν ισχύει, δεν είναι όλα τα x,y,p_x,p_y ανεξάρτητα μεταξύ τους, όπως φαίνεται από τις σχέσεις που βρήκατε στην πορεία για να υπολογίσετε τη χαμιλτονιανή. Αυτό, στην περίπτωση αυτή, οφείλεται στο ότι η λαγκρανζιανή εξαρτάται από την παράγωγο πρώτης τάξης της μεταβλητής y (δεν υπάρχει παράγωγος δεύτερης τάξης). Η συνήθης χαμιλτονιανή μεθοδολογία δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Εφαρμόστε τη μεθοδολογία του Dirac για να βρείτε σωστά τη λύση του προβλήματος.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 7

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β' Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[3] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[4] Σ. Ι. Ιχτιάρογλου, *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

[5] E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.

[6] J. Hurley, *Necessary and Sufficient Conditions for a Canonical Transformation*, American Journal of Physics, Vol. 40, pp. 533, 1972.

[7] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[8] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 246, pp. 326-332, 1958.

[9] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.

[10] M. K. Fung, *Dirac Bracket for Pedestrians*, Notes, Chinese Journal of Physics, Vol. 52, No. 6, Dec. 2014.

[11] S. Avery, *Dirac Brackets*, Notes based on Dirac's Lectures on Quantum Mechanics, published by Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.

[12] Κ. Ταμβάκης, *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*, Leader Books, 2003.

[13] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

[14] A. W. Wipf, *Hamilton's Formulation for Systems with Constraint*, Lectures at the Seminar "The Canonical Formalism in Classical and Quantum General Relativity" Bad Honnet, Sept. 1993, ETH-Th/93-48, arXiv:hep- th/9312078v3, 20 Dec. 1993.

[15] A. Shirzad and P. Moyassari, *Dirac Quantization of Some Singular Theories*, IUT-Phys/01-11, Dec. 2001, arXiv:hep-th/0112194v1 20 Dec. 2001.

[16] A.M. Stewart, *Longitudinal and transverse components of a vector field*, Sri Lankan Journal of Physics, Vol. 12, pp. 33-42, 2011.

Κεφάλαιο 8: Η Μέθοδος των Hamilton-Jacobi

Η μεθοδολογία του Hamilton και του Jacobi (των Hamilton-Jacobi, H-J), συνίσταται στην εύρεση συνεχούς κανονικού μετασχηματισμού $Q = Q(q, p, t), \;\; P = P(q, p, t)$ ο οποίος να μετασχηματίζει (δηλαδή να μπορεί να συσχετίζει) τις συντεταγμένες q, p την παρούσα χρονική στιγμή t, με τις συντεταγμένες $Q = q_0, P = p_0$ την αρχική χρονική στιγμή t_0. Με αυτό τον τρόπο οδηγούμαστε σε σταθερές τιμές μετασχηματισμένων συντεταγμένων (σταθερές της κίνησης) και η αντιστροφή αυτού του κανονικού μετασχηματισμού μας δίνει τη λύση του προβλήματος αφού προσδιορίζει τις παρούσες συντεταγμένες συναρτήσει των αρχικών τους τιμών, δηλαδή των τιμών που έχουν τη στιγμή $t = t_0$, $q = q(q_0, p_0, t_0, t), \;\; p = p(q_0, p_0, t_0, t)$. Για να επιτύχουμε τα παραπάνω, χρειάζεται να βρεθεί η κατάλληλη γεννήτρια συνάρτηση τύπου F_g. Πιο συγκεκριμένα, για να είναι οι «νέες» συντεταγμένες σταθερές της κίνησης, απαιτούμε η μετασχηματισμένη χαμιλτονιανή $K = H + \dfrac{\partial F_\mathrm{g}}{\partial t}$ να είναι ίση με μια σταθερά, έστω k. Έτσι πράγματι θα έχουμε

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \; \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0,$$

επομένως $P =$ σταθερά, $Q =$ σταθερά.

Δεν περιορίζεται η γενικότητα αν θέσουμε $k = 0$, διότι αν η γεννήτρια συνάρτηση F_g οδηγεί στη χαμιλτονιανή $K = H + \dfrac{\partial F_g}{\partial t} = k$, τότε μπορούμε να διαλέξουμε ως γεννήτρια συνάρτηση τη συνάρτηση $F_\mathrm{g} - kt$ (οι μετασχηματισμοί και οι εξισώσεις κίνησης δεν αλλάζουν) η οποία οδηγεί στην ίση με μηδέν χαμιλτονιανή, πράγματι $H + \dfrac{\partial \left(F_\mathrm{g} - kt\right)}{\partial t} = K - k = k - k = 0$. Οι εξισώσεις κίνησης Hamilton γίνονται

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \;\; \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \tag{8.1}$$

Οι λύσεις πράγματι είναι σταθερές. Θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του μετασχηματισμού, δηλαδή στην εύρεση της γεννήτριας συνάρτησης, F_g , του μετασχηματισμού. Έχουμε για τη μετασχηματισμένη (νέα) χαμιλτονιανή

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F_\mathrm{g}}{\partial t} = K = 0\,. \tag{8.2}$$

Είναι βολικό να ψάξουμε για γεννήτρια συνάρτηση F_g του τύπου $F_2(q, P, t)$. Τότε ξέρουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i}\,. \tag{8.3}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση συνηθίζεται να συμβολίζεται με S, επομένως η Εξ. (8.2) δίνει τη μερική διαφορική εξίσωση

$$H\left(q_1, q_2, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \ . \tag{8.4}$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία που είναι το θεώρημα του Jacobi για την περίπτωση αυτή. Αναζητούμε μια από τις λεγόμενες πλήρεις λύσεις της (8.4). Η κάθε μια οδηγεί στη λύση του προβλήματος, δηλαδή στον προσδιορισμό της εξέλιξης του συστήματος στον χρόνο.

Αυτή η εξίσωση είναι η εξίσωση των Hamilton-Jacobi και έχει $n+1$ ανεξάρτητες μεταβλητές q,t. Μια πλήρης λύση της εξίσωσης, θα μας δώσει τη ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση $S = F_2(q,P,t)$. Η συνάρτηση S λέγεται κύρια συνάρτηση του Hamilton. Αφού η μερική διαφορική εξίσωση είναι πρώτης τάξεως με $n+1$ ανεξάρτητες μεταβλητές, η λύση της είναι συνάρτηση των $n+1$ μεταβλητών q,t. Κάθε τέτοια πλήρης λύση δε σημαίνει ότι είναι μοναδική, γενικώς υπάρχουν διαφορετικές τέτοιες λύσεις. Δεν επιζητούμε τη γενική λύση. Αρκεί μια πλήρης λύση που έχει τη γενική μορφή

$$S = S(q_1, q_2, ..., q_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, t) \ . \tag{8.5}$$

Δηλαδή στην πλήρη λύση υπάρχουν n μεταβλητές, οι $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ και ο χρόνος t καθώς και n σταθερές, οι $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Είναι ευνόητο ότι, εφόσον στην εξίσωση H-J, δεν υπάρχει η S αλλά μόνο παράγωγοί της ως προς q,t , αν η S' είναι λύση θα είναι λύση και η $S'+A$ όπου $A = \text{σταθ.}$ Αυτό σημαίνει ότι η μια σταθερά θα μπορούσε να ληφθεί ως (εντελώς) προσθετική σταθερά. Αυτό όμως δεν επιτρέπεται, όπως θα δούμε και παρακάτω, διότι πρέπει για την ορίζουσα της χεσιανής μήτρας να ισχύει,

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right| \neq 0 \ . \tag{8.6}$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε τις n σταθερές α με τις μετασχηματισμένες, νέες ορμές P_i, αφού οι τελευταίες είναι οι αρχικές ορμές είναι σταθερές. Προς το παρόν ας τις ταυτίσουμε, δηλαδή ας υποθέσουμε ότι

$$P_i = \alpha_i \qquad (t = t_0) \ . \tag{8.7}$$

Οι νέες συντεταγμένες Q_i συνδέονται με τη γεννήτρια F_2 μέσω της γνωστής σχέσης

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ . \tag{8.8}$$

Οι νέες συντεταγμένες είναι οι αρχικές τιμές των συντεταγμένων, δηλαδή είναι σταθερές, οπότε αν υποθέσουμε ότι οι αρχικές συντεταγμένες έχουν τιμές $\beta_i \ \ i = 1,2,...,n$ τότε

$$Q_i = \beta_i, \quad t = t_0 \ . \tag{8.9}$$

Επίσης θα έχουμε (αφού $S = F_2$)

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i} \ . \tag{8.10}$$

Η Εξ. (8.3) γίνεται

$$p_i = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}. \tag{8.11}$$

Εφόσον η ορίζουσα της χεσιανής μήτρας στην Εξ. (8.6) είναι μη μηδενική, οι σχέσεις της Εξ. (8.10) αντιστρέφονται και βρίσκουμε

$$q_i = q_i(\alpha,\beta,t). \tag{8.12}$$

Έτσι προσδιορίζουμε τα q ως συναρτήσεις των αρχικών συντεταγμένων του φασικού χώρου, και του χρόνου.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η μια ανεξάρτητη σταθερά είναι (εντελώς) προσθετική, έστω η α_1, τότε $S = S'(q,\alpha_2,\alpha_2,...,\alpha_n)+\alpha_1$. Όπου λύσεις είναι η S και η S'. Προφανώς η πρώτη γραμμή της χεσιανής ορίζουσας είναι μηδέν, διότι $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=1$ άρα $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial q_j}$=0. Αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα της χεσιανής μήτρας είναι μηδέν, επομένως δε μπορεί να γίνει αντιστροφή των σχέσεων της Εξ. (8.10). Έτσι γίνεται αντιληπτό αυτό που αναφέραμε στα προηγούμενα, ότι δε μπορεί καμιά σταθερά να είναι (μόνο) προσθετική. Δεν απαγορεύεται να θεωρήσουμε και τη λύση της μορφής $S = S'(q,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,t)+g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Αφού η $g(\alpha)$ είναι σταθερά τα S, S' είναι και τα δυο λύσεις. Η χεσιανή ορίζουσα είναι μη μηδενική και ο πρόσθετος όρος δεν την αλλάζει, αφού είναι ευνόητο ότι ισχύει $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_i \partial q_j}$. Ο όρος $g(\alpha)$ δε δημιουργεί πρόβλημα, όμως η μετασχηματισμένη συντεταγμένη θέσης εξαρτάται από την επιλογή της $g(\alpha)$ σύμφωνα με την (8.10). Για να μην έχουμε αυτή την αυθαιρεσία θεωρούμε πάντα ότι $g(\alpha)=0$, στην επόμενη ανάλυσή μας. Δηλαδή δεν θα υπάρχει κανενός είδους προσθετική σταθερά.

Αντικαθιστούμε τα $q_i = q_i(\alpha,\beta,t)$ στην Εξ. (8.11) και βρίσκουμε και τα

$$p_i = p_i(\alpha,\beta,t). \tag{8.13}$$

Οι Εξ. (8.12) και (8.13) αποτελούν τη λύση του προβλήματος.

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι, πολλές φορές είναι χρήσιμο να μετασχηματίσουμε τις (ανεξάρτητες) σταθερές α_i $i=1,2,...n$ σε άλλες (ανεξάρτητες) σταθερές, οι οποίες είναι συναρτήσεις αυτών, δηλαδή στις $\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ $i=1,2,...,n$. Αυτό μπορεί να βολεύει διότι οι νέες σταθερές έχουν σαφέστερο φυσικό νόημα ή για κάποιο λόγο είναι πιο χρήσιμες (κατάλληλες) από τις αρχικές. Με αυτή τη λογική μπορούμε να πάρουμε ως νέες ορμές αυτές τις νέες ανεξάρτητες σταθερές γ_i, δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι

$$P_i = \gamma_i(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n). \tag{8.14}$$

Οι σχέσεις μετασχηματισμού ως τέτοιες μπορούν να αντιστραφούν, οπότε μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις

$$\alpha_i = \alpha_i(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n). \tag{8.15}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην Εξ. (8.5) και βρίσκουμε την S ως συνάρτηση των γ. Δηλαδή

$$\begin{aligned} S &= S(q_1,q_2,...,q_n,\alpha_1(\gamma),\alpha_2(\gamma),...,\alpha_n(\gamma),t) \\ &= S'(q_1,q_2,...,q_n,\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n,t). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Καταχρηστικώς γράφουμε $S'(q,\gamma,t)=S(q,\gamma,t)$ αρκεί να ξέρουμε τι εννοούμε.
Από εκεί και πέρα έχουμε την ίδια διαδικασία όπως πριν, δηλαδή στη θέση της (8.11) έχουμε

$$p_i=\frac{\partial S(q,\gamma,t)}{\partial q_i}\ .$$

Επίσης η νέα μεταβλητή θέσης, αντί της (8.10), είναι η

$$Q_i=\beta_i=\frac{\partial S(q,\gamma,t)}{\partial \gamma_i}\ .$$

Οι νέες συζυγείς μεταβλητές είναι

$$P_i=\gamma_i,\ Q_i=\beta_i=\frac{\partial S(q,\gamma,t)}{\partial \gamma_i}\ .$$

Όπως και πριν προσδιορίζονται τα αρχικά q, p συναρτήσει των Q, P και από τη λύση για τα τελευταία που είναι σταθερές, βρίσκουμε τη λύση για τα αρχικά, δηλαδή τις συναρτήσεις του χρόνου για τα q, p κατά την (πραγματική) κίνηση του συστήματος. Θυμίζουμε ότι η νέα χαμιλτονιανή είναι μηδέν $K=0$.

Ας επανέλθουμε στην αρχική περίπτωση με τις σταθερές $\alpha_i\ i=1,2,...,n$ και επιπλέον με το σύστημα να είναι αυτόνομο, δηλαδή η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο. Τότε η διαδικασία H-J γίνεται απλούστερη. Σε αυτή την περίπτωση, η χαμιλτονιανή είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης, δηλαδή θα ισούται με μια σταθερά έστω h, η οποία δεν είναι πάντοτε ίση με την ενέργεια. Θα έχουμε

$$H(q,p)=h\ . \tag{8.17}$$

Έστω $\zeta=\zeta(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ μια σταθερά, συνάρτηση των n σταθερών α_i. Δοκιμάζουμε λύση της μορφής

$$S(q,\alpha,t)=W(q,\alpha)-\zeta(\alpha)t\ . \tag{8.18}$$

Αυτό λέγεται διαχωρισμός του χρόνου.

Παρακάτω θα χρειαστεί να αντιστρέψουμε τα συστήματα εξισώσεων που προκύπτουν, γι' αυτό πρέπει να ισχύει

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right|\neq 0\,.$$

Η σχέση (8.18) δίνει πράγματι τη λύση που χρειαζόμαστε αφού η αντικατάσταση από την (8.18) στην εξίσωση H-J (8.4) δίνει αποτέλεσμα συμβατό με αυτό της Εξ. (8.17) αφού οδηγεί στην παρακάτω (περιορισμένη) εξίσωση H-J

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=\zeta(\alpha)=h\,. \tag{8.19}$$

Δηλαδή η σταθερά $\zeta(\alpha)$ είναι η h. Αυτή δεν είναι μια πρόσθετη ανεξάρτητη από τις άλλες σταθερά αφού εξαρτάται από αυτές. Ας ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι $\zeta(\alpha)=\alpha_1=h$. Διαλέξαμε την α_1 από τις n σταθερές στην Εξ. (8.18) αλλά μπορούμε να διαλέξουμε οποιαδήποτε, η αρίθμηση των σταθερών είναι αυθαίρετη. Η W λέγεται χαρακτηριστική συνάρτηση του Hamilton. Η W εμφανίζεται ως μέρος της γεννήτριας συνάρτησης, S, όμως θα δούμε ότι μπορεί να θεωρηθεί ως γεννήτρια κανονικού μετασχηματισμού που μας οδηγεί στη λύση του προβλήματος.Η W περιέχει τις παραπάνω n ανεξάρτητες μη προσθετικές σταθερές α_i. Μπορούμε, προφανώς, να δουλέψουμε με την γεννήτρια συνάρτηση S εκφρασμένη όπως στην Εξ. (8.18). Ας δουλέψουμε όμως με την χαρακτηριστική συνάρτηση W ως γεννήτρια συνάρτηση, θεωρώντας κανονικό μετασχηματισμό όπου οι νέες ορμές είναι οι n σταθερές κίνησης α_i και η γεννήτρια συνάρτηση έχει τη μορφή F_2, χωρίς τον χρόνο, δηλαδή είναι η $W(q,P)$. Όπως προηγουμένως, στην αρχή υποθέτουμε ότι $P_i=\alpha_i$ και $h=\alpha_1(=P_1)$. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \tag{8.20}$$

Η χαμιλτονιανή είναι σταθερά της κίνησης και ισχύει η Εξ. (8.17). Αντικαθιστώντας σε αυτήν τα p_i από τις πρώτες σχέσεις της Εξ. (8.20) βρίσκουμε ότι

$$H\left(q_1,q_2,...,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1},\frac{\partial W}{\partial q_2},...,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=\alpha_1=h. \tag{8.21}$$

Αυτή είναι η Εξ. (8.19). Επομένως, χρησιμοποιώντας ως γεννήτρια την W, βρήκαμε ξανά την Εξ. (8.19), η οποία είχε βρεθεί με χρήση της S στη μορφή της Εξ. (8.18), δηλαδή έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Έχουμε για τη νέα χαμιλτονιανή

$$\begin{aligned}&K=H+\frac{\partial W}{\partial t}=H+0=H\\&K=\alpha_1=h.\end{aligned} \tag{8.22}$$

Επομένως οι κανονικές εξισώσεις για τις παραγώγους των ορμών είναι

$$\dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0,\qquad P_i=\alpha_i. \tag{8.23}$$

Επειδή η χαμιλτονιανή εξαρτάται μόνο από την P_1, αφού $K=P_1=\alpha_1$, έχουμε τις εξισώσεις κίνησης για τα Q_i

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i&=\frac{\partial K}{\partial P_i}=\frac{\partial K}{\partial \alpha_i}=1,\quad i=1\\&=0\quad i\neq 1.\end{aligned} \tag{8.24}$$

Η ολοκλήρωση των ανωτέρω εξισώσεων δίνει

$$Q_1=t+\beta_1,\quad Q_i=\beta_i\quad i\neq 1. \tag{8.25}$$

Όπου β_i είναι n το πλήθος σταθερές. Η Εξ. (8.21) λέγεται και αυτή εξίσωση των Hamilton-Jacobi και μπορεί να δώσει την εξάρτηση της $W(q,\alpha)$ από τις παλιές συντεταγμένες q_i.

Από τις δεύτερες από τις σχέσεις των Εξ. (8.20) και τις Εξ. (8.24), (8.25), βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= t + \beta_1 = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial \alpha_1} \\
Q_i &= \beta_i = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial \alpha_i}, \; i \neq 1.
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

Εφόσον η χεσιανή στην Εξ. (8.18) είναι μη μηδενική, τότε οι Εξ. (8.26) μπορούν να λυθούν ως προς q_i. Αν αντικαταστήσουμε αυτά τα q_i στις πρώτες από τις Εξ. (8.20) βρίσκουμε και τα p_i.

Δηλαδή η λύση για τις αρχικές μεταβλητές είναι:

$$
\begin{aligned}
q_i &= q_i(\alpha,\beta,t) \\
p_i &= p_i(\alpha,\beta,t).
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

Αναφέρουμε και εδώ ότι δεν είναι απαραίτητο να ληφθούν τα α_i ως οι νέες ορμές. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε, όπως πριν, τις σταθερές αυτές σε νέες ανεξάρτητες σταθερές τις $\gamma_i = \gamma_i(\alpha),\; i=1,2,...,n$.

Όπως και προηγουμένως, παίρνουμε ως νέες ορμές αυτές τις σταθερές, δηλαδή $P_i = \gamma_i$. Ισχύει $h = h(\alpha)$ με αντιστροφή των $\alpha_i = \alpha_i(\gamma),\; i=1,2,...,n$ έχουμε ότι $\gamma_i = \gamma_i(\alpha),\; i=1,2,...,n$, οπότε βρίσκουμε ότι $h = h(\gamma)$. Επίσης

$$
Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i}.
$$

Η νέα χαμιλτονιανή είναι $K = K(\gamma)$.

Οι εξισώσεις κίνησης φαίνονται παρακάτω,

$$
\begin{aligned}
\gamma_i &= \gamma_i(\alpha) \\
\dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = \upsilon_i(\gamma) \\
Q_i &= \upsilon_i t + \beta_i.
\end{aligned}
\tag{8.28}
$$

Τα υ_i είναι σταθερές, ανεξάρτητα του χρόνου. Το φυσικό νόημα των σταθερών γίνεται κατανοητό βλέποντας τι ισχύει όταν $t = t_0$. Επειδή έχουμε αυτόνομα συστήματα οποιαδήποτε στιγμή μπορεί να ληφθεί ως αρχική και η εξέλιξη του συστήματος θα είναι η ίδια από εκεί και πέρα, δηλαδή δεν χάνεται η γενικότητα αν ληφθεί $t_0 = 0$.

Είναι άξιο λόγου να τονίσουμε τα παρακάτω ώστε να έχουμε περισσότερη κατανόηση σχετική με την κύρια συνάρτηση του Hamilton. Ισχύει

$$
S = S(q,\alpha,t),\;\; \alpha_i = P_i = \text{σταθερά}
$$

Επομένως

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial S}{\partial t}\ . \tag{8.29}$$

Με χρήση των Εξ. (8.4) και (8.11) καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H=L,\ S=\int L\mathrm{d}t+\text{σταθερά}\ . \tag{8.30}$$

Δηλαδή η κύρια συνάρτηση του Hamilton ισούται με το αόριστο ολοκλήρωμα της λαγκρανζιανής συν μια αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι ισούται, κατά κάποιο τρόπο, με το ολοκλήρωμα δράσης συν σταθερά. Αυτό έχει θεωρητικό ενδιαφέρον, αλλά δεν βοηθά στη λύση προβλημάτων. Το αόριστο ολοκλήρωμα δε μπορεί να υπολογιστεί χωρίς να λυθεί το πρόβλημα, αφού για αυτόν τον σκοπό χρειάζεται να είναι γνωστά τα $q_i=q_i(t)$ και τα $p_i=p_i(t)$. Με ό, τι ακολουθεί μπορούμε να έχουμε περισσότερη κατανόηση για τη χαρακτηριστική συνάρτηση του Hamilton. Όταν η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο (αυτόνομο σύστημα), έχουμε

$$\begin{aligned}&S(q,\alpha,t)=W(q,\alpha)-\alpha_1 t\\&\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i.\end{aligned} \tag{8.31}$$

Χρησιμοποιούμε τις πρώτες από την Εξ. (8.20) και βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i,\quad W=\int p_i\mathrm{d}q_i+\text{σταθερά}\ . \tag{8.32}$$

Δηλαδή κατά κάποιο τρόπο μπορούμε να πούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του Hamilton διαφέρει από τη συνοπτική (απλουστευμένη) δράση, $\int\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{d}q_i$, κατά μια σταθερά. Ισχύει ότι είπαμε για την αντίστοιχη περίπτωση της κύριας συνάρτησης του Hamilton.

8.1 Χωρισμός μεταβλητών της εξίσωσης Hamilton-Jacobi

Οι εξισώσεις του Hamilton για n γενικευμένες συντεταγμένες (θέσης), είναι $2n$ συνήθεις (διαφορικές) εξισώσεις, κανονικές εξισώσεις κίνησης. Η μέθοδος Hamilton-Jacobi ανάγει το πρόβλημα στη λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Αυτό το πρόβλημα συνήθως δεν είναι ευκολότερο να λυθεί από ότι είναι το προηγούμενο, συνήθως είναι πολύ πιο δύσκολο. Δεν υπάρχει γενικός τρόπος λύσης τέτοιων εξισώσεων. Υπάρχει η κατηγορία προβλημάτων στα οποία η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, οπότε είναι σταθερά της κίνησης, ακόμη και αν δεν συμπίπτει με την ενέργεια του δυναμικού συστήματος. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα πλείστα από τα ενδιαφέροντα προβλήματα της Φυσικής. Σε τέτοια προβλήματα, όπως είδαμε στα προηγούμενα, μπορεί να γίνει διαχωρισμός του χρόνου, δηλαδή καταλήγουμε σε μια απλή διαφορική εξίσωση ως προς τον χρόνο, πρώτης τάξης και η εξίσωση H-J που προκύπτει μετά τον διαχωρισμό του χρόνου, είναι η περιορισμένη εξίσωση H-J, όπου εισέρχεται η χαρακτηριστική συνάρτηση Hamilton, $W(q,\alpha)$, αντί της κύριας συνάρτησης Hamilton, $S(q,\alpha,t)$.Μπορεί, σε μερικές περιπτώσεις, η περιορισμένη εξίσωση H-J να αναχθεί σε n συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης που η κάθε μια περιέχει μια μόνο από τις μεταβλητές q και μέχρι n σταθερές, οπότε το πρόβλημα λέγεται ότι είναι πλήρως διαχωρίσιμο. Η λύση του προβλήματος σε αυτή την περίπτωση γίνεται πολύ ευκολότερα. Υπάρχουν προβλήματα που μπορεί να λυθούν χωρίς να μπορεί να γίνει διαχωρισμός του χρόνου. Παρόλα αυτά, όπως είπαμε και προηγουμένως, σχεδόν όλες οι πρακτικά χρήσιμες περιπτώσεις έχουν χαμιλτονιανές που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο, οπότε μπορεί να γίνεται ο διαχωρισμός του χρόνου. Επίσης, υπάρχουν προβλήματα που λύνονται μόνο με τη μέθοδο H-J και χωρισμό μεταβλητών. Η διαδικασία H-J λύσης πρακτικών προβλημάτων είναι η πιο ισχυρή μέθοδος λύσης των εξισώσεων κίνησης της Αναλυτικής Δυναμικής.

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την (πλήρη) διαχωρισιμότητα ενός αυτόνομου συστήματος με n ζεύγη μεταβλητών q, p, είναι το κριτήριο Levi-Civita. Πρέπει να τονιστεί ότι, για δεδομένο σύστημα, η δυνατότητα διαχωρισμού εξαρτάται και από την επιλογή των μεταβλητών για την περιγραφή του συστήματος. Το πρόβλημα υλικού σημείου που κινείται μέσα σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων είναι (πλήρως) διαχωρίσιμο σε σφαιρικές συντεταγμένες αλλά δεν είναι διαχωρίσιμο σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Το γνωστό πρόβλημα των τριών σωμάτων δεν είναι (πλήρως) διαχωρίσιμο για οποιεσδήποτε κανονικές συντεταγμένες. Υπενθυμίζουμε, ότι αυτό είναι το πρόβλημα όπου υπάρχουν τρία υλικά σημεία τα οποία αλληλεπιδρούν ανά δύο με κεντρικές δυνάμεις αντιστρόφου τετραγώνου.

Αν ένα δυναμικό σύστημα είναι διαχωρίσιμο για κάποιες κανονικές μεταβλητές είναι διαχωρίσιμο και για όλες τις άλλες μεταβλητές που προκύπτουν από τις αρχικές με κανονικό μετασχηματισμό. Μπορεί κάποιο δυναμικό σύστημα να είναι διαχωρίσιμο όταν περιγράφεται από δυο διαφορετικές ομάδες κανονικών μεταβλητών, ενώ ο μετασχηματισμός που τις συνδέει δεν είναι κανονικός μετασχηματισμός, αυτό το σύστημα λέγεται εκφυλισμένο σύμφωνα με την ορολογία του Schwarzchild. Το κριτήριο Levi-Civita αποτελούν οι $n(n-1)/2$, αρκετά δύσχρηστες, σχέσεις

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_s}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_s}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_s}+\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s}=0\\ &k=1,2,\ldots,n \quad s=1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{8.33}$$

Ας ξεκινήσουμε με μια μόνο διαχωρίσιμη μεταβλητή, στη γενική περίπτωση που το σύστημα δεν είναι αυτόνομο αλλά η χαμιλτονιανή εξαρτάται άμεσα και από τον χρόνο. Μια γενικευμένη συντεταγμένη (χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω η q_1) είναι διαχωρίσιμη όταν η χαμιλτονιανή έχει τέτοια μορφή ώστε στην εξίσωση H-J , η συντεταγμένη q_1 και η αντίστοιχη $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ εμφανίζονται στη χαμιλτονιανή μόνο ως συνδυασμός της μορφής $f_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$, όπου δεν εμφανίζονται οι άλλες συντεταγμένες, ούτε οι άλλες αντίστοιχες παράγωγοι, ούτε ο χρόνος. Τότε η εξίσωση H-J γίνεται

$$H\left(q_2, q_3, \ldots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \frac{\partial S}{\partial q_3}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, f_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), t\right)=0 . \tag{8.34}$$

Αναζητούμε λύση, $S(q,t)$, της μορφής

$$S(q,t)=S_1(q_1)+S'(q_2,q_3,\ldots,q_n,t) . \tag{8.35}$$

Αντικαθιστούμε στην Εξ. (8.34) και καταλήγουμε στην

$$H\left(q_2, q_3, \ldots q_n, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \frac{\partial S'}{\partial q_3}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, f_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right), t\right)=0 \tag{8.36}$$

Αφού η Εξ. (8.35) είναι λύση της εξίσωσης H-J η Εξ. (8.36) είναι ταυτότητα που ισχύει για κάθε τιμή της q_1. Αυτό σημαίνει ότι όταν το q_1 μεταβάλλεται, μόνο η έκφραση f_1 αλλάζει τιμή. Άρα για να είναι η (8.36) ταυτότητα, πρέπει η f_1 να ισούται με μια αυθαίρετη σταθερά, έστω $f_1=\alpha_1$. Έτσι η εξίσωση H-J χωρίζεται σε δυο εξισώσεις, μια που περιέχει μόνο την S_1 και μεταβλητή την q_1, και μια άλλη εξίσωση που περιέχει μόνο την S' και τις υπόλοιπες μεταβλητές συμπεριλαμβανομένου του χρόνου $q_2, q_3, ..., q_n, t$

$$\begin{aligned} & f_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \\ & H\left(q_2, q_3, ..., q_n, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \frac{\partial S'}{\partial q_3}, ..., \frac{\partial S'}{\partial q_n}, \alpha_1, t\right) = 0 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Η λύση της πρώτης εξίσωσης πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$S_1 = S_1(q_1, \alpha_1) = W_1(q_1, \alpha_1)\,. \tag{8.38}$$

Έχουμε παραλείψει μια προσθετική σταθερά, διότι ξέρουμε ότι δεν επιτρέπονται σταθερές που είναι μόνο προσθετικές. Αν και η q_2 είναι διαχωρίσιμη, τότε θα απαντά στη δεύτερη από τις Εξ. (8.37) ως συνδυασμός $f_2\left(q_2, \frac{\partial S'}{\partial q_2}\right)$. Μπορούμε να συνεχίσουμε τον διαχωρισμό θεωρώντας λύση της $H = 0$, που έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & S' = S_2(q_2) + S''(q_3, q_4, ..., q_n, t) \\ & \text{ή} \;\; S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + S''(q_3, q_4, ..., q_n, t). \end{aligned} \tag{8.39}$$

Αυτά οδηγούν στις σχέσεις

$$\begin{aligned} & f_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \\ & f_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right) = \alpha_2 \\ & H\left(q_3, q_4, ..., q_n, \frac{\partial S''}{\partial q_3}, \frac{\partial S''}{\partial q_4}, ..., \frac{\partial S''}{\partial q_n}, \alpha_1, \alpha_2, t\right) = 0 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Ισχύει

$$S_2 = S_2(q_2, \alpha_2) = W_2(q_2, \alpha_2)\,. \tag{8.41}$$

Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί ώστε να συμπεριληφθούν όλες οι διαχωρίσιμες συντεταγμένες. Αν η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο τότε, όπως έχουμε δει, μπορούμε πρώτα να διαχωρίσουμε τον χρόνο οπότε στη συνέχεια αντί για την εξίσωση Hamilton έχουμε να λύσουμε την περιορισμένη εξίσωση Hamilton. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν σχέσεις παρόμοιες με τις παραπάνω, όπου αντί των $S, S', S''...$ εμφανίζονται οι $W, W_1, W_2, ...$.

Αν όλες οι μεταβλητές, συμπεριλαμβανομένου του χρόνου, είναι διαχωρίσιμες τότε η εξίσωση H-J είναι πλήρως διαχωρίσιμη. Οι σταθερές α είναι οι σταθερές διαχωρισμού.

Θα δείξουμε ότι μια αγνοήσιμη συντεταγμένη είναι διαχωρίσιμη. Μια αγνοήσιμη συντεταγμένη, έστω η q_1, δεν υπάρχει στη χαμιλτονιανή και επομένως δεν υπάρχει και στην αντίστοιχη εξίσωση H-J. Αυτή είναι ειδική περίπτωση όσων είπαμε προηγουμένως, εδώ ως συνάρτηση

$$f_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$$

μπορεί να θεωρηθεί η $\frac{\partial S}{\partial q_1}$.

Από την πρώτη των Εξ. (8.37) βρίσκουμε

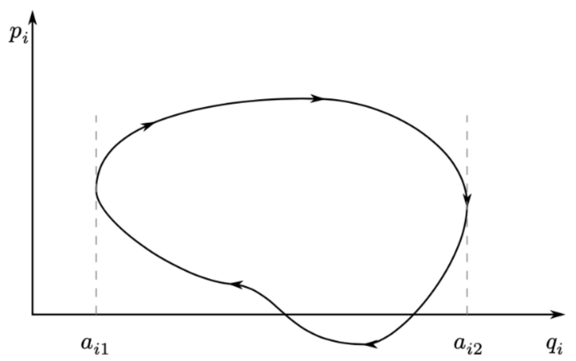
$$S_1 = S'(q_2, q_3, ..., q_n, t) + \alpha_1 q_1 . \qquad (8.42)$$

Η σταθερά είναι η σταθερή τιμή της συζυγούς ορμής $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}$ που αντιστοιχεί στην αγνοήσιμη συντεταγμένη. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται σε απλούστερο πρόβλημα με λιγότερες (ανεξάρτητες) μεταβλητές. Αν υπάρχουν και άλλες αγνοήσιμες συντεταγμένες τότε η ανωτέρω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί. Αν όλες είναι αγνοήσιμες και η χαμιλτονιανή είναι σταθερά της κίνησης, το πρόβλημα λύνεται κατά τετριμμένο τρόπο.

8.2 Δράσεις και γωνίες ως κανονικές μεταβλητές

8.2.1 Κυκλικά συστήματα

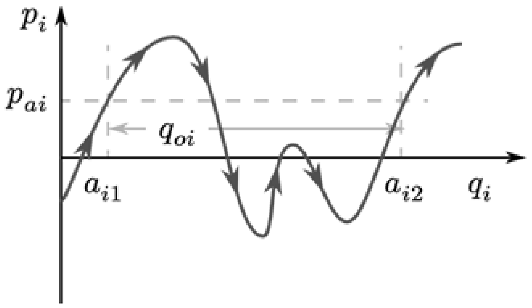
Υπάρχουν αυτόνομα δυναμικά συστήματα στα οποία υπάρχει περιοδικότητα (σωστότερος είναι ο όρος επαναληψιμότητα) με την έννοια που θα δούμε παρακάτω. Χρησιμοποιείται και ο όρος κυκλικό σύστημα. Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα τεχνική βασισμένη στη μέθοδο H-J , με την οποία μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για ένα τέτοιο σύστημα χωρίς να βρούμε τη λύση του. Η μέθοδος επινοήθηκε τον 19ο αιώνα από τον Γάλλο αστρονόμο Delaunay. Συγκεκριμένα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις διάφορες συχνότητες που υπεισέρχονται σε ένα μηχανικό σύστημα, χωρίς να χρειάζεται να βρούμε τη λύση των εξισώσεων κίνησης, δηλαδή την κίνηση του συστήματος. Η λύση μπορεί να μην είναι εύκολο να βρεθεί. Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να ακολουθηθεί για πλήρως διαχωρίσιμα συστήματα. Θεωρούμε σύστημα με γενικευμένες κανονικές συντεταγμένες θέσης $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ και αντίστοιχες συζυγείς κανονικές ορμές $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, και αυτόνομη χαμιλτονιανή $H(q, p) = h$. Καθώς το σύστημα εξελίσσεται στον χρόνο (κινείται) διαγράφει τροχιά στον φασικό χώρο q, p, $2n$ διαστάσεων. Το σύστημα διαγράφει κάποια τροχιά και στον κάθε υπόχωρο 2 διαστάσεων, $q_i, p_i,\ i = 1, 2, ..., n$. Η κάθε μια από αυτές τις δισδιάστατες τροχιές είναι προβολή στον κάθε έναν υπόχωρο q_i, p_i, της τροχιάς στον χώρο q, p . Η κάθε τροχιά-προβολή μπορεί να παρασταθεί ως $p_i = p_i(q_i)$. Αυτό που λέμε επαναληψιμότητα ή περιοδικότητα ή κυκλικότητα, καθορίζεται από τα χαρακτηριστικά της τροχιάς στον χώρο των φάσεων. Υπάρχουν δυο είδη κυκλικότητας (περιοδικότητας, επαναληψιμότητας). Το ένα είδος χαρακτηρίζεται από το ότι στον κάθε δισδιάστατο υπόχωρο η τροχιά είναι κλειστή. Στην αστρονομία αυτό λέγεται λίκνιση (από το λίκνο, κούνια), δηλαδή ταλάντευση. Οι τιμές των q_i είναι φραγμένες, όπως είναι και οι τιμές των p_i . Η κίνηση του εκκρεμούς όταν κατά την κίνησή του δεν φτάνει ποτέ στο ανώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς του στον θεσικό χώρο, είναι μια τέτοια περίπτωση. Το Σχήμα 8.1 δείχνει μια τυπική τροχιά, που θεωρούμε ότι διαγράφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Από οποιοδήποτε σημείο και αν αρχίσει η διαγραφή του «κύκλου», μετά από έναν πλήρη «κύκλο» οι τιμές των q, p θα είναι ίδιες. Οι ακραίες τιμές του q_i είναι οι δυο σταθερές τιμές a_{i1}, a_{i2} $a_{i1} < a_{i2}$. Η κάθε μια τέτοια τροχιά επαναλαμβάνεται η ίδια καθώς το σύστημα κινείται.



Σχήμα 8.1 *Λίκνιση.*

Το άλλο είδος περιοδικότητας, κυκλικότητας, επαναληψιμότητας, χαρακτηρίζεται από το ότι η p_i είναι περιοδική, επαναλήψιμη, συνάρτηση του αντίστοιχου q_i με σταθερή επαναληψιμότητα (χρησιμοποιούμε και τον όρο «περίοδο») που είναι ίση με $q_{i0} = a_{i2} - a_{i1}$, με $a_{i1} < a_{i2}$ σταθερές. Αυτό λέγεται περιστροφή. Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι η περιστροφή στερεού περί ορισμένο άξονα, όπου το q είναι γωνία και η «περίοδος» είναι 2π. Στην περίπτωση της περιστροφής, σε αντίθεση με τη λίκνιση, οι τιμές των q_i δεν είναι φραγμένες αλλά μπορεί να πάρουν οποιαδήποτε τιμή, οι τιμές των p_i εξακολουθούν να είναι φραγμένες. Το φράξιμο στα p χαρακτηρίζει περατωμένη κίνηση.

Το Σχήμα 8.2 δείχνει αυτή την περίπτωση. Το p_i στην αρχή και στο τέλος κάθε τέτοιου κύκλου παίρνει την ίδια σταθερή τιμή p_{ai}.



Σχήμα 8.2 *Περιστροφή.*

Σημειώνουμε ότι ένας «κύκλος» είναι η ελάχιστη κλειστή ή ανοιχτή διαδρομή στην οποία υπάρχει περιοδικότητα. Προφανώς υπάρχει περιοδικότητα για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο αυτής της διαδρομής, δηλαδή για πολλούς κύκλους. Στην περίπτωση της περιστροφής, είναι δυνατόν να παραστήσουμε τον επίπεδο δισδιάστατο χώρο των φάσεων πάνω σε μια κυλινδρική επιφάνεια οπότε και σε αυτή την περίπτωση η τροχιά είναι κλειστή, βλέπε Σχήμα 6.5. Αν θέλουμε να είναι η αναπαράσταση πιο συνεπής, σύμφωνη με την ευκλείδεια γεωμετρία, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη μεταβλητή q έτσι ώστε η περίοδος να γίνει 2π.

Είναι δυνατόν στο ίδιο δυναμικό σύστημα να εμφανίζονται και οι δυο τύποι περιοδικών κινήσεων, π.χ. αυτό συμβαίνει στο απλό εκκρεμές, βλέπε Κεφ.6, Παραδείγματα-ειδικά θέματα , το 3.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι αν υπάρχει μια μόνο γενικευμένη συντεταγμένη (μονοδιάστατο σύστημα) τότε ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα για να κάνει έναν κύκλο στον χώρο των φάσεων είναι μια σταθερά και επομένως η κίνηση στο επίπεδο q, p είναι περιοδική με τον χρόνο. Αν όμως υπάρχουν περισσότερες συντεταγμένες, τότε γενικώς ο χρόνος για έναν συγκεκριμένο κύκλο στον δισδιάστατο υπόχωρο q_i, p_i δεν είναι μια σταθερά αλλά εξαρτάται από την εξέλιξη στον χρόνο των άλλων συντεταγμένων και αντίστοιχων ορμών. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση στον κάθε έναν δισδιάστατο υπόχωρο δεν είναι περιοδική με τον χρόνο. Αυτή η περιοδικότητα στον χρόνο υπάρχει, όπως θα δούμε, μόνον αν το σύστημα είναι πλήρως διαχωρίσιμο οπότε οι κινήσεις στους υπόχωρους είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη.

Παρόλα αυτά και για πλήρως διαχωρίσιμο σύστημα, που οι (χρονικές) συχνότητες είναι σταθερές, γενικώς το σύστημα στον πολυδιάστατο χώρο q, p , κατά την πραγματική του κίνηση, θα διαγράφει τροχιά που δεν θα το φέρει ποτέ στην αρχική κατάσταση, δηλαδή στις αρχικές τιμές όλων των q_i, p_i. Δεν υπάρχει, γενικώς, ούτε σε αυτή την περίπτωση περιοδικότητα ως προς τον χρόνο. Υπάρχει τέτοια περιοδικότητα, μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπως θα δούμε παρακάτω.

Χρησιμοποιούμε τους όρους, μεταβλητές δράση-γωνία ή μεταβλητές δράσης-γωνίας (action-angle variables). Ας θεωρήσουμε ένα αυτόνομο, πλήρως διαχωρίσιμο δυναμικό σύστημα με n γενικευμένες συντεταγμένες, (ανεξάρτητες) μεταβλητές. Έχουμε για τη χαμιλτονιανή, την χαρακτηριστική συνάρτηση και την (περιορισμένη) εξίσωση Hamilton,

$$\begin{aligned} &H(q,p)=h \\ &W(q,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}W_i(q_i,\alpha) \\ &\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \\ &H\left(q_1,q_2,...,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1},\frac{\partial W}{\partial q_2},...,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=h. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Ισχύουν $p_i=\dfrac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_i}=\dfrac{\partial W_i(q_i,\alpha)}{\partial q_i},\ p_i=p_i(q_i,\alpha)$.

Θεωρούμε το σύνολο σταθερών $J=\left(J_1,J_2,...,J_n\right)$ που ορίζονται από τις σχέσεις,

$$J_i(\alpha)=\oint p_i(q_i,\alpha)\mathrm{d}q_i=\oint\frac{\partial W_i(q_i,\alpha)}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i \tag{8.44}$$

Το ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή q_i , είναι κατά μήκος διαδρομής που αντιστοιχεί σε μια περίοδο, δηλαδή κατά μήκος ενός μόνο κύκλου στον υπόχωρο q_i, p_i και στην περίπτωση της λίκνισης θα θεωρούμε ότι διαγράφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Αυτή η διαδρομή είναι σταθερή, δεδομένη, άρα τα $J_i(\alpha)$ είναι σταθερές, συναρτήσεις των σταθερών α. Υποθέτουμε ότι μπορούνε να αντιστρέψουμε τις Εξ. (8.44) και να προσδιορίσουμε τα α ως συναρτήσεις των J, $\alpha=\alpha(J)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την παρακάτω $W(q,J)$ ως γεννήτρια συνάρτηση κανονικού μετασχηματισμού, έχουμε

$$\begin{aligned} W(q,J)&=W\left(q,\alpha(J)\right)=\sum_{i=1}^{n}W_i\left(q_i,\alpha(J)\right) \\ &=\sum_{i=1}^{n}W_i(q_i,J_1,J_2,...,J_n). \end{aligned} \tag{8.45}$$

Αυτή μας οδηγεί από τις κανονικές (συζυγείς) μεταβλητές q, p στις w, J οι οποίες ορίζονται ως νέες κανονικές (συζυγείς) μεταβλητές από τις γνωστές σχέσεις μετασχηματισμού τύπου $F_2(q,P)$,

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W(q,J)}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i,J)}{\partial q_i} \\ w_i &= \frac{\partial W(q,J)}{\partial J_i}. \end{aligned} \tag{8.46}$$

Οι νέες συντεταγμένες w είναι οι γωνίες- μεταβλητές και οι J οι δράσεις- μεταβλητές.
Από τις πρώτες των Εξ. (8.46) καταλήγουμε στις

$$p_i(q_i,\alpha) = \frac{\partial W_i\left(q_i, J(\alpha)\right)}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i,\alpha)}{\partial q_i}\ . \tag{8.47}$$

Θυμίζουμε ξανά τις σχέσεις ορισμού,

$$J_i(\alpha) = \oint p_i(q_i,\alpha)\mathrm{d}q_i \tag{8.48}$$

Αυτές οι σχέσεις μας λένε ότι τα J είναι ένα είδος συνοπτικής δράσης που είδαμε στα προηγούμενα. Από την (8.48) φαίνεται ότι η δράση είναι ίση με το «εμβαδόν» που περικλείεται από την τροχιά που διαγράφεται σε έναν κύκλο στη λίκνιση, ή με το εμβαδόν που βρίσκεται κάτω από την τροχιά σε έναν κύκλο στην περιστροφή. Αυτές εξαρτώνται από τις σταθερές α, δηλαδή τις αρχικές συνθήκες, οπότε γενικώς μπορεί να έχουν αυθαίρετες τιμές. Αν κάποια από αυτές τις συντεταγμένες διαχωρισμού είναι αγνοήσιμη (κυκλική), τότε είναι σταθερά της κίνησης. Αν η q_i δεν είναι περιορισμένη, τότε στο επίπεδο των συγκεκριμένων q_i, p_i η τροχιά $p_i = p_i(q_i)$ είναι απέραντη ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα της συντεταγμένης q_i. Δε φαίνεται να έχει επαναληψιμότητα (περιοδικότητα). Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε περίπτωση περιστροφής (αφού το q_i δεν είναι περιορισμένο), έτσι στο q_i δίνεται αυθαίρετη «περίοδος». Επειδή όμως στην περίπτωση περιστροφής η περιοδικότητα είναι γωνία γι’ αυτό μια τέτοια κυκλική μεταβλητή q_i έχει φυσιολογική «περίοδο» 2π. Ισχύει επομένως $J_i = 2\pi p_i,\ p_i = \text{σταθ.}$

Η κβάντωση στην παλιά κβαντομηχανική, γίνεται θεωρώντας ότι για την τιμή του ανωτέρω ολοκληρώματος για έναν κύκλο (δηλαδή για το κάθε ένα από τα J), ισχύει

$$J_n = nh \text{ όπου } n = 1,2,\ldots,+\infty$$

Προσοχή: εδώ το h είναι η σταθερά του Planck.
Αυτή είναι η συνθήκη κβάντωσης Wilson-Sommerfeld. Η εφαρμογή στον αρμονικό ταλαντωτή οδηγεί στη σχέση

$$E = n\hbar\omega,\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

όπου

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

είναι η ανηγμένη σταθερά του Planck.
Το αποτέλεσμα διαφέρει από το σωστό, που σύμφωνα με τη «σωστή» κβαντομηχανική είναι

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \ n=1,2,...,+\infty$$
.

Εφόσον ο κανονικός μετασχηματισμός είναι ανεξάρτητος του χρόνου, η νέα χαμιλτονιανή προκύπτει από την παλιά με απλή αντικατάσταση, οπότε για τη νέα χαμιλτονιανή, $H(w,J)$, συνάρτηση των w,J, έχουμε

$$\begin{aligned}
&H(w,J)=H\left(q(w,J),p(w,J)\right)\\
&=H\left(q(w,J),\frac{\partial W(q,J)}{\partial q_1},\frac{\partial W(q,J)}{\partial q_2},...,\frac{\partial W(q,J)}{\partial q_n}\right)\\
&=H\left(q(w,J),\frac{\partial W\left(q,\alpha(J)\right)}{\partial q_1},\frac{\partial W\left(q,\alpha(J)\right)}{\partial q_2},...,\frac{\partial W\left(q,\alpha(J)\right)}{\partial q_n}\right).
\end{aligned}\tag{8.49}$$

Από την τελευταία σχέση στην Εξ. (8.43) μπορούμε να γράψουμε

$$H\left(q_1,q_2,...,q_n,\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_1},\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_2},...,\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_n}\right)=h(\alpha).\tag{8.50}$$

Είναι ευνόητο ότι οι $n+1$ σταθερές α,h δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και αυτό το δηλώνουμε εισάγοντας τη συνάρτηση $h=h(\alpha)$. Από τις Εξ. (8.49), (8.50) συμπεραίνουμε ότι

$$H(w,J)=h\big(\alpha(J)\big)=h(J)\,.\tag{8.51}$$

Δηλαδή η νέα χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τις νέες μεταβλητές τύπου γωνίας αλλά είναι συνάρτηση μόνον των νέων μεταβλητών τύπου δράσης, J.

Οι νέες κανονικές εξισώσεις κίνησης Hamilton είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned}
\dot{J}_i&=-\frac{\partial H(J)}{\partial w_i}=0\\
\dot{w}_i&=\frac{\partial H(J)}{\partial J_i}.
\end{aligned}\tag{8.52}$$

Η λύση των πρώτων από αυτές οδηγούν στις

$$J_i=\gamma_i=\text{σταθερές}\,.\tag{8.53}$$

Στη συνέχεια, από τις δεύτερες σχέσεις στις (8.52) βρίσκουυμε ότι

$$\dot{w}_i=\upsilon_i(J)=\left.\frac{\partial H(J)}{\partial J_i}\right|_{J_i=\gamma_i}\tag{8.54}$$

Αν τα w αντιπροσωπεύουν γωνίες τότε τα υ_i, τα οποία είναι σταθερά, αντιπροσωπεύουν συχνότητες. Θα δούμε καλύτερα το φυσικό νόημα παρακάτω. Οι συχνότητες προσδιορίζονται χωρίς να βρεθούν προηγουμένως τα $q,\,p$ ως συναρτήσεις του χρόνου. Αφού τα υ δεν εξαρτώνται από τον χρόνο, έχουμε για τις γωνίες- μεταβλητές (που είναι οι νέες συντεταγμένες)

$$w_i = \upsilon_i(J)t + \beta_i . \tag{8.55}$$

Τα β_i είναι σταθερές, αρχικές τιμές.

Η σχέση μεταξύ των w και q δίνεται από τον ορισμό

$$w_i(q,J) = \frac{\partial W(q,J)}{\partial J_i},$$

βλέπε τις δεύτερες σχέσεις της Εξ. (8.46). Τα J είναι σταθερές της κίνησης, επομένως καθώς το δυναμικό σύστημα κινείται, η μεταβολή δw_i του κάθε ενός w_i, συνδέεται με τις μεταβολές των q σύμφωνα με την εξίσωση

$$\delta w_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_i(q,J)}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W(q,J)}{\partial J_i \partial q_j} \mathrm{d}q_j . \tag{8.56}$$

Με χρήση της Εξ. (8.47) βρίσκουμε

$$\delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{j=1}^{n} p_j(q_j, J) \mathrm{d}q_j . \tag{8.57}$$

Ας δούμε καλύτερα το φυσικό νόημα που μπορεί να δοθεί στα υ. Υποθέτουμε ότι γίνεται μια δυνητική, εικονική, ή αλλιώς δυνατή μεταβολή, όπου μια μόνο συντεταγμένη, η q_j, μεταβάλλεται και διαγράφει έναν μόνον πλήρη κύκλο λίκνισης ή περιστροφής, ενώ όλες οι άλλες συντεταγμένες, παγώνουν, δηλαδή διατηρούνται σταθερές. Γενικώς, αυτή δεν είναι μια πραγματική κίνηση στον χρόνο. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το w_i θα μεταβληθεί κατά Δw_i και θα ισχύει

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial J_i} \mathrm{d}q_j \tag{8.58}$$

Τα q, J είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, οπότε η παραγώγιση ως προς J μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα, επομένως

$$\Delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j \mathrm{d}q_j . \tag{8.59}$$

Άρα

$$\Delta w_i = \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij} . \tag{8.60}$$

Δηλαδή η γωνία- μεταβλητή w_i, μεταβάλλεται κατά μια μονάδα όταν η συντεταγμένη q_i μεταβάλλεται καθώς το δυναμικό σύστημα διαγράφει έναν κύκλο (ενώ οι άλλες συντεταγμένες q κρατιούνται σταθερές). Αν μια άλλη συντεταγμένη, έστω η q_j $i \neq j$, υποστεί μια τέτοια μεταβολή, η μεταβολή του w_i είναι μηδέν. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν όλα τα w κρατηθούν σταθερά εκτός από ένα, το w_i , το οποίο μεταβάλλεται κατά μια μονάδα, όλες οι συντεταγμένες q θα γυρίσουν στις τιμές που ξεκίνησαν (λίκνιση) ή θα μετατοπιστούν κατά μια περίοδό τους, q_{0i} (περιστροφή).

Επομένως, με χρήση και της Εξ. (8.55) προκύπτει ότι

$$\Delta w_i = 1 = \upsilon_i \tau_i \,. \tag{8.61}$$

Το τ_i είναι η περίοδος και επομένως η σταθερά υ_i είναι το αντίστροφό της, άρα είναι πράγματι η (θεμελιώδης) συχνότητα της περιοδικής κίνησης της q_i .

Καταλήγουμε στο ότι, για περιοδικά συστήματα (με την έννοια που έχει εισαχθεί στα προηγούμενα), από την έκφραση της χαμιλτονιανής H συναρτήσει των J , $H = H(J)$, μπορούμε με παραγώγιση της H ως προς J να υπολογίσουμε τις διάφορες συχνότητες υ_i των q_i χωρίς να λύσουμε πλήρως το πρόβλημα. Πράγματι από τις (8.52), 8.55) έχουμε

$$\upsilon_i = \frac{1}{\tau_i} = \dot{w}_i = \frac{\partial H(J)}{\partial J_i} \,.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι διαχωρισμένες κινήσεις είναι όλες του τύπου λίκνισης. Αυτό σημαίνει ότι το κάθε q_i και αντίστοιχο p_i επανέρχονται στις αρχικές τους τιμές μετά από τη διαγραφή ενός πλήρους κύκλου τους. Όσα είπαμε λίγο πιο πάνω μας λένε ότι σύμφωνα με την (8.60) τα q_i, p_i δεν μεταβάλλονται ή επανέρχονται στις τιμές που είχαν στην αρχή του κύκλου τους. Τέτοια συστήματα λέγονται πολλαπλώς περιοδικά συστήματα, και τα q, p είναι πολλαπλώς περιοδικές συναρτήσεις των w_i , το καθένα με περίοδο μονάδα. Τέτοιες πολλαπλά περιοδικές συναρτήσεις μπορούν πάντοτε να παρασταθούν με μια πολλαπλή σειρά Fourier. Δίνουμε τη μορφή για τα q , για τα p ισχύει το αντίστοιχο

$$\begin{aligned}
q_i &= \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}, \ldots, \sum_{j_n=-\infty}^{+\infty} A^i_{j_1 j_2,\ldots,j_n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(j_1 w_1 + j_2 w_2 +,\ldots,+ j_n w_n)} \\
&= \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}, \ldots, \sum_{j_n=-\infty}^{+\infty} A^i_{j_1 j_2,\ldots,j_n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\left(j_1(\upsilon_1 t+\beta_1)+ j_2(\upsilon_2 t+\beta_2)+,\ldots,+ j_n(\upsilon_n t+\beta_n)\right)} \\
A^i_{j_1 j_2,\ldots,j_n} &= \int_0^1 \int_0^1, \ldots, \int_0^1 q_i(w)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(j_1 w_1 + j_2 w_2 +,\ldots,+ j_n w_n)}\, \mathrm{d}w_1 \mathrm{d}w_2, \ldots, \mathrm{d}w_n \,.
\end{aligned} \tag{8.62}$$

Σημειώνουμε ότι, γενικώς, το κάθε $q_i(t)$ δεν είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή δεν αποκτά τις ίδιες τιμές σε κανονικά χρονικά διαστήματα. Σε αυτή την περίπτωση η q_i λέγεται ημι-περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου μόνο αν οι συχνότητες υ_i είναι ισόμετρες (commesurable), δηλαδή είναι ρητά πολλαπλάσια η μια της άλλης.

Στην περίπτωση που η κίνηση είναι περιστροφή, τότε σε έναν κύκλο η κάθε μια w_i μεταβάλλεται κατά 1 αλλά η κάθε συντεταγμένη q_i μεταβάλλεται κατά $w_i q_{0i}$, έτσι δεν αποκτά την τιμή με την οποία ξεκίνησε, όμως η ποσότητα $q_i - w_i q_{0i}$ αποκτά την αρχική της τιμή. Αυτό σημαίνει ότι αυτή η ποσότητα μπορεί να αναπτυχθεί σε πολλαπλή σειρά Fourier όπως αυτή στην Εξ. (8.62). Επομένως βλέπουμε ότι μπορούμε να φτιάξουμε μια πολλαπλά περιοδική συνάρτηση ξεκινώντας από μια περιστροφική συντεταγμένη, έτσι μπορούμε να χειριστούμε τα πράγματα όπως στην λίκνιση. Για τα p στην περιστροφή δεν υπάρχει αυτό το πρόβλημα.

Θα περιοριστούμε μόνο στην περίπτωση της λίκνισης. Από τα ανωτέρω μπορεί κάποιος να καταλάβει ότι οποιαδήποτε συνάρτηση των ανωτέρω q, p, δηλαδή συνάρτηση της μορφής $F = F(q, p) = F\left(q(w), p(w)\right) = F(w)$, είναι πολλαπλά περιοδική συνάρτηση των w_i και επομένως αναπτύσσεται σε πολλαπλή σειρά Fourier, παρόμοια με αυτή που δείχνει η Εξ. (8.62). Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty},...,\sum_{j_n=-\infty}^{+\infty} A^F_{j_1 j_2,...,j_n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(j_1 w_1 + j_2 w_2 +,...,+ j_n w_n)} \\ &= \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty},...,\sum_{j_n=-\infty}^{+\infty} A^F_{j_1 j_2,...,j_n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(j_1(\upsilon_1 t+\beta_1)+j_2(\upsilon_2 t+\beta_2)+,...,+j_n(\upsilon_n t+\beta_n)\right)} \\ A^F_{j_1 j_2,...,j_n} &= \int_0^1\int_0^1,...,\int_0^1 F(w)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(j_1 w_1 + j_2 w_2 +,...,+ j_n w_n)}\,\mathrm{d}w_1\mathrm{d}w_2,...,\mathrm{d}w_n\ . \end{aligned} \tag{8.63}$$

Τα j_i είναι δείκτες, δεν έχουν σχέση με τα J_k. Η περίπτωση που εξετάσαμε είναι η πιο γενική, πολλά δυναμικά συστήματα δεν είναι τόσο γενικά αλλά είναι απλούστερα. Μια απλή περίπτωση είναι αυτή για την οποία ισχύει όχι η δεύτερη σχέση της Εξ. (8.46) αλλά η απλούστερη σχέση,

$$w_i = w_i(q_i, J) = \frac{\partial W_i}{\partial J_i}. \tag{8.64}$$

Αυτό σημαίνει ότι η κάθε μια χωριζόμενη συντεταγμένη q_i είναι συνάρτηση μόνο της αντίστοιχης w_i, δηλαδή $q_i = q_i(w_i, J)$ και μέσω αυτής είναι συνάρτηση του χρόνου. Έτσι η πολλαπλή σειρά Fourier γίνεται απλή σειρά Fourier, δηλαδή έχουμε,.

$$q_i = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A^i_j \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jw_i} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A^i_j \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}j(\upsilon_i t+\beta_i)} \tag{8.65}$$

Η σχέση αυτή περιγράφει περιοδική κίνηση ως προς τον χρόνο. Πράγματι, υπάρχει η θεμελιώδης συχνότητα για το q_i που είναι η υ_i και οι αρμονικές της. Αυτές οι συντεταγμένες, σύμφωνα με την ορολογία του κεφαλαίου όπου εξετάζεται η περίπτωση με ταλαντώσεις μικρού πλάτους, είναι οι λεγόμενες κανονικές συντεταγμένες του συστήματος και οι τρόποι ταλάντωσής τους λέγονται κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Όμως τονίζουμε ότι, ακόμη και σε τέτοιες απλές περιπτώσεις, συναρτήσεις των q, p μπορεί να είναι πολλαπλώς περιοδικές και χρειάζεται η ανάπτυξη που φαίνεται στην Εξ. (8.63). Δηλαδή οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να μην είναι περιοδικές ως προς τον χρόνο. Για παράδειγμα μπορεί να έχουμε καρτεσιανές συντεταγμένες για την περιγραφή του συστήματος, οι οποίες είναι συναρτήσεις των ανωτέρω και να μην είναι περιοδικές με τον χρόνο.

Ας δούμε τι πρέπει να ισχύει ώστε να υπάρχει περιοδικότητα ως προς τον χρόνο. Θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (8.63) που είναι το ανάπτυγμα Fourier συνάρτησης της μορφής $F = F(q, p)$. Η (8.62) είναι ειδική περίπτωση αυτής. Στην Εξ. (8.63) ο χρόνος υπάρχει μόνο στην εκθετική παράσταση που είναι η:

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left[j_1(\upsilon_1 t+\beta_1)+j_2(\upsilon_2 t+\beta_2)+,...,+j_n(\upsilon_n t+\beta_n)\right]}. \tag{8.66}$$

Αν αυτή είναι περιοδική ως προς τον χρόνο τότε και η $F(q, p)$ θα είναι περιοδική με τον χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει ένα χρονικό διάστημα, μια χρονική περίοδος Δt, μετά την παρέλευση του οποίου η εκθετική έκφραση να παίρνει την τιμή που είχε πριν την παρέλευσή του. Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις,

$$\begin{aligned}&\upsilon_1\Delta t=k_1,\upsilon_2\Delta t=k_2,...,\upsilon_n\Delta t=k_n\\&\Delta t=\frac{k_1}{\upsilon_1}=\frac{k_2}{\upsilon_2}=,...,=\frac{k_n}{\upsilon_n}\end{aligned}\tag{8.67}$$

όπου τα $k_1,k_2,...,k_n$ είναι μη μηδενικοί θετικοί ακέραιοι.

Τότε τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ η εκθετική έκφραση, μετά από μερικές πράξεις γίνεται

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left[j_1(\upsilon_1 t+\beta_1)+j_2(\upsilon_2 t+\beta_2)+,...,+j_n(\upsilon_n t+\beta_n)\right]}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(j_1k_1+j_2k_2+,...,+j_nk_n\right)}.$$

Είναι σαφές ότι η παράσταση $j_1k_1+j_2k_2+,...,+j_nk_n=k$ όπου k θετικός ή αρνητικός ακέραιο ή μηδέν, άρα $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(j_1k_1+j_2k_2+,...,+j_nk_n\right)}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k}$. Επομένως σύμφωνα με τον τύπο του Moivre, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}=\cos\xi+\mathrm{i}\sin\xi$, βρίσκουμε ότι $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k}=1$. Δηλαδή μετά από χρόνο Δt η παράσταση έχει την τιμή που είχε προηγουμένως. Έχουμε επομένως περιοδικότητα ως προς τον χρόνο με περίοδο Δt. Αν αυτό είναι το ελάχιστο χρονικό διάστημα για το οποίο ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε $1/\Delta t$ είναι η θεμελιώδης συχνότητα στην απλή σειρά Fourier που προκύπτει.

Με άλλα λόγια, τα ανωτέρω περιγράφουν την περίπτωση που για κάθε δυο συχνότητες υ_i,υ_j από τις n συχνότητες του συστήματος, ισχύουν σχέσεις της μορφής

$$k_i\upsilon_i=k_j\upsilon_j \text{ ή } \upsilon_i=\frac{k_j}{k_i}\upsilon_j .$$

Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται πλήρως ισόμετρο (completely commesurable). Τότε, οι γραφικές παραστάσεις στο καρτεσιανό επίπεδο των σχέσεων μεταξύ οποιονδήποτε δυο $q_i(t),q_j(t)$, παριστάνουν κλειστές, επαναλαμβανόμενες καμπύλες, τις καμπύλες Lissajous. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε με την πάροδο του χρόνου ένα μέρος του ανωτέρου επιπέδου της γραφικής αναπαράστασης γεμίζει πυκνά όλο και περισσότερο από τις μη επαναλαμβανόμενες τροχιές. Αν οι ανωτέρω σχέσεις ισχύουν για μερικές μόνον από τις n συχνότητες (και αντίστοιχες συντεταγμένες) $r<n$, τότε το σύστημα είναι μερικώς ισόμετρο. Γενικώς οι συχνότητες εξαρτώνται από τα J, οπότε για κάποια συστήματα συντεταγμένων αυτές οι σχέσεις ισχύουν για όλες τις αρχικές συνθήκες, άρα για όλα τα J, ενώ για κάποια άλλα συστήματα ισχύουν μόνον για ειδικές αρχικές συνθήκες, άρα μόνο για κάποιες τιμές των J. Έχει αποδειχτεί από τον J. Vinti, (J. Res. Nat. Bur. Standards, 65B, 131 ,1961) ότι ακόμη και στην περίπτωση που κάποιο q_i εκφράζεται με πολλαπλή περιοδική σειρά Fourier όλων των w και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μια ειδική σχέση μεταξύ του q_i και του w_i επομένως και του υ_i. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε πως το χρονικό διάστημα T περιέχει m πλήρεις κύκλους του q_i συν ένα κλάσμα κύκλου. Γενικώς, οι χρόνοι που χρειάζονται για τους διαδοχικούς κύκλους είναι διαφορετικοί αφού η q_i είναι πολλαπλά περιοδική με τον χρόνο. Ισχύει όμως ότι, καθώς ο χρόνος T αυξάνεται απεριόριστα, τότε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m}{T}=\upsilon_i .$$

Δηλαδή, η μέση συχνότητα της κίνησης του q_i δίνεται πάντοτε από την υ_i, ακόμη και όταν η κίνηση του q_i δεν είναι περιοδική με τον χρόνο.

Η εξίσωση ορισμού (8.44), δηλώνει ότι όταν το q_i διαγράφει ένα πλήρη κύκλο, δηλαδή, όταν το w_i μεταβάλλεται κατά μονάδα, η χαρακτηριστική συνάρτηση «αυξάνεται» κατά J_i. Ορίζουμε τη συνάρτηση W' από τη σχέση

$$W' = W - \sum_{i=1}^{n} w_i J_i \ .$$

Αυτή έχει την ίδια τιμή όταν το κάθε ένα w_i μεταβληθεί κατά μονάδα, ενώ όλες οι άλλες γωνίες-μεταβλητές μένουν σταθερές. Το συμπέρασμα, όπως και στα προηγούμενα, είναι πως η W' είναι πολλαπλά περιοδική και μπορεί να αναπτυχτεί σε πολλαπλή σειρά Fourier ως προς τα w ή τις συχνότητες υ, όπως φαίνεται στην Εξ. (8.63). Αφού για τις γωνίες-μεταβλητές ισχύουν οι σχέσεις μετασχηματισμού

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \ ,$$

είναι κατανοητό ότι η ανωτέρω σχέση για την W', ορίζει ένα μετασχηματισμό Legendre από τις μεταβλητές (q, J) στις μεταβλητές (q, w). Πράγματι, αν θυμηθούμε τις σχέσεις $F = F_1(q,Q)$ και $F = F_2(q,P) - \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i$, φαίνεται ότι αν η $W(q, J)$ είναι γεννήτρια συνάρτηση τύπου $F_2(q,P)$ τότε η $W'(q,w)$ είναι η αντίστοιχη γεννήτρια τύπου $F_1(q,Q)$, που και στις δυο περιπτώσεις μετασχηματίζουν από τις μεταβλητές (q, p) στις (w, J). Ενώ και η W' γεννά τον ίδιο (κανονικό) μετασχηματισμό όπως και η W, σε αντίθεση με την τελευταία δεν είναι λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi.

Έχουμε ήδη δει στα προηγούμενα πως η περιγραφή ενός μηχανικού συστήματος με κάποιες συντεταγμένες είναι πολλαπλά περιοδική όταν ο λόγος κάθε δυο συχνοτήτων του υ_i / υ_j δεν είναι ρητό διαφορετικό κλάσμα. Αν όμως είναι ρητό κλάσμα τότε είναι απλά περιοδική στον χρόνο. Αν τέτοιες σχέσεις ισχύουν για όλα τα ζεύγη συχνοτήτων τότε το σύστημα λέγεται πλήρως ισόμετρο, αν όχι τότε λέγεται μερικώς ισόμετρο.

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα σύνδεση μεταξύ ισομετρίας και των συντεταγμένων στις οποίες η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι διαχωρίσιμη. Μπορεί να δειχτεί ότι για μη ισόμετρα συστήματα, η τροχιά του σημείου που περιγράφει το μηχανικό σύστημα στον θεσικό χώρο και στον φασικό χώρο, γεμίζει πυκνά ένα μέρος του εν λόγω χώρου. Αυτό φαίνεται εύκολα με τις (μη συνήθεις) καμπύλες Lissajous για τέτοιες περιπτώσεις.

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα είναι τέτοιο ώστε η κίνηση για την κάθε μια από τις χωριζόμενες συντεταγμένες είναι απλά περιοδική και επομένως έχει δειχτεί πως είναι ανεξάρτητη από τις κινήσεις των άλλων συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά του σημείου του συνολικού (όλου) συστήματος πρέπει να περιορίζεται από τις επιφάνειες με σταθερά q_i και p_i, που χαρακτηρίζουν τα όρια της κίνησης-ταλάντευσης.

Αυτό ισχύει για κίνηση-λίκνηση, όμως μπορούμε να επεκταθούμε και στην περίπτωση περιστροφής περιορίζοντας τις γωνίες στην περιοχή 0 με 2π. Οι παραπάνω επιφάνειες καθορίζουν τον «όγκο» του χώρου που γεμίζει πυκνά από το σημείο που παριστάνει το όλο σύστημα. Προκύπτει ότι ο διαχωρισμός των μεταβλητών για μη ισόμετρα συστήματα πρέπει να είναι μοναδικός, δηλαδή η εξίσωση Hamilton-Jacobi δε μπορεί να διαχωριστεί σε δυο διαφορετικά συντεταγμένων, εκτός από τετριμμένες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα είναι η μεταβολή κλίμακας. Επομένως δυνατότητα διαχωρισμού της κίνησης για περισσότερα από ένα συστήματα συντεταγμένων, κανονικά είναι ένδειξη ότι το σύστημα είναι ισόμετρο.

Το απλούστερο παράδειγμα ισομετρίας είναι να υπάρχει εκφυλισμός, πράγμα που συμβαίνει όταν δυο ή περισσότερες συχνότητες είναι ίσες. Στην περίπτωση του απλού τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, αν δυο από τις τρεις σταθερές επαναφοράς είναι ίσες, τότε οι αντίστοιχες δυο συχνότητες είναι ίσες και το σύστημα έχει μονό εκφυλισμό, αν και οι τρεις σταθερές και επομένως και οι τρεις συχνότητες είναι ίσες τότε έχουμε πλήρη εκφυλισμό. Όταν έχουμε εκφυλισμό, οι θεμελιώδεις συχνότητες δεν είναι ανεξάρτητες και η (περιοδική) κίνηση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί με λιγότερες από τις n συχνότητες που έχει κανονικά το μηχανικό σύστημα. Αν υπάρχουν m ανεξάρτητες σχέσεις εκφυλισμού μεταξύ των συχνοτήτων, τότε το πλήθος των συχνοτήτων που χρειάζονται είναι $n-m+1$ όπου συμπεριλαμβάνεται μια συχνότητα ίση με μηδέν. Αυτή η μείωση του πλήθους των συχνοτήτων γίνεται κατά κομψό τρόπο με τη χρήση ενός μετασχηματισμού σημείου, των μεταβλητών δράσης-γωνίας. Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός σημείου επηρεάζει μόνο τις συντεταγμένες θέσης και όχι τις συντεταγμένες-ορμές. Γράφουμε τις ανεξάρτητες σχέσεις εκφυλισμού στη μορφή,

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji}\upsilon_i = 0,\ j = 1, 2, ..., m \quad .$$

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε κανονικό μετασχηματισμό του γενικού τύπου

$$F_2(q,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i(q)P_i \quad ,$$

όπου οι $f_i(q)$ είναι αυθαίρετες. Έχουμε τις γνωστές σχέσεις μετασχηματισμού

$$p_i = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q_i},\ Q_i = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P_i} \quad .$$

Με την ανωτέρω επιλογή γεννήτριας ο μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός σημείου (σημειακός μετασχηματισμός) με την έννοια του ότι οδηγεί σε σχέσεις της μορφής $Q_i = Q_i(q)$, δηλαδή οι νέες συντεταγμένες θέσης εξαρτώνται μόνο από τις παλιές συντεταγμένες θέσης και όχι από τις παλιές ορμές. Κάθε μετασχηματισμός σημείου είναι κανονικός αφού υπάρχει πάντα γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $q_i \to w_i,\ P_i \to J_i,\ f_i(q) \to f_i(w)$.

Ορίζεται ότι,

$$f_i(w) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}w_j \quad i = 1, 2, ..., m\ ,\quad f_i(w) = w_i \quad i = m+1, m+2, ..., n \quad .$$

Αυτό οδηγεί στη γεννήτρια

$$F_2(w,J) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}w_i\right)J_i' + \sum_{i=m+1}^{n} w_i J_i' \, .$$

Οι σχέσεις μετασχηματισμού που γράψαμε προηγουμένως τώρα γίνονται:

$$J_i = \frac{\partial F_2(w,J')}{\partial w_i},\quad w_i' = \frac{\partial F_2(w,J')}{\partial J_i'} \, .$$

Καταλήγουμε στις σχέσεις

$$w_i' = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., m$$
$$w_i' = w_i, \quad i = m+1, m+2, ..., n \ .$$

Οι νέες (σταθερές) μεταβλητές δράσης J', βρίσκονται από τη λύση του (αλγεβρικού) συστήματος

$$J_j = \sum_{i=1}^{m} k_{ij} J_i' + \sum_{i=m+1}^{n} \delta_{ij} J_i' \ .$$

Οι νέες συχνότητες υ_i' (τώρα συχνότητες των αρχικών συντεταγμένων θέσης, δηλαδή των w) βρίσκονται από

$$\upsilon_i' = \dot{w}_i' = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \upsilon_j = 0 \quad i = 1, 2, ..., m$$
$$\upsilon_i' = \upsilon_i \qquad i = m+1, m+2, ..., n \ .$$

Βλέπουμε ότι m το πλήθος συχνότητες είναι μηδέν και μείνανε $n-m$ μη μηδενικές ανεξάρτητες συχνότητες και μια μηδενική, σύνολο συχνοτήτων $n-m+1$.

Είναι φανερό ότι και τα w_i' είναι συντεταγμένες-γωνίες ως προς τις οποίες το σύστημα είναι πολλαπλά περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο ίση με τη μονάδα για την κάθε μια συντεταγμένη. Όπως ξέρουμε, οι μηδενικές συχνότητες στο ανάπτυγμα στη σειρά Fourier, αντιπροσωπεύουν σταθερούς όρους. Αυτοί οι όροι υπάρχουν επίσης στην αρχική σειρά Fourier ως προς τα υ, βλέπε Εξ. (8.62), όταν συμβεί οι δείκτες j_i είναι τέτοιοι ώστε να υπάρχουν συνθήκες εκφυλισμού.

Από τη σχέση

$$\dot{w}_i' = \upsilon_i' = \frac{\partial H(J')}{\partial J_i'}$$

συμπεραίνουμε ότι η χαμιλτονιανή πρέπει να είναι ανεξάρτητη από τις μεταβλητές δράσης J_i' των οποίων οι αντίστοιχες συχνότητες υ_i' είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι, για ένα πλήρως εκφυλισμένο μηχανικό σύστημα, η χαμιλτονιανή μπορεί να γίνει έτσι που να εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή δράσης, εφόσον υπάρχει μόνο μια μη μηδενική συχνότητα. Σε μερικές περιπτώσεις κάποια J είναι μηδέν από τον ορισμό τους, αυτό σημαίνει πως υπάρχει εκφυλισμός και η σχετική μεταβλητή- δράση δεν υπάρχει στη χαμιλτονιανή ούτε στη γεννήτρια συνάρτηση. Η αντίστοιχη συχνότητα είναι μηδέν, οι ανεξάρτητες μη μηδενικές συχνότητες περιορίζονται κατά μία.

Σημειώνουμε ότι, η χαρακτηριστική συνάρτηση Hamilton W αποτελεί γεννήτρια συνάρτηση για τον μετασχηματισμό από (q, p) σε (w', J'). Αφού τα μεγέθη J' είναι n το πλήθος ανεξάρτητες σταθερές, αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές σταθερές $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ολοκλήρωσης μπορεί να εκφραστούν ως προς τις J', έτσι η W θα αποκτήσει τη μορφή $W(q, J')$. Σε αυτή τη μορφή είναι γεννήτρια συνάρτηση ενός νέου συνόλου κανονικών μεταβλητών στις οποίες τα J' είναι οι κανονικές ορμές. Όμως σύμφωνα με τον μετασχηματισμό σημείου που γεννά η ανωτέρω γεννήτρια συνάρτηση

$$F_2(w, J) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} w_i \right) J_i' + \sum_{i=m+1}^{n} w_i J_i' \ ,$$

ξέρουμε ότι τα w' είναι συζυγή των J', έτσι το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι νέες θεσικές συντεταγμένες που γεννά η $W(q, J')$ πρέπει να είναι το σύνολο των γωνιών-μεταβλητών w', με τις εξισώσεις μετασχηματισμού,

$$w_i' = \frac{\partial W}{\partial J_i'} .$$

Αυτό αποδεικνύεται με χρήση τις σχέσεις

$$J_j = \sum_{i=1}^{m} k_{ij} J_i' + \sum_{i=m+1}^{n} \delta_{ij} J_i'$$

που είδαμε παραπάνω.

Παραδείγματα - Ειδικά θέματα

1. Εφαρμογή της μεθόδου Hamilton-Jacobi στον αρμονικό ταλαντωτή

Η χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή διατηρείται κατά την κίνηση και είναι ίση με την ενέργεια. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
&H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = E \\
&\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.
\end{aligned}
\tag{8.68}
$$

Το σύστημα είναι αυτόνομο και η εξίσωση των H-J είναι

$$
\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = E = \alpha \tag{8.69}
$$

Μια πλήρης λύση της Εξ. (8.69) είναι η

$$
W = \int \sqrt{2m\alpha}\sqrt{1 - \frac{m^2\omega^2 q^2}{2\alpha}}\mathrm{d}q\,. \tag{8.70}
$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
&p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha}\sqrt{1 - \frac{m^2\omega^2 q^2}{2\alpha}} \\
&Q = t + \beta' = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\right) \\
&q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \beta) \\
&\beta = \omega\beta'
\end{aligned}
\tag{8.71}
$$

Η σχέση $q = q(t)$ είναι το γνωστό αποτέλεσμα, κίνηση για τον αρμονικό ταλαντωτή.
Το p υπολογίζεται από την πρώτη και την τρίτη των Εξ. (8.71)

$$
p = \sqrt{2m\alpha}\cos(\omega t + \beta)\,. \tag{8.72}
$$

Από τις Εξ. (8.72) και την τρίτη από τις Εξ. (8.71) απαλείφοντας τον χρόνο βρίσκουμε τις εξισώσεις των τροχιών στον χώρο των φάσεων (orbit, εξίσωση τροχιάς χωρίς τον χρόνο), με παράμετρο το α που εδώ είναι η ενέργεια $E = \alpha$.

Έχουμε

$$
\frac{1}{2mE}p^2 + \frac{m\omega^2}{2E}q^2 = 1. \tag{8.73}
$$

Φυσικά αυτό είναι αναμενόμενο αποτέλεσμα αφού η σταθερά α είναι η ενέργεια, είναι η σχέση από την οποία ξεκινήσαμε, η πρώτη από τις Εξ. (8.68).

2. Εφαρμογή της μεθόδου Hamilton-Jacobi στην κεντρική κίνηση με σφαιρικές συντεταγμένες
Η χαμιλτονιανή διατηρείται κατά την κίνηση, είναι η ενέργεια και ισχύουν για τη χαμιλτονιανή και την (περιορισμένη) εξίσωση H-J

$$H - E = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) + V(r) - E = 0$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) - E = 0. \tag{8.74}$$

Η μεταβλητή φ είναι αγνοήσιμη επομένως δοκιμάζουμε για λύση χαρακτηριστική συνάρτηση Hamilton της μορφής

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi)$$
$$W_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \varphi, \quad \alpha_\varphi = \text{σταθερά}. \tag{8.75}$$

Έτσι η εξίσωση H-J γίνεται

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2\right) + V(r) - E = 0$$
$$\left(\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) + r^2\left(\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + 2m\big(V(r) - E\big)\right) = 0. \tag{8.76}$$

Μετά τον διαχωρισμό της φ η έκφραση που προκύπτει περιέχει δυο συνδυασμούς που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες θ και r αντιστοίχως. Ο συνδυασμός που αντιστοιχεί στη μεταβλητή θ πρέπει να είναι μια σταθερά, που παριστάνουμε με α_θ^2, συγκεκριμένα έχουμε

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2. \tag{8.77}$$

Τέλος, για τον συνδυασμό με το r ισχύει η εξίσωση

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\big(E - V(r)\big). \tag{8.78}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε τρεις σταθερές $\alpha_\varphi, \alpha_\theta, E$ (όπως αναμένεται, αφού υπάρχουν τρεις γενικευμένες συντεταγμένες) οι οποίες τελικώς θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Η λύση των Εξ. (8.77), (8.78) δίνει τις $W_\theta(\theta, \alpha_\varphi, \alpha_\theta), W_r(r, E, \alpha_\theta)$, ισχύει η σχέση $W_\varphi(\alpha_\varphi, \varphi) = \alpha_\varphi \varphi$, οπότε προσδιορίζουμε και την W. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε την κίνηση από τις σχέσεις

$$\frac{\partial W}{\partial E}=\frac{\partial W_r(r,E,\alpha_\theta)}{\partial E}=t+\beta_1$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi}=\varphi+\frac{\partial W_\theta(\theta,\alpha_\varphi,\alpha_\theta)}{\partial \alpha_\varphi}=\beta_2 \tag{8.79}$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta}=\frac{\partial W_\theta(\theta,\alpha_\varphi,\alpha_\theta)}{\partial \alpha_\theta}+\frac{\partial W_r(r,E,\alpha_\theta)}{\partial \alpha_\theta}=\beta_3.$$

Οι τρεις πρόσθετες σταθερές, β , προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Όπως αναμένεται έχουμε συνολικά έξι σταθερές. Η πρώτη από τις Εξ. (8.79) δίνει τη σχέση $r=r(E,\alpha_\theta,\beta_1,t)$, η δεύτερη τη σχέση $\varphi=\varphi(\alpha_\varphi,\alpha_\theta,\beta_2,\theta)=\varphi_1(\alpha_\varphi,\alpha_\theta,\theta)+\beta_2$ και η τρίτη τη σχέση $r=r(E,\alpha_\varphi,\alpha_\theta,\beta_3,\theta)$.

Δηλαδή έχουμε ό,τι χρειάζεται για να προσδιορίσουμε οτιδήποτε σχετίζεται με την κίνηση.

Αξίζει να τονίσουμε ότι με τη μέθοδο H-J για τη λύση του προβλήματος, τα πράγματα γίνονται ευκολότερα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους. Εκτός από την $r=r(t)$, βρήκαμε τη λύση στη μορφή της τροχιάς χωρίς τον χρόνο, όπως φαίνεται από τη δεύτερη και τρίτη σχέση των Εξ. (8.79).

Επίσης οι σταθερές της κίνησης εμφανίζονται αυτόματα. Πράγματι, η σχέση

$$\alpha_\varphi=p_\varphi=\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi},$$

είναι το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής περί τον πολικό άξονα των πολικών σφαιρικών συντεταγμένων, τον άξονα z .

Η Εξ. (8.77) είναι το θεώρημα διατήρησης του μέτρου της ολικής στροφορμής περί την αρχή των αξόνων, Ο. Πράγματι, αφού $p_\theta=\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta},\alpha_\varphi=p_\varphi$ έχουμε $p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\alpha_\theta^2$. Η έκφραση αυτή είναι το τετράγωνο της τιμής της ολικής στροφορμής, το l^2 . Δηλαδή έχουμε το γνωστό θεώρημα διατήρησης. Τέλος, η Εξ. (8.78) θέτοντας $p_r=\frac{\partial W_r}{\partial r}$, και λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη σχέση για τη διατήρηση του $l,(l^2)$, οδηγεί στο θεώρημα διατήρησης της ενέργειας, E .

3. Αρμονικός ταλαντωτής με μεταβλητές δράση-γωνία

Να δειχτεί ότι για τον αρμονικό ταλαντωτή με χαμιλτονιανή

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}$$

η συχνότητα ταλάντωσης είναι $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Λύση

Η χαμιλτονιανή είναι σταθερά της κίνησης ίση με την ενέργεια, επομένως η τροχιά στον φασικό δισδιάστατο χώρο q,p καθορίζεται από τη σχέση

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}=E\,.$$

Αυτή η σχέση παριστάνει έλλειψη με ημιάξονες που έχουν μήκη τα $a=\sqrt{2mE},\ b=\sqrt{2E/k}$. Η επιφάνεια της έλλειψης ισούται με την τιμή της μεταβλητής-δράσης αφού ισχύει $J = \oint p(q)\mathrm{d}q$. Το εμβαδόν της έλλειψης είναι ίσο με

$$\pi ab = J = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}E$$.

Επομένως

$$H(J) = E = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}J .$$

Οπότε η συχνότητα είναι πράγματι

$$\upsilon = \nu = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} .$$

4. Μελέτη κίνησης υλικού σημείου με μεταβλητές δράση-γωνία, σε κεντρικό δυναμικό της μορφής

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \; k > 0, \; \beta \geq 0$$

Σε πολικές συντεταγμένες η χαμιλτονιανή έχει τη μορφή

$$H(r,\varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m} - \frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2} . \tag{8.80}$$

Η χαμιλτονιανή διατηρείται και ισούται με την ενέργεια του συστήματος, επομένως περιορισμένη εξίσωση H-J είναι

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2} = E \\ &p_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \; p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{8.81}$$

Το σύστημα μπορεί να διαχωριστεί όπως θα επιβεβαιωθεί με τα παρακάτω.
Γράφουμε

$$W = W_r(r, E, \alpha) + W_\varphi(\varphi, E, \alpha) . \tag{8.82}$$

Από τον διαχωρισμό καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} &W_r = \sqrt{2m}\int\left(E + \frac{k}{r} + \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha^2}{2mr^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}r \\ &W_\varphi = \int \alpha \mathrm{d}\varphi = \alpha\varphi. \end{aligned} \tag{8.83}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial r} = \sqrt{2m}\left(E+\frac{k}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^{1/2} \\
p_\varphi &= \frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,\alpha)}{\partial \varphi} = \alpha.
\end{aligned}
\tag{8.84}
$$

Μας ενδιαφέρει η περίπτωση που η κίνηση είναι φραγμένη (το υλικό σημείο δεν πάει στο άπειρο), τότε ισχύει

$$
\frac{mk^2}{4m\beta-2\alpha^2} < E < 0 \,.
$$

Η τροχιά $p_r = p_r(r)$ είναι κλειστή και συμμετρική ως προς τον άξονα r, λίκνιση. Για τις τιμές του r, έχουμε $r_1 \le r \le r_2$, όπου τα r_1, r_2 είναι οι λύσεις της

$$
E+\frac{k}{r}+\frac{\beta}{r^2}-\frac{\alpha^2}{2mr^2} = 0 \,.
$$

Η τροχιά $p_\varphi = p_\varphi(\varphi)$ είναι περιοδική με περίοδο για το φ, το 2π, περιστροφή.

Δηλαδή το σύστημα είναι κυκλικό και μπορούμε να ορίσουμε μεταβλητές γωνίας και δράσης. Για τις δράσεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
J_r(E,\alpha) &= \oint \left(\frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial r}\right)\mathrm{d}r = \sqrt{2m}\oint\left(E+\frac{k}{r}+\frac{\beta}{r^2}-\frac{\alpha^2}{2mr^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2m}\,2\int_{r_1}^{r_2}\left(E+\frac{k}{r}+\frac{\beta}{r^2}-\frac{\alpha^2}{2mr^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}r \\
&= -2\pi(\alpha^2-2m\beta)^{1/2}+\pi k\left(-\frac{2m}{E}\right)^{1/2} \\
J_\varphi(E,\alpha) &= \oint\left(\frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,\alpha)}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \oint \alpha\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\alpha \,.
\end{aligned}
\tag{8.85}
$$

Το ολοκλήρωμα ως προς r μπορεί να υπολογιστεί με πολλούς τρόπους, ο πιο κομψός τρόπος είναι με χρήση της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων, δηλαδή των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποιο πακέτο λογισμικού που να κάνει συμβολική ολοκλήρωση.

Από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{2m\pi^2k^2}{\left(J_r+(J_\varphi^2-8\pi^2m\beta)^{1/2}\right)^2} \\
\alpha &= \frac{J_\varphi}{2\pi}.
\end{aligned}
\tag{8.86}
$$

Έχουμε $H(J_r, J_\varphi) = E$ επομένως

$$H(J_r, J_\varphi) = -\frac{2m\pi^2 k^2}{\left(J_r + (J_\varphi^2 - 8\pi^2 m\beta)^{1/2}\right)^2}. \tag{8.87}$$

Από αυτήν βρίσκουμε τις συχνότητες

$$\begin{aligned}
\upsilon_r &= \nu_r = \frac{\partial H(J_r, J_\varphi)}{\partial J_r} = \frac{(-2mE)^{3/2}}{2m^2\pi k} \\
\upsilon_\varphi &= \nu_\varphi = \frac{\partial H(J_r, J_\varphi)}{\partial J_\varphi} = \frac{J_\varphi}{(J_\varphi^2 - 8\pi^2 m\beta)^{1/2}} \frac{(-2mE)^{3/2}}{2m^2\pi k} \\
&= \frac{J_\varphi}{(J_\varphi^2 - 8\pi^2 m\beta)^{1/2}} \nu_r .
\end{aligned} \tag{8.88}$$

Από τους ορισμούς των γωνιών-μεταβλητών έχουμε

$$\begin{aligned}
w_r &= \frac{\partial W(r,\varphi,J_r,J_\varphi)}{\partial J_r} = \frac{\partial W_r(r,J_r,J_\varphi)}{\partial J_r} + \frac{\partial W_\varphi(\varphi,J_r,J_\varphi)}{\partial J_r} \\
&= \frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial E}\frac{\partial E(J_r,J_\varphi)}{\partial J_r} + \frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial J_r} \\
&+ \frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,\alpha)}{\partial E}\frac{\partial E(J_r,J_\varphi)}{\partial J_r} + \frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial J_r} \\
&= \frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial E}\nu_r = \nu_r F(r) \\
F(r) &= \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\int\left(E + \frac{k}{r} + \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha^2}{2mr^2}\right)^{-1/2} \mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{8.89}$$

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned}
w_\varphi &= \frac{\partial W(r,\varphi,J_r,J_\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_r(r,J_r,J_\varphi)}{\partial J_\varphi} + \frac{\partial W_\varphi(\varphi,J_r,J_\varphi)}{\partial J_\varphi} \\
&= \frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial E}\frac{\partial E(J_r,J_\varphi)}{\partial J_\varphi} + \frac{\partial W_r(r,E,\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial J_\varphi} \\
&+ \frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,\alpha)}{\partial E}\frac{\partial E(J_r,J_\varphi)}{\partial J_\varphi} + \frac{\partial W_\varphi(\varphi,E,\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial J_\varphi} \\
&= \nu_\varphi F(r) - G(r) + \frac{\varphi}{2\pi} \\
G(r) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\int\left(E + \frac{k}{r} + \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha^2}{2mr^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{mr^2}\right)\mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{8.90}$$

Από την Εξ. (8.89) μπορεί να βρεθεί η σχέση

$$r = r(w_r) . \tag{8.91}$$

Βλέπουμε ότι το r εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχή της γωνία-μεταβλητή και όχι από την άλλη, την w_φ . Αυτό σημαίνει ότι η r είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα ν_r και περίοδο $\tau_r = 1/\nu_r$.

Αντικαθιστούμε την Εξ. (8.91) στην Εξ. (8.90) οπότε βρίσκουμε τη σχέση

$$\varphi = \varphi(w_r, w_\varphi) \; . \tag{8.92}$$

Αυτό δείχνει ότι η φ είναι διπλά περιοδική, υπάρχουν δυο συχνότητες, γενικώς, δεν είναι περιοδική συνάρτηση ως προς τον χρόνο, εκτός αν οι δυο συχνότητες σχετίζονται με σχέση της μορφής $k_r / \nu_r = k_\varphi / \nu_\varphi$ όπου k_r, k_φ ακέραιοι. Από τις σχέσεις (8.91), (8.92) μπορούμε να βρούμε τα $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &w_r = \nu_r t + w_{r0} \\ &w_\varphi = \nu_\varphi t + w_{\varphi 0} \\ &w_{r0}, w_{\varphi 0} \;\; \text{σταθερές.} \end{aligned} \tag{8.93}$$

Αν θέσουμε $\beta = 0$ έχουμε το γνωστό πρόβλημα κεντρικού δυναμικού $1/r$.

Οι δυο συχνότητες είναι ίσες

$$\nu_r = \nu_\varphi = \nu = \frac{(-2mE)^{3/2}}{2m^2 \pi k} \; . \tag{8.94}$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια μόνο συχνότητα και για τις δυο συντεταγμένες, η κίνηση είναι περιοδική ως προς τον χρόνο και η καμπύλη (τροχιά) που διαγράφει το υλικό σημείο είναι κλειστή επαναλαμβανόμενη, γενικώς είναι έλλειψη.

Αν το β είναι αρκούντως μικρό αλλά όχι μηδέν, τότε η τροχιά δεν είναι κλειστή (δεν επαναλαμβάνεται) αλλά είναι σχεδόν έλλειψη, της οποίας το περίκεντρο, κάνει αργή μετάπτωση περί το ελκτικό κέντρο. Μπορούμε να βρούμε τον ρυθμό της μετάπτωσης χωρίς τη χρήση των τελικών λύσεων $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$.

Από την Εξ. (8.90) και τη δεύτερη σχέση της Εξ. (8.93) βρίσκουμε

$$\varphi = 2\pi \nu_\varphi t - 2\pi \nu_\varphi F(r) + 2\pi G(r) + 2\pi w_{\varphi 0} \; . \tag{8.95}$$

Αφού η $r = r(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς τον χρόνο με περίοδο $\tau_r = 1/\nu_r$ η μεταβολή της γωνίας φ σε χρόνο τ_r είναι

$$\Delta\varphi = 2\pi \nu_\varphi \tau_r = 2\pi \left(\frac{\nu_\varphi}{\nu_r} \right). \tag{8.96}$$

Αν $\nu_\varphi = \nu_r$ τότε $\Delta\varphi = 2\pi$, οπότε δεν υπάρχει μετακίνηση (μετάπτωση) του περίκεντρου.

Αν $\nu_\varphi \neq \nu_r$, πάντα ισχύει $\nu_\varphi \approx \nu_r$, τότε $\Delta\varphi \neq 2\pi$ και το περίκεντρο υφίσταται μετάπτωση κατά γωνία $2\pi(\nu_\varphi / \nu_r) - 2\pi$ (ανά «περιστροφή»). Ο ρυθμός μετάπτωσης του περίκεντρου είναι

$$R = \frac{2\pi(\nu_\varphi / \nu_r) - 2\pi}{\tau_r} = 2\pi(\nu_\varphi - \nu_r) \; . \tag{8.97}$$

Αφού το β είναι αρκούντως μικρό, έχουμε την προσέγγιση

$$\nu_{\varphi} = \frac{J_{\varphi}}{(J_{\varphi}^2 - 8\pi^2 m\beta)^{1/2}} \nu_r \approx 1 + \frac{4\pi^2 m\beta}{J_{\varphi}^2} \nu_r \,. \tag{8.98}$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη τιμή της J_{φ} με αυτήν που έχει όταν $\beta = 0$. Από την Εξ. (8.85) και τα αποτελέσματα τα οποία είναι γνωστά από τη μελέτη κεντρικής κίνησης σωματίου, βρίσκουμε

$$J_{\varphi}^2 = (2\pi\alpha)^2 \approx \frac{4\pi^2 m b^2 k}{a} \,. \tag{8.99}$$

a, b είναι τα μήκη του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα, αντιστοίχως, της (περίπου) ελλειπτικής τροχιάς. Από τις Εξ. (8.97), (8.98), (8.99) βρίσκουμε

$$R \approx \frac{2\pi\beta a \nu_r}{k b^2} \,. \tag{8.100}$$

Παρόμοια ανάλυση ακολουθείται στην περίπτωση που υπάρχει μετάπτωση ελλειπτικών τροχιών (κυρίως) ουρανίων σωμάτων, ένεκα διαφόρων διαταραχών από αλληλεπιδράσεις γειτονικών ουράνιων σωμάτων, ή ένεκα της Ειδικής ή της Γενικής Σχετικότητας.

Προβλήματα

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$S = \frac{m\omega}{2}\left(q^2 + \alpha^2\right)\cot\,\omega t - \frac{m\omega q\alpha}{\sin\,\omega t}$$

είναι λύση της εξίσωσης H-J (κύρια συνάρτηση του Hamilton) για τον γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή με

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right).$$

Δείξτε ότι αυτή η συνάρτηση γεννά σωστή λύση για τον αρμονικό ταλαντωτή.

2. Η χαμιλτονιανή υλικού σημείου το οποίο κινείται σε μια διάσταση και έχει συντεταγμένη x και βρίσκεται μέσα σε δυναμικό που εξαρτάται από τον χρόνο, είναι η εξής $H = \frac{p^2}{2m} - mAtx$. p είναι η συζυγής ορμή της x και A είναι μια σταθερά. Λύστε αυτό το πρόβλημα με τη μέθοδο H-J κάνοντας χρήση της κύριας συνάρτησης Hamilton. Οι αρχικές συνθήκες είναι $t = 0, x = 0, p = m\upsilon_0$.

3. Να λυθεί το πρόβλημα ελεύθερου σωματίου, με τη μέθοδο H-J, σε τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες. Θεωρήστε γνωστή την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα.

4. Να λυθεί το πρόβλημα σωματίου που κινείται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, με τη μέθοδο H-J, σε τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες. Θεωρήστε γνωστή την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητά του.

5. Αν W είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση Hamilton για δυναμικό σύστημα με $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, δείξτε ότι η έκφραση $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} - L$ είναι σταθερά της κίνησης.

6. Να μελετηθεί με τη μέθοδο H-J η κίνηση του σφαιρικού εκκρεμούς.

7.Κάντε διαχωρισμό στο πρόβλημα που σχετίζεται με το φαινόμενο Stark, όπου η δυναμική συνάρτηση είναι $V = -\frac{k}{r} + Ez$. k είναι θετική σταθερά και E_z είναι το ομογενές και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο που έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα z.
Να χρησιμοποιηθούν παραβολικές συντεταγμένες. Μεταξύ των παραβολικών συντεταγμένων u, v, ϕ και των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y, z ισχύουν οι σχέσεις

$$x = \sqrt{uv}\cos\phi,\ y = \sqrt{uv}\sin\phi,\ z = \frac{1}{2}(u - v).$$

8. Φορτισμένο σωμάτιο είναι δέσμιο να κινείται σε επίπεδο. Στο σωμάτιο δρα κεντρική δύναμη, με δυναμική συνάρτηση $V = \frac{1}{2}kr^2 > 0$ και σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που γίνεται η κίνηση. Ισχύει για το διανυσματικό δυναμικό, $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$. Γράψτε την εξίσωση H-J για την

χαρακτηριστική συνάρτηση Hamilton, σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες. Κάντε διαχωρισμό της εξίσωσης και λύστε το πρόβλημα. Συζητήστε τι συμβαίνει με την κίνηση όταν η κανονική ορμή $p_\theta = 0$ τη στιγμή $t = 0$.

9. Η συνάρτηση Hamilton του συστήματος τριών μη συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών είναι

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2)$$

να μελετηθεί το σύστημα με τη μέθοδο των μεταβλητών γωνίας-δράσης.

10. Για τις μεταβλητές δράσης και τις συχνότητες δείξτε τη σχέση $\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial J_k} = \dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial J_i}$.

11. Υλικό σημείο κινείται σε δυναμικό $V = k\tan^2(\alpha x)$, όπου α, k θετικές σταθερές. Δείξτε ότι η κίνηση είναι λίκνιση και για τη συχνότητα ισχύει $\nu = \dfrac{\alpha}{2\pi}\left(2(E+k)/m\right)^{1/2}$, E είναι η σταθερή ενέργεια.

12. Δείξτε ότι ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής με δυναμικό $V = \dfrac{1}{2}kr^2$, είναι πλήρως εκφυλισμένο σύστημα.

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα που δίνει το $J_r(E,\alpha)$ της Εξ. (8.85) με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων του μιγαδικού λογισμού.

14. Θεωρήστε τη μονοδιάστατη εξίσωση Schroedinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}.$$

Γράψτε την κυματοσυνάρτηση στη μορφή,

$$\psi(x,t) = R(x,t)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(x,t)\right),$$

οι R και S είναι πραγματικές συναρτήσεις. Αντικαταστήστε στην εξίσωση Schroedinger και κάνοντας την κατάλληλη προσέγγιση που σχετίζεται με τη σταθερά του Planck, καταλήξτε στην εξίσωση Hamilton-Jacobι.

15. Με χρήση της θεωρίας με μεταβλητές δράσεις-γωνίες βρείτε τη συχνότητα για την περίπτωση της κίνησης στο επίπεδο φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο. Σε όλες τις περιπτώσεις με επιταχυνόμενα φορτισμένα σωματίδια δεν λαμβάνουμε υπόψη την ακτινοβολία, παρόλο που συνήθως δεν το τονίζουμε. Να εργαστείτε σε καρτεσιανές συντεταγμένες μη σχετικιστικά. Χρησιμοποιήστε το διανυσματικό δυναμικό στη μορφή (στη βαθμίδα, gauge) $\vec{A}(x,y) = Bx\vec{e}_y$, ($\Phi = 0$). Βεβαιωθείτε ότι αυτό αντιπροσωπεύει μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Υπόδειξη: Το πρόβλημα είναι δύσκολο να λυθεί αν δεν γίνει χρήση κάποιου μετασχηματισμών μεταβλητών θέσης ώστε να υπολογίζονται ευκολότερα τα διάφορα ολοκληρώματα. Δε χρειάζεται να κάνετε μετασχηματισμό σημείου όπως φαίνεται στη θεωρία. Απλά κάνετε αυτόν τον ενδιάμεσο μετασχηματισμό για ευκολία. Θεωρήστε ότι:

$$x = \frac{\alpha_2}{e_q B} + \frac{1}{e_q B}\sqrt{2m\alpha_1}\sin\theta .$$

Τα α_1, α_2 είναι οι σταθερές διαχωρισμού, η α_1 είναι η ενέργεια του σωματιδίου. Θεωρήστε ότι, $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2) = W_x(x, \alpha_1, \alpha_2) + W_y(y, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 t$.

Επίσης να υποθέσετε ότι $W_y = \alpha_2 y$.

16. Με χρήση της μεθόδου Hamilton-Jacobi, προσδιορίστε την κίνηση σωματίου το οποίο κινείται μη σχετικιστικά μέσα σε κουτί ορθογώνιας διατομής με διαστάσεις $L_x \times L_y$. Το κουτί έχει πολύ μεγάλο ύψος (άπειρο) οπότε το σωμάτιο πάντα βρίσκεται στο εσωτερικό του. Καθώς κινείται μπορεί να συγκρούεται ελαστικά με τα πλευρικά τοιχώματα τα οποία είναι κατακόρυφα και επίσης (ελαστικά) με τον οριζόντιο πυθμένα του. Υπάρχει κατακόρυφο προς τα κάτω πεδίο βαρύτητας. Θεωρήστε καρτεσιανές συντεταγμένες με τον άξονα z κατακόρυφο, θετικό προς τα πάνω. Το κουτί είναι τοποθετημένο έτσι που η κατακόρυφη ακμή του είναι ο άξονας z και οι άλλες 2 ακμές του είναι κατά μήκος των θετικών αξόνων x, y, στη θέση $z = 0$.

17. Δίνεται η σχέση για την ενέργεια

$$E = E(J_r, J_\varphi) = -\frac{2\pi^2 m k^2}{\left(J_r + J_\varphi\right)^2},\ k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0},$$

του προβλήματος Kepler στη θεώρησή του με δράσεις-γωνίες, στο επίπεδο κίνησης μη σχετικιστικά. Βρείτε τις κβαντικές σχέσεις για την ενέργεια και τη στροφορμή περί τον άξονα z, για το άτομο του υδρογόνου, σύμφωνα με την παλιά κβαντική θεωρία, με την κβαντική συνθήκη Wilson-Sommerfeld. Θυμηθείτε ότι ορίζονται ο κύριος κβαντικός αριθμός που σχετίζεται με την ενέργεια και ο αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός που σχετίζεται με τη στροφορμή.

18. Λύστε το πρόβλημα του επίπεδου αρμονικού ταλαντωτή με τις δυο σταθερές επαναφοράς k_1, k_2 διαφορετικές, $k_1 \neq k_2$. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος δράσης-γωνίας σε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς που οι μεταβλητές είναι διαχωρίσιμες. Η μελέτη να είναι μη σχετικιστική.

19. Βρείτε τη λαγκρανζιανή και τη χαμιλτονιανή σε πολικές συντεταγμένες (r, φ), για φορτισμένο σωματίδιο που κινείται σε επίπεδο μέσα σε ομογενές σταθερό μαγνητικό πεδίο. Το επίπεδο κίνησης είναι κάθετο στο πεδίο $\vec{B}$. Το $\vec{B}$ έχει την κατεύθυνση του άξονα z. Να υπολογίσετε το διανυσματικό δυναμικό από τη σχέση

$$\vec{A}(r, \varphi) = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\right).$$

Βεβαιωθείτε ότι αυτό πράγματι αντιστοιχεί στο $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Ουσιαστικά δουλεύετε σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Λύστε το πρόβλημα με α) τη μέθοδο των εξισώσεων Hamilton και β) με τη μέθοδο μεταβλητών δράσης-γωνίας.

Δείξτε ότι η συζυγής ορμή p_φ της γωνίας φ είναι σταθερά της κίνησης. Για να βρείτε πιο εύκολα τη λύση, θεωρήστε ότι την αρχική στιγμή $t = 0$ ισχύει $p_\varphi = 0$. Δικαιολογήστε γιατί αυτό σας οδηγεί στη σωστή λύση, η οποία είναι κίνηση σε κύκλο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα περί το κέντρο του. Θυμηθείτε ότι, η αρχή των αξόνων μπορεί να είναι οποιαδήποτε, ενώ η μορφή των διαφόρων εκφράσεων μένει η ίδια. Με αυτό τον τρόπο θα βρείτε ότι η κυκλική συχνότητα $2\pi\dot{\varphi}$ για την κίνηση του r και του φ είναι

$$\omega_r = \omega_\varphi = \frac{q_e B}{2m}.$$

Δικαιολογήστε γιατί είναι η μισή από την κυκλική συχνότητα κυκλοτρονίου

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{q_e B}{m}.$$

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 8

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β' Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[3] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.

[4] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[5] Σ. Ι. Ιχτιάρογλου, *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

[6] E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Vol. 1, 2,* John Wiley, 1982.

[7] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[8] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Univ. of Toronto Press, 1970.

[9] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 1977.

[10] T. Levi-Civita, *Sulla Integrazione di Hamilton-Jacobi per Separazione di Variabili*, Math. Ann., Vol. 59, pp. 383-397, 1904.

[11] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[12] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

Κεφάλαιο 9: Θεωρία Πεδίου

Τα πεδία είναι φυσικά μεγέθη τα οποία είναι συναρτήσεις της θέσης του συνήθους τρισδιάστατου χώρου και του χρόνου. Πρόκειται για συνεχή συστήματα. Θα χρησιμοποιούμε, γενικώς, καμπυλόγραμμες συντεταγμένες για τη θέση στον τρισδιάστατο χώρο, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν και τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Θα ξεκινήσουμε με μη σχετικιστικά πεδία. Τα πεδία χαρακτηρίζονται, γενικώς, από πολλές συνιστώσες, δηλαδή από πολλές συναρτήσεις της θέσης (στον τρισδιάστατο χώρο) και του χρόνου. Ένα τέτοιο μέγεθος παριστάνεται ως,

$$\eta_\rho = \eta_\rho(t, x^1, x^2, x^3),\ \rho = 1, 2, ..., n\,. \tag{9.1}$$

Οι συνιστώσες παίζουν τον ρόλο των γενικευμένων συντεταγμένων, δηλαδή είναι τα αντίστοιχα των q_k για διακριτά συστήματα. Για τις τέσσερις, γενικώς, καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του συνήθους τρισδιάστατου χώρου μαζί με τη διάσταση του χρόνου, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, όπου $x^0 = t$. Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x^0 = ct$, ακόμη και όταν αναφερόμαστε στη μη σχετικιστική Φυσική, όπου δεν έχουμε τετραδιάστατο χώρο Minkowski. Στα πλαίσια της μη σχετικιστικής Φυσικής, αν χρησιμοποιούμε καρτεσιανό σύστημα για τον τρισδιάστατο χώρο, δεν έχουν νόημα άνω και κάτω δείκτες, τότε ισχύουν $x^0 = x_0,\ x^1 = x_1 = x, x^2 = x_2 = y, x^3 = x_3 = z$.

Για γενικές συντεταγμένες θέσης, έχουμε τις σχέσεις (9.2)

$$\eta_{\rho,\nu} = \frac{\mathrm{d}\eta_\rho}{\mathrm{d}x^\nu},\ \eta_{,j} = \frac{\mathrm{d}\eta_\rho}{\mathrm{d}x_j},\ \eta_{\rho,\mu\nu} = \frac{\mathrm{d}^2\eta_\rho}{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}\,. \tag{9.2}$$

Στους ανωτέρω συμβολισμούς, μπορεί να χρησιμοποιούνται αντί των συνήθων παραγώγων με το σύμβολο d και οι μερικές παράγωγοι με το σύμβολο ∂.

Χρησιμοποιείται το σύμβολο x^μ για να δηλώσει εξάρτηση από το τετραδιάνυσμα χρόνου - θέσης αλλά για τον ίδιο σκοπό μπορεί να χρησιμοποιείται και το σύμβολο x, δηλαδή

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)\,. \tag{9.3}$$

Τα πεζά ελληνικά γράμματα ως δείκτες παίρνουν τιμές 0,1,2,3 ενώ τα λατινικά παίρνουν τιμές 1,2,3. Επαναλαμβανόμενοι δείκτες είναι βωβοί δείκτες και αθροίζονται, και αν ακόμη δεν είναι πάνω και κάτω, εκτός αν στο κείμενο λέγεται ότι δεν είναι έτσι. Συνήθως (αλλά όχι πάντοτε) για τις συνιστώσες των πεδίων χρησιμοποιούμε ως δείκτη το ρ που μπορεί να παριστάνει και συνδυασμό πολλών δεικτών. Ορίζεται η πυκνότητα της λαγκρανζιανής (λαγκρανζιανή πυκνότητα)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu\right),\ \rho, \lambda = 1, 2, ..., n \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{9.4}$$

έτσι που η λαγκρανζιανή L είναι το ολοκλήρωμα της λαγκρανζιανής πυκνότητας στον όγκο V του τρισδιάστατου χώρου του συστήματος, δηλαδή

$$L = \int_V \mathcal{L}\left(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu\right)\mathrm{d}^3x,\ \mathrm{d}^3x = \sqrt{|g|}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\,\cdot \tag{9.5}$$

Το $|g|$ αναφέρεται στον τρισδιάστατο χώρο των γενικευμένων συντεταγμένων x^1, x^2, x^3.

Τώρα το ολοκλήρωμα δράσης (η δράση) είναι

.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_V L\ \left(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu\right)\mathrm{d}^4 x \\
&= \int_\Omega L\ \left(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu\right)\mathrm{d}\Omega \\
\mathrm{d}\Omega &= \mathrm{d}^4 x = \sqrt{|g|}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3.
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

Όπου το $|g|$ αναφέρεται στον τετραχώρο των x^0, x^1, x^2, x^3. Αν η συντεταγμένη του χρόνου είναι $x^0 = t$ ή $x^0 = ct$ τότε οι δυο παραπάνω ποσότητες $|g|$ είναι ίδιες ή η δεύτερη ισούται με την πρώτη πολλαπλασιασμένη επί c. Με Ω παριστάνουμε ένα χωρίο (περιοχή) αυτού του τετραχώρου. Η αρχή του Hamilton για πεδία είναι,

$$
\delta I = \delta\int_\Omega \mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu)\mathrm{d}^4 x = \int_\Omega \delta\mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu)\mathrm{d}^4 x = 0. \tag{9.7}
$$

Τα παραπάνω είναι σε συμφωνία με όσα αναφέρονται στο Παράρτημα Π7, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα αυτού του παραρτήματος. Τώρα οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τα x^0, x^1, x^2, x^3, δηλαδή είναι $m = 4$ και οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι τα πεδία η_ρ. Το I, η δράση, είναι το συναρτησιακό και η λαγκρανζιανή πυκνότητα L, είναι η συνάρτηση F. Θυμίζουμε ότι στο σύνορο του τετραχώρου, οι τιμές των πεδίων είναι καθορισμένες, οι ίδιες για όλες τις δυνατές μεταβολές.

Θυμίζουμε ξανά ότι, όπως έχουμε δει στο Παράρτημα Π7, αν ο χώρος δεν είναι επίπεδος το στοιχείο του όγκου είναι $\sqrt{|g|}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$, όπου g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή του χώρου. Είναι ευνόητο ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ως προς $\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ θα είναι $\sqrt{|g|}\mathrm{L}$. Αυτό είναι χρήσιμο στην περίπτωση καμπυλόγραμμων συντεταγμένων και γενικώς καμπυλών χώρων. Η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση καμπύλου χώρου είναι αυτή της Γενικής Σχετικότητας, όπου στις εξαρτημένες μεταβλητές, δηλαδή στα πεδία, συμπεριλαμβάνονται και οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή.

Σύμφωνα με το Παράρτημα Π7 καταλήγουμε στις εξισώσεις των Euler-Lagrange για πεδία. Εδώ οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται κατά τα γνωστά.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_\rho} = 0\,. \tag{9.8}
$$

Σύμφωνα με το Παράρτημα Π7, στη λαγκρανζιανή πυκνότητα μπορεί να προστεθεί ένας όρος που να είναι η τετραπόκλιση ενός τετραδιανύσματος με συνιστώσες τέσσερεις διαφορίσιμες συναρτήσεις των η_ρ και των x^μ, χωρίς να αλλάξουν οι εξισώσεις κίνησης. Ο όρος που μπορεί να προστεθεί είναι της μορφής

$$
\frac{\mathrm{d}F_\nu(\eta_\rho, x^\mu)}{\mathrm{d}x^\nu}\,. \tag{9.9}
$$

Επομένως η λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu)$ μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν της Εξ. (9.10).

$$
\mathrm{L}' = \mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu) + \frac{\mathrm{d}F_\nu(\eta_\rho, x^\mu)}{\mathrm{d}x^\nu}\,. \tag{9.10}
$$

Στο Παράρτημα Π7, μιλήσαμε για την συναρτησιακή παράγωγο της λαγκρανζιανής. Έχουμε τη σχέση,

$$\frac{\delta I}{\delta \eta_\rho} = \frac{\partial L}{\partial \eta_\rho} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,i}}.$$

Εξ ορισμού δεχόμαστε ότι ισχύει,

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_\rho} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\delta I}{\delta \eta_\rho}.$$

Με βάση αυτή τη σχέση, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τον παρακάτω τελεστή,

$$\frac{\delta}{\delta \eta_\rho} = \frac{\partial}{\partial \eta_\rho} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial}{\partial \eta_{\rho,i}}$$

όπου έχουμε άθροιση στα $i = 1,2,3$. Έτσι ξεχωρίζουμε τη χρονική από τις χωρικές παραγώγους. Οι εξισώσεις κίνησης του Lagrange για πεδία, Εξ. (9.8), παίρνουν μορφή που τώρα θυμίζει περισσότερο τις αντίστοιχες εξισώσεις για διακριτά συστήματα. Έχουμε πράγματι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\rho} - \frac{\delta L}{\delta \eta_\rho} = 0. \tag{9.11}$$

9.1 Ο τανυστής μηχανικής τάσης-ενέργειας και θεωρήματα διατήρησης

Υπολογίζουμε τις ολικές παραγώγους της λαγκρανζιανής πυκνότητας, ως προς τα x^μ,

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}x^\mu} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_\rho}\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu\nu} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^\mu} \tag{9.12}$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις εξισώσεις κίνησης Εξ. (9.8) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}x^\mu} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right)\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\frac{\mathrm{d}\eta_{\rho,\mu}}{\mathrm{d}x^\nu} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu}\right) + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^\mu}.\end{aligned} \tag{9.13}$$

Τελικώς έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu} - L\,\delta_\mu^{\ \nu}\right) = -\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \tag{9.14}$$

Ας υποθέσουμε ότι η λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν εξαρτάται άμεσα από το τετραδιάνυσμα x^μ. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι η λαγκρανζιανή πυκνότητα παριστάνει ελεύθερο πεδίο, δηλαδή πεδίο που δεν αλληλεπιδρά με άλλα πεδία ή σωματίδια τα οποία βρίσκονται μέσα στον ίδιο χώρο του παραπάνω πεδίου. Τότε έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L} = \mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}) \\
&\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^\mu} = 0.
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

Οι Εξ. (9.14) και (9.15) οδηγούν στις σχέσεις τετραπόκλισης που φαίνονται στην Εξ. (9.16)

$$
\begin{aligned}
&\frac{dT_\mu^{\ \nu}}{dx^\nu} = T_{\mu\ ,\nu}^{\ \nu} = 0 \\
&T_\mu^{\ \nu} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - L\ \delta_\mu^{\ \nu}.
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

Η Εξ. (9.16) δείχνει ότι έχουμε τέσσερεις διαφορικές εκφράσεις που είναι αποκλίσεις οι οποίες μηδενίζονται. Αυτό μπορεί να οδηγήσει όπως θα δούμε παρακάτω σε διατηρούμενα μεγέθη.

Χρησιμοποιούμε συμβολισμό τανυστών, όμως δεν ορίσαμε σχέσεις μετασχηματισμού για αυτόν τον χώρο, οπότε δεν ορίστηκαν ιδιότητες μετασχηματισμού για το μέγεθος $T_\mu^{\ \nu}$. Στη νευτώνεια θεώρηση ο χρόνος και ο συνήθης χώρος είναι ανεξάρτητα μεγέθη, σε αντίθεση με την Ειδική Σχετικότητα, όπου αποτελούν ενιαίο τετραχώρο τον χώρο Minkowski, με τις γνωστές σχέσεις μετασχηματισμού. Όμως, οι έννοιες αυτές ορίζονται και όταν γίνεται χρήση της Ειδικής Σχετικότητας οπότε ο συμβολισμός μας είναι εναρμονισμένος με το συμβολισμό των τανυστών του τετραχώρου του Minkowski. Παρόλα αυτά, οι χωρικές συνιστώσες αυτών των μεγεθών είναι διανύσματα και τανυστές δεύτερης τάξης στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο. Συγκεκριμένα, οι χωρικές συνιστώσες $T_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή τριών διαστάσεων δεύτερης τάξης. Αυτός ο τανυστής T_{ij} λέγεται τανυστής των (μηχανικών) τάσεων (τασικός τανυστής).

Στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας θα δούμε παρακάτω ότι το φυσικό μέγεθος $T_\mu^{\ \nu}$ λέγεται τανυστής (μηχανικής) τάσης-ενέργειας ή τανυστή ενέργειας-ορμής, στον τετραδιάστατο χώρο Minkowski.

Για τη συνιστώσα $T_0^{\ 0}$ έχουμε

$$
T_0^{\ 0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\rho} \dot{\eta}_\rho - L\ . \tag{9.17}
$$

Αυτό θυμίζει τη σχέση που ισχύει για την ενεργειακή συνάρτηση όταν έχουμε διακριτά μηχανικά συστήματα. Αν ισχύουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις τότε η ενεργειακή συνάρτηση είναι η ολική μηχανική ενέργεια του μηχανικού συστήματος. Με αντίστοιχη επιχειρηματολογία μπορούμε να πούμε ότι το $T_0^{\ 0}$ είναι η ολική ενεργειακή πυκνότητα του πεδίου ή η πυκνότητα της ενέργειας του πεδίου. Για να δούμε τι μπορούμε να πούμε για τις άλλες συνιστώσες, γράφουμε τις δεύτερες σχέσεις της Εξ. (9.16) στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&T_{\mu\ ,\nu}^{\ \nu} = \frac{\mathrm{d}T_\mu^{\ 0}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}T_\mu^{\ j}}{\mathrm{d}x^j} = \frac{\mathrm{d}T_\mu^{\ 0}}{\mathrm{d}t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_\mu \\
&\vec{T}_\mu \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(T_\mu^{\ 1}, T_\mu^{\ 2}, T_\mu^{\ 3}\right).
\end{aligned}
\tag{9.18}
$$

Αυτή η σχέση θυμίζει εξίσωση συνέχειας όπου ο ρυθμός μεταβολής με τον χρόνο κάποιας πυκνότητας συν την απόκλιση κάποιας αντίστοιχης ροής είναι μηδέν. Ας ορίσουμε το φυσικό μέγεθος

$$R_\mu = \int_V T_\mu^0 \mathrm{d}^3x \; R_\mu = \int_V T_\mu{}^0 \mathrm{d}V \,. \tag{9.19}$$

Από τις πρώτες από τις Εξ. (9.18) και χρήση του θεωρήματος της απόκλισης, βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}R_\mu}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\mathrm{d}T_\mu{}^0}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{T}_\mu \mathrm{d}V = -\int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{T}_\mu \,. \tag{9.20}$$

Αν τα πεδία είναι εντοπισμένα οπότε παίρνουμε ως όγκο αυτόν που εκτείνεται έξω από την περιοχή που τα πεδία είναι μη μηδενικά, δηλαδή η επιφάνεια βρίσκεται σε χώρο όπου $\vec{T}_\mu = 0$, επομένως από την Εξ. (9.20) καταλήγουμε στο ότι $\frac{\mathrm{d}R_\mu}{\mathrm{d}t} = 0$. Αν τα πεδία εκτείνονται σε όλο τον χώρο, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αφού υποθέτουμε ότι για μεγάλες αποστάσεις τα πεδία τείνουν με κατάλληλο τρόπο στο μηδέν. Αυτό σημαίνει πως υπό αυτές τις προϋποθέσεις τα R_μ διατηρούνται. Αυτή είναι η αιτία που τα μεγέθη $T_\mu{}^\nu,\ \mu = 0,1,2,3$ λέγονται διατηρούμενα ρεύματα, σε αναλογία με τα αντίστοιχα του ηλεκτρομαγνητισμού. Από την εξέταση συγκεκριμένων συνεχών μηχανικών συστημάτων, μπορούμε να δώσουμε αντίστοιχο φυσικό νόημα σε καθεμιά από τις συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής, $T_\mu{}^\nu$. Συγκεκριμένα, το $T_0{}^0$ είναι η πυκνότητα της πεδιακής ενέργειας, το $\vec{T}_0$ με τρεις συνιστώσες $T_0{}^j$ είναι η πυκνότητα ρεύματος της πεδιακής ενέργειας, το $-T_i{}^0$ είναι η συνιστώσα i από τις τρεις χωρικές συνιστώσες για την πυκνότητα πεδιακής ορμής, τα $-\vec{T}_i$ με συνιστώσες $T_i{}^0$ είναι η πυκνότητα ρεύματος για τη συνιστώσα i της πυκνότητας της πεδιακής ορμής, $\vec{T}_i{}^j$ είναι τανυστής τάσης-ενέργειας στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο. Ο φορμαλισμός και η ονοματολογία ξεκινούν από μηχανικά συστήματα αλλά εφαρμόζονται σε κάθε είδος πεδίων. Η κλασική θεωρία πεδίων μπορεί να αναφέρεται σε ταλαντώσεις ελαστικών μέσων, σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία, στο πεδίο της κβαντομηχανικής στη μορφή του Schroedinger, στο σχετικιστικό πεδίο που περιγράφει κάποιο στοιχειώδες σωματίδιο κ.λπ. Μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα στροφορμής για πεδία (πεδιακή στροφορμή) έτσι που, όπως έγινε και με την πυκνότητα πεδιακής ορμής, να μπορούν υπό κατάλληλες συνθήκες να υπάρξουν αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες. Η στροφορμή είναι αξονικό διάνυσμα, επομένως περιμένουμε ότι οι συνιστώσες της πυκνότητας πεδιακής στροφορμής θα είναι συνιστώσες ενός αντισυμμετρικού τανυστή δεύτερης τάξης. Μια κατάλληλη μορφή αυτού του τανυστή είναι

$$\mathcal{M}^{ij} = -\left(x^i T^{j0} - x^j T^{i0}\right). \tag{9.21}$$

Η ολική στροφορμή του πεδίου είναι

$$M^{ij} = \int_V \mathcal{M}^{ij} \mathrm{d}V \tag{9.22}$$

Προφανώς

$$\frac{\mathrm{d}M^{ij}}{\mathrm{d}t} = -\int_V \left(x^i \frac{\mathrm{d}T^{j0}}{\mathrm{d}t} - x^j \frac{\mathrm{d}T^{i0}}{\mathrm{d}t} \right)\mathrm{d}V \,. \tag{9.23}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας, Εξ. (9.20), βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}M^{ij}}{\mathrm{d}t} = -\int_V \left(x^i \frac{\mathrm{d}T^{j0}}{\mathrm{d}x^k} - x^j \frac{\mathrm{d}T^{i0}}{\mathrm{d}x^k} \right) \mathrm{d}V \tag{9.24}$$

Παραγοντική ολοκλήρωση οδηγεί στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}M^{ij}}{\mathrm{d}t} = -\int_V \frac{d}{dx^k}\left(x^i T^{jk} - x^j T^{ik} \right) \mathrm{d}V + \int_V \left(T^{ij} - T^{ji} \right) \mathrm{d}V \, . \tag{9.25}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα όγκου μιας απόκλισης. Με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια που περικλείει αυτόν τον όγκο. Με τη γνωστή επιχειρηματολογία για εντοπισμένα πεδία, το ολοκλήρωμα στην περικλείουσα επιφάνεια μηδενίζεται. Υποτίθεται ότι το σύστημα δεν ακτινοβολεί. Επειδή $T^{ij} = T^{ji}$ έπεται ότι και το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Επομένως η ολική πεδιακή στροφορμή διατηρείται αν ο τανυστής $\mathcal{T}$, στον τρισδιάστατο χώρο, είναι συμμετρικός. Επειδή ο τανυστής τάσης-ενέργειας $T_\mu^{\ \nu}$ ικανοποιεί τις σχέσεις με την απόκλιση, Εξ. (9.16), (9.25), είναι προφανώς απροσδιόριστος γιατί μπορεί να προστεθεί σε αυτόν οποιαδήποτε συνάρτηση $G_\mu^{\ \nu}$ της οποίας η τετραπόκλιση είναι μηδέν. Δηλαδή

$$\begin{aligned} G_\mu^{\ \nu} &= G_\mu^{\ \nu}\left(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu\right) \\ \frac{dG_\mu^{\ \nu}}{dx^\nu} &= 0 \\ T_\mu'^{\ \nu} &= T_\mu^{\ \nu} + G_\mu^{\ \nu} . \end{aligned} \tag{9.26}$$

Στην περίπτωση που ο τανυστής δεν είναι συμμετρικός, εξ αρχής, μπορεί να γίνει συμμετρικός με προσθήκη κατάλληλης τέτοιας ποσότητας όπως μπορεί να γίνει και για τη λαγκρανζιανή.

9.2 Χαμιλτονιανός φορμαλισμός για πεδία

Ορίζουμε ως πυκνότητα πεδιακής γενικευμένης ορμής το μέγεθος

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} . \cdot \tag{9.27}$$

Τα μεγέθη η_ρ, π^ρ ορίζουν τον απείρων διαστάσεων χώρο των φάσεων που περιγράφει τα κλασικά πεδία και την εξέλιξή τους στον χρόνο. Όπως θα δούμε παρακάτω, στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό που ακολουθούμε, ο χρόνος ξεχωρίζει από τη θέση, γι' αυτό υιοθετούμε τον συμβολισμό $\eta_\rho(x^i,t), \pi^\rho(x^i,t)$. Αν μια πεδιακή ποσότητα η_ρ είναι αγνοήσιμη, δηλαδή η L δεν εξαρτάται από αυτήν οπότε $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$, τότε οι πεδιακές εξισώσεις Lagrange, Εξ. (9.8), παίρνουν μορφή που μοιάζει με διατύπωση ύπαρξης διατηρητικού ρεύματος. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu} \frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,\mu}} = 0 \\ \text{ή} \quad &\frac{\mathrm{d}\pi^\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i} \frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,i}} = 0 \end{aligned} \tag{9.28}$$

Επίσης αν ένα η_ρ είναι αγνοήσιμο, από την Εξ. (9.28), κάνοντας χρήση του θεωρήματος της απόκλισης και θεωρώντας μηδέν τα πεδία στην επιφάνεια-σύνορο κατά τα γνωστά, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει ένα μέγεθος υπό μορφή ολοκληρώματος που διατηρείται. Αυτό είναι το εξής

$$\Pi^\rho = \int_V \pi^\rho(x)\mathrm{d}\Omega \cdot \tag{9.29}$$

Η πεδιακή χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι,

$$\mathcal{H}(\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi^\rho, x^i) = \pi^\rho \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}. \tag{9.30}$$

Εννοείται ότι έχουμε λύσει τις Εξ. (9.27) (αντιστροφή) ως προς $\dot{\eta}_\rho$ και τα έχουμε εξαλείψει από την Εξ. (9.30). Από την Εξ. (9.30) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\rho} = \dot{\eta}_\rho + \pi^\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi^\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda}\frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi^\rho} = \dot{\eta}_\rho \\ &\dot{\eta}_\rho = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\rho}. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Δηλαδή βρήκαμε τις μισές από τις πεδιακές εξισώσεις Hamilton.
Έχουμε επίσης από την Εξ. (9.30) και την Εξ. (9.27)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} = \pi^\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda}\frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho}. \tag{9.32}$$

Χρησιμοποιούμε τις πεδιακές εξισώσεις Lagrange οπότε οι Εξ. (9.32) δίνουν

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}} = -\dot{\pi}^\rho \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}. \tag{9.33}$$

Με ανάλογη διαδικασία βρίσκουμε

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} = \pi^\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda}\frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}. \tag{9.34}$$

Επομένως βρίσκουμε τις δεύτερες μισές πεδιακές εξισώσεις Hamilton, δηλαδή τις

$$\dot{\pi}^\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}. \tag{9.35}$$

Όλες μαζί οι πεδιακές εξισώσεις του Hamilton είναι,

$$\begin{aligned} &\dot{\eta}_\rho = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\rho} \\ &\dot{\pi}^\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}. \end{aligned} \tag{9.36}$$

Με χρήση του τελεστή για τον χωρισμό χρονικής παραγώγου από τις χωρικές

$$\frac{\delta}{\delta\psi} \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial}{\partial\psi_{,i}}$$

(Παράρτημα Π7) μπορούμε να φέρουμε τις πεδιακές εξισώσεις Hamilton, σε μορφή που θυμίζει τις εξισώσεις Hamilton για διακριτά συστήματα.

Πράγματι βρίσκουμε

$$\dot{\eta}_\rho = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi^\rho},\ \dot{\pi}_\rho = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta_\rho}. \tag{9.37}$$

9.3 Σχετικιστική θεωρία πεδίου

Θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στη σχετικιστική θεωρία πεδίου. Σε αυτή την περίπτωση ο τετραχώρος είναι ο χώρος Minkowski, με τη γνωστή μετρική του. Ουσιαστικά ο φορμαλισμός που αναπτύξαμε στα προηγούμενα, για τη μη σχετικιστική περίπτωση, μεταφέρεται χωρίς πολύ προσπάθεια στην περίπτωση της σχετικιστικής θεωρίας πεδίου και μάλιστα ο φορμαλισμός είναι εμφανώς συναλλοίωτος κατά Lorentz.

Έχουμε $x = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$. Στην περίπτωση της Σχετικότητας παίζει ρόλο αν οι δείκτες είναι άνω ή κάτω δείκτες. Έχουμε δηλαδή, τη γνωστή διάκριση μεταξύ ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων μεγεθών αντιστοίχως για τους άνω και κάτω δείκτες.

Χρειάζεται μόνο να λάβει κανείς υπόψη του ότι, (1) η μετρική του χώρου είναι η μετρική του χώρου του Minkowski, (2) οι διάφορες ποσότητες είναι τανυστές, διαφόρων τάξεων, ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz και (3) τα όρια ολοκλήρωσης πρέπει να εισαχθούν έτσι που να είναι συναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς Lorentz. Σε όσα ακολουθούν τα πεδία η τα παριστάνουμε με έναν δείκτη και τα χειριζόμαστε σαν να ήταν ένα πλήθος από n βαθμωτά μεγέθη. Στην πραγματικότητα μπορεί να είναι τανυστές δεύτερης τάξης σε τετραδιάστατο χωρόχρονο του Minkowski (στην Ειδική Σχετικότητα), στον Ηλεκτρομαγνητισμό, στη Γενική Σχετικότητα ή ακόμη μπορεί να είναι και σπίνορες όπως στη Σχετικιστική Κβαντομηχανική Dirac κ.λπ. Ισχύουν οι εξισώσεις του Lagrange, Εξ. (9.8), δηλαδή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\eta_\rho} = 0 \tag{9.38}$$

Τα πεδιακά μεγέθη έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες συναλλοίωτου κατά Lorentz. Αυτό σημαίνει ότι είναι, γενικώς, τετρατανυστές. Τα η_ρ μπορεί να αποτελούνται από περισσότερους από έναν διαφορετικούς τανυστές ακόμη και διαφόρων τάξεων. Το ολοκλήρωμα δράσης είναι βαθμωτό μέγεθος. Το στοιχείο «όγκου» του τετραχώρου είναι το $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}\Omega$ και είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz , επομένως και η σχετικιστική πεδιακή λαγκρανζιανή πυκνότητα L (όπως και η αντίστοιχη χαμιλτονιανή πυκνότητα, $\mathbf{H}$) είναι βαθμωτό μέγεθος. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής, $T_\mu^{\ \nu}$, Εξ. (9.16), είναι τετρατανυστής δεύτερης τάξης.

$$\begin{aligned} \frac{dT_\mu^{\ \nu}}{dx^\nu} &= T_{\mu\ ,\nu}^{\ \nu} = 0 \\ T_\mu^{\ \nu} &\overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu} - L\ \delta_\mu^{\ \nu}. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Ισχύου

$$1.\ T^{\alpha}_{\beta}u^{\beta} = T_{\beta}{}^{\alpha}u^{\beta} = -\frac{\mathrm{d}p^{\alpha}}{\mathrm{d}V}\,. \tag{9.40}$$

Όπου u^{β} είναι η τετραταχύτητα του παρατηρητή. Το δεξί μέλος είναι το αρνητικό της τετραορμής ανά μονάδα του τρισδιάστατου όγκου στο σημείο που μετριέται ο τανυστής στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή.

2. Αν n^{α} ένα μοναδιαίο τετραδιάνυσμα, $n^{\alpha}n_{\alpha} = 1$, τότε

$$T_{\alpha\beta}u^{\alpha}n^{\beta} = T_{\beta\alpha}u^{\beta}n^{\alpha} = -n_{\mu}\frac{\mathrm{d}p^{\alpha}}{\mathrm{d}V}\,. \tag{9.41}$$

Αυτό είναι το αρνητικό της συνιστώσας πυκνότητας της τετραορμής στην κατεύθυνση n.

$$3.\ T_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = T_{\beta\alpha}u^{\beta}u^{\alpha} = u_{\mu}\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}V}\,. \tag{9.42}$$

Αυτή είναι η μάζα- ενέργεια (υλοενέργεια) ανά μονάδα όγκου όπως μετριέται σε σύστημα αναφοράς με τετραταχύτητα u.

4. Αν πάμε σε ένα σύστημα αναφοράς και διαλέξουμε σε αυτό, δυο χωρομορφικά διανύσματα βάσης e_i, e_k, τότε βρίσκουμε από την Εξ. (9.42) $T_{ik} = T_{ki}$. Το T_{ik} παριστάνει τη συνιστώσα i δύναμης που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στην διεύθυνση e_k, από την πλευρά $x^k - \varepsilon$ προς την πλευρά $x^k + \varepsilon$, όπου ε πολύ μικρό. Επίσης το T_{ki} παριστάνει τη συνιστώσα k δύναμης που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στην διεύθυνση e_i, από την πλευρά $x^i - \varepsilon$ προς την πλευρά $x^i + \varepsilon$, όπου ε πολύ μικρό.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε σχετικιστικό ρευστό που κινείται με τετραταχύτητα u, που μπορεί να εξαρτάται από το σημείο του χωρόχρονου. Έστω ότι το ρευστό έχει πυκνότητα μάζας ρ_m και ισοτροπική πίεση p_m και τα δυο στο σύστημα ηρεμίας του (απειροστού) στοιχείου του ρευστού.

Ισχύει

$$T_{\alpha\beta} = (\rho_m + p_m)u_{\alpha}u_{\beta} + p_m g_{\alpha\beta}\,. \tag{9.43}$$

Έχουμε γενικώς

$$T^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta} = \left[(\rho_m + p_m)u^{\alpha}u_{\beta} + p_m\delta^{\alpha}{}_{\beta}\right]u^{\beta} = \rho_m u^{\alpha}\,. \tag{9.44}$$

Στο σύστημα ηρεμίας του σημείου του ρευστού καταλήγουμε στην

$$T^{0}{}_{\beta}u^{\beta} = \rho_m c\,. \tag{9.45}$$

Έχουμε επίσης στο σύστημα ηρεμίας,

$$T^{i}{}_{\beta}u^{\beta} = \frac{\mathrm{d}p^{i}}{\mathrm{d}V} = 0\,. \tag{9.46}$$

Αυτό λέει ότι η πυκνότητα της γενικευμένης τρισδιάστατης ορμής στο σύστημα ηρεμίας μικρής περιοχής σε κάποιο σημείο του ρευστού είναι μηδέν.

Τελικώς

$$T_{ik} = p_m \delta_{ik} . \tag{9.47}$$

Η λαγκρανζιανή πυκνότητα μπορεί να πολλαπλασιαστεί επί έναν σταθερό παράγοντα και αυτό να μην επηρεάσει τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Συνηθίζουμε να ορίζουμε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα έτσι που η συνιστώσα T_{00} του τανυστή ενέργειας-ορμής να είναι η πεδιακή πυκνότητα ενέργειας. Στον τετραχώρο του Minkowski οι ποσότητες R_μ , Εξ. (9.19), είναι

$$R_\mu = \int_V T_\mu^{\ 0} \mathrm{d}V \cdot \tag{9.48}$$

Από αυτές ορίζουμε τα παρακάτω μεγέθη

$$P^\mu = \frac{1}{c} R^\mu . \tag{9.49}$$

Από τις Εξ. (9.40) μέχρι (9.42) και ό, τι είπαμε προηγουμένως για τα T_{i0} , προκύπτει ότι τα P^i είναι οι συνιστώσες της ολικής ορμής του πεδίου. Επίσης $P^0 = E/c$ όπου E είναι η ολική ενέργεια του πεδίου. Αυτό υποδεικνύει ότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε τα P^μ ως την τετραορμή του πεδίου. Όμως πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι τα R^μ και P^μ μετασχηματίζονται ως τετραδιανύσματα υπό μετασχηματισμούς Lorentz. Για να δείξουμε αυτή την ιδιότητα θα εξετάσουμε τι σημαίνει ολοκλήρωση πάνω σε τρισδιάστατο χώρο σε συναλλοίωτο φορμαλισμό και, γενικώς, πως πρέπει να χειριστούμε τα όρια της ολοκλήρωσης. Ας εξετάσουμε το ολοκλήρωμα δράσης Εξ. (9.6) που χρησιμοποιείται στην αρχή του Hamilton, δηλαδή

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu) \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 x = \frac{1}{c} \int_\Omega \mathrm{L}(\eta_\rho, \eta_{\lambda,\nu}, x^\mu) \mathrm{d}^4 x \\ \mathrm{d}^4 x &= c \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 x \ \text{ ή } \ \mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 . \end{aligned} \tag{9.50}$$

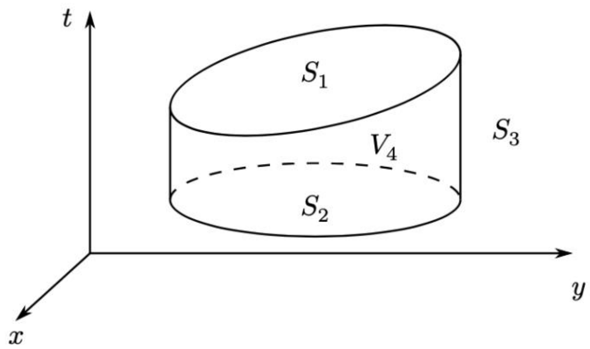
Περιοριζόμαστε σε ορθογώνιες χωρικές συντεταγμένες.

Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι εμφανώς συναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz, ενώ τα όρια της ολοκλήρωσης δεν είναι εμφανώς συναλλοίωτα. Η χωρική ολοκλήρωση είναι πάνω σε έναν όγκο στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο, για σταθερό χρόνο και η ολοκλήρωση στον χρόνο είναι μεταξύ δυο στιγμών t_1, t_2 . Όμως η έννοια του σταθερού χρόνου δεν είναι συναλλοίωτη έννοια διότι ο ταυτοχρονισμός δεν διατηρείται κατά τον μετασχηματισμό Lorentz. Ο κατάλληλος συναλλοίωτος τρόπος για τη χωρική ολοκλήρωση είναι να γίνει πάνω σε υπερεπιφάνεια των συνήθων τριών χωρικών διαστάσεων (εμβαπτισμένη στον τετραδιάστατο χώρο Minkowski) η οποία είναι χωρομορφική. Χωρομορφική υπερεπιφάνεια σημαίνει ότι όλα τα τετραδιανύσματα (απειροστά ή πεπερασμένα) που συνδέουν δυο οποιαδήποτε τετρασημεία της είναι χωρομορφικά. Τα τετραδιανύσματα τα κάθετα σε τέτοια υπερεπιφάνεια είναι χρονομορφικά. Οποιοδήποτε τετραδιάνυσμα που συνδέει δυο τετρασημεία σε τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια της οποίας όλα τα τετρασημεία αντιστοιχούν στον ίδιο χρόνο είναι χωρομορφικό τετραδιάνυσμα διότι η χρονική συνιστώσα του είναι μηδέν, διότι $x^0 = c(t_2 - t_1) = 0$ και επομένως το τετραμήκος του $s^2 = -\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right) < 0$, ιδιότητα που χαρακτηρίζει ένα χωρομορφικό τετραδιάνυσμα. Αυτό σημαίνει ότι μια υπερεπιφάνεια σταθερού χρόνου (για κάποιο σύστημα Lorentz) είναι ειδική περίπτωση χωρομορφικής υπερεπιφάνειας. Μια τέτοια υπερεπιφάνεια διατηρεί τον χαρακτήρα (της χωρομορφικότητας) σε όλα τα συστήματα Lorentz, η χωρομορφικότητα και η χρονομορφικότητα δεν επηρεάζονται από τον μετασχηματισμό του Lorentz. Δηλαδή ενώ σε άλλο σύστημα αναφοράς (Lorentz) η ανωτέρω υπερεπιφάνεια δεν θα είναι με σταθερό χρόνο όμως θα εξακολουθεί να είναι χωρομορφική και αυτό είναι η απαίτησή μας και όχι ο ταυτοχρονισμός σε όλα τα συστήματα Lorentz. Με ανάλογο τρόπο, αυτό που σε κάποιο σύστημα αναφοράς είναι ολοκλήρωση στον χρόνο t σε ένα χωρικό σημείο μπορεί να περιγραφεί συναλλοίωτα για κάθε σύστημα Lorentz, ως ολοκλήρωση πάνω σε χρονομορφική επιφάνεια.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι, οι ολοκληρώσεις στην Εξ. (9.50) γίνονται σε μια περιοχή του τετραχώρου που περικλείεται από χωρομορφικές και χρονομορφικές επιφάνειες, αυτό σημαίνει ότι τα όρια ολοκλήρωσης είναι εμφανώς συναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς Lorentz. Η κατάλληλη συναλλοίωτη περιγραφή μεγεθών που δίνονται από ολοκληρώματα όπως αυτό για το P^{μ} είναι όπως φαίνεται παρακάτω.

$$P^{\mu} = \frac{1}{c}\int_{S} T^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}S^{\nu} , \tag{9.51}$$

όπου η ολοκλήρωση είναι σε μια περιοχή πάνω σε μια χωρομορφική τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια. Το στοιχειώδες τετραδιάνυσμα $\mathrm{d}S^{\nu}$ έχει τέσσερις συνιστώσες οι οποίες ισούνται κατά μέτρο με τα «εμβαδά» των στοιχειωδών υπερεπιφανειών. Οι συνιστώσες του τετραδιανύσματος είναι κάθετες στις αντίστοιχες στοιχειώδεις υπερεπιφάνειες, δηλαδή κάθετες σε όλα τα τετραδιανύσματα της υπερεπιφάνειας. Έχουμε, $\mathrm{d}S^0 = \mathrm{d}S^{123}, \mathrm{d}S^1 = \mathrm{d}S^{023}, \mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}S^{013}, \mathrm{d}S^3 = \mathrm{d}S^{012}$. Για παράδειγμα $\mathrm{d}S^0 = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ είναι η στοιχειώδης υπερεπιφάνεια που είναι η προβολή του τετραδιάστατου στοιχειώδους όγκου στο υπερεπίπεδο με x^0 =σταθερό, πρόκειται για στοιχειώδη τρισδιάστατο όγκο του συνήθους χώρου. Επειδή ο $T^{\mu\nu}$ είναι τετρατανυστής δεύτερης τάξης, προφανώς και το P^{μ} είναι τετραδιάνυσμα. Αν ο τανυστής $T^{\mu\nu}$ έχει απόκλιση μηδέν, Εξ. (9.39), τότε οι συνιστώσες του P^{μ} δίνονται από ολοκλήρωμα στον συνήθη όγκο των τριών διαστάσεων. Ας φανταστούμε ένα χωρίο στον τετραδιάστατο χώρο που περικλείεται από τρεις υπερεπιφάνειες, τις S_1, S_2 που χωρομορφικές και την S_3 που είναι χρονομορφική, Σχ.(9.1).



Σχήμα 9.1 *Όγκος ολοκλήρωσης σε τετραχώρο, σχηματικά.*

Με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης για αυτόν τον τετραχώρο έχουμε

$$\int_{V_4} \mathrm{d}^4x \frac{\mathrm{d}T^{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^{\nu}} = \int_{S_1+S_2+S_3} T^{\mu\nu}\mathrm{d}S_{\nu} . \tag{9.52}$$

Η ολοκλήρωση πάνω στην υπερεπιφάνεια τριών διαστάσεων S_3 σημαίνει ολοκλήρωση στον χρόνο t για σταθερή θέση $\vec{r}$. Αν υποθέσουμε ότι η επιφάνεια S_3 είναι έξω από την περιοχή που τα πεδία είναι εντοπισμένα, ή καλύτερα αν βρίσκεται σε περιοχή που τα πεδία είναι μηδέν, τότε το ολοκλήρωμα στην S_3 ισούται με μηδέν. Επειδή και το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους είναι μηδέν, προφανώς

$$\int_{S_1} T^{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu = \int_{S_2} T^{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu \,. \tag{9.53}$$

Όπου οι φορές στις χωρομορφικές επιφάνειες S_1, S_2 είναι η μια προς τα έξω του όγκου και η άλλη προς τα μέσα, δηλαδή κατά κάποιο τρόπο οι ίδιες, δεν ακολουθείται ο κανόνας για το επιφανειακό ολοκλήρωμα όπου οι φορές είναι από μέσα προς τα έξω. Αν η S_1 είναι αυθαίρετη χωρομορφική υπερεπιφάνεια και η S_2 είναι ειδική χωρομορφική υπερεπιφάνεια για την οποία ο χρόνος είναι σταθερός, τότε η Εξ. (9.53) δίνει

$$\int_{S_1} T^{\mu\nu}\mathrm{d}S_\nu = \int_{V} T^{\mu 0}\mathrm{d}^3 x \,. \tag{9.54}$$

Το πρώτο μέλος της Εξ. (9.54), προφανώς μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα. Επομένως και το δεύτερο μέλος, που σύμφωνα με την Εξ. (9.51) είναι το R^μ, επίσης μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα. Αν και το S_1 και το S_2 είναι με σταθερούς χρόνους t_1, t_2 αντιστοίχως, τότε η Εξ. (9.53) οδηγεί στην

$$R^\mu(t_1) = R^\mu(t_2) \,. \tag{9.55}$$

Αυτό είναι ο συναλλοίωτος τρόπος απόδειξης ότι το R^μ είναι σταθερά της κίνησης. Επομένως, με κάποια προσοχή, οι ποσότητες που διατηρούνται και έχουν τη μορφή ολοκληρωμάτων, μπορεί να χρησιμοποιηθούν και στη σχετικιστική θεωρία κλασικών πεδίων. Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν χρειάζεται να κάνει λεπτομερώς τα βήματα αυτής της αντιστοιχίας αλλά αρκεί ο όγκος ολοκλήρωσης σε ένα σύστημα Lorentz όπου η χωρομορφική υπερεπιφάνεια είναι περιοχή του συνήθους τρισδιάστατου χώρου με t σταθερό. Για την πυκνότητα της στροφορμής το συναλλοίωτο ανάλογο του M^{ij} της Εξ. (9.21), είναι τετρατανυστής τρίτης τάξης, δηλαδή

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{c}\left(x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}\right) \cdot \tag{9.56}$$

Αυτός είναι αντισυμμετρικός στα μ, ν. Η αντίστοιχη ολική ποσότητα (ολοκλήρωμα) είναι

$$M^{\mu\nu} = \int_S \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}\mathrm{d}S_\lambda \cdot \tag{9.57}$$

Η ολοκλήρωση είναι πάνω σε μια χωρομορφική υπερεπιφάνεια S. Σε ένα σύστημα αναφοράς Lorentz όπου η υπερεπιφάνεια είναι με t σταθερό, έχουμε

$$M^{\mu\nu} \to \int_V \mathcal{M}^{\mu\nu 0}\mathrm{d}V \cdot \tag{9.58}$$

Αυτό αντιστοιχεί στον προηγούμενο ορισμό.

Στη συνέχεια δίνουμε μερικές λαγκρανζιανές πυκνότητες διαφόρων συστημάτων, με τα αντίστοιχα πεδία τους, χωρίς πολλές εξηγήσεις. Περιλαμβάνονται μη σχετικιστικές και σχετικιστικές περιπτώσεις.

α) Ταλαντευόμενη χορδή (ανάλογα ισχύουν για διάδοση μηχανικών κυμάτων σε μια διάσταση)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}F_t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad , \quad \rho_l = \frac{dm}{dx} \quad .$$

Γενικώς, η πυκνότητα ανά μονάδα μήκους μπορεί να εξαρτάται και από τη θέση, $\rho_l = \rho_l(x)$.

β) Νευτώνειο πεδίο βαρύτητας $L = -\rho(\vec{r},t)\Phi - \frac{1}{8\pi G}\left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2$.

γ) Εξίσωση Schroedinger $\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\Psi^* + V\Psi\Psi^* + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\Psi^*\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*\right)$

δ) Εξίσωση Klein-Gordon $\mathcal{L} = \dot{\Phi}\dot{\Phi}^* - c^2\vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{\nabla}\Phi^* - m^2c^2\Phi\Phi^*$

ε) Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $L \equiv -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + J_\mu A^\mu$

στ) Εξίσωση Dirac

$$L \equiv \mathrm{i}\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - mc^2\bar{\psi}\psi,\ \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix},\ \psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0.$$

ζ) Βαρύτητα Γενικής Σχετικότητας

$$L \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{|g|},\ g = \det(g_{\mu\nu}),$$

τα στοιχεία του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ είναι τα πεδία.

η) Κβαντική ηλεκτροδυναμική

$$L \equiv \mathrm{i}\hbar c\bar{\psi}\not{D}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4\mu_0},\ D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}eA_\mu,\ \not{D} = \gamma^\sigma D_\sigma.$$

θ) Κβαντική χρωμοδυναμική

$$L \equiv \sum_{k=1}^{6}\left(\mathrm{i}\hbar c\bar{\psi}_k\not{D}\psi_k - mc^2\bar{\psi}_k\psi_k\right) - \frac{1}{4}G^\alpha{}_{\mu\nu}G_\alpha{}^{\mu\nu}.$$

Τα ψ παριστάνουν τα 6 κουάρκ και τα $G^\alpha{}_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής των γκλουονίων, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$ για τα 8 χρώματα των γκλουονίων. $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}eA_\mu$, $\not{D} = \gamma^\sigma D_\sigma$.

9.4 Τα θεωρήματα της Noether για πεδία

Θα κάνουμε χρήση του Παραρτήματος Π7. Ισχύει ο συμβολισμός που αναφέραμε στην αρχή του Κεφαλαίου 9. Για καλύτερη κατανόηση, θα επαναλάβουμε πράγματα που υπάρχουν στο Παράρτημα Π7. Ξεκινούμε από την Εξ. (15.67). Αυτή είναι η συνθήκη ημιαναλλοιώτητας, που για την περίπτωσή μας γίνεται

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int_{\Omega} \left\{ \bar{\delta} L + \sum_{k=0}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(L\, \delta x_k + \delta F_k(x,\eta) \right) \right\} \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \bar{\delta}\eta_r E_r + \sum_{k=0}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \eta_{r,k}} \bar{\delta}\eta_r + L\, \delta x_k + \delta F_k \right) \right\} \mathrm{d}\Omega = 0
\end{aligned} \tag{9.59}
$$

ή με άθροιση βωβών δεικτών

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int_{\Omega} \left\{ \bar{\delta} L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \left(L\, \delta x^{\nu} + \delta F^{\nu}(x,\eta) \right) \right\} \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \bar{\delta}\eta_r E^r + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{r,\nu}} \bar{\delta}\eta_r + L\, \delta x^{\nu} + \delta F^{\nu} \right) \right\} \mathrm{d}\Omega = 0.
\end{aligned}
$$

n είναι το πλήθος των πεδίων, η, και x^0 είναι το t ή το ct. x^1, x^2, x^3 είναι οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες θέσης. Οι σχέσεις Εξ. (15.68) του Παραρτήματος Π7 γίνονται

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta} F &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \left(L\, \delta x^{\nu} + \delta F^{\nu} \right) \\
\bar{\delta}\eta_r E^r &= \frac{\mathrm{d}B^{\nu}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \\
B^{\nu} &= -\left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{r,\nu}} \bar{\delta}\eta_r + L\, \delta x^{\nu} + \delta F^{\nu} \right).
\end{aligned} \tag{9.60}
$$

Η δεύτερη από τις Εξ. (9.60) δείχνει ότι γραμμικός συνδυασμός των εκφράσεων Euler είναι τετραπόκλιση του «τετραδιανύσματος» B.

9.4.1 Πρώτο θεώρημα της Noether για πεδία

Εφόσον για το σύστημα ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange για τα πεδία, δηλαδή $E_r = 0$, από τη σχετική σχέση με άθροιση βωβών δεικτών της Εξ. (9.59), βρίσκουμε

$$
\int_{\Omega} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{r,\nu}} \bar{\delta}\eta_r + L\, \delta x^{\nu} + \delta F^{\nu} \right) \right\} \mathrm{d}\Omega = 0\,. \tag{9.61}
$$

Αυτή είναι εξίσωση διατηρούμενου ρεύματος, διότι το Ω είναι αυθαίρετο επομένως η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι μηδέν,

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{r,\nu}} \bar{\delta}\eta_r + L\, \delta x^{\nu} + \delta F^{\nu} \right) = 0\,. \tag{9.62}
$$

Υποθέτουμε ότι η μορφή του απειροστού μετασχηματισμού εξαρτάται από R απειροστές σταθερές παραμέτρους, $\varepsilon_r (= \varepsilon^r)$, έτσι που να ισχύουν

$$
\begin{aligned}
&\delta x^{\nu} = \varepsilon_r X_r^{\nu}(x,\eta,\eta_x), \quad \delta\eta_{\rho} = \varepsilon_r \Psi_{r\rho}(x,\eta,\eta_x) \\
&\delta F^{\nu} = Z_r^{\nu}(x,\eta)\varepsilon_r .
\end{aligned} \tag{9.63}
$$

Ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός σχετίζεται μόνο με τις συντεταγμένες και αντιστοιχεί στη στοιχειώδη μεταβολή (στοιχειώδη μετατόπιση) μόνο μιας συντεταγμένης (προφανώς μια από τις μεταβλητές, συντεταγμένη, είναι και ο χρόνος). Υποθέτουμε επίσης ότι δεν αλλάζει η μορφή της λαγκρανζιανής πυκνότητας, οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$
\begin{aligned}
&X_r^{\nu} = \delta_r^{\nu}, \Psi_{r\rho} = 0 \\
&Z_r^{\nu} = 0.
\end{aligned} \tag{9.64}
$$

Αυτή είναι η συνήθης περίπτωση μετασχηματισμού, όμως οι Εξ. (9.63) αντιπροσωπεύουν μια ευρύτερη κατηγορία μετασχηματισμών όπου μπορεί να μεταβάλλονται και τα πεδία.

Είναι ευνόητο ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\delta\eta_{\rho} = \bar{\delta}\eta_{\rho} + \frac{\partial\eta_{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\delta x^{\sigma} \\
&\bar{\delta}\eta_{\rho} = \varepsilon_r\left(\Psi_{r\rho} - \frac{\partial\eta_{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\delta x^{\sigma}\right).
\end{aligned} \tag{9.65}
$$

οπότε από τις γενικές Εξ. (9.62), (9.63) και (9.65) βρίσκουμε την παρακάτω σχέση

$$
\varepsilon_r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma} - L\,\delta_{\sigma}^{\nu}\right)X_r^{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\Psi_{r\rho} + Z_r^{\nu}(x,\eta)\right\} = 0 \tag{9.66}
$$

Επειδή τα ε είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, καταλήγουμε στις παρακάτω R εξισώσεις,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma} - L\,\delta_{\sigma}^{\nu}\right)X_r^{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\Psi_{r\rho} + Z_r^{\nu}(x,\eta)\right\} = 0 \\
&r = 1,2,\ldots,R.
\end{aligned} \tag{9.67}
$$

Αυτές είναι θεωρήματα διατήρησης διαφορικής μορφής για R διατηρούμενα ρεύματα.

Αυτό αποτελεί το κύριο συμπέρασμα του πρώτου θεωρήματος της Noether. Συγκεκριμένα, αν για μετασχηματισμούς της μορφής της Εξ. (9.63) η λαγκρανζιανή πυκνότητα παρουσιάζει τη συμμετρία που αναφέραμε στην αρχή, τότε υπάρχουν R διατηρούμενες ποσότητες.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε αναλλοίωτο στη μορφή της λαγκρανζιανής πυκνότητας, άρα $Z_r^{\nu} = 0$. Τότε ως ειδική περίπτωση μπορούμε να δείξουμε τη διατήρηση του τανυστή τάσης-ενέργειας, αν η λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν εξαρτάται άμεσα από τα x. Για τους μετασχηματισμούς ισχύει η Εξ. (9.64). Επομένως από την Εξ. (9.67) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma} - L\,\delta_{\sigma}^{\nu}\right)\delta_{\mu}^{\sigma}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma} - L\,\delta_{\sigma}^{\nu}\right)\delta_{\mu}^{\sigma}\right\} = 0 \\
&\mu = 0,1,2,3
\end{aligned} \tag{9.68}
$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι ίδια με αυτήν που ξέρουμε ήδη από τα προηγούμενα.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση μετασχηματισμού είναι αυτή που μεταβάλλει μόνο τα πεδία, δηλαδή

$$\delta x = 0, \delta\eta_\rho = \varepsilon c_\rho \eta_\rho \text{ (χωρίς άθροιση στα } \rho \text{)} \tag{9.69}$$

Αυτός είναι καθολικός μετασχηματισμός (global transformation). Ο γνωστός μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητισμού τοπικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός βαθμίδας (local transformation, gauge transformation).

Αν η λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι αναλλοίωτη στη μορφή από τέτοιο μετασχηματισμό, τότε έχουμε εξίσωση διατήρησης που ουσιαστικά είναι η εξίσωση συνέχειας, όπου εμφανίζεται η πυκνότητα ρεύματος. Οι σχέσεις που προκύπτουν είναι

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\Theta_\nu}{\mathrm{d}x_\nu} = 0 \\ &\Theta_\nu = c_\rho \frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_\rho . \end{aligned} \tag{9.70}$$

Το Θ_ν παίζει τον ρόλο της πυκνότητας (τετρα)ρεύματος.

9.4.2 Δεύτερο θεώρημα της Noether για πεδία

Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν οι ταυτότητες των Εξ. (15.86) για τέσσερις διαστάσεις, οπότε έχουμε για τις σχέσεις μεταξύ των εκφράσεων του Euler και των παραγώγων τους

$$\sum_{j=1}^{n} \left(b_{\mu j0} E_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}^l (b_{\mu jl} E_j)}{\mathrm{d}x_i^l} \right) = 0 \quad \mu = 1, 2, ..., R. \tag{9.71}$$

Αυτό στη Γενική Σχετικότητα οδηγεί στις ταυτότητες Bianchi.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε με λίγα λόγια στο πρόβλημα της διατήρησης της ενέργειας τοπικά στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας.

Μετά την ανακάλυψη των (πεδιακών) εξισώσεων της Γενικής Σχετικότητας από τον Einstein, ο Hilbert βρήκε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα η οποία με χρήση της αρχής μεταβολών οδηγεί σε αυτές τις εξισώσεις. Μετά από αυτό ήταν φυσικό να απασχολεί τους ερευνητές της εποχής, μεταξύ αυτών κυρίως τους David Hilbert, Felix Klein και Albert Einstein, η διατύπωση του τοπικού νόμου της διατήρησης της ενέργειας με χρήση της λαγκρανζιανής πυκνότητας κατά τα γνωστά. Φάνηκε αμέσως πως αυτό δεν ήταν δυνατό να γίνει όπως γινόταν για άλλα πεδία, όπως για παράδειγμα τα Ηλεκτρομαγνητικά. Με προτροπή του Hilbert η Noether ασχολήθηκε με το θέμα και διατύπωσε τα δυο περίφημα θεωρήματά της. Στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας, η οποία είναι θεωρία βαθμίδας, η ομάδα συμμετρίας της είναι όλοι οι συνεχείς μετασχηματισμοί (τετρα)συντεταγμένων με συνεχείς παραγώγους. Συχνά λέγεται ομάδα γενικών μετασχηματισμών συντεταγμένων.

Θεωρίες πεδίων με συμμετρίες όπου ισχύει το πρώτο θεώρημα της Noether, όπως στην Ειδική Σχετικότητα με ομάδα συμμετρίας αυτήν του Poincare, έχουν μια τοπική (εντοπισμένη) διατηρούμενη ενεργειακή πυκνότητα. Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε αυθαίρετο όγκο η ολική ροή ενέργειας δια μέσου της περικλείουσας τον όγκο επιφάνειας (σύνορο), ισούται με τον ρυθμό μείωσης της ενέργειας στον όγκο. Αυτό προκύπτει διότι ο τανυστής ενέργειας-ορμής της θεωρίας έχει απόκλιση ίση με μηδέν.

Στη Γενική Σχετικότητα δεν έχει νόημα να μιλούμε για ποσότητα η οποία είναι καλά καθορισμένη εντοπισμένη ενέργεια. Σε αυτή την περίπτωση, όπως είπαμε, έχουμε τις λεγόμενες εξαρτήσεις Bianchi. Η πλήρης ανάλυση χρειάζεται τις ειδικές γνώσεις από τη Γενική Σχετικότητα. Εδώ απλώς θα σκιαγραφήσουμε το θέμα χωρίς αποδείξεις.

Όταν οι συμμετρίες είναι αυτές που σχετίζονται με το πρώτο θεώρημα, δηλαδή η δράση δεν μεταβάλλεται υπό μετατοπίσεις στον τετραχωρόχρονο, τότε για τον τανυστή ενέργειας ορμής ισχύει:

$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Δηλαδή η απόκλιση μηδενίζεται. Αυτό συνεπάγεται τοπική διατήρηση της ενέργειας.

Στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας ο τανυστής ενέργειας-ορμής περιέχει συμβολή από όλες τις μορφές ενέργειας, όπως ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, πεδίων σωματιδίων αλλά όχι βαρυτικών πεδίων. Τα βαρυτικά πεδία φέρουν ενέργεια, επομένως ο τανυστής $T^{\mu\nu}$ δεν περιλαμβάνει όλες τις μορφές ενέργειας, άρα η ποσότητα T^{00} δεν είναι η ολική ενέργεια του συστήματος. Στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας έχουμε τις εξαρτήσεις Bianchi. Για παράδειγμα, η συσταλμένη ταυτότητα (contracted identity) Bianchi είναι: $\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}\right)_{;\mu} = 0$. $R^{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής (του) Ricci και R είναι η βαθμωτή ποσότητα Ricci ή βαθμωτή καμπυλότητα. Σε αυτή την περίπτωση, όταν υπάρχει συμμετρία για γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, ισχύει η σχέση:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} T^{\sigma\nu} + \left(\sqrt{|g|}\, T^{\mu\nu}\right)_{,\nu} / \sqrt{|g|} = 0 .$$

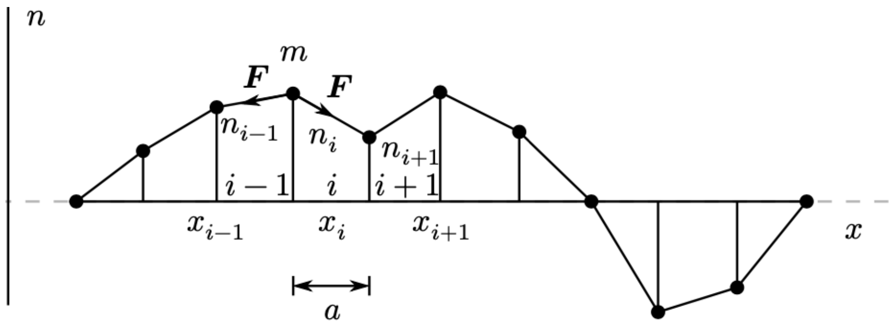
Η παραγώγιση που δηλώνεται με $;\mu$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος, εδώ έχουμε συναλλοίωτη απόκλιση. Η τελευταία σχέση ουσιαστικά δείχνει τη σχέση μεταξύ συνήθους απόκλισης και συναλλοίωτης απόκλισης, η οποία ισχύει για συμμετρικό τανυστή $T^{\mu\nu}$. $\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}$ είναι τα σύμβολα (του) Christoffel τα οποία εξαρτώνται από τον μετρικό τανυστή, $g^{\mu\nu}$ και τις παραγώγους του και είναι διάφορα του μηδέν όταν η καμπυλότητα Riemann δεν μηδενίζεται. g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή.

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μηδενισμό συνήθων αποκλίσεων, οπότε δεν αναμένουμε να έχουμε τα συνήθη θεωρήματα διατήρησης όπως αυτό της ενέργειας. Αυτό οφείλεται στο ότι οι εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας είναι μη γραμμικές. Η ίδια η βαρύτητα δημιουργεί βαρύτητα και δεν μπορεί να οριστεί η μάζα συστήματος ούτε η ενέργειά του. Θυμίζουμε ότι στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας αυτό γίνεται. Σε αυτή την περίπτωση η ενέργεια ενός πεπερασμένου συστήματος που ως σύνολο είναι ακίνητο, είναι το άθροισμα όλων των μορφών ενέργειας που περιέχεται στον όγκο του, συμπεριλαμβανομένης της βαρυτικής ενέργειας. Η μάζα του είναι αυτή η ενέργεια (ηρεμίας) δια c^2. Αυτό δεν γίνεται στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας με αυτόν τον τρόπο. Μπορεί να οριστεί ενέργεια και μάζα αλλά αυτά δεν είναι συναλλοίωτα μεγέθη. Μπορεί να οριστεί η ενέργεια που υπάρχει στο εσωτερικό ενός εκτεταμένου μέχρι το άπειρο όγκου όπου βρίσκεται το εξεταζόμενο σύστημα. Στην άπειρη απόσταση τα άλλα βαρυτικά πεδία είναι πρακτικώς μηδέν και μπορεί να υπάρχουν μόνο πεδία βαρυτικής ακτινοβολίας. Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να κοιτάξετε κάποιο βιβλίο Γενικής Σχετικότητας.

Παραδείγματα-ειδικά θέματα

1. Η χορδή ως όριο συζευγμένων σωματίων
Στα προηγούμενα εξετάσαμε συνεχή συστήματα θεωρώντας τα από την αρχή ως συνεχή. Όμως για να βρούμε τις σχέσεις για συνεχή μηχανικά συστήματα είναι δυνατόν να ξεκινήσουμε από ένα σύστημα πεπερασμένου πλήθους συζευγμένων υλικών σημείων (σωματίων) και στη συνέχεια να υποθέσουμε ότι το πλήθος των σωματίων τείνει στο άπειρο, οι μάζες των σωματίων τείνουν στο μηδέν, οι μεταξύ τους αποστάσεις τείνουν στο μηδέν, έτσι που να καταλήξουμε σε, γενικώς, πεπερασμένη πυκνότητα μάζας σε κάθε σημείο. Οι συντεταγμένες που περιγράφουν το σύστημα γίνονται άπειρες το πλήθος και το αρχικό διακριτό σύστημα γίνεται συνεχές. Με αυτή τη διαδικασία είναι φανερό ότι το συνεχές σύστημα έχει άπειρο πλήθος συντεταγμένων, οι συντεταγμένες είναι συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, είναι πεδία.

Θα εξετάσουμε μόνο ένα σχετικά απλό σύστημα, το σύστημα τεντωμένης χορδής, βλ. Σχήμα 9.2.



Σχήμα 9.2 *Συζευγμένα διακριτά σωμάτια ως προσέγγιση τεντωμένης χορδής.*

Αρχικά, θεωρούμε ότι η χορδή αποτελείται από N σωμάτια συνδεδεμένα μεταξύ τους με ελατήρια. Το κάθε σωμάτιο έχει μάζα m και βρίσκονται, κατά την ισορροπία, στις θέσεις x_i, $i=1,2,...,N$ κατά μήκος του άξονα της χορδής, x. Η μεταξύ διαδοχικών σωματίων απόσταση είναι a. Η απομάκρυνση, η_i του κάθε σωματίου από τη θέση ισορροπίας του είναι στην κάθετη διεύθυνση ως προς τον άξονα x. Η κίνηση γίνεται σε ένα επίπεδο.

Υποθέτουμε ότι οι απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας δεν είναι μεγάλες έτσι ώστε η κλίση των ευθύγραμμων τμημάτων που είναι τα ελατήρια που συνδέουν τα διαδοχικά σωμάτια να είναι σχετικά μικρή. Αυτό σημαίνει ότι η μηχανική τάση, F , στη χορδή είναι σταθερή ανεξάρτητη από την παραμόρφωση της χορδής. Είναι ευνόητο ότι το κάθε σωμάτιο αλληλεπιδρά μόνο με τα δυο γειτονικά του. Η κινητική ενέργεια της χορδής είναι

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{\eta}_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{N}a\frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 . \qquad (9.72)$$

Για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας σκεφτόμαστε ως εξής:

Στη θέση ισορροπίας το σύστημα βρίσκεται υπό μηχανική τάση. Αυτό σημαίνει ότι έχει κάποια δυναμική ενέργεια. Αυτή είναι δυναμική ενέργεια που προστίθεται στη δυναμική ενέργεια που αποκτά το σύστημα ένεκα απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας. Είναι μια σταθερά που δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κίνησης και δεν λαμβάνεται υπόψη. Ως δυναμική ενέργεια λαμβάνεται μόνο αυτή που προέρχεται από την απομάκρυνση από την ισορροπία. Μετά την απομάκρυνση των σωματίων από τη θέση ισορροπίας, Σχήμα 9.2, το υπ' αριθμόν i τμήμα (ελατήριο) επιμηκύνεται κατά

$$\Delta a_i=\sqrt{a^2+(\eta_i-\eta_{i-1})^2}-a .$$

Για μικρές απομακρύνσεις έχουμε

$$\Delta a_i = a\left[\sqrt{1+\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right)^2}-1\right] \approx a\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right)^2-1\right]$$
$$= a\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right)^2. \tag{9.73}$$

Η δύναμη F κατά τη μεταβολή του μήκους ελατηρίου κατά Δa_i εκτελεί έργο στο ελατήριο που αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια σε αυτό. Ισχύει

$$V_i = F\Delta a_i = Fa\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right)^2. \tag{9.74}$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$V = \sum_{i=1}^{N} Fa\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right)^2. \tag{9.75}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $N \to +\infty$, $a \to 0$ έτσι που $\lim\limits_{a\to 0}\frac{m}{a} = \rho_l$, πυκνότητα μάζας δηλαδή μάζα ανά μονάδα μήκους. Επίσης ισχύουν

$$\eta_i \to \eta(x,t),\ \dot{\eta}_i \to \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t},\ \lim_{a\to 0}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a} = \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}.$$
$$\mathcal{T} = \lim_{a\to 0}\frac{T}{a},\ \mathcal{V} = \lim_{a\to 0}\frac{V}{a} \tag{9.76}$$

Τα $\mathcal{T}$, $\mathcal{V}$ είναι οι αντίστοιχες ποσότητες ανά μονάδα μήκους. Τελικώς καταλήγουμε τις παρακάτω σχέσεις για τη συνεχή χορδή, όπου το a στα αθροίσματα έχει γίνει $\mathrm{d}x$ στα ολοκληρώματα,

$$T = \int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}\rho_l\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x,\ V = \int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}F\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{9.77}$$

Δηλαδή έχουμε τις γνωστές σχέσεις για τμήμα της χορδής μεταξύ $x = x_1$ και $x = x_2$.
Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης με τον οποίο καταλήγουμε στις εξισώσεις κίνησης είναι ο παρακάτω. Για το σωμάτιο i, Σχήμα 9.2, γράφουμε την εξίσωση κίνησης, δηλαδή τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο οφείλεται στα δυο ελατήρια δεξιά και αριστερά του.
Η κατακόρυφη συνιστώσα της συνολικής δύναμης είναι

$$F\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} - F\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}. \tag{9.78}$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{m}{a}\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = F\frac{1}{a}\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} - \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right). \tag{9.79}$$

Αυτή προφανώς στο όριο που το πλήθος σωματίων τείνει στο άπειρο με την προηγούμενη διαδικασία έχουμε

$$\lim_{a\to 0}\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}=\frac{\partial\eta(x)}{\partial x},\ \lim_{a\to 0}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}=\frac{\partial\eta(x-a)}{\partial x} \tag{9.80}$$

Από τις Εξ. (9.79), (9.80) καταλήγουμε τελικώς στην

$$\rho_l\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial t^2}=F\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2} \tag{9.81}$$

Αυτή είναι η γνωστή μας εξίσωση κίνησης της χορδής.

Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα της χορδής αναφέρεται σε πρόβλημα όπου τα διάφορα τμήματα της χορδής είναι συζευγμένα με τα γειτονικά τους. Το κάθε τμήμα ταλαντεύεται έχει κινητική και δυναμική ενέργεια οι οποίες μεταβάλλονται με τον χρόνο, ενώ ενέργεια ρέει προς αυτό το τμήμα και ενέργεια εκρέει από αυτό. Το κάθε επιμέρους τμήμα δεν έχει, γενικώς, σταθερή μηχανική ενέργεια, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στον απλό αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος δεν έχει παρόμοια με την παραπάνω σύζευξη με άλλα σώματα.

2. Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας

Με τον όρο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας εννοούμε το εξής: Υπάρχει ένα φυσικό σύστημα που έχει κάποια συμμετρία. Αυτό σημαίνει ότι η λαγκρανζιανή του είναι αμετάβλητη αν της επιβληθεί κάποιος μετασχηματισμός (μετασχηματισμός συμμετρίας). Επίσης οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης είναι συμμετρικές ως προς αυτόν τον μετασχηματισμό. Η ερώτηση που τίθεται είναι τι συμβαίνει με τις ευσταθείς λύσεις του συγκεκριμένου συστήματος.

Σε πολλά φυσικά συστήματα υπάρχει κάποια παράμετρος που μπορεί να μεταβάλλεται ελεύθερα, η οποία καθορίζει τις ιδιότητες των ευσταθών λύσεων. Συγκεκριμένα για μια περιοχή τιμών αυτής της παραμέτρου το σύστημα έχει ευσταθή λύση (θεμελιώδης κατάσταση) η οποία έχει τη συμμετρία του συστήματος. Όμως υπάρχει κάποια κρίσιμη τιμή αυτής της παραμέτρου, πέραν της οποίας η αρχική συμμετρική ευσταθής λύση (η θεμελιώδης κατάσταση) γίνεται ασταθής, άρα δεν είναι πλέον θεμελιώδης και εμφανίζονται άλλες ευσταθείς λύσεις (θεμελιώδεις) που είναι εκφυλισμένες (έχουν την ίδια ενέργεια) αλλά η κάθε μια δεν έχει την αρχική συμμετρία του συστήματος. Αυτό λέγεται αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Η συμμετρία είναι κρυμμένη με την έννοια ότι εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό συμμετρίας μπορούμε να μεταβούμε από την μια νέα θεμελιώδη κατάσταση στην άλλη, όμως με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας δε μπορούμε να πούμε σε ποια νέα θεμελιώδη κατάσταση θα μεταβεί το σύστημα.

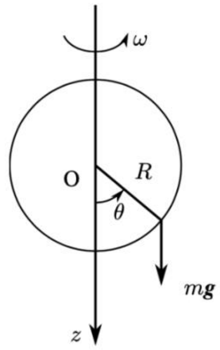
Υπάρχουν πολλά φαινόμενα στην Κλασική Φυσική όσο και στην Κβαντική Φυσική, όπου παρουσιάζεται αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Ένα παράδειγμα είναι ο σιδηρομαγνητισμός όπου εμφανίζεται «αυθόρμητη» μαγνήτιση μόνο για θερμοκρασίες κάτω της θερμοκρασίας Curie. Επίσης χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα λυγισμού μιας ευθύγραμμης ράβδου που συνθλίβεται υπό την επίδραση θλιπτικής δύναμης. Για μικρές τιμές της δύναμης η ράβδος μένει ευθύγραμμη και αυτή η κατάσταση είναι ευσταθής με την έννοια ότι μικρές παραμορφώσεις από την ευθύγραμμη κατάσταση οδηγούν και πάλι στην ευθύγραμμη κατάσταση. Όμως αν η δύναμη υπερβεί κάποια κρίσιμη τιμή, τότε η ράβδος λυγίζει προς μια κατεύθυνση που μπορεί να είναι οποιαδήποτε γύρω από τη ράβδο. Η αρχική κατάσταση γίνεται τελικά ασταθής.

Μπορεί να υπάρχουν άλλες γειτονικές ευσταθείς καταστάσεις πριν σπάσει η ράβδος αλλά είναι σχετικά δύσκολο να προσδιοριστούν. Το άλλο πολύ δημοφιλές κβαντικό παράδειγμα είναι ο μηχανισμός BEH (Brout-Englert- Higgs). Στη Μη Γραμμική Δυναμική και Χάος τέτοια φαινόμενα λέγονται διακλαδώσεις (bifurcations).

Στην αρχή θα ασχοληθούμε με ένα παράδειγμα διακριτού συστήματος Κλασικής Μηχανικής στο οποίο μπορούν και προσδιορίζονται οι εκφυλισμένες ευσταθείς καταστάσεις μετά από το σπάσιμο της συμμετρίας.

Α) Πρόκειται για τη γνωστή περίπτωση ενός κυκλικού βρόχου (δακτύλιος) ο οποίος διαπερνά σημειακή χάνδρα. Η χάνδρα είναι δέσμια να είναι δυνατόν να κινείται κατά μήκος του βρόχου χωρίς τριβή. Ο βρόχος βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο μέσα στο πεδίο βαρύτητας και μπορεί να περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα, Σχήμα 9.3, οπότε και η χάνδρα είναι δέσμια να κάνει το ίδιο. Υποθέτουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω είναι κάθε φορά σταθερή. Ζητείται να βρεθεί η θέση «ισορροπίας» της χάνδρας, με την έννοια ότι η χάνδρα σχηματίζει σταθερή γωνία θ_0 με τον κατακόρυφο άξονα.

Να ελεγχθεί αν η θέση αυτή είναι θέση ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας. Αυτό μπορεί να γίνει με το να προσδιοριστεί η κίνηση ως προς τη γωνία θ, για μικρές μεταβολές της περί την θ_0.



Σχήμα 9.3 *Χάντρα σε περιστρεφόμενο βρόχο.*

Η κινητική και η δυναμική συνάρτηση (δυναμική ενέργεια) της χάνδρας ως προς το αδρανειακό σύστημα είναι:

$$T = \frac{1}{2} m \left(R^2 \sin^2 \theta \omega^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \right), \; V = -mgR\cos\theta \cdot \tag{9.82}$$

Σημειώνουμε ότι αυτό προκύπτει από τη γενική εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες με χρήση των ολόνομων εξισώσεων των δεσμών τους οποίους ενσωματώνουμε. Έχουμε

$$T = \frac{1}{2} m \left(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \right), \; V = -mgr\cos\theta \cdot \tag{9.83}$$

Οι εξισώσεις των δεσμών είναι

$$\varphi - \omega t = 0, \; r - R = 0 . \tag{9.84}$$

Επομένως η ενσωμάτωσή τους οδηγεί στην Εξ. (9.82).
Η λαγκρανζιανή με τους ενσωματωμένους δεσμούς είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\, R^2 \sin^2 \theta\, \omega^2 + \frac{1}{2} m\, R^2\, \dot{\theta}^2 + m\, gR \cos\theta \cdot \tag{9.85}$$

Μπορούμε να φανταστούμε ότι παρατηρούμε το φαινόμενο από το περιστρεφόμενο σύστημα με γωνιακή ταχύτητα ω. Αυτό δεν είναι αδρανειακό σύστημα, όμως σε αυτή την περίπτωση η λαγκρανζιανή δεν αλλάζει, απλώς μεταβάλλονται οι όροι κινητική ενέργεια και δυναμική ενέργεια. Ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα η κινητική ενέργεια είναι

$$\frac{1}{2} m\, R^2\, \dot{\theta}^2 \tag{9.86}$$

και δυναμική ενέργεια είναι

$$V_{\text{ef}} = -\frac{1}{2} m\, R^2 \sin^2 \theta\, \omega^2 - m\, g\, R \cos\theta \cdot \tag{9.87}$$

Ο πρώτος όρος στη δυναμική ενέργεια σχετίζεται με τη φυγόκεντρο (δυνητική, αδρανειακή) δύναμη που υπάρχει στο περιστρεφόμενο σύστημα, αυτή η δυναμική ενέργεια είναι το λεγόμενο ενεργό δυναμικό (effective potential). Σημειώνουμε ότι ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, υπάρχει το φαινόμενο Coriolis (δύναμη Coriolis), $2m(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon})$, $\vec{\upsilon}=R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, που είναι κάθετη στο επίπεδο του βρόχου και επομένως αντισταθμίζεται από τη δύναμη του αντίστοιχου δεσμού. Η δυναμική συνάρτηση Coriolis είναι $U_{\mathrm{C}}=-m\vec{\upsilon}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$, από αυτήν με χρήση της σχέσης που δίνει τη δύναμη για δυναμικά που εξαρτώνται γραμμικά από τις ταχύτητες, βρίσκουμε τη δύναμη Coriolis. Όμως όταν ενσωματώνουμε τον δεσμό, τότε η δυναμική συνάρτηση αλλάζει μορφή όπως και η κινητική ενέργεια που είδαμε παραπάνω. Ο δεσμός που οδηγεί σε αυτό το αποτέλεσμα είναι ο $\varphi-\omega t=0$. Στην περίπτωσή μας η ενσωμάτωση δεσμού οδηγεί σε $U_{\mathrm{C}}=0$, διότι η ταχύτητα $\vec{\upsilon}=R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ είναι κάθετη στη διεύθυνση του $(\vec{\omega}\times\vec{r})$. Δηλαδή επιβεβαιώνεται ότι ισχύει η Εξ. (9.74)(9.74) χωρίς τον όρο του φαινομένου Coriolis. Σε αυτό το σημείο τονίζουμε ότι στην έκφραση για τη μηχανική ενέργεια δεν εισέρχεται η δυναμική συνάρτηση (ως δυναμική ενέργεια) Coriolis, ανεξάρτητα από του αν είναι μηδέν ή όχι ένεκα δεσμευτικών σχέσεων.

Επίσης σημειώνουμε ότι στο πρόβλημα δεν εισέρχονται οι δυνάμεις των δεσμών όταν έχουν ενσωματωθεί οι δεσμοί. Αυτό είναι μια επιπλέον ένδειξη ότι δεν πρέπει να εμφανίζεται στο πρόβλημα το φαινόμενο Coriolis, δηλαδή ο όρος του δυναμικού U_{C}, αφού οι δυνάμεις των δεσμών εξουδετερώνουν το φαινόμενο Coriolis.

Ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα η μόνη κίνηση της χάνδρας σχετίζεται με τη μεταβολή του $\theta,\ \theta=\theta(t)$. Η λαγκρανζιανή είναι συμμετρική (αναλλοίωτη) ως προς τον μη συνεχή μετασχηματισμό $\theta\to-\theta$. Όταν $\theta=$ σταθερό, η χάνδρα είναι ακίνητη ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα.

Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\,. \tag{9.88}$$

Επομένως καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta+(g/R)\sin\theta=0\,. \tag{9.89}$$

Η εξίσωση κίνησης είναι συμμετρική στον ανωτέρω μετασχηματισμό. Τα σημεία ισορροπίας, θ_0, προσδιορίζονται υποθέτοντας ότι $\theta=\theta_0=\text{σταθ.}$, οπότε $\dot{\theta}=0,\ \ddot{\theta}=0$. Οπότε η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\left(-\omega^2\cos\theta_0+\frac{g}{R}\right)\sin\theta_0=0\,. \tag{9.90}$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με χρήση του ενεργού δυναμικού. Συγκεκριμένα, βρίσκοντας τα σημεία όπου το ενεργό δυναμικό παρουσιάζει ακρότατα, δηλαδή $\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial\theta}=0$. Πράγματι

$$\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial\theta}=\left(-mR^2\sin\theta\cos\theta\,\omega^2+m\,g\,R\sin\theta\right)=0\,. \tag{9.91}$$

Προφανώς έχουμε την ίδια σχέση για τη συνθήκη ισορροπίας όπως πριν.

Οι λύσεις της συνθήκης ισορροπίας είναι

$$\sin\theta_0=0\ \text{ ή }\ \cos\theta_0=\frac{g}{R\omega^2}\,. \tag{9.92}$$

Από την πρώτη βρίσκουμε δυο σημεία ισορροπίας, $\theta_0 = 0$ και $\theta_0 = \pi$. Το πρώτο είναι το κατώτατο σημείο του βρόχου και το δεύτερο το ανώτατο σημείο του. Αυτά είναι ανεξάρτητα από το ω. Αυτές είναι λύσεις της εξίσωσης κίνησης που έχουν την ίδια ανωτέρω συμμετρία.

Από τη δεύτερη λύση ισορροπίας έχουμε ότι (αφού $\dfrac{g}{R\omega^2} > 0$) πρέπει $-\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 < +\dfrac{\pi}{2}$. Εφόσον $\cos\theta_0 \leq 1$, θα υπάρχουν σημεία ισορροπίας μόνον αν

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}} = \omega_c . \tag{9.93}$$

Δηλαδή, υπάρχει μια κρίσιμη κυκλική συχνότητα τέτοια που για $\omega < \omega_c$, υπάρχουν δυο σημεία ισορροπίας, τα $\theta_0 = 0$ και $\theta_0 = \pi$.

Για $\omega > \omega_c$, υπάρχουν τέσσερα σημεία ισορροπίας, τα

$$\theta_0 = 0,\ \theta_0 = \pi \ \text{ και } \ \theta_0 = +\arccos\frac{g}{R\omega^2} = +\arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2},\ \theta_0 = -\arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2} . \tag{9.94}$$

Τα δυο τελευταία είναι λύσεις που το καθένα δεν έχει την αρχική συμμετρία. Η εφαρμογή του μετασχηματισμού $\theta \to -\theta$, οδηγεί από τη μια λύση στην άλλη. Η ενεργός δυναμική ενέργεια γράφεται και ως

$$V_{\text{ef}} = -\frac{1}{2} m R^2 \sin^2\theta\,\omega^2 - m R^2\,\omega_c^2 \cos\theta . \tag{9.95}$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ευστάθεια/αστάθεια των σημείων ισορροπίας.

Για μικρές αποκλίσεις $\theta - \theta_0$ από την ισορροπία βρίσκουμε ότι η ανάπτυξη Taylor δίνει, αφού αγνοήσουμε όρους ανώτερους της δεύτερης τάξης,

$$V_{\text{ef}}(\theta) = V_{\text{ef}}(\theta_0) + \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial\theta}(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2}(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right)^2 . \tag{9.96}$$

Προφανώς αφού ο δεύτερος όρος είναι μηδέν (σημείο ισορροπίας) έχουμε

$$V_{\text{ef}}(\theta) = V_{\text{ef}}(\theta_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2}(\theta_0)\left(\theta - \theta_0\right)^2 . \tag{9.97}$$

Είναι ευνόητο ότι αν το V_{ef} έχει ελάχιστο στη θέση $\theta = \theta_0$ τότε η δεύτερη παράγωγος είναι θετική οπότε αν η χάνδρα μετατοπιστεί λίγο από τη θέση ισορροπίας, εκτελεί αρμονική κίνηση στην περιοχή του αυτού του σημείου και η ισορροπία είναι ευσταθής. Αν το V_{ef} έχει μέγιστο τότε η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική και αν η χάνδρα μετατοπιστεί λίγο από τη θέση ισορροπίας θα τείνει να απομακρύνεται από αυτήν. Η ισορροπία είναι ασταθής. Για τη δεύτερη παράγωγο ισχύει

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2} = mR^2\left[\omega_{\text{c}}^2\cos\theta - \omega^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right]. \tag{9.98}$$

1. Εξετάζουμε το είδος ισορροπίας στο σημείο $\theta_0 = 0$. Για $\omega < \omega_{\text{c}}$ η τιμή της δεύτερης παραγώγου του ενεργού δυναμικού σε αυτή τη θέση ισορροπίας είναι

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2}(0) = mR^2\left(\omega_{\text{c}}^2 - \omega^2\right) > 0. \tag{9.99}$$

Αυτό σημαίνει ότι το ενεργό δυναμικό έχει ελάχιστο, επομένως η κίνηση στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι αρμονική κίνηση άρα το σημείο είναι σημείο ευστάθειας.

Για $\omega > \omega_{\text{c}}$ έχουμε

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2}(0) = mR^2\left(\omega_{\text{c}}^2 - \omega^2\right) < 0. \tag{9.100}$$

Αυτό σημαίνει ότι το ενεργό δυναμικό έχει μέγιστο άρα η θέση είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

2. Στη συνέχεια ας εξετάσουμε την ισορροπία στο σημείο $\theta_0 = \pi$. Σε αυτή τη θέση έχουμε

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2}(\pi) = -mR^2\left(\omega_{\text{c}}^2 + \omega^2\right) < 0 \tag{9.101}$$

δηλαδή έχουμε μέγιστο οπότε η ισορροπία είναι ασταθής.

3. Για το σημείο ισορροπίας

$$\theta_0 = \theta_1 = +\arccos\frac{\omega_{\text{c}}^2}{\omega^2}$$

σημειώνουμε ότι ισχύει $\omega > \omega_{\text{c}}$, έχουμε

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial\theta^2}(\theta_1) = mR^2\,\frac{\omega^4 - \omega_{\text{c}}^4}{\omega^2} > 0, \tag{9.102}$$

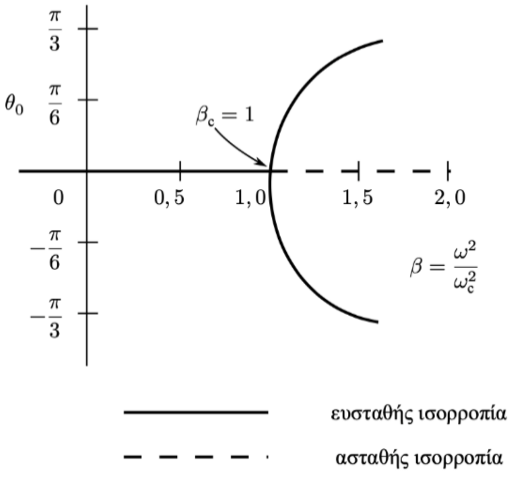
οπότε το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο άρα έχουμε ευστάθεια.

4. Για το «συμμετρικό» ως προς το προηγούμενο σημείο

$$\theta_0 = \theta_2 = -\arccos\frac{\omega_{\text{c}}^2}{\omega^2}, \tag{9.103}$$

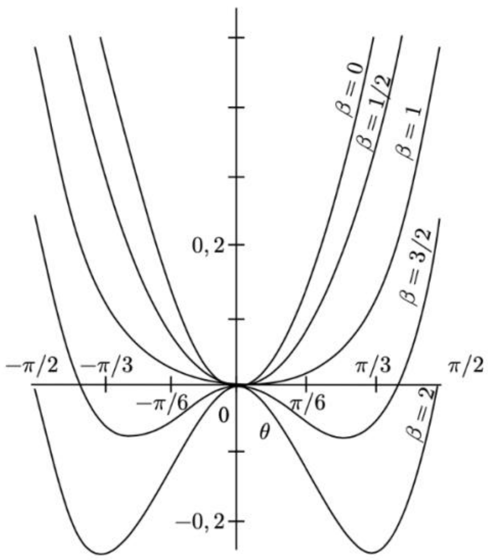
ισχύουν τα ίδια όπως στο 3, δηλαδή έχουμε ευστάθεια με τη διαφορά ότι η κίνηση γίνεται στη συμμετρική περιοχή. Τα 3 και 4 μας λένε ότι ενώ ξεκινήσαμε από μια ευσταθή κατάσταση, με τη μεταβολή της παραμέτρου ω, αυτή έγινε ασταθής και εμφανίστηκαν δυο συμμετρικές ευσταθείς καταστάσεις, δυο θεμελιώδεις εκφυλισμένες καταστάσεις.

Στο Σχήμα 9.4 φαίνονται οι διάφορες περιοχές ευστάθειας και αστάθειας.



Σχήμα 9.4 *Διάγραμμα διακλάδωσης για τη χάντρα σε περιστρεφόμενο βρόχο.*

Αυτό είναι ένα τυπικό διάγραμμα διακλάδωσης (bifurcation). Για μικρές τιμές μιας παραμέτρου το σύστημα βρίσκεται σε μια σειρά από ευσταθείς καταστάσεις, μετά από μια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου έχουμε ένα κλάδο από ασταθείς καταστάσεις αλλά και δυο κλάδους, δυο σειρές, από ευσταθείς καταστάσεις. Το ποιος ευσταθής κλάδος θα ακολουθηθεί από το σύστημα δε μπορεί να προβλεφθεί. Το Σχήμα 9.5 δείχνει το ενεργό δυναμικό ως συνάρτηση του θ για διάφορες τιμές της γωνιακής ταχύτητας, ω. Για την ακρίβεια, αντί του ενεργού δυναμικού V_{ef} εισάγουμε το ανηγμένο (αδιάστατο) δυναμικό $V_{\text{r}}(\theta) = \frac{V_{\text{ef}}}{mgR}$ και αντί του ω, έχουμε εισαγάγει την αδιάστατη παράμετρο $\beta = \frac{\omega^2}{\omega_{\text{c}}^2}$. Επίσης έχουμε μετατοπίσει τη θέση μηδενός του δυναμικού ώστε στη θέση ισορροπίας $\theta_0 = 0$ η τιμή του δυναμικού να είναι μηδέν, δηλαδή έχουμε αφαιρέσει από το δυναμικό V_{ef} τον όρο $V_{\text{ef}}(0) = -m R^2 \omega_{\text{c}}^2$. Από το ανηγμένο δυναμικό αφαιρούμε το -1. Δεν δείχνουμε την ασταθή κατάσταση με $\theta_0 = \pi$, εφόσον δεν αλλάζει χαρακτήρα, είναι πάντα ασταθής.



Σχήμα 9.5 *Ενεργό δυναμικό για το πρόβλημα της χάνδρας στον περιστρεφόμενο βρόχο.*

Η κρίσιμη καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση με $\beta = 1$. Εδώ έχουμε ένα φαινόμενο αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας διακριτού συστήματος της κλασικής μηχανικής. Η λαγκρανζιανή του συστήματος είναι συμμετρική στον διακριτό (μη συνεχή) μετασχηματισμό $\theta \to -\theta$. Για τιμές της παραμέτρου ω, $\omega < \omega_c$, το σύστημα έχει ένα σημείο ευστάθειας (λύση της εξίσωσης κίνησης), θεμελιώδης κατάσταση, στο $\theta = 0$. Καθώς η παράμετρος αυξάνεται, όταν $\omega > \omega_c$, η θέση $\theta = 0$ που εξακολουθεί να είναι λύση, γίνεται ασταθής και εμφανίζονται δυο συμμετρικές θέσεις ευσταθούς ισορροπίας, δυο θεμελιώδεις καταστάσεις,

$$\theta_1 = +\arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2},\ \theta_2 = -\arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2}.$$

Οι καταστάσεις αυτές είναι εκφυλισμένες διότι έχουν την ίδια δυναμική ενέργεια. Επίσης δεν είναι η κάθε μια συμμετρική ως προς τον ανωτέρω μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός συμμετρίας της λαγκρανζιανής οδηγεί από τη μια λύση στην άλλη. Η συμμετρία «παραμένει», είναι κρυμμένη, με την έννοια ότι δεν ξέρουμε ποια από τις δυο θα είναι η ευσταθής λύση που θα προκύψει. Προφανώς έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας.

Β) Το επόμενο παράδειγμα αναφέρεται σε Κλασική Θεωρία Πεδίου και με αυτή την έννοια είναι κατά κάποιο τρόπο πιο κοντά στον μηχανισμό ΒΕΗ. Θα πούμε δυο λόγια χρήσιμα για την περαιτέρω κατανόηση του αντικειμένου. Στην Θεωρία Πεδίου τη θέση της λαγκρανζιανής παίρνει η λαγκρανζιανή πυκνότητα, $L = L\left(\phi, \partial_\mu \phi\right)$. Γενικώς, για ένα βαθμωτό πραγματικό πεδίο $\phi = \phi(x^\mu)$, έχουμε

$$L \equiv \left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \beta\phi^2 + \gamma\phi^3 + \ldots \qquad (9.104)$$

Η ερμηνεία των όρων είναι η εξής, ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός όρος ο οποίος είναι μηδέν όταν το σωματίδιο που περιγράφει είναι στη θεμελιώδη κατάστασή του. Ο δεύτερος όρος σχετίζεται με τη μάζα του σωματιδίου αν $\beta > 0$. Οι άλλοι όροι αντιπροσωπεύουν αλληλεπιδράσεις διαφόρων τάξεων του σωματιδίου με τον εαυτό του.

Ίσως είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τη γνωστή περίπτωση

$$L \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \qquad (9.105)$$

με $m^2 > 0$. Από την εξίσωση Lagrange βρίσκουμε την εξίσωση Klein-Gordon (εξίσωση κίνησης)

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi = 0. \qquad (9.106)$$

Αυτή πράγματι περιγράφει ελεύθερο σωματίδιο με μάζα m. Η θεμελιώδης λύση αυτής είναι η $\phi_0 = 0$. Η θεμελιώδης λύση όπως και η λαγκρανζιανή και η εξίσωση Klein-Gordon είναι συμμετρικές ως προς τη διακριτή συμμετρία $\phi \to -\phi$. Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου ενδιαφέρουν οι ευσταθείς λύσεις, διότι οι υπολογισμοί γίνονται με θεωρία διαταραχών, όπου οι όροι αλληλεπίδρασης είναι μικροί. Γίνεται στην ουσία ανάπτυξη περί την ευσταθή λύση. Ανάπτυγμα περί ασταθή λύση δεν έχει νόημα, δεν συγκλίνει. Ας θεωρήσουμε τώρα την απλοϊκή περίπτωση βαθμωτού πραγματικού πεδίου ϕ με λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$L \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \qquad (9.107)$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$ ενώ το μ^2 είναι αυθαίρετο, όχι κατ' ανάγκη θετικό, είναι μια παράμετρος που μπορεί να παίρνει συνεχείς τιμές. Μπορούμε να πούμε ότι ο πρώτος όρος είναι ο κινηματικός όρος $T = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2$ και ότι $V = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ είναι η πυκνότητα του δυναμικού, οπότε πράγματι $L = T - V$. Η εξίσωση Lagrange είναι

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \qquad (9.108)$$

Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει για την παραπάνω λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2\right)\phi + \lambda\phi^3 = 0\,. \qquad (9.109)$$

Αυτή έχει ως λύση την $\phi = 0$. Η λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι συμμετρική στον μετασχηματισμό $\phi \to -\phi$, το ίδιο ισχύει για την εξίσωση κίνησης και για τη λύση $\phi = 0$.

Ας θεωρήσουμε ότι $\mu^2 > 0$, τότε $\mu = m$, δηλαδή είναι η μάζα του σωματιδίου και ο όρος $\lambda\phi^3$ είναι (μικρός) όρος αλληλεπίδρασης του σωματιδίου με τον εαυτό του. Αυτό μπορεί να συναχθεί εύκολα αν θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση (α) στο Σχήμα 9.6 της ανωτέρω πυκνότητας δυναμικού

$$V = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\,.$$

Η καμπύλη έχει ελάχιστο στη θέση $\phi_0 = 0$. Πράγματι μπορεί να το δει κάποιος θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν και στη συνέχεια βλέποντας ότι η δεύτερη παράγωγος είναι θετική.

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \mu^2\phi + \lambda\phi^3\,,$$

επομένως η μόνη πραγματική λύση τη

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0$$

είναι η $\phi = \phi_0 = 0$.

Ισχύει

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi^2\,, \qquad (9.110)$$

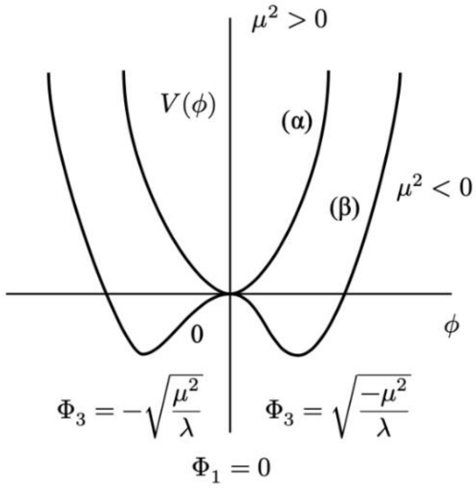
επομένως στη θέση $\phi = \phi_0 = 0$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 = \mu^2 > 0. \qquad (9.111)$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ελάχιστο, άρα η λύση είναι ευσταθής, είναι η θεμελιώδης λύση και αντιπροσωπεύει το κενό. Μπορεί να γίνει ανάπτυγμα περί αυτή τη λύση και να προχωρήσει κανείς με θεωρία διαταραχών. Φανταζόμαστε ότι η παράμετρος μ^2 ξεκινά από θετικές τιμές κάποτε γίνεται μηδέν (κρίσιμη τιμή) και στη συνέχεια γίνεται αρνητικό, $\mu^2 < 0$. Στην τελευταία περίπτωση, η γραφική παράσταση της πυκνότητας δυναμικού θα είναι όπως η καμπύλη (β), στο Σχήμα 9.6. Παρατηρούμε ότι η θέση $\phi = 0$ είναι τώρα θέση μέγιστου, δηλαδή είναι ασταθής κατάσταση και δεν αντιπροσωπεύει θεμελιώδη κατάσταση (κατάσταση κενού). Ο όρος

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 < 0$$

οπότε δεν αντιπροσωπεύει όρο μάζας όπως προηγουμένως. Είναι σαν η μάζα να είναι φανταστική.



Σχήμα 9.6 *Πυκνότητα δυναμικού ως συνάρτηση του πεδίου.*

Υπάρχουν όμως και δυο συμμετρικά ελάχιστα με εκφυλισμό (αφού έχουν την ίδια πυκνότητα δυναμικού). Σε αυτά αντιστοιχούν (πραγματικές) ευσταθείς λύσεις, θεμελιώδεις, δηλαδή καταστάσεις κενού. Περί αυτές μπορεί να εφαρμοστεί θεωρία διαταραχών στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Ας βρούμε αυτές τις θέσεις. Θα έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0, \qquad (9.112)$$

οπότε εκτός από την ασταθή πραγματική λύση $\phi_1 = 0$, έχουμε και τις δυο πραγματικές συμμετρικές, εκφυλισμένες λύσεις που τις παριστάνουμε με υ,

$$\phi_2 = +\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}},\ \phi_3 = -\phi_2 = -\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}},\ \mu^2 = -\lambda\upsilon^2. \qquad (9.113)$$

Προφανώς μπορούμε να βεβαιωθούμε και από τον έλεγχο της δεύτερης παραγώγου ότι σε αυτές τις θέσεις υπάρχει πράγματι ελάχιστο.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi_{2,3}^2 = -2\mu^2 > 0\,. \tag{9.114}$$

Εδώ έχουμε και πάλι αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, διότι για κάποιες τιμές μιας παραμέτρου, υπάρχει μια θεμελιώδης κατάσταση (ευσταθής λύση). Καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος μετά από κάποια κρίσιμη τιμή η προηγούμενη λύση γίνεται ασταθής ενώ εμφανίζονται δυο συμμετρικές εκφυλισμένες θεμελιώδης λύσεις. Η αρχική ευσταθής λύση έχει τη συμμετρία της λαγκρανζιανής στον μετασχηματισμό $\phi \to -\phi$, ενώ οι δυο λύσεις μετά το σπάσιμο της συμμετρίας δεν έχουν η καθεμιά αυτή τη συμμετρία. Απλώς η συμμετρία υποβόσκει με την έννοια ότι η μια λύση μετασχηματίζεται στην άλλη με τον μετασχηματισμό χωρίς να ξέρουμε σε ποια κατάσταση από τις δυο θα βρεθεί το σύστημα.

Γράφουμε τη λαγκρανζιανή εισάγοντας ένα πεδίο η ως μικρή διαταραχή περί το ελάχιστο, υ, που μπορεί να είναι το ϕ_2 ή το ϕ_3. Έχουμε $\phi = \upsilon + \eta$.

Εφόσον $\mu^2 = -\lambda\upsilon^2$ το δυναμικό γίνεται

$$V = \lambda\upsilon^2\eta^2 + \lambda\upsilon\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 - \frac{1}{4}\lambda\upsilon^4\,. \tag{9.115}$$

Η λαγκρανζιανή είναι ίδια με την αρχική αλλά γραμμένη με χρήση της διαταραχής η περί τη θέση υ. Είναι συμμετρική ως προς τον μετασχηματισμό $\phi \to -\phi$, όμως οι λύσεις στην περιοχή του υ, δηλαδή του ϕ_2 ή του ϕ_3 δεν είναι η κάθε μια συμμετρική ως προς αυτόν τον μετασχηματισμό, αφού είναι εντοπισμένες στη μια ή στην άλλη περιοχή.

Ο μετασχηματισμός απλώς οδηγεί από τη μια λύση στην άλλη. Παραλείπουμε τον σταθερό όρο

$$-\frac{1}{4}\lambda\upsilon^4$$

και όρους τάξης ανώτερης της δεύτερης καταλήγουμε στη λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \lambda\upsilon^2\eta^2\,. \tag{9.116}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι αυτή η λαγκρανζιανή περιγράφει βαθμωτό σωματίδιο με μάζα που βρίσκεται από τις σχέσεις

$$\frac{1}{2}m_\eta^2 = \lambda\upsilon^2 \;\; \text{άρα} \;\; m_\eta = \sqrt{2\lambda\upsilon^2} = \sqrt{-2\mu^2} > 0\,. \tag{9.117}$$

Ουσιαστικά οδηγηθήκαμε στην ανάδειξη μάζας που δεν φαίνονταν να υπάρχει στη λαγκρανζιανή στην αρχική της μορφή.

3. Θεώρημα της Noether για διακριτά συστήματα

Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε στο πρώτο θεώρημα της Noether. Μπορεί να μελετηθεί το θέμα αυτοτελώς χωρίς χρήση της γενικής ανάλυσης για πολυδιάστατους χώρους, για πεδία. Όμως εδώ θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της γενικής ανάλυσης (που ξεκινά από το Παράρτημα Π7), για την ειδική περίπτωση μονοδιάστατου χώρου όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. Οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες. Δεν θα κάνουμε την ανάλυση βήμα-βήμα, αλλά θα δώσουμε τις τελικές σχέσεις που προκύπτουν. Το διακριτό σύστημα περιγράφεται από λαγκρανζιανή της μορφής

$$L = L(q,\dot{q},t) \ .$$

Το ολοκλήρωμα της δράσης (η δράση) είναι

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t \ . \tag{9.118}$$

Οι μετασχηματισμοί είναι:

$$\begin{aligned} &q_i' = q_i'(q,\dot{q},t,\varepsilon), \ q_i = q_i'(q,\dot{q},t,0) \\ &t' = t'(q,\dot{q},t,\varepsilon), \ t = t'(q,\dot{q},t,0) \\ &\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r). \end{aligned} \tag{9.119}$$

Οι r ανεξάρτητες σταθερές παράμετροι είναι $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_r)$, οι οποίες μπορούν να είναι απειροστές. Γράφουμε αυτούς τους μετασχηματισμούς στη μορφή απειροστών μετασχηματισμών, όπου οι r ανεξάρτητες παράμετροι είναι απειροστές ποσότητες. Έχουμε

$$\begin{aligned} &q_i'(t') = q_i(t) + \delta q_i(t), \quad t' = t + \delta t \\ &q_i'(t') = q_i(t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\varepsilon \xi_i^\alpha(q,\dot{q},t), \ \delta q_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\varepsilon \xi_i^\alpha(q,\dot{q},t) \\ &t' = t + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\varepsilon \eta_i^\alpha(q,\dot{q},t), \ \delta t = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\varepsilon \eta_i^\alpha(q,\dot{q},t). \end{aligned} \tag{9.120}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\xi_i^\alpha(q,\dot{q},t) = \left.\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon_\alpha=0}, \ \eta_i^\alpha(q,\dot{q},t) = \left.\frac{\partial t'}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon_\alpha=0} \tag{9.121}$$

Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων μπορεί να προστεθεί στη λαγκρανζιανή η ολική παράγωγος, $\dfrac{\mathrm{d}G(q,t)}{\mathrm{d}t}$, μιας συνάρτησης της θέσης και του χρόνου, χωρίς να αλλάξουν οι εξισώσεις Lagrange. Στην περίπτωση των πεδίων είδαμε ότι προστίθεται μια απόκλιση.

Για απειροστούς μετασχηματισμούς η συνάρτηση είναι απειροστή και ισχύει:

$$\delta G(q,t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha F_\alpha(q,t) \, .$$

Το κριτήριο για νεδεριανή συμμετρία είναι:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + L\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta G}{\mathrm{d}t} = 0 \, . \tag{9.122}$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράσταση που περιέχει τους τέσσερεις πρώτους όρους πρέπει να είναι ολική παράγωγος ως προς τον χρόνο της συνάρτησης $-\delta G(q,t)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις σχέσεις μετασχηματισμών που περιέχουν τις απειροστές παραμέτρους. Η Εξ. (9.122) οδηγεί στις παρακάτω r το πλήθος σχέσεις, οι οποίες είναι το κριτήριο για νεδεριανή συμμετρία:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^{\alpha}(q,\dot{q},t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\dot{\xi}_i^{\alpha}(q,\dot{q},t)-\dot{q}_i\dot{\eta}_{\alpha}(q,\dot{q},t)\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\eta_{\alpha}(q,\dot{q},t)$$
$$+L\dot{\eta}_{\alpha}(q,\dot{q},t)+\dot{F}_{\alpha}(q,t)=0 \quad \alpha=1,2,...,r. \tag{9.123}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος είναι η

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)\delta t+\delta G=\text{σταθερά της κίνησης.} \tag{9.124}$$

Έχουμε τις σχέσεις

$$\delta G(q',t')=\sum_{\alpha=1}^{r}\delta G_{\alpha}(q',t'),\ \delta G_{\alpha}(q',t')=\varepsilon_{\alpha}F_{\alpha}(q',t')$$
$$\delta G(q',t')=\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_{\alpha}F_{\alpha}(q',t'). \tag{9.125}$$

Έτσι οι διατηρούμενες ποσότητες είναι:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^{\alpha}(q,t)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L(q,\dot{q},t)\right)\eta^{\alpha}(q,t)$$
$$+F_{\alpha}(q,t)=\beta_{\alpha}, \qquad \alpha=1,2,...,r. \tag{9.126}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε την Εξ. (9.124) υποθέτοντας ότι οι απειροστές ποσότητες αντιστοιχούν σε ένα στοιχείο της ομάδας μετασχηματισμών (ουσιαστικά πάλι σε ένα από τα ε), π.χ. στην ομάδα των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου σε απειροστή μετατόπιση κατά μήκος ενός από τους τρεις καρτεσιανούς άξονες.

Εδώ αναφέρουμε ότι αν εφαρμόσουμε τους ανωτέρω απειροστούς μετασχηματισμούς, όπου προφανώς κρατούμε απειροστά μέχρι πρώτης τάξης ως προς τις μεταβολές, ουσιαστικά ως προς τις απειροστές παραμέτρους, βρίσκουμε σταθερές κίνησης, πλήθους ίσου με το πλήθος των ανεξάρτητων παραμέτρων. Τέτοιοι μετασχηματισμοί συμμετρίας είναι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου στη μη Σχετικιστική Φυσική και οι μετασχηματισμοί του Lorentz στην περίπτωση ισχύος της Ειδικής Σχετικότητας. Και οι δυο αυτές ομάδες μετασχηματισμών χαρακτηρίζονται από 10 ανεξάρτητες παραμέτρους και έτσι οδηγούν σε 10 ανεξάρτητες σταθερές κίνησης.

Α. Διατήρηση της ενεργειακής συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που η λαγκρανζιανή μηχανικού συστήματος δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, $\frac{\partial L}{\partial t}=0$. Θα δείξουμε ότι διατηρείται η ενεργειακή συνάρτηση h κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος.

Λύση

Εφαρμόζουμε στο σύστημα τον μετασχηματισμό

$$t'=t+\delta t,\quad \eta=1,\ \delta t=\varepsilon\eta=\varepsilon$$
$$q_i'=q_i,\ \delta q_i=0,\ \xi_i=0,\ \ \delta\dot{q}_i=0.$$

Οι Εξ. (9.122) και (9.123) γίνονται αντιστοίχως

$$\frac{\partial L}{\partial t}\delta t = 0 = -\frac{\mathrm{d}\delta G}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\dot{F}_\alpha \,.$$

Αυτό όμως είναι το κριτήριο για να είναι ο μετασχηματισμός νεδεριανός. Δηλαδή είναι νεδεριανός και μάλιστα αφήνει τη λαγκρανζιανή αναλλοίωτη στη μορφή.

Τότε, σύμφωνα με την Εξ. (9.124) ή την (9.126) έχουμε τη διατήρηση της ενεργειακής συνάρτησης h, η οποία, αν ισχύουν οι γνωστές προϋποθέσεις, ισούται με την ενέργεια, δηλαδή

$$L - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = h = \text{σταθερά της κίνησης.}$$

Β. Το θεώρημα του κέντρου μάζας

Ας θεωρήσουμε σύστημα από N σωμάτια, για το οποίο ισχύει το νεδεριανό κριτήριο σε μετασχηματισμό του Γαλιλαίου που συνδέει αδρανειακά συστήματα μεταξύ τους (χωρίς χωρικές και χρονικές μετατοπίσεις ούτε περιστροφές, δηλαδή έχουμε μετασχηματισμούς τύπου boost, μετάβασης). Υποθέστε ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα και οι εσωτερικές πληρούν την αρχή δράσης αντίδρασης. Βρείτε μια ποσότητα που διατηρείται (σταθερά κίνησης) κατά την πραγματική κίνηση του συστήματος. Οι αντίστοιχοι άξονες των δυο συστημάτων είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Ο δείκτης α στο x_α α=1,2,3 δηλώνει τις τρεις καρτεσιανές συνιστώσες, $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Το i δηλώνει το αντίστοιχο σωμάτιο. V_α είναι η αντίστοιχη συνιστώσα ταχύτητας του τονούμενου συστήματος συντεταγμένων (κινούμενο) ως προς το μη τονούμενο σύστημα συντεταγμένων (ακίνητο).

Εδώ έχουμε την περίπτωση της ημιαναλλοιώτητας, δηλαδή δεν έχουμε αναλλοίωτη τη μορφή της λαγκρανζιανής κατά τον μετασχηματισμό.

Λύση

Ο πεπερασμένος μετασχηματισμός έχει τη μορφή για τις καρτεσιανές συνιστώσες

$$\begin{aligned} &x'_\alpha(i) = x_\alpha(i) - V_\alpha t \\ &t' = t \\ &\dot{x}'_\alpha(i) = \dot{x}_\alpha(i) - V_\alpha \end{aligned}$$

Ο αντίστοιχος απειροστός μετασχηματισμός που ισχύει για απειροστή ταχύτητα του τονούμενου συστήματος ως προς το μη τονούμενο, είναι

$$\begin{aligned} &\delta x_\alpha(i) = -\delta V_\alpha t \\ &\delta \dot{x}_\alpha(i) = -\delta V_\alpha \\ &\delta t = 0. \end{aligned}$$

Το κριτήριο Νέδερ, Εξ. (9.122), γίνεται

$$\delta V_\alpha t\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha(i)} + \delta V_\alpha\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha(i)} = \frac{\mathrm{d}\delta G_\alpha}{\mathrm{d}t} \,.$$

Το πρώτο άθροισμα στο πρώτο μέλος της ανωτέρω σχέσης είναι μηδέν,

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha(i)} = 0 \,.$$

Αυτό ισχύει διότι αυτή είναι η συνολική συνιστώσα α δύναμης που ασκείται σε όλο το σύστημα όπου δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι εσωτερικές δυνάμεις υπακούν στην αρχή δράσης-αντίδρασης, άρα αλληλοεξουδετερώνονται.

Η συνιστώσα α της ορμής του σωματίου i είναι $p_\alpha(i) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha(i)} = m_i \dot{x}_\alpha(i)$, η α συνιστώσα της ολικής ορμής είναι $P_\alpha = \sum_{i=1}^{N} p_\alpha(i)$. Επομένως έχουμε για το κριτήριο

$$\delta V_\alpha P_\alpha = \frac{\mathrm{d}\delta G_\alpha}{\mathrm{d}t}.$$

Σε διανυσματική μορφή έχουμε

$$\delta G = \sum_{\alpha=1}^{3} \delta G_\alpha$$

$$(\delta \vec{V} \cdot \vec{P}) = \frac{\mathrm{d}\delta G}{\mathrm{d}t}.$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε αναλλοίωτο μορφής της λαγκραντζιανής όταν τα $\delta\vec{V}$ και $\vec{P}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν αυτό δεν ισχύει τότε με χρήση των σχέσεων

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_\alpha(i), \quad X_\alpha^{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_\alpha(i)$$

βρίσκουμε ότι το νεδεριανό κριτήριο δίνει

$$\delta G_\alpha = \delta V_\alpha \sum_{i=1}^{N} m_i x_\alpha(i) = \delta V_\alpha M X_\alpha^{\mathrm{cm}}$$

M = ολική μάζα, X_α^{cm} = η α συνιστώσα του κέντρου μάζας του συστήματος. Από το θεώρημα της Noether (Εξ. (9.124)) προκύπτει ότι για κάθε μια συνιστώσα

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha(i)} \delta x_\alpha(i) + \delta G_\alpha = -\delta V_\alpha t \sum_{i=1}^{N} p_\alpha(i) + \delta V_\alpha M X_\alpha^{\mathrm{cm}} = \text{σταθερά της κίνησης.}$$

Από αυτήν προφανώς καταλήγουμε στην

$$M X_\alpha^{\mathrm{cm}} - t P_\alpha = \text{σταθερά της κίνησης.}$$

Σε διανυσματική μορφή ισχύει

$$M\vec{X}_{\mathrm{cm}} - t\vec{P} = \text{σταθερά της κίνησης.}$$

Από αυτήν μπορούμε να δούμε ότι αν διατηρείται και η ολική ορμή, δηλαδή αν $\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = 0$, τότε ισχύει $\dot{\vec{X}}_{\mathrm{cm}} = \dfrac{\vec{P}}{M}$ = σταθερά, η οποία εξαρτάται από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Δηλαδή το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτό είναι το θεώρημα του κέντρου μάζας. Για ένα σωμάτιο μπορούμε να πούμε ότι αυτό είναι η σύνδεση μεταξύ γαλιλαϊκής σχετικότητας και αρχής της αδράνειας.

4. Νευτωνικό πεδίο βαρύτητας

Για το νευτωνικό πεδίο βαρύτητας, θεωρήστε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα, όπου $L = -\rho\Phi - \frac{1}{8\pi G}\left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2$ $\rho = \rho(x, y, z, t),\ \Phi = \Phi(x, y, z, t)$, είναι η πυκνότητα της κατανομής μάζας που είναι δεδομένη, και το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας. Να βρεθεί η εξίσωση Gauss για το βαρυτικό πεδίο.

Λύση

$$\Phi_t = \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_t} = 0,\ \Phi_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_x} = -\frac{1}{4\pi G}\Phi_x, \ldots \text{ άρα } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_t} = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_x} = -\frac{1}{4\pi G}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \ldots$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi} = -\rho\,,$$

γράφουμε την εξίσωση Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi_z} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Phi} = 0$$

Και με αντικατάσταση των παραπάνω βρίσκουμε πράγματι τον νόμο του Gauss

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r}, t) = 4\pi G\rho(\vec{r}, t)\,.$$

5. Πυκνότητα ρεύματος στην κβαντομηχανική Schroedinger

Θεωρήστε ότι η λαγκρανζιανή πυκνότητα για την εξίσωση Schroedinger είναι,

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\Psi^* + V\Psi\Psi^* + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\Psi^*\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*\right).\ .$$

Τα Ψ, Ψ^* είναι τα δυο ανεξάρτητα πεδία. Βεβαιωθείτε ότι με τον ακόλουθο μετασχηματισμό βαθμίδος πρώτου είδους,

$$\delta t = 0, \delta x = 0, \delta\Psi = \mathrm{i}\varepsilon\Psi, \delta\Psi^* = -\mathrm{i}\varepsilon\Psi^*,$$

η λαγκρανζιανή πυκνότητα μένει αναλλοίωτη. Για ευκολία μπορείτε να λάβετε υπόψη ότι ισχύουν

$$\Psi' = \Psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}, \Psi^{*\prime} = \Psi^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon},$$

τα τονούμενα είναι τα μετασχηματισμένα πεδία. Αυτός είναι παγκόσμιος, καθολικός (global) μετασχηματισμός, εφόσον ο εκθέτης δεν εξαρτάται από τη θέση. Στη δεύτερη περίπτωση θα ήταν τοπικός (local) μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός βαθμίδας.

Για τη μονοδιάστατη περίπτωση, δηλαδή για μια μεταβλητή θέσης έστω την x, με χρήση της γνωστής σχέσης

$$\Theta^{\nu} = c_{\rho}\frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho}$$

υπολογίστε τις εκφράσεις $\Theta^1 = \Theta^t, \Theta^2 = \Theta^x$. Εδώ $c_1 = \mathrm{i}, c_2 = -\mathrm{i}$. Ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στον χρόνο και ο 2 στη θέση. Αυτές εισέρχονται στη γνωστή εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\mathrm{d}\Theta^{\nu}}{\mathrm{d}x^{\nu}} = 0\,.$$

Το Θ^{ν} παίζει τον ρόλο πυκνότητας ρεύματος, j^{ν}. Συγκρίνετε με όσα ξέρετε από την κβαντομηχανική.

Λύση

Με χρήση του μετασχηματισμού στην εκθετική μορφή, εύκολα δείχνεται ότι η λαγκρανζιανή πυκνότητα μένει αναλλοίωτη με αυτόν τον μετασχηματισμό.

$$\Theta^{1} = \Theta^{t} = \mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial \Psi_{,t}}\Psi - \mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial \Psi^{*}_{,t}}\Psi^{*}\,.$$

Ισχύουν

$$\Psi_{,t} = \dot{\Psi},\ \Psi^{*}_{,t} = \dot{\Psi}^{*},\ \Psi_{,x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x},\ \Psi^{*}_{,x} = \frac{\partial \Psi^{*}}{\partial x}\,.$$

Επομένως

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_{,t}} = \frac{h}{4\pi \mathrm{i}}\Psi^{*},\ \frac{\partial L}{\partial \Psi^{*}_{,t}} = -\frac{h}{4\pi \mathrm{i}}\Psi$$

Άρα

$$\Theta^{1} = \Theta^{t} = \frac{h}{4\pi}\Psi^{*}\Psi + \frac{h}{4\pi}\Psi\Psi^{*} = \frac{h}{2\pi}\Psi\Psi^{*}\,.$$

Βλέπουμε ότι αυτή η έκφραση είναι ουσιαστικά η πυκνότητα πιθανότητας P, της κβαντομηχανικής, διαφέρει κατά μια πολλαπλασιαστική σταθερά.

$$\Theta^{2} = \Theta^{x} = \mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial \Psi_{,x}}\Psi - \mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial \Psi^{*}_{,x}}\Psi^{*}\,.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_{,x}} = \frac{h^{2}}{8\pi^{2}m}\Psi^{*}_{,x},\ \frac{\partial L}{\partial \Psi^{*}_{,x}} = \frac{h^{2}}{8\pi^{2}m}\Psi_{,x}\,.$$

Επομένως

$$\Theta^{2} = \Theta^{x} = \mathrm{i}\frac{h^{2}}{8\pi^{2}m}\Psi^{*}_{,x}\Psi - \mathrm{i}\frac{h^{2}}{8\pi^{2}m}\Psi_{,x}\Psi^{*} = \frac{h^{2}}{8\pi^{2}m\mathrm{i}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Psi^{*} - \frac{\partial \Psi^{*}}{\partial x}\Psi\right).$$

Αυτή η έκφραση είναι ουσιαστικά το ρεύμα πιθανότητας της Κβαντομηχανικής, διαφέρει κατά την ίδια πολλαπλασιαστική σταθερά που υπάρχει και στην πυκνότητα πιθανότητας. Εδώ J_{x}, διότι έχουμε μια διάσταση.

Η εξίσωση συνέχειας γίνεται προφανώς

$$\frac{\mathrm{d}J_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0 .$$

Ανάλογα με την ερμηνεία που δίνουμε στον συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\mathrm{d}J_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial J_x}{\partial x} .$$

Στις τρεις διαστάσεις θα έχουμε την πιο γνώριμη μορφή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 .$$

Προβλήματα

1. Θεωρήστε το πρόβλημα της χορδής δεδομένου μήκους τεντωμένης με δεδομένη μηχανική σταθερή τάση (δύναμη) T και εκτός πεδίου βαρύτητας. Κατά την ταλάντευση της χορδής, η απομάκρυνση κάθε υλικού σημείου της από τη θέση ισορροπίας του είναι αρκούντως μικρή και γίνεται σε μια μόνο κατεύθυνση που είναι κάθετη στη χορδή. Βρείτε την πυκνότητα της λαγκρανζιανής του συστήματος. Εφαρμόστε τη θεωρία μεταβολών για να βρείτε την εξίσωση κίνησης της χορδής και τις συνοριακές συνθήκες. Υποθέστε ότι το ένα άκρο είναι έτσι στερεωμένο που να έχει κάθε χρονική στιγμή απομάκρυνση ίση με μηδέν. Το άλλο άκρο είναι «ελεύθερο» αλλά βρίσκεται πάντα πάνω σε ευθεία που είναι κάθετη στη χορδή και απέχει από το άλλο σταθερό σημείο δεδομένη απόσταση l, αυτό είναι το μήκος της χορδής. Σχεδιάστε το χωρίο (x,t) με το σύνορό του, στο οποίο βρίσκονται οι λύσεις της εξίσωσης κίνησης της χορδής, δώστε τις συνοριακές συνθήκες στο κάθε σημείο του συνόρου.

2. Δείξτε ότι η εξίσωση των Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

αντιστοιχεί σε πεδιακές εξισώσεις για βαθμωτό πεδίο ψ με λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\psi_x\psi_t + \frac{\alpha}{6}\psi_x^3 - \frac{\nu}{2}\psi_{xx}^2$$

με την προϋπόθεση ότι η ψ είναι δυναμική συνάρτηση για το ϕ, δηλαδή $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Στην εξίσωση με το ψ οι δείκτες σημαίνουν παραγωγίσεις ως προς τις μεταβλητές που σημειώνονται.

3. Δείξτε ότι αν τα Ψ και Ψ^* ληφθούν ως οι δυο ανεξάρτητες μεταβλητές-πεδία, τότε η λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\Psi^* + V\Psi\Psi^* + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\Psi^*\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*\right)$$

οδηγεί στην εξίσωση του Schroedinger και στη συζυγή μιγαδική της. Ποιες είναι οι κανονικές ορμές; Βρείτε τη χαμιλτονιανή πυκνότητα που αντιστοιχεί στην L.

4. Δείξτε ότι αν τα Ψ_R και Ψ_I, που είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της κυματοσυνάρτησης $\Psi = \Psi_\mathrm{R} + \mathrm{i}\,\Psi_\mathrm{I}$, ληφθούν ως οι δυο ανεξάρτητες μεταβλητές-πεδία, τότε η λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\Psi^* + V\Psi\Psi^* + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\Psi^*\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*\right)$$

οδηγεί στην εξίσωση του Schroedinger και στη συζυγή μιγαδική της.

5. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathrm{L} = \mathrm{i}\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - mc^2\bar{\psi}\psi$, όπου γ οι τέσσερις γνωστές 4×4 μήτρες και ψ, $\bar{\psi}$ είναι οι σπίνορες του Dirac,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \;\; \psi^\dagger = \left(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*\right), \;\; \bar{\psi} = \left(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3, \bar{\psi}_4\right), \;\; \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \,.$$

Βρείτε την εξίσωση Dirac θεωρώντας τα $\psi\,,\bar{\psi}$ ως ανεξάρτητα πεδία.

6. Για την περίπτωση της λαγκρανζιανής της εξίσωσης Klein-Gordon βρείτε τη συνήθη κβαντομηχανική πυκνότητα ρεύματος. Βεβαιωθείτε ότι για τα πεδία υπάρχει ολική (global) συμμετρία και κάντε χρήση αυτού του γεγονότος και του πρώτου θεωρήματος της Noether.

7. Δείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\varphi \frac{\partial^r p}{\partial x^r} = (-1)^r p \frac{\partial^r \varphi}{\partial x^r} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}\varphi}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^{r-k} p}{\partial x^{r-k}}\right],$$

Θεωρήστε ότι για $r = 0$, έχουμε $\dfrac{\partial^0 \psi}{\partial x^0} = \psi$.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 9

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, 1987.

[3] E. Noether, *Invariant Variation Problems*, Transport Theory and Statistical Physics, Vol. 1, 1971 (Translated from German by M. A. Tavel. The Original publication in German is, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. Koenig. Gesellsch. d. Wiss. zu Goettingen, Math-Phys. Klasse, 235, 1918).

[4] D. Anderson, *Noether's Theorem in Generalized Mechanics*, J. Phys. A: Math., Nucl.Gen., Vol. 6, pp. 299, 1973.

[5] H. Fleming, *Noether's Theorem in Classical Field Theories and Gravitation*, Revista Brasileira de Fisica, Vol. 17, pp. 236, 1987.

[6] E. L. Hill, *Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Rev. Modern Phys., Vol. 23, pp. 253, 1951.

[7] N. Bobillo-Ares, *Noether's Theorem in Discrete Classical Mechanics*, American Journal of Physics, Vol. 56, pp. 174, 1988.

[8] M. Crampin, *A Note on Non-Noether Constants of Motion*, Phys. Lett., Vol. 95A, pp. 209, 1983.

[9] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[10] D. M. Greenberger, *Esoteric Elementary Particle Phenomena in undergraduate Physics-Spontaneous Symmetry breaking and Scale invariance*, American Journal of Physics, Vol. 46, pp. 394, 1978.

[11] J. Iliopoulos, *Introduction to the Standard Model of Electro-Weak Interactions*, Lectures given at the 2012 CERN Summer School, Angers, France, June 2012, Hal Id: hal-00827554.

[12] I. van Vulpen and I. Angelozzi, *The Standard Model Higgs Boson*, Part of Lecture Particle Physics II, UvA Particle Physics Master, 2013-2014.

[13] Κ. Ε. Βαγιωνάκης, *Σωματιδιακή Φυσική*, Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2008.

[14] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks And Leptons*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1984.

[15] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Inc., 1998.

[16] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, 1962.

[17] A.O. Barut, *Electrodynamics of Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, 1964.

[18] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β' Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

Κεφάλαιο 10: Κανονική Θεωρία Διαταραχών

Η μέγιστη πλειονότητα των πάσης φύσεως προβλημάτων της Φυσικής, ειδικότερα αυτά που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις δεν έχουν ακριβείς λύσεις. Το ίδιο ισχύει και για τα προβλήματα χαμιλτονιανών δυναμικών συστημάτων, που μας ενδιαφέρουν στο παρόν σύγγραμμα. Η μέθοδος διαταραχών στην περίπτωσή μας μπορεί να δώσει λύσεις σε προβλήματα όπου η χαμιλτονιανή διαφέρει πολύ λίγο από την χαμιλτονιανή που σχετίζεται με πρόβλημα που λύνεται ακριβώς. Η διαφορά των δυο χαμιλτονιανών είναι η χαμιλτονιανή διαταραχής ή απλώς διαταραχή. Ο πιο πρόσφορος φορμαλισμός για τον σκοπό αυτό είναι ο φορμαλισμός H-J.

10.1 Θεωρία διαταραχών με εξάρτηση από τον χρόνο

Στη θεωρία διαταραχών με εξάρτηση από τον χρόνο, προσπαθούμε να βρούμε τις παραμέτρους του μη διαταραγμένου συστήματος ως συναρτήσεις του χρόνου. Αυτές οι παράμετροι είναι σταθερές της κίνησης για το αδιατάραχτο σύστημα αλλά για το διαταραγμένο παύουν γενικώς να είναι σταθερές και εξαρτώνται από τον χρόνο. Αυτή η θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση, δηλαδή η αδιατάρακτη χαμιλτονιανή και η διαταραχή της μπορεί να εξαρτώνται άμεσα και από τον χρόνο.

Έστω ότι η χαμιλτονιανή $H_0(q,p,t)$ αντιστοιχεί σε πρόβλημα που μπορεί να λυθεί ακριβώς, αυτό είναι το πρόβλημα χωρίς διαταραχή. Τα q και τα p έχουν διάσταση n. Η $S=S(q,\alpha_0,t)$ είναι η κύρια συνάρτηση Hamilton η οποία ως γεννήτρια συνάρτηση οδηγεί από τα (q,p) στις καινούργιες κανονικές συντεταγμένες (β_0,α_0). Με αυτόν τον μετασχηματισμό η καινούργια χαμιλτονιανή είναι μηδέν και ισχύει

$$H_0(q,\frac{\partial S}{\partial q},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{10.1}$$

Αυτές οι νέες κανονικές συντεταγμένες είναι σταθερές διότι αφού για τη νέα χαμιλτονιανή ισχύει $K=0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_0&=-\frac{\partial K}{\partial \beta_0}=0\\ \dot{\beta}_0&=\frac{\partial K}{\partial \alpha_0}=0.\end{aligned} \tag{10.2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη χαμιλτονιανή του συστήματος με τη διαταραχή, διαταραγμένο σύστημα. Έχουμε για τη διαταραγμένη χαμιλτονιανή

$$H(q,p,t)=H_0(q,p,t)+\Delta H(q,p,t),\quad \Delta H(q,p,t)\ll H_0 \tag{10.3}$$

Ο μετασχηματισμός που γεννά η γεννήτρια συνάρτηση $S=S(q,\alpha_0,t)$ εξακολουθεί να είναι κανονικός αφού η κανονικότητα του μετασχηματισμού δεν εξαρτάται από την ειδική χαμιλτονιανή. Η μετασχηματισμένη, νέα, χαμιλτονιανή που προκύπτει από την διαταραγμένη χαμιλτονιανή, την $H(q,p,t)$, γενικώς δεν θα είναι μηδέν και επομένως οι νέες κανονικές μεταβλητές δεν θα είναι σταθερές. Για αυτό τον λόγο τις παριστάνουμε με (β,α). Έτσι για το διαταραγμένο δυναμικό σύστημα έχουμε

$$K(\beta,\alpha,t)=H+\frac{\partial S}{\partial t}=H_0+\Delta H+\frac{\partial S}{\partial t}=\Delta H(\beta,\alpha,t). \tag{10.4}$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης είναι

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_i &= -\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \beta_i} \\
\dot{\beta}_i &= \frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}.
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

Αν αυτές οι $2n$ εξισώσεις μπορούν να λυθούν ακριβώς, όπως υποθέσαμε ότι ισχύει για το μη διαταραγμένο πρόβλημα, θα προσδιοριστούν τα $\beta_i = \beta_i(t), \alpha_i = \alpha_i(t)$ και το πρόβλημα έχει λυθεί. Αυτή η περίπτωση δεν είναι ενδιαφέρουσα. Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση που η διαταραχή ΔH είναι αρκούντως μικρή, οπότε μπορούμε να βρούμε διαδοχικές όλο και καλύτερες προσεγγιστικές λύσεις του προβλήματος. Αυτή είναι η αξία της μεθόδου των διαταραχών. Μέχρις εδώ δεν κάναμε καμιά προσέγγιση, οι παραπάνω σχέσεις είναι ακριβείς. Από τις σχέσεις (10.5) συμπεραίνουμε ότι ενώ τα β_i, α_i δεν είναι σταθερά, εντούτοις δεν μεταβάλλονται γρήγορα με τον χρόνο, διότι το ΔH δεν αλλάζει πολύ καθώς μεταβάλλονται τα ορίσματά του, αν συνεχώς είναι πολύ μικρή ποσότητα. Μια πρώτη προσέγγιση $(\beta_{i1}, \alpha_{i1})$ των (β, α), που τώρα είναι συναρτήσεις του χρόνου, έχουμε αν χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (10.5) όπου στα δεύτερα μέλη της κάνουμε προσέγγιση υπολογίζοντας τις τιμές των παραγώγων για τις τιμές των (β_i, α_i) από την προηγούμενη προσέγγιση η οποία ήταν ουσιαστικά η μηδενική προσέγγιση. Δηλαδή ενώ αυτές οι ποσότητες νοούνται για τις τιμές $(\beta_{i1}, \alpha_{i1})$ που είναι άγνωστες αφού αυτές θέλουμε να προσδιορίσουμε, εμείς υπολογίζουμε τις ποσότητες αυτές για τις τιμές $\beta_i = \beta_0, \alpha_i = \alpha_0$, που είναι γνωστές, πράγμα που είναι προσεγγιστικό. Αυτό το δηλώνουμε με την κατακόρυφη γραμμή δεξιά και τον δείκτη 0.

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{i1} &= -\left.\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \beta_i}\right|_0 \\
\dot{\beta}_{i1} &= \left.\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}\right|_0.
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

Η λύση αυτών δίνει την πρώτη προσέγγιση για τις νέες μεταβλητές και στη συνέχεια από τις εξισώσεις του κανονικού μετασχηματισμού προσδιορίζονται τα (q, p) σε πρώτη προσέγγιση ως συναρτήσεις του χρόνου. Η προσέγγιση δεύτερης τάξης επιτυγχάνεται αν στις κανονικές εξισώσεις , στα δεύτερα μέλη, υπολογίσουμε τις παραγώγους για τις τιμές που βρήκαμε στην πρώτη προσέγγιση, δηλαδή τις τιμές $(\beta_{i1}, \alpha_{i1})$. Ισχύουν για την προσέγγιση δεύτερης τάξης

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{i2} &= -\left.\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \beta_i}\right|_1 \\
\dot{\beta}_{i2} &= \left.\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}\right|_1.
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

Αυτό μπορεί να συνεχιστεί μέχρι την προσέγγιση τάξεως N. Για την προσέγγιση N τάξης ισχύουν

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{iN} &= -\left.\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \beta_i}\right|_{N-1} \\
\dot{\beta}_{iN} &= \left.\frac{\partial \Delta H(\beta,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}\right|_{N-1}.
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

10.2 Θεωρία διαταραχών χωρίς εξάρτηση από τον χρόνο

Όπως είπαμε προηγουμένως, στην περίπτωση της θεωρίας διαταραχών με εξάρτηση από τον χρόνο, προσπαθούμε να βρούμε την εξάρτηση των παραμέτρων από τον χρόνο. Ξεκινούμε από το αδιατάρακτο δυναμικό σύστημα του οποίου οι παράμετροι είναι σταθερές και στη συνέχεια τις θεωρούμε ότι εξαρτώνται από τον χρόνο και προσπαθούμε προσεγγιστικά να βρούμε αυτή την εξάρτηση.

Στην περίπτωση θεωρίας διαταραχών χωρίς εξάρτηση από τον χρόνο, προσπαθούμε να βρούμε τις σταθερές ποσότητες του διαταραγμένου συστήματος. Αυτή η θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε συντηρητικά περιοδικά συστήματα που είναι συντηρητικά και περιοδικά και στη μη διαταραγμένη κατάστασή τους και στη διαταραγμένη. Αυτό ισχύει, π.χ. αν στο πρόβλημα του Kepler εισαχθεί οποιαδήποτε μορφή συντηρητικής διαταραχής, δηλαδή όρο δυναμικής ενέργειας που εξαρτάται μόνο από την απόσταση, r, του σωματίου από το κέντρο έλξης.

Ας θεωρήσουμε περιοδικό σύστημα με μια συντεταγμένη και με αυτόνομη χαμιλτονιανή της μορφής

$$H = H(q, p, \lambda) . \tag{10.9}$$

Η παράμετρος λ είναι μια μικρή σταθερά που καθορίζει το μέγεθος της διαταραχής. Υποθέτουμε ότι ισχύει

$$H_0(q, p) = H(q, p, 0) . \tag{10.10}$$

Αυτό το μη διαταραγμένο σύστημα έχει ακριβή λύση στις μεταβλητές δράσης-γωνίας (J_0, w_0), δηλαδή

$$\begin{aligned} &H_0(p,q) = K_0(J_0) \\ &\nu_0 = \dot{w}_0 = \frac{\partial K_0}{\partial J_0}, \quad w_0 = \nu_0 t + \delta_0. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Εφόσον ο κανονικός μετασχηματισμός από (p,q) σε (J_0, w_0) δεν εξαρτάται από την ειδική χαμιλτονιανή, η διαταραγμένη χαμιλτονιανή $H(p,q,\lambda)$ μπορεί να γραφτεί ως $H(J_0, w_0, \lambda)$. Τώρα η διαταραγμένη χαμιλτονιανή εξαρτάται από τα (w_0, J_0) άρα δεν είναι πλέον σταθερή. Όμως μπορεί καταρχήν να βρεθεί ένα νέο ζευγάρι μεταβλητών (J, w) που να είναι πιο κατάλληλο για το διαταραγμένο σύστημα, π.χ.

$$\begin{aligned} &H(p,q,\lambda) = E(J,\lambda) \\ &\nu = \dot{w} = \frac{\partial E}{\partial J} \\ &\dot{J} = -\frac{\partial E}{\partial w} = 0, \end{aligned} \tag{10.12}$$

άρα J = σταθερό.

Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε τον κανονικό μετασχηματισμό, δηλαδή την S, που συνδέει (J_0, w_0) με (J, w). Επειδή υποθέτουμε ότι το λ είναι πολύ μικρό τα δυο συστήματα δεν θα διαφέρουν πολύ αφού οι χαμιλτονιανές τους δεν διαφέρουν σημαντικά επομένως και ο μετασχηματισμός για τον οποίο ψάχνουμε θα διαφέρει λίγο από τον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Έτσι γράφουμε την έκφραση

$$S = S(w_0, J, \lambda) = S_0(w_0, J) + S_1(w_0, J)\lambda + S_2(w_0, J)\lambda^2 + ... \tag{10.13}$$

Για $\lambda = 0$ απαιτούμε η S να οδηγεί σε ταυτοτικό μετασχηματισμό, πράγμα που σημαίνει ότι

$$S_0 = w_0 J \tag{10.14}$$

Ο κανονικός μετασχηματισμός που γεννά η συνάρτηση S είναι

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial S}{\partial J} = w_0 + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial J}(w_0, J) + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial J}(w_0, J) + \dots \\ J_0 &= \frac{\partial S}{\partial w_0} = J + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_0}(w_0, J) + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0}(w_0, J) + \dots \ . \end{aligned} \tag{10.15}$$

Η w_0 είναι γωνία μεταβλητή του αδιατάρακτου συστήματος επομένως ισχύει για έναν μοναδικό κύκλο ότι η μεταβολή της είναι $\Delta w_0 = 1$. Ξέρουμε επίσης ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί αφήνουν αμετάβλητη την τιμή του παρακάτω ολοκληρώματος στον χώρο τον φάσεων, δηλαδή διατηρούν τον «όγκο» στον φασικό χώρο, επομένως

$$J = \oint p \mathrm{d}q = \oint J_0 \mathrm{d}w_0 \ . \tag{10.16}$$

Ολοκληρώνουμε τη δεύτερη από τις σχέσεις της Εξ. (10.15) κατά μήκος ενός κύκλου του διαταραγμένου συστήματος και βρίσκουμε

$$\oint J_0 \mathrm{d}w_0 = \oint J \mathrm{d}w_0 + \sum_{n=1} \lambda^n \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} \mathrm{d}w_0 \tag{10.17}$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία εξίσωση στην προηγούμενη και καταλήγουμε στη σχέση

$$J = J \Delta w_0 + \sum_{n=1} \lambda^n \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} \mathrm{d}w_0 \ . \tag{10.18}$$

Αφού $\Delta w_0 = 1$, βρίσκουμε

$$\sum_{n=1} \lambda^n \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} \mathrm{d}w_0 = 0 \ \text{ άρα } \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} \mathrm{d}w_0 = 0 \ . \tag{10.19}$$

Η χαμιλτονιανή μπορεί να γραφτεί και ως συνάρτηση των (w_0, J_0) στη μορφή

$$H(w_0, J_0, \lambda) = K_0(J_0) + \lambda K_1(w_0, J_0) + \lambda^2 K_2(w_0, J_0) + \dots \tag{10.20}$$

Τα K_i είναι γνωστά διότι η H είναι γνωστή συνάρτηση των (w_0, J_0) για δεδομένο λ. Επίσης μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} &H(p, q, \lambda) = H(w_0, J_0, \lambda) \\ &= E(J, \lambda). \end{aligned} \tag{10.21}$$

Αυτή είναι η έκφραση για την ενέργεια στις νέες συντεταγμένες δράσης-γωνίας, η J είναι σταθερά και η w γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

Το E μπορεί επίσης να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του λ,

$$E(J,\lambda)=E_0(J)+\lambda E_1(J)+\lambda^2 E_2(J)+\dots \,. \tag{10.22}$$

Από τρεις τελευταίες σχέσεις μπορούμε να βρούμε ισότητες μεταξύ των συντελεστών με την ίδια δύναμη του λ. Όμως αυτές οι εκφράσεις της ενέργειας εξαρτώνται από δυο διαφορετικές ομάδες μεταβλητών. Για να ξεφύγουμε από αυτό το πρόβλημα, εκφράζουμε την H_0 ως προς J με τη βοήθεια της σειράς Taylor της $H(w_0,J_0,\lambda)$ ως προς J_0 πολύ κοντά στο J. Βρίσκουμε τη σχέση

$$H(w_0,J_0,\lambda)=H(w_0,J,\lambda)+(J_0-J)\frac{\partial H}{\partial J}+\frac{(J_0-J)^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial J^2}+\dots \,. \tag{10.23}$$

Οι παράγωγοι σε αυτό το ανάπτυγμα Taylor είναι ως προς J_0, υπολογισμένες στο J. Αυτές οι παράγωγοι μπορεί να γραφτούν ως παράγωγοι ως προς J, αν αντικαταστήσουμε όπου J_0 το J στην $H_0(J_0)$. Στη συνέχεια όλοι οι όροι που περιέχουν το J_0 μπορεί να γραφτούν ως προς J με χρήση του μετασχηματισμού της Εξ. (10.15) ο οποίος συνδέει τα (J_0,w_0) με τα (J,w). Έτσι από τη δεύτερη από τις σχέσεις της Εξ. (10.15) παίρνουμε το (J_0-J) το οποίο εισάγουμε στην Εξ. (10.23) και καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned}H(w_0,J_0,\lambda)&=H(w_0,J,\lambda)+\frac{\partial H}{\partial J}\left(\lambda\frac{\partial S_1}{\partial w_0}+\lambda^2\frac{\partial S_2}{\partial w_0}+\dots\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial J^2}\lambda^2\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2+O\left(\lambda^3\right).\end{aligned} \tag{10.24}$$

Κατόπιν χρησιμοποιούμε την Εξ. (10.20) για να γράψουμε $H(w_0,J,\lambda)=H(w_0,J_0,\lambda)\big|_{J_0=J}$. Αντικαθιστούμε στην Εξ. (10.24) και καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned}&H(w_0,J_0,\lambda)=K_0(J)+\lambda K_1(w_0,J)+\lambda^2 K_2(w_0,J)+\dots\\&+\lambda\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\left(\frac{\partial K_0(J)}{\partial J}\frac{\partial S_2}{\partial w_0}+\frac{1}{2}\lambda\frac{\partial^2 K_0(J)}{\partial J^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2+\dots\right)\\&=E(J,\lambda)=E_0(J)+\lambda E_1(J)+\lambda^2 E_2(J)+\dots \quad .\end{aligned} \tag{10.25}$$

Τώρα μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ως προς τους συντελεστές $E_i(J)$ και έτσι μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη συχνότητα της διαταραγμένης κίνησης σε διάφορες τάξης προσέγγισης. Τα $K_i(w_0,J)$ είναι γνωστές συναρτήσεις, ενώ τα $S_i(w_0,J)$ και $E_i(J)$ είναι άγνωστες ποσότητες πρέπει να υπολογιστούν.

Εξισώνουμε τους συντελεστές για τις αντίστοιχες δυνάμεις του λ και βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
&E_0(J) = K_0(J) \\
&E_1(J) = K_1(w_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_0(J)}{\partial J} \\
&E_2(J) = K_2(w_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial w_0}\frac{\partial K_1(w_0, J)}{\partial J} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial w_0}\right)^2 \frac{\partial^2 K_0(J)}{\partial J^2} + \frac{\partial S_2}{\partial w_0}\frac{\partial K_0(J)}{\partial J}.
\end{aligned}
\tag{10.26}
$$

Για να βρούμε το E_1 πρέπει να ξέρουμε όχι μόνο το K_1 αλλά και το S_1. Τα E_i είναι σταθερά διότι εξαρτώνται μόνο από τα J που είναι σταθερές της κίνησης. Επίσης η παράγωγος $\frac{\partial K_0}{\partial J}$ δεν εξαρτάται από το w_0 αφού έχουμε $K_0 = K_0(J) = K_0(J_0)\big|_{J_0=J}$. Παίρνουμε τη μέση τιμή ως προς w_0, για έναν κύκλο, και των δυο μελών της δεύτερης σχέσης στην Εξ. (10.26) και βρίσκουμε

$$
E_1 = \langle E_1 \rangle = \langle K_1 \rangle + \frac{\partial K_0}{\partial J}\left\langle \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \right\rangle. \tag{10.27}
$$

Ισχύει ότι $\left\langle \frac{\partial S_i}{\partial w_0} \right\rangle = \oint \frac{\partial S_i}{\partial w_0} \mathrm{d}w_0 = 0$, επομένως

$$
E_1 = \langle E_1 \rangle = \langle K_1 \rangle. \tag{10.28}
$$

Εισάγουμε την τελευταία σχέση στο αριστερό μέλος της δεύτερης σχέσης στην Εξ. (10.26) βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial S_1}{\partial w_0} = \frac{\langle K_1 \rangle - K_1}{\nu_0(J)} \\
&\text{όπου } \nu_0 = \frac{\partial K_0}{\partial J}.
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

Από αυτή τη σχέση μπορεί να βρεθεί με απλή ολοκλήρωση η S_1. Γενικώς, αν ξέρουμε την E_{n-1} για να βρούμε την E_n εργαζόμαστε ως εξής

1) Παίρνουμε τη μέση τιμή όπως πριν και στα δυο μέλη της n-στής σχέσης από την Εξ. (10.26).

2) Εισάγουμε τη μέση τιμή $\langle E_n \rangle$ που βρήκαμε στη θέση του E_n, στην πλήρη εξίσωση του E_n.

3) Ο μόνος άγνωστος είναι το S_n που μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση της σχέσης $\frac{\partial S_n}{\partial w_0} =$ γνωστή συνάρτηση των w_0, J.

4) Αντικατάσταση του S_n στην πλήρη σχέση για το E_n.

Αφού γίνουν αυτά η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί για $n+1$.

Βλέπουμε ότι για να βρούμε την ενέργεια με προσέγγιση n χρειάζεται απαραιτήτως να έχουμε βρει τη συνάρτηση S_{n-1}. Το S_n μπορεί να βρεθεί μόνον όταν έχει βρεθεί το E_n.

10.3 Αδιαβατικά αναλλοίωτα

Παρόλο που αναφερόμαστε σε κλασική (μη κβαντική) Φυσική η ιδέα των αδιαβατικά αναλλοίωτων εμφανίζεται έντονα και είναι πολύ χρήσιμη για την επεξεργασία προβλημάτων και της Κβαντικής Φυσικής. Επίσης η ιδέα χρησιμοποιήθηκε πολύ νωρίς στη μελέτη φαινομένων της μαγνητόσφαιρας όπου ηλεκτρόνια και ιόντα κινούνται μέσα στο μαγνητικό πεδίο της γήινης μαγνητόσφαιρας. Η μεθοδολογία των αδιαβατικά αναλλοίωτων έχει αναπτυχθεί για «περιοδικά» δυναμικά συστήματα με πολλούς θεσικούς βαθμούς ελευθερίας, εδώ θα αναφερθούμε σε περιοδικά συστήματα με μια μόνο γενικευμένη συντεταγμένη, μονοδιάστατα συστήματα.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα τέτοιο σύστημα του οποίου η χαμιλτονιανή εξαρτάται από μια (μόνο) παράμετρο, λ. Αν η παράμετρος είναι μηδέν το σύστημα είναι περιοδικό με περίοδο έστω T_0, και συντηρητικό, $h=$ενεργειακή συνάρτηση=σταθερή. Μπορεί το h να συμπίπτει με την ενέργεια E του συστήματος. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η παράμετρος μεταβάλλεται με τον χρόνο με πολύ αργό ρυθμό (λέμε αδιαβατικά) έτσι που σε χρόνο T_0 να μην αλλάζει πολύ η παράμετρος και φυσικά και η χαμιλτονιανή του συστήματος. Είναι ευνόητο ότι το σύστημα δεν είναι ακριβώς συντηρητικό και γενικώς ούτε περιοδικό. Όμως θα δούμε ότι σε πρώτη προσέγγιση κάποια φυσικά μεγέθη είναι σταθερά για χρόνους της τάξης πολλών περιόδων του συστήματος με $\lambda=0$, αυτά τα μεγέθη είναι τα αδιαβατικά αναλλοίωτα μεγέθη ή αδιαβατικά αναλλοίωτες ποσότητες. Αυτά τα μεγέθη είναι μεταβλητές δράσης.

Έστω $H(q,p,\lambda),\ \ \lambda=\lambda(t)$ η χαμιλτονιανή του συστήματος. Ξέρουμε ότι κατά την κίνηση του συστήματος ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H\left(q,p,\lambda(t)\right)}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\\ \dot{h}&=\frac{\partial H}{\partial\lambda}\dot{\lambda}.\end{aligned}\tag{10.30}$$

Τα q,p, κατά την κίνηση, μεταβάλλονται γρήγορα με τον χρόνο, ενώ το λ πολύ αργά. Παίρνουμε τη μέση τιμή σε χρόνο μιας περιόδου, $T=T(\lambda)$, των δυο μελών αυτής της σχέσης και βρίσκουμε

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right\rangle=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right\rangle.\tag{10.31}$$

Τώρα «περίοδος» $T(\lambda)$ εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ, για μικρούς χρόνους οι περίοδοι δεν διαφέρουν πολύ.

Αφού το λ δεν αλλάζει πολύ σε αυτό το χρονικό διάστημα, η παράγωγός του έχει βγει έξω από τη μέση τιμή σαν σταθερός χρονικά παράγοντας. Στη συνάρτηση $\left\langle\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right\rangle$ μεταβλητές είναι μόνο τα q,p και όχι το λ. Αυτό γίνεται γιατί κατά τη διαδικασία εύρεσης της μέσης τιμής, ουσιαστικά το λ θεωρήθηκε σταθερό. Έχουμε τη σχέση

$$\left\langle\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}\mathrm{d}t.\tag{10.32}$$

Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}&H\left(q,p,\lambda(t)\right)=h(t)\\ &\text{άρα }\ p=p(q,h,\lambda)\\ &J=J(h,\lambda)=\oint p\mathrm{d}q.\end{aligned}\tag{10.33}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής με τον χρόνο της δράσης και της h, έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{J} &= \frac{\partial J(h,\lambda)}{\partial h}\dot{h} + \frac{\partial J(h,\lambda)}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \\ \dot{h} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}.\end{aligned} \tag{10.34}$$

Θα δείξουμε ότι $\dot{J} \approx 0$, δηλαδή σε πρώτη προσέγγιση η δράση είναι σταθερή.
Για τον πρώτο από τους δυο όρους ξέρουμε ότι

$$\frac{\partial H(J,\lambda)}{\partial J} = \frac{\partial h(J,\lambda)}{\partial J} = \nu(\lambda) = \frac{1}{T(\lambda)} \tag{10.35}$$

Η συχνότητα $\nu(\lambda)$ και η περίοδος $T(\lambda)$ υπολογίζονται για κάθε $\lambda =$ σταθερό.

Αν λάβουμε υπόψη την εξίσωση Hamilton $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$ έχουμε για τον δεύτερο όρο

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\oint p(q,h,\lambda)\mathrm{d}q \approx \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\mathrm{d}q = \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t'. \tag{10.36}$$

Η προσέγγιση που δηλώνεται στη δεύτερη ισότητα σημαίνει ότι έχουμε παραλείψει πολύ μικρή συμβολή που αντιστοιχεί στο γεγονός ότι ο κύκλος ολοκλήρωσης μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται το λ (πολύ λίγο). Κατά μήκος του δρόμου έχουμε συγκεκριμένη σχέση για την ορμή, την $p = p(q,h,\lambda)$. Από τη σχέση $H(q,p,\lambda) = h$ για σταθερά q,h έχουμε

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0. \tag{10.37}$$

Αντικαθιστούμε στην Εξ. (10.36) και στη συνέχεια από την Εξ. (10.34) και τη δεύτερη σχέση της Εξ. (10.34) βρίσκουμε

$$\dot{J} = \left(T(\lambda)\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}\mathrm{d}t' \right)\dot{\lambda}. \tag{10.38}$$

Η μέση τιμή σε μια περίοδο της ποσότητας $A(t,\lambda)$ είναι

$$\left\langle A(\lambda) \right\rangle = \frac{1}{T(\lambda)}\int_0^{T(\lambda)} A(t,\lambda,\dot{\lambda})\mathrm{d}t \tag{10.39}$$

Επειδή το λ μεταβάλλεται πολύ λίγο σε μια περίοδο $T(\lambda)$, σε αυτό το ολοκλήρωμα θεωρείται ότι το $\lambda =$ σταθερό και το $\dot{\lambda} = \varepsilon =$ μικρή σταθερά. Παίρνουμε τις μέσες τιμές στα δυο μέλη της Εξ. (10.38) για μια περίοδο, έχουμε

$$\left\langle \dot{J} \right\rangle = \varepsilon \left[T(\lambda)\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle - \left\langle \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}\mathrm{d}t' \right\rangle \right]. \tag{10.40}$$

Προφανώς

$$\int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \mathrm{d}t' = T(\lambda)\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \text{οπότε} \left\langle \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \mathrm{d}t' \right\rangle = T(\lambda)\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle. \tag{10.41}$$

Αφού το $\lambda =$ σταθερό.

Αυτό μας οδηγεί στο ότι σε πρώτη προσέγγιση (το ε είναι υψωμένο στην πρώτη δύναμη), η Εξ. (10.40) δίνει

$$\left\langle \dot{J} \right\rangle = 0 . \tag{10.42}$$

Μια τέτοια μεταβλητή είναι αυτό που λέμε αδιαβατική μεταβλητή.

Για μικρές μεταβολές του λ η μέση τιμή του $\dot{J}$ (ανά περίοδο του συστήματος) είναι σταθερή, διότι παρόλο που εξαρτάται από το $\lambda(t)$, τελικώς μεταβάλλεται αργά με τον χρόνο. Παρόλο που νομίζει κάποιος ότι αυτή είναι μια ποσότητα που μόνο κατά προσέγγιση είναι σταθερή, στην πράξη η σταθερότητα αυτή ισχύει με εξαιρετικά μεγάλη προσέγγιση για σημαντικά μεγάλους χρόνους.

Για το $J = J(\lambda(t)) = J(t)$ μπορούμε να πούμε τα εξής, αυτό μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δυο όρων, ο ένας είναι ανάλογος του $\dot{\lambda} \approx \varepsilon t,\ |\varepsilon| << 1$ και ο άλλος ανάλογος του $\varepsilon T f(t/T)$, όπου η $f(t/T)$ είναι περιοδική άρα φραγμένη συνάρτηση. Με αυτή την έννοια, κατά προσέγγιση και το $J =$ σταθερό.

Έχουμε από την Εξ. (10.33)

$$\begin{aligned} & p = p(q,h,\lambda) \\ & \text{η δράση } J = \oint p(q,h,\lambda)\mathrm{d}q, \ \ \text{όπου } h,\lambda \text{ σταθερά} \\ & h = h(J,\lambda) \\ & \nu = \frac{\partial h}{\partial J}, \ \ \text{με } \lambda = \text{σταθερό.} \end{aligned} \tag{10.43}$$

Παραδείγματα – Ειδικά θέματα

1. Παράδειγμα 1
Σχεδόν ελεύθερο σωμάτιο με έναν όρο αλληλεπίδρασης τύπου δύναμης αρμονικού ταλαντωτή.

Λύση
Η αλληλεπίδραση είναι $\Delta H = \frac{k}{2}x^2$. Η κίνηση θεωρείται κατά μήκος του άξονα x.

Έχουμε για τη μη διαταραγμένη χαμιλτονιανή (ελεύθερο σωμάτιο) $H_0 = \frac{p^2}{2m}$. Το σύστημα είναι αυτόνομο, είναι συντηρητικό και δεν υπάρχει η συντεταγμένη x. Η ορμή $p = \alpha$ είναι σταθερά της κίνησης. Η εξίσωση Hamilton είναι

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \tag{10.44}$$

Εύκολα βρίσκεται η κύρια συνάρτηση Hamilton

$$S = \alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2m}\,. \tag{10.45}$$

Για τη μετασχηματισμένη (νέα) σταθερή συντεταγμένη και την αντίστοιχη σταθερή νέα ορμή ισχύουν

$$\begin{aligned} Q &= \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = x - \frac{\alpha t}{m} \\ P &= \alpha. \end{aligned} \tag{10.46}$$

Από την πρώτη αυτών των σχέσεων βρίσκουμε

$$x = \frac{\alpha t}{m} + \beta\,. \tag{10.47}$$

Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{p^2}{2m} \\ \Delta H &= \frac{k}{2}x^2 \\ H &= H_0 + \Delta H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2. \end{aligned} \tag{10.48}$$

Το πρόβλημά μας είναι το γνωστό πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή. Παρόλο που μπορούμε να το λύσουμε με άλλες μεθόδους, για διδακτικούς λόγους θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία που αναπτύξαμε πριν λίγο.

Με χρήση της Εξ. (10.47) βρίσκουμε

$$\Delta H = \frac{k}{2}\left(\frac{\alpha t}{m} + \beta\right)^2. \tag{10.49}$$

Κάνουμε χρήση της Εξ. (10.5) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -k\left(\frac{\alpha t}{m} + \beta\right) \\ \dot{\beta} &= \frac{kt}{m}\left(\frac{\alpha t}{m} + \beta\right) \\ \text{άρα} \quad \dot{\beta} &+ \frac{t}{m}\dot{\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{10.50}$$

Από την πρώτη αυτών των σχέσεων με παραγώγιση ως προς τον χρόνο και χρήση της τελευταίας καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{\alpha} = -\frac{k}{m}\alpha - k\left(\dot{\beta} - \frac{\dot{\alpha} t}{m}\right) = -\frac{k}{m}\alpha\,. \tag{10.51}$$

Η λύση της είναι απλή αρμονική με τον χρόνο

$$\alpha = A\cos(\omega t + B), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{10.52}$$

Με χρήση της πρώτης σχέσης της Εξ. (10.50) και της Εξ. (10.47) βρίσκουμε

$$x = -\frac{\dot{\alpha}}{k} = \frac{A}{\sqrt{mk}}\sin(\omega t + B) = C\sin(\omega t + B)\,. \tag{10.53}$$

Όπως περιμέναμε, βρήκαμε την ακριβή λύση του αρμονικού ταλαντωτή. Για διδακτικούς σκοπούς θα προχωρήσουμε στη λύση υποθέτοντας ότι ο συντελεστής k, δύναμη επαναφοράς, ή σταθερά του «ελατηρίου», είναι αρκετά μικρή ποσότητα πράγμα που κάνει τη διαταραχή ΔH πολύ μικρή. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσεγγιστική μέθοδο των διαταραχών προχωρώντας σε διαδοχικές αυξανόμενες τάξεις προσέγγισης. Θεωρούμε για ευκολία ότι $x(0) = 0$ οπότε $\beta_0 = 0$. Από την Εξ. (10.6) έχουμε για την πρώτη προσέγγιση

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -\frac{k}{m}\alpha_0 t = -\omega^2\alpha_0 t \\ \dot{\beta}_1 &= \alpha_0\frac{k}{m^2}t^2 = \alpha_0\frac{\omega^2 t^2}{m}. \end{aligned} \tag{10.54}$$

Η ολοκλήρωσή τους δίνει

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 - \frac{\omega^2\alpha_0 t^2}{2} \\ \beta_1 &= \frac{\alpha_0\omega^2 t^3}{3m}. \end{aligned} \tag{10.55}$$

Στη συνέχεια από τις σχέσεις μετασχηματισμού, Εξ. (10.46), βρίσκουμε τα (x, p), τη λύση, σε πρώτη προσέγγιση

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_0}{m\omega}\left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6}\right) \\
p &= \alpha_0\left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{10.56}
$$

Συνεχίζουμε να βρούμε τη λύση σε προσέγγιση δεύτερης τάξης. Χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη σχέση με τα $\dot{\beta}_2, \dot{\alpha}_2$ υπολογίζοντας τις παραγώγους της διαταραχής στα (β_1, α_1), ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις και τελικώς βρίσκουμε τη λύση σε αυτή την προσέγγιση

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_0}{m\omega}\left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!}\right) \\
p &= \alpha_0\left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!}\right).
\end{aligned}
\tag{10.57}
$$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις όροι μέσα στις παρενθέσεις στις δυο αυτές τελευταίες σχέσεις

Είναι οι τρεις πρώτοι όροι του αναπτύγματος του $\sin(\omega t)$ και $\cos(\omega t)$ αντιστοίχως. Αυτό μας οδηγεί στη σκέψη, που είναι σωστή, ότι αν προχωρήσουμε σε διαδοχικές προσεγγίσεις θα βρούμε, οριακά, τις ακριβείς λύσεις που είναι ημίτονο και συνημίτονο όπως είδαμε και προηγουμένως, αλλά είναι και γνωστό, για τον αρμονικό ταλαντωτή χωρίς προσεγγίσεις.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι μετασχηματισμένες μεταβλητές (β, α) περιέχουν πληροφορία σχετική με τις παραμέτρους της μη διαταραγμένης τροχιάς. Ένα παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε ως μη διαταραγμένο δυναμικό σύστημα το πρόβλημα του Kepler. Μπορεί να θεωρήσουμε ως βολικό ζεύγος συντεταγμένων (β, α) τις μεταβλητές (δ, J), οι οποίες είναι η φάση, δ, της γωνίας-μεταβλητής w αφού έχουμε $w = \nu t + \delta$ και η μεταβλητή δράσης, J. Αυτές οι μεταβλητές σχετίζονται με τις παραμέτρους της τροχιάς όπως οι ημιάξονες, η εκκεντρότητα, η κλίση κ.λπ.

Η διαταραχή προκαλεί μεταβολές με τον χρόνο σε όλες αυτές τις παραμέτρους. Αν η διαταραχή είναι μικρή , η μεταβολή των παραμέτρων σε χρόνο μιας περιόδου της αδιατάρακτης κίνησης θα είναι επίσης μικρή. Σε αυτή την περίπτωση, για μικρά χρονικά διαστήματα, το σύστημα κινείται κατά μήκος τροχιάς Kepler (τροχιάς μορφής κωνικής τομής, osculatory τροχιά), η οποία έχει την ίδια συναρτησιακή μορφή με την αδιατάρακτη τροχιά, με τη διαφορά ότι οι παράμετροι της τροχιάς Kepler είναι συναρτήσεις του χρόνου. Οι παράμετροι Kepler μπορεί να μεταβάλλονται κατά τους εξής δυο τρόπους.

A) Να ακολουθούν περιοδική μεταβολή. Σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος επανέρχεται στην αρχική της τιμή μετά από χρονικό διάστημα το οποίο σε πρώτη προσέγγιση είναι συνήθως η μη διαταραγμένη περίοδος. Αυτά τα περιοδικά φαινόμενα της διαταραχής δεν αλλάζουν τις μέσες τιμές των παραμέτρων.

Γι αυτό η τροχιά είναι παρόμοια με την αδιατάρακτη τροχιά. Αυτά τα φαινόμενα μπορεί να εξαλειφθούν αν ληφθεί η μέση τιμή των διαταραχών σε μια περίοδο της αδιατάρακτης κίνησης.

B) Μη περιοδική μεταβολή, ολίσθηση (secular μεταβολή). Στο τέλος κάθε τροχιακής περιόδου (του αδιατάρακτου συστήματος) υπάρχει μεταβολή της τιμής της παραμέτρου. Αυτό σημαίνει ότι μετά από πολλές περιόδους οι τροχιακές παράμετροι μπορεί να διαφέρουν πολύ από τις μη διαταραγμένες τιμές τους. Η στιγμιαία τιμή της μεταβολής μιας παραμέτρου, δεν έχει συνήθως ενδιαφέρον διότι η μεταβολή της είναι πολύ μικρή σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις για τις οποίες δουλεύει η μέθοδος των διαταραχών. Η μεταβολή σε μια περίοδο συνήθως δε μπορεί να μετρηθεί, γι αυτό η μεταβολή ολίσθησης (secular) μετριέται μετά από πολλές περιόδους. Ένα τέτοιο φαινόμενο απαντάται στη μετάπτωση της Γενικής Σχετικότητας όπου η μέτρηση του φαινομένου γίνεται μετά από πολλές περιστροφές του ουράνιου σώματος. Η μέτρηση αναφέρεται σε πολλές περιόδους της τάξης του 100 που μπορεί να αντιστοιχεί σε χρόνο της τάξης των 100 χρόνων.

2. Παράδειγμα 2

Η συχνότητα ως συνάρτηση του πλάτους ταλάντωσης διαταραγμένου ταλαντωτή, με δυναμική συνάρτηση

$$V(q) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{6}\varepsilon m q^6 .$$

Λύση

$k = m\omega_0^2$ και ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα του μη διαταραγμένου αρμονικού ταλαντωτή. $|\varepsilon| << 1$, δηλαδή το ε μια πολύ μικρή ποσότητα. Θα γίνει χρήση της κανονικής θεωρίας διαταραχών χωρίς εξάρτηση από τον χρόνο και σε πρώτη προσέγγιση.

Η χαμιλτονιανή είναι

$$H_1 = \frac{mq^6}{6}$$
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 + \varepsilon\frac{mq^6}{6} = H_0 + \varepsilon H_1.$$

Για την αδιατάρακτη χαμιλτονιανή ($\varepsilon = 0$) ισχύουν

$$H_0 = \nu_0 J_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}J_0, \quad w_0 = \nu_0 t + \beta_0$$
$$q = \sqrt{\frac{J_0}{\pi m\omega_0}}\sin(2\pi w_0), \quad p = \sqrt{\frac{m\omega_0 J_0}{\pi}}\cos(2\pi w_0).$$

Έχουμε $E_1(J) = \langle H_1 \rangle = \dfrac{m}{6}\langle q^6 \rangle = \dfrac{m}{6}\left(\dfrac{J}{m\pi\omega_0}\right)^3 \langle \sin^6(2\pi w_0) \rangle$.

Ισχύουν

$$\sin^6 x = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^6 \left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)^6 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \left(1\cdot \mathrm{e}^{6ix} - 6\mathrm{e}^{4ix} + 15\mathrm{e}^{2ix} - 20 + 15\mathrm{e}^{-2ix} + 6\mathrm{e}^{-4ix} + 1\cdot\mathrm{e}^{-6ix}\right)$$
$$= -\frac{2}{64}\left(\cos(6x) - 6\cos(4x) + 15\cos(2x) - 10\right).$$

Επομένως

$$\langle \sin^6 x \rangle = \left(-\frac{2}{64}\right)(-10) = \frac{5}{16} .$$

Για τη διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια E_1, ώστε η διορθωμένη ενέργεια να είναι $E = E_0 + E_1$, έχουμε

$$E_1(J) = \frac{m}{6}\frac{5}{16}\left(\frac{J}{\pi m\omega_0}\right)^3 .$$

Η νέα (διορθωμένη) συχνότητα είναι

$$\nu = \frac{\partial E(J)}{\partial J} = \nu_0 + \varepsilon \frac{5m}{32} \frac{J^2}{(\pi m\omega_0)^3} .$$

Αν A είναι το πλάτος ταλάντωσης του αδιατάραχτου ταλαντωτή, τότε σε πρώτη προσέγγιση $J = J_0 = \pi m\omega_0 A^2$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{5}{32} \frac{\varepsilon m}{\nu_0} \frac{A^4}{\pi m\omega_0} \right) = \nu_0 + \frac{5}{64\pi^2} \frac{\varepsilon A^4}{\nu_0} .$$

Από αυτήν βρίσκουμε

$$\Delta \nu = \nu - \nu_0 = \frac{5}{64\pi^2} \frac{\varepsilon A^4}{\nu_0}$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{5}{64\pi^2} \frac{\varepsilon A^4}{\nu_0^2}, \quad \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{5}{16} \frac{\varepsilon A^4}{w_0^2}.$$

3. Παράδειγμα 3

Για τον απλό ταλαντωτή με $k = k(t)$ να υπολογιστεί το πηλίκο $E(t) / \omega(t)$.

Λύση

Ισχύει $H(q, p, k(t)) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2} k(t) q^2 = E(t)$, όπου $k = k(t)$ είναι συνάρτηση που μεταβάλλεται αργά με τον χρόνο, σε σχέση με την περίοδο του συστήματος. Θα δείξουμε ότι το πηλίκο της ενέργειας $E(t)$ δια της (κυκλικής) συχνότητας $\omega(t)$, είναι σταθερά της κίνησης.

Έχουμε $h = E$ επομένως για $\lambda =$ σταθερό, στον χώρο των φάσεων (p, q) διαγράφεται έλλειψη με αντίστοιχους ημιάξονες $a = \sqrt{2mE}, b = \sqrt{2E / (m\omega^2)}$, όπου $\omega = \omega(t) = 2\pi \dfrac{\partial E(J, \lambda)}{\partial J} = \sqrt{k(t) / m},$ αφού λ=σταθερό .

Η δράση η οποία διατηρείται με την έννοια που έχουμε πει, και υπολογίζεται από τη σχέση $J = \oint p(q, E, \lambda) \mathrm{d}q$, με τα E, λ σταθερά.

Το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με το εμβαδόν της έλλειψης που είναι $A = \pi ab$, άρα $J = \pi ab = 2\pi \dfrac{E}{\omega}$, άρα $E(t) / \omega(t) =$ σταθερό. Δηλαδή κάθε στιγμή η ενέργεια είναι ανάλογη της αντίστοιχης συχνότητας με συντελεστή αναλογίας το J , το οποίο μεταβάλλεται πολύ αργά με τον χρόνο.

Προβλήματα

1. Θεωρήστε το πρόβλημα του Kepler στο επίπεδο, με μια μικρή διαταραχή στη δυναμική συνάρτηση του γενικού τύπου $-a/r^n<0,$ όπου n θετικός ακέραιος. Βρείτε τη μέση τιμή της κυκλικής συχνότητας μετάπτωσης ανά περίοδο του αδιατάραχτου συστήματος, χωρίς να υπολογίσετε κάποιο ολοκλήρωμα που θα προκύψει τελικώς. Υπολογίστε αυτό το ολοκλήρωμα μόνο για τις περιπτώσεις όπου $n=2$ και $n=3$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο διαταραχών με χρονική εξάρτηση. Η περίπτωση με $n=3$ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι στη Γενική Σχετικότητα κατά προσέγγιση εμφανίζεται ένας τέτοιος όρος και αυτό οδηγεί σε μετάπτωση.

2. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ της διορθωμένης συχνότητας και του μέγιστου πλάτους ταλάντωσης για απλό εκκρεμές το οποίο ταλαντεύεται με πλάτος λίγο μεγαλύτερο του συνηθισμένου που κάνει την κίνηση απλή αρμονική. Συγκεκριμένα, θεωρήστε ότι η χαμιλτονιανή χωρίς προσέγγιση είναι $H=\dfrac{p^2}{2ml^2}+mgl(1-\cos\varphi)$. Αναπτύσσουμε το $\cos\varphi$ και κρατούμε τους πρώτους όρους ώστε η χαμιλτονιανή να είναι

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}+\frac{mgl}{2}\varphi^2+\left(-\frac{mgl}{24}\varphi^4\right).$$

Θέτουμε $I=ml^2,\ \omega_0=\sqrt{g/l}$ οπότε βρίσκουμε

$$H=\frac{p^2}{2I}+\frac{I\omega_0^2}{2}\varphi^2+\left(-\frac{1}{24}I\omega_0^2\varphi^4\right).$$

Αυτό σημαίνει ότι στη μη διαταραγμένη χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή στην $H_0=H=\dfrac{p^2}{2I}+\dfrac{I\omega_0^2}{2}\varphi^2$ προστέθηκε η μικρή διαταραχή με $\varepsilon=-\dfrac{1}{24},\ |\varepsilon|\ll 1$. Να γίνει χρήση της μεθόδου διαταραχών χωρίς χρονική εξάρτηση.

3. Για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή, αν η συχνότητα ή η σταθερά k, $V=\dfrac{1}{2}kq^2$, μεταβάλλονται αργά με τον χρόνο, τότε η ποσότητα $J=E(t)/\omega(t)$ είναι πρακτικώς σταθερά. Υπενθυμίζουμε ότι

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}k(t)q^2=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2,\quad \omega(t)=\sqrt{\frac{k(t)}{m}}\ .$$

Δείξτε ότι ακόμη και ανεξάρτητα του πόσο γρήγορα η συχνότητα ή το k μεταβάλλεται με τον χρόνο, υπάρχει μια σταθερά της κίνησης, ακριβώς, δηλαδή χωρίς προσέγγιση, η

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{g(t)^2}+\left(g(t)\dot{q}-q\dot{g}(t)\right)^2\right)$$

όπου η $g(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\ddot{g}(t)+\omega^2(t)g(t)-\frac{1}{g^3(t)}=0\ .$$

4. Θεωρήστε ομογενές μαγνητικό πεδίο, B, μέσα στο οποίο κινείται φορτισμένο σωμάτιο με φορτίο e_q. Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα z κατά την κατεύθυνση του πεδίου. Αν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται πολύ αργά με τον χρόνο δείξτε ότι διατηρείται με μεγάλη ακρίβεια η ποσότητα $\dfrac{2\pi m}{e_q}M$.

$\vec{M} = \dfrac{e_q}{2m}\vec{l}$, $\vec{M}$ είναι η μαγνητική ροπή ως προς την αρχή των αξόνων και $\vec{l}$ η τροχιακή στροφορμή του σωματίου ως προς την αρχή των αξόνων. Το σωμάτιο δεν έχει ιδιοστροφορμή, σπιν.

5. Υποθέστε ότι το μήκος ενός επίπεδου εκκρεμούς που εκτελεί πολύ μικρού πλάτους αιωρήσεις (αρμονικός ταλαντωτής) μεταβάλλεται με τον χρόνο πολύ αργά. Με στοιχειώδη τρόπο, δηλαδή με χρήση του έργου που χρειάζεται για να γίνει αυτό, δείξτε ότι πράγματι το J διατηρείται.

6. Απλό εκκρεμές είναι δέσμιο να ταλαντεύεται με αρκετά μικρού πλάτους αιωρήσεις σε επίπεδο. Το επίπεδο περιστρέφεται πολύ αργά περί οριζόντιο άξονα, πώς μεταβάλλεται το πλάτος ταλάντωσής του.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 10

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.
[2] Σ. Ι. Ιχτιάρογλου, *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
[3] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.
[4] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

Κεφάλαιο 11: Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστηματά

Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι αρκετά δύσκολο γιατί το κύριο αντικείμενό του είναι η ενασχόληση με δυναμικά συστήματα που περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις οι οποίες γενικώς έχουν μη σταθερούς συντελεστές και είναι μη γραμμικές. Αυτοί είναι οι λόγοι που μπορεί να εμφανίζουν παραμετρικό συντονισμό και χάος. Η μη γραμμικότητα είναι ουσιαστική για την ύπαρξη χάους. Το κεφάλαιο αυτό δίνει μόνο μια μικρή γεύση αυτών των φαινομένων, η περαιτέρω μελέτη χρειάζεται πιο ειδικά συγγράμματα.

11.1 Ισορροπία

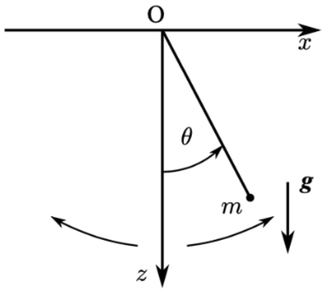
Θα πούμε δυο λόγια για την έννοια της ισορροπίας και την γραμμικοποιημένη ανάλυση ευστάθειας στα σημεία ισορροπίας. Παρόλο που όσα λέμε αφορούν γενικώς σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων, εμείς ενδιαφερόμαστε κυρίως για μηχανικά ή δυναμικά συστήματα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε να κάνουμε με συστήματα (διαφορικών) εξισώσεων κίνησης δεύτερης τάξης, της μορφής

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = G_i(q, \dot{q}, t). \tag{11.1}$$

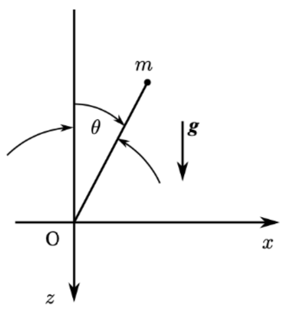
Αν υπάρχει λύση της μορφής $q_i(t) = q_{0ik} =$σταθερό, αυτό λέμε ότι είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. Το k σημαίνει ότι για την ίδια συντεταγμένη μπορεί να υπάρχουν πολλές τιμές για τις οποίες το σύστημα ισορροπεί. Στην ισορροπία θα ισχύουν

$$G_i(q, \dot{q}, t) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.2}$$

Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι το απλό εκκρεμές έχει δυο σημεία ισορροπίας, ένα στη θέση $\theta_{01} = 0$ και ένα στη θέση $\theta_{02} = \pi$. Υποθέτουμε ότι η γωνία μετριέται όπως στο Σχήμα 11.1.



Σχήμα 11.1 *Ορθό εκκρεμές.*



Σχήμα 11.2 *Αντεστραμμένο εκκρεμές.*

Έχουμε μόνο μια συντεταγμένη οπότε δε χρησιμοποιούμε δυο δείκτες. Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση του εκκρεμούς χωρίς προσέγγιση (μη γραμμική εξίσωση) οπότε με τον συμβολισμό του Σχήματος 11.1, έχουμε

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\ &G = -\frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\ &\theta_{01} = 0, \theta_{02} = \pi. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Κάθε σύστημα εξισώσεων δεύτερης τάξης όπως αυτό στην Εξ(11.1) μπορεί να μετατραπεί με διάφορους τρόπους σε σύστημα περισσότερων εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό το έχουμε δει στην περίπτωση των εξισώσεων δεύτερης τάξης που προκύπτουν από την ανάλυση Lagrange και των εξισώσεων πρώτης τάξης που προκύπτουν για το ίδιο δυναμικό σύστημα από την ανάλυση Hamilton. Οι εξισώσεις πρώτης τάξης είναι διπλάσιες από τις εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Για το εκκρεμές μπορούμε να έχουμε αντί για τη μια εξίσωση δεύτερης τάξης, τις δυο ισοδύναμες με αυτήν εξισώσεις πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = \omega \\ &\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Τα $\varphi, \dot{\varphi} = \omega$ αποτελούν τον χώρο των καταστάσεων του συστήματος. Για τα σταθερά σημεία (σημεία ισορροπίας) ισχύουν

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = \omega = 0 \\ &\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta = 0. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Επομένως καταλήγουμε πράγματι στο ότι $\theta_{01} = 0, \theta_{02} = \pi$.

Αυτό το πρόβλημα του εκκρεμούς είναι πρόβλημα αυτόνομου συστήματος, η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο και η συνάρτηση $G(q, \dot{q}, t)$ δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, μάλιστα εδώ δεν υπάρχει ούτε η πρώτη παράγωγος, $G = G(q)$.

Γενικώς, για να μελετήσουμε το είδος της ισορροπίας σε αυτές τις δυο θέσεις προσεγγίζουμε τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης του συστήματος στη γειτονιά των δυο αυτών σημείων με γραμμικές ως προς τις συντεταγμένες φ, ω σχέσεις, δηλαδή αναπτύσσουμε σε σειρές Taylor και κρατάμε τους πρώτους όρους . Οι παραπάνω σχέσεις (11.4) για δυο μεταβλητές (x, y), έχουν τη γενική μορφή,

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f_x(x, y) \\ &\dot{y} = f_y(x, y). \end{aligned} \tag{11.6}$$

Τα x, y χρησιμοποιήθηκαν ως δείκτες για να δηλώσουν τις δυο συναρτήσεις f_x, f_y, δεν δηλώνουν μερικές παραγωγίσεις. Αναπτύσσουμε κατά Taylor ως προς ένα σημείο ισορροπίας, έστω το (x_{0k}, y_{0k}) οπότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\delta x = x - x_{0k} \\
&\delta y = y - y_{0k} \\
&\delta \dot{x} = \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t}, \delta \dot{y} = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}t} \\
&\delta \dot{x} = \frac{\partial f_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_x}{\partial y}\delta y \\
&\delta \dot{y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_y}{\partial y}\delta y.
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Οι παράγωγοι νοούνται στο σημείο ισορροπίας και είναι σταθερές. Όλες οι ποσότητες είναι πραγματικές. Μπορούμε να ορίσουμε 2×2 μήτρες και διανύσματα στήλης με δυο συνιστώσες ως εξής

$$
\begin{aligned}
&\delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},\ \delta \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\delta \vec{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} \\
&\bar{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_x}{\partial x} & \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} & \dfrac{\partial f_y}{\partial x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

Τότε έχουμε από τις Εξ. (11.7)

$$
\delta \dot{\vec{r}} = \bar{A}\delta \vec{r}\ . \tag{11.9}
$$

Λαμβάνουμε γραμμικό συνδυασμό $\delta \vec{R} = (\delta X, \delta Y)$ των $\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y)$ της μορφής

$$
\begin{aligned}
&\delta \vec{R} = \bar{M}^{-1}\delta \vec{r} \\
&\delta \vec{r} = \bar{M}\delta \vec{R}.
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

Η $\bar{M}^{-1}$ είναι (αντίστροφη της $\bar{M}$) πραγματική σταθερή μήτρα 2×2 . Χρησιμοποιούμε τις Εξ. (11.9) και (11.10) οπότε βρίσκουμε

$$
\delta \dot{\vec{R}} = \bar{M}^{-1}\bar{A}\bar{M}\delta \vec{r}\ . \tag{11.11}
$$

Στη συνέχεια προσπαθούμε να διαλέξουμε τη μήτρα $\bar{M}$ έτσι ώστε να διαγωνοποιεί την $\bar{A}$. Αυτό γίνεται κατά τα γνωστά όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Αρχικά βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας $\bar{A}$ λύνοντας την αλγεβρική εξίσωση

$$
\det\left(\bar{A} - \lambda \bar{I}\right) = 0\ . \tag{11.12}
$$

$\bar{I}$ είναι η μοναδιαία 2×2 μήτρα. Αυτή η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές επομένως έχει γενικώς δυο πραγματικές ή δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, λ_1, λ_2 , οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές της $\bar{A}$. Η μήτρα $\bar{M}$ που πιθανόν διαγωνοποιεί την $\bar{A}$ είναι η μήτρα που σχηματίζεται από τα ιδιοδιανύσματα της $\bar{A}$ ως στήλες. Δηλαδή ισχύουν

$$\bar{A}\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{pmatrix}, \bar{A}\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{pmatrix}. \tag{11.13}$$

Τα M_{11}, M_{21} μπορεί να πολλαπλασιαστούν επί την ίδια σταθερά. Το ίδιο ισχύει για τα M_{12}, M_{22} που μπορεί να πολλαπλασιαστούν επί μιαν άλλη σταθερά. Για να γίνεται διαγωνοποίηση πρέπει τα δυο ιδιοδιανύσματα να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή οι δυο ιδιοτιμές της $\bar{A}$ να είναι διαφορετικές, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Αυτό είναι ευνόητο γιατί πρέπει η $\bar{M}$ να αντιστρέφεται, δηλαδή να έχει μη μηδενική ορίζουσα, πράγμα που δεν ισχύει όταν οι δυο στήλες της είναι ίδιες. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε η $\bar{A}$ παίρνει τη διαγωνοποιημένη μορφή $\bar{A}_{\mathrm{d}}$. Η διαγωνοποίηση γίνεται με μετασχηματισμό ομοιότητας (similarity transformation). Ισχύουν

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_{\mathrm{d}} = \bar{M}^{-1}\bar{A}\bar{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&\delta\dot{\vec{R}} = \frac{\mathrm{d}\delta\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \bar{A}_{\mathrm{d}}\delta\vec{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\delta\vec{R} \\
&\begin{pmatrix} \delta\dot{X} \\ \delta\dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\delta X}{dt} \\ \dfrac{\mathrm{d}\delta Y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Τότε η λύση $\delta R(t)$ της Εξ. (11.14) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\delta\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} \delta X(t) \\ \delta Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta X(0)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \delta Y(0)\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \tag{11.15}$$

Οι τιμές $\delta X(0), \delta Y(0)$ (αρχικές συνθήκες) είναι αυθαίρετες μέσα στα όρια της μικρής περιοχής. Μπορεί εύκολα, να γράψει κάποιος λίγο διαφορετικές σχέσεις με αρχική χρονική στιγμή την $t = t_0$, οπότε οι αρχικές τιμές θα είναι $\delta X(t_0), \delta Y(t_0)$.

Αν υπάρχει εκφυλισμός, δηλαδή αν οι ρίζες είναι ίσες (προφανώς πραγματικές), $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, τότε τα ιδιοδιανύσματα της $\bar{A}$ είναι ίδια οπότε δε μπορεί να γίνει διαγωνοποίηση, όμως υπάρχει κατάλληλη σταθερή μήτρα $\bar{P}$ η οποία με μετασχηματισμό ομοιότητας οδηγεί από την $\bar{A}$ στην $\bar{A}_J$ (μήτρα Jordan) και ισχύουν

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_J = \bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\delta\dot{\vec{R}} = \frac{\mathrm{d}\delta\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \bar{A}_J\delta\vec{R} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\delta\vec{R} \\
&\begin{pmatrix} \delta\dot{X} \\ \delta\dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\delta X}{dt} \\ \dfrac{\mathrm{d}\delta Y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\delta X + \delta Y \\ \lambda\delta Y \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.16}$$

Εύκολα βρίσκει κάποιος ότι έχουμε τη λύση

$$\delta\vec{R}(t)=\begin{pmatrix}\delta X(t)\\ \delta Y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta X(0)t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ \delta Y(0)\mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}. \tag{11.17}$$

Οι λύσεις μεταβάλλονται με τον χρόνο με τρόπο που εξαρτάται από το αν τα $\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ είναι πραγματικά θετικά ή αρνητικά ή συζυγή μιγαδικά με πραγματικά μέρη θετικά ή αρνητικά. Οι λύσεις για τις μεταβλητές $\delta\vec{r}=\delta\vec{r}(t)$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ ή των $\mathrm{e}^{\lambda t},t\mathrm{e}^{\lambda t}$ και η συμπεριφορά ως προς την ευστάθεια ή αστάθεια εξαρτάται από αυτές τις ιδιοτιμές. Συγκεκριμένα, για $\lambda_1\neq\lambda_2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\delta\vec{r}(t)=\bar{M}\delta\vec{R}(t)\\
&\delta x(t)=M_{11}\delta X(t)+M_{12}\delta Y(t)=M_{11}\delta X(0)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+M_{12}\delta Y(0)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\
&=C_{11}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_{12}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\
&\delta y(t)=M_{21}\delta X(t)+M_{22}\delta Y(t)=M_{21}\delta X(0)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+M_{22}\delta Y(0)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\
&=C_{21}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_{22}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\
&\delta\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\delta x(t)\\ \delta y(t)\end{pmatrix}=\bar{C}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Η μήτρα $\bar{C}$ μπορεί να υπολογιστεί από τις αρχικές συνθήκες $\delta\vec{r}(0),\delta\dot{\vec{r}}(0)$.

Για $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ ισχύουν

$$\begin{aligned}
&\delta\vec{r}(t)=\bar{P}\delta\vec{R}(t)\\
&\delta x(t)=P_{11}\delta X(t)+P_{12}\delta Y(t)=P_{11}\delta X(0)t\mathrm{e}^{\lambda t}+P_{12}\delta Y(0)\mathrm{e}^{\lambda t}\\
&=C_{11}t\mathrm{e}^{\lambda t}+C_{12}\mathrm{e}^{\lambda t}\\
&\delta y(t)=P_{21}\delta X(t)+P_{22}\delta Y(t)=P_{21}\delta X(0)t\mathrm{e}^{\lambda t}+P_{22}\delta Y(0)\mathrm{e}^{\lambda t}\\
&=C_{21}t\mathrm{e}^{\lambda t}+C_{22}\mathrm{e}^{\lambda t}\\
&\delta\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\delta x(t)\\ \delta y(t)\end{pmatrix}=\bar{C}\begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ \mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Χωρίς να μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες αναφέρουμε ότι έχουμε ευστάθεια σε ένα σημείο ισορροπίας αν μικρές αυθαίρετες μετατοπίσεις του συστήματος από την ισορροπία δεν κάνουν το σύστημα να απομακρύνεται τελικώς από το εν λόγω σημείο με την εξέλιξη του χρόνου αλλά το κάνουν να παραμένει στην μικρή περιοχή του σημείου, κοντά στο σημείο. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε έχουμε αστάθεια στο σημείο ισορροπίας.

Ας δούμε τι γίνεται με το απλό εκκρεμές. Πρώτα γραμμικοποιούμε τις σχέσεις της Εξ. (11.4) περί το σημείο ισορροπίας $\theta_{01}=0$, ορθό εκκρεμές. Προφανώς έχουμε

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta}=\omega\\
&\dot{\omega}=-\frac{g}{l}\theta\\
&\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g/l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \omega\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.20}$$

Θεωρούμε ότι

$$\delta\theta=\theta,\delta\dot{\theta}=\dot{\theta},\delta\omega=\omega,\delta\dot{\omega}=\dot{\omega},$$

διότι περί αυτή τη θέση ισορροπίας οι ποσότητες φ,ψ είναι μικρές. Εδώ η περίπτωση είναι απλή γιατί μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι για το θ η λύση είναι αρμονική με τον χρόνο στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας με $\theta_{01}=0$, άρα όταν το εκκρεμές απομακρυνθεί λίγο από αυτό το σημείο θα ταλαντεύεται περί το σημείο ισορροπίας, άρα πρόκειται για ευσταθή ισορροπία. Θα ακολουθήσουμε όμως τη γενική διαδικασία που αναφέραμε στα προηγούμενα για διδακτικούς λόγους.

Έχουμε για τη μήτρα $\bar{A}$,

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g/l & 0\end{pmatrix} \tag{11.21}$$

επομένως οι ιδιοτιμές βρίσκονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}0-\lambda & 1\\ -g/l & 0\text{-}\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+g/l=0\\ &\lambda_1=\mathrm{i}\sqrt{g/l}=\mathrm{i}\omega,\lambda_2=\lambda_1^*=-\mathrm{i}\sqrt{g/l}=-\mathrm{i}\omega\\ &\omega=\sqrt{g/l}>0.\end{aligned} \tag{11.22}$$

ω είναι η φυσική συχνότητα του εκκρεμούς. Οι ρίζες, ιδιοτιμές, είναι διαφορετικές. Τα ιδιοδιανύσματα παρόλο που δεν χρειάζονται, υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}&\bar{A}\begin{pmatrix}M_{11}\\ M_{21}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}M_{11}\\ M_{21}\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g/l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{11}\\ M_{21}\end{pmatrix}=\mathrm{i}\sqrt{g/l}\begin{pmatrix}M_{11}\\ M_{21}\end{pmatrix}\\ &M_{11}=M_{11}\to M_{11}=1\\ &M_{21}=\mathrm{i}\sqrt{g/l}M_{11}\to M_{21}=\mathrm{i}\sqrt{g/l}.\end{aligned} \tag{11.23}$$

$$\begin{aligned}&\bar{A}\begin{pmatrix}M_{12}\\ M_{22}\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}M_{12}\\ M_{22}\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g/l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{12}\\ M_{22}\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\sqrt{g/l}\begin{pmatrix}M_{12}\\ M_{22}\end{pmatrix}\\ &M_{12}=M_{12}\to M_{12}=1\\ &M_{22}=-\mathrm{i}\sqrt{g/l}M_{12}\to M_{22}=-\mathrm{i}\sqrt{g/l}.\end{aligned} \tag{11.24}$$

Εύκολα βεβαιώνεται ότι η μήτρα $\bar{M}$ που προκύπτει από τα δυο ιδιοδιανύσματα, πράγματι διαγωνοποιεί την $\bar{A}$ και ισχύει η σχέση που αναφέραμε προηγουμένως,

$$\bar{M}^{-1}\bar{A}\bar{M}=\bar{A}_{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i}\sqrt{g/l}\mathrm{i} & \text{-}\mathrm{i}\sqrt{g/l}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g/l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i}\sqrt{g/l} & \text{-}\mathrm{i}\sqrt{g/l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sqrt{g/l}\\ \text{-}\mathrm{i}\sqrt{g/l}\end{pmatrix}. \tag{11.25}$$

Προφανώς η τελική μορφή της λύσης για το θ είναι

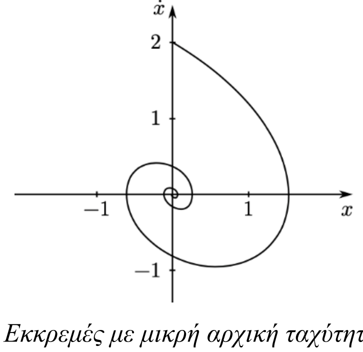
$$\theta=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t) \tag{11.26}$$

Είναι ευνόητο ότι πρόκειται για ευσταθή ισορροπία διότι αν οι αρχική απομάκρυνση και η αρχική ταχύτητα είναι αρκούντως μικρές οπότε ισχύει η ανωτέρω ανάλυση, το σύστημα δεν απομακρύνεται με την πάροδο του χρόνου τελικώς συνεχώς από τη θέση ισορροπίας αλλά ταλαντεύεται και παραμένει κοντά σε αυτήν.

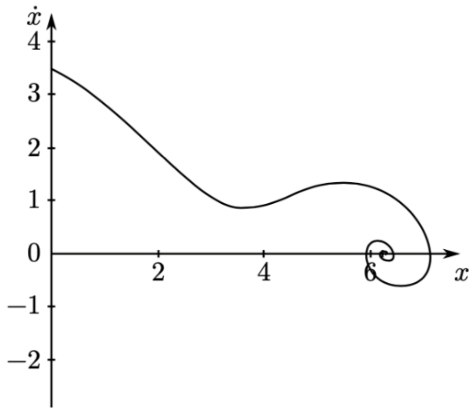
Αν υπάρχει τριβή ανάλογη της ταχύτητας, το εκκρεμές τελικώς θα ισορροπήσει στη θέση ισορροπίας η οποία είναι ίδια όπως και όταν δεν υπάρχει τριβή. Αυτό το σημείο ισορροπίας είναι ένας ελκυστής (attractor) διάστασης μηδέν, βλέπε Σχήματα 11.3, 11.4. Ο όρος ελκυστής σημαίνει ότι πολλές τροχιές «έλκονται» προς αυτόν. Παρακάτω θα δούμε περισσότερο για τους διάφορους τύπους ελκυστών.

Η λαγκρανζιανή για το ορθό εκκρεμές και με τον συμβολισμό του σχήματος 11.1 είναι $L=\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$. Η συζυγής ορμή είναι $p=ml^2\dot{\theta}$. Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν ορθό εκκρεμές με λαγκρανζιανή της μορφής $L=\dfrac{1}{2}\dot{x}^2+\cos x$, όπου όμως υπάρχει και απόσβεση με δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας της μάζας του εκκρεμούς. Αυτή είναι λαγκρανζιανή γραμμένη σε κανονικοποιημένη μορφή. Ισχύει ότι $x=\theta$. Ο χρόνος μετριέται με μονάδα το $1/\omega$. Η ενέργεια και η λαγκρανζιανή μετριούνται με μονάδα το mgl. Ισχύουν $E=\dfrac{1}{2}\dot{x}^2-\cos x,\ p=\dot{x}$ και η χαμιλτονιανή $H=\dfrac{p^2}{2}-\cos x$. Βλέπουμε ότι η συζυγής ορμή συμπίπτει με την ταχύτητα. Στην εξίσωση κίνησης για χαμιλτονιανό σύστημα μπορούμε να προσθέσουμε και απόσβεση. Στην περίπτωση του εκκρεμούς η προσθήκη απόσβεσης οδηγεί στην εξίσωση κίνησης, $\ddot{x}+\sin x+b\dot{x}=0,\ b\geq 0$.

Διαλέγουμε $b=0,5$ για την τριβή και καταλήγουμε σε σχήματα που δείχνουν τις τροχιές στον χώρο των καταστάσεων $x=\theta,\dot{x}=\dot{\theta}$, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση συμπίπτει με τον συνήθη χώρο των φάσεων $x=\theta, p=\dot{x}=\dot{\theta}$. Στο Σχήμα 11.3 το εκκρεμές ξεκινά από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας ($x=0$) με σχετικά μικρή αρχική ταχύτητα $\dot{x}(0)=2$, και καταλήγει να ακινητοποιηθεί στη θέση $x=0$, ελκυστής με διάσταση μηδέν, όπως είπαμε και προηγουμένως. Στο Σχήμα 11.4 η αρχική ταχύτητα του εκκρεμούς είναι αρκετά μεγάλη ώστε να φτάνει μέχρι το ανώτατο σημείο και μετά από μια περιφορά να καταλήγει και πάλι στο σημείο του ελκυστή που ενώ φαίνεται διαφορετικός είναι ουσιαστικά το ίδιο σημείο του χώρου, $x=2\pi$, η θέση της ευσταθούς ισορροπίας.



Σχήμα 11.3 *Εκκρεμές με μικρή αρχική ταχύτητα van der Pol.*



Σχήμα 11.4 *Εκκρεμές με μεγάλη αρχική ταχύτητα.*

Φυσικά ξέρουμε ότι δε χρειάζεται οι μετατοπίσεις και οι ταχύτητες να είναι πολύ μικρές για την περίπτωση του εκκρεμούς. Ακόμη και για σχετικά μεγάλες αρχικές απομακρύνσεις και αρχικές ταχύτητες το εκκρεμές θα επανέρχεται στη θέση ισορροπίας, εκτελώντας ταλάντωση, γενικώς μη αρμονική. Η ευστάθεια όμως είναι ένα είδος τοπικής έννοιας και γι αυτό συνήθως κάνουμε γραμμικοποίηση του συστήματος και εξετάζουμε τι γίνεται μόνο κοντά στο σημείο ισορροπίας. Τώρα θα αναφερθούμε χωρίς λεπτομέρειες στην περίπτωση ισορροπίας για $\theta = \theta_{02} = \pi$, αντεστραμμένο εκκρεμές. Ξεκινούμε από την Εξ. (11.4) που ισχύει για το εκκρεμές με τον συμβολισμό του Σχήματος 11.1, δηλαδή τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l}\sin\theta. \end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε το $\sin\theta$ περί το σημείο ισορροπίας $\theta_{02} = \pi$, και κρατάμε τους δυο πρώτους όρους οπότε κατά προσέγγιση βρίσκουμε

$$\sin\theta = \sin\pi + (\theta - \pi)\cos\pi = -(\theta - \pi)\ .$$

Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$-(\theta - \pi) \to \theta, \omega \to -\omega \tag{11.27}$$

οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{g}{l}\theta. \end{aligned} \tag{11.28}$$

Η επιλογή αυτή περιγράφεται στο Σχήμα 11.2, όπου η γωνία θ είναι αρκούντως μικρή. Είναι ευνόητο ότι και για μεγάλες γωνίες μετρούμενες όπως στο Σχήμα 11.2 , μπορούμε από την Εξ. (11.4) να καταλήξουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{g}{l}\sin\theta. \end{aligned}$$

Ακολουθήσαμε την προηγούμενη διαδικασία για διδακτικούς λόγους.
Από τις (11.28) έχουμε

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.29}$$

Οι ιδιοτιμές βρίσκονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ g/l & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - g/l = 0 \\ &\lambda_1 = \sqrt{g/l} = \omega > 0, \lambda_2 = -\sqrt{g/l} = -\omega < 0. \end{aligned} \tag{11.30}$$

Οι ιδιοτιμές είναι και σε αυτή την περίπτωση διαφορετικές.
Η λύση για το θ έχει τη γενική μορφή

$$\theta = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}. \tag{11.31}$$

Τα c_1, c_2 εξαρτώνται από τα αρχικά (αρκούντως μικρά) $\theta(0), \omega(0) = \dot{\theta}(0)$. Για τυχαίες αρχικές τιμές το εκκρεμές τελικώς θα απομακρύνεται συνεχώς από το σημείο ισορροπίας, άρα η ισορροπία αυτή είναι ασταθής.

Ας θεωρήσουμε δυναμικό σύστημα δυο διαστάσεων που περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις όπως στην Εξ. (11.6), δηλαδή τις

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_x(x,y) \\ \dot{y} &= f_y(x,y). \end{aligned}$$

Τα x, y είναι στην ουσία η θέση και συζυγής ορμή οπότε αποτελούν τον δισδιάστατο χώρο φάσεων. Στον χώρο αυτόν μια οριακή κλειστή τροχιά (limit cycle, οριακός κύκλος) είναι μια περιοδική τροχιά για την οποία ισχύει $x(t+t_0) = x(t), y(t+t_0) = y(t)$, και επίσης τουλάχιστον μια άλλη τροχιά είναι σπειροειδής και την πλησιάζει καθώς ο χρόνος τείνει στο θετικό άπειρο ή στο αρνητικό άπειρο (υπερβολική τροχιά).

Κάθε κλειστή τροχιά στις δυο διαστάσεις (ελλειπτική τροχιά), χωρίζει το επίπεδο σε δυο περιοχές, την εσωτερική και την εξωτερική. Αν υπάρχει ένας οριακός κύκλος και μια τροχιά στο εσωτερικό του που τον πλησιάζει καθώς $t \to +\infty$, τότε υπάρχει μια γειτονική περιοχή γύρω από τον οριακό κύκλο τέτοια που όλες οι τροχιές στο εσωτερικό οι οποίες αρχίζουν μέσα σε αυτή τη γειτονιά πλησιάζουν τον οριακό κύκλο καθώς $t \to +\infty$. Ισχύει το αντίστοιχο για τροχιά στο εσωτερικό που πλησιάζει τον οριακό κύκλο καθώς $t \to -\infty$. Ισχύουν τα αντίστοιχα για τροχιές στο εξωτερικό του οριακού κύκλου που τον πλησιάζουν με τους παραπάνω τρόπους.

Στην περίπτωση που όλες οι γειτονικές τροχιές πλησιάζουν τον οριακό κύκλο όταν $t \to +\infty$, τότε ο κύκλος λέγεται ευσταθής ή οριακός κύκλος ελκυστής (attractive limit cycle, ω-limit cycle).

Αν όλες οι γειτονικές τροχιές τον πλησιάζουν καθώς $t \to -\infty$, τότε λέγεται ασταθής οριακός κύκλος ($\alpha -$limit cycle). Αν υπάρχει γειτονική τροχιά που πλησιάζει τον οριακό κύκλο όταν $t \to +\infty$ και άλλη που τον πλησιάζει όταν $t \to -\infty$, τότε έχουμε ημι-ευσταθή οριακό κύκλο. Υπάρχουν επίσης οριακοί κύκλοι που δεν είναι ευσταθείς, ούτε ασταθείς, ούτε ημι-ευσταθείς. Για παράδειγμα μια γειτονική τροχιά μπορεί να πλησιάζει τον οριακό κύκλο από το εξωτερικό, αλλά το εσωτερικό του οριακού κύκλου πλησιάζεται από οικογένεια άλλων κύκλων.

Οι ευσταθείς οριακοί κύκλοι είναι παραδείγματα ελκυστών με μια διάσταση. Περιγράφουν αυτοσυντηρούμενες ταλαντώσεις, όπου η κλειστή τροχιά δείχνει τέλεια περιοδική συμπεριφορά του συστήματος. Οποιαδήποτε μικρή διαταραχή αυτής της τροχιάς κάνει το σύστημα να επανέρχεται σε αυτήν, δηλαδή το σύστημα είναι «κολλημένο» στον οριακό κύκλο, τον ελκυστή.

Κάθε κλειστή τροχιά έχει στο εσωτερικό της ένα στάσιμο (σταθερό) σημείο (ισορροπίας) του συστήματος. Δηλαδή σε αυτό το σημείο

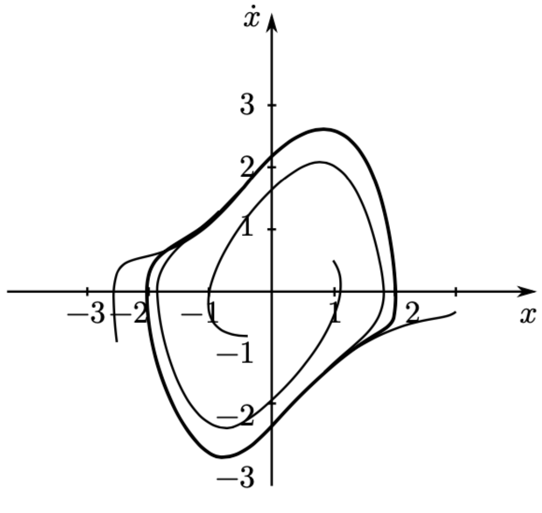
$$f_x(x,y)=0$$
$$f_y(x,y)=0.$$

Η εύρεση οριακών κύκλων είναι γενικώς ένα δύσκολο πρόβλημα.

Θα θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης van der Pol, θα την ξανασυναντήσουμε παρακάτω στα περί χάους. Αυτή η εξίσωση σε αδιάστατη μορφή είναι

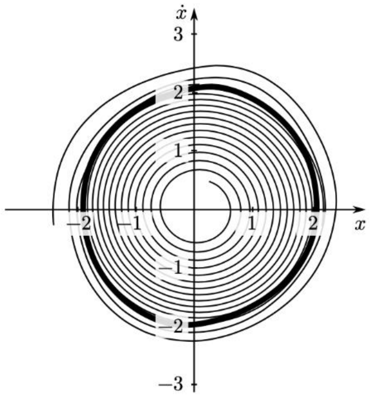
$$\ddot{x}-\varepsilon(x_0^2-x^2)\dot{x}+x=0. \tag{11.32}$$

Ο χώρος των καταστάσεων ορίζεται από τα ζεύγη $(x,\dot{x})$. Το Σχήμα 11.5 δείχνει την εξέλιξη του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων όταν $\varepsilon=1, x_0=1$. Για αυτή την επιλογή παραμέτρων, το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας. Βλέπουμε ότι οριακά και οι τέσσερις τροχιές που ξεκινούν από διαφορετικά αρχικά σημεία, με την εξέλιξη του χρόνου τείνουν στον οριακό κύκλο. Δυο τροχιές πλησιάζουν από το εσωτερικό του κύκλου και άλλες δυο από το εξωτερικό του. Ο οριακός κύκλος (ελκυστής) είναι ευσταθής. Οι περιοχές στις οποίες βρίσκονται οι αρχικές τιμές των ζευγών $(x,\dot{x})$ ή (q,p) κ.λπ. οι οποίες οδηγούν σε ελκυστή είναι οι βάσεις (basin) έλξης του ελκυστή. Στα Σχήματα 11.3 και 11.4 όλος ο χώρος των φάσεων είναι η βάση έλξης του μηδενικής διάστασης ελκυστή. Στα Σχήματα 11.5 και 11.6 το εσωτερικό του ελκυστή με διάσταση ένα και όλος ο χώρος στο εξωτερικό του είναι βάσεις έλξης του. Οι βάσεις έλξης για συστήματα όπου υπάρχουν όροι απόσβεσης, δηλαδή όροι με «ταχύτητες» όπως $\dot{x}$, περιλαμβάνουν τα σημεία του ελκυστή και πρόσθετα σημεία. Όταν δεν υπάρχουν όροι απόσβεσης οι βάσεις έλξης περιλαμβάνουν μόνο τα σημεία του ίδιου του ελκυστή.



Σχήμα 11.5 *Χώρος των φάσεων για την εξίσωση van der Pol με* $\varepsilon=1,\ x_0=1$.

Στο Σχήμα 11.6 έχουμε όμοια περίπτωση με την προηγούμενη, με τη διαφορά ότι τώρα το $\varepsilon=0{,}1$, $x_0=1$. Και σε αυτή την περίπτωση το σημείο (0,0) παρουσιάζει αστάθεια. Έχουμε οριακό κύκλο που είναι σχεδόν πραγματικός κύκλος ακτίνας (περίπου) 2. Τα σημεία τομής του οριακού κύκλου με τον άξονα x είναι (οριακά) στις θέσεις (2,0) και (-2,0).



Σχήμα 11.6 *Χώρος των φάσεων για την εξίσωση van der Pol με* $\varepsilon = 0{,}1$, $x_0 = 1$.

11.2 Παραμετρικός συντονισμός

Υπάρχουν ταλαντευόμενα συστήματα τα οποία έχουν παραμέτρους οι οποίες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Σε τέτοια συστήματα εμφανίζεται το φαινόμενο του παραμετρικού συντονισμού, το οποίο είναι διαφορετικό από το κανονικό φαινόμενο συντονισμού διότι όπως θα δούμε, το φαινόμενο του παραμετρικού συντονισμού είναι στην ουσία φαινόμενο αστάθειας και όχι ακριβώς συντονισμού. Αξίζει να πούμε ότι στην περίπτωση του συνήθους συντονισμού όπου έχουμε κάποια διέγερση, αν το σύστημα ξεκινήσει από αρχική θέση που είναι θέση ισορροπίας όταν δεν υπάρχει διέγερση, με τη διέγερση θα φύγει από αυτή τη θέση ισορροπίας. Στην περίπτωση του παραμετρικού συντονισμού, αν το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε θέση ισορροπίας θα μείνει σε αυτήν παρά την περιοδική μεταβολή κάποιας παραμέτρου.

Κατά τη μελέτη της ευστάθειας ή της αστάθειας ενός συστήματος προσπαθούμε να βρούμε τι θα συμβεί στην ισορροπία του συστήματος αν το μηχανικό ή γενικότερα το δυναμικό σύστημα διαταραχτεί κατά κάποιο τρόπο, π.χ. ένεκα μεταβολής με τον χρόνο παραμέτρων του συστήματος. Αν οι παράμετροι του συστήματος μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο, μπορεί μια θέση ισορροπίας να γίνει από ευσταθής ασταθής και το αντίστροφο. Μπορεί να εξετάσει κάποιος και περιπτώσεις όπου η διαταραχή εκφράζεται με γενικευμένες περιοδικές συναρτήσεις τύπου δέλτα συνάρτησης του χρόνου. Εδώ ασχολούμαστε με πεπερασμένες συνήθεις συναρτήσεις. Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι το σύστημα δεν βρίσκεται σε τέτοιες καταστάσεις που να εκτελεί χαοτική εξέλιξη.

Υπάρχει πλήθος φαινομένων και εφαρμογών του παραμετρικού συντονισμού ή καλύτερα της θεωρίας Floquet. Τέτοια είναι η κούνια (αιώρα) των παιδιών. Παραμετρικός ταλαντωτής που χρησιμοποιεί βαράκτορα (varactor), δηλαδή δίοδο που η χωρητικότητά της μεταβάλλεται περιοδικώς με τον χρόνο. Κυματοδηγοί/YAG σε μικροηλεκτρονικά. Παραμετρικοί ταλαντωτές ως ενισχυτές χαμηλού θορύβου, κυρίως για ραδιοσυχνότητες και μικροκύματα. Οπτικοί παραμετρικοί ταλαντωτές για δημιουργία από λέηζερ (laser) κυμάτων χαμηλότερης συχνότητας. Παγίδες ιόντων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη εξέλιξης με τον χρόνο πληθυσμών διαφόρων όντων .

Παρόλο που εμείς εδώ θα περιοριστούμε στην εξέταση του απλού εκκρεμούς , η κίνηση γίνεται στο επίπεδο, ίδιες εξισώσεις μπορεί να περιγράψουν και άλλα δυναμικά συστήματα. Θα μελετηθεί τι συμβαίνει όταν μια παράμετρος, το μήκος του εκκρεμούς ή το σημείο στήριξης (που βρίσκεται συνεχώς στον κατακόρυφο άξονα) ή το πεδίο βαρύτητας, μεταβάλλεται περιοδικώς με τον χρόνο. Θα δούμε ότι η θέση ευσταθούς ισορροπίας για το ορθό εκκρεμές, που είναι η κατακόρυφη θέση όπου η σημειακή μάζα του εκκρεμούς είναι κάτω από το σημείο στήριξης, Σχήμα 11.1, μπορεί να γίνει θέση ασταθούς ισορροπίας. Επίσης, η θέση ασταθούς ισορροπίας για το αντεστραμμένο εκκρεμές, Σχήμα 11.2, μπορεί να γίνει θέση ευσταθούς ισορροπίας. Οι δυο θέσεις ισορροπίας για το σύνηθες (αδιατάρακτο) εκκρεμές, είναι επίσης θέσεις ισορροπίας και για το διαταραγμένο εκκρεμές , δηλαδή αυτό που κάποια από τις παραπάνω παραμέτρους του μεταβάλλεται περιοδικώς με τον χρόνο.

Θα δούμε παρακάτω ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις, για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε την ίδια διαφορική εξίσωση κίνησης που για μικρές γωνίες από τις θέσεις ισορροπίας, έχει τη μορφή

$$\ddot{z} + a(t)z = 0\,. \tag{11.33}$$

Η $a(t)=a(t+T)$, δηλαδή είναι περιοδική με περίοδο T. Αν υπάρχει ελαφρά τριβή έχουμε σχέση της μορφής $\ddot{z}+\gamma\dot{z}+a(t)z=0$. Αν $\gamma=0, a(t)=$σταθερό, τότε έχουμε την εξίσωση για αδιατάραχτο σύστημα που για το εκκρεμές είναι η $\ddot{\theta}\pm\frac{g}{l}\theta=0$. Το πρόσημο $+$ ισχύει για το ορθό εκκρεμές, Σχήμα 11.1, και το πρόσημο $-$ για το αντεστραμμένο εκκρεμές, Σχήμα 11.2.

Από την εξίσωση με απόσβεση, εφόσον το γ είναι σταθερό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\theta\to\theta \mathrm{e}^{-\gamma t/2}$ και να καταλήξουμε σε (διαφορική) εξίσωση χωρίς απόσβεση. Παρόλα αυτά θα περιοριστούμε στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση, $\gamma=0$, αυτή είναι η εξίσωση (του) Hill χωρίς απόσβεση. Αν ισχύει $a(t)=b+c\cos(\omega t+\theta_0)$, b, c σταθερά, τότε η εξίσωση λέγεται εξίσωση (του) Mathieu με απόσβεση ή (όταν δεν υπάρχει απόσβεση) εξίσωση (του) Mathieu. Θα δούμε τι γίνεται με τη συμπεριφορά της λύσης της Εξ. (11.33) αν η $a(t)$ έχει περίοδο T και επομένως συχνότητα $\nu=1/T$, οπότε η κυκλική συχνότητα είναι $\omega_T=2\pi/T=2\pi\nu$. Αφού η $a(t)$ είναι περιοδική, για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Floquet. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα οι λύσεις έχουν τη μορφή

$$\varphi(t)=p(t)\mathrm{e}^{\lambda t},\ p(t)=p(t+T)$$

Ο συντελεστής λ είναι ο εκθέτης Floquet που γενικώς είναι μιγαδικός. Η ευστάθεια ή αστάθεια της κάθε λύσης καθορίζεται από την τιμή του πραγματικού μέρους των εκθετών Floquet. Αφού η Εξ. (11.33) είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό $t\to t+T$, προκύπτει ότι αν η $\theta(t)$ είναι λύση της, θα είναι λύση και η $\theta(t+T)$. Η λύση του προβλήματος, γενικώς δεν είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτικά. Μπορεί βέβαια να βρεθεί με αριθμητικές μεθόδους με τις οποίες κάποιος μπορεί να επιτύχει αποτελέσματα μεγάλης ακριβείας.

Θα δώσουμε την εξίσωση κίνησης για το διαταραγμένο εκκρεμές, όταν έχουμε τις τρεις περιπτώσεις διαταραχής που αναφέραμε παραπάνω. Θα δούμε υπό ποιες προϋποθέσεις ισχύει κατά προσέγγιση η ίδια εξίσωση κίνησης (11.33) κοντά στα σημεία ισορροπίας.

11.2.1 Ταλάντωση πάνω στον κατακόρυφο άξονα του σημείου στήριξης του εκκρεμούς.

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς είναι

$$\begin{aligned}
&ml^2\ddot{\theta}\pm ml\sin\theta\left(g-\ddot{y}(t)\right)=0\\
&\ddot{\theta}\pm\left(\omega_0^2-\frac{c(t)}{l}\right)\sin\theta=0,\ \omega_0=\sqrt{g/l}\\
&c(t)=\ddot{y}(t).
\end{aligned}\tag{11.34}$$

Το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί στο ορθό εκκρεμές και το κάτω στο αντεστραμμένο. Το $y=y(t)$ είναι η κατακόρυφη συντεταγμένη του σημείου στήριξης του εκκρεμούς, και το $c=c(t)$ είναι η επιτάχυνση αυτού του σημείου. Το θ μετριέται όπως στα Σχήματα 11.1, 11.2 για τις δυο αντίστοιχες περιπτώσεις. Το $c(t)=\ddot{y}(t)$ όπως και το $y(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με περίοδο T. Η Εξ. (11.34) δεν έχει προσεγγίσεις. Για μικρές γωνίες έχουμε

$$\begin{aligned}
&\ddot{\theta}\pm\left(\omega_0^2-\frac{c(t)}{l}\right)\theta=0,\ \omega_0=\sqrt{g/l}\\
&c(t)=\ddot{y}(t).
\end{aligned}\tag{11.35}$$

Δηλαδή την εξίσωση (11.33). Αυτή η περίπτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί έχοντας εκκρεμές του οποίου η θέση στήριξης να ανεβοκατεβαίνει περιοδικώς με τον χρόνο με κάποιο κατάλληλο μηχανισμό.

11.2.2 Πεδίο βαρύτητας μεταβαλλόμενο περιοδικώς με τον χρόνο

Είναι ισοδύναμο να θεωρήσουμε ότι το σημείο εξαρτήσεως ανεβοκατεβαίνει περιοδικά με τον χρόνο. Η διαφορική εξίσωση είναι

$$\ddot{\theta} \pm \frac{g(t)}{l}\sin\theta = 0.$$

Το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί στο ορθό εκκρεμές και το κάτω στο αντεστραμμένο.Αν θέσουμε $g(t) = g_0 - c(t)$, δηλαδή θεωρήσουμε ότι το πεδίο βαρύτητας μεταβάλλεται περί μια σταθερή τιμή του, την g_0, τότε έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} \pm \frac{g_0 - c(t)}{l}\sin\theta = 0 \\ &\ddot{\theta} \pm \left(\omega_0^2 - \frac{c(t)}{l}\right)\sin\theta = 0,\ \omega_0 = \sqrt{g_0 / l}\ . \end{aligned} \tag{11.36}$$

Η Εξ. (11.36) δεν έχει προσεγγίσεις. Για μικρά θ έχουμε πάλι την εξίσωση (11.33) δηλαδή

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} \pm \frac{g(t)}{l}\theta = 0 \\ &\ddot{\theta} \pm \left(\omega_0^2 - \frac{c(t)}{l}\right)\theta = 0,\ \omega_0 = \sqrt{g_0 / l}\ . \end{aligned} \tag{11.37}$$

Αυτή η περίπτωση είναι ουσιαστικά όμοια με την προηγούμενη και μπορεί να πραγματοποιηθεί αν το εκκρεμές βρίσκεται πάνω σε πλατφόρμα η οποία ανεβοκατεβαίνει με περιοδικά μεταβαλλόμενη επιτάχυνση. Δηλαδή έχουμε κίνηση ως προς μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

11.2.3 Μήκος εκκρεμούς μεταβαλλόμενο περιοδικώς με τον χρόνο.

Αυτή η περίπτωση είναι λίγο διαφορετική από τις δυο προηγούμενες. Μπορεί κάποιος να καταλήξει στην παρακάτω διαφορική εξίσωση κίνησης χωρίς προσεγγίσεις

$$\begin{aligned} &l = l(t) \\ &2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta} \pm g\sin\theta = 0. \end{aligned} \tag{11.38}$$

Το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί στο ορθό εκκρεμές και το κάτω στο αντεστραμμένο. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = l\theta$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{x} - \ddot{l}(t)\theta \pm g\sin\theta = 0\,.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $\theta \ll 1$ οπότε $\sin\theta \approx \theta$, οπότε η σχέση αυτή οδηγεί στην προσεγγιστική σχέση

$$\ddot{x} + \left(\frac{\pm g - \ddot{l}(t)}{l}\right)x = 0\,.$$

Θέτουμε $l(t) = l_0\left(1 + Df(t)\right),\ D \geq 0, \left|f(t)\right| \leq 1$ οπότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\ddot{l}(t) = Dl_0 \ddot{f}(t) \\
&\ddot{x} + \left(\frac{\pm g + Dl_0 \ddot{f}(t)}{l_0 \left(1 + Df(t)\right)} \right) x = 0 \\
&\text{Αν } D \ll 1, \quad \frac{1}{1 + Df(t)} \approx 1 - Df(t) \\
&\omega_0^2 = g / l_0 \\
&\ddot{x} + \left(\pm \omega_0^2 + D\left(-\ddot{f} \mp \omega_0^2 f(t) \right) \right) x = 0.
\end{aligned} \tag{11.39}
$$

Τα πάνω πρόσημα αντιστοιχούν στο ορθό εκκρεμές και τα κάτω στο αντεστραμμένο. Ο συντελεστής του x είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Η προσεγγιστική σχέση από την Εξ. (11.39) μοιάζει με τις προηγούμενες. Έχουμε πάλι την εξίσωση (11.33). Είναι ευνόητο ότι αν μελετηθεί ως προς την ευστάθεια-αστάθεια η συμπεριφορά του $x = x(t)$ περί τα σημεία ισορροπίας, η συμπεριφορά του $\theta = \theta(t)$ είναι παρόμοια. Αυτή η περίπτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί στην πράξη εύκολα για το ορθό εκκρεμές. Μια χαρακτηριστική περίπτωση είναι η κούνια (αιώρα), το γνωστό παιγνίδι των παιδιών, ένα είδος εκκρεμούς. Στην απλούστερη προσέγγιση έχουμε ένα απλό εκκρεμές που η μεταβολή του μήκους του γίνεται με την έκταση και σύμπτυξη των ποδιών του παιδιού. Φυσικά υπάρχουν διάφορα μοντάλα περιγραφής, γιατί είναι ευνόητο ότι το πραγματικό σύστημα είναι πιο πολύπλοκο. Έχουν γραφτεί πολλές εργασίες σχετικές με το θέμα. Τα σημεία ισορροπίας για το αδιατάρακτο (απλό) εκκρεμές είναι σημεία ισορροπίας και για το διαταραγμένο εκκρεμές. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε τις ακριβείς εξισώσεις κίνησης για όλες τις περιπτώσεις διαταραγμένου εκκρεμούς που αναφέραμε και αναζητήσουμε λύση της μορφής $\theta =$ σταθερό, θα δούμε ότι αυτό γίνεται μόνον όταν $\sin\theta = 0$, οπότε για $\theta_{01} = 0, \theta_{02} = \pi$. Αυτό μας οδηγεί (για μικρές κινήσεις κοντά σε αυτά τα σημεία) στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις που είναι η Εξ. (11.33)

$$
\begin{aligned}
&\ddot{z} + a(t)z = 0 \\
&a(t) = a(t+T).
\end{aligned} \tag{11.40}
$$

T είναι η (ελάχιστη) περίοδος της διαταραχής. Γενικώς για όλες τις περιπτώσεις είδαμε ότι έχουμε σχέσεις της μορφής

$$
\begin{aligned}
&\ddot{z} + a(t)z = 0 \\
&a(t) = \pm\left(\omega_0^2 + b(t)\right) \\
&b(t) = b(t+T).
\end{aligned} \tag{11.41}
$$

ω_0^2 είναι η κυκλική συχνότητα του αντίστοιχου αδιατάρακτου ορθού εκκρεμούς. Παρά τη γραμμικοποίηση, γενικώς η λύση δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικά για κάθε μορφής $b(t), a(t)$. Το πρόσημο $+$ αντιστοιχεί στο ορθό εκκρεμές και το $-$ στο αντεστραμμένο.

Όπως και προηγουμένως θέτουμε $\dot{z} = \eta$ οπότε καταλήγουμε σε σύστημα δυο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που σε μορφή μήτρας είναι

$$
\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{11.42}
$$

Προχωρούμε σε μια συνοπτική εισαγωγή στη θεωρία ευστάθειας Floquet.

Όπως και στην προηγούμενη ανάλυση ευστάθειας του μη διαταραγμένου εκκρεμούς, ορίζουμε ότι

$\vec{r} = \begin{pmatrix} z \\ \eta \end{pmatrix}$ και προφανώς $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$. Επομένως

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} &= \bar{A}(t)\vec{r}, \ \bar{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.43}$$

Η 2×2 μήτρα $\bar{A}(t)$ είναι περιοδική με τον χρόνο και ισχύει $\bar{A}(t) = \bar{A}(t+T)$.

Έστω ότι τα (διανύσματα στήλης)

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \eta_1(t) \end{pmatrix}, \ \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix}$$

είναι ανεξάρτητες λύσεις της $\dot{\vec{r}} = \bar{A}(t)\vec{r}$. Ας ορίσουμε ως θεμελιώδη (fundamental) μήτρα τη μήτρα 2×2 που σχηματίζεται από τις ανεξάρτητες λύσεις ως εξής

$$\bar{\Phi}(t) = \left(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\right) = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ \eta_1(t) & \eta_2(t) \end{pmatrix}, \tag{11.44}$$

τότε έχουμε την εξίσωση

$$\dot{\bar{\Phi}}(t) = \bar{A}(t)\bar{\Phi}(t) \tag{11.45}$$

Αν διαλέξουμε τις ανεξάρτητες λύσεις έτσι που η αρχική τιμή (την αρχική στιγμή $t = t_0$) για τη θεμελιώδη μήτρα να είναι η μοναδιαία μήτρα, δηλαδή αν $\bar{\Phi}(t_0) = \bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ τότε η μήτρα $\bar{\Phi}(t)$ λέγεται κύρια (principal) θεμελιώδης μήτρα. Αφού οι λύσεις είναι ανεξάρτητες η wroskian είναι μη μηδενική, διότι ισούται με την ορίζουσα της μήτρας $\bar{\Phi}(t)$. Αυτό σημαίνει ότι η μήτρα δεν είναι ιδιάζουσα (singular) και μπορεί να αντιστραφεί. Από τα παραπάνω έχουμε

$$\vec{r}_1(t_0) = \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \eta_1(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{r}_2(t_0) = \begin{pmatrix} z_2(t_0) \\ \eta_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11.46}$$

Οι αρχικές συνθήκες αντιπροσωπεύουν τα $z(t_0)$, και $\eta(t_0) = \dot{z}(t_0)$ για την μια (διαφορική) εξίσωση δεύτερης τάξης από την οποία ξεκινήσαμε.

Αν η $\bar{\Phi}(t)$ είναι θεμελιώδης μήτρα τότε κάθε μήτρα $\bar{\Psi}(t) = \bar{\Phi}(t)\bar{B}$ είναι επίσης θεμελιώδης, όπου $\bar{B}$ είναι οποιαδήποτε μη ιδιάζουσα σταθερή (δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου) μήτρα. Αυτό ισχύει διότι προκύπτει εύκολα ότι ικανοποιεί την εξίσωση (11.39), δηλαδή ισχύει $\dot{\bar{\Psi}}(t) = \bar{A}(t)\bar{\Psi}(t)$. Όπως είπαμε, η $\bar{A}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T, δηλαδή ισχύει $\bar{A}(t) = \bar{A}(t+T)$.

Αυτό έχει ως συνέπεια ότι αφού η $\bar{\Phi}(t)$ είναι θεμελιώδης μήτρα, είναι θεμελιώδης και η μήτρα $\bar{\Phi}(t+T)$

και υπάρχει μη ιδιάζουσα σταθερή μήτρα $\bar{B}$ τέτοια ώστε να έχουμε τη σχέση $\bar{\Phi}(t+T)=\bar{\Phi}(t)\bar{B}$. Άρα έχουμε $\bar{B}=\bar{\Phi}^{-1}(t)\bar{\Phi}(t+T)$.

Εφόσον η μήτρα είναι σταθερή μπορεί να υπολογιστεί για τυχαίο t, για παράδειγμα μπορούμε να την υπολογίσουμε για $t=t_0$, οπότε βρίσκουμε

$$\bar{B}=\bar{\Phi}^{-1}(t_0)\bar{\Phi}(t_0+T).$$

Αν η μήτρα $\bar{\Phi}$ είναι κύρια θεμελιώδης, δηλαδή αν ισχύει $\bar{\Phi}(t_0)=\bar{I}=\bar{\Phi}^{-1}(t_0)$ τότε $\bar{B}=\bar{\Phi}(t_0+T)$. Ο πίνακας $\bar{\Phi}(T)$ λέγεται μονόδρομος πίνακας.

Οι ιδιοτιμές ρ_1,ρ_2 της 2×2 μήτρας $\bar{B}$, λέγονται χαρακτηριστικοί παράγοντες της εξίσωσης $\dot{\bar{\Phi}}(t)=\bar{A}(t)\bar{\Phi}(t)$. Τα μ_1,μ_2 είναι οι χαρακτηριστικοί εκθέτες ή εκθέτες Floquet και ορίζονται από τη σχέση $\rho=\mathrm{e}^{\mu T}$. Τα ρ,μ μπορεί να είναι μιγαδικά.

Επειδή κατά τη διαγωνοποίηση εφαρμόζεται μετασχηματισμός ομοιότητας (similarity transformation) διατηρείται η τιμή της ορίζουσας της μήτρας που διαγωνοποιείται όπως επίσης και το ίχνος (trace) της. Αυτό σημαίνει ότι $\det\bar{B}=\rho_1\rho_2$ και $\mathrm{tr}\bar{B}=\rho_1+\rho_2$.

Έστω ο χαρακτηριστικός παράγοντας ρ και ο αντίστοιχος χαρακτηριστικός εκθέτης μ για τους οποίους ισχύει η σχέση ορισμού $\rho=\mathrm{e}^{\mu T}$. Τότε υπάρχει λύση της $\dot{\vec{r}}(t)=\bar{A}(t)\vec{r}(t)$ τέτοια που $\vec{r}(t+T)=\rho\vec{r}(t)$ και επίσης υπάρχει περιοδική λύση στον χρόνο $\vec{p}(t)=\begin{pmatrix} p_z(t) \\ p_\eta(t) \end{pmatrix}$ τέτοια που $\vec{r}(t)=\mathrm{e}^{\mu t}\vec{p}(t)$. Η περίοδος είναι T. Αυτά σημαίνουν ότι ισχύουν

$$z(t)=\mathrm{e}^{\mu t}p_z(t),\ \ \eta(t)=\mathrm{e}^{\mu t}p_\eta(t).$$

Αυτά αποδεικνύονται αν θεωρήσουμε ότι το σταθερό διάνυσμα $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_z \\ b_\eta \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\bar{B}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ρ, δηλαδή $\vec{b}=\bar{B}\vec{b}$, και στη συνέχεια θεωρήσουμε ότι ισχύει $\vec{r}(t)=\bar{\Phi}(t)\vec{b}$.

Τότε αυτή είναι πράγματι λύση της εξίσωσης $\dot{\vec{r}}(t)=\bar{A}(t)\vec{r}(t)$ και ισχύουν αυτά που είπαμε για τη λύση z,η.

Αν $\rho_1\neq\rho_2$ τότε έχουμε τις παρακάτω δυο ανεξάρτητες λύσεις, τη λύση $z_1(t)=\mathrm{e}^{\mu_1 t}p_{z_1}(t),\ \eta_1(t)=\mathrm{e}^{\mu_1 t}p_{\eta_1}(t)$ και τη λύση $z_2(t)=\mathrm{e}^{\mu_2 t}p_{z2}(t),\ \eta_2(t)=\mathrm{e}^{\mu_2 t}p_{\eta 2}(t)$.

Η γενική λύση του προβλήματος είναι της μορφής

$$\begin{aligned} z(t)&=c_1\mathrm{e}^{\mu_1 t}p_{z1}(t)+c_2\mathrm{e}^{\mu_2 t}p_{z2}(t)\\ \eta(t)&=c_1\mathrm{e}^{\mu_1 t}p_{\eta 1}(t)+c_2\mathrm{e}^{\mu_2 t}p_{\eta 2}(t). \end{aligned} \tag{11.47}$$

Οι σταθερές c_1,c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Οι σχέσεις αυτές μπορεί να γραφτούν και ως

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1\rho_1^{t/T} p_{z1}(t) + c_2\rho_2^{t/T} p_{z2}(t) \\ \eta(t) &= c_1\rho_1^{t/T} p_{\eta 1}(t) + c_2\rho_2^{t/T} p_{\eta 2}(t) \end{aligned}. \tag{11.48}$$

Στην περίπτωση που υπάρχει εκφυλισμός, οι ιδιοτιμές είναι ίσες, $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι δυο οι ανεξάρτητες λύσεις μπορεί να γραφτούν στη μορφή

$$z_1(t) = \mathrm{e}^{\mu t} p_{z_1}(t),\ \eta_1(t) = \mathrm{e}^{\mu t} p_{\eta_1}(t) \text{ και } z_2(t) = t\mathrm{e}^{\mu t} p_{z2}(t),\ \eta_2(t) = t\mathrm{e}^{\mu t} p_{\eta 2}(t).$$

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1\mathrm{e}^{\mu t} p_{z1}(t) + c_2 t\mathrm{e}^{\mu t} p_{z2}(t) \\ \eta(t) &= c_1\mathrm{e}^{\mu t} p_{\eta 1}(t) + c_2 t\mathrm{e}^{\mu t} p_{\eta 2}(t). \end{aligned} \tag{11.49}$$

Αντί για αυτές μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1\rho_1^{t/T} p_{z1}(t) + c_2 t\rho_2^{t/T} p_{z2}(t) \\ \eta(t) &= c_1\rho_1^{t/T} p_{\eta 1}(t) + c_2 t\rho_2^{t/T} p_{\eta 2}(t). \end{aligned} \tag{11.50}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για τις επιμέρους λύσεις που αντιστοιχούν στο κάθε ένα ρ έχουμε

$$z_i(t+T) = \rho_i z_i(t),\ \mathrm{z}_i(t+nT) = \rho_i^n z_i(t). \tag{11.51}$$

Κάθε ένας χαρακτηριστικός παράγοντας εμπίπτει σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες.

Αν $|\rho| < 1,$ τότε $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ άρα για τη λύση που αντιστοιχεί σε αυτό το ρ ισχύει $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) \to 0$.

Αν $|\rho| = 1,$ τότε $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ οπότε σε αυτό το ρ αντιστοιχεί ψευδοπεριοδική κίνηση. Έχουμε γινόμενο μιας αρμονικής συνάρτησης με περίοδο T_μ, που υπολογίζεται από το ρ ή το αντίστοιχο $|\mu|$, $T_\mu = 2\pi / |\mu|$, επί μια περιοδική συνάρτηση με γενικώς διαφορετική περίοδο T.

Αν $\rho = \pm 1$, τότε η αντίστοιχη λύση είναι περιοδική με περίοδο T.

Αν $|\rho| > 1$, τότε $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ οπότε ισχύει για την αντίστοιχη λύση ότι $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) \to \infty$.

Από αυτά συμπεραίνουμε ότι η λύση είναι ευσταθής αν όλοι οι χαρακτηριστικοί συντελεστές (εδώ δυο) ικανοποιούν τη σχέση, $|\rho_i| \le 1,\ i = 1, 2$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\bar{B} = \bar{A}(t_0 + T) = \begin{pmatrix} z_1(t_0+T) & z_2(t_0+T) \\ \eta_1(t_0+T) & \eta_2(t_0+T) \end{pmatrix}. \tag{11.52}$$

Προφανώς έχουμε υποθέσει ότι $z_1(t_0) = 1, \eta_1(t_0) = 0, z_2(t_0) = 0, \eta_2(t_0) = 1$.

Οι ιδιοτιμές της $\bar{B}$ προσδιορίζονται κατά τα γνωστά από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\left| B-\rho I \right| = 0 \\
&\begin{vmatrix} z_1(t_0+T)-\rho & z_2(t_0+T) \\ \eta_1(t_0+T) & \eta_2(t_0+T)-\rho \end{vmatrix} = \rho^2 - \rho 2\varDelta + 1 = 0 \\
&2\varDelta = z_1(t_0+T)+\eta_2(t_0+T),\ z_1(t_0+T)\eta_2(t_0+T)-\eta_1(t_0+T)z_2(t_0+T)=1.
\end{aligned}
\tag{11.53}
$$

Η έκφραση $z_1(t_0+T)\eta_2(t_0+T)-z_1(t_0+T)\eta_2(t_0+T)$ είναι η wroskian για $t=t_0+T$ της διαφορικής εξίσωσης (11.33), δηλαδή της $\ddot{z}+a(t)z=0$. Η wroskian είναι σταθερή διότι στη διαφορική εξίσωση δεν υπάρχει όρος με την πρώτη παράγωγο, και από τις αρχικές συνθήκες που έχουμε βάλει προκύπτει ότι είναι ίση με 1. Εισάγουμε την έννοια του ίχνους (trace) της μήτρας $\overline{B}$ οπότε γράφουμε $2\varDelta = \mathrm{tr}\overline{B}(t_0+T) = z_1(t_0+T)+\eta_2(t_0+T)$.

Η παραπάνω αλγεβρική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή η εξίσωση $\rho^2-\rho 2\varDelta+1=0$, έχει τις ρίζες

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \varDelta + \sqrt{\varDelta^2-1} \\
\rho_2 &= \varDelta - \sqrt{\varDelta^2-1}.
\end{aligned}
\tag{11.54}
$$

Ισχύουν οι σχέσεις $\rho_1\rho_2=1,\ \rho_1+\rho_2=\varDelta$.

Αν γράψουμε $\rho_i = \mathrm{e}^{\mu_i T}$ τότε $\mu_1+\mu_2=0, \mu_2=-\mu_1$ και $\mathrm{e}^{\mu_1 T}+\mathrm{e}^{\mu_2 T}=2\varDelta, \mathrm{e}^{\mu_1 T}+\mathrm{e}^{-\mu_1 T}=2\varDelta$,

άρα $\varDelta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mu_1 T}+\mathrm{e}^{-\mu_1 T}\right) = \cosh(\mu_1 T)$.

Ας διερευνήσουμε τι γίνεται στις διάφορες περιπτώσεις. Σε ό, τι ακολουθεί τα $p(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T.

Α) Έστω $-1<\varDelta<1$. Μπορούμε να ορίσουμε το σ από τη σχέση $\varDelta=\cos(\sigma T), 0<\sigma T<\pi$. Τότε

$$
\rho_{1,2} = \varDelta \pm \sqrt{\varDelta^2-1} = \cos(\sigma T) \pm \mathrm{i}\sin(\sigma T) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sigma T}. \tag{11.55}
$$

Η γενική λύση είναι

$$
\begin{aligned}
z(t) &= c_1 \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t} p_z(t)\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t} p_z(t)\right) \\
\eta(t) &= c_1 \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t} p_\eta(t)\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t} p_\eta(t)\right).
\end{aligned}
\tag{11.56}
$$

Αφού σε αυτή την περίπτωση ισχύουν $|\rho_1|=1, |\rho_2|=1$, σύμφωνα με τα προηγούμενα η λύση είναι ευσταθής ψευτοπεριοδική.

Η συνάρτηση $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$ έχει περίοδο $T_\sigma = 2\pi/\sigma$. Εφόσον $\varDelta \neq 1$ και $\varDelta \neq -1$, τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} &\sigma T \neq m\pi, \frac{2\pi}{T_\sigma} T \neq m\pi, \frac{2T}{m} \neq T_\sigma \\ &\text{έτσι ώστε } T_\sigma \neq 2T, T, \frac{2}{3}T, \dots \ . \end{aligned} \tag{11.57}$$

Για να είναι $T_\sigma = nT$ πρέπει να ισχύει η σχέση $\sigma = \dfrac{2\pi}{nT}$, για $n \neq 1, 2.$

Β) Έστω $\Delta > 1$. Τότε εφόσον $\rho = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 1}$ θα ισχύει $\rho_1 > 1,\ \mu_1 > 0$ και εφόσον $\rho_1 \rho_2 = 1$, πρέπει να ισχύουν $\rho_1 > 1 > \rho_2 > 0$. Επίσης έχουμε $\rho_2 = 1/\rho_1$ και $\mu_2 = -\mu_1 < 0$.

Η γενική λύση είναι της μορφής

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 \mathrm{e}^{\mu_1 t} p_{z1}(t) + c_2 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} p_{z2}(t) \\ \eta(t) &= c_1 \mathrm{e}^{\mu_1 t} p_{\eta 1}(t) + c_2 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} p_{\eta 2}(t). \end{aligned} \tag{11.58}$$

Τα παραπάνω σημαίνουν ότι η λύση είναι ασταθής.

Γ) Έστω $\Delta = 1$. Τότε $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 1$, άρα $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μια περιοδική λύση της μορφής $\mathrm{e}^{\mu t} p_z(t) = p_z(t), \mathrm{e}^{\mu t} p_\eta(t) = p_\eta(t)$. Επειδή υπάρχει μόνο μια ιδιοτιμή η δεύτερη ανεξάρτητη λύση είναι της μορφής

$$\mathrm{e}^{\mu t}\left(t p_{z1}(t) + p_{z2}(t)\right) = t p_{z1}(t) + p_{z2}(t), \mathrm{e}^{\mu t}\left(t p_{\eta 1}(t) + p_{\eta 2}(t)\right) = t p_{\eta 1}(t) + p_{\eta 2}(t)\,. \tag{11.59}$$

Η γενική λύση έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 p_{z1}(t) + c_2 \left(t p_{z1}(t) + p_{z2}(t)\right) \\ \eta(t) &= c_1 p_{\eta 1}(t) + c_2 \left(t p_{\eta 1}(t) + p_{\eta 2}(t)\right). \end{aligned} \tag{11.60}$$

Αυτά σημαίνουν ότι η λύση είναι ασταθής.

Δ) Έστω $\Delta < -1$. Εφόσον $\rho = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 1}$ θα ισχύει $\rho_1 < -1$ και αφού $\rho_1 \rho_2 = 1$ θα έχουμε $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 0$. Ισχύουν $\rho_2 = 1/\rho_1, \mu_2 = -\mu_1$. Ισχύει $\rho = \mathrm{e}^{\mu T}$, όπου $\rho_{1,2} < 0$. Ο υπολογισμός των μ μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\mu_1 = \frac{i\pi}{T} + \gamma\ ,\ \mu_2 = -\frac{i\pi}{T} - \gamma\ , \text{όπου } \gamma = \frac{\ln|\rho|}{T}.$$

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 \mathrm{e}^{\gamma t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t/T} p_{z1}(t) + c_2 \mathrm{e}^{-\gamma t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t/T} p_{z2}(t) \\ \eta(t) &= c_1 \mathrm{e}^{\gamma t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t/T} p_{\eta 1}(t) + c_2 \mathrm{e}^{-\gamma t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t/T} p_{\eta 2}(t). \end{aligned} \tag{11.61}$$

Τα $\vec{p}_1(t), \vec{p}_2(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με περίοδο T. Επίσης οι διάφορες εκφράσεις $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t/T}\vec{p}(t), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t/T}\vec{p}(t)$ είναι περιοδικές με περίοδο $2T$. Επομένως η γενική λύση είναι ασταθής.

Ε) Έστω $\varDelta=-1$. Τότε $\rho=\rho_1=\rho_2=-1$. Έχουμε μια ιδιοτιμή και τώρα μπορούμε να γράψουμε $\mu=\mu_1=\mu_2=\frac{\mathrm{i}\pi}{T}$. Η δυο ανεξάρτητες λύσεις είναι

$$\begin{aligned}
&z_1(t)=e^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{z1}(t),\eta_1(t)=e^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{\eta1}(t)\\
&z_2(t)=te^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{z1}(t)+e^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{z2}(t),\eta_2(t)=te^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{\eta1}(t)+e^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{\eta2}(t).
\end{aligned}\tag{11.62}$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned}
&z(t)=c_1e^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{z1}(t)+c_2e^{\mathrm{i}\pi t/T}\left(tp_{z1}(t)+p_{z2}(t)\right)\\
&\eta(t)=c_1e^{\mathrm{i}\pi t/T}p_{\eta1}(t)+c_2e^{\mathrm{i}\pi t/T}\left(tp_{\eta1}(t)+p_{\eta2}(t)\right).
\end{aligned}\tag{11.63}$$

Άρα η γενική λύση είναι ασταθής.
Μπορούμε να συνοψίσουμε τα προηγούμενα ως εξής

$$\begin{aligned}
&\text{όταν } |\varDelta|<1 \text{ υπάρχει ευστάθεια}\\
&\text{όταν } |\varDelta|\geq 1 \text{ υπάρχει αστάθεια.}
\end{aligned}\tag{11.64}$$

Σημειώνουμε ότι οι η λύση της $-|\rho|=e^{\mu T}$ ως προς μ, οδηγεί σε πολλές μιγαδικές τιμές.

Έχουμε $-|\rho|=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}|\rho|, \ln\left(-|\rho|\right)=\ln|\rho|+\mathrm{i}\pi+2k\pi\mathrm{i}$, $k=$ ακέραιος.

Από αυτές συμπεραίνουμε ότι $\mu=\ln\left(-|\rho|\right)/T=\ln|\rho|/T+\mathrm{i}\pi/T+2k\pi\mathrm{i}/T$.

Επομένως $\mathrm{e}^{\mu t}=\mathrm{e}^{\ln|\rho|t/T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t/T}\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/T}$. Ο τελευταίος παράγοντας στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο T και μπορεί να απορροφηθεί μέσα στα $\vec{p}(t)$, επομένως τα ανωτέρω συμπεράσματα δεν αλλάζουν είναι ανεξάρτητα από την τιμή του k και γι αυτό διαλέγουμε $k=0$.

Στην ουσία αυτά σημαίνουν ότι τα μ δεν προσδιορίζονται μονοσήμαντα **αλλά αυτό δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα. Ανεξάρτητα από όσα είπαμε αμέσως πριν, είναι προφανές ότι μπορούμε να** μετασχηματίσουμε τα μ έτσι που $\mu\to\mu+\mathrm{i}k2\pi$ και το αποτέλεσμα της παραπάνω ανάλυσης δεν μεταβάλλεται. Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα, αν βρούμε λύση στην περιοχή $0\leq t\leq T$, δηλαδή στην «πρώτη» (ελάχιστη) περίοδο. Στη συνέχεια προσδιορίζεται η λύση παντού. Για να ελέγξουμε την ευστάθεια χρειαζόμαστε μόνο την έκφραση $2\varDelta=z_1(t_0+T)+\eta_2(t_0+T)$, και από τη λύση της $\lambda^2-2\lambda\varDelta+1=0$ προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά της λύσης στην περιοχή της ισορροπίας. Αυτό μπορεί να γίνει αναλυτικά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, ακόμη μπορεί να βρεθεί προσεγγιστικά ή καλύτερα, αριθμητικά με όση ακρίβεια θέλουμε.

11.2.3.1 Ορθό διαταραγμένο εκκρεμές

Ας δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων για το διαταραγμένο ορθό εκκρεμές, γύρω από τη θέση ισορροπίας του. Θα εξετάσουμε το πρόβλημα γενικά, δηλαδή για οποιαδήποτε από τις τρεις διαταραγμένες περιπτώσεις του εκκρεμούς. Στο τέλος μπορούμε να ειδικεύσουμε σε οποιαδήποτε από τις τρεις περιπτώσεις που αναφέραμε, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της κούνιας.

Ξαναγράφουμε τη γενική εξίσωση κίνησης δευτέρας τάξης και τις δυο (διαφορικές) εξισώσεις πρώτης τάξης σε μορφή μήτρας

$$\ddot{z}+\left(\omega_0^2+b(t)\right)z=0,\ \ \omega_0=\sqrt{g/l}$$
$$b(t)=b(t+T),\omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \tag{11.65}$$
$$\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left(\omega_0^2+b(t)\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}.$$

Ισχύει ότι $z=\theta$, δηλαδή είναι η γωνία θ στις περιπτώσεις ταλάντωσης του σημείου στήριξης του εκκρεμούς και ταλάντωσης του πεδίου βαρύτητας, ενώ ισχύει $z=l\theta$, για την περίπτωση ταλάντωσης του μήκους. T_0 είναι η φυσική περίοδος του (ορθού) εκκρεμούς (για ταλαντώσεις μικρού πλάτους). Κάνουμε την παρακάτω παραμετροποίηση η οποία θα φανεί στην πορεία ότι είναι αρκετά βολική.

$$a(t)=\omega_0^2+b(t)=\omega_0^2+\varepsilon b_0^2h(t)$$
$$h(t)=h(t+T),\varepsilon\geq 0 \tag{11.66}$$
$$\left|h(t)\right|\leq 1.$$

Ισχύει $b_0\geq 0$ και σταθερό, έχει διαστάσεις κυκλικής συχνότητας, ενώ τα $\varepsilon, h(t)$ είναι αδιάστατα μεγέθη. Όταν $\varepsilon=0$, έχουμε την περίπτωση του αδιατάρακτου ορθού εκκρεμούς. Η θέση ισορροπίας, $z=0$, είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας. Όμως υπάρχουν κάποιες τιμές του ω_0, καλύτερα σχέσεις ω_0 (ή T_0) και T , για τις οποίες η λύση του διαταραγμένου συστήματος, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως είναι ασταθής. Συγκεκριμένα για το διαταραγμένο σύστημα αν $|\varDelta|<1$ έχουμε ευστάθεια, όταν όμως $|\varDelta|\geq 1$ έχουμε αστάθεια. Τα σημεία με $|\varDelta|=1$ είναι τα οριακά σημεία μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι τιμές του $\varDelta$ μεταβάλλονται πολύ λίγο για πολύ μικρά ε, κοντά στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε το $\varDelta$ για το διαταραγμένο σύστημα χρησιμοποιώντας τις λύσεις του αδιατάρακτου συστήματος. Δυο ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (11.65) με την παραμετροποίηση που φαίνεται στην Εξ. (11.64), για $\varepsilon=0$ και με αρχική χρονική στιγμή $t=t_0=0$, είναι οι γνωστές

$$z_1(t)=\cos(\omega_0 t),\eta_1(t)=-\omega_0\sin(\omega_0 t)$$
$$z_2(t)=\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t),\eta_2(t)=\cos(\omega_0 t) \tag{11.67}$$
$$z_1(0)=1,\eta_1(0)=0,z_2(0)=0,\eta_2(0)=1.$$

Επομένως

$$\bar{B}=\bar{\varPhi}(T)=\begin{pmatrix}\cos(\omega_0 T) & \dfrac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 T)\\ -\omega_0\sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T)\end{pmatrix}. \tag{11.68}$$

Προφανώς $2\varDelta=\mathrm{tr}\bar{B}=2\cos(\omega_0 T)$. Αυτό σημαίνει ότι $|\varDelta|\leq 1$. Επομένως για όλους τους συνδυασμούς T_0,T για τους οποίους $|\varDelta|<1$, έχουμε ευστάθεια εκτός από τα διακριτά σημεία για τα οποία $|\varDelta|=1$ για τα

οποία υπάρχει αστάθεια. Επομένως αστάθεια θα έχουμε όταν $\varDelta=1$, οπότε ισχύουν οι σχέσεις μεταξύ ω_0 και T , και T_0 και T ,

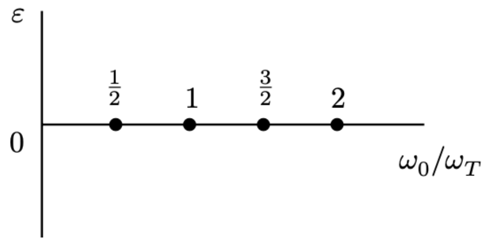
$$\omega_0 T = 2\pi m, \omega_0 = (2\pi/T)m, \omega_T = 2\pi/T$$
$$\frac{\omega_0}{\omega_T} = m \tag{11.69}$$
$$T / T_0 = m,\ m = 1, 2, \ldots\ .$$

ω_T είναι η κυκλική συχνότητα της διαταραχής.

Αν $\Delta = -1$ τότε έχουμε αστάθεια όταν ισχύουν οι σχέσεις

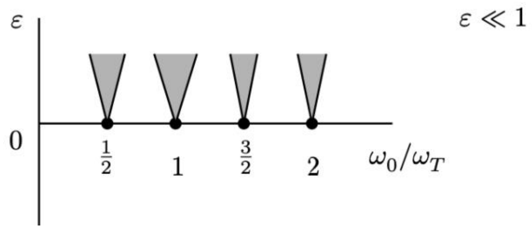
$$\omega_0 T = (2m+1)\pi$$
$$\frac{\omega_0}{\omega_T} = \frac{T}{T_0} = m + \frac{1}{2},\ m = 0, 1, \ldots\ . \tag{11.70}$$

Στην πραγματικότητα αυτές οι τιμές αποτελούν το σύνορο όπου έχουμε μετάβαση από ευστάθεια σε αστάθεια για το διαταραγμένο εκκρεμές, σε αντιδιαστολή με την περίπτωση $\varepsilon = 0$, που είχαμε ευστάθεια για όλες τις τιμές των ανωτέρω μεγεθών. Τα μεμονωμένα αυτά σημεία μετάβασης φαίνονται στο Σχήμα 11.7 και είναι σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα ω_0 / ω_T, όπου $\varepsilon = 0$.



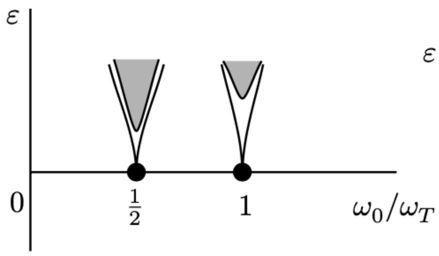
Σχήμα 11.7 *Τα μεμονωμένα σημεία μετάβασης για το ορθό διαταραγμένο εκκρεμές.*

Παρόλο που οι υπολογισμοί είναι προσεγγιστικοί, το συμπέρασμα είναι ότι αν κάποια παράμετρος από αυτές που αναφέραμε για το εκκρεμές ταλαντεύεται με κυκλική συχνότητα $\frac{2\pi}{T}$ ή περίοδο T, τότε η θέση ευσταθούς ισορροπίας του αδιατάρακτου ορθού εκκρεμούς με $\theta = 0, z = 0$, μπορεί να γίνει θέση ασταθούς ισορροπίας για το διαταραγμένο. Στην πραγματικότητα οι θέσεις ασταθούς ισορροπίας δεν είναι μεμονωμένα σημεία αλλά ολόκληρες περιοχές που μπορεί να εκφραστούν με σχέσεις μεταξύ $\varepsilon, \omega_0, \omega_T, b_0$. Το Σχήμα 11.7 αναφέρεται σε μικρές τιμές του ε, οι περιοχές αστάθειας είναι οι γραμμοσκιασμένες, όλες οι άλλες περιοχές αντιστοιχούν σε ευστάθεια. Μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι μικρή τιμή του ε σημαίνει μικρή τιμή του πλάτους ταλάντωσης της ταλαντευόμενης παραμέτρου.



Σχήμα 11.8 *Περιοχές αστάθειας του ορθού διαταραγμένου εκκρεμούς για μικρές τιμές του* ε.

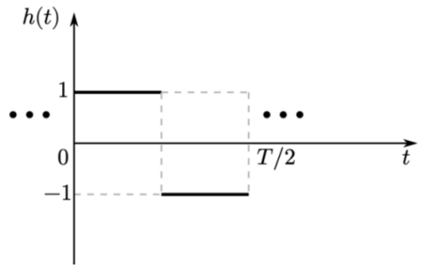
Όταν υπάρχουν τριβές τα πράγματα διαφοροποιούνται και έχουμε το Σχήμα 11.9, με τις γραμμοσκιασμένες περιοχές να αντιστοιχούν σε αστάθεια. Σε αυτή την περίπτωση οι περιοχές αστάθειας δεν «ακουμπούν» στον άξονα ω_0 / ω_T. Αυτό σημαίνει ότι για να υπάρξει αστάθεια πρέπει το πλάτος ταλάντωσης της παραμέτρου να υπερβαίνει κάποιαν ελάχιστη τιμή στην περιοχή κάθε σημείου μετάβασης, βλέπε και Σχήμα 11.20.



Σχήμα 11.9 *Περιοχές αστάθειας του ορθού διαταραγμένου εκκρεμούς με μικρή απόσβεση.*

Το πρόβλημα με $h(t)$ αρμονική συνάρτηση του χρόνου δε λύνεται αναλυτικά (ακριβώς). Θα εξετάσουμε πρόβλημα που λύνεται ακριβώς. Μια τέτοια περίπτωση είναι αυτή που η $h(t)$ είναι περιοδική βηματική συνάρτηση της παρακάτω μορφής, βλέπε Σχήμα 11.10,

$$\begin{aligned} &h(t+T) = h(t) \\ &h(t) = 1, \quad 0 \le t < T/2 \\ &h(t) = -1, \quad T/2 \le t \le T. \end{aligned} \tag{11.71}$$



Σχήμα 11.10 *Βηματική διέγερση ορθού εκκρεμούς.*

Αυτή η βηματική συνάρτηση σχετίζεται στην περίπτωση ταλάντωσης του σημείου στήριξης και ταλάντωσης του πεδίου βαρύτητας, με την δεύτερη παράγωγο (επιτάχυνση) της μεταβολής με τον χρόνο της αντίστοιχης παραμέτρου. Στην περίπτωση της περιοδικής μεταβολής του μήκους με τον χρόνο, σχετίζεται με κάποιο συνδυασμό της δεύτερης παραγώγου της μεταβολής του μήκους και του μήκους ως συνάρτησης του χρόνου. Αν έχουμε μόνο την επιτάχυνση, η βηματική συνάρτηση σημαίνει ότι στο τέλος κάθε διαστήματος μισής (ελάχιστης) περιόδου αλλάζει πρόσημο η δεύτερη παράγωγος (επιτάχυνση) ενώ είναι σταθερή κατά τη διάρκεια κάθε μισής περιόδου. Πρέπει να τονιστεί ότι επιτρέπεται η χρήση βηματικής συνάρτηση σε διαφορική εξίσωση της ανωτέρω μορφής αρκεί η θέση του σημείου στήριξης ή το μήκος του εκκρεμούς ως συναρτήσεις του χρόνου να έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο (άρα είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου η ίδια) για κάθε χρονική στιγμή. Η δεύτερη παράγωγος των ανωτέρω φυσικών μεγεθών έχει ασυνέχειες. Χρειάζεται προσοχή όταν θέλουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των διαφόρων μεγεθών. Πρέπει η επιλογή της συνάρτησης για τη μεταβολή με τον χρόνο της παραμέτρου να είναι περιοδική με περίοδο T και φυσικά να οδηγεί στην ανωτέρω βηματική συνάρτηση. Θα δούμε αργότερα που οδηγεί αυτή η παρατήρηση για την περίπτωση ταλάντωσης του σημείου στήριξης.

Η διαφορική εξίσωση κίνησης που καθορίζεται από τις Εξ. (11.64), (11.65), δίνει σε αυτή την περίπτωση για τα δυο διαστήματα ορισμού της $h(t)$

$$\begin{aligned}&\ddot{z}+\left(\omega_0^2+b_0^2\varepsilon\right)z=0\\&\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left(\omega_0^2+b_0^2\varepsilon\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}\\&0\le t\le T/2.\end{aligned}\tag{11.72}$$

και

$$\begin{aligned}&\ddot{z}+\left(\omega_0^2-b_0^2\varepsilon\right)z=0\\&\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left(\omega_0^2-b_0^2\varepsilon\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}\\&T/2<t\le T.\end{aligned}\tag{11.73}$$

Για το πρώτο διάστημα $0\le t\le T/2$, έχουμε τις παρακάτω δυο ανεξάρτητες λύσεις, με τις αντίστοιχες αρχικές τιμές τους,

$$\begin{aligned}&\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+b_0^2\varepsilon}\\&z_1=\cos\left(\omega_1 t\right),\eta_1=-\omega_1\sin\left(\omega_1 t\right)\\&z_2=\frac{1}{\omega_1}\sin\left(\omega_1 t\right),\eta_2=\cos\left(\omega_1 t\right)\\&z_1(0)=1,\eta_1(0)=0\\&z_2(0)=0,\eta_2(0)=1.\end{aligned}\tag{11.74}$$

Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη θεμελιώδης μήτρα $\Phi_1(t)=\begin{pmatrix}z_1(t) & z_2(t)\\ \eta_1(t) & \eta_2(t)\end{pmatrix},\ 0\le t\le T/2$ είναι κύρια θεμελιώδης. Αυτή η μήτρα προσδιορίζει για κάθε t στο συγκεκριμένο διάστημα, τις τιμές των $z(t),\eta(t)$ εφόσον είναι γνωστές οι τιμές κατά την αρχική χρονική στιγμή που εδώ είναι $t=0.$

Δηλαδή ισχύει

$$\begin{pmatrix}z(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=\Phi_1(t)\begin{pmatrix}z(0)\\ \eta(0)\end{pmatrix}\tag{11.75}$$

Εδώ έχουμε μια απεικόνιση (mapping) από τη στιγμή $t=0$ στη στιγμή t.

Προφανώς για το άκρο του διαστήματος ισχύει

$$\begin{pmatrix}z(T/2)\\ \eta(T/2)\end{pmatrix}=\Phi_1(T/2)\begin{pmatrix}z(0)\\ \eta(0)\end{pmatrix}.\tag{11.76}$$

Για το δεύτερο διάστημα $T/2<t\le T$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - b_0^2 \varepsilon} \\
&z_1' = \cos\left(\omega_2 (t - T/2)\right), \eta_1' = -\omega_2 \sin\left(\omega_2 (t - T/2)\right) \\
&z_2' = \frac{1}{\omega_2} \sin\left(\omega_2 (t - T/2)\right), \eta_2' = \cos\left(\omega_2 (t - T/2)\right) \\
&z_1'(T/2) = 1, \eta_1'(T/2) = 0 \\
&z_2'(T/2) = 0, \eta_2'(T/2) = 1.
\end{aligned} \tag{11.77}$$

Η αντίστοιχη θεμελιώδης μήτρα $\Phi_2(t)$, $T/2<t \le T$ είναι και αυτή κύρια θεμελιώδης και προσδιορίζει σε αυτό το διάστημα τις λύσεις αν είναι γνωστές οι αρχικές τιμές που εδώ είναι οι τιμές τη στιγμή $t = T/2$. Δηλαδή ισχύουν

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) & z_2'(t) \\ \eta_1'(t) & \eta_2'(t) \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \Phi_2(t) \begin{pmatrix} z'(T/2) \\ \eta'(T/2) \end{pmatrix} \\
&T/2<t \le T.
\end{aligned} \tag{11.78}$$

Χρειαζόμαστε να βρούμε πως θα πάμε από τη στιγμή $t = 0$ στη στιγμή $t = t,$ όπου για το δεύτερο χρόνο να έχουμε $T/2 \le t \le T$. Προφανώς πρέπει να έχουμε συνεχείς συναρτήσεις άρα οριακά για το σημείο $t = T/2$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} z'(T/2) \\ \eta'(T/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(T/2) \\ \eta(T/2) \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \Phi_2(t) \begin{pmatrix} z(T/2) \\ \eta(T/2) \end{pmatrix} = \Phi_2(t) \Phi_1(T/2) \begin{pmatrix} z(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} \\
&T/2 < t \le T.
\end{aligned} \tag{11.79}$$

Τελικώς καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\Phi(t) = \Phi_1(t), 0 \le t \le T/2 \\
&\Phi(t) = \Phi_2(T/2)\Phi_1(t), T/2 < t \le T.
\end{aligned} \tag{11.80}$$

Η $\Phi(t)$ είναι συνεχής στο παραπάνω ολικό χρονικό διάστημα της μιας περιόδου, δηλαδή στο διάστημα $0 \le t \le T$.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει το 2Δ είναι το ίχνος (trace) της μήτρας

$$\Phi(T) = \Phi_2(T)\Phi_1(T/2), \text{ δηλαδή } 2\Delta = \mathrm{tr}\left(\Phi(T)\right) = \mathrm{tr}\left(\Phi_2(T)\Phi_1(T/2)\right).$$

Υπολογίζουμε το ίχνος και βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
2\Delta &= \cos\left(\omega_2 T/2\right)\cos\left(\omega_1 T/2\right) - \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin\left(\omega_2 T/2\right)\sin\left(\omega_1 T/2\right) \\
&- \frac{\omega_2}{\omega_1}\sin\left(\omega_2 T/2\right)\sin\left(\omega_1 T/2\right) + \cos\left(\omega_2 T/2\right)\cos\left(\omega_1 T/2\right) \\
&= 2\cos\left(\omega_2 T/2\right)\cos\left(\omega_1 T/2\right) - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin\left(\omega_2 T/2\right)\sin\left(\omega_1 T/2\right).
\end{aligned} \tag{11.81}
$$

Από τις τιμές του Δ εξαρτάται η ευστάθεια ή η αστάθεια του διαταραγμένου εκκρεμούς.

Συγκεκριμένα, αν $|\Delta| \geq 1$ έχουμε αστάθεια, αν $|\Delta| < 1$ έχουμε ευστάθεια. Τα σημεία με $|\Delta| = 1$ αντιστοιχούν στο σύνορο μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας.

Μέχρι τώρα δεν περιορίσαμε την ταλάντωση, αρκεί να είναι τέτοια ώστε οι εξισώσεις κίνησης να έχουν λύσεις αρμονικές με τον χρόνο. Τώρα θα περιοριστούμε σε ταλάντωση για την οποία $\varepsilon \ll 1$.

Θα υπολογίσουμε κατά προσέγγιση διάφορες ποσότητες που υπεισέρχονται στη σχέση με το Δ. Εισάγουμε την ποσότητα D και κάνουμε τις κατάλληλες προσεγγίσεις για μικρό ε. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
2(1+D) &= \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1\omega_1} = \frac{2\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^4 - \varepsilon^2 b_0^4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\left(\dfrac{b_0}{\omega_0}\right)^4}} \approx 2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4\right) \\
D &\approx \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4.
\end{aligned} \tag{11.82}
$$

Με τη χρήση διαφόρων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων βρίσκουμε ότι η σχέση της Εξ. (11.81) γίνεται χωρίς προσεγγίσεις

$$
2\Delta = -D\cos\left((\omega_2-\omega_1)T/2\right) + (2+D)\cos\left((\omega_2+\omega_1)T/2\right). \tag{11.83}
$$

Θα βρούμε πότε η θέση (ευσταθούς) ισορροπίας για το ορθό αδιατάρακτο εκκρεμές γίνεται για το αντίστοιχο διαταραγμένο, θέση ασταθούς ισορροπίας. Για να γίνει αυτό πρέπει να ισχύει $|\Delta| \geq 1$. Επομένως έχουμε για $\Delta > 0, \Delta < 0$ τις δυο σχέσεις αντιστοίχως

$$
\begin{aligned}
-D\cos\left((\omega_2-\omega_1)T/2\right) + (2+D)\cos\left((\omega_2+\omega_1)T/2\right) &\geq 2 \\
-D\cos\left((\omega_2-\omega_1)T/2\right) + (2+D)\cos\left((\omega_2+\omega_1)T/2\right) &\leq -2.
\end{aligned} \tag{11.84}
$$

α) Η πρώτη σχέση δίνει

$$
\cos\left((\omega_2+\omega_1)T/2\right) - \frac{2 + D\cos\left((\omega_2-\omega_1)T/2\right)}{2+D} \geq 0. \tag{11.85}
$$

Για αρκούντως μικρό ε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0 \left(\frac{b_0}{\omega_0} \right)^2 \varepsilon \\ &\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_0. \end{aligned} \tag{11.86}$$

Με αυτές τις προσεγγίσεις και σύμφωνα με την προσέγγιση για το D, $D \ll 1$, η Εξ. (11.85) γίνεται

$$\cos(\omega_0 T) - 1 + \frac{D}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{T}{2}\omega_0 \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2 \varepsilon\right)\right) \geq 0. \tag{11.87}$$

Από αυτή τη σχέση είναι ευνόητο ότι $\cos(\omega_0 T) \approx 1$, επομένως

$$\begin{aligned} &\omega_0 T \approx m2\pi + \xi, \quad |\xi| << 1, \; m = 1, 2, \ldots \\ &\omega_0 \neq 0. \end{aligned} \tag{11.88}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_0 T) = \cos(\xi) \approx 1 - \frac{1}{2}\xi^2 \\ &\cos\left(\frac{T}{2}\omega_0 \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2 \varepsilon\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\omega_0 \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2 \varepsilon\right)^2 \\ &-\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4 \frac{\varepsilon^2}{4} T\omega_0 \leq \xi \leq \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4 \frac{\varepsilon^2}{4} T\omega_0. \end{aligned} \tag{11.89}$$

Χρησιμοποιούμε την Εξ. (11.88) οπότε βρίσκουμε

$$m2\pi - \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4 \omega_0 T \frac{\varepsilon^2}{4} \leq \omega_0 T \leq m2\pi + \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4 \omega_0 T \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{11.90}$$

Ο δεύτερος προσθετέος είναι πολύ μικρός (βλέπε και Εξ. (11.89)) οπότε στη θέση του ω_0 αυτού του όρου μπορούμε να βάλουμε την προσεγγιστική τιμή του $m2\pi/T \approx m\omega_T$. Με αυτό την κάνουμε σφάλμα ανώτερης τάξης, άρα αμελητέο για την προσέγγιση που ενδιαφερόμαστε. Βρίσκουμε

$$m2\pi - \left(\frac{b_0}{m\omega_T}\right)^4 m\omega_T T \frac{\varepsilon^2}{4} \leq \omega_0 T \leq m2\pi + \left(\frac{b_0}{m\omega_T}\right)^4 m\omega_T T \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Οπότε τελικώς για μικρά ε βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση

$$m - \left(\frac{b_0}{\omega_T}\right)^4 \frac{1}{m^3}\frac{\varepsilon^2}{4} \leq \frac{\omega_0}{\omega_T} \leq m + \left(\frac{b_0}{\omega_T}\right)^4 \frac{1}{m^3}\frac{\varepsilon^2}{4}, \quad m = 1, 2, \ldots \quad . \tag{11.91}$$

Η σχέση αυτή στο Σχήμα 11.8 παριστάνεται με το γραμμοσκιασμένο μέρος που περικλείεται στις παραβολικές καμπύλες που έχουν σημεία στον οριζόντιο άξονα στις θέσεις 1,2,…. Αυτό το μέρος αντιστοιχεί στα σημεία αστάθειας του διαταραγμένου ορθού εκκρεμούς.

β) Η δεύτερη σχέση από τις Εξ. (11.84) δίνει

$$\cos\left((\omega_2+\omega_1)T/2\right)-\frac{D\cos\left((\omega_2-\omega_1)T/2\right)-2}{2+D}\le 0\,. \tag{11.92}$$

Μετά από τις προσεγγίσεις για τα ω_1,ω_2 και το ότι το $D \ll 1$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\cos\left(\omega_0 T\right)-\frac{D}{2}\left(1+\cos\left(\omega_0\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2 \varepsilon T/2\right)\right)+1\le 0\,. \tag{11.93}$$

Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του συνημιτόνου για μικρές γωνίες οπότε βρίσκουμε

$$\cos\left(\omega_0 T\right)+1-\frac{D}{2}\left(2-\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_0^2\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4\frac{T^2}{4}\right)\le 0\,. \tag{11.94}$$

Αφού ο όρος με το D είναι πολύ μικρός έχουμε

$$\begin{aligned}&\cos\left(\omega_0 T\right)\approx -1,\quad \omega_0 T\approx(2m+1)\pi+\xi,\quad |\xi|\ll 1,\quad m=0,1,\ldots\\ &\cos\left(\omega_0 T\right)=-\cos\xi\approx-(1-\frac{1}{2}\xi^2).\end{aligned} \tag{11.95}$$

Επομένως η Εξ. (11.94) δίνει

$$-1+\frac{1}{2}\xi^2+1-\frac{D}{2}\left(2-\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_0^2\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^4\frac{T^2}{4}\right)\le 0\,. \tag{11.96}$$

Παραλείπουμε μικρούς όρους ανώτερης τάξης ως προς ε οπότε βρίσκουμε

$$-\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2\varepsilon\le\xi\le\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2\varepsilon\,. \tag{11.97}$$

Επομένως

$$(2m+1)\pi-\left(\frac{b_0 T}{\omega_0 T}\right)^2\varepsilon\le\omega_0 T\le(2m+1)\pi+\left(\frac{b_0 T}{\omega_0 T}\right)^2\varepsilon,\quad m=0,1,\ldots. \tag{11.98}$$

Επειδή ο όρος

$$(2m+1)\pi\gg\left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2\varepsilon=\left(\frac{b_0 T}{\omega_0 T}\right)^2\varepsilon\,,$$

θέτουμε στη θέση του $\omega_0 T$, στον παρονομαστή, το $(2m+1)\pi$ διότι το σφάλμα που γίνεται στον υπολογισμό του $\omega_0 T$ είναι ανώτερης τάξης οπότε είναι αμελητέο .

Τελικώς καταλήγουμε.

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(b_0/\omega_T\right)^2}{2\pi}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\varepsilon \le \frac{\omega_0}{\omega_T} \le \left(m+\frac{1}{2}\right)+\frac{\left(b_0/\omega_T\right)^2}{2\pi}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\varepsilon \qquad (11.99)$$

$$m = 0,1,2,\ldots\ .$$

Η σχέση αυτή στο Σχήμα 11.8 παριστάνεται με το γραμμοσκιασμένο μέρος που περικλείεται από τις ευθείες που έχουν σημεία στον οριζόντιο άξονα στις θέσεις 1/2, 3/2,…. Αυτό το μέρος αντιστοιχεί στα σημεία αστάθειας του διαταραγμένου ορθού εκκρεμούς.

Στην περίπτωση που το σημείο στήριξης ταλαντεύεται πάνω κάτω με βηματική επιτάχυνση, μπορούμε να διαλέξουμε τις παραμέτρους έτσι που να ισχύουν

$$\left(\frac{b_0}{\omega_T}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l} \ll 1 \cdot$$

είναι το πλάτος ταλάντωσης του σημείου στήριξης στον κατακόρυφο άξονα.

Σε αυτή την περίπτωση οι Εξ. (11.91) και (11.99) γίνονται

$$m-\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{m^3}\varepsilon^2 \le \frac{\omega_0}{\omega_T} \le m+\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{m^3}\varepsilon^2, \quad m=1,2,\ldots$$

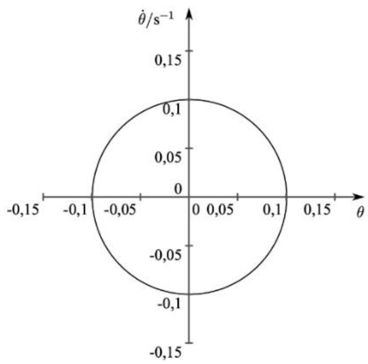
$$\left(m+\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{\pi^3}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\varepsilon \le \frac{\omega_0}{\omega_T} \le \left(m+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{\pi^3}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\varepsilon, \ m=0,1,2,\ldots\ . \qquad (11.100)$$

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης δεύτερης τάξης για το διαταραγμένο ορθό εκκρεμές , όταν το σημείο στήριξης ταλαντώνεται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα, αρμονικά με τον χρόνο. Η εξίσωση είναι η εξίσωση Mathieu χωρίς απόσβεση. Έχουμε

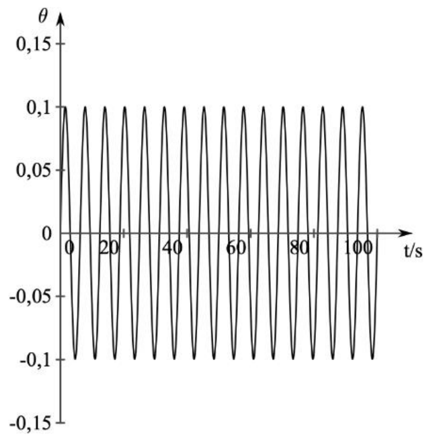
$$y = a\cos\left(\omega_T t\right), \ \ddot{y} = c = -a\omega_T^2\cos\left(\omega_T t\right)$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{l}+\frac{a\omega_T^2}{l}\cos(\omega_T t)\right)\sin\theta = 0 \qquad (11.101)$$

Διαλέγουμε τις παραμέτρους έτσι ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε περιοχή ευστάθειας, $g = 1\ \mathrm{ms}^{-2}, l = 1\ \mathrm{m}, a = 0{,}1\ \mathrm{m},\ \omega_T = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Στο Σχήμα 11.11 φαίνεται η εξέλιξη στον χώρο των καταστάσεων $\theta,\dot{\theta}$. Στο Σχήμα 11.12 φαίνεται η γραφική παράσταση της $\theta = \theta(t)$.

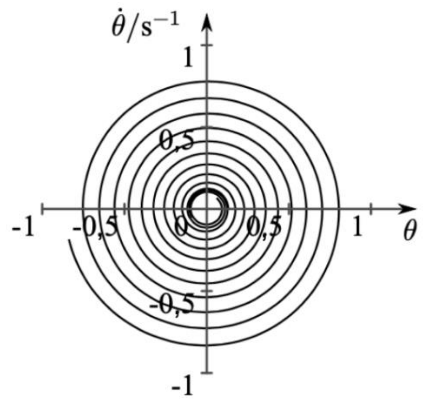


Σχήμα 11.11 *Φασικό διάγραμμα για ορθό εκκρεμές με σημείο στήριξης σε αρμονική κίνηση με το χρόνο.*

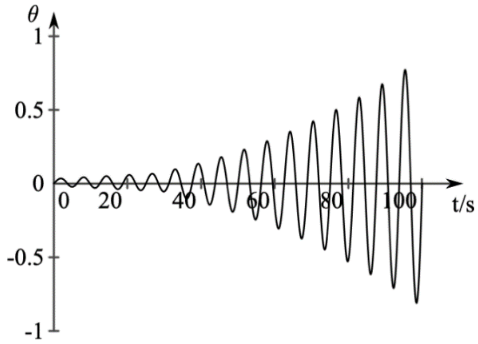


Σχήμα 11.12 *Γραφική παράσταση απομάκρυνσης ως συνάρτησης του χρόνου.*

Στα Σχήματα 11.13 και 11.14 είναι οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις με τη διαφορά ότι οι παράμετροι έχουν επιλεγεί σύμφωνα με τη θεωρία παραμετρικού συντονισμού που έχει προηγηθεί, ώστε να αντιστοιχούν στον πρώτο παραμετρικό συντονισμό, οπότε η θέση ευσταθούς ισορροπίας του αδιατάρακτου ορθού εκκρεμούς γίνεται ασταθής για το διαταραγμένο. Συγκεκριμένα, έχει γίνει η επιλογή $g = 1\ \mathrm{ms}^{-2}, l = 1\ \mathrm{m}, a = 0,025\ \mathrm{m},\ \omega_T = 2\ \mathrm{s}^{-1}$.



Σχήμα 11.13 *Φασικό διάγραμμα ορθού εκκρεμούς σε κατάσταση πρώτου παραμετρικού συντονισμού.*



Σχήμα 11.14 *Εξέλιξη με το χρόνο της απόκλισης στον παραμετρικό συντονισμό.*

11.2.3.2 Αντεστραμμένο διαταραγμένο εκκρεμές

Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση του αντεστραμμένου εκκρεμούς για να δούμε πότε η αστάθεια του αδιατάρακτου μπορεί να γίνει ευστάθεια για το διαταραγμένο. Θα υποθέτουμε, όπως προηγουμένως για το ορθό εκκρεμές, ότι έχουμε βηματική συνάρτηση.

Από την Εξ(11.41) προκύπτει ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned}
&\ddot{z}-\left(\omega_0^2+b(t)\right)z=0,\ \omega_0=\sqrt{g/l}\\
&b(t)=b(t+T),\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\\
&\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \omega_0^2+b(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.102}$$

Για βηματική συνάρτηση θα έχουμε στο διάστημα $0\le t\le T/2$, τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\ddot{z}-\left(\omega_0^2+b_0^2\right)z=0\\
&\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \omega_0^2+b_0^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.103}$$

Για το δεύτερο διάστημα $T/2<t\le T$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\ddot{z}+\left(b_0^2-\omega_0^2\right)z=0\\
&\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left(b_0^2-\omega_0^2\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \eta\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.104}$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε προηγουμένως για το ορθό εκκρεμές. Για το διάστημα $0\le t\le T/2$ γράφουμε

$$\omega_1^2=\omega_0^2+b_0^2,\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+b_0^2}>0\,. \tag{11.105}$$

Οι δυο ανεξάρτητες λύσεις με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned}
&z_1(t)=\cosh(\omega_1 t),\eta_1(t)=\omega_1\sinh(\omega_1 t)\\
&z_1(0)=1,\eta_1(0)=0\\
&z_2(t)=\frac{1}{\omega_1}\sinh(\omega_1 t),\eta_2(t)=\cosh(\omega_1 t)\\
&z_2(0)=0,\eta_2(0)=1.
\end{aligned} \tag{11.106}$$

Για το διάστημα $T/2<t\le T$ υποθέτουμε ότι $b_0^2-\omega_0^2>0$, οπότε γράφουμε

$$\omega_2^2=b_0^2-\omega_0^2,\omega_2=\sqrt{b_0^2-\omega_0^2}>0 \tag{11.107}$$

Οι δυο ανεξάρτητες λύσεις με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned}
&z_1'(t)=\cos\left(\omega_2(t-T/2)\right),\eta_1'(t)=-\omega_2\sin\left(\omega_2(t-T/2)\right)\\
&z_1'(T/2)=1,\eta_1'(T/2)=0\\
&z_2'(t)=\frac{1}{\omega_2}\sin\left(\omega_2(t-T/2)\right),\eta_2'(t)=\cos\left(\omega_2(t-T/2)\right)\\
&z_1'(T/2)=0,\eta_1'(T/2)=1.
\end{aligned} \tag{11.108}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\Phi_1(T/2) = \begin{pmatrix} \cosh(\omega_1 T/2) & \dfrac{1}{\omega_1}\sinh(\omega_1 T/2) \\ \omega_1 \sinh(\omega_1 T/2) & \cosh(\omega_1 T/2) \end{pmatrix}$$
$$\Phi_2(T) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 T/2) & \dfrac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 T/2) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 T/2) & \cos(\omega_2 T/2) \end{pmatrix}. \tag{11.109}$$

Ισχύουν οι σχέσεις $\Phi(T) = \Phi_2(T)\Phi_1(T/2)$ και $2\Delta = \mathrm{tr}\left(\Phi(T)\right) = \mathrm{tr}\left(\Phi_2(T)\Phi_1(T/2)\right)$.
Τελικώς

$$\begin{aligned} 2\Delta &= \cos(\omega_2 T/2)\cosh(\omega_1 T/2) + \frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 T/2)\omega_1 \sinh(\omega_1 T/2) \\ &-\omega_2 \sin(\omega_2 T/2)\frac{1}{\omega_1}\sinh(\omega_1 T/2) + \cos(\omega_2 T/2)\cosh(\omega_1 T/2) \\ 2\Delta &= 2\cos(\omega_2 T/2)\cosh(\omega_1 T/2) + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin(\omega_2 T/2)\sinh(\omega_1 T/2). \end{aligned} \tag{11.110}$$

Μπορούμε να μελετήσουμε οποιαδήποτε από τις τρεις περιπτώσεις περιοδικής μεταβολής παραμέτρου του εκκρεμούς. Θα περιοριστούμε στις δυο περιπτώσεις, της κίνησης του σημείου στήριξης και της μεταβολής του μήκους.

Κάνουμε την παρακάτω παραμετροποίηση, εισάγοντας τις δυο αδιάστατες μικρές ποσότητες

$$\varepsilon^2 = \frac{b_0^2 T^2}{32} \ll 1, \quad \mu^2 = \left(\frac{\omega_0}{b_0}\right)^2 \ll 1 \cdot \tag{11.111}$$

Αυτά αντιστοιχούν γενικώς σε μικρά πλάτη ταλάντωσης του μήκους ή ταλάντωσης του σημείου στήριξης σε σχέση με το μήκος του εκκρεμούς. Στο τέλος θα δώσουμε τις ειδικές σχέσεις για την περίπτωση της κίνησης του σημείου στήριξης.

Από τα παραπάνω βρίσκουμε εύκολα ότι ισχύουν

$$\begin{aligned} \omega_1 T/2 &= \sqrt{b_0^2 + \omega_0^2}\, T/2 = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2} \ll 1 \\ \omega_2 T/2 &= \sqrt{b_0^2 - \omega_0^2}\, T/2 = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2} \ll 1. \end{aligned} \tag{11.112}$$

Από αυτές προκύπτει ότι με προσέγγιση σφάλματος της τάξης του ε^4, μ^4 βρίσκουμε

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 2\mu^2. \tag{11.113}$$

Κάναμε χρήση της προσέγγισης

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}, \quad x \ll 1 \cdot$$

Δίνουμε τις παρακάτω προσεγγιστικές σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια

$$\begin{aligned}
&|x| \ll 1 \\
&\cosh(x) \approx 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}, \quad \cos(x) \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!} \\
&\sinh(x) \approx x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}, \quad \sin(x) \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}.
\end{aligned} \tag{11.114}$$

Από τις σχέσεις των Εξ. (11.111),(11.113) βρίσκουμε τις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\cosh\left(\omega_1 T/2\right)=1+4\varepsilon^2\left(1+\mu^2\right)+\frac{8}{3}\varepsilon^4 \\
&\cos\left(\omega_2 T/2\right)=1-4\varepsilon^2\left(1-\mu^2\right)+\frac{8}{3}\varepsilon^4 \\
&\sinh\left(\omega_1 T/2\right)=2\sqrt{2}\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\mu^2\right)+\frac{8}{3}\sqrt{2}\varepsilon^3\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right) \\
&\sin\left(\omega_2 T/2\right)=2\sqrt{2}\varepsilon\left(1-\frac{1}{2}\mu^2\right)-\frac{8}{3}\sqrt{2}\varepsilon^3\left(1-\frac{3}{2}\mu^2\right).
\end{aligned} \tag{11.115}$$

Λάβαμε υπόψη ότι $(1+x)^n \approx 1+nx, \quad |x| \ll 1$..
Από όλα τα πιο πάνω προκύπτει ότι ισχύουν κατά προσέγγιση της τάξης του $(\mu\varepsilon)^2$ οι σχέσεις,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin(\omega_2 T/2)\sinh(\omega_1 T/2)=16\mu^2\varepsilon^2 \\
&\cos(\omega_2 T/2)\cosh(\omega_1 T/2)=1+8\varepsilon^2\mu^2-\frac{32}{3}\varepsilon^4.
\end{aligned} \tag{11.116}$$

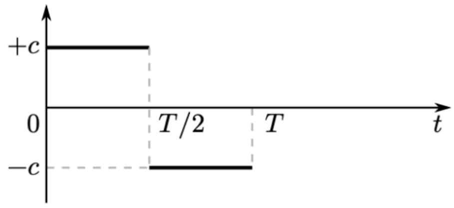
Από τις Εξ. (11.109),(11.115) και τη συνθήκη για ευστάθεια, $|2\Delta|<2$ βρίσκουμε ότι για να έχουμε ευστάθεια στο αντεστραμμένο εκκρεμές πρέπει

$$|2\Delta|=\left|2-\frac{64}{3}\varepsilon^4+32\varepsilon^2\mu^2\right|<2\,. \tag{11.117}$$

Τελικώς επειδή η ποσότητα μέσα στο σύμβολο της απόλυτης τιμής είναι πάντα θετική (η σχέση ισχύει μόνο για πολύ μικρά, μ, ε) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&2\Delta=2-\frac{64}{3}\varepsilon^4+32\varepsilon^2\mu^2<2 \\
&\mu^2<\frac{2}{3}\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{11.118}$$

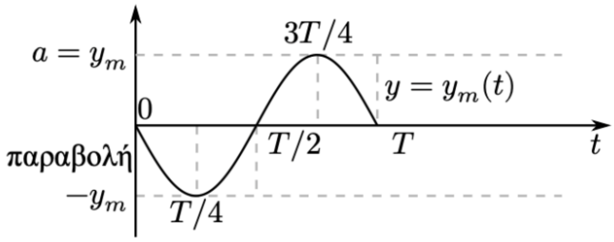
Τώρα θα βρούμε τη συσχέτιση των διαφόρων μεγεθών στην περίπτωση που το στήριγμα του εκκρεμούς ταλαντεύεται κατακόρυφα με επιτάχυνση που είναι βηματική συνάρτηση, C, η οποία φαίνεται στο Σχήμα 11.15.



Σχήμα 11.15 *Επιτάχυνση του σημείου στήριξης αντεστραμμένου εκκρεμούς που είναι βηματική συνάρτηση.*

Η κίνηση του στηρίγματος του εκκρεμούς, για το πρώτο μισό της περιόδου, δίνεται από τη σχέση που ισχύει για κίνηση σε κατακόρυφη ευθεία μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας.

$y(t)=\frac{1}{2}ct^2+\upsilon_0 t$. Όταν η ταχύτητα μηδενιστεί, το σημείο βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από το αρχικό σημείο μηδενικής μετατόπισης. Αυτό γίνεται τη στιγμή $t_m=-\frac{\upsilon_0}{c}$. Θέλουμε η κίνηση να είναι περιοδική με περίοδο T , βλέπε Σχήμα 11.16.



Σχήμα 11.16 *Θέση του σημείου στήριξης ως συνάρτηση του χρόνου.*

Για να το πετύχουμε απαιτούμε το μέγιστο να συμβαίνει στο πρώτο μισό της περιόδου τη χρονική στιγμή $t_m=T/4$. Σε κάθε ημιπερίοδο έχουμε κίνηση που περιγράφεται με παραβολή, όπως στο Σχήμα 11.16, δηλαδή σε κάθε ημιπερίοδο έχουμε αλλαγή στο πρόσημο της καμπύλης.

Η μέγιστη απομάκρυνση υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$a=-y_m=\frac{cT^2}{32}\text{, άρα } c=\frac{32a}{T^2}=\frac{8a}{\pi^2}\omega_T^2 .$$

Έχουμε τη σχέση ορισμού $\varepsilon^2=\frac{b_0^2T^2}{32}\ll 1$. Ταυτίζουμε αυτή την ποσότητα με τον λόγο $\frac{a}{l}<<1$, δηλαδή $\varepsilon^2=\frac{b_0^2T^2}{32}=\frac{a}{l}$, δηλαδή η ταλάντωση του στηρίγματος πρέπει να έχει μικρό πλάτος σε σχέση με το μήκος του εκκρεμούς. Προσδιορίζουμε το b_0, το οποίο είχαμε εισαγάγει αυθαίρετα. Βρίσκουμε

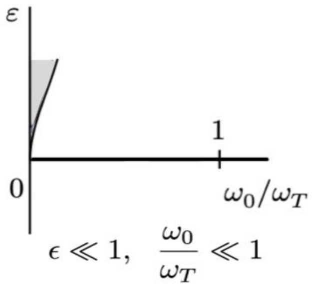
$$b_0^2=\frac{c}{l}\text{, οπότε } b_0=\frac{2\sqrt{2}\omega_T}{\pi}\varepsilon .$$

Έχουμε ορίσει $\mu^2=\omega_0^2/b_0^2\ll 1$, επομένως $\mu^2=\frac{\omega_0^2 l}{c}=\frac{g}{c}\ll 1$, δηλαδή η επιτάχυνση της ταλάντωσης πρέπει να είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Η συνθήκη για ευστάθεια, Εξ. (11.117), δηλαδή η σχέση $\mu^2<\frac{2}{3}\varepsilon^2$, δίνει τελικώς μετά από κάποιους υπολογισμούς $\frac{\omega_0}{\omega_T}=\frac{4\sqrt{3}}{3\pi}\varepsilon^2$, βλέπε Σχήμα 11.17, όπου η περιοχή ευστάθειας είναι η γραμμοσκιασμένη περιοχή.

Είναι φανερό ότι πρέπει η ταλάντωση του σημείου στήριξης να γίνεται με αρκετά μεγαλύτερη συχνότητα από τη φυσική συχνότητα του (ορθού) αδιατάρακτου εκκρεμούς για μικρές γωνίες απόκλισης από την κατακόρυφο.

Συνήθως, η περίπτωση του αντεστραμμένου εκκρεμούς παριστάνεται στο ίδιο διάγραμμα με το ορθό εκκρεμές, ενώ προτιμάται ο οριζόντιος άξονας να είναι το $\left(\frac{\omega_0}{\omega_T}\right)^2$.

Το αντεστραμμένο εκκρεμές παριστάνεται στα αρνητικά του οριζόντιου άξονα. Αυτό είναι κατανοητό γιατί στο αντεστραμμένο εκκρεμές υπάρχει αντίθετο πρόσημο μπροστά στο ω_0^2 από το πρόσημο που υπάρχει την περίπτωση του ορθού εκκρεμούς. Οι δυο περιοχές αποτελούν ένα ενιαίο συνεχές, βλέπε Σχήμα 11.20.



Σχήμα 11.17 *Περιοχή ευστάθειας για αντεστραμμένο διαταραγμένο εκκρεμές.*

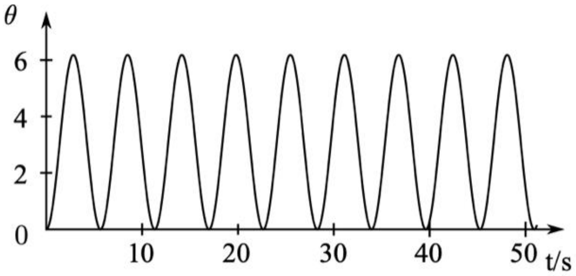
Ας θεωρήσουμε αντεστραμμένο εκκρεμές μήκους $0,50\ \mathrm{m}$ που το στήριγμά του ταλαντεύεται κατακόρυφα με πλάτος ταλάντωσης $2\ \mathrm{cm}$. Η επιτάχυνση του άκρου είναι βηματική συνάρτηση, όπως είπαμε στα προηγούμενα, και το $g=10\ \mathrm{m/s}$. Να βρεθεί για ποιες συχνότητες ταλάντωσης του στηρίγματος θα έχουμε ευστάθεια.

Από τις σχέσεις $\frac{\omega_0}{\omega_T}=\frac{4\sqrt{3}}{3\pi}\varepsilon^2,\ \varepsilon^2=\frac{a}{l}$ βρίσκουμε για τη συχνότητα ν_T ότι $\nu_T=\frac{\sqrt{3gl}}{8a}$, οπότε $\nu_T=24\ \mathrm{Hz}$. Να σημειωθεί ότι η συχνότητα του ορθού εκκρεμούς για μικρές αιωρήσεις είναι $0,71\ \mathrm{Hz}$, δηλαδή είναι πράγματι πολύ μικρότερη από την ν_T.

Ξαναθυμίζουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης του αντεστραμμένου εκκρεμούς με το σημείο στήριξης να κινείται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα αρμονικά με τον χρόνο, αρμονική διαταραχή, είναι όπως φαίνεται παρακάτω.

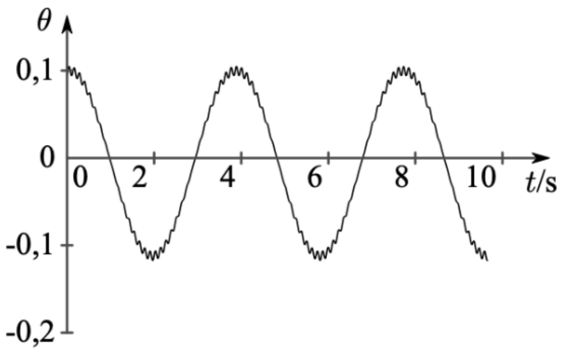
$$
\begin{aligned}
& y=a\cos\left(\omega_T t\right),\ \ddot{y}=c=-a\omega_T^2\cos\left(\omega_T t\right) \\
& \omega_0^2=\frac{g}{l} \\
& \ddot{\theta}-\left(\omega_0^2+\frac{a\omega_T^2}{l}\cos(\omega_T t)\right)\sin\theta=0.
\end{aligned}
\tag{11.119}
$$

Στο Σχήμα 11.18 φαίνεται η $\theta=\theta(t)$ για αντεστραμμένο διαταραγμένο εκκρεμές με παραμέτρους $g=10\ \mathrm{ms}^{-2},\ l=1\ \mathrm{m},\ a=0,01\ \mathrm{m},\ \omega_T=1\ \mathrm{s}^{-1}$. Με αυτή την επιλογή, είναι σαφές ότι το εκκρεμές εκτελεί κίνηση περί το κατώτερο σημείο ευσταθούς ισορροπίας, $\theta=\pi$.



Σχήμα 11.18 *Ευσταθής ισορροπία αντεστραμμένου διαταραγμένου εκκρεμούς στο κάτω σημείο ισορροπίας.*

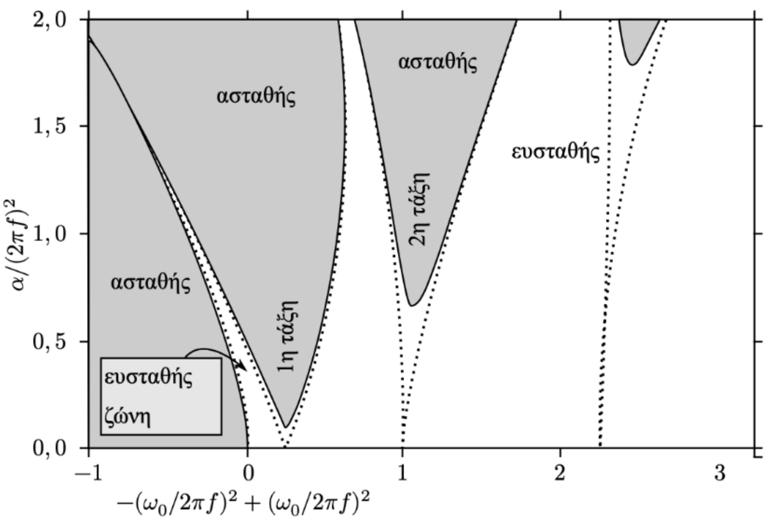
Στο Σχήμα 11.19 έχουμε την ίδια περίπτωση με αυτή του Σχήματος 11.8 με τη διαφορά ότι οι παράμετροι είναι $g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$, $l = 1\ \mathrm{m}$, $a = 0{,}1\ \mathrm{m}$, $\omega_T = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. Η διεγείρουσα κυκλική συχνότητα είναι πολύ μεγάλη, συγκεκριμένα, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία που αναφέραμε, πράγματι η θέση ασταθούς ισορροπίας του αντεστραμμένου εκκρεμούς γίνεται θέση ευσταθούς ισορροπίας. Δηλαδή το εκκρεμές εκτελεί κίνηση περί το ανώτατο σημείο ισορροπίας. Βλέπουμε την επαλληλία δυο συχνοτήτων μιας υψηλής, της ω_T, και μιας χαμηλής συχνότητας.



Σχήμα 11.19 *Ευσταθής ισορροπία αντεστραμμένου διαταραγμένου εκκρεμούς στο άνω σημείο ισορροπίας.*

Στο Σχήμα 11.20 φαίνεται αντίστοιχο διάγραμμα με αυτό του Σχήματος 11.9 με ευρύτερες περιοχές τιμών των παραμέτρων, για την περίπτωση αρμονικής διέγερσης (καταλήγουμε στην εξίσωση Mathieu χωρίς απόσβεση και με απόσβεση).

Το διάγραμμα (λέγεται διάγραμμα Ince-Strutt), περιλαμβάνει το ορθό εκκρεμές στον θετικό οριζόντιο άξονα, $\left(\dfrac{\omega_0}{2\pi f}\right)^2$ και το αντεστραμμένο εκκρεμές στον αρνητικό άξονα, $-\left(\dfrac{\omega_0}{2\pi f}\right)^2$. Έχει βρεθεί με αριθμητικό υπολογισμό. f είναι η συχνότητα διέγερσης, δηλαδή ισχύει $\omega_T = 2\pi f$. Υποθέτουμε ότι μπορεί να υπάρχει και δύναμη τριβής (απόσβεση) ασκούμενη στη μάζα m του απλού εκκρεμούς, η οποία είναι ανάλογη της γραμμικής ταχύτητάς του, δηλαδή $F_{\mathrm{f}} = k_{\mathrm{f}} \upsilon = k_{\mathrm{f}} r \dot{\varphi}$, οπότε τελικώς μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση $\ddot{\theta} \pm \left(\omega_0^2 + a\cos(\omega_T t)\right)\sin\theta + b\dot{\theta} = 0$. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση ενώ οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην περίπτωση ύπαρξης απόσβεσης, η απόσβεση (τριβή) αντιστοιχεί σε $b/(2\pi f) = 0{,}1$.



Σχήμα 11.20 *Διάγραμμα Ince-Strutt για το εκκρεμές.*

11.3 Κλασικό χάος

Ο όρος κλασικό χάος αναφέρεται σε μη κβαντικά συστήματα. Γενικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί για τον όρο Χάος τον όρο Χαοτική Δυναμική μη Γραμμικών Συστημάτων, γιατί πρόκειται για δυναμικά συστήματα που περιγράφονται με συστήματα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η δυσκολία αντιμετώπισης μη γραμμικών συστημάτων είναι η αιτία που δεν μελετήθηκαν επαρκώς πριν πολλά χρόνια, διότι δεν είναι εύκολη η λύση τέτοιων προβλημάτων. Ο κλάδος έχει αναπτυχτεί πολύ μετά την ευρεία χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών με τους οποίους μπορεί να βρεθούν λύσεις με αριθμητικές μεθόδους και να μελετηθεί η ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων. Μπορεί να πει κάποιος ότι μελέτη της εξίσωσης Van der Pol, δεκαετία 1920, είναι από τις πρώτες απόπειρες που οδήγησαν στην ύπαρξη χαοτικών συστημάτων. Η εξίσωση αυτή αρχικά επινοήθηκε για την περιγραφή ηλεκτρονικών μη γραμμικών ταλαντωτών (χαλάρωσης, relaxation), οι οποίοι εκτελούν ταλαντώσεις χαλάρωσης (relaxation oscillations). Στα 1960 με χρήση υπολογιστών δόθηκε μια μεγάλη ώθηση από την εμφάνιση χάους σε φαινόμενα που σχετίζονται με μετεωρολογικές προβλέψεις. Πριν από πολλά χρόνια, ο Αϊνστάιν έγραφε στον Max Born «ο Θεός δεν παίζει ζάρια». Ο Αϊνστάιν ήταν αντίθετος με την ενδογενή στατιστική φύση της κβαντικής θεωρίας. Έψαχνε για μιαν άλλη θεωρία που να εξηγεί τα φαινόμενα που εξηγεί η κβαντική επιστήμη, κάτι σαν την κλασική μηχανική που να έχει αιτιοκρατία και όχι ενδογενή στατιστικότητα. Σήμερα, γίνεται αποδεκτή η ιδέα της ύπαρξης χάους, δηλαδή πρακτικά εμφάνισης τυχαίας κίνησης σε κλασικά συστήματα με (διαφορικές) εξισώσεις που είναι αιτιοκρατικές. Πολύ παλιά δεν περίμενε κανείς κάτι τέτοιο. Δεν αναμένονταν να παρουσιάζεται στατιστικότητα (τυχαιότητα) σε αιτιοκρατικά κλασικά συστήματα χωρίς τη δράση δυνάμεων με τυχαίο (στατιστικό) χαρακτήρα ως προς τον χρόνο. Επίσης η τυχαιότητα δεν μοιάζει με αυτή της Κλασικής Στατιστικής Φυσικής, όπου έχει κάποιος τεράστιο πλήθος οντοτήτων που δεν μπορεί να περιγράψει την κίνηση του καθενός χωριστά. Εμφανίζεται χάος σε απλά συστήματα, π.χ. στο απλό εκκρεμές.

Ένεκα συμμετριών μπορεί να συνυπάρχει χάος και τάξη. Ο φορμαλισμός γίνεται με τέτοιο τρόπο που αν δεν υπήρχαν οι διάφορες «εικόνες» φτιαγμένες με ηλεκτρονικό υπολογιστή, τουλάχιστο οι μη ειδικοί δεν θα είχαν πειστεί για την ύπαρξη του χάους.

Οι εφαρμογές του φαινομένου εκτείνεται σε πολλούς τομείς των επιστημών, μηχανικά συστήματα, χημικές αντιδράσεις, ροή ρευστών, λέηζερ, μεταβολή πληθισμών διαφόρων όντων, διάδοση ασθενειών, βιολογία, οικονομία, ηλεκτρονικά συστήματα κ.λπ..

Από παλιά ήταν γνωστή η μετάβαση από κανονική (στρωτή) σε στοχαστική (τυρβώδη) ροή. Νόμιζαν όμως ότι αυτό οφείλεται σε αλληλεπίδραση μεγάλου πλήθους βαθμών ελευθερίας που οδηγεί σε παρόμοια κατάσταση με αυτήν της Κλασικής Στατιστικής Μηχανικής, όμως αυτό το φαινόμενο φαίνεται να είναι φαινόμενο χάους.

Δεν υπάρχει σαφής ορισμός για το Χάος, όμως χωρίς πολύ μεγάλη αυστηρότητα, με πολύ απλά λόγια, μπορούμε να πούμε ότι η μη προβλεπόμενη εξέλιξη στον χρόνο διαφόρων μη γραμμικών συστημάτων χαρακτηρίζεται με τον όρο Χάος. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτών των φαινομένων είναι ότι η εξέλιξή τους με τον χρόνο δε μπορεί να επαναληφθεί στην πράξη, ούτε κατά προσέγγιση, παρόλο που οι εξισώσεις κίνησης είναι αιτιοκρατικές, π.χ. για τα μηχανικά συστήματα ισχύει ο νόμος της δυναμικής του Νεύτωνα ή οι διάφοροι νόμοι της Αναλυτικής Δυναμικής.

Η χαοτική συμπεριφορά μπορεί να κατανοηθεί αν φανταστεί κάποιος ότι ένα σύστημα ξεκινά δυο φορές με πολύ λίγο διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Αυτό μπορεί να οφείλεται ακόμη και στο ότι οι αρχικές συνθήκες έχουν ένα μικρό σφάλμα στον καθορισμό τους, π.χ. στη μέτρησή τους. Αν το σύστημα είναι κανονικό, μη χαοτικό, αυτή η πολύ μικρή διαφορά οδηγεί σε απόκλιση στις διαδρομές τους, για ένα διάστημα χρόνου κατά την εξέλιξή τους, η οποία μεταβάλλεται λίγο, δηλαδή γραμμικά με τον χρόνο. Αν το σύστημα είναι χαοτικό η απόκλιση για ένα διάστημα χρόνου, μεταβάλλεται εκθετικά με τον χρόνο, οπότε πρακτικώς η γνώση της πρώτης τροχιάς δεν μας λέει στην πράξη τίποτα για τη δεύτερη μετά την πάροδο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Δε μπορεί κάποιος να προβλέψει την εξέλιξη χαοτικών συστημάτων για πολύ μεγάλους χρόνους, διότι αν κάνει αριθμητική λύση με χρήση υπολογιστού είναι δεδομένο ακόμη και οι τελειότεροι υπολογιστές έχουν σφάλματα υπολογισμού τα οποία με την πάροδο του χρόνου γίνονται τόσο μεγάλα που είναι αδύνατη η πρόβλεψη. Αν με τον ίδιο υπολογιστή χρησιμοποιηθούν δυο διαφορετικοί αλγόριθμοι για τη λύση του χαοτικού συστήματος θα προκύψουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα. Ακόμη αν ο ίδιος αλγόριθμος χρησιμοποιηθεί από δυο διαφορετικού «είδους» υπολογιστές τα αποτελέσματα θα είναι γενικώς τελείως διαφορετικά.

Ο Poincare παρατήρησε αυτό το φαινόμενο το 1913. Δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη για την εξέλιξη ενός συστήματος το οποίο εμφανίζει στοχαστική συμπεριφορά, όπως συμβαίνει σε μηχανικό σύστημα στο οποίο δρουν τυχαίες δυνάμεις. Στην περίπτωσή όμως του χάους η μη κανονικότητα οφείλεται στον χαρακτήρα του συστήματος και όχι στην τυχαιότητα των ασκούμενων δυνάμεων. Δηλαδή ενώ οι διαφορικές εξισώσεις είναι αιτιοκρατικές (deterministic), δηλαδή δεν περιέχουν δυνάμεις που χαρακτηρίζονται από τυχαιότητα το σύστημα εμφανίζει ακανόνιστη συμπεριφορά.

Τα δυναμικά συστήματα που συνήθως εξετάζονται περιγράφονται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Πάντοτε μπορούμε να κάνουμε αλλαγές στις μεταβλητές έτσι που να καταλήγουμε σε αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτό θα το δούμε παρακάτω σε ειδική περίπτωση. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε αναγάγει το δυναμικό σύστημά μας σε αυτόνομο δυναμικό σύστημα, δηλαδή σε δυναμικό σύστημα που περιγράφεται με (αυτόνομο) σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος). Αναγκαίες συνθήκες για ύπαρξη χαοτικής συμπεριφοράς είναι:

α) το αυτόνομο σύστημα έχει τουλάχιστο τρεις δυναμικές μεταβλητές και β) μερικές τουλάχιστον από τις (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης είναι μη γραμμικές, δηλαδή περιέχουν και μη γραμμικούς όρους.

Οι μη γραμμικές (διαφορικές) εξισώσεις είναι πολύ διαφορετικές από τις γραμμικές. Θυμηθείτε ότι για μη γραμμικές εξισώσεις δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας των λύσεων που ισχύει για τις γραμμικές.

Οι εξισώσεις μπορεί να γραφτούν στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t'} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t'} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad\vdots \\
&\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t'} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&n \geq 3.
\end{aligned} \tag{11.120}$$

Σε αντιστοιχία με όσα ξέρουμε στα πλαίσια της χαμιλτονιανής θεώρησης της Αναλυτικής Δυναμικής, συνηθίζεται στα πλαίσια της Μαθηματικής Θεωρίας της μη γραμμικής Δυναμικής και του Χάους να λέμε ότι οι εξαρτώμενες από τον χρόνο μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ παριστάνουν τον χώρο των φάσεων, ή τον χώρο των καταστάσεων. Αν εξετάζονται θέματα της Αναλυτικής Μηχανικής, τότε αυτές οι μεταβλητές μπορεί να είναι οι μεταβλητές q, p του χώρου των φάσεων της χαμιλτονιανής θεώρησης, οι μεταβλητές $q, \dot{q}$ στον χώρο των καταστάσεων της λαγκρανζιανής θεώρησης ή οι μεταβλητές w, J (δράσης-γωνίας) της θεώρησης Hamilton-Jacobi. Μπορεί ακόμη να είναι αυτές του χώρου των καταστάσεων-χρόνου κ.λπ.

Αυτές οι μεταβλητές μπορεί να παριστάνουν συγκεντρώσεις χημικών ουσιών, ρυθμούς μεταβολής διαφόρων ποσοτήτων, πληθυσμούς διαφόρων όντων, θέσεις και ορμές (ή ταχύτητες) ενός μηχανικού συστήματος κ.λπ.

Σε αυτό το σημείο, παριστάνουμε τον χρόνο με t' ο οποίος μετριέται στις συνήθεις μονάδες χρόνου, όπως δευτερόλεπτα στο S.I. .

Για παράδειγμα, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες έχουν έναν μη γραμμικό όρο, είναι οι

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t'} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2 \\
&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t'} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \sin(x_2) \\
&\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ \text{σταθερά.}
\end{aligned} \tag{11.121}$$

Τέτοια μη γραμμικά συστήματα είναι χαοτικά για ειδικές τιμές των σταθερών παραμέτρων τους. Οι τουλάχιστον τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές χρειάζονται γιατί μόνο τότε μπορεί:

α) να υπάρξει απόκλιση των τροχιών στον χώρο των καταστάσεων (μερικές φορές ο χώρος συμπίπτει με το χώρο των φάσεων ή το πολύ να διαφέρουν κατά κάποια πολλαπλασιαστική σταθερά).

β) περιορισμός της κίνησης σε κάποια πεπερασμένη περιοχή του χώρου των καταστάσεων και

γ) η κάθε τροχιά στον χώρο των καταστάσεων να είναι μοναδική.

Οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες για ύπαρξη χάους αλλά δεν είναι και ικανές.

Ας ξεκινήσουμε με το σύστημα του απλού εξαναγκασμένου εκκρεμούς με απόσβεση. Η δύναμη τριβής (απόσβεση) είναι ανάλογη της ταχύτητας της μάζας του εκκρεμούς, δηλαδή $bl\dot{\theta}$. Αν έχουμε και εξωτερικό εξαναγκασμό (διέγερση), δηλαδή δύναμη $F(t)$ ασκούμενη πάνω στη μάζα του εκκρεμούς, κάθετα προς το l του εκκρεμούς, η εξίσωση κίνησης είναι

$$ml^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t'^2} = -bl^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t'} - mgl\sin\theta + lF(t') . \tag{11.122}$$

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε ότι η δύναμη εξαναγκασμού είναι αρμονική με τον χρόνο, δηλαδή $F(t') = F_0 \cos(\omega_D t')$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$ml^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t'^2} = -bl^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t'} - mgl\sin\theta + lF_0\cos(\omega_D t') . \tag{11.123}$$

Για να μην έχουμε πολλές ρυθμιζόμενες παραμέτρους γράφουμε την εξίσωση σε αδιάστατη μορφή, εισάγοντας τον μετασχηματισμό που φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned}
&\omega_0^2 = \frac{g}{l},\ t = \omega_0 t',\ \omega_d = \frac{\omega_D}{\omega_0},\ Q = \frac{m\omega_0}{b},\ B = \frac{F_0}{mg} \\
&\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \\
&\ddot{\theta} + \frac{1}{Q}\dot{\theta} + \sin\theta = B\cos(\omega_d t).
\end{aligned} \tag{11.124}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι Q, ω_d, B και ο χρόνος t (όπως και το θ), είναι αδιάστατα μεγέθη. Ο χρόνος μετριέται με μονάδα μέτρησης το ω_0^{-1}, η κυκλική συχνότητα εξαναγκασμού με μονάδα το ω_0, το πλάτος της δύναμης εξαναγκασμού μετριέται με μονάδα το βάρος της μάζας του εκκρεμούς δηλαδή το mg. Η παράμετρος Q λέγεται συντελεστής ποιότητας (quality factor) και είναι το αντίστοιχο μέγεθος της θεωρίας κυκλωμάτων με απόσβεση, θυμηθείτε τη σχέση $Q = \dfrac{\omega L}{R}$. Όταν η απόσβεση είναι αρκούντως μεγάλη το

$$Q = 2\pi \frac{\text{Μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια}}{\text{Ενέργεια που "χάνεται" ανά κύκλο}}.$$

Με αυτή τη μορφή για $\theta \ll 1$ η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του απλού μη εξαναγκασμένου (αδιατάρακτου) εκκρεμούς χωρίς απόσβεση, έχει τιμή ίση με τη μονάδα, $\omega = 1$, διότι τότε ισχύει η εξίσωση

$$\ddot{\theta} + \theta = 0 . \tag{11.125}$$

Η Εξ. (11.125) (11.125) ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για χαοτική συμπεριφορά, διότι μπορεί να γραφτεί σε μορφή με τρεις εξαρτημένες από τον χρόνο μεταβλητές και επομένως σε μορφή συστήματος τριών αυτόνομων εξισώσεων πρώτης τάξης, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&(\psi = \omega_d t) \\
&\dot{\theta} = \omega \\
&\dot{\psi} = \omega_d \\
&\dot{\omega} = -\frac{1}{Q}\omega - \sin\theta + B\cos\psi .
\end{aligned} \tag{11.126}$$

Οι μεταβλητές είναι τα θ, ψ, ω και ο χώρος τους είναι ο εκτεταμένος φασικός χώρος με τρεις διαστάσεις.

Ο συνήθης φασικός χώρος για χαμιλτονιανά συστήματα όπως αυτό εδώ, έχει άρτιο αριθμό διαστάσεων (q, p) ή $(q, \dot{q})$, στην περίπτωσή μας δύο. Η (θεσική) διάσταση του συστήματος, n, είναι το πλήθος των μεταβλητών $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Ο φασικός χώρος έχει διάσταση $2n$ και ο εκτεταμένος φασικός χώρος διάσταση $2n+1$.

Το αν θα υπάρξει χαοτική εξέλιξη στο παραπάνω σύστημα εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων B, ω_d, Q.

Για κάποιες τιμές των παραμέτρων, το εκκρεμές, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα στο οποίο σβήνει η μεταβατική κίνηση, ταλαντεύεται εκτελώντας περιοδική κίνηση με συχνότητες που είναι αρμονικές ή υποαρμονικές της ω_d. Για κάποιες άλλες τιμές των παραμέτρων η κίνηση είναι χαοτική.

Η μετάβαση από μη χαοτική σε χαοτική κίνηση ένεκα μεταβολής των παραμέτρων γίνεται κατά πολλούς τρόπους, και εξαρτάται κατά λεπτό τρόπο από τις τιμές των παραμέτρων. Είναι αντικείμενο μελέτης και σήμερα όπως είναι και όλη η επιστήμη της Μη Γραμμικής Δυναμικής.

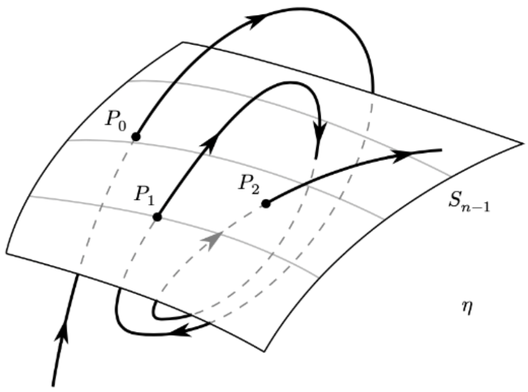
Η μελέτη της εξίσωσης του εξαναγκασμένου εκκρεμούς είναι σημαντική, διότι εκτός από την αξία της για τη μελέτη του χάους, η ίδια εξίσωση ισχύει και για άλλα φαινόμενα, όπως οι διεπαφές Josephson (Josephson junctions), ο ταλαντωτής VCO (voltage controlled oscillator, ταλαντωτής ελεγχόμενος από τάση).

11.3.1 Μερικά χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη της χαοτικής συμπεριφοράς

Για τη μελέτη της χαοτικής συμπεριφοράς, μερικά χρήσιμα εργαλεία και έννοιες είναι τα παρακάτω.

Α) Ο χώρος των φάσεων (φασικός χώρος) ή χώρος των καταστάσεων του συστήματος, με τη μαθηματική έννοια που είπαμε παραπάνω, $x_1, x_2, ..., x_n$, με διάσταση $n \geq 3$. Θα ασχοληθούμε εδώ με παραδείγματα για τα οποία $n = 3$ και $n = 4$.

Β) Η απεικόνιση Poincare (Poincare section, Poincare map) απλοποιεί την αναπαράσταση της τροχιάς στον χώρο των φάσεων ενός δυναμικού συστήματος. Ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση n, φανταζόμαστε έναν υπόχωρό του (μια υπερεπιφάνεια) διάστασης $n-1$. Ο υπόχωρος (υπερεπιφάνεια) είναι τέτοιος που μια τροχιά στον αρχικό χώρο τέμνει την υπερεπιφάνεια διάστασης $n-1$ σε διαδοχικά σημεία καθώς περνά ο χρόνος, σε διακριτές χρονικές στιγμές $t_1, t_2, t_3, \ldots$. Πρόκειται για απεικόνιση από ένα σημείο στο επόμενό του διαδοχικό σημείο, $\mathrm{P}(t_1) \to \mathrm{P}(t_2) \to \mathrm{P}(t_3) \to \ldots$. Βλέπε Σχήμα 11.21.



Σχήμα 11.21 *Απεικόνιση Poincare.*

Γ) Η ανάλυση Fourier δίνει τη φασματική κατανομή της χρονικής εξέλιξης (λέγεται και χρονοσειρά, time series) μιας δυναμικής μεταβλητής.

Δ) Τα διαγράμματα διακλάδωσης (bifurcation diagrams) δείχνουν τη μεταβολή ποιοτικών χαρακτηριστικών της δυναμικής του συστήματος καθώς μεταβάλλεται κάποια παράμετρός του. Αυτό βοηθά γιατί μπορεί να φανεί η μετάβαση από την κανονική κατάσταση στη χαοτική. Για παράδειγμα, τέτοιες ποιοτικές μεταβολές στην περίπτωση του εκκρεμούς, μπορεί να σημαίνει ότι ενώ για κάποιες τιμές των παραμέτρων μπορεί να έχει μόνο μια κίνηση αφού αποκατασταθεί το μόνιμο φαινόμενο, για λίγο διαφορετικές τιμές παραμέτρων, μπορεί να υπάρχουν δυο ή περισσότερες μόνιμες κινήσεις που να εξαρτώνται από διαφορετικές αρχικές συνθήκες, ή μπορεί η κίνηση να είναι μια αλλά με διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Ε) Οι εκθέτες Liapounov καθορίζουν πως δυο τροχιές με πολύ μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες μετά από κάποιο χρόνο και επί κάποιο μετέπειτα χρονικό διάστημα, αποκλίνουν μεταξύ τους. Στην περίπτωση του χάους οι τροχιές απομακρύνονται εκθετικά με τον χρόνο.

ΣΤ) Με απλά λόγια τα μορφοκλάσματα (φράκταλ, fractal), είναι πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα (μορφές) με λεπτή δομή σε αυθαίρετα μικρές κλίμακες. Συνήθως έχουν σε κάποιο βαθμό αυτοομοιότητα (selfsimilarity). Αυτό σημαίνει ότι αν μεγεθύνουμε ένα πολύ μικρό τμήμα του μορφοκλάσματος θα δούμε χαρακτηριστικά που θυμίζουν το συνολικό μορφόκλασμα. Μερικές φορές η ομοιότητα είναι ακριβώς και άλλες φορές είναι κατά προσέγγιση ή στατιστική ομοιότητα. Στις εικόνες του χάους εμφανίζονται τέτοιοι σχηματισμοί.

Ζ) Η διαστατικότητα (dimensionality) των μορφοκλασμάτων (φράκταλ) δεν είναι η συνήθης (ευκλείδεια) που εκφράζεται με ακέραιους αριθμούς (μηδέν ή θετικούς), 0,1,2,3,… αλλά εκφράζεται με θετικούς μη ακέραιους αριθμούς. Έχουμε έτσι μη ακέραιες διαστάσεις. Αυτό γίνεται κατανοητό με γενικεύσεις της έννοιας της διάστασης έτσι που για τα συνήθη γεωμετρικά (ευκλείδεια) σχήματα να οδηγεί στις γνωστές ακέραιες διαστάσεις ενώ για τα φράκταλς στις αντίστοιχες μη ακέραιες. Είναι ευνόητη η χρησιμότητα της έννοιας της διαστατικότητας στην περίπτωση του χάους, αφού υπάρχει μορφοκλασματική δομή.

Η) Διαλειπτότητα (intermittency). Αυτό το φαινόμενο εμφανίζεται κατά τη μετάβαση από κανονική κατάσταση σε χαοτική κατάσταση. Με απλά λόγια, ένα σύστημα μπορεί να παρουσιάζει για ένα διάστημα τιμών μιας παραμέτρου του κανονικές ταλαντώσεις των μεταβλητών του ως συναρτήσεις του χρόνου, καθώς η μεταβλητή μεταβάλλεται πέραν κάποιας τιμής, το σύστημα παρουσιάζει εκρήξεις χαοτικής συμπεριφοράς κατά ακανόνιστα διαστήματα και όσο η παράμετρος μεταβάλλεται μονότονα οι χαοτικές εκρήξεις πολλαπλασιάζονται.

11.3.2 Περιοδική κίνηση

Σε προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε κινήσεις στις οποίες οι τροχιές είναι κλειστές. Συγκεκριμένα, την κίνηση στο πρόβλημα του Kepler και την περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Στο πρόβλημα Kepler υπάρχουν δυο περιοδικότητες μια που σχετίζεται με την εξέλιξη στον χρόνο της ακτινικής πολικής συντεταγμένης και μια άλλη με την εξέλιξη στον χρόνο της πολικής γωνίας. Οι δυο αντίστοιχες συχνότητες είναι ίσες και έτσι η κίνηση είναι επαναλαμβανόμενη, δηλαδή είναι περιοδική.

Στο κεφάλαιο για τις μεταβλητές δράσης-γωνίας είδαμε ότι ένας βολικός τρόπος για την περιγραφή περιοδικής κίνησης είναι η χρήση της θεωρίας Hamilton-Jacobi για να μετασχηματιστεί η χαμιλτονιανή και να γίνει συνάρτηση κανονικών συντεταγμένων, της δράσης J , στη θέση της κανονικής ορμής, και της συζυγούς της συντεταγμένης w η οποία εξαρτάται γραμμικά από τον χρόνο, $w = \omega t + \beta$.

Ας περιοριστούμε σε χαμιλτονιανές που δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο, επομένως είναι σταθερές της κίνησης, περιγράφουν συντηρητικό σύστημα. Το σύστημα εκτελεί φραγμένη κίνηση. Αν γίνει κανονικός μετασχηματισμός μεταβλητών τέτοιος που όλες οι νέες συντεταγμένες θέσης (Q_i) είναι κυκλικές, δηλαδή δεν υπάρχουν στη νέα χαμιλτονιανή, τότε οι εξισώσεις Hamilton ολοκληρώνονται εύκολα και εισέρχονται $2n$ σταθερές της κίνησης που είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα έχουμε τη λύση

$$Q_i(t) = w_i(t) = \omega_i t + \beta_i, P_i(t) = P_i(0) - \alpha_i . \tag{11.127}$$

Όταν μπορεί να βρεθεί τέτοιος κανονικός μετασχηματισμός τότε η χαμιλτονιανή λέμε ότι είναι ολοκληρώσιμη.

Αυτή η λύση είναι όμοια με αυτή που συζητήθηκε στο κεφάλαιο για τις μεταβλητές δράσης-γωνίας. Οι συντεταγμένες $w(t)$ που μεταβάλλονται γραμμικά με τον χρόνο, πρέπει να είναι ορίσματα φραγμένων συναρτήσεων που μπορεί να είναι και περιοδικές με τον χρόνο.

Ξέρουμε ότι ο αρμονικός ταλαντωτής μπορεί με κατάλληλο κανονικό μετασχηματισμό να οδηγηθεί να εξαρτάται από κανονικές μεταβλητές, που κατά την εξέλιξη του συστήματος οι εξαρτήσεις τους από τον χρόνο είναι αυτές της Εξ. (11.127).

Αντιστρόφως, κάθε χαμιλτονιανή με μεταβλητές τα παραπάνω Q_i, P_i μπορεί να μετασχηματιστεί σε αρμονικό ταλαντωτή με την συνήθη χαμιλτονιανή.

Για $n = 2$ έχουμε δυο μη συζευγμένους αρμονικούς ταλαντωτές με χαμιλτονιανή

$$\begin{aligned}
&H = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 + \frac{p_2'^2}{2m_2} + \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 \\
&H = H_1 + H_2 = E_{\mathrm{T}} = \text{σταθερά} \\
&H_1 = E_1 = \text{σταθερά} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 = \frac{J_1 \omega_1}{2\pi} \\
&H_2 = E_2 = \text{σταθερά} = \frac{p_2'^2}{2m_2} + \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 = \frac{J_2 \omega_2}{2\pi} .
\end{aligned} \tag{11.128}$$

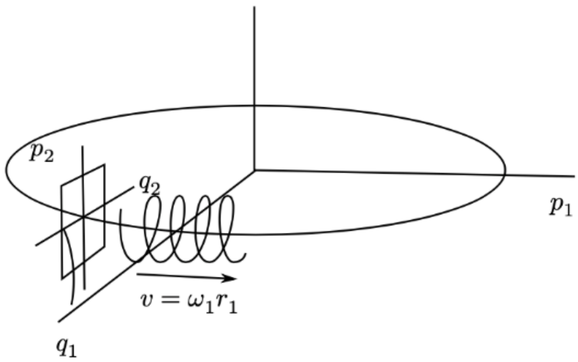
Εισαγάγαμε τις δυο δράσεις J_1, J_2 οι οποίες είναι σταθερές της κίνησης.

Για ευκολία στις γραφικές παραστάσεις, κάνουμε μετασχηματισμό σε κανονικοποιημένες μεταβλητές (αδιάστατες) οπότε ο κάθε ένας όρος του αθροίσματος της χαμιλτονιανής είναι

$$H_i = p_i^2 + q_i^2 = E_i,\ i = 1, 2. \tag{11.129}$$

Είναι ευνόητο ότι για δεδομένη ολική ενέργεια E_{T}, στον φασικό υπόχωρο q_1, p_1 θα έχουμε τροχιές που είναι κύκλοι ακτίνας $\sqrt{E_1}$. Ανάλογα ισχύουν για τροχιές στον υπόχωρο q_2, p_2. Δηλαδή, ξεχωριστά η καθεμιά από τις δυο κινήσεις στον χώρο q_1, p_1 και q_2, p_2 αντιστοίχως, είναι περιοδική με κλειστές τροχιές στον αντίστοιχο υπόχωρο, με διαφορετική συχνότητα. Αν η κίνηση θεωρηθεί ως μια κίνηση στον τετραδιάστατο συνολικό φασικό χώρο q_1, p_1, q_2, p_2, τότε γενικώς η κίνηση δεν παριστάνεται από μια κλειστή επαναλαμβανόμενη, περιοδική, τροχιά.

Για αυτό το σύστημα των δυο μη συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών, έχουμε την αναπαράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 11.22 , όπου έχουμε υποθέσει ότι $\omega_2 > \omega_1$.



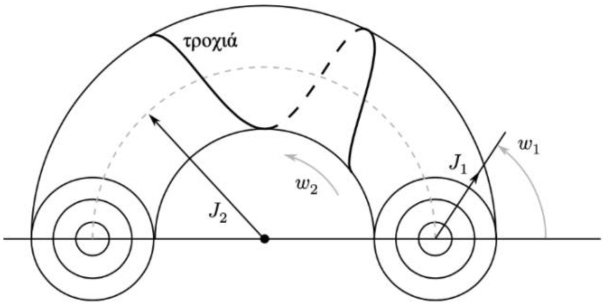
Σχήμα 11.22 *Κινήσεις των δυο μη συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών με συχνότητες $\omega_2 > \omega_1$.*

Στο Σχήμα αυτό φαίνεται η κυκλική κλειστή τροχιά (μεγάλης ακτίνας), στον υπόχωρο q_1, p_1 η οποία διαγράφεται με τη συχνότητα ω_1. Στο επίπεδο q_2, p_2, καρτεσιανές συντεταγμένες, το οποίο περιστρέφεται με κυκλική συχνότητα ω_1 περί τον κατακόρυφο άξονα, γίνεται η ανεξάρτητη της προηγούμενης κίνηση, και αν σχεδιάσουμε την τροχιά της σε αυτό τον υπόχωρο, θα είναι κλειστή, κυκλική, με τη συχνότητα ω_2 (με μικρή ακτίνα). Στο σχήμα φαίνεται η συνολική κίνηση, που είναι ελικοειδής τροχιά και βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια που είναι ένα τοροειδές (δακτύλιος), ένας δισδιάστατος τόρος. Αν ο λόγος $\frac{\omega_2}{\omega_1} = n$ είναι ακέραιος αριθμός, τότε η συνολική τροχιά θα είναι κλειστή, επαναλαμβανόμενη και θα κλείνει μετά από μια κλειστή διαδρομή στο επίπεδο q_1, p_1 μετά από κάθε χρονικό διάστημα, περίοδο, $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Αν ο λόγος είναι

ρητός αριθμός (δηλαδή λόγος δυο ακεραίων), και σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε κλειστή τροχιά αλλά αυτό θα γίνεται διαγράφοντας στον υπόχωρο q_1, p_1 περισσότερες από μια κλειστή διαδρομή. Η συνολική τροχιά είναι σε αυτές τις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενη (κλειστή), περιοδική. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε συντονισμό. Αν ο λόγος συχνοτήτων είναι άρρητος αριθμός τότε η συνολική τροχιά δεν κλείνει ποτέ, όσο περνά ο χρόνος θα τείνει να καλύψει όλη την επιφάνεια του τόρου που τότε λέγεται αναλλοίωτος τόρος, χωρίς ποτέ να περνά από το ίδιο σημείο περισσότερες από μια φορές. Θα περνά όλο και περισσότερα πιο κοντά από οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας του (αναλλοίωτου) τόρου. Αυτή η κίνηση είναι φραγμένη αλλά δεν είναι ακριβώς περιοδική, είναι ημιπεριοδική. Αυτά εμπεριέχονται στα όσα είπαμε στα προηγούμενα περί περιοδικών κινήσεων κ.λπ.

Μπορεί να κάνουμε επέκταση σε περισσότερες διαστάσεις (πράγμα που ισοδυναμεί με περισσότερους των δυο μη συζευγμένους αρμονικούς ταλαντωτές). Αν έχουμε τρεις, τότε η κίνηση θα περιορίζεται πάνω σε έναν τόρο 3 διαστάσεων μέσα σε φασικό χώρο 6 διαστάσεων $(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3)$. Είναι ευνόητο ότι η διάσταση του τόρου είναι μικρότερη από τη συνολική διάσταση του χώρου των φάσεων διότι διατηρείται η ενέργεια πράγμα που οδηγεί σε δεσμευτικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του χώρου των φάσεων. Πράγματι για την τελευταία περίπτωση οι δεσμευτικές σχέσεις είναι τρεις, για τις τρεις ενέργειες E_1, E_2, E_3 άρα έχουμε διάσταση του τόρου ίση με 6-3=3. Στην προηγούμενη περίπτωση των δυο ταλαντωτών έχουμε διάσταση του τόρου ίση με 4-2=2. Γενικώς για n ταλαντωτές, θα έχουμε διάσταση τόρου ίση με $2n - n = n$.

Στο Σχήμα 11.23 δίνουμε μιαν άλλην αναπαράσταση του ίδιου συστήματος των δυο μη συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών μετά τον μετασχηματισμό στις συντεταγμένες γωνίας-δράσης, φαίνεται το μισό οικογένειας δισδιάστατων τόρων, μισά «κουλούρια». Η αναπαράσταση γίνεται τώρα πολικές συντεταγμένες. Είναι φανερό ότι η δράση J_2 η οποία όπως και η J_1 είναι σταθερά της κίνησης για σταθερά ενέργεια E_2, E_1 αντιστοίχως, προφανώς και $E = E_1 + E_2$, μπορεί να ληφθεί ως παράμετρος που χαρακτηρίζει την οικογένεια των τόρων πάνω στους οποίους υπάρχουν οι τροχιές του συστήματος.



Σχήμα 11.23 *Οι δυο ασύζευκτοι αρμονικοί ταλαντωτές σε συντεταγμένες γωνίας-δράσης.*

11.3.3 Ολοκληρωσιμότητα δυναμικών συστημάτων

Θα πούμε δυο λόγια για την ολοκληρωσιμότητα ή μη ολοκληρωσιμότητα δυναμικών συστημάτων, που σχετίζεται με το είδος των λύσεών τους. Θα αναφερθούμε κυρίως σε χαμιλτονιανά συστήματα με n (θεσικούς) βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή με διάσταση του συνήθους φασικού χώρου $2n$. Αυτά έχουν χαμιλτονιανή της μορφής $H = H(q, p, t),\ q = (q_1, q_2, ..., q_n), p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, οπότε για το σύστημα ισχύουν οι $2n$ (κανονικές) εξισώσεις Hamilton, δηλαδή οι

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial p_r} \quad r = 1, 2, ..., n. \tag{11.130}$$

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε το εξής θεώρημα.

Έστω ότι ένα τέτοιο χαμιλτονιανό σύστημα έχει n ανεξάρτητα ολοκληρώματα της κίνησης (είναι δυναμικές συναρτήσεις) που παριστάνονται με

$$I_i = I_i(q, p, t) = c_i = \text{σταθερές} \ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{11.131}$$

Επίσης ισχύει για την ιακωβιανή ορίζουσα

$$\det\left|\frac{\partial I_i}{\partial p_j}\right| \neq 0 \cdot \tag{11.132}$$

Επιπλέον τα ολοκληρώματα, είναι σε ενέλιξη (involution) μεταξύ τους, δηλαδή οι παρακάτω αγκύλες Poisson είναι μηδέν

$$\left[I_i, I_j\right] = 0 \,. \tag{11.133}$$

Αν ισχύουν τα παραπάνω, αποδεικνύεται ότι αυτό το χαμιλτονιανό δυναμικό σύστημα είναι ολοκληρώσιμο, και μπορεί να επιλυθεί με απλές ολοκληρώσεις (integrable by quadrature). Το σύστημα λέγεται ολοκληρώσιμο κατά Liouville ή απλά ολοκληρώσιμο. Οι λύσεις είναι κανονικές και δεν παρουσιάζουν το φαινόμενο της χαοτικής συμπεριφοράς. Αν το σύστημα δεν είναι ολοκληρώσιμο με την παραπάνω έννοια μπορεί να έχει κανονικές λύσεις αλλά έχει και χαοτικές λύσεις.

Αυτό είναι το θεώρημα Liouville-Poincare που μπορεί να ισχύει για αυτόνομα και για μη αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα. Αν το σύστημα είναι αυτόνομο, ένα ολοκλήρωμα της κίνησης είναι η χαμιλτονιανή που μερικές φορές συμπίπτει με τη συνάρτηση της ενέργειας του συστήματος, είναι η ενέργεια του συστήματος.

Είναι ευνόητο ότι όλα τα αυτόνομα χαμιλτονιανά συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας είναι ολοκληρώσιμα. Αυτό ισχύει διότι έχουν τουλάχιστο ένα ολοκλήρωμα κίνησης, τη χαμιλτονιανή τους, οπότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι ολοκληρώσιμα.

Δεν υπάρχει γενικός τρόπος που να μας οδηγεί στο αν ένα σύστημα είναι ολοκληρώσιμο ή όχι. Έχουν μελετηθεί μόνο επιμέρους περιπτώσεις.

Το σύστημα τριών σωμάτων (υλικών σημείων) τα οποία έλκονται μεταξύ τους ένεκα της βαρυτικής δύναμης δεν είναι ολοκληρώσιμο.

11.3.4 Διαταραχές και το θεώρημα Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Στη θεωρία διαταραχών για πραγματικά συστήματα της Μηχανικής, συνήθως μπορούμε να εκφράσουμε κατά προσέγγιση τη δυναμική ενός συστήματος με μια χαμιλτονιανή για την οποία το πρόβλημα είναι ολοκληρώσιμο (ολοκληρώσιμη χαμιλτονιανή κατά Liouville), δηλαδή έχει κανονική λύση. Το πραγματικό σύστημα μπορεί να εκφράζεται (ακριβώς ή κατά προσέγγιση) από μιαν άλλη χαμιλτονιανή η οποία είναι ένα άθροισμα δυο όρων, ο πρώτος είναι η παραπάνω χαμιλτονιανή και ο δεύτερος ένας μικρός όρος ο οποίος την κάνει γενικώς μη ολοκληρώσιμη, έτσι προκύπτει η διαταραγμένη χαμιλτονιανή. Σύμφωνα με την ανάλυση διαταραχών που έχουμε αναφέρει, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει επαναληπτική μέθοδο ευρέσεως λύσης η οποία να είναι κανονική και ελπίζει να είναι όλο και καλύτερη προσέγγιση της λύσης του πραγματικού προβλήματος. Δυστυχώς τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Παρόλο που με αυτή τη μέθοδο βρίσκονται λύσεις σε διάφορα προβλήματα με μεγάλη ακρίβεια, χρειάζεται έλεγχος της συμπεριφοράς της λύσης αν είναι κανονική ή χαοτική, καθώς η τάξη της επαναληπτικής διαδικασίας αυξάνεται. Με άλλα λόγια, τίθεται το ερώτημα: αν η διαταραχή είναι πολύ κοντά στην αδιατάρακτη χαμιλτονιανή, ισχύει το ίδιο για τη λύση για την αδιατάρακτη και τη λύση για τη διαταραγμένη καθώς προχωρούμε την επαναληπτική διαδικασία;

Αν οι δυο λύσεις είναι κοντά τότε έχουμε κανονική (μη χαοτική) λύση στο διαταραγμένο πρόβλημα, αλλιώς έχουμε μη κανονική, δηλαδή χαοτική λύση.

Δηλαδή, ενδιαφέρει αν η διαταραγμένη λύση είναι ευσταθής και αν με την εξέλιξη του χρόνου μένει κοντά στην αδιατάρακτη λύση. Το θεώρημα Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) δίνει απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Δίνουμε μια σχετικά απλή διατύπωση του θεωρήματος KAM.

Έστω ότι η κίνηση που προκύπτει από μια ολοκληρώσιμη χαμιλτονιανή, είναι περατωμένη (φραγμένη) περιοδική με την έννοια που αναφέραμε στο κεφάλαιο για τις μεταβλητές δράσης-γωνίας. Το σύστημα διαταράσσεται επειδή στη χαμιλτονιανή προστίθεται ένας όρος ο οποίος κάνει τη χαμιλτονιανή μη ολοκληρώσιμη. Αν ισχύουν οι παρακάτω δυο συνθήκες,

(α) η διαταραχή είναι μικρή, και

(β) οι λόγοι των συχνοτήτων της αρχικής ολοκληρώσιμης χαμιλτονιανής δεν είναι λόγοι ακεραίων αριθμών, δηλαδή για τιμές μακριά από συντονισμούς,

τότε η κίνηση παραμένει περιορισμένη πάνω σε έναν από τους αναλλοίωτους N -διάστατους τόρους (N-τορος ή N-δακτύλιος), εκτός των περιπτώσεων που αντιστοιχούν σε ένα αμελητέο σύνολο από αρχικές συνθήκες για τις οποίες προκύπτει μια «ακανόνιστη» τροχιά πάνω στην ενεργειακή επιφάνεια. Οι αναλλοίωτοι τόροι του διαταραγμένου συστήματος είναι οι ελαφρώς διαταραγμένοι αναλλοίωτοι τόροι του αδιατάρακτου συστήματος. Είδαμε στη θεωρία διαταραχών μια απλή περίπτωση δισδιάστατου αναλλοίωτου τόρου (δακτυλίου) για τους δυο μη συζευγμένους αρμονικούς ταλαντωτές, αδιατάρακτο σύστημα.

Αυτά σημαίνουν ότι οι διαταραγμένες τροχιές θα είναι ευσταθείς, με μικρές μεταβολές στο σχήμα τους, και θα είναι κοντά στις μη διαταραγμένες τροχιές. Οι εξαιρέσεις είναι τόσο «λίγες» που έχουν πολύ μικρή επιρροή στις διάφορες εφαρμογές του θεωρήματος. Θα αναφερθούμε μόνο στο απλό σύστημα με 2 βαθμούς ελευθερίας, όπου υπάρχουν δυο χαρακτηριστικές συχνότητες ω_1,ω_2 το θεώρημα KAM εγγυάται ευστάθεια (δηλαδή τη διατήρηση ενός αναλλοίωτου τόρου) στο μη ολοκληρώσιμο διαταραγμένο δυναμικό σύστημα, αν επαληθεύεται η ανισότητα

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{p}{r}\right|>K(\varepsilon)r^{-5/2}. \tag{11.134}$$

Όπου p,r είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι άρα $\frac{p}{r}$ είναι κάθε ρητός αριθμός και $K(\varepsilon)$ είναι (απροσδιόριστη) θετική ποσότητα τάξης μεγέθους ε, για την οποία ισχύει $K(0)=0$. Γενικώς, στην περίπτωση πολλών βαθμών ελευθερίας, n, η συνθήκη συντονισμού γράφεται $\sum_{i=1}^{n}k_i\omega_i=0$. Κατά τη διαδικασία της επαναληπτικής μεθόδου η έκφραση που μηδενίζεται κατά τον συντονισμό απαντά στον παρονομαστή των όρων της σειράς που προσεγγίζει τις μεταβλητές του προβλήματος οπότε είναι ευνόητο ότι αυτό μπορεί να οδηγήσει σε απειρισμούς έτσι που η αντίστοιχη σειρά να μην συγκλίνει. Αυτό λέγεται πρόβλημα των μικρών διαιρετών.

Όταν δεν ισχύει το θεώρημα KAM μπορεί να εμφανιστεί χάος. Αυτό που συμβαίνει είναι ένεκα της διαταραχής μπορεί να καταστρέφονται κάποιοι αναλλοίωτοι τόροι και αυτό να οδηγεί σε λύσεις χαοτικές, μη κανονικές. Είναι αξιοσημείωτο να τονίσουμε ότι οι λύσεις με «ολική» περιοδικότητα είναι υπερευαίσθητες και «καταστρέφονται» από τη διαταραχή, ενώ οι ημιπεριοδικές είναι λιγότερο «ευαίσθητες» και μπορεί να παραμένουν ως κανονικές λύσεις του διαταραγμένου συστήματος.

11.3.5 Το σύστημα Henon- Heiles

Αυτό το αυτόνομο δυναμικό χαμιλτονιανό σύστημα επινοήθηκε από τους Henon και Heiles για την απλοποιημένη περιγραφή της κίνησης αστέρος περί το γαλακτικό κέντρο υποθέτοντας επίπεδη κίνηση. Πρόκειται για δυναμικό σύστημα με δυο (θεσικούς) βαθμούς ελευθερίας. Γενικώς η χαμιλτονιανή περιέχει όρους ίδιους με αυτούς που υπάρχουν στην περίπτωση δυο ασύζευκτων αρμονικών ταλαντωτών, με ίσες μάζες, και γενικώς με διαφορετικές συχνότητες (αυτό είναι το αδιατάρακτο σύστημα), με επιπλέον όρους (διαταραχή) στην τρίτη δύναμη ως προς τις καρτεσιανές μεταβλητές θέσης.

Κάνοντας κατάλληλη επιλογή μονάδων καταλήγουμε στην αδιάστατη, γενική χαμιλτονιανή, σε καρτεσιανές συντεταγμένες $(1\to x, 2\to y)$

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}\left(Ax^2+By^2\right)+Dx^2y-\frac{1}{3}Cy^3. \tag{11.135}$$

Τα A,B,C,D, είναι σταθερά και ισχύουν $\omega_1^2=A>0,\omega_2^2=B>0$.

Επειδή η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου είναι σταθερά της κίνησης. Σε αυτή την περίπτωση προφανώς ισούται και με την ενέργεια άρα

$$E=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}\left(Ax^2+By^2\right)+Dx^2y-\frac{1}{3}Cy^3=\text{σταθερά}. \tag{11.136}$$

Δεν είναι γνωστό το σύνολο των τιμών των παραμέτρων A,B,C,D για τις οποίες το χαμιλτονιανό αυτό σύστημα είναι (πλήρως) ολοκληρώσιμο, δηλαδή να έχει μόνο μη χαοτικές (κανονικές) λύσεις. Εφόσον είναι χαμιλτονιανό για να είναι ολοκληρώσιμο πρέπει εκτός από την συνάρτηση της ενέργειας που είναι σταθερά της κίνησης, να υπάρχει άλλη μια δυναμική συνάρτηση ανεξάρτητη της πρώτης που να είναι σταθερά της κίνησης. Από ό, τι έχει δημοσιευτεί φαίνεται ότι για τις παρακάτω περιπτώσεις το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο.

$$\begin{aligned}&1)\ D/C=0\\&2)\ D/C=-1,\ A/B=1\\&3)\ D/C=-\frac{1}{6}\\&4)\ D/C=-\frac{1}{16},A/B=\frac{1}{6}.\end{aligned}\tag{11.137}$$

Για την περίπτωση 2), με $D=1, A=B=1, C=-1$, έχει βρεθεί ότι υπάρχει εκτός της ενέργειας και δεύτερο ανεξάρτητο ολοκλήρωμα της κίνησης, το

$$xy+\frac{1}{3}\dot{x}^3+\dot{x}\dot{y}^2+\dot{x}\dot{y}=c_2\,. \tag{11.138}$$

Οπότε το σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο.

Μπορούμε να χειριστούμε αυτή την περίπτωση με τον παρακάτω τρόπο ώστε να βρούμε την κανονική λύση του. Η χαμιλτονιανή είναι

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+x^2y+\frac{1}{3}y^3\,. \tag{11.139}$$

Αυτή οδηγεί τελικώς στις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=-x-2xy\\ \ddot{y}&=-x^2-y^2-y.\end{aligned}\tag{11.140}$$

Με τον μετασχηματισμό $X=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}},Y=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$

Βρίσκουμε τις εξισώσεις

$$\ddot{X}=-X-\sqrt{2}X^2,\ddot{Y}=-Y+\sqrt{2}Y^2. \tag{11.141}$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε δυο μη γραμμικές αποζευγμένες εξισώσεις που ολοκληρώνονται και έχουν κανονική λύση. Πράγματι, τις πολλαπλασιάζουμε επί $\dot{X},\dot{Y}$ αντιστοίχως, ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε τα ολοκληρώματα κίνησης

$$f_1(\dot{X},X)=\frac{1}{2}\dot{X}^2+\frac{1}{2}X^2+\frac{\sqrt{2}}{3}X^3=c_1,\ f_2(\dot{Y},Y)=\frac{1}{2}\dot{Y}^2+\frac{1}{2}Y^2-\frac{\sqrt{2}}{3}Y^3=c_2. \tag{11.142}$$

Αυτά τα ολοκληρώματα μαζί με το ολοκλήρωμα της ενέργειας, στις νέες μεταβλητές, δεν είναι και τα τρία ανεξάρτητα.

Αν λύσουμε ως προς $\dot{X}$ και $\dot{Y}$ αντιστοίχως, και χωρίσουμε τις μεταβλητές X,t , αντιστοίχως τις Y,t βρίσκουμε τη λύση με ολοκλήρωση.

Υπάρχουν διάφορες διαδικασίες για να μελετηθεί το φαινόμενο του χάους που μπορεί να υπάρχει στο παραπάνω γενικό σύστημα. Θα ακολουθήσουμε την πιο συνήθη πρακτική και θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $A=B=C=D=1$ η οποία είναι αυτή που έχει πολύ μελετηθεί, δίνοντας διάφορες τιμές της ενέργειας και διάφορες τιμές στις αρχικές συνθήκες για κάθε μια ξεχωριστή ενέργεια. Η χαμιλτονιανή η οποία είναι και σταθερά της κίνησης είναι

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \tag{11.143}$$

Για αυτή την περίπτωση δεν έχει βρεθεί δεύτερη σταθερά της κίνησης, πράγμα που δηλώνει ότι μπορεί να μην υπάρχουν μόνο κανονικές λύσεις για το σύστημα αλλά και χαοτικές. Η χαοτική συμπεριφορά μπορεί να αναδειχτεί προχωρώντας σε λύσεις με αριθμητικές μεθόδους όπως θα δούμε παρακάτω.

Ο φασικός χώρος έχει τέσσερις διαστάσεις x, p_x, y, p_y. Εφόσον κατά την (πραγματική) κίνηση διατηρείται η ενέργεια, αυτά τα τέσσερα φυσικά μεγέθη δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αλλά παίρνουν τιμές που βρίσκονται σε έναν υπόχωρο τριών διαστάσεων. Η ενέργεια εξαρτάται από τις αρχικές τιμές των τεσσάρων αυτών μεγεθών, δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(p_{0x}^2 + p_{0y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_0^2 + y_0^2\right) + x_0^2 y_0 - \frac{1}{3}y_0^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = \text{σταθερά}. \end{aligned} \tag{11.144}$$

Οι κανονικές εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x \\ \dot{y} &= p_y \\ \dot{p}_x &= -x - 2xy \\ \dot{p}_y &= -y - x^2 + y^2 \\ &\text{ή} \\ \ddot{x} &= -x - 2xy \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2. \end{aligned} \tag{11.145}$$

Παρόλο που αυτές οι εξισώσεις φαινομενικά διαφέρουν λίγο από αυτές της Εξ. (11.140), έχουν και λύσεις που δεν είναι κανονικές αλλά είναι χαοτικές. Ενδιαφερόμαστε για φραγμένες λύσεις, δηλαδή που δεν πάνε στο άπειρο. Η δυναμική ενέργεια και η κινητική ενέργεια είναι αντιστοίχως

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ V &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \end{aligned} \tag{11.146}$$

Δίνουμε τη χαμιλτονιανή και τη δυναμική και κινητική ενέργεια σε επίπεδες σφαιρικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \sin(3\theta) \\ V &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \sin(3\theta) \\ T &= \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2}. \end{aligned} \tag{11.147}$$

Στην πολική μορφή είναι εύκολο να δειχθεί ότι για σταθερή τιμή της δυναμικής ενέργειας το r παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \theta = \dfrac{7\pi}{6}, \theta = \dfrac{11\pi}{6}$ και ελάχιστη τιμή όταν

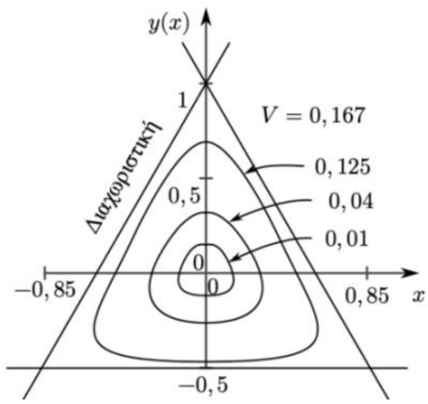
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}, \theta = \frac{9\pi}{6}.$$

Όταν για τη δυναμική ενέργεια ισχύει $V \leq \dfrac{1}{6}$, τότε οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι κλειστές. Το Σχήμα 11.24 δείχνει διάφορες ισοδυναμικές στον χώρο (x, y). Όσο πιο κοντά στο κέντρο είναι οι ισοδυναμικές τόσο πιο πολύ πλησιάζουν τον κύκλο, διότι οι μη γραμμικοί όροι στη δυναμική ενέργεια γίνονται όλο και μικρότεροι οπότε η δυναμική ενέργεια τείνει να είναι αυτή των δυο μη συζευμένων απλών αρμονικών ταλαντωτών, $V = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, της οποίας πράγματι η κάθε ισοδυναμική είναι κύκλος.

Το τρίγωνο είναι το σύνορο, η διαχωριστική, μεταξύ κλειστών ισοδυναμικών οι οποίες είναι στο εσωτερικό του τριγώνου και ανοιχτών οι οποίες είναι στο εξωτερικό του και εκτείνονται μέχρι το άπειρο. Οι ισοδυναμικές στο εξωτερικό δεν φαίνονται σε αυτό το σχήμα. Το δυναμικό είναι θετικά ορισμένο οπότε $V \leq E, T \leq E$.

Η πρώτη εξίσωση σημαίνει ότι αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια είναι δεδομένη, $E \leq \dfrac{1}{6}$, τότε επειδή οι ισοδυναμικές είναι κλειστές, όποια τροχιά ξεκίνησε μέσα στο εσωτερικό της ισοδυναμικής καμπύλης για την οποία ισχύει $V = E$, αυτή θα παραμείνει στον χώρο του εσωτερικού. Η δεύτερη βάζει περιορισμό στην επιτρεπόμενη κινητική ενέργεια. Οι δυο σχέσεις οδηγούν στο ότι αν $E \leq \dfrac{1}{6}$, τότε η κίνηση είναι περιορισμένη στον τετραδιάστατο φασικό χώρο. Δηλαδή σε αυτές τις περιπτώσεις η κίνηση είναι φραγμένη, περιοδική ή ημιπεριοδική ή χαοτική. Όταν $E > \dfrac{1}{6}$, στο εξωτερικό του παραπάνω τριγώνου, η κίνηση δεν είναι φραγμένη.

Θα ασχοληθούμε με την κίνηση στο εσωτερικό.



Σχήμα 11.24 *Διάφορες ισοδυναμικές για το σύστημα Henon-Heiles.*

Θα φτιάξουμε γραφήματα των σημείων στα οποία η τροχιά συναντά το «επίπεδο» $y, \dot{y}$ (δισδιάστατος υπόχωρος του τετραδιάστατου φασικού χώρου), κάθε χρονική στιγμή t_i για την οποία $x(t_i) = 0$. Αυτή είναι μια τομή (απεικόνιση) Poincare.

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής: Διαλέγουμε την ενέργεια, $E \leq \dfrac{1}{6}$. Στη συνέχεια θέτουμε $x = 0$ στη σχέση για την ενέργεια Εξ. (11.144) και συγχρόνως θεωρούμε ότι $\dot{x} = p_x, \dot{y} = p_y$, οπότε στην πραγματικότητα αντί για τη χαμιλτονιανή αναφερόμαστε στην ενεργειακή συνάρτηση, συνήθως δεν είναι κάποιος πολύ αυστηρός με την ορολογία σε αυτή την περιοχή της Δυναμικής. Ξεκινούμε από την Εξ. (11.143) και την μετατρέπουμε στην

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x^2y-\frac{1}{3}y^3. \qquad (11.148)$$

Διαλέγουμε τις αρχικές τιμές $y_1, \dot{y}_1$ ως αρχικές τιμές για τον υπολογισμό. Οι τιμές αυτές πρέπει να είναι μέσα στα όρια που καθορίζονται από τη σχέση που προκύπτει από την Εξ. (11.148) αν θέσουμε $x=0, \dot{x}=0$, δηλαδή την

$$E=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3. \qquad (11.149)$$

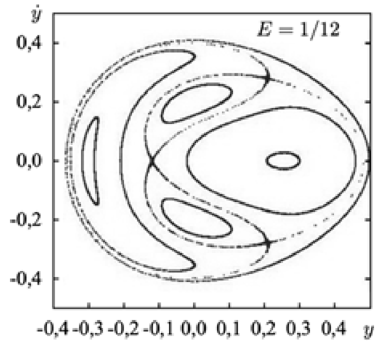
Στη συνέχεια υπολογίζεται η αρχική ταχύτητα $\dot{x}_1$ από την Εξ. (11.148) με $x=0$. Δηλαδή ισχύει

$$\dot{x}_1=\left(2E-\dot{y}_1^2-y_1^2+\frac{2}{3}y_1^3\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (11.150)$$

Με αριθμητική λύση των εξισώσεων (11.145) καταλήγουμε σε μια ακολουθία σημείων στην επιφάνεια $(y,\dot{y})$ με $x=0$. Τα σημεία είναι $\left(y_1(t_1),\dot{y}_1(t_1)\right),\left(y_2(t_2),\dot{y}_2(t_2)\right),\left(y_3(t_3),\dot{y}_3(t_3)\right),\ldots$. Έχουμε δηλαδή μια τομή (απεικόνιση) Poincare.

Τα σημεία υπολογίζονται για δεδομένη ενέργεια E και δεδομένες αρχικές τιμές για τα $y_1, \dot{y}_1$ $(x_1=0)$
.

Το Σχήμα 11.25 αντιστοιχεί σε ενέργεια $E=\dfrac{1}{12}$ και οι διάφορες καμπύλες (κλειστές τροχιές) στον δισδιάστατο αυτό υπόχωρο του χώρου των φάσεων. Η κάθε μια τροχιά προκύπτει από ένα ζευγάρι διαφορετικών για την κάθε μια τροχιά, αρχικών τιμών $\left(y_1,\dot{y}_1\right)$. Σημειώνουμε ότι τα σημεία που υπολογίζονται δεν είναι διαδοχικά το ένα στο άλλο, αλλά όσο προχωρά η διαδικασία γεμίζουν πυκνά την αντίστοιχη τροχιά.



Σχήμα 11.25 *Απεικόνιση Poincare σε δισδιάστατο φασικό χώρο για το σύστημα Henon-Heiles,* $E=1/12$.

Στο μέσον των τεσσάρων μικρών (κανονικών) τροχιών-βρόχων υπάρχουν τέσσερα σημεία ισορροπίας που δεν φαίνονται στο σχήμα. Αυτά είναι σημεία ευσταθούς ισορροπίας. Τα τρία σημεία όπου η άλλη τροχιά, που δεν έχει σχήμα βρόχου, τέμνει τον εαυτό της είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας. Εξυπακούεται ότι αλλάζοντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε πλήθος από τέτοιες διαφορετικές τροχιές που είναι σαν να καλύπτουν όλον τον επιτρεπόμενο χώρο.

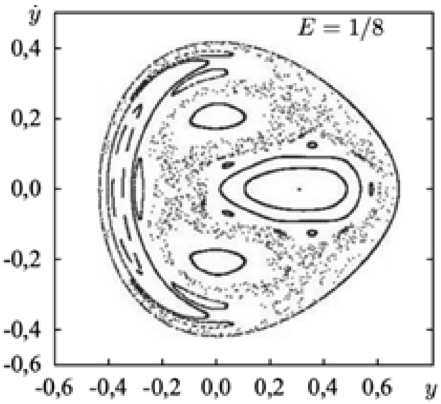
Για δεδομένη ενέργεια E, το εσωτερικό και το περίγραμμα του επιτρεπόμενου χώρου καθορίζεται από τη σχέση (11.149), δηλαδή

$$E \geq \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3. \qquad (11.151)$$

Από ένα τέτοιο διάγραμμα, για αυτή τη σχετικά μικρή ενέργεια, εκ πρώτης όψεως φαίνεται σαν το σύστημα να είναι κανονικό, φαίνεται να έχει κανονικές λύσεις χωρίς ένδειξη για χαοτική συμπεριφορά.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση όπου έχουμε για την ενέργεια $E = \frac{1}{8}$.

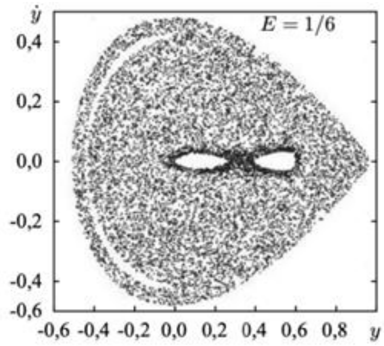
Η κατάσταση φαίνεται να αλλάζει δραματικά. Για διάφορες αρχικές συνθήκες, πάντοτε $x = 0$, βρίσκουμε την τομή Poincare που φαίνεται στο Σχήμα 11.26.



Σχήμα 11.26 *Απεικόνιση Poincare σε δισδιάστατο φασικό χώρο για το σύστημα Henon-Heiles,* $E = 1/8$.

Εξακολουθούμε να έχουμε ευσταθείς (κανονικές) τροχιές (βρόχους) γύρω από κάθε ευσταθές σταθερό σημείο (ή σημείο ισορροπίας) που δεν φαίνονται στο σχήμα. Όμως αυτές οι τροχιές τώρα είναι φανερό ότι δεν καλύπτουν όλο τον επιτρεπόμενο χώρο. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μεμονωμένα σημεία σκεδασμένα στον χώρο τα οποία δεν μπορεί να συνδεθούν με μια συνεχή τροχιά. Καθώς η διαδικασία της αριθμητικής λύσης προχωρεί, τα σημεία αυτά που αντιστοιχούν στην ίδια «τροχιά» (ίδια αρχική συνθήκη, $y_1, \dot{y}_1$) εμφανίζονται ακανόνιστα από τη μια θέση στην άλλη, πρόκειται για χαοτικές τροχιές. Τα πράγματα είναι ακόμη πιο πολύπλοκα. Για παράδειγμα, οι πέντε μικροί βρόχοι στα δεξιά του διαγράμματος ανήκουν στην ίδια τροχιά (ίδιες αρχικές τιμές), όμως τα σημεία που υπολογίζονται κατά την αριθμητική ανάλυση, «πηδούν» από τον έναν βρόχο στον άλλον γεμίζοντάς τους με σημεία. Αυτοί οι βρόχοι λέγεται ότι αποτελούν μιαν αλυσίδα νησίδων (chain of islands). Το πλήθος των νησίδων (ξεχωριστών βρόχων) σε μια αλυσίδα μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Ο κανόνας είναι πως οι διαστάσεις (έκταση) της νησίδας μικραίνουν καθώς το πλήθος των νησίδων ανά αλυσίδα μεγαλώνει. Γενικώς μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος νησίδων και αλυσίδων. Το σύνολο των νησίδων είναι παντού πυκνό. Όμως οι νησίδες δεν καλύπτουν όλη την επιφάνεια, υπάρχει μια θάλασσα μεταξύ των νησίδων μέσα στην οποία υπάρχει (χαοτική) τροχιά που την καλύπτει πυκνά σε όλα τα σημεία της. Αυτού του είδους οι τροχιές λέγονται εργοδικές τροχιές.

Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι εικασίες που βγαίνουν από την αριθμητική εξέταση του συστήματος, η βεβαιότητα για αυτά μπορεί να προέλθει μόνο από μαθηματικές αποδείξεις.Το Σχήμα 11.27 δείχνει την κατάσταση για ακόμη μεγαλύτερη ενέργεια, $E = \frac{1}{6}$, δηλαδή για τη μέγιστη ενέργεια όπου οι τροχιές είναι φραγμένες.

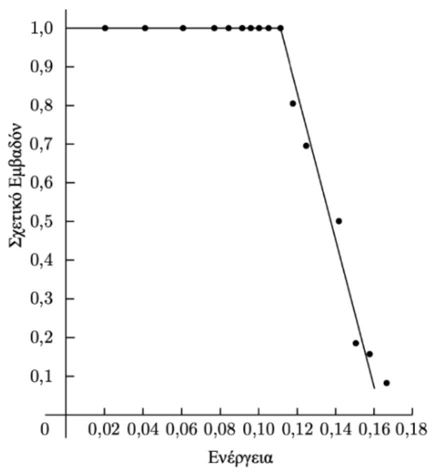


Σχήμα 11.27 *Απεικόνιση Poincare σε δισδιάστατο φασικό χώρο για το σύστημα Henon-Heiles,* $E = 1/6$.

Εδώ η εξωτερική γραμμή, το περίγραμμα, είναι αυτή που αντιστοιχεί στην Εξ. (11.149). Όλα τα διάσπαρτα, μεμονωμένα, σημεία ανήκουν σε μια χαοτική τροχιά και φαίνεται σαν αυτή να είναι εργοδική τροχιά που γεμίζει σχεδόν όλο τον χώρο. Οι δυο ομάδες κλειστών τροχιών του Σχήματος 11.26 που βρίσκονται πάνω στον άξονα $\dot{y}$, δηλαδή με $y \approx 0$, έχουν εξαφανιστεί και δεν εμφανίζεται κάποιο απομεινάρι τους στο Σχήμα 11.27, πιθανόν διότι τα σημεία ισορροπίας στα κέντρα τους από ευσταθή έγιναν ασταθή. Οι άλλες δυο ομάδες κλειστών τροχιών του σχήματος 11.26 που βρίσκονται στις περιοχές με $y < 0$ και $y > 0$ έχουν εκφυλιστεί στο Σχήμα 11.27, σε μια αλυσίδα από δυο νησίδες πάνω στον άξονα y, δηλαδή σε θέσεις με $\dot{y} \approx 0$. Ίσως υπάρχουν πολλές νησίδες που όμως είναι πολύ μικρών διαστάσεων και δεν φαίνονται στο σχήμα. Υπάρχει και ο σχηματισμός με μορφή ∞ (οριζόντιο 8), περίπου στη μέση του διαγράμματος, με σημαντική διασπορά περί το ∞. Αυτή είναι μια τροχιά διαφορετικού είδους, είναι κάτι μεταξύ κλειστής τροχιάς και εργοδικής τροχιάς.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις δεν μπορεί κάποιος να συμπεράνει στα σίγουρα ότι το σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο για μικρές τιμές της ενέργειας και μη πλήρως ολοκληρώσιμο για μεγάλες τιμές της ενέργειας. Ίσως και για μικρές τιμές της ενέργειας να υπάρχουν πολύ μικρές περιοχές με χαοτικές τροχιές που δεν είναι εύκολο να φανούν. Ίσως μπορούμε να πούμε ότι για αρκούντως μικρές τιμές της ενέργειας υπάρχει ένα δεύτερο, κατά προσέγγιση ολοκλήρωμα της κίνησης, που οδηγεί σε «αρκετά» κανονικές τροχιές που καλύπτουν σχεδόν όλη την επιτρεπόμενη περιοχή σε σχέση με χαοτικές τροχιές. Για σχετικά μεγάλες τιμές της ενέργειας αυτό δεν ισχύει.

Χωρίς να αναφερθούμε στον τρόπο που γίνεται ο υπολογισμός, στο Σχήμα 11.28 δίνουμε μια γραφική παράσταση του λόγου του «εμβαδού» που καταλαμβάνουν οι κανονικές τροχιές δια του ολικού εμβαδού του επιτρεπόμενου χώρου ως συνάρτηση της ενέργειας.



Σχήμα 11.28 *Λόγος του εμβαδού που καταλαμβάνουν οι κανονικές τροχιές δια του ολικού εμβαδού του επιτρεπόμενου χώρου ως συνάρτηση της ενέργειας για το σύστημα Henon-Heiles.*

Ανεξάρτητα από το πόσο καλή είναι η προσέγγιση, είναι μάλλον σαφές ότι κάτι δραματικό συμβαίνει στο γόνατο της καμπύλης που αντιστοιχεί σε περίπου $E = 0{,}11$. Για $E < 0{,}11$ όλη (ή σχεδόν όλη) η περιοχή «καλύπτεται» από κανονικές τροχιές, για $E > 0{,}11$ σταδιακά εμφανίζεται σημαντικό «ποσοστό» χαοτικών τροχιών που τείνουν να «καλύψουν» όλο τον χώρο.

11.3.6 Η εξίσωση van der Pol

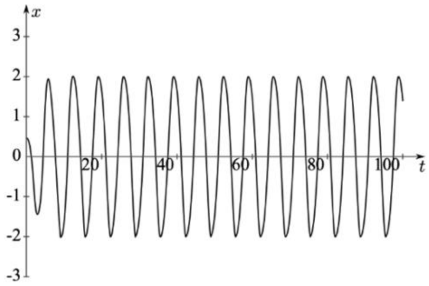
Η εξίσωση van der Pol περιγράφει σύστημα μη χαμιλτονιανό με την έννοια ότι είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, μη γραμμική, που περιέχει όρο απόσβεσης, δηλαδή όρο ανάλογο του $\dot{x}$. Η εξίσωση αυτή επινοήθηκε για την περιγραφή μη γραμμικών ταλαντωτών στην ηλεκτρολογία, ταλαντώσεις και ταλαντωτές χαλάρωσης (relaxation oscillations, relaxation oscillators).

Στα προηγούμενα είδαμε την αδιάστατη μορφή χωρίς διέγερση. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Η εξίσωση έχει στο δεύτερο μέλος τον όρο $-x$, ίδιο με αυτόν του αρμονικού ταλαντωτή και άλλον όρο με απόσβεση, τον $\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$. Θα θεωρούμε ότι $\varepsilon > 0$. Ο όρος «απόσβεσης» αν $x^2 < 1$ γίνεται όρος που ενισχύει την ταλάντωση και όταν $x^2 > 1$ ο όρος αυτός μειώνει την ταλάντωση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορεί να οδηγείται το σύστημα σε αμείωτες μη γραμμικές ταλαντώσεις. Αν ο όρος αντιστοιχούσε μόνο σε απόσβεση, οι ταλαντώσεις θα ήταν μειούμενες με τον χρόνο.

Το Σχήμα 11.29 δείχνει τις αμείωτες ταλαντώσεις, μια χρονοσειρά, για $\varepsilon = 1$. Οι αρχικές τιμές είναι $x(0) = 0{,}5$, $\dot{x}(0) = 0$.



Σχήμα 11.29 *Εξίσωση van der Pol, αμείωτες ταλαντώσεις,* $\varepsilon = 1$, $x(0) = 0{,}5$, $\dot{x}(0) = 0$.

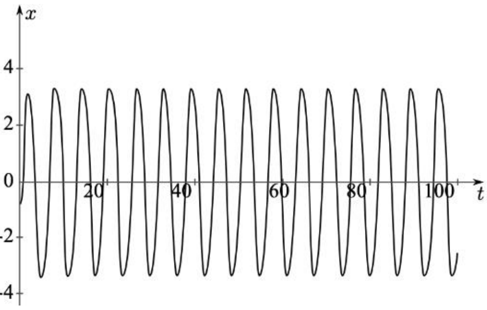
Βλέπουμε ότι το μεταβατικό φαινόμενο διαρκεί πολύ λίγο, γρήγορα η ταλάντωση ακολουθεί το μόνιμο φαινόμενο, δηλαδή γίνεται περιοδική με τον χρόνο και γίνεται πάνω στον ελκυστή. Η συχνότητα της κίνησης (μη αρμονική κίνηση) εξαρτάται και από τον συντελεστή ε, ο οποίος ρυθμίζει την απόσβεση. Είναι ευνόητο ότι όταν $\varepsilon = 0$ η κυκλική συχνότητα είναι η φυσική αρμονική κυκλική συχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή που στην περίπτωση αυτήν εδώ είναι $\omega_0 = 1$.

Η εξίσωση van der Pol με αρμονική διέγερση κυκλικής συχνότητας ω_{D}, είναι

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + a\cos(\omega_{\mathrm{D}} t). \tag{11.152}$$

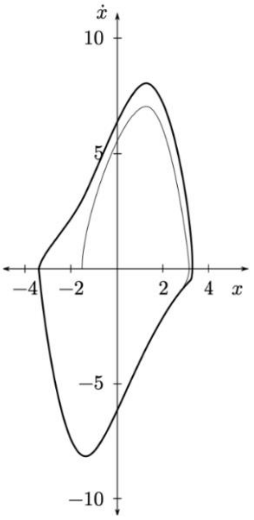
Θα δούμε ότι η εξίσωση αυτή, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων $\varepsilon, a, \omega_{\mathrm{D}}$ έχει χαοτικές λύσεις. Γενικώς, η ταλάντωση του συστήματος επηρεάζεται από τις δυο, κατά κάποιο τρόπο, ανταγωνιζόμενες συχνότητες, τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος ω_0 η οποία εξαρτάται από την απόσβεση, δηλαδή την παράμετρο ε και εξαρτάται επίσης από τη συχνότητα ω_{D} της διέγερσης. Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων και ειδικότερα του πλάτους a της διέγερσης, έχουμε διαφορετική συμβολή αυτών των συχνοτήτων και αρμονικών τους στην εξέλιξη του συστήματος με τον χρόνο. Ξεκινούμε με την επιλογή παραμέτρων που οδηγούν σε κανονικές λύσεις. Επιλέγουμε $\varepsilon = 1, a = 8, \omega_{\mathrm{D}} = 1$.

Στο Σχήμα 11.30 φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης $x = x(t)$, είναι μια χρονοσειρά, με αρχικές συνθήκες $x(0) = -1,5$, $\dot{x}(0) = 0$, και πάλι το μεταβατικό φαινόμενο διαρκεί πολύ λίγο.



Σχήμα 11.30 *Εξίσωση van der Pol, αμείωτες ταλαντώσεις,* $\varepsilon = 1,\ x(0) = -1,5\ , \dot{x}(0) = 0$.

Ο (εκτεταμένος) φασικός χώρος είναι τρισδιάστατος, $x, \dot{x}, \omega_{\mathrm{D}} t$. Η τροχιά μετά από το μεταβατικό στάδιο διαγράφει περιοδικά μονοδιάστατο ελκυστή. Τρισδιάστατες γραφικές παραστάσεις δεν είναι πολύ βολικές στην κατανόηση των φαινομένων, γι' αυτό χρησιμοποιούμε την προβολή της τροχιάς στον (συνήθη) δισδιάστατο φασικό χώρο $x, \dot{x}$. Στο Σχήμα 11.31 φαίνεται αυτή η γραφική παράσταση.



Σχήμα 11.31 *Τροχιά στο δισδιάστατο φασικό χώρο για* $\varepsilon = 1,\ x(0) = -1,5\ , \dot{x}(0) = 0$.

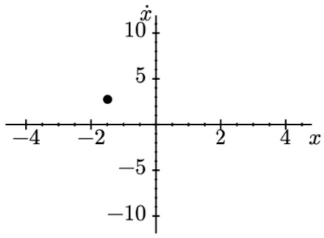
Οι αρχικές τιμές είναι αυτές της τελευταίας περίπτωσης. Μετά από το μεταβατικό φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο, η κίνηση φαίνεται, και σε αυτή την περίπτωση, να γίνεται πάνω στην μονοδιάστατη τροχιά-ελκυστή. Πρόκειται προφανώς για προβολή του μονοδιάστατου ελκυστή από τις τρεις στις δυο διαστάσεις.

Θα αναφερθούμε με λίγα λόγια στην τομή (απεικόνιση) Poincare. Αυτά που λέμε εδώ είναι χρήσιμα για την διαταραγμένη εξίσωση van der Pol και για την περίπτωση του διαταραγμένου (διεγειρόμενου) εκκρεμούς. Η διέγερση θεωρείται περιοδική και εδώ περιοριζόμαστε σε αρμονική με τον χρόνο, όπως είπαμε και προηγουμένως. Η απεικόνιση Poincare βρίσκεται στον δισδιάστατο (συνήθη) φασικό χώρο $x, \dot{x}$. Ο ελκυστής στον τρισδιάστατο (εκτεταμένο) φασικό χώρο είναι μια έλικα. Αυτό που κάνουμε είναι να πάρουμε «στιγμιότυπα» $x, \dot{x}$ κόβοντας την έλικα ανά κανονικά διαστήματα κατά τη διάσταση που αντιστοιχεί στον χρόνο, διαστήματα που αντιστοιχούν στην περίοδο $2\pi/\omega_{\mathrm{D}}$ της διέγερσης, οι τομές γίνονται για την «ίδια τιμή φάσης», πιο σωστά η τομές γίνονται όταν ισχύει $\omega_{\mathrm{D}} t = \varphi_0 + k 2\pi, k = 0,1,2,\ldots$, π.χ. όταν η διέγερση έχει μέγιστη (αλγεβρική) τιμή. Έχουμε μια σειρά από διακριτούς χρόνους και αντίστοιχες τιμές των $x, \dot{x}$, $(t_0 = \varphi_0 / \omega_{\mathrm{D}}, t_1 = t_0 + 1 \times 2\pi/\omega_{\mathrm{D}}, t_2 = t_0 + 2 \times 2\pi/\omega_{\mathrm{D}}, \ldots, t_k = t_0 + k \times 2\pi/\omega_{\mathrm{D}}, \ldots)$, $\left((x(t_0), \dot{x}(t_0)), (x(t_1), \dot{x}(t_1)), \ldots, (x(t_k), \dot{x}(t_k)), \ldots \right)$.

Όταν η τιμή της διέγερσης έχει μέγιστη (αλγεβρική) τιμή, τότε $\varphi_0 = 0, t_0 = 0$.

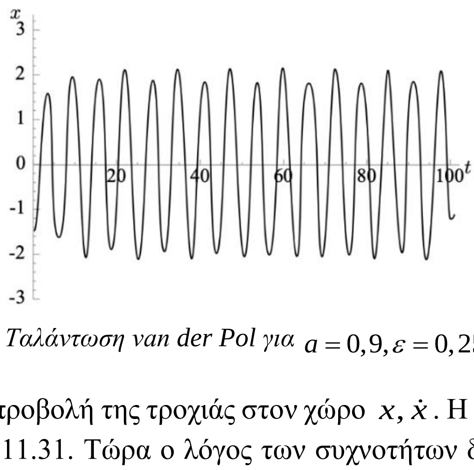
Η τομή Poincare δίνει πληροφορία για τον λόγο της συχνότητας «δειγματοληψίας» ω_{S}, εδώ ισχύει $\omega_{\mathrm{S}} = \omega_{\mathrm{D}}$, δια της συχνότητας ταλάντωσης του συστήματος ω_{t}, δηλαδή για το μέγεθος $\omega_{\mathrm{t}} / \omega_{\mathrm{S}}$. Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με τη συχνότητα ταλάντωσης τότε η τομή Poincare θα αποτελείται από ένα σημείο. Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι διπλάσια της συχνότητας ταλάντωσης τότε η τομή θα αποτελείται από δυο σημεία. Γενικώς, αν $\omega_{\mathrm{t}} / \omega_{\mathrm{S}}$ είναι ρητός αριθμός, οπότε $\omega_{\mathrm{t}} / \omega_{\mathrm{S}} = p / q$ και τα p, q είναι θετικοί ακέραιοι, οι οποίοι δεν έχουν άλλον κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα (το κλάσμα είναι ανάγωγο), τότε η απεικόνιση θα αποτελείται από q το πλήθος σημεία. Οι συντεταγμένες των σημείων εξαρτώνται από το πώς επιλέγεται το (πρώτο) σημείο τομής, δηλαδή από τη φάση μέσα στην περίοδο δειγματοληψίας. Ο αριθμητής μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος που απλώς καθορίζει τη διαδοχή απεικόνισης των q σημείων.

Το Σχήμα 11.32 δείχνει την τομή Poincare για την εξίσωση van der Pol. Ξαναθυμίζουμε ότι οι τομές Poincare λαμβάνονται αφού μηδενιστεί το μεταβατικό φαινόμενο, δηλαδή είναι τομές Poincare του ελκυστή. Για το Σχήμα 11.32 έχουμε επιλέξει τις τιμές που ισχύουν για τα Σχήματα 11.30 και 11.31, δηλαδή τις $a = 8$, $\varepsilon = 1$, $\omega_{\mathrm{D}} = 1$. Η δειγματοληψία γίνεται με συχνότητα $\omega_{\mathrm{S}} = \omega_{\mathrm{D}}$ όταν η διέγερση έχει μέγιστη τιμή. Θα ακολουθήσουμε αυτή την τελευταία τακτική σε όλα τις απεικονίσεις Poincare από εδώ και πέρα. Βλέπουμε ότι υπάρχει ένα σημείο που σημαίνει ότι το q που αναφέραμε προηγουμένως ισούται με 1. Επίσης λέμε ότι η διάσταση στον δισδιάστατο φασικό χώρο του ελκυστή είναι 0, αφού ο ελκυστής παριστάνεται με ένα σημείο. Στον τρισδιάστατο φασικό χώρο η διάσταση όπως θα δούμε και παρακάτω ισούται με $0+1=1$. Το Σχήμα 11.30 μας βεβαιώνει ότι η συχνότητα ταλάντωσης ισούται με τη συχνότητα διέγερσης οπότε $\omega_{\mathrm{t}} / \omega_{\mathrm{s}} = p / q = 1/1 = 1$. Αν η κίνηση είναι περιοδική αλλά με συχνότητα που δεν σχετίζεται με τη συχνότητα δειγματοληψίας όπως προηγουμένως, τότε αντί για διακριτά σημεία η απεικόνιση θα αποτελείται από μια κλειστή γραμμή, έναν «κύκλο».



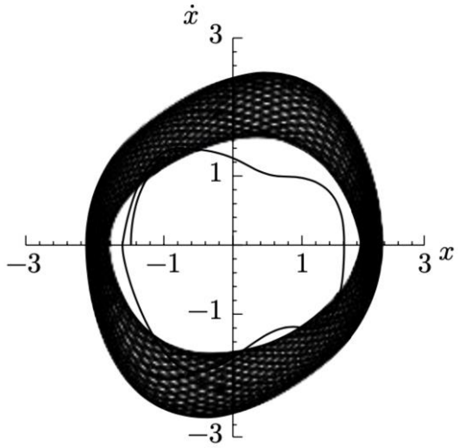
Σχήμα 11.32 *Εξίσωση van der Pol, τομή Poincare για* $a = 8, \varepsilon = 1, \omega_{\mathrm{D}} = 1$.

Το Σχήμα 11.33 δείχνει τη γραφική παράσταση $x = x(t)$, χρονοσειρά, για την περίπτωση με $a = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}25$, $\omega_{\mathrm{D}} = 2{,}47$, οι αρχικές τιμές είναι $x(0) = -1{,}5$, $\dot{x}(0) = 0$.



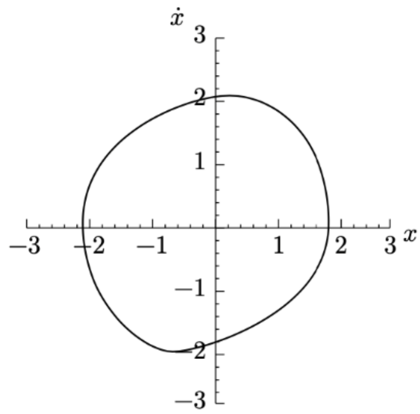
Σχήμα 11.33 *Ταλάντωση van der Pol για* $a = 0{,}9, \varepsilon = 0{,}25, \omega_{\mathrm{D}} = 2{,}47$.

Το Σχήμα 11.34 δείχνει την προβολή της τροχιάς στον χώρο $x, \dot{x}$. Η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική από την αντίστοιχη του Σχήματος 11.31. Τώρα ο λόγος των συχνοτήτων δεν είναι ρητός οπότε όσο περνά ο χρόνος η τροχιά θα περνά από κάθε σημείο του χώρου του ελκυστή, ο οποίος είναι δισδιάστατη (κυλινδρική) επιφάνεια στον τρισδιάστατο φασικό χώρο και στον δισδιάστατο φασικό χώρο. Στο σχήμα φαίνεται και το μεταβατικό φαινόμενο.



Σχήμα 11.34 *Τροχιά van der Pol στο φασικό χώρο με λόγο συχνοτήτων που δεν είναι ρητός αριθμός.*

Το Σχήμα 11.35 δείχνει την τομή Poincare.



Σχήμα 11.35 *Τομή Poincare για λόγο συχνοτήτων που δεν είναι ρητός αριθμός.*

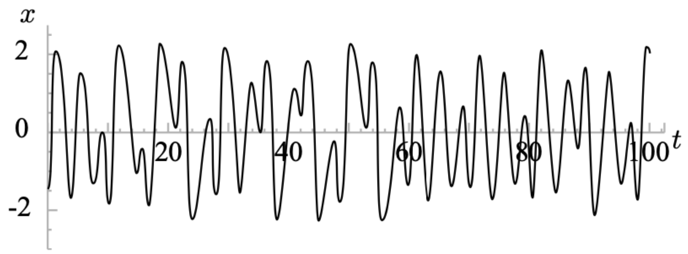
Τώρα, σε αντίθεση με την περίπτωση του Σχήματος 11.32, φαίνεται να προκύπτει μια συνεχής καμπύλη, μια διάσταση, πράγμα που σημαίνει ότι η διεγείρουσα συχνότητα και η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος δεν συνδέονται με σχέσεις ακεραίων όπως είπαμε προηγουμένως. Αυτό μπορεί να το διαπιστώσει κάποιος αν υπολογίσει τη συχνότητα ταλάντωσης από το Σχήμα 11.33 και τη συγκρίνει με τη συχνότητα διέγερσης.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο φαινόμενο της παράσυρσης, του κλειδώματος (entrainment, locking). Το φαινόμενο εμφανίζεται όταν έχουμε συζευγμένα ταλαντευόμενα συστήματα , όπως δυο ταλαντωτές van der Pol. Μια τέτοια περίπτωση είναι η περίπτωση σύζευξης μιας κατεύθυνσης (one way coupling). Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση, όταν ο ένας ταλαντωτής είναι τέτοιος που ο άλλος ταλαντωτής δε μπορεί να τον επηρεάσει, έτσι η επίδραση είναι προς μια κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του συστήματος van der Pol αν ο όρος της διέγερσης έχει μεγάλο πλάτος, τότε το σύστημα ταλαντεύεται με τη συχνότητα της διέγερσης. Γενικώς μπορεί να παρατηρηθεί κλείδωμα συχνότητας σε υποαρμονικές της διεγείρουσας συχνότητας ω_{D} , έτσι που να ισχύει για την προκύπτουσα συχνότητα ω_{L} του συστήματος $\omega_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{D}} \dfrac{m}{n}$, όπου m, n θετικοί ακέραιοι $m \le n$. Δηλαδή μπορεί να γίνει κλείδωμα και σε υποαρμονικές της ω_{D} . Το κλείδωμα έχει διάφορες εφαρμογές, όπως στους βηματοδότες και σε διάφορες ηλεκτρονικές διατάξεις, σε συστήματα πληθυσμών όπως πυγολαμπίδων κλπ.

Τώρα θα αναφερθούμε στη χαοτική συμπεριφορά του συστήματος van der Pol,

$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + a\cos(\omega_D t)$. Σε αυτή την περίπτωση, εμφανίζεται χάος για σχετικά μικρό σύνολο τιμών των παραμέτρων.

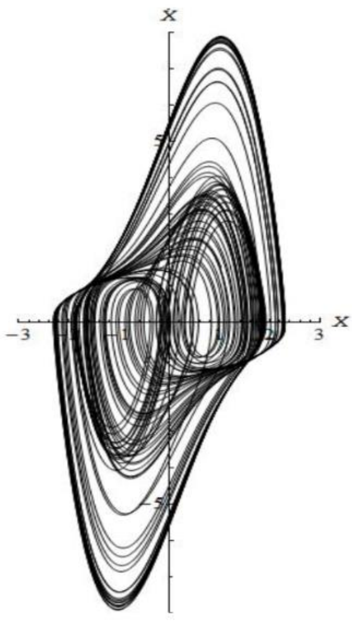
Ας επιλέξουμε τις τιμές των παραμέτρων ως εξής, $\varepsilon = 3,\ a = 5,\ \omega_D = 1,788$. Στο Σχήμα 11.36, φαίνεται η γραφική παράσταση του $x = x(t)$, οι αρχικές συνθήκες σε όλες τις περιπτώσεις είναι $x(0) = -1,5$, $\dot{x}(0) = 0$.



Σχήμα 11.36 *Χρονοσειρά για* $a = 5, \varepsilon = 3, \omega_D = 1,788$.

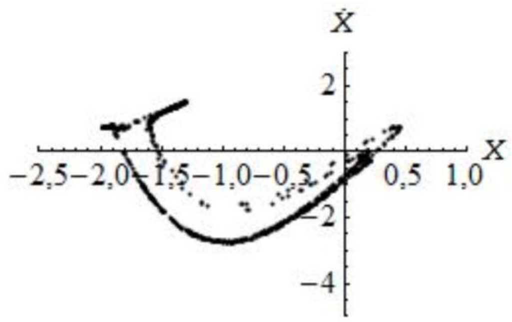
Αμέσως βλέπουμε ότι δεν υπάρχει «κανονικότητα» στην εξέλιξη του συστήματος. Αυτό είναι αλήθεια και για πολύ μεγαλύτερους χρόνους και είναι ένδειξη χαοτικής συμπεριφοράς. Στο Σχήμα 11.37 φαίνεται η γραφική παράσταση της προβολής της φασικής τροχιάς του συστήματος στον συνήθη δισδιάστατο φασικό χώρο. Πιο συγκεκριμένα, είναι ουσιαστικά η προβολή της τροχιάς που είναι ελκυστής του συστήματος, δηλαδή μετά το μεταβατικό φαινόμενο.

Η σύγκριση με τα Σχήματα 11.31 και 11.34 δείχνει ότι εδώ έχουμε μια μεγάλη πολυπλοκότητα, γεγονός το οποίο υποδεικνύει χάος.



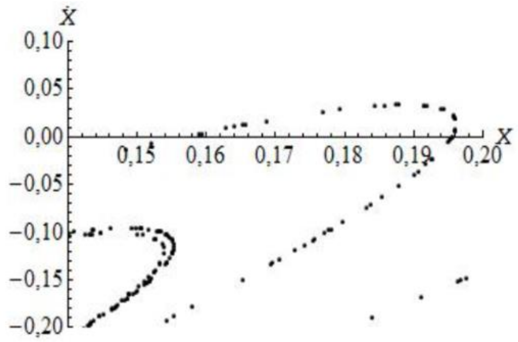
Σχήμα 11.37 *Φασική τροχιά στο χώρο των δυο διαστάσεων.*

Το Σχήμα 11.38 δείχνει την τομή Poincare του ελκυστή η οποία διαφέρει ουσιωδώς από τις τομές στα Σχήματα 11.32 και 11.35.



Σχήμα 11.38 *Τομή Poincare του ελκυστή με δομή φράκταλ.*

Αυτή η απεικόνιση δεν έχει απλή συνήθη (θετική ακέραια ή μηδενική) διάστατη. Φαίνεται να έχει ένα είδος αυτοομοιότητας αν γίνει όλο και μεγαλύτερη μεγέθυνση περιοχών της απεικόνισης. Δηλαδή έχει δομή φράκταλ οπότε θα έχει μη ακέραια διάσταση. Αυτού του είδους ο ελκυστής που σχετίζεται με τις χαοτικές καταστάσεις λέγεται παράξενος ελκυστής (strange attractor). Το ότι η μορφή είναι φράκταλ μπορεί να γίνει πιο πιστευτό βλέποντας έστω και μια πρώτη περιορισμένη μεγέθυνση μέρους της απεικόνισης του ελκυστή όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.39. Συνεχίζεται η ύπαρξης παρόμοιας δομής και σε μεγαλύτερες μεγεθύνσεις, που δεν δείχνονται διότι απαιτούν πολύ μεγάλους χρόνους για να υπολογιστούν.



Σχήμα 11.39 *Μεγέθυνση τμήματος της τομής Poincare του σχήματος 11.38.*

11.3.7 Το σύστημα του διαταραγμένου εκκρεμούς

Η αδιάστατη εξίσωση κίνησης του διαταραγμένου εκκρεμούς με διέγερση αρμονική με τον χρόνο και με απόσβεση, σύμφωνα με όσα έχουμε πει, Εξ. (11.124), είναι η

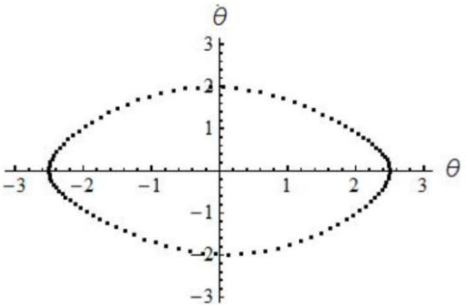
$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{Q}\dot{\theta} - \sin\theta + B\cos\left(\omega_{\mathrm{D}} t\right)$$

ή

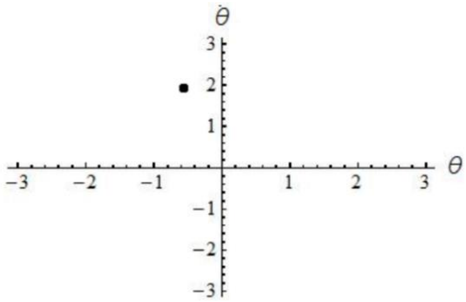
$$\begin{aligned} &\omega = \dot{\theta} \\ &\dot{\varphi} = \omega_{\mathrm{D}} \\ &\dot{\omega} = -\frac{1}{Q}\omega - \sin\theta + B\cos\varphi. \end{aligned} \tag{11.153}$$

Στην Εξ. (11.153) φαίνεται και το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Εφόσον υπάρχει απόσβεση το σύστημα είναι μη χαμιλτονιανό σύστημα και ο (εκτεταμένος) χώρος των φάσεων είναι τρισδιάστατος $\theta, \omega = \dot{\theta}, \varphi = \omega_{\mathrm{D}} t$ ή $\varphi = \omega_{\mathrm{D}} t + \varphi_0$. Μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων $Q, B, \omega_{\mathrm{D}}$ μπορούμε να δούμε διαφορετική συμπεριφορά στο σύστημα, δηλαδή στις λύσεις του συστήματος και για κάποιες επιλογές παραμέτρων το σύστημα γίνεται χαοτικό. Ξεκινούμε με μη χαοτικό σύστημα, με παραμέτρους

$Q=2,\ B=0{,}9$, $\omega_D = 2/3$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $\theta(0)=0, \dot{\theta}(0)=0$. Στο Σχήμα 11.40 φαίνεται η φασική τροχιά στον δισδιάστατο χώρο (προβολή από τον εκτεταμένο τρισδιάστατο αφού το μεταβατικό φαινόμενο έχει μηδενιστεί) και στο Σχήμα 11.41 η αντίστοιχη τομή Poincare. Όσο περνά ο χρόνος η τροχιά στο Σχήμα 11.40 θα γεμίζει πυκνά και θα γίνει μια συνήθης συνεχής τροχιά, κανονικός ελκυστής (προβολή στον δισδιάστατο φασικό χώρο). Επειδή στο Σχήμα 11.41 υπάρχει ένα μόνο σημείο αυτό δηλώνει ότι ο λόγος συχνότητας ταλάντωσης προς συχνότητα διέγερσης έχει τη μορφή $p/1$ όπου p θετικός ακέραιος. Αν φτιάξουμε τη γραφική παράσταση του $\theta = \theta(t)$ ή του $\dot{\theta} = \omega = \omega(t)$ αυτό θα μας βεβαιώσει ότι $p=1$, δηλαδή $\omega_t = \omega_D$, δηλαδή το σύστημα ταλαντεύεται με τη συχνότητα διέγερσης. Ο ελκυστής στον εκτεταμένο φασικό χώρο είναι κανονικός ελκυστής, είναι κανονική (μονοδιάστατη) τροχιά οπότε ο ελκυστής είναι διάστασης ένα. Στο Σχήμα 11.41 έχει διάσταση μηδέν αφού παριστάνεται με ένα (διακριτό) σημείο. Σημειώνουμε ότι η διάσταση D στην τομή Poincare είναι μικρότερη κατά ένα από τη διάσταση d στον εκτεταμένο φασικό χώρο, $d = D+1$. Τα διακριτά σημεία στο Σχήμα 11.40 αντιστοιχούν σε ίσα χρονικά διαστήματα $T_D = 2\pi/\omega_D$. Παρατηρούμε ότι σε αυτό το σχήμα, στις ακραίες θέσεις αριστερά, $\theta < 0$, και δεξιά $\theta > 0$ τα σημεία είναι πιο πυκνά διατεταγμένα επομένως το εκκρεμές βρίσκεται σε αυτές τις θέσεις περισσότερο χρόνο από τις άλλες θέσεις του.

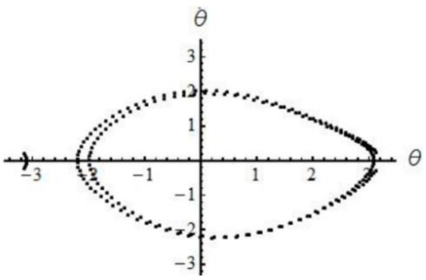


Σχήμα 11.40 *Φασική τροχιά στο δισδιάστατο χώρο για το διαταραγμένο εκκρεμές.*

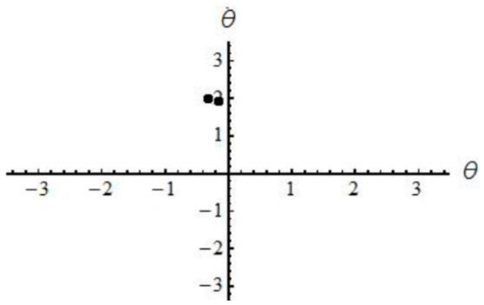


Σχήμα 11.41 *Τομή Poincare του διαταραγμένου εκκρεμούς.*

Στη συνέχεια δίνουμε στις παραμέτρους τις τιμές $Q=2,\ B=1{,}07$, $\omega_D = 2/3$. Οι αρχικές συνθήκες είναι ίδιες όπως πριν, $\theta(0)=0, \dot{\theta}(0)=0$, έχουμε τα αντίστοιχα των δυο προηγούμενων, δηλαδή τα Σχήματα 11.42 και 11.43.



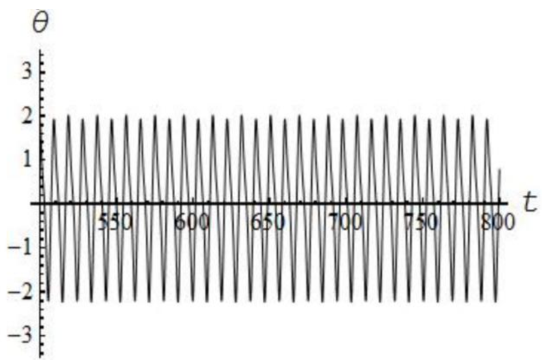
Σχήμα 11.42 *Φασική τροχιά του διαταραγμένου εκκρεμούς με μεγάλη διέγερση.*



Σχήμα 11.43 *Τομή Poincare της περίπτωσης του σχήματος 11.42.*

Παρατηρούμε ότι στο Σχήμα 11.42 έχουμε διαγραφή δυο λίγο διαφορετικών κύκλων σε αντίθεση με τον έναν του Σχήματος 11.40. Σημειώνουμε ότι υπάρχει μόνο ένα ζευγάρι αρχικών τιμών για τα $\theta, \dot{\theta}$. Υπάρχουν δυο σημεία στην απεικόνιση Poincare. Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας λίγο το πλάτος της διέγερσης από 0,9 σε 1,07 έχει συμβεί κάποια ποιοτική αλλαγή στο σύστημα. Αν κοιτάξουμε το Σχήμα 11.44 παρατηρούμε ότι τώρα η περίοδος είναι διπλάσια από ότι ήταν στην προηγούμενη περίπτωση που ήταν $2\pi/\omega_D = 2\pi/(2/3) = 3\pi \approx 9{,}42$.

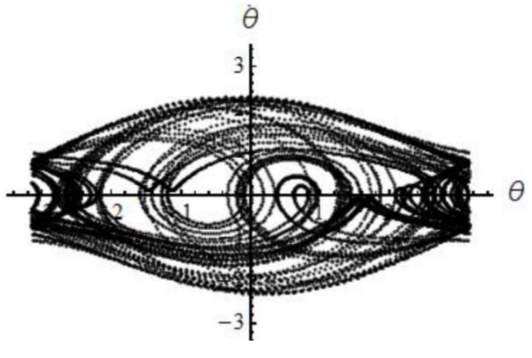
Αυτό είναι η αιτία που υπάρχουν δυο σημεία στην απεικόνιση Poincare. Αυτό που έχει συμβεί λέγεται διπλασιασμός περιόδου (period doubling). Επίσης το Σχήμα 11.42 δεν έχει τη συμμετρία του Σχήματος 11.40.



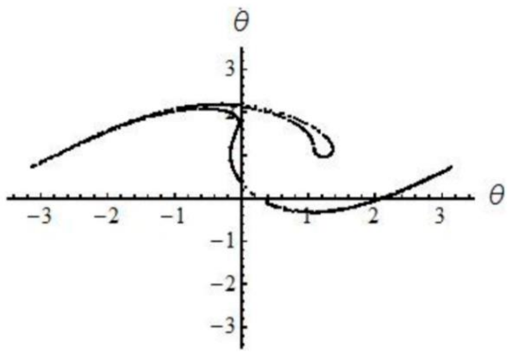
Σχήμα 11.44 *Χρονοσειρά για την περίπτωση των σχημάτων 11.42 και 11.43.*

Στη συνέχεια επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων και πάλι λίγο διαφορετικές από τις προηγούμενες, δηλαδή $Q = 2,\ B = 1{,}15$, $\omega_D = 2/3$, με αρχικές συνθήκες $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$, έχουμε το Σχήμα 11.45 για την προβολή της τροχιάς στον φασικό χώρο των δυο διαστάσεων. Είναι σαφής η διαφορά από τα προηγούμενα . Φαίνεται ο χαοτικός χαρακτήρας αυτού του ελκυστή. Αναφέρουμε ότι κατά την εξέλιξη του συστήματος στον χρόνο τα σημεία «πηδούν» από τη μια θέση στην άλλη χωρίς κάποιον κανόνα.

Στο Σχήμα 11.46 δίνεται η τομή Poincare όπου και πάλι φαίνεται ο χαοτικός χαρακτήρας. Με μεγέθυνση μπορεί να κατανοηθεί ότι υπάρχει ένα είδος αυτοομοιότητας, δηλαδή δομή φράκταλ.

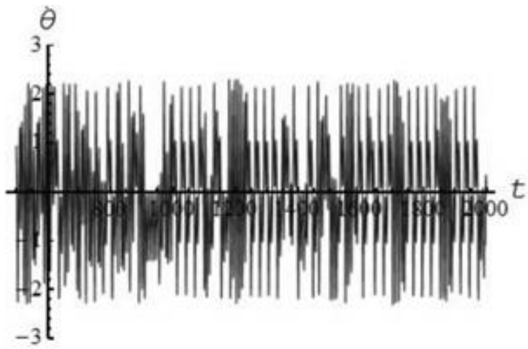


Σχήμα 11.45 *Εμφάνιση χάους στο διαταραγμένο εκκρεμές.*



Σχήμα 11.46 *Τομή Poincare της περίπτωσης του συστήματος του σχήματος 11.45.*

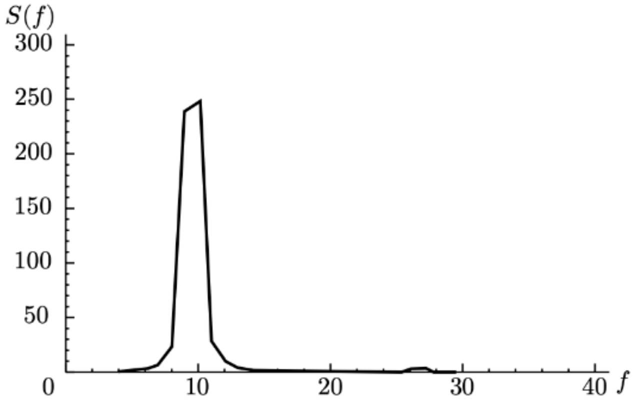
Το Σχήμα 11.47 συνηγορεί υπέρ της μη κανονικότητας στην εξέλιξη του συστήματος. Αυτή είναι γραφική παράσταση της $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$ για $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ και μετά την απόσβεση του μεταβατικού φαινομένου.



Σχήμα 11.47 *Χρονοσειρά του συστήματος του σχήματος 11.45.*

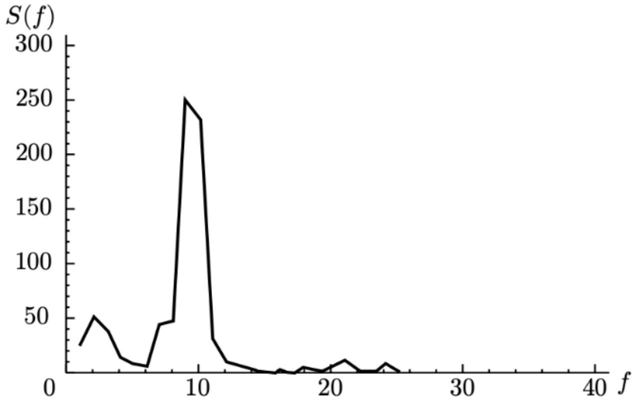
Στη συνέχεια θα δώσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για μια περίπτωση που η κίνηση είναι κανονική και για μια χαοτική κίνηση. Θα εξετάσουμε την περίπτωση με $Q = 2, B = 0{,}9$, $\omega_{\mathrm{D}} = 2/3$. Αυτό που υπολογίζεται είναι η φασματική ισχύς (power spectrum) $S(f)$, συναρτήσει της συχνότητας, δηλαδή η απόλυτη τιμή του μετασχηματισμού Fourier στο τετράγωνο συναρτήσει της συχνότητας. Το Σχήμα 11.48 δείχνει το αποτέλεσμα. Το μέγιστο συμβαίνει στη συχνότητα διέγερσης, $f = \dfrac{1}{3\pi} \approx 0{,}106$ Hz, $T \approx 9{,}42$ s .

Στα Σχήματα 11.48 και 11.49 οι ενδείξεις στον οριζόντιο άξονα ενώ δηλώνονται με το σύμβολο της συχνότητας f , στην πραγματικότητα δεν αντιπροσωπεύουν την f αλλά σχετίζονται γραμμικά με τη συχνότητα f .



Σχήμα 11.48 *Φασματική ισχύς ως συνάρτηση του χρόνου για* $Q = 2, B = 0{,}9$, $\omega_{\mathrm{D}} = 2/3$.

Για την χαοτική κίνηση με $Q=2, B=1{,}15$, $\omega_{\mathrm{D}}=2/3$, έχουμε τη φασματική κατανομή του Σχήματος 11.49. Παρόλο που και εδώ το (απόλυτο) μέγιστο είναι στη συχνότητα διέγερσης, είναι φανερό ότι η κατανομή έχει μεγάλο εύρος συχνοτήτων και εκτείνεται και στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων.



Σχήμα 11.49 Φασματική κατανομή για Q=2, B=1,15, ω_{D}=2/3.

11.3.8 Εκθέτες Liapunov

Στη συνέχεια θα πούμε λίγα λόγια για τους εκθέτες (του) Liapunov και τη χρήση τους για την κατανόηση της ύπαρξης χάους. Ο κάθε εκθέτης Liapunov δίνει το μέσο ρυθμό απόκλισης μεταξύ δυο αρχικά πολύ κοντινών τροχιών. Στην περίπτωση χάους η απόκλιση είναι εκθετική με τον χρόνο για κάποιο χρονικό διάστημα. Με άλλα λόγια αυτοί οι εκθέτες χαρακτηρίζουν την ευαισθησία του συστήματος στις αρχικές συνθήκες. Χονδρικά, στην περίπτωση χάους μπορούμε να πούμε ότι για ένα σύστημα συνήθων αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, θεωρούμε μια λύση (τροχιά) στον φασικό χώρο με δεδομένες αρχικές συνθήκες, αυτή τη λέμε λύση ή τροχιά αναφοράς, και μια άλλη λύση (που τη λέμε δοκιμαστική τροχιά) της οποίας οι αρχικές συνθήκες είναι πολύ κοντά με αυτές της τροχιάς αναφοράς. Η αρχική «απόσταση» είναι πολύ μικρή, ε_0, αλλά με τον χρόνο η απόστασή τους θα ακολουθεί κατά μέσον όρο τη σχέση

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0 \mathrm{e}^{\lambda t}, \lambda>0 . \tag{11.154}$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει χάος, μπορεί να είναι $\lambda \leq 0$. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση η εξάρτηση $\varepsilon=\varepsilon(t)$ μπορεί να αντιστοιχεί σε μείωση της απόστασης με τον χρόνο ή μικρότερη αύξηση από ότι στην περίπτωση της εκθετικής αύξησης, ή και μηδενική μεταβολή. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει γραμμική σχέση μεταβολής. Η απόσταση μεταξύ σημείων σε πολυδιάστατους χώρους είναι αντικείμενο συζήτησης. Τα πράγματα είναι σχετικά εύκολα στις περιπτώσεις που τα φυσικά μεγέθη στις εξισώσεις (αδιάστατες εξισώσεις) είναι αδιάστατα. Σε αυτή την περίπτωση ως απόσταση μπορεί να ληφθεί η συνήθης καρτεσιανή απόσταση, $d=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}=\|\Delta \boldsymbol{x}\|$, Δx_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος που αντιστοιχεί στη διαφορά θέσεων δυο διανυσμάτων του χώρου των φάσεων. Η σχέση (11.154) δεν μπορεί να αποτελέσει την αυστηρή σχέση ορισμού των (χαρακτηριστικών) εκθετών Liapunov. Ο αυστηρός ορισμός των χαρακτηριστικών εκθετών Liapunov φαίνεται σε αυτά που ακολουθούν.

Έστω το σύστημα των αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων (κίνησης)

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}),\ldots, f_n(\boldsymbol{x})) \\ &\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n). \end{aligned} \tag{11.155}$$

Η κουκίδα σημαίνει παράγωγο ως προς τον χρόνο. Τα bold μεγέθη είναι διανύσματα με n συνιστώσες. Ο χώρος των φάσεων είναι διάστασης n. Κάθε μια λύση του συστήματος (11.155) αναφέρεται ως ροή (flow).

Το πλήθος των εκθετών Liapunov είναι ίσο με τη διάσταση του χώρου των φάσεων, δηλαδή ισούται με n. Γραμμικοποιούμε τις ανωτέρω εξισώσεις και καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις για πολύ μικρές μεταβολές , δηλαδή για δυο γειτονικές τροχιές που απέχουν πολύ λίγο η μια από την άλλη,

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & . \\ & . \\ & . \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{11.156}$$

$\boldsymbol{J}$ είναι η $n \times n$ ιακωβιανή ορίζουσα, με στοιχεία που είναι συναρτήσεις του $\boldsymbol{x}$.

Οι σχέσεις (11.156) μαζί με τις (11.155) οδηγούν στις σχέσεις

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{x}\cdot \tag{11.157}$$

Για πεπερασμένα $\Delta\boldsymbol{x}$ αυτές είναι προσεγγιστικές σχέσεις. Όμως μπορούμε να πάρουμε μιαν ακριβή σχέση πηγαίνοντας στο απειροστό όριο όπου η απόκλιση $\Delta\boldsymbol{x}$ ταυτίζεται με ένα διάνυσμα (που λέγεται και πάλι απόκλιση) ξ στον εφαπτομενικό χώρο στο σημείο $\boldsymbol{x}$, εφαπτομενικό διάνυσμα (tangent vector). Τότε έχουμε τις ακριβείς σχέσεις

$$\dot{\xi} = \boldsymbol{J}\cdot\xi\,. \tag{11.158}$$

Η αρχική τιμή αυτού του διανύσματος είναι αυθαίρετη και είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι το μέτρο του είναι μονάδα, $\|\xi(0)\| = \|\xi_0\| = 1$, έτσι τη στιγμή t ο συντελεστής κατά τον οποίο πολλαπλασιάστηκε το ξ είναι $\|\xi(t)\|$. Αυτό το σύστημα των εξισώσεων λέγεται σύστημα εξισώσεων παραλλαγών ή μεταβολών (variational equations) και αυτό το όνομα έχει και αυτή η μέθοδος υπολογισμού των εκθετών Liapunov, επίσης λέγεται και ιακωβιανή μέθοδος. Ο όρος παραλλαγή σχετίζεται με το γεγονός ότι η διαφορά $\Delta\boldsymbol{x}$ ισχύει για $t =$ σταθερό, άρα πρόκειται για ένα είδος παραλλαγής, μεταβολής (variation).

Ένα σύστημα με φασικό χώρο n διαστάσεων έχει n εκθέτες Liapunov. Σε χαοτικά συστήματα ο ένας τουλάχιστο από τους εκθέτες Liapunov είναι θετικός. Πολλές φορές αρκεί να υπολογιστεί ο εκθέτης με τη μέγιστη (αλγεβρική) τιμή, αν είναι θετικός το σύστημα είναι χαοτικό. Στα κανονικά συστήματα όλοι οι εκθέτες είναι μη θετικοί, είναι αρνητικοί ή μηδέν.

Τώρα θα αναφερθούμε στη μέθοδο προσδιορισμού του μέγιστου εκθέτη Liapunov. Αυτό μπορεί να γίνει λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (11.155) και (11.158). Η λύση των Εξ. (11.155) δίνει την τροχιά αναφοράς στα σημεία της οποίας υπολογίζεται η ιακωβιανή και γράφονται οι εξισώσεις (11.158). Στην περίπτωση χαοτικού συστήματος το μήκος $\|\xi(t)\|$ του διανύσματος απόκλισης μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\|\xi(t)\| \approx \mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{m}}t}$, όπου λ_{m} ο μέγιστος εκθέτης Liapunov. Στην πραγματικότητα η σχέση ισχύει μετά από αρκετό χρόνο όταν τα μεταβατικά φαινόμενα μηδενιστούν και αφού η συμβολή των άλλων μικρότερων εκθετών γίνει αμελητέα. Έτσι ο ορισμός του μέγιστου εκθέτη δίνεται από τη σχέση

$$\lambda_{\mathrm{m}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|\xi(t)\|}{t}. \tag{11.159}$$

Στην πράξη αρκεί ο χρόνος να είναι αρκετά μεγάλος. Αν $\lambda_{\mathrm{m}} > 0$ τότε το σύστημα είναι χαοτικό. Δηλαδή ο με οποιονδήποτε τρόπο υπολογισμός του μέγιστου εκθέτη είναι χρήσιμος γιατί απαντά στο ερώτημα αν το σύστημα είναι χαοτικό.

Θα πούμε δυο λόγια για τον υπολογισμό όλων των n εκθετών. Αφού n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ορίζουν ένα «ελλειψοειδές» n διαστάσεων, αυτό μας οδηγεί σε μια εικόνα για τους n εκθέτες Liapunov με χρήση της εξέλιξης του ελλειψοειδούς στον εφαπτομενικό χώρο του χώρου των φάσεων. Η γενική μέθοδος συνίσταται στην εισαγωγή στον παραπάνω χώρο, ενός πλήθους n διανυσμάτων γραμμικά ανεξάρτητων $\left(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)$. Αυτά τα διανύσματα την αρχική στιγμή $t=0$ παριστάνονται με $\left(\boldsymbol{\xi}_0^{(1)}, \boldsymbol{\xi}_0^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_0^{(n)}\right)$ και λαμβάνονται να είναι ορθοκανονικά. Αυτά σχηματίζουν μια μοναδιαία (υπερ)σφαίρα, με «ακτίνα» ένα. Για κάθε ένα διάνυσμα ισχύει η εξίσωση (11.158), δηλαδή

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^{(j)} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\xi}^{(j)},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.160}$$

Θεωρούμε ότι τα n διανύσματα $\boldsymbol{\xi}^{(j)}$ αποτελούν τις στήλες μιας μήτρας $\boldsymbol{U}$, $n\times n$, οπότε οι σχέσεις (11.160) γράφονται στη μορφή

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{U}. \tag{11.161}$$

Ο συνδυασμός αυτών των εξισώσεων και των εξισώσεων (11.158), περιγράφουν την εξέλιξη της αρχικής μοναδιαίας σφαίρας σε ελλειψοειδές n διαστάσεων. Το ελλειψοειδές έχει n κύριους ημιάξονες. Αν p_i είναι ένας κύριος ημιάξονας του ελλειψοειδούς τη στιγμή t τότε αφού $p_i(0) = 1$ θα ισχύει

$$p_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.162}$$

Τα λ_i είναι οι n εκθέτες Liapunov.

Ως παράδειγμα δίνουμε την ιακωβιανή για τις εξισώσεις του διεγειρόμενου αμονικά εκκρεμούς με απόσβεση. Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης (11.153) στη μορφή

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \omega = f_\theta(\theta, \omega, \varphi) \\
\dot{\omega} &= -\frac{1}{Q}\omega - \sin\theta + B\cos\varphi = f_\omega(\theta, \omega, \varphi) \\
\dot{\varphi} &= \omega_{\mathrm{D}} = f_\varphi(\theta, \omega, \varphi).
\end{aligned} \tag{11.163}$$

Ο (εκτεταμένος) φασικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, αφού υπάρχουν τρεις εξισώσεις και τρεις μεταβλητές οι θ, ω, φ. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (11.156) και βρίσκουμε την παρακάτω ιακωβιανή μήτρα, 3×3,

.

$$\boldsymbol{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_\theta}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_\theta}{\partial \omega} & \dfrac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f_\omega}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_\omega}{\partial \omega} & \dfrac{\partial f_\omega}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_\varphi}{\partial \omega} & \dfrac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos\theta(t) & -1/Q & -B\sin\varphi(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{11.164}$$

Σε αυτή την περίπτωση και σε παρόμοιες περιπτώσεις που η μια διάσταση σχετίζεται με τον χρόνο ο αντίστοιχος συντελεστής Liapunov είναι μηδέν. Αυτός ο συντελεστής αντιστοιχεί στην κίνηση κατά την κατεύθυνση της ροής, δηλαδή της τροχιάς. Στην περίπτωση του εκκρεμούς μπορούμε να το διαισθανθούμε διότι δυο γειτονικά σημεία $\varphi_\mathrm{r}, \varphi_\mathrm{t}$ κατά μήκος της μεταβολής του φ έστω ότι απέχουν απόσταση ε_0 τη στιγμή $t=0,\ \varphi_\mathrm{r}(0)-\varphi_\mathrm{t}(0)=\varepsilon_0$. Τη στιγμή t το ένα θα βρίσκεται στη θέση $\varphi_\mathrm{r}(t)=\varphi_\mathrm{r}(0)+\omega_\mathrm{D}t$ και το άλλο στη θέση $\varphi_\mathrm{t}(t)=\varphi_\mathrm{t}(0)+\omega_\mathrm{D}t$ επομένως η διαφορά τους θα είναι $\varepsilon(t)=\varepsilon_0$, οπότε ο αντίστοιχος εκθέτης $\lambda_3=0$, σύμφωνα με την εξίσωση (11.159). Επομένως σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορούμε να εργαστούμε στον «συνήθη» φασικό χώρο $n-1$ διαστάσεων που στην περίπτωση του εκκρεμούς είναι ο φασικός χώρος δυο διαστάσεων $\theta, \omega=\dot{\theta}$ και χρειάζεται να προσδιοριστούν μόνο οι δυο άλλοι εκθέτες οι λ_1, λ_2.

Μπορεί να δειχτεί ότι ο «όγκος» V του ελλειψοειδούς στον χώρο των φάσεων μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$V(t) = V(0)\mathrm{e}^{-\Lambda t},\ \Lambda = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ . \tag{11.165}$$

Αν το άθροισμα είναι μηδέν τότε το σύστημα είναι συντηρητικό και ο φασικός όγκος διατηρείται, αν είναι αρνητικό ο όγκος μειώνεται και τελικώς μηδενίζεται. Μπορεί να δειχτεί ότι ισχύει η σχέση $1/Q = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Θα αναφερθούμε τώρα στη μέθοδο που χρησιμοποιείται πολύ συχνά κυρίως για τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Liapunov η οποία είναι σχετικά απλούστερη από την προηγούμενη, όμως η προηγούμενη είναι πιο αξιόπιστη (robust).

Θα την εφαρμόσουμε, όπως συνηθίζεται, μόνο για τον υπολογισμού του μέγιστου εκθέτη. Αυτή λέγεται μέθοδος διανύσματος διαφοράς ή απόκλισης (deviation vector method). Με αυτή τη μέθοδο, ακολουθούμε δυο τροχιές στον χώρο των φάσεων οι οποίες την αρχική στιγμή απέχουν πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους, $d_0=\varepsilon_0 \ll 1$. Σε διαδοχικά σχετικά μικρά χρονικά διαστήματα βρίσκουμε το μέτρο (μήκος) $d(t)$ του διανύσματος της διαφοράς μεταξύ των αντίστοιχων σημείων των δυο τροχιών στον $n-$ διάστατο φασικό χώρο. Με αυτή τη μέθοδο γίνεται χρήση των τιμών των συνιστωσών του φασικού χώρου που δίνονται σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα, οπότε η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σχετικά εύκολα στην περίπτωση που κάποιος επεξεργάζεται πειραματικά δεδομένα. Δεν χρειάζεται να είναι γνωστές οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης. Δεν θα αναπτύξουμε θέματα σχετικά με την ακρίβεια υπολογισμών και με το πώς γίνεται η επιλογή των βημάτων της μεθόδου. Με αυτή τη μέθοδο η σχέση υπολογισμού (11.159) του μέγιστου εκθέτη (11.159) αντικαθίσταται από τη σχέση,

$$\lambda_\mathrm{m} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ d_0\to 0}} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d_0} \right). \tag{11.166}$$

Όμως η απόκλιση $d(t)$ πρέπει να είναι σχετικά μικρή για να ισχύει η γραμμική συμπεριφορά που αναφέραμε στα προηγούμενα, δηλαδή δεν πρέπει να υπάρχει μεγάλη απομάκρυνση από την τροχιά αναφοράς. Εκτός από αυτό υπάρχει και το πρόβλημα του κορεσμού (saturation), δηλαδή η χαοτική περιοχή κανονικά, είναι περιορισμένη (πεπερασμένη) στον φασικό χώρο οπότε η απόσταση μεταξύ των δυο τροχιών δεν γίνεται μεγαλύτερη από το μέση απόσταση (διάσταση) της χαοτικής περιοχής. Δηλαδή το $d(t)$ φτάνει σε μια μέγιστη κατά μέσον όρο σταθερή τιμή, οπότε ο εκθέτης θα υπολογίζονταν λανθασμένα και θα βρίσκονταν ίσος με μηδέν. Πράγματι αφού $d(t) \to B = \text{σταθερό}$,

$$\lambda_{\mathrm{m}} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ d_0 \to 0}} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{D}{d_0} \right) = 0 \cdot$$

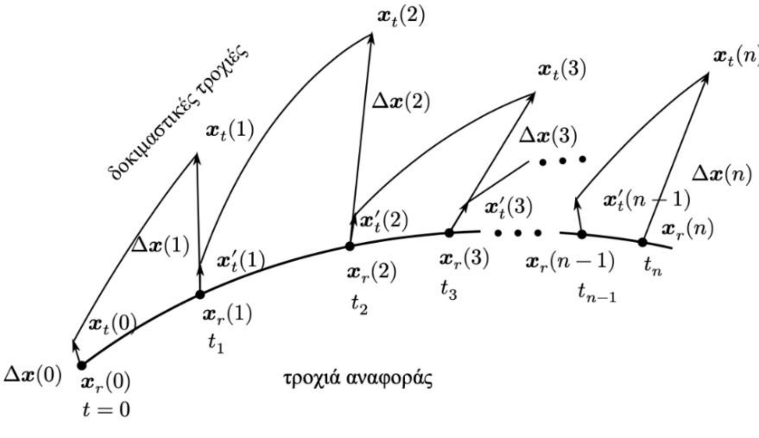
Αυτά τα προβλήματα δεν υπάρχουν στην προηγούμενη μέθοδο των εξισώσεων μεταβολών διότι αυτές είναι γραμμικές και έχουν γραμμικές λύσεις. Για να αποφευχθούν αυτές οι δυσκολίες, αυτό που γίνεται στην περίπτωση του διανύσματος απόκλισης είναι η επανακανονικοποίηση (renormalization). Η διαδικασία είναι αυτή που ακολουθεί και το Σχήμα 11.50 βοηθά στην κατανόηση. Η τροχιά αναφοράς είναι η κάτω συνεχής τροχιά. Η τροχιά αναφοράς είναι λύση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης του συστήματος που εξετάζεται με αρχική συνθήκη (χρόνος $t = 0$) στον χώρο των φάσεων, $x_{\mathrm{r}}(0)$. Η δοκιμαστική τροχιά είναι λύση των ίδιων εξισώσεων κίνησης με πολύ γειτονική αρχική συνθήκη, ισχύουν

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{t}}(0) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(0) + \Delta\boldsymbol{x}(0), \ \ \|\Delta\boldsymbol{x}(0)\| = d_0 = \varepsilon_0 << 1 .$$

Δηλαδή το μήκος (μέτρο) του μικρού βέλους είναι πολύ μικρό, ε_0 . Την πρώτη χρονική στιγμή t_1, μετά την αρχική $t = 0$, που το διάνυσμα που ενώνει τα σημεία των δυο τροχιών αποκτήσει μήκος μεγαλύτερο από κάποιο προκαθορισμένο μικρό μήκος d_{c} , τέτοιο που να εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις για μη κορεσμό και γραμμικότητα που αναφέραμε πιο πάνω, δηλαδή αν $d_1(t_1) = \|\Delta\boldsymbol{x}(1)\| > d_{\mathrm{c}}$, τότε κάνουμε επανακανονικοποίηση. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε ως αρχικό σημείο (αρχική συνθήκη) για τη συνέχιση της δοκιμαστικής τροχιάς όχι το σημείο $x_{\mathrm{t}}(1)$ αλλά το σημείο $x'_{\mathrm{t}}(1)$ που προκύπτει μετά από κανονικοποίηση έτσι ώστε να βρίσκεται πάνω στο διάνυσμα $x_{\mathrm{t}}(1)$ αλλά να έχει μέτρο (μήκος) ίσο με $d_0 = \varepsilon_0$. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\boldsymbol{x}'_{\mathrm{t}}(t_1) = \left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{t}}(t_1) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t_1) \right) \frac{d_0}{d_1} + \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t_1) . \tag{11.167}$$

Η τροχιά αναφοράς συνεχίζεται κανονικά. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται από t_1 ως t_2 μέχρι το τελικό βήμα, με τελικό χρόνο t_n .



Σχήμα 11.50 *Η διαδικασία επανακανονικοποίησης για το διάνυσμα απόκλισης.*

Προφανώς μπορεί κάποιος να ξεκινήσει με αρχική στιγμή τη στιγμή $t = t_0$ οπότε η συλλογιστική και οι σχέσεις τροποποιούνται ανάλογα. Στη συνέχεια, με βάση τον ορισμό της σχέσης (11.166), οδηγούμαστε στον υπολογισμό ενός μέγιστου εκθέτη από κάθε μια από τις παραπάνω διαδοχικές ολοκληρώσεις-επαναλήψεις, δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} & d_i = d(t_i) = \left\| \Delta \boldsymbol{x}(i) \right\| \\ & t_i - t_{i-1}, \lambda_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \ln \frac{d_i}{\varepsilon_0} \\ & \lambda_i (t_i - t_{i-1}) = \ln \frac{d_i}{\varepsilon_0}, \quad i = 1, 2, \dots n. \end{aligned} \tag{11.168}$$

Μπορούμε να υποθέτουμε ότι $\lambda_i \approx \lambda_{\mathrm{m}}$ οπότε αθροίζουμε τις τελευταίες από τις παραπάνω σχέσεις και υπολογίζουμε ένα είδος μέσης τιμής που μας δίνει το λ_{m}, δηλαδή

$$\lambda_{\mathrm{m}} = \lim_{\substack{\varepsilon_0 \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{1}{t_n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{d_i}{\varepsilon_0} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_0 \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{1}{t_n} \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\varepsilon_0} \right). \tag{11.169}$$

Μπορούμε επίσης να πούμε ότι η τελευταία από τις σχέσης των Εξ. (11.168) ορίζει τη μέση τιμή των λ_i που ταυτίζουμε με το λ_{m}, συγκεκριμένα θεωρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - t_{i-1}) = \lambda_{\mathrm{m}} t_n \,. \tag{11.170}$$

Συνήθως γίνεται η γραφική παράσταση της έκφρασης $\ln \prod_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\varepsilon_0}$ συναρτήσει του χρόνου t_k και από την κλίση της καμπύλης στην ευθύγραμμη περιοχή της υπολογίζεται το λ_{m}.

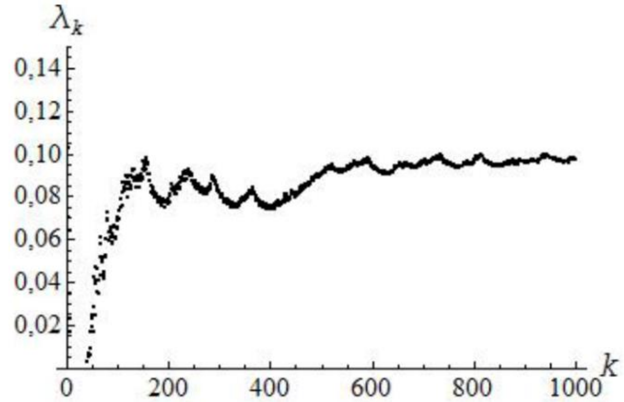
Ο άλλος τρόπος είναι να γίνει η γραφική παράσταση των $\lambda_k = \frac{1}{t_k} \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{d_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{t_k} \ln \prod_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\varepsilon_0}$ συναρτήσει του t_k και από την οριζόντια ευθεία γραμμή που προκύπτει μετά τα μεταβατικά φαινόμενα, προσδιορίζεται και πάλι ο λ_{m}. Μια λίγο διαφορετική μέθοδος συνίσταται στο να επιλεγεί κάποιο κατάλληλο διάστημα χρόνου τ τέτοιο που κάθε φορά που ισχύει $t_k = k\tau$, k θετικός ακέραιος, να γίνεται επανακανονικοποίηση. Σε αυτή την περίπτωση δε χρειάζεται να υποθέσει κάποιος ότι $\lambda_i \approx \lambda_{\mathrm{m}}$ για να πάει από τις Εξ. (11.168) στις Εξ. (11.169).

Οι σχέσεις είναι στην ουσία ίδιες με πριν, αλλά μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_{\mathrm{m}} = \lim_{\substack{\varepsilon_0 \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{d_i(i\tau)}{\varepsilon_0} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_0 \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{1}{n\tau} \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i(i\tau)}{\varepsilon_0} \right) \tag{11.171}$$

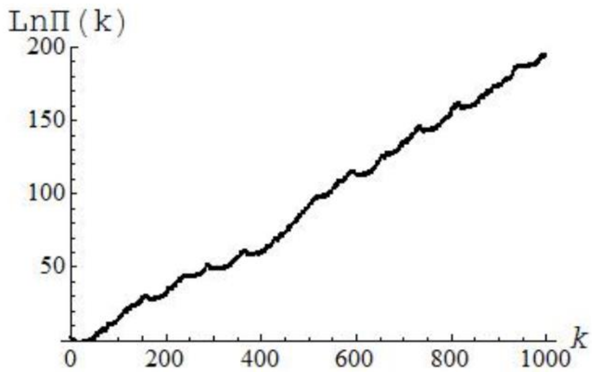
Επίσης μπορούμε να κάνουμε γραφικές παραστάσεις ανάλογα με αυτές που αναφέραμε πριν για τα αντίστοιχα $\lambda_k = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{d_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{k\tau} \ln \prod_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\varepsilon_0}$ ή τα $\ln \prod_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\varepsilon_0}$ συναρτήσει του χρόνου $k\tau$ και να βρούμε την κλίση ή τη μέση τιμή. Σε ότι ακολουθεί αναφερόμαστε στον φασικό χώρο των δυο διαστάσεων για το εκκρεμές

$\theta, \omega = \dot{\theta}$. Αυτό γίνεται διότι, όπως είπαμε και στα προηγούμενα, η άλλη διάσταση αντιστοιχεί στον χρόνο και είναι κατά τη διεύθυνση της τροχιάς στον εκτεταμένο φασικό χώρο. Δε συμβάλει στην μεγέθυνση ή σμίκρυνση του φασικού «όγκου» οπότε οδηγεί σε εκθέτη μηδέν. Έτσι αυτή η διάσταση δεν έχει συμβολή στον υπολογισμό των άλλων δυο εκθετών ούτε του λ_{m} που θα υπολογίσουμε. Ακολουθήσαμε την παραπάνω τελευταία διαδικασία για τον υπολογισμό του λ_{m}. Σε όλες τις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται επανακανονικοποίηση, ο χρόνος επανακανονικοποίησης είναι $\tau = 2$, οπότε ο χρόνος στο «βήμα» k είναι $t = t_k = k\tau = 2k$. Η αρχική θέση στον φασικό χώρο είναι για την τροχιά αναφοράς $\theta(0) = 3, \omega(0) = 0$ και για την δοκιμαστική τροχιά $\theta(0) = 3,001$, $\omega(0) = 0$. Οι παράμετροι για το εκκρεμές σε χαοτική κατάσταση είναι οι $Q = 2,\ B = 1,15$, $\omega_{\mathrm{D}} = 2/3$. Στο Σχήμα 11.51 δίνουμε τη γραφική παράσταση των λ_k συναρτήσει του k και από το τελευταίο σχεδόν οριζόντιο τμήμα, βρίσκουμε την «ασυμπτωτική» τιμή δηλαδή, $\lambda_{\mathrm{m}} \approx 0,1$.



Σχήμα 11.51 *Εκθέτης Liapunov ως συνάρτηση του βήματος υπολογισμού, χαοτικό σύστημα.*

Στο Σχήμα 11.52 δίνουμε τη γραφική παράσταση για τον υπολογισμό από την κλίση του μέγιστου εκθέτη Liapunov για το εκκρεμές όταν η κατάσταση είναι χαοτική. Ο οριζόντιος άξονας είναι το k, βρίσκουμε και πάλι $\lambda_{\mathrm{m}} \approx 0,1$.

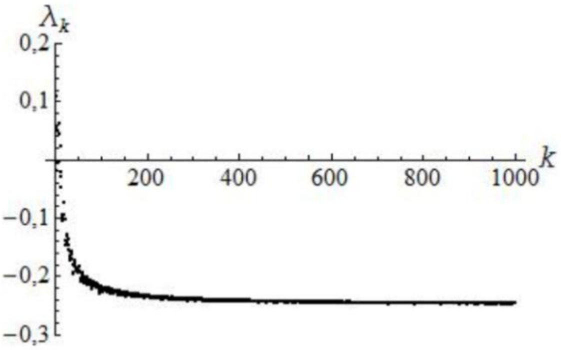


Σχήμα 11.52 *Γραφική παράσταση για τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Liapunov για χαοτικό εκκρεμές.*

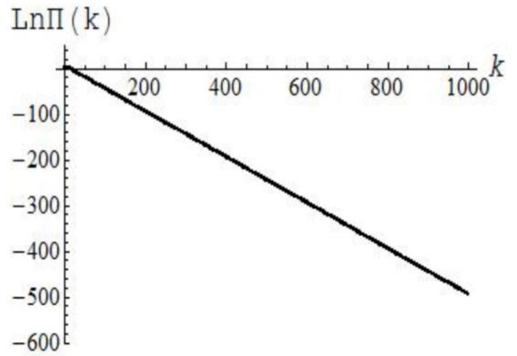
Εφόσον ο μέγιστος εκθέτης Liapunov είναι θετικός επιβεβαιώνει ότι το σύστημα είναι χαοτικό.

Στα Σχήματα 11.53 και 11.54 δείχνουμε αντίστοιχες καμπύλες όταν το σύστημα του εκκρεμούς δεν είναι χαοτικό. Σε αυτή την περίπτωση οι παράμετροι του εκκρεμούς είναι

$$Q = 2,\ B = 0,9\ ,\ \omega_{\mathrm{D}} = 2/3\ .$$



Σχήμα 11.53 *Εκθέτης Liapunov ως συνάρτηση του βήματος υπολογισμού, μη χαοτικό σύστημα.*

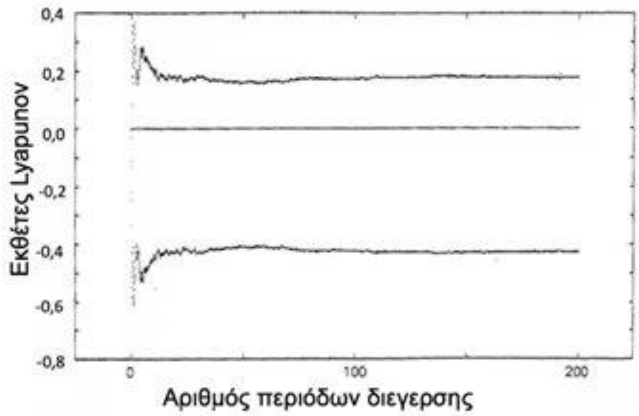


Σχήμα 11.54 *Γραφική παράσταση για τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Liapunov για μη χαοτικό εκκρεμές.*

Και από τα δυο σχήματα υπολογίζουμε ότι $\lambda_{\mathrm{m}} \approx -0,25$, αφού ο μέγιστος εκθέτης είναι αρνητικός αυτό επιβεβαιώνει ότι η κατάσταση είναι κανονική, δεν είναι χαοτική.

Για πληρότητα δίνουμε και ένα παράδειγμα όπου έχουν υπολογιστεί και οι τρεις εκθέτες για το εκκρεμές σε χαοτική κατάσταση. Το Σχήμα 11.55 αντιστοιχεί σε παραμέτρους

$$Q = 4,\ B = 1,4954\ ,\ \omega_{\mathrm{D}} = 2/3\ .$$



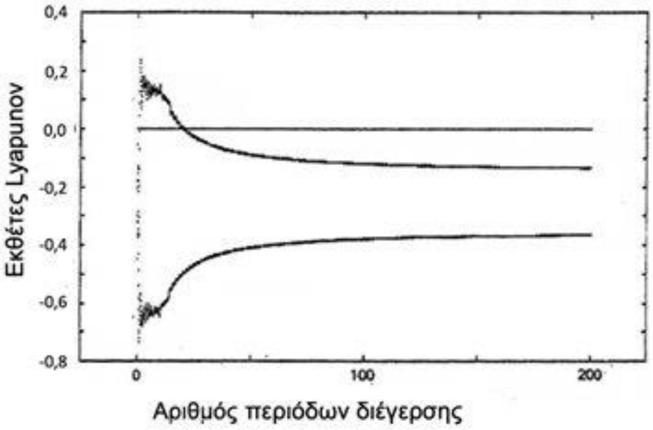
Σχήμα 11.55 *Διάγραμμα υπολογισμού των τριών πρώτων εκθετών Liapunov, χαοτική κατάσταση.*

Έχουμε $\lambda_1 = 0,16$, $\lambda_2 = -0,42$, $\lambda_3 = 0$. Ο υπολογισμός με την παραπάνω μέθοδο για τον λ_{m}, δίνει επίσης $\lambda_{\mathrm{m}} = 0,16$, δηλαδή δίνει πράγματι μέσα στα όρια σφαλμάτων τον μέγιστο χαρακτηριστικό εκθέτη Liapunov.

Διαπιστώνεται ότι ισχύει με ικανοποιητική προσέγγιση η σχέση που αναφέραμε στα προηγούμενα, δηλαδή η $\dfrac{1}{Q} = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i$.

Πράγματι $1/4 = 0,25 \approx -\big(0,16-(-0.42)+0\big) = 0,26$.

Στο Σχήμα 11.56 δίνουμε το διάγραμμα για τους τρεις εκθέτες στην περίπτωση κανονικής (μη χαοτικής) κατάστασης του εκκρεμούς. Οι παράμετροι είναι $Q=2,\ B=1{,}125$, $\omega_{\mathrm{D}} = 2/3$.



Σχήμα 11.56 *Διάγραμμα υπολογισμού των τριών πρώτων εκθετών Liapunov, μη χαοτική κατάσταση.*

Εδώ παρατηρούμε ότι οι δυο εκθέτες είναι αρνητικοί και ο ένας μηδέν, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι πρόκειται για κανονική κατάσταση.

11.3.9 Διαγράμματα διακλάδωσης

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα διαγράμματα διακλάδωσης (bifurcation diagrams).

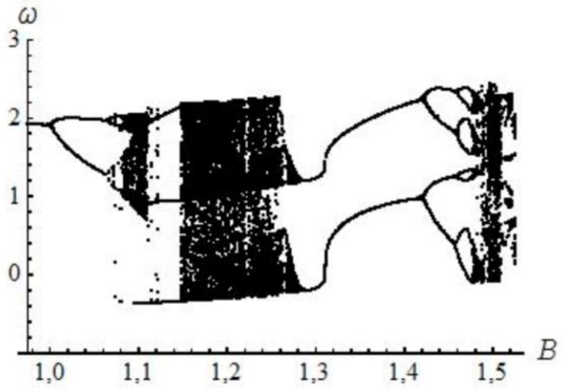
Η δυναμική ενός συστήματος μπορεί να μελετηθεί με δεδομένες κάθε φορά παραμέτρους. Αυτό κάναμε λίγο πολύ μέχρι τώρα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός συστήματος καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροί του κατά συνεχή τρόπο. Βοηθά στη μελέτη η κατάλληλη γραφική παράσταση της εξέλιξης του συστήματος συναρτήσει των παραμέτρων. Αυτό που θα δούμε είναι τη μεταβολή συναρτήσει μιας παραμέτρου με τις άλλες να μένουν σταθερές. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να δει κάποιος ποιοτικές μεταβολές στη συμπεριφορά του συστήματος, συμπεριλαμβανομένης της χαοτικής συμπεριφοράς. Το διάγραμμα διακλάδωσης προσφέρεται για αυτό τον σκοπό. Θα περιοριστούμε και πάλι στο εκκρεμές.

Γενικώς στη δυναμική, η ποιοτική μεταβολή που αναφέραμε προηγουμένως καθώς κάποια παράμετρος μεταβάλλεται, λέγεται διακλάδωση (bifurcation).

Στην περίπτωση του εκκρεμούς θα κάνουμε τη μελέτη μας μεταβάλλοντας το πλάτος διέγερσης B και θα φτιάξουμε το διάγραμμα διακλάδωσης. Αυτό το διάγραμμα (ένα είδος γραφήματος) αναφέρεται στην γραφική παράσταση του $\omega = \dot{\theta}$ συναρτήσει του πλάτους διέγερσης B όπου η τιμή για το ω είναι η τιμή για ορισμένη φάση του κύκλου διέγερσης, όπως γίνεται στην περίπτωση της απεικόνισης Poincare. Αυτό γίνεται αφού σβήσει το μεταβατικό φαινόμενο και η κίνηση είναι πάνω σε ελκυστή. Παρόλο που δεν αναφερθήκαμε στον όρο διακλάδωση, έχουμε ήδη δει μεταβολές στη συμπεριφορά του εκκρεμούς όταν μεταβάλλεται το B , με τα σχήματα που ξεκινούν από το Σχήμα 11.40 και μετά. Όταν το εκκρεμές διεγείρεται με σχετικά μικρό πλάτος διέγερσης, τότε η κίνηση είναι περιοδική με (κυκλική) συχνότητα ίδια με τη διεγείρουσα ω_{D} , έτσι το ανωτέρω ω έχει μια μόνο τιμή. Αν το πλάτος B αυξάνεται σταδιακά η κίνηση μπορεί να εξακολουθήσει να είναι περιοδική ακόμη και με την ίδια (θεμελιώδη) συχνότητα αλλά να αντιστοιχεί σε διαφορετικές τροχιές που εξαρτώνται από διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Εμφανίζεται τότε και σπάσιμο της συμμετρίας χώρου. Στο διάγραμμα διακλάδωσης θα εμφανίζονται δυο κλάδοι που αντιστοιχούν σε δυο σημεία για το ίδιο B , ενώ στο διάγραμμα της τομής Poincare έχουμε ένα σημείο αφού η συχνότητα για τις δυο λύσεις (τροχιές) είναι η ίδια. Γενικώς για το ίδιο B μπορεί να εμφανιστούν περισσότερες της μιας περιοδικές κινήσεις και το διάγραμμα διακλάδωσης θα έχει περισσότερα του ενός (πεπερασμένου πλήθους) σημεία, δηλαδή πολλές τιμές του ω που ορίσαμε παραπάνω. Όταν το B έχει τιμές που αντιστοιχούν σε χαοτικές κινήσεις τότε το ω έχει άπειρο πλήθος τιμών που όμως η περιοχή αυτών των τιμών έχει και «τρύπες», δηλαδή τα σημεία δεν καλύπτουν πυκνά τον χώρο.

Για κάποιες τιμές του B εμφανίζεται και το φαινόμενο διπλασιασμού περιόδου, που αναφέραμε στα προηγούμενα, αυτό σημαίνει εμφάνιση θεμελιώδους κυκλικής συχνότητας $\omega_{\mathrm{D}}/2$ και της ω_{D} που τώρα είναι πρώτη αρμονική της, η $\omega_{\mathrm{D}}/2$ μπορεί να θεωρηθεί ως πρώτη υποαρμονική της ω_{D}.

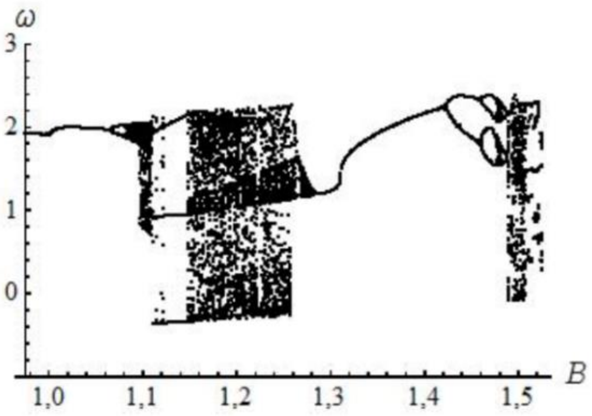
Ας δούμε μερικά πράγματα από αυτά που δείχνει το διάγραμμα διακλάδωσης του εκκρεμούς που φαίνεται στο Σχήμα 11.57. Οι σταθερές τιμές των παραμέτρων είναι $Q=2,\ \omega_{\mathrm{D}}=2/3$ ενώ το B μεταβάλλεται από 0,975 μέχρι 1,525.



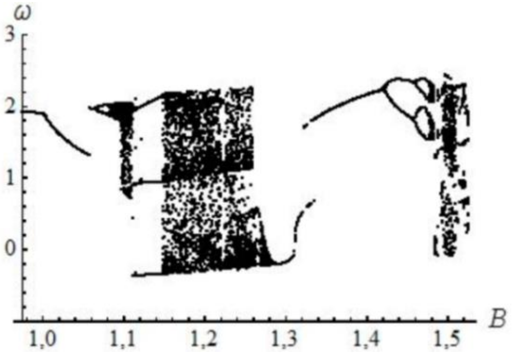
Σχήμα 11.57 *Διάγραμμα διακλάδωσης του εκκρεμούς για* $Q=2,\ \omega_{\mathrm{D}}=2/3$.

Σημειώνουμε ότι όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις, παραλείπονται τα σημεία στο αρχικό χρονικό διάστημα που εδώ ισούται με 30 περιόδους διεγέρσεως, για να αγνοηθεί το μεταβατικό φαινόμενο και να μείνει η κίνηση στον ή στους ελκυστές. Απεικονίζονται τα σημεία για το επόμενο χρονικό διάστημα που ισούται με 30 τέτοιες περιόδους. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό το γράφημα έγινε με τρεις διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Αν δεν κάναμε αυτό, θα υπήρχαν διάφορα «κενά» στη «συνέχεια» του γραφήματος.

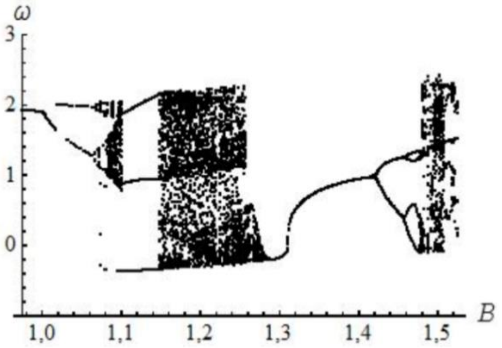
Τα τρία γραφήματα των οποίων επαλληλία είναι το γράφημα του Σχήματος 11.57, είναι το γράφημα στο Σχήμα 11.58 με αρχικές συνθήκες $\theta(0)=0, \omega(0)=1,9$, αυτό στο Σχήμα 11.59 με $\theta(0)=0, \omega(0)=1,8$ και το 11.60 με $\theta(0)=0, \omega(0)=1,2$. Οι επιλογές των αρχικών συνθηκών έγιναν εμπειρικά.



Σχήμα 11.58 *Το πρώτο από τα τρία διαγράμματα διακλάδωσης των οποίων η επαλληλία είναι το διάγραμμα του σχήματος 11.57.*



Σχήμα 11.59 *Το 2ο από τα 3 διαγράμματα διακλάδωσης των οποίων η επαλληλία είναι το διάγραμμα του σχήματος 11.57.*

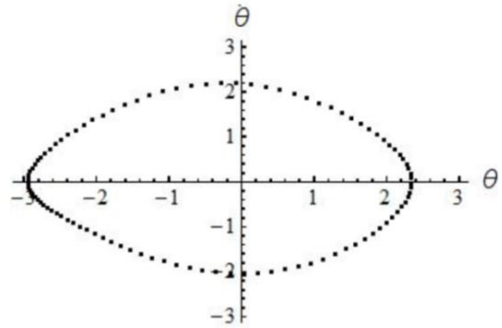


Σχήμα 11.60 *Το 3ο από τα 3 διαγράμματα διακλάδωσης των οποίων η επαλληλία είναι το διάγραμμα του σχήματος 11.57.*

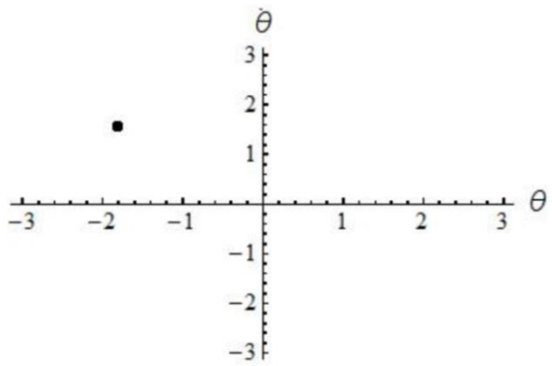
Ας δούμε τη μεταβολή στη συμπεριφορά του συστήματος πηγαίνοντας από μικρές προς μεγάλες τιμές του B. Όταν το B είναι σχετικά μικρό, έστω $B = 0,9$, έχουμε δει στα προηγούμενα (βλέπε Σχήμα 11.40 και 11.41) ότι το σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση με τη συχνότητα διέγερσης, αυτό οδηγεί στο να έχουμε ένα σημείο στο διάγραμμα διακλάδωσης. Αυτό γίνεται για όλη την περιοχή που φαίνεται στο αριστερό μέρος του διαγράμματος από $B = 0,975$ μέχρι B μικρότερο από περίπου 1,025. Αυτή είναι η αιτία που βλέπουμε μια «γραμμή» σε αυτή την περιοχή.

Όπως έχουμε δει, η προβολή της φασικής τροχιάς στον δισδιάστατο φασικό χώρο είναι αυτή του Σχήματος 11.40 ενώ το Σχήμα 11.41 δείχνει το ένα σημείο στην απεικόνιση Poincare. Η φασική τροχιά του Σχήματος 11.40 είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Αυτό είναι κατά κάποιο τρόπο σε συμφωνία με τη συμμετρία της διαφορικής εξίσωσης κίνησης του εκκρεμούς, Εξ. (11.153). Όταν αυξηθεί το B, στην τιμή περίπου 1,025, η μια γραμμή χωρίζεται σε δυο, έχουμε διακλάδωση, και ο κάθε κλάδος αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Αυτό γίνεται κατανοητό διότι στα Σχήματα 11.58 και 11.59 που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες, υπάρχει στο καθένα μόνο ο ένας κλάδος.

Το Σχήμα 11.61 δείχνει τη φασική τροχιά για $B = 1,025$ και στο Σχήμα 11.62 όπου φαίνεται η αντίστοιχη τομή Poincare για αρχικές συνθήκες $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$.



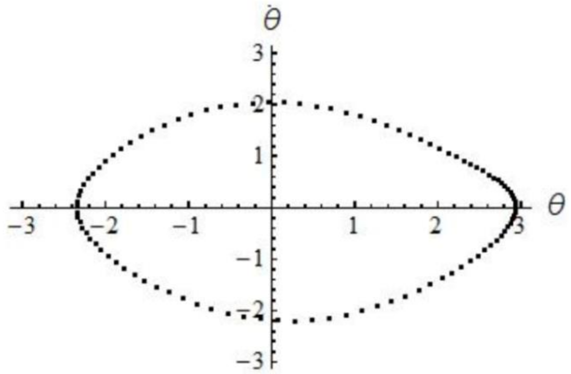
Σχήμα 11.61 *Φασική τροχιά για* $B = 1,025,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0) = 0$·



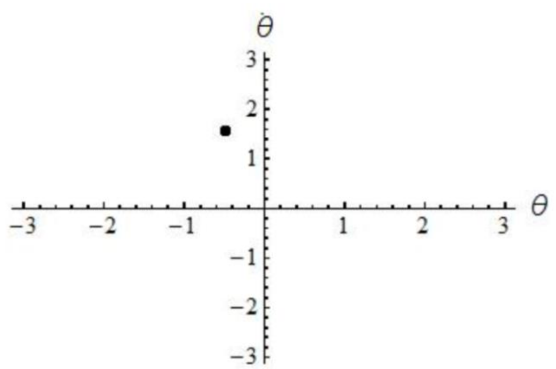
Σχήμα 11.62 *Τομή Poincare για* $B = 1{,}025,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0) = 0$·

Η συχνότητα είναι ίδια με τη συχνότητα διέγερσης αλλά βλέπουμε ότι το Σχήμα 11.61 δεν έχει συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα, έχει γίνει σπάσιμο της χωρικής συμμετρίας.

Το σπάσιμο της συμμετρίας είναι φαινόμενο που απαντά σε μη γραμμικά συστήματα, ακόμη και στη θεωρία Στοιχειωδών Σωματιδίων, θυμηθείτε το σωματίδιο higgs. Τα Σχήματα 11.63 και 11.64 έχουν γίνει με τις ίδιες παραμέτρους όπως πριν αλλά με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0{,}5$.

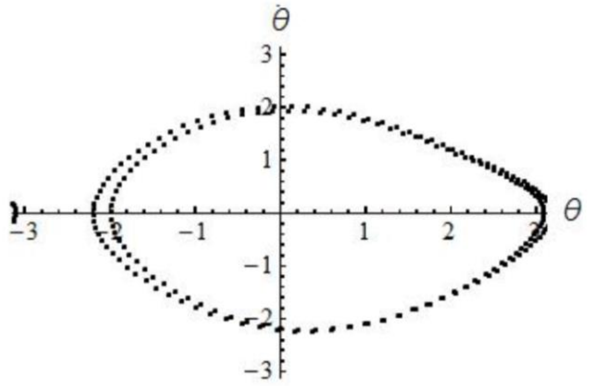


Σχήμα 11.63 *Φασική τροχιά για* $B = 1{,}025,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0) = 0{,}5$·

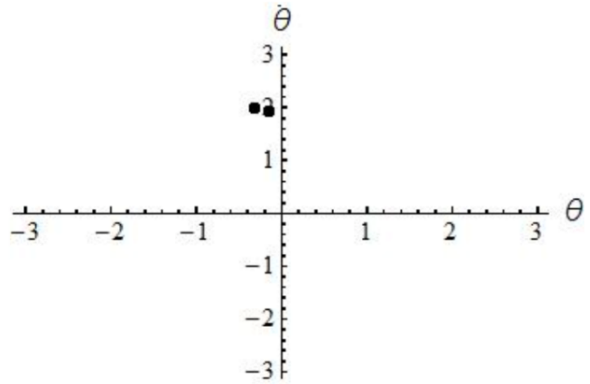


Σχήμα 11.64 *Τομή Poincare με* $B = 1{,}025,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0) = 0{,}5$·

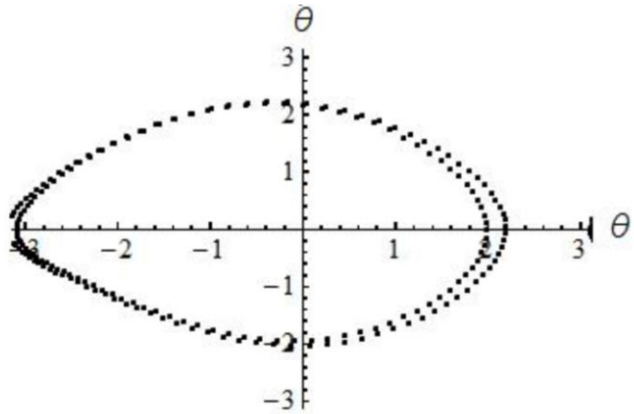
Βλέπουμε μια διαφορετική τροχιά συμμετρική με την προηγούμενη ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Η συχνότητα είναι ίδια όπως πριν. Στη συνέχεια δίνουμε στο B την τιμή 1,07. Προκύπτουν τα Σχήματα 11.65 και 11.66, με αρχικές συνθήκες $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 1{,}9$. Είναι ευνόητο ότι έχουμε διπλασιασμό περιόδου. Αυτά τα ίδια σχήματα λαμβάνονται και με τις αρχικές συνθήκες $\theta(0)=0,\dot{\theta}(0)=0$, βλέπε Σχήματα 11.42 και 11.43. Δηλαδή έχουμε τον ίδιο ελκυστή. Όμως αν αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες και θέσουμε $\theta(0)=0,\dot{\theta}(0)=1{,}1$ τότε παίρνουμε τα Σχήματα 11.67 και 11.68, διαφορετικός ελκυστής. Εδώ έχουμε διπλασιασμό περιόδου για τον καθένα από τους δυο κλάδους του διαγράμματος του Σχήματος 11.57, οι οποίοι υπάρχουν στην προηγούμενη περιοχή τιμών του B. Έτσι έχουμε τέσσερα σημεία στο διάγραμμα διακλάδωσης για την τιμή $B=1{,}07$.



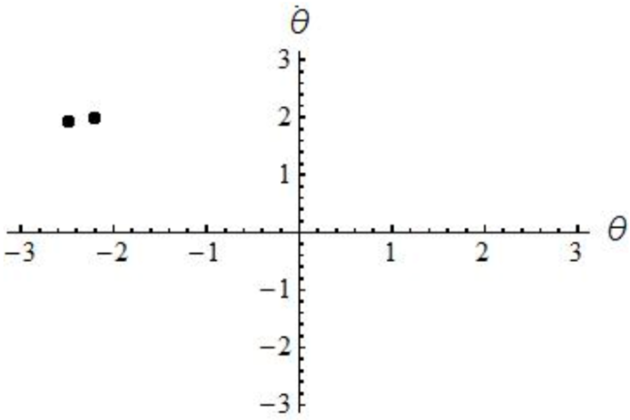
Σχήμα 11.65 *Φασική τροχιά για* $B=1{,}07,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0)=1{,}9$.



Σχήμα 11.66 *Τομή Poincare με* $B=1{,}07,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0)=1{,}9$.



Σχήμα 11.67 *Φασική τροχιά για* $B=1{,}07,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0)=1{,}1$.



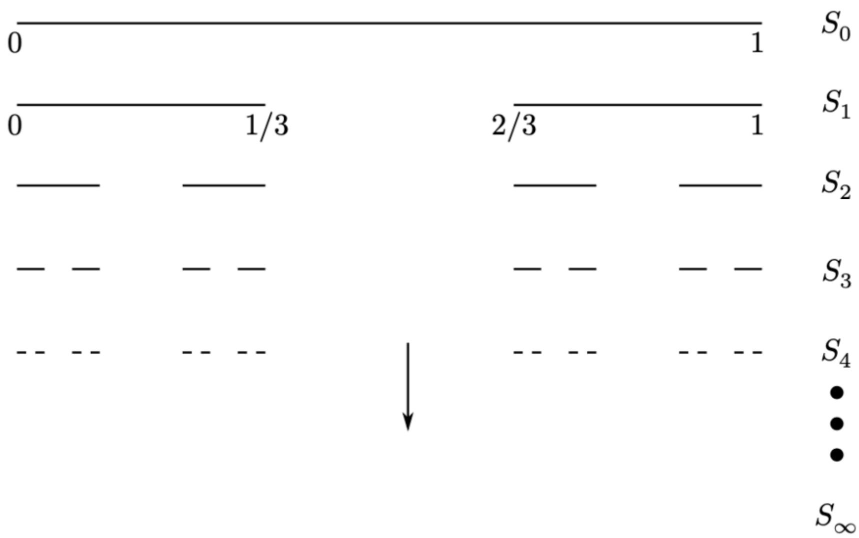
Σχήμα 11.68 *Τομή Poincare με* $B=1{,}07,\ \theta(0)=0,\ \dot{\theta}(0)=1{,}1$.

Στην περιοχή με B κοντά στο 1,1 είναι εμφανές από το Σχήμα 11.57 ότι έχουμε χάος, βλέπε Σχήματα 11.45, 11.46, 11.47 για $B=1{,}15$. Στη συνέχεια για $B\approx 1{,}12$ έχουμε και πάλι δυο κλάδους με περιοδικότητα. Μετά εμφανίζεται ξανά μια χαοτική περιοχή και στη συνέχεια μια ευρεία περιοχή περιοδικών κινήσεων, μετά πάλι διακλαδώσεις τύπου διπλασιασμού περιόδου και για μεγάλα B πάλι χάος.

11.3.10 Διαστατικότητα

Αναφέραμε και στα προηγούμενα ότι στην περίπτωση του χάους οι ελκυστές στους χώρους των φάσεων είναι παράξενοι ελκυστές (strange attractors) που έχουν φράκταλ δομή. Χονδρικά μπορούμε να πούμε ότι τα φράκταλ είναι πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα με λεπτή υφή σε αυθαίρετα μικρές κλίμακες. Συνήθως έχουν ένα είδος αυτοομοιότητας, δηλαδή αν μεγεθυνθεί ένα μικρό μέρος του φράκταλ βλέπουμε στο μεγεθυσμένο χαρακτηριστικά που θυμίζουν το αρχικό φράκταλ. Τα φράκταλ έχουν μη ακέραιες (ή μηδέν) διάσταση. Φυσικά χρειάζεται επανεξέταση της έννοιας της διαστατικότητας ώστε να συμφωνεί με τη συνηθισμένη έννοια της διάστασης 0,1,2,3… και να περιλαμβάνει και την έννοια της διαστατικότητας των φράκταλ.
Υπάρχουν πολλοί τρόποι να οριστεί η διάσταση. Θα περιοριστούμε στη διάσταση που λέγεται διάσταση χωρητικότητας (capacity dimension) d_c.

Θα ξεκινήσουμε με το λεγόμενο σύνολο (του) Cantor (Cantor set). Το Σχήμα 11.69 δείχνει πως φτιάχνεται αυτό το σύνολο.



Σχήμα 11.69 *Η διαδικασία σχηματισμού για το σύνολο Cantor.*

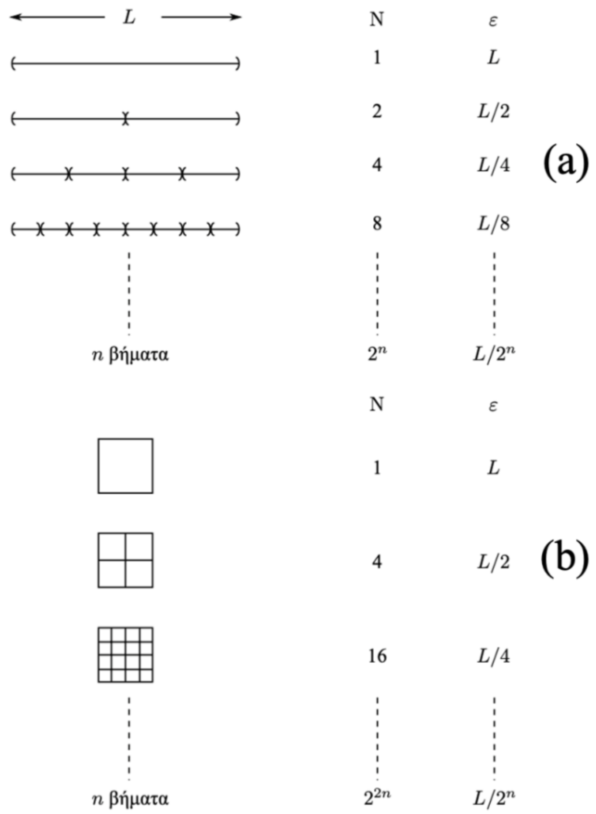
Ξεκινούμε από το σύνολο που είναι το κλειστό διάστημα, σε μια διάσταση, $S_0 = [0,1]$.

Στη συνέχεια παραλείπουμε το μεσαίο ανοιχτό διάστημα που είναι το ένα τρίτο του S_0, δηλαδή το $(1/3, 2/3)$. Αυτό οδηγεί στο σύνολο που είναι το ζευγάρι των δυο κλειστών διαστημάτων που παριστάνονται με το S_1. Εξακολουθούμε την ίδια διαδικασία για αυτά τα δυο κλειστά διαστήματα, δηλαδή παραλείπουμε το μεσαίο ανοιχτό διάστημα που είναι το ένα τρίτο του καθενός οπότε καταλήγουμε στο σύνολο S_2 που αποτελείται από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα που φαίνονται στο Σχήμα 11.69. Κάνουμε το ίδιο διαδοχικά και το οριακό σύνολο S_∞ είναι το σύνολο Cantor C, $C = S_\infty$. Το σύνολο C αποτελείται από άπειρο πλήθος από απειροστά διαστήματα (τμήματα) που χωρίζονται από «άδεια» διαστήματα με διάφορα μήκη. Το σύνολο Cantor έχει ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα φράκταλ. Αν μεγεθυνθεί ένα τμήμα του συνεχίζουμε να βλέπουμε έναν πολύπλοκο σχηματισμό όσο μεγάλη και να είναι η μεγέθυνση. Επίσης περιέχει όλο και μικρότερα αντίγραφα του εαυτού του σε όλες τις κλίμακες. Θα δούμε ότι η διάσταση του C δεν είναι θετικός ακέραιος ή μηδέν.

Σημειώνουμε επίσης, ότι το σύνολο Cantor έχει μέτρο (ένα είδος μήκους) μηδέν και αποτελείται από μη αριθμήσιμο (άπειρο) πλήθος σημείων.

Για τη γενίκευση της έννοιας της διάστασης, ξεκινούμε με μια συνήθη ευθεία γραμμή, δηλαδή με μια συνήθη διάσταση. Χρησιμοποιούμε το Σχήμα 11.70 (a) όπου υποθέτουμε ότι το μήκος της ευθείας είναι L. Αυτή η γραμμή μπορεί να καλυφθεί πλήρως από πλήθος $N(\varepsilon)$ μονοδιάστατων «κουτιών» πλευράς ίσης με $\varepsilon = L$, αυτό το πλήθος είναι ίσο με 1, $N(\varepsilon) = N(L) = 1$.

Αν η πλευρά του μονοδιάστατου κουτιού γίνει $\varepsilon = L/2$ τότε χρειάζονται $N(\varepsilon) = N(L/2) = 2$ τέτοια κουτιά, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Αν η διαδικασία συνεχιστεί n φορές τότε $\varepsilon = L/(2^n)$ επομένως $N(\varepsilon) = L \times (1/\varepsilon) = 2^n$.



Σχήμα 11.70 *Γενίκευση της έννοιας της διάστασης*

Στο Σχήμα 11.70(b) φαίνεται η αντίστοιχη διαδικασία για δισδιάστατο «κουτί», πλευράς L. Το δισδιάστατο αυτό «κουτί» (τετράγωνο), καλύπτεται από $N(\varepsilon) = L^2(1/\varepsilon)^2$ τετράγωνα πλευράς ε. Για τρισδιάστατο κουτί (κύβο) έχουμε τη σχέση $N(\varepsilon) = L^3(1/\varepsilon)^3$. Για κουτί d διαστάσεων (υπερκύβος) έχουμε $N(\varepsilon) = L^d(1/\varepsilon)^d$.

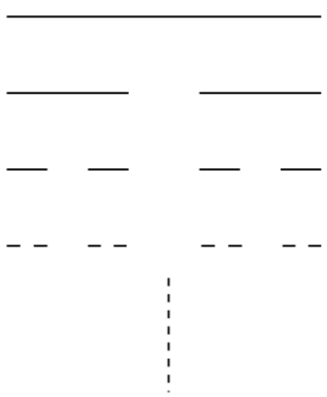
Παίρνουμε τον λογάριθμο (οποιοδήποτε είδος λογάριθμου) των δυο μελών της τελευταίας σχέσης και βρίσκουμε

$$d = d_{\mathrm{C}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log L + \log(1/\varepsilon)} \to \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \tag{11.172}$$

Αυτό γίνεται διότι καθώς $\varepsilon \to 0$, ισχύει $\log L << \log(1/\varepsilon)$.

Αυτός γενικεύεται για κάθε είδους διάσταση και είναι ο ορισμός της διάστασης χωρητικότητας, d_{C}. Ο ορισμός ξεκίνησε από τις συνήθεις διαστάσεις οπότε δίνει το σωστό αποτέλεσμα για τις διαστάσεις 1 και 2 που φαίνονται στο Σχήμα 11.70.

Η ίδια διαδικασία για το σύνολο Cantor φαίνεται στο Σχήμα 11.71.



	N	ε
	1	1
	2	1/3
	4	1/9
	8	1/27
⋮	⋮	⋮
n βήματα	2^n	$1/3^n$

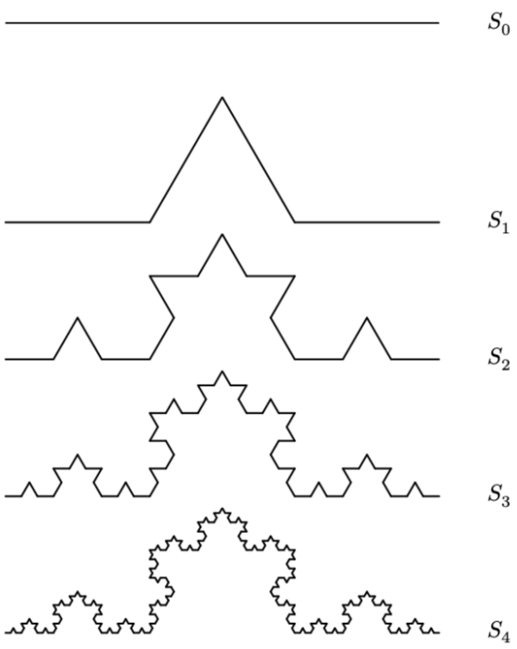
$$\begin{aligned} d_{\mathrm{C}} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\log N}{\log(1/\varepsilon)} \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\log 2^n}{\log 3^n} \right) \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} < 1 \end{aligned}$$

Σχήμα 11.71 *Η διάσταση για το σύνολο Cantor.*

Η διάσταση για αυτό το σύνολο Cantor που έχει δομή φράκταλ, είναι

$$d_{\mathrm{C}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,631 \cdot$$

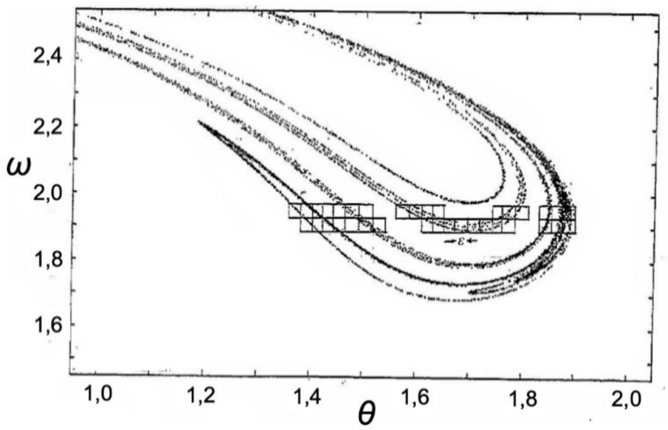
Μια άλλη περίπτωση φράκταλ που συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία είναι η καμπύλη (του) von Koch, ένα άλλο είδος συνόλου. Αυτή φαίνεται στο Σχήμα 11.72.



Σχήμα 11.72 *Η καμπύλη του von Koch.*

Ας ξεκινήσουμε με το ευθύγραμμο τμήμα S_0 στο Σχήμα 11.72. Το S_1 φτιάχνεται αφού απαλείψουμε το μεσαίο ένα τρίτο της παραπάνω ευθείας και στη θέση του θέσουμε τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για κάθε ευθύγραμμο τμήμα και φτάνουμε στο S_2. Η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον. Είναι η καμπύλη αυτή μονοδιάστατη; Όμως μπορεί να διαπιστωθεί ότι έχει μήκος που τείνει στο άπειρο καθώς τα παραπάνω βήματα κατασκευής της καμπύλης τείνουν στο άπειρο. Επίσης το μήκος μεταξύ οποιονδήποτε δυο σημείων της καμπύλης απέχουν μεταξύ τους (στο όριο) απόσταση κατά μήκος της καμπύλης ίση με το άπειρο. Αυτό σημαίνει πως δεν μπορεί να προσδιοριστεί με αυτό τον τρόπο η θέση ενός σημείου της καμπύλης σχετικά με ένα άλλο σημείο της που για κανονικές γραμμές, θεωρείται ως το σημείο αναφοράς. Αν χρησιμοποιήσουμε τον γενικό ορισμό βρίσκουμε ότι η καμπύλη von Koch έχει διάσταση $d_{\mathrm{C}} = \log 4 / \log 3 = 1,26$.

Τελικώς αναφέρουμε χωρίς λεπτομέρειες και χωρίς την απαιτούμενη επεξεργασία, την περίπτωση του εκκρεμούς σε χαοτική κατάσταση. Στο Σχήμα 11.73 φαίνεται ο ελκυστής στην τομή Poincare για $B = 1,4954$, $Q = 4,\ \omega_{\mathrm{D}} = 2/3$ και με επιλογή αρχικών συνθηκών $\theta(0) = 0, \omega(0) = 0$.



Σχήμα 11.73 *Ελκυστής στην τομή Poincare χαοτικού εκκρεμούς.*

Μπορεί να δειχτεί ότι ο παράξενος ελκυστής στην τομή Poincare δηλαδή στο Σχήμα 11.73 που βρίσκεται σε φασικό χώρο δυο διαστάσεων, με κατάλληλη χρήση της μεθόδου μέτρησης των δισδιάστατων κουτιών όπως είναι αυτά που φαίνονται στο σχήμα, έχει διάσταση $D_{\mathrm{C}} = 1{,}3 \pm 0{,}1$. Επειδή η συμβολή της φασικής συντεταγμένης που αντιστοιχεί στον χρόνο στον εκτεταμένο φασικό χώρο είναι 1, συνάγουμε ότι η διάσταση του παράξενου αυτού ελκυστή στον εκτεταμένο φασικό χώρο, που είναι τρισδιάστατος, είναι $d_{\mathrm{C}} = D_{\mathrm{C}} + 1 = 2{,}3 \pm 0{,}1$. Η διαδικασία είναι αρκετά επίπονη.

11.3.11 Λογιστική απεικόνιση

Φαινόμενα χάους εμφανίζονται και σε απλούστερα συστήματα από αυτά που εξετάσαμε μέχρι τώρα τα οποία σχετίζονταν με διαφορικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα μπορεί να εμφανιστούν σε μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών, ακόμη και σε μια μοναδική σχετικά απλή μη γραμμική εξίσωση διαφορών, η οποία είναι ένα διακριτό σύστημα. Μια τυπική εξίσωση διαφορών έχει τη μορφή

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n). \tag{11.173}$$

x_n είναι η $n-$ ιοστή τιμή της μεταβλητής x που είναι ένας πραγματικός αριθμός στο διάστημα $(0,1)$ και μ είναι μια παράμετρος. Η Εξ. (11.173) είναι μια μονοδιάστατη απεικόνιση. Πρόκειται για μια επαναληπτική μέθοδο. Μεταβάλλοντας την παράμετρο μ μπορεί αυτό το σύστημα να οδηγηθεί σε χαοτική κατάσταση. Η σειρά των αριθμών που προκύπτουν από αυτή την απεικόνιση δηλαδή $x_0, x_1, x_2, \dots$ λέγεται τροχιά με αρχή το x_0. Το πλεονέκτημα της μελέτης εξισώσεων διαφορών σε σχέση με τη μελέτη (συνεχών) διαφορικών εξισώσεων, είναι ότι οι πρώτες μπορεί να λυθούν και μελετηθούν πολύ πιο εύκολα από ότι οι διαφορικές εξισώσεις.

Ένα δυναμικό σύστημα όπως το εκκρεμές με διέγερση μπορεί να μετατραπεί σε διακριτό σύστημα απεικόνισης με χρήση της τομής Poincare. Μπορεί να βρεθεί σχέση μεταξύ των διακριτών τιμών της απεικόνισης που γίνεται ανά μια περίοδο της διέγερσης, συγκεκριμένα $(\theta_n, \omega_n = \dot{\theta}_n) \to (\theta_{n+1}, \omega_{n+1})$. Δηλαδή έχουμε δισδιάστατη απεικόνιση που είναι της μορφής

$$\theta_{n+1} = G_1(\theta_n, \omega_n),\ \omega_{n+1} = G_2(\theta_n, \omega_n)\ \ n = 0,1,2,\dots .$$

Πολλές φορές τέτοιες απεικονίσεις μπορούν να απλουστευθούν και να γίνουν μονοδιάστατες. Αυτό δεν έχει γίνει για το εκκρεμές. Επειδή είναι ευκολότερος ο χειρισμός τους, οι μονοδιάστατες απεικονίσεις είναι χρήσιμες για την καλύτερη κατανόηση των διαφόρων χαρακτηριστικών που οδηγούν ή αποτελούν τη χαοτική συμπεριφορά και γι αυτό θα ασχοληθούμε λίγο με μια τέτοια μονοδιάστατη απεικόνιση, τη λογιστική απεικόνιση.

Το σημείο x^* για το οποίο ισχύει $f(x^*) = x^*$ είναι ένα σταθερό σημείο (σημείο ισορροπίας) της απεικόνισης, διότι αν $x_n = x^*$ τότε $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) = x^*$. Δηλαδή η τροχιά θα παραμείνει στο x^* για όλες τις επόμενες επαναλήψεις.

Για τον καθορισμό του είδους ευστάθειας του σταθερού σημείου x^*, θεωρούμε μια πολύ γειτονική τροχιά $x_n = x^* + \eta_n,\ \eta_n \ll x^*$ και προσπαθούμε να βρούμε αν η τροχιά έλκεται προς ή απωθείται από την τροχιά x^*. Με άλλα λόγια, πρέπει να βρεθεί αν το η_n αυξάνεται ή μειώνεται καθώς αυξάνει το n. Με αντικατάσταση βρίσκουμε από τα προηγούμενα

$$x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^3),\ f'(x^*) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*}. \tag{11.174}$$

Εφόσον $f(x^*) = x^*$ η Εξ. (11.174) οδηγεί στην

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \tag{11.175}$$

Αν μπορεί να παραληφθούν οι όροι $O(\eta_n^2)$, τότε οδηγούμαστε στη γραμμικοποιημένη απεικόνιση

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n. \tag{11.176}$$

Η ιδιοτιμή ή πολλαπλασιαστής είναι η σταθερά

$$\lambda = f'(x^*). \tag{11.177}$$

Η λύση αυτής της γραμμικής απεικόνισης, Εξ. (11.176), βρίσκεται εύκολα γιατί ισχύουν οι

$$\eta_1 = \lambda\eta_0 = \lambda^1\eta_0,\ \eta_2 = \lambda\eta_1 = \lambda(\lambda\eta_0) = \lambda^2\eta_0, ..., \eta_n = \lambda^n\eta_0, ..., \tag{11.178}$$

αφού έχουμε

$$|\lambda| = |f'(x^*)| < 1, \text{ τότε } \lim_{n\to\infty}\eta_n = 0. \tag{11.179}$$

Επομένως αν ισχύει η Εξ. (11.179) το σημείο ισορροπίας είναι γραμμικώς ευσταθές. Αντιστοίχως μπορεί να καταλάβει κάποιος ότι αν

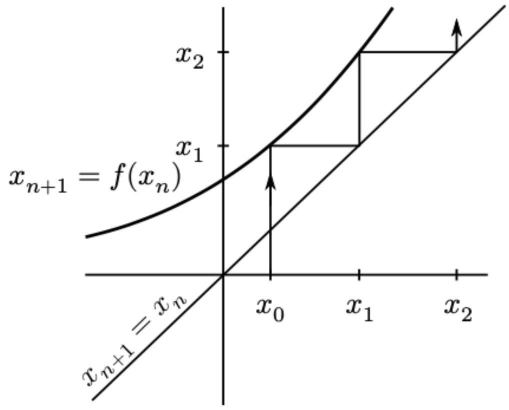
$$|\lambda| = |f'(x^*)| > 1, \text{ τότε } \lim_{n\to\infty}\eta_n = \infty. \tag{11.180}$$

Σε αυτή την περίπτωση το σταθερό σημείο είναι ασταθές. Αν όμως $|\lambda| = |f'(x^*)| = 1$, τότε δεν μπορούμε να πούμε τίποτα, η γραμμική ανάλυση δε μπορεί να εφαρμοστεί. Ο μη γραμμικός όρος που παραλήφτηκε καθορίζει την τοπική ευστάθεια ή αστάθεια.

Στο Σχήμα 11.74 δείχνεται η γραφική μεθοδολογία για τον προσδιορισμό της τροχιάς (λύσης) μιας εξίσωσης διαφορών, $x_{n+1} = f(x_n)$ με τη μέθοδο ιστού της αράχνης (cobweb), μπορούμε να λέμε ότι έχουμε το διάγραμμα ιστού ή ιστός (της αράχνης). Σε αυτό το σχήμα έχει σχεδιαστεί η (συνεχής) καμπύλη που αντιστοιχεί στη σχέση $x_{n+1} = f(x_n)$, ουσιαστικά σχεδιάζεται η συνεχής εξίσωση $y = f(x)$. Ας ξεκινήσουμε από την αρχική τιμή x_0 που φαίνεται στον οριζόντιο άξονα. Η κάθετη ευθεία στον οριζόντιο άξονα που περνά από αυτό το σημείο τέμνει την καμπύλη $y = f(x)$ στο σημείο x_1. Αυτό είναι το επόμενο σημείο της τροχιάς (λύσης) που ζητούμε. Στη συνέχεια μπορούμε να σημειώσουμε το x_1 στον οριζόντιο άξονα και να επαναλάβουμε τη διαδικασία για να βρούμε το σημείο x_2. Αυτό όμως μπορεί να βρεθεί κάπως ευκολότερα με πιο παραστατική μέθοδο. Σχεδιάζουμε τη συνεχή διαγώνια ευθεία $y = x$ που αντιστοιχεί στη σχέση $x_{n+1} = x_n$. Αντί να ακολουθήσουμε την προηγούμενη διαδικασία για την εύρεση του σημείου x_2, φέρουμε μιαν οριζόντια ευθεία από το σημείο (x_0, x_1) της καμπύλης $y = f(x)$ η οποία συναντά τη διαγώνια σε σημείο που προφανώς έχει συντεταγμένες (x_1, x_1), από αυτό το σημείο φέρουμε την κατακόρυφη ευθεία που συναντά την καμπύλη

$y = f(x)$ στο ζητούμενο σημείο x_2. Η διαδικασία συνεχίζεται ζιγκ-ζαγκ, θυμίζοντας τον τρόπο που η αράχνη πλέκει τον ιστό της.

Η μέθοδος είναι πολύ βολική γιατί μας επιτρέπει να δούμε τη συνολική συμπεριφορά της τροχιάς συμπληρώνοντας έτσι την τοπική πληροφορία που έχουμε με τη γραμμικοποίηση. Η μέθοδος του ιστού (της αράχνης) είναι ακόμη πιο χρήσιμη όταν δε μπορεί να εφαρμοστεί η γραμμική ανάλυση.



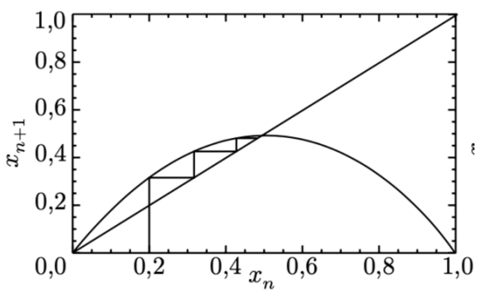
Σχήμα 11.74 *Η κατασκευή που λέγεται ιστός της αράχνης.*

Τώρα θα περιοριστούμε στη λογιστική απεικόνιση (logistic map). Η εξίσωση διαφορών για αυτή την περίπτωση είναι

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad x_n \in [0,1]. \tag{11.181}$$

Αυτή η εξίσωση διαφορών έχει πάρει το όνομά της από την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση $\dot{x} = \mu x(1-x)$, την οποία αρχικά επινόησε ο P. F. Verhulst (το 1845) για να μοντελοποιήσει την εξέλιξη (αύξηση ή μείωση) πληθυσμού x, σε περιορισμένο περιβάλλον, δηλαδή περιορισμένα μέσα διαβίωσης. Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών επινοήθηκε το 1976 για τον ίδιο σκοπό από τον May. Η λογιστική εξίσωση είναι μονοδιάστατη και μη γραμμική.

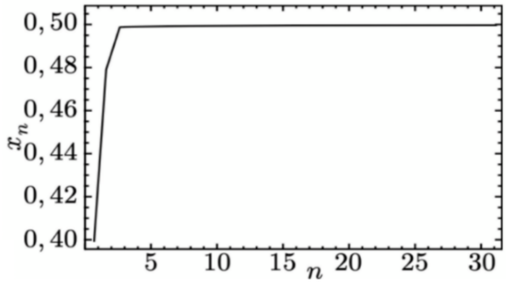
Ας δούμε την εξέλιξη της τροχιάς για την περίπτωση που $\mu = 2,\ x_0 = 0,2$. Στο Σχήμα 11.75, φαίνεται το διάγραμμα ιστός της αράχνης.



Σχήμα 11.75 *Λογιστική απεικόνιση με* $\mu = 2,\ x_0 = 0,2$.

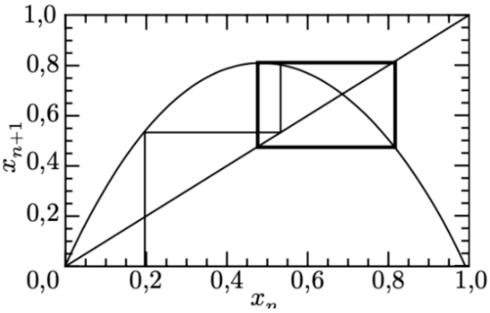
Υπάρχουν δυο σημεία ισορροπίας (σταθερά σημεία), προφανώς είναι τα σημεία που η διαγώνιος τέμνει την καμπύλη $y = f(x) = \mu x(1-x)$. Αυτά τα δυο σημεία αντιστοιχούν σε $x = 0,5$ και $x = 0$. Πράγματι η λύση της εξίσωσης $x^* = \mu x^*(1 - x^*)$ για $\mu = 2$ δίνει $x^* = 0,5$ και $x^* = 0$. Το σημείο με $x^* = 0,5$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας διότι $|f'(0,5)| = 0 < 1$. Για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη οι αντίστοιχες τροχιές τείνουν σε αυτό το σημείο όσο και να αυξάνονται οι επαναλήψεις.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται με το επόμενο σχήμα. Στο Σχήμα 11.76 φαίνεται η (χρονο)σειρά x_n ως συνάρτηση της διαδοχής n για $\mu = 2$. Μόνο τα διακριτά σημεία (n, x_n) έχουν νόημα, τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν χαράχθηκαν για να διευκολύνουν την κατανόηση. Το ίδιο ισχύει για τα αντίστοιχα σχήματα που θα δούμε για τις επόμενες περιπτώσεις.



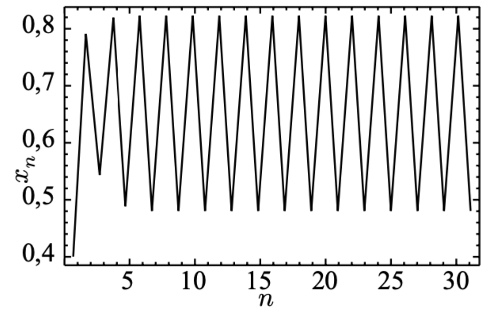
Σχήμα 11.76 *(Χρονο)σειρά της λογιστικής απεικόνισης με* $\mu = 2,\ x_0 = 0,2$.

Παρατηρούμε ότι στην αρχή έχουμε μια μεταβατική περίοδο και τελικώς μια σταθερή κατάσταση με $x_n = 0,5$, όπως βρήκαμε και προηγουμένως. Το Σχήμα 11.77 με $\mu = 3,3$ δείχνει μια πολύ διαφορετική κατάσταση. Εκτός από το σημείο με $x^* = 0$ τώρα και το άλλο σημείο ισορροπίας με $x^* = 0,697$ είναι ασταθές. Για την κλίση ισχύει και για τις δυο περιπτώσεις ότι $|f'(x^*)| > 1$, οπότε έχουμε αστάθεια. Μετά από το αρχικό μεταβατικό φαινόμενο τα x_n ταλαντεύονται μεταξύ δυο τιμών τους που είναι στις κορυφές του ορθογωνίου που διαγράφεται κατά το μόνιμο φαινόμενο. Οι δυο τιμές βρίσκονται πάνω στην καμπύλη $y = f(x) = \mu x(1-x)$. Για αυτές τις δυο τιμές ισχύει $x_{n+2} = x_n$. Αυτό αντιστοιχεί στην κίνηση του εκκρεμούς με $B = 1,07$, δηλαδή έχουμε διακλάδωση όπου γίνεται διπλασιασμός «περιόδου».



Σχήμα 11.77 *Λογιστική απεικόνιση με* $\mu = 3,3,\ x_0 = 0,2$.

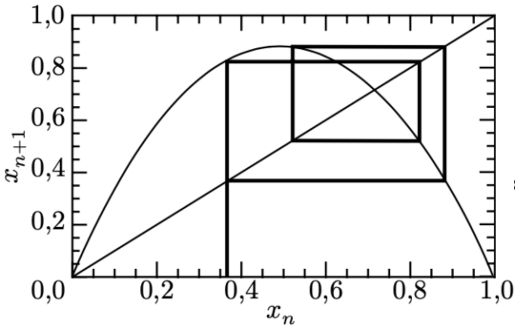
Το Σχήμα 11.78 φαίνεται η αντίστοιχη χρονοσειρά.



Σχήμα 11.78 *(Χρονο)σειρά της λογιστικής απεικόνισης με* $\mu = 3,3,\ x_0 = 0,2$.

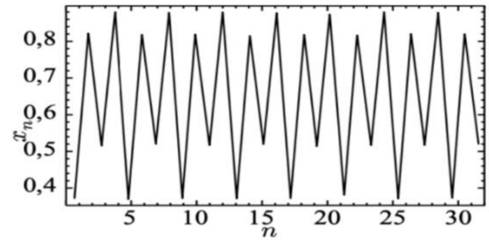
Όπως είπαμε και πριν, μετά το μεταβατικό φαινόμενο έχουμε ταλάντευση μεταξύ δυο τιμών του x_n. Οι τιμές είναι 0,48 και 0,83. Επειδή το x_n επαναλαμβάνεται κάθε δυο κύκλους (επαναλήψεις) αυτού του είδους η ταλάντωση λέγεται κύκλος περιόδου-2 (period-2 cycle). Ο όρος αυτός ισχύει και για συστήματα που περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις, όπως είναι το εκκρεμές.

Το Σχήμα 11.79 έγινε με $\mu = 3,53$ και για να φαίνεται καλύτερα το φαινόμενο, διαλέξαμε ως αρχικό σημείο το $x_0 = 0,37$ ώστε η «κίνηση» να γίνεται πάνω στον ελκυστή, δηλαδή χωρίς απεικόνιση του μεταβατικού φαινομένου.



Σχήμα 11.79 *Λογιστική απεικόνιση με* $\mu = 3,53,\ x_0 = 0,37$·

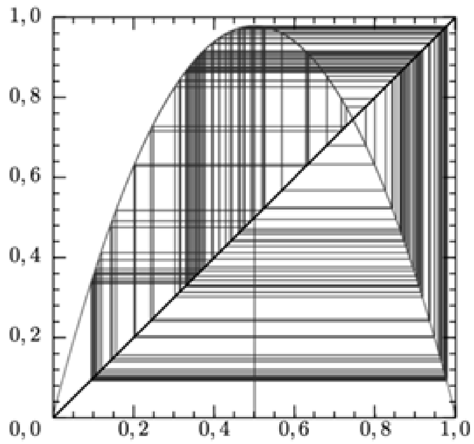
Έχουμε διακλάδωση με διπλασιασμό περιόδου. Στην πραγματικότητα τώρα έχουμε δυο διακλαδώσεις και ισχύει $x_{n+4} = x_n$. Τώρα η «κίνηση» επαναλαμβάνεται μεταξύ τεσσάρων τιμών του x_n, οι οποίες είναι 0,37, 0,52, 0,83 και 0,88. Αυτά επιβεβαιώνονται και από το Σχήμα 11.80).



Σχήμα 11.80 *(Χρονο)σειρά της λογιστικής απεικόνισης για* $\mu = 3,53,\ x_0 = 0,37$·

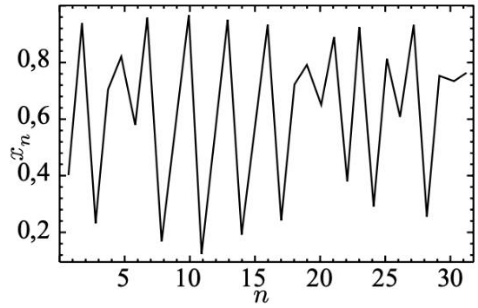
Είναι σαφές ότι υπάρχει διπλασιασμός περιόδου σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.

Στο Σχήμα 11.81 φαίνεται η περίπτωση που $\mu = 3,9$, αυτή είναι μια κατάσταση του χάους.



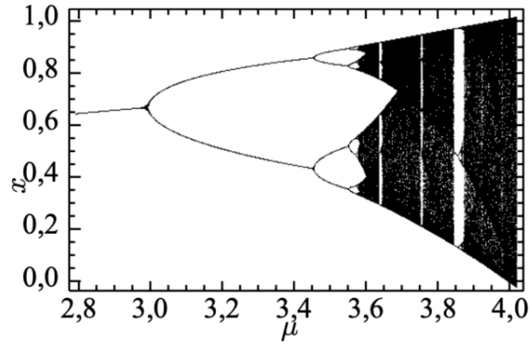
Σχήμα 11.81 *Λογιστική απεικόνιση με* $\mu = 3,9,\ x_0 = 0,5$·

Στο Σχήμα 11.82 φαίνεται η αντίστοιχη ακανόνιστη χρονοσειρά (τροχιά).



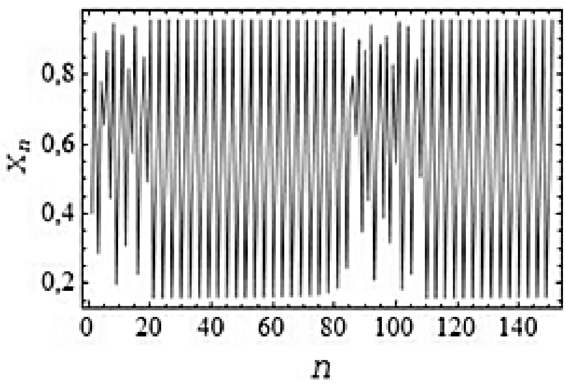
Σχήμα 11.82 *(Χρονο)σειρά της λογιστικής απεικόνισης για* $\mu = 3{,}9,\ x_0 = 0{,}5$·

Το Σχήμα 11.83 δείχνει το διάγραμμα διακλάδωσης όπου φαίνονται και οι διάφορες περιοχές που αναφέραμε προηγουμένως.



Σχήμα 11.83 *Διάγραμμα διακλάδωσης για τη λογιστική απεικόνιση.*

Θα αναφερθούμε και στην ακόλουθη περίπτωση που είναι μια περίπτωση χάους. Η τροχιά στο Σχήμα 11.84 αντιστοιχεί σε $\mu = 3{,}8282$. Χωρίς να προχωρήσουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, απλώς αναφέρουμε ότι αυτή είναι μια περίπτωση διαλειπτότητας (intermittency) που αναφέραμε στα προηγούμενα



Σχήμα 11.84 *Διαλειπτότητα,* $\mu = 3{,}8282$·

Θα αναφερθούμε με λίγα λόγια και στον εκθέτη Liapunov για την περίπτωση μονοδιάστατης εξίσωσης διαφορών. Ξαναδίνουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση διαφορών που αναφέραμε στα προηγούμενα.

$$x_{n+1} = f(x_n)\,. \tag{11.182}$$

Η διαφορά μεταξύ δυο πολύ κοντινών τροχιών κατά το $n-$ στό βήμα θα είναι

$$\begin{aligned} & f_n(x+\varepsilon)-f_n(x) \approx \varepsilon \mathrm{e}^{n\lambda} \\ & \text{ή } \ln \frac{f_n(x+\varepsilon)-f_n(x)}{\varepsilon} \approx n\lambda . \end{aligned} \tag{11.183}$$

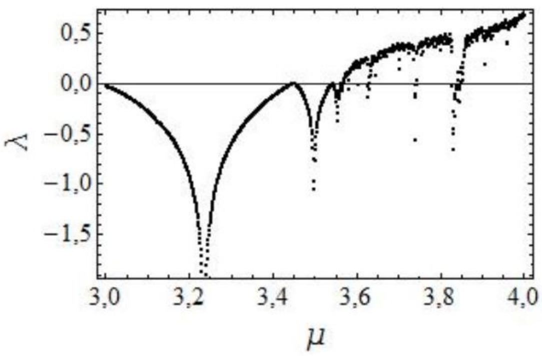
Για μικρό ε έχουμε

$$\lambda \approx \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}\right| \cdot \tag{11.184}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον κανόνα για την παράγωγο της $n-$ στής επανάληψης και καθώς $n \to \infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)| \cdot \tag{11.185}$$

Στο Σχήμα 11.85 φαίνεται το γράφημα του εκθέτη συναρτήσει του μ για την περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης. Το πρόσημο του λ σχετίζεται με χάος και με κανονικότητα. Είναι εμφανής η συσχέτιση αυτού του σχήματος με το Σχήμα 11.83 που αναφέρεται στη διακλάδωση. Οι περιοχές με $\lambda < 0$ είναι οι περιοχές περιοδικότητας, ενώ οι περιοχές με $\lambda > 0$, είναι οι χαοτικές περιοχές.



Σχήμα 11.85 *Γράφημα του εκθέτη Liapunov για τη λογιστική απεικόνιση.*

Στο τέλος αναφερόμαστε με λίγα λόγια και στην έννοια της εντροπίας. Η χαοτική συμπεριφορά οδηγεί στην πιθανή σχέση μεταξύ στατιστικής μηχανικής και χάους. Για τον σκοπό αυτό μπορεί κάποιος να εφαρμόσει την έννοια της εντροπίας για χαοτικά συστήματα. Αυτό γίνεται σχετικά εύκολα στην ειδική περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης. Ας θεωρήσουμε ένα στατιστικό σύστημα για το οποίο το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης μέτρησης βρίσκεται πάντα στο διάστημα από 0 έως 1 (μοναδιαίο διάστημα). Αν το διάστημα αυτό χωριστεί σε N ίσα υποδιαστήματα το ένα διαδοχικό με το άλλο, αντιστοιχούμε στο υποδιάστημα i, στο οποίο περιέχεται ένα εύρος πιθανών αποτελεσμάτων μέτρησης, την πιθανότητα p_i. Η εντροπία S του στατιστικού συστήματος ορίζεται από τη σχέση

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \cdot \tag{11.186}$$

Αυτή η ποσότητα μπορεί να ερμηνευτεί ότι αποτελεί ένα μέτρο (ένας δείκτης) της αταξίας (disorder) του συστήματος. Μια άλλη ερμηνεία είναι ότι αντιπροσωπεύει την πληροφορία που χρειάζεται για να καθοριστεί η κατάσταση του συστήματος.

Στην ειδική περίπτωση που τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι τέτοια που για τα υποδιαστήματα i

οι πιθανότητες p_i είναι όλες ίσες, οπότε $p_i = 1/N$. Για αυτή την περίπτωση η εντροπία είναι

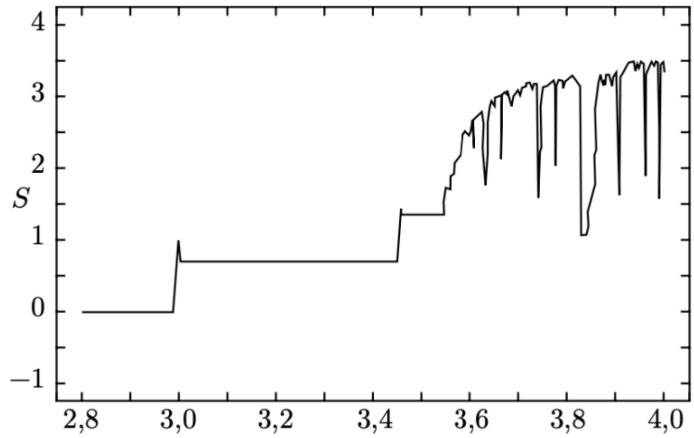
$$S = \ln N . \tag{11.187}$$

Αυτή η τιμή είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει η εντροπία του παραπάνω συστήματος. Από την άλλη μεριά αν όλα τα αποτελέσματα των μετρήσεων βρίσκονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο υποδιάστημα έστω το

$k -$ στό , τότε $p_i = \delta_{ik}$, οπότε

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i = -(0 + 0 + \ldots + 1 \times \ln 1 + \ldots + 0) = 0 \tag{11.188}$$

Τα μηδενικά στην παρένθεση που αντιστοιχούν στα $0 \times \ln 0$, προκύπτουν από τη χρήση του κανόνα (του) de l' Hopital οπότε το όριο $\lim_{p \to 0} p \ln p = 0$. Αυτό το όριο δίνει την τιμή των όρων $0 \times \ln 0$. Αυτή η τιμή είναι η ελάχιστη τιμή της εντροπίας του παραπάνω συστήματος. Μπορεί να γίνει συσχέτιση της εντροπίας με την πληροφορία που την εισήγαγε πρώτος ο Shannon. Επίσης υπάρχει σχέση εντροπίας και των εκθετών Liapunov. Ας εφαρμόσουμε τα περί εντροπίας στην περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης. Χωρίζουμε το διάστημα τιμών [0,1] των x_n σε N ίσα τμήματα (υποδιαστήματα). Στη μη χαοτική (κανονική) περίπτωση οι τιμές των x_n θα βρίσκονται μέσα σε σχετικά μικρό πλήθος υποδιαστημάτων και η εντροπία θα έχει μικρή τιμή. Στη χαοτική κατάσταση τα υποδιαστήματα είναι πολύ περισσότερα και η εντροπία είναι μεγαλύτερη. Σε αυτή την περίπτωση του χάους αν η κατάσταση αντιστοιχεί σε ισοκατανομή σε όλο το μοναδιαίο διάστημα τότε έχουμε ότι η εντροπία έχει τη μέγιστή της τιμή, δηλαδή $S = \ln N$. Για περιπτώσεις χάους που όμως η κατανομή δεν καλύπτει όλο το μοναδιαίο διάστημα αυτό δεν ισχύει, η εντροπία είναι μεγάλη αλλά $S < \ln N$. Στο Σχήμα 11.86 φαίνεται η μεταβολή της εντροπίας συναρτήσει της παραμέτρου μ . Το πλήθος των υποδιαστημάτων έχει ληφθεί $N = 40$. Μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει και τα Σχήματα 11.83 και 11.85 για να κατανοήσει γιατί οι τιμές της εντροπίας στο Σχήμα 11.86 δεν αποκτούν τη μέγιστη τιμή στις χαοτικές περιοχές, $\ln N = \ln 40 = 3,69$, για τιμές του μ μικρότερες από 4. Προφανώς για $\mu < 4$ τα διαστήματα που παίρνουν τιμές τα x_n είναι μικρότερα από το μοναδιαίο διάστημα.



Σχήμα 11.86 *Η εντροπία ως συνάρτηση του* μ .

Ειδικό θέμα

Αυτοδιέγερση-Συγχρονισμός

Αυτά είναι αντικείμενα της Μηχανικής που συνήθως δεν αναφέρονται με λεπτομέρεια σε βιβλία που απευθύνονται σε Φυσικούς αλλά υπάρχουν σε κείμενα κυρίως για Μηχανικούς και Μαθηματικούς. Εδώ θα κάνουμε μια σχετικά απλή εισαγωγή σε αυτά τα θέματα για να δώσουμε το έναυσμα για παραπέρα μελέτη.

Αρχίζουμε με την αυτοδιέγερση. Ο όρος αυτοδιέγερση αναφέρεται στη δημιουργία και συντήρηση περιοδικής κίνησης όπου η εξωτερική διέγερση από κάποια πηγή δεν καθορίζει τη συχνότητα της κίνησης. Υπάρχει εξωτερική πηγή που τροφοδοτεί με ισχύ (ενέργεια) το σύστημα αλλά το ίδιο το σύστημα με ανάδραση (ανασύζευξη, feedback) ελέγχει τη φάση με την οποία η πηγή δρα σε αυτό. Για αυτό το φαινόμενο υπάρχουν πολλοί όροι στα Αγγλικά όπως self oscillation, self-excited, spontaneous, autonomous, parasitic κ.λπ.

Αυτοδιεγειρόμενοι ταλαντωτές διαφέρουν από τα, λεγόμενα, συστήματα συντονισμού όπου περιλαμβάνονται εξαναγκασμένοι ταλαντωτές και παραμετρικοί ταλαντωτές. Στις δυο αυτές τελευταίες περιπτώσεις υπάρχει εξωτερική πηγή ισχύος που είναι διαμορφωμένη εξωτερικά και επιβάλει την περιοδικότητά της στο σύστημα.

Σε βιβλία Φυσικής φαινόμενα αυτοδιέγερσης αναφέρονται, λανθασμένα, ως φαινόμενα συντονισμού. Κλασικό παράδειγμα είναι η καταγραμμένη σε φιλμ καταστροφή της κρεμαστής γέφυρας Tacoma Narrows Bridge κοντά στην πόλη Seattle της πολιτείας Washington στις ΗΠΑ. Αυτό έγινε στις 7/1/1940 και ήταν φαινόμενο αυτοδιέγερσης και όχι συντονισμού όπως πολλοί αναφέρουν. Η ισχύς (ενέργεια) προήλθε από τον πνέοντα άνεμο που οδήγησε στην ανάπτυξη στροφικών ταλαντώσεων της γέφυρας οι οποίες οδήγησαν στην καταστροφή της. Υπήρξε θετική ανασύζευξη μεταξύ της στροφικής ταλάντωσης της γέφυρας και των στροβίλων τυρβώδους ροής του ανέμου που έπνεε στη γέφυρα. Φαινόμενα αυτοδιέγερσης υπάρχουν πολλά, αναφέρουμε μερικά που είναι φυσικά φαινόμενα, όπως, ο ρυθμός της καρδιάς (σφιγμός), η διέγερση των νευρώνων, τα κύματα της θάλασσας, οι παλμοί των μεταβλητών αστέρων, η ανθρώπινη φωνή. Επίσης υπάρχουν φαινόμενα της ανθρώπινης τεχνολογίας που είναι αυτού του τύπου, συγκεκριμένα, μηχανικά ρολόγια, πολλά μουσικά όργανα, λέηζερς κ.λπ. Η ταχύτητα του αέρα στην περίπτωση της ανθρώπινης φωνής δεν αλλάζει τη συχνότητα του παραγόμενου ήχου αλλά μόνο την έντασή του. Το ίδιο συμβαίνει σε διάφορα όργανα. Η ταχύτητα του δοξαριού του βιολιού δεν επηρεάζει τη συχνότητα του ήχου αλλά μόνο την ένταση του ήχου. Η μελέτη της αυτοδιέγερσης είναι, σε μεγάλο βαθμό, εφαρμογή της θεωρίας μη γραμμικών ταλαντώσεων. Ίσως η πρώτη αναφορά, με μαθηματική ανάλυση, σε τέτοια φαινόμενα είναι αυτή του G. B. Airy το 1830. Ο Airy ασχολήθηκε με την ταλάντωση των φωνητικών χορδών.

Στα 1920, ο Ολλανδός Φυσικός Balthasar van der Pol και οι συνεργάτες του ανέπτυξαν ένα μοντέλο αυτοδιεγειρόμενης ταλάντωσης βασισμένο στη μη γραμμική, συνήθη διαφορική εξίσωση,

$$\ddot{V} - \left(\alpha - \beta V^2\right)\dot{V} + \omega^2 V = 0 . \tag{11.189}$$

Οι παράμετροι α, β, ω^2 είναι σταθερές θετικές ποσότητες. Ο όρος $-\alpha\dot{V}$ αντιπροσωπεύει αρνητική απόσβεση (δηλαδή παροχή ενέργειας στο σύστημα) και ο όρος $\beta V^2\dot{V}$ αντιπροσωπεύει θετική απόσβεση (απορρόφηση ενέργειας). Έτσι το πλάτος ταλάντωσης περιορίζεται. Έχουμε ήδη μελετήσει τη λεγόμενη αδιάστατη μορφή αυτής της εξίσωσης που λέγεται εξίσωση van der Pol. Ο όρος $-\left(\alpha - \beta V^2\right)\dot{V}$ λέγεται όρος van der Pol. Μπορεί να εμφανίζεται στη μορφή

$$\varepsilon\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1\right]\dot{x}\ ,\ \varepsilon > 0,\ x_0 > 0 . \tag{11.190}$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι αυτός ο όρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μοντελοποίηση της κίνησης της γέφυρας Tacoma Narrows που αναφέραμε, αλλά και για άλλα φαινόμενα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο μηχανισμός διαφυγής (escapement mechanism) στα μηχανικά ρολόγια με εκκρεμές ή στους μηχανικούς μετρονόμους. Ο όρος van der Pol αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό που διατηρεί σταθερό το πλάτος ταλάντωσης. Για έναν μετρονόμο ή ένα μηχανικό ρολόι με εκκρεμές, η (διαφορική) εξίσωση κίνησης με τον όρο van der Pol μπορεί να γραφτεί ως εξής,

$$I\ddot{\theta} + mLg\sin\theta + \varepsilon\left[\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 - 1\right]\dot{\theta} = 0\,. \tag{11.191}$$

I είναι η ροπή αδράνειας του (φυσικού) εκκρεμούς περί τον άξονα αιωρήσεως. L είναι η απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα αιωρήσεως. θ είναι η γνωστή γωνιακή απόκλιση από την κατακόρυφο. Αν θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές είναι απλό εκκρεμές τότε η ανωτέρω σχέση γίνεται πιο απλή. Η ανωτέρω εξίσωση κίνησης οδηγεί, τελικώς, σε ταλαντώσεις σταθερού πλάτους ίσου με $2\theta_0$.

Το φαινόμενο του συγχρονισμού είναι ένα φαινόμενο που απαντά σε φυσικά και βιολογικά φαινόμενα, σε πολλές εκδοχές. Είναι αντικείμενο μελέτης επί πολλά χρόνια. Γενικώς μπορούμε να πούμε ότι συγχρονισμός είναι η διαδικασία κατά την οποία δυο ή περισσότερα συστήματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και καταλήγουν να κινούνται «μαζί». Στη Βιολογία απαντούν πλήθος από φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από συγχρονισμό. Μεγάλα σμήνη από τα έντομα πυγολαμπίδες (κολοφωτιές) στην Νοτιοανατολική Ασία αναλάμπουν σε συγχρονισμό. Σύνολα κυττάρων της καρδιάς συγχρονίζονται μεταξύ τους και «κτυπούν» συγχρόνως ή συγχρονίζονται με εξωτερικά αίτια. Συγχρονισμός απαντά στα χειροκροτήματα ακροατών.

Οι ταλαντώσεις τάσεως υπεραγώγιμων διεπαφών Josephson είναι δυνατόν να συγχρονιστούν. Συγχρονισμός απαντά στην κίνηση σμήνους πουλιών όπου κατά το πέταγμά τους εμφανίζονται εντυπωσιακοί σχηματισμοί και επίσης με τον τρόπο που αποφεύγουν εμπόδια ή άλλα σαρκοβόρα πουλιά εχθρούς τους.

Μια άλλη περίπτωση είναι η ταλάντωση που παρουσιάστηκε στη γέφυρα London Millennium Footbridge που φτιάχτηκε στον ποταμό Τάμεση και εγκαινιάστηκε το 2000, την αυγή της τρίτης χιλιετίας μ.Χ. Σε αυτή την περίπτωση ο συγχρονισμός ήταν μεταξύ του βηματισμού των πεζών που οδήγησε στην ταλάντωση της γέφυρας με σχετικά μεγάλο πλάτος, πράγμα που οδήγησε στο κλείσιμό της μέχρι να γίνουν τροποποιήσεις με τις οποίες αποφεύγεται αυτό το φαινόμενο. Σε αυτή την περίπτωση η εξήγηση δίνεται με βάση τη λεγόμενη αλλαγή (φάσης) Kuramoto. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση αλλαγής φάσης μεταξύ μιας μη συγχρονισμένης και μιας συγχρονισμένης κατάστασης συζευγμένων ταλαντωτών. Σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος ελέγχου (όπως λέγεται) που οδηγεί στην αλλαγή φάσης είναι το πλήθος των πεζών. Όταν το πλήθος των πεζών περάσει ένα κατώφλι τότε οι συχνότητες βηματισμού τους συγχρονίζονται απότομα και αυτό οδήγησε στις ταλαντώσεις της γέφυρας.

Η πρώτη φορά που το φαινόμενο του συγχρονισμού αντιμετωπίστηκε επιστημονικά είναι το 1665 όταν ο Ολλανδός Φυσικός Christian Huygens παρατήρησε συγχρονισμό μεταξύ δυο μηχανικών ρολογιών με εκκρεμές. Ο Huygens ασχολιόταν με την βελτίωση των μηχανικών ρολογιών με εκκρεμές της εποχής του διότι ήταν χρήσιμα στη ναυσιπλοΐα για τον προσδιορισμό του στίγματος των πλοίων, πιο συγκεκριμένα για τον προσδιορισμό του γεωγραφικού μήκους. Παρατήρησε συγχρονισμό σε δυο ρολόγια που είχε κρεμάσει σε έναν τοίχο, το ένα δίπλα στο άλλο. Αυτά μετά από κάποιο χρονικό διάστημα συγχρονίστηκαν. Ο Huygens χρησιμοποίησε τον όρο the sympathy of two pendulum clocks (συμπαθητική κίνηση δυο ρολογιών τύπου εκκρεμούς). Για αυτό το φαινόμενο χρησιμοποιούνται οι όροι entrainment (παράσυρση), mode locking (κλείδωμα τρόπου ταλάντωσης) και φαινόμενο Huygens.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε συζευγμένους μετρονόμους που μοιάζουν αρκετά με τα ρολόγια του Huygens. Θεωρούμε ότι σε μια οριζόντια πλάκα είναι στερεωμένοι N το πλήθος σχεδόν ίδιοι μετρονόμοι (ή μηχανικά ρολόγια με εκκρεμές) που ταλαντεύονται στο ίδιο επίπεδο. Η πλάκα μπορεί να κινείται οριζόντια στην διεύθυνση που καθορίζει το επίπεδο ταλάντωσης των μετρονόμων. Θεωρούμε ότι οι μάζες του ταλαντευόμενου μέρους του κάθε μετρονόμου είναι, m_i, οι ροπές αδράνειας των μετρονόμων ως προς το κέντρο αιωρήσεως είναι I_i, η απόσταση του κέντρου μάζας του ταλαντευόμενου μέρους από το κέντρο αιωρήσεως είναι L_i. Προφανώς $i = 1, 2, ..., N$. Η μάζα της πλάκας μαζί με τις μη ταλαντευόμενες μάζες όλων των μετρονόμων είναι M.

Είναι σχετικά εύκολο να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για τους N μετρονόμους και την πλάκα-βάση τους.

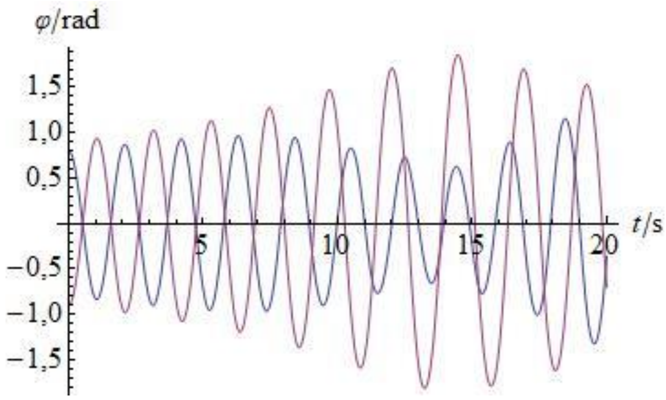
Η κινούμενη πλάκα δημιουργεί τη σύζευξη μεταξύ των μετρονόμων. Στις εξισώσεις κίνησης για την ταλάντωση των μετρονόμων, προστίθενται οι όροι van der Pol όπως στην εξίσωση (11.191). Μπορεί να προστεθεί και όρος τριβής για την πλάκα-βάση. Από τη λύση των εξισώσεων κίνησης με κατάλληλες τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών (σταθερές) του συστήματος μπορεί να μελετηθούν διάφορα φαινόμενα όπως είδη συγχρονισμού ακόμη και χαοτική συμπεριφορά. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση δυο μετρονόμων. Δίνουμε τις τρεις εξισώσεις κίνησης για αυτή την περίπτωση, με τους όρους van der Pol.

$$\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 + m_1L_1 g\sin\varphi_1 + m_1L_1\cos\varphi_1\ddot{x} + \varepsilon\left[\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_{01}}\right)^2 - 1\right]\dot{\varphi}_1 = 0\\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + m_2L_2 g\sin\varphi_2 + m_2L_2\cos\varphi_2\ddot{x} + \varepsilon\left[\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_{02}}\right)^2 - 1\right]\dot{\varphi}_2 = 0\\
&\left(M + m_1 + m_2\right)\ddot{x} + m_1L_1\cos\varphi_1\ddot{\varphi}_1 - m_1L_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + m_2L_2\cos\varphi_2\ddot{\varphi}_2 - m_2L_2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{11.192}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι οι μετρονόμοι είναι απλά εκκρεμή με τις παρακάτω τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών τους, (υποθέτουμε στο σύστημα SI):

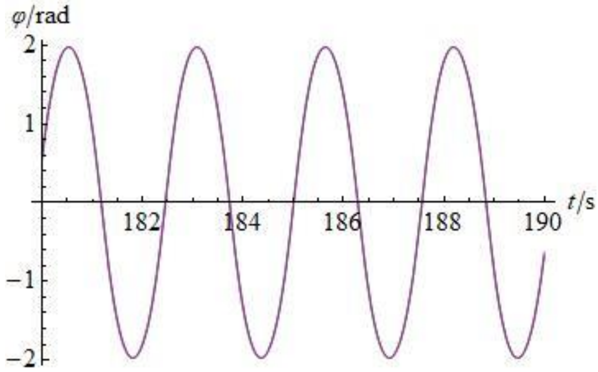
$$m = 1,\ M = 10,\ L_1 = 1{,}001\ ,\ L_2 = 1,\ \mathrm{g} = 10,\ \varepsilon = 0{,}1\ ,\varphi_{01} = 1,\ \varphi_{02} = -0{,}9$$
$$\varphi_1(0) = 0{,}8\ ,\varphi_2(0) = -0{,}9\ ,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0\ .$$

Στο Σχήμα 11.87 φαίνεται η κίνηση (γωνία συναρτήσει του χρόνου) των δυο μετρονόμων για χρόνους από 0 s έως 20 s. Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δυο κινήσεων.



Σχήμα 11.87 *Οι γωνίες εκτροπής συναρτήσει του χρόνου των δυο μετρονόμων για μικρούς χρόνους.*

Στο Σχήμα 11.88 φαίνονται οι κινήσεις των δυο μετρονόμων για μεγαλύτερους χρόνους, από 180 s έως 190 s, οι δυο μετρονόμοι έχουν συγχρονιστεί και τα δυο γραφήματα συμπίπτουν.



Σχήμα 11.88 *Οι γωνίες εκτροπής συναρτήσει του χρόνου των δυο μετρονόμων για μεγάλους χρόνους.*

Σημειώνουμε ότι ο Huygens παρατήρησε συγχρονισμό με φάσεις που διέφεραν κατά 180 μοίρες, αντίθετες φάσεις. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων. Για μεγάλο πλήθος μετρονόμων εμφανίζεται η αλλαγή φάσης τύπου Kuramoto, δηλαδή εμφανίζεται μια συλλογική απότομη μετάβαση σε συγχρονισμό τους. Η δυναμική συζευγμένων μετρονόμων είναι πολύ πλούσια σε φαινόμενα, μεταξύ τους και χαοτική συμπεριφορά.

Προβλήματα

1. Θεωρήστε τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, $\ddot{x} = \dot{x}^2 - x^2 + x$. Βρείτε δυο ισοδύναμες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης $\dot{x} = f_x(x,y), \dot{y} = f_y(x,y)$, τα x, y είναι δείκτες. Βρείτε τα σταθερά σημεία, δηλαδή τα σημεία ισορροπίας. Γραμμικοποιήστε το σύστημα των εξισώσεων περί τα σημεία ισορροπίας βρίσκοντας την κατάλληλη μήτρα. Βρείτε τις ιδιοτιμές στα σημεία ισορροπίας και δείτε αν υπάρχει ευστάθεια ή αστάθεια.

2. Βρείτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς όταν το μήκος του εκκρεμούς μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση, $l = l_0 + a\cos(\omega t)$. Τι πρέπει να ισχύει ώστε η παραπάνω διαφορική εξίσωση κίνησης να μην έχει όρο που να περιέχει ταχύτητα;

Υπόδειξη: Κάντε μετασχηματισμό μεταβλητής θέτοντας $x = l\theta$, όπου θ η γωνία εκτροπής από την κατακόρυφο. Η διαφορική εξίσωση κίνησης θα αναφέρεται στο $x = x(t)$ και όχι στο $\theta = \theta(t)$.

3. Δείξτε ότι για το ορθό εκκρεμές του οποίου το σημείο στήριξης ταλαντεύεται κατακόρυφα, με επιτάχυνση που είναι βηματική συνάρτηση του χρόνου, μπορεί να διαλέξουμε τις παραμέτρους έτσι που να ισχύουν οι σχέσεις $\left(\dfrac{b_0}{\omega_T}\right)^2 = \dfrac{8}{\pi^2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{l} << 1$. a είναι το πλάτος ταλάντωσης του στηρίγματος, l το μήκος του εκκρεμούς και $\omega_T = 2\pi/T$ η κυκλική συχνότητα αυτής της ταλάντωσης. Το b_0 είναι σταθερή παράμετρος και ισχύουν, $a(t) = \omega_0^2 + \varepsilon b_0^2,\ 0 \le t \le T/2$ και $a(t) = \omega_0^2 - \varepsilon b_0^2,\ T/2 < t \le T$, κατά τα γνωστά, ενώ η διαφορική εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{\theta} + a(t)\theta = 0$. Θυμηθείτε ότι η κίνηση πρέπει να είναι περιοδική με περίοδο T.

4. Θεωρήστε απλό εκκρεμές η κίνηση περιγράφεται στο επίπεδο με άξονες x οριζόντιο και y κατακόρυφο θετικό προς τα πάνω. Η γωνία εκτροπής θ να μετριέται από τον αρνητικό κατακόρυφο άξονα. Βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης όταν το σημείο στήριξης ταλαντεύεται κατακόρυφα σύμφωνα με τη σχέση $y(t) = a\cos(\omega_T t)$. Υποθέστε ότι $a << l$ όπου l το μήκος του εκκρεμούς. Επίσης $\omega_T \gg \omega_0$ όπου $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ η γνωστή κυκλική συχνότητα του αδιατάρακτου ορθού εκκρεμούς για μικρές γωνίες εκτροπής. Σε αυτή την περίπτωση θεωρήστε ότι το $\theta(t) = \theta_0(t) + \xi(t)$ όπου το $\theta_0(t)$ είναι η «αργή» συνιστώσα της κίνησης, δηλαδή αυτή που μεταβάλλεται με αργό ρυθμό (μικρή συχνότητα) και $\xi(t)$ είναι η γρήγορη συνιστώσα, δηλαδή αυτή που μεταβάλλεται με πολύ γρηγορότερο ρυθμό, δηλαδή με πολύ μεγαλύτερη συχνότητα. Η αργή συνιστώσα έχει πολύ μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης από ότι η γρήγορη συνιστώσα. Θεωρήστε ότι η γρήγορη συνιστώσα έχει τη μορφή $\xi = \dfrac{a}{l}\sin\theta_0\cos(\omega_T t)$. Βρείτε την (διαφορική) εξίσωση κίνησης για την αργή συνιστώσα παραλείποντας μικρούς όρους μη γραμμικούς ως προς ξ και στη συνέχεια βρίσκοντας τη μέση τιμή πάνω στη γρήγορη ταλάντωση ω_T, σε πρώτη προσέγγιση θα βρείτε τη σχέση $\ddot{\theta}_0 = -\omega_0^2\sin\theta_0 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\omega_T}{l}\right)^2\sin\theta_0\cos\theta_0$. Βρείτε ένα ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(\theta_0)$ έτσι που η παραπάνω σχέση να είναι $ml^2\ddot{\theta}_0 = -\dfrac{\partial V_{\text{eff}}(\theta_0)}{\partial\theta_0}$. Βρείτε τα δυο σημεία ισορροπίας. Για το σημείο που αντιστοιχεί σε $\theta = \pi$ (αντεστραμμένο εκκρεμές) βρείτε πότε η κίνηση είναι ευσταθής. Αυτή η μεθοδολογία οφείλεται στον Φυσικό Kapitza. Κάντε εφαρμογή για αντεστραμμένο εκκρεμές με μήκος 25 cm, και πλάτος κατακόρυφης ταλάντωσης $a = 0{,}50$ cm.

5. Δείξτε ότι η εξίσωση $\ddot{z} + \gamma\dot{z} + a(t)z = 0$ με τον μετασχηματισμό $z = we^{-\gamma t/2}$ μετατρέπεται σε εξίσωση χωρίς όρο που να περιέχει $\dot{w}$. Θεωρήστε την περίπτωση της εξίσωσης Mathieu με απόσβεση,

$\ddot{x}+k\dot{x}+\left(\delta+\varepsilon\cos(\omega_T t)\right)x=0$. Μετασχηματίστε την σε εξίσωση χωρίς όρο απόσβεσης. Βρείτε τις σχέσεις που καθορίζουν την περιοχή ευστάθειας της λύσης $z(t)$.

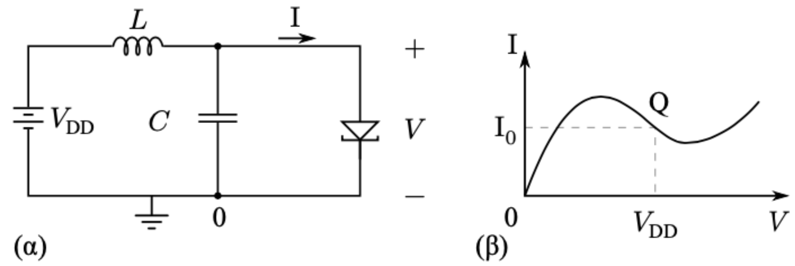
6. Θεωρήστε την εξίσωση Hill στη μορφή $\ddot{y}(t)+\left(\alpha+\beta f(t)\right)y(t)=0$, όπου $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta\left(t-\frac{\pi}{2}-n\pi\right)$, δηλαδή η διαταραχή είναι δέλτα συναρτήσεις. Βρείτε τις σχέσεις μεταξύ των σταθερών α,β για το σύνορο μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας, όταν $\alpha>0$ και όταν $\alpha<0$ αντιστοίχως.

7. Θεωρήστε τις εξισώσεις $x_1'=\left(1+\dfrac{\cos(t)}{2+\sin(t)}\right)x_1, x_2'=x_1-x_2$. Βρείτε την κύρια θεμελιώδη μήτρα και τις ιδιοτιμές της και τους εκθέτες Floquet μ_1,μ_2. Σύμφωνα με τη θεωρία Floquet , η λύση έχει τη μορφή $\boldsymbol{x}_1=\mathrm{e}^{\mu_1 t}\boldsymbol{p}_1(t), \boldsymbol{x}_2=\mathrm{e}^{\mu_2 t}\boldsymbol{p}_2(t)$ όπου τα $\boldsymbol{p}_1(t),\boldsymbol{p}_2(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με περίοδο 2π. Βρείτε τη λύση και βεβαιώστε ότι πράγματι έχει αυτή τη μορφή.

8. Μελετήστε την εξίσωση van der Pol, $\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0$, ως προς την ευστάθεια-αστάθεια των λύσεών της περί το σημείο ισορροπίας της, ($x=0,\dot{x}=0$), δηλαδή πως αυτό εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου ε.

9. Θεωρήστε το κύκλωμα του Σχήματος Πρ.11.9 (α). Η δίοδος είναι δίοδος καναλιού (tunnel diode) , είναι πολωμένη στο σημείο ηρεμίας, Q, που φαίνεται στο Σχήμα Πρ.11.9 (β). Περί το σημείο αυτό η διαφορική αντίσταση είναι αρνητική. Γράψτε την εξίσωση του κυκλώματος για την τάση $V=V(t)$ και το ρεύμα $I=I(t)$ της διόδου. Κάντε αλλαγή μεταβλητών ώστε αντί αυτών των «ολικών» τάσεων και ρευμάτων, να υπάρχουν οι τιμές που προκύπτουν αν αφαιρεθούν οι τιμές του σημείου ηρεμίας, $\upsilon=\upsilon(t), i=i(t)$. Δίνεται ότι η χαρακτηριστική της διόδου είναι της μορφής, $i=f(\upsilon)=-a_1\upsilon+b_1\upsilon^3, a_1>0, b_1>0$.

Αυτή είναι η προσέγγιση του van der Pol. Κάντε κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταβλητών, συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου, ώστε να καταλήξετε στην αδιάστατη εξίσωση van der Pol, $\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0$.



Σχήμα Πρ. 11.9.

10. Υποθέστε ότι η εξέλιξη ενός μονοδιάστατου δυναμικού συστήματος στο μόνιμο φαινόμενο, περιγράφεται από τη σχέση $x=x_0\cos(\omega_t t+\pi/4)$. Υποθέστε ότι η δειγματοληψία για την απεικόνιση Poincare γίνεται με τη συχνότητα ω_{D} της διέγερσης του συστήματος η οποία είναι της μορφής $B\cos(\omega_{\mathrm{D}}t)$. Θεωρήστε ότι η δειγματοληψία γίνεται όταν $t=0,\ 2\pi/\omega_{\mathrm{D}}, 2\times2\pi/\omega_{\mathrm{D}},...,n\times2\pi/\omega_{\mathrm{D}},...$. Προσδιορίστε γραφικά τα σημεία $x,\dot{x}$ της απεικόνισης Poincare α) όταν $\omega_{\mathrm{t}}=\omega_{\mathrm{D}}$ και όταν β) $\omega_{\mathrm{t}}=\omega_{\mathrm{D}}/4$. γ) Κάντε το α) αν η δειγματοληψία γίνεται τις χρονικές στιγμές

$$t=\pi/(2\omega_{\mathrm{D}}),\ \pi/(2\omega_{\mathrm{D}})+2\pi/\omega_{\mathrm{D}}, \pi/(2\omega_{\mathrm{D}})+2\times2\pi/\omega_{\mathrm{D}},...,\pi/(2\omega_{\mathrm{D}})+n\times2\pi/\omega_{\mathrm{D}},....$$

11. Μονοδιάστατη εξίσωση διαφορών είναι ορισμένη στο διάστημα $[0,1]$. Να θεωρηθεί ότι για τους υπολογισμούς που ακολουθούν, αυτό το διάστημα χωρίζεται σε 100 ίσα υποδιαστήματα. Υπολογίστε την εντροπία για την περίπτωση χαοτικής συμπεριφοράς, αν το διάστημα στο οποίο κατανέμονται ομοιόμορφα τα x_n είναι από 0 έως 1 και στη συνέχεια αν αυτό το διάστημα είναι από 0 έως 1/3.

12. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο γραμμικοποίησης και προσδιορίστε το είδος ευστάθειας-αστάθειας για τα σταθερά σημεία για τη μονοδιάστατη εξίσωση, $\dot{x} = \sin x$.

13. Εξετάστε το είδος ευστάθειας-αστάθειας των σταθερών σημείων για τις ακόλουθες περιπτώσεις. α) $\dot{x} = -x^3$, β) $\dot{x} = -x^3$, γ) $\dot{x} = x^2$, δ) $\dot{x} = 0$. Βεβαιωθείτε ότι δεν μπορείτε να αποφασίσετε κάνοντας γραμμικοποίηση, πρέπει να χρησιμοποιήσετε γραφική μέθοδο.

14. Βρείτε τη λαγκρανζιανή για έναν μετρονόμο και την εξίσωση κίνησής του. Προσθέστε τον όρο van der Pol.

15. Βρείτε τη λαγκρανζιανή για *N* το πλήθος μετρονόμους που είναι στερεωμένοι πάνω σε πλάκα η οποία μπορεί να κινείται οριζόντια. Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης. Προσθέστε τους όρους van der Pol. Η κίνηση να θεωρηθεί ότι γίνεται σε ένα επίπεδο.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 11

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β’ Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[3] V. I. Arnold, *Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.

[4] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[5] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, 1983.

[6] G. L. Baker and J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[7] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Persus Books, 1994.

[8] *ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΧΑΟΣ σε Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα*, Πρακτικά του 2ου Θερινού Σχολείου μη γραμμικής Φυσικής και Μαθηματικών, Σάμος, 3-10 Ιουλίου 1988, Επιστημονικοί εκδότες Τ. Μπουντής και Σ. Πνευματικός.

[9] G. Contopoulos, *A Third Integral of Integral of Motion in a Galaxy*, Z. Astrophys., Vol. 49, pp. 273, 1960.

[10] G. Contopoulos, *On the Existence of the Third Integral of Motion*, Astron. J., Vol. 68, pp. 1, 1963.

[11] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Nonlinear Mechanics, A supplement to Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, Dover Publications, Inc., 2006.

[12] G. Contopoulos, *On the Relative Motion of Stars*, Stockholms Obs. Ann. 19, No. 10, 1957.

[13] M. Henon and C. Heiles, *The Applicability of the Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments*, The Astronomical Journal, Vol. 69, No. 1, pp. 73, 1964.

[14] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physics 16D, pp. 285, 1985.

[15] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.

[16] J. Pantaleone, *Synchronization of metronomes*, American Journal of Physics, Vol. 70, No. 10, pp. 992, Oct. 2002.

[17] H. Ultrichs, A. Mann and U. Parlitz, *Synchronization and chaotic dynamics of coupled mechanical metronomes*, CHAOS 19, 043120, 2009.

[18] A. Jenkins, *Self-oscillation*, Physics Reports, Vol. 525, No. 2, pp. 167-222, 2013.

[19] D. W. Olson, S. F. Wolf and J. M. Hook, *The Tacoma Narrows Bridge collapse*, Physics Today, Nov. 2015.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Διαφορική μορφή-1 ή απλώς διαφορικό ή μορφή-1 (differential 1-form ή απλώς differential ή 1-form) ή διαφορική μορφή πρώτου βαθμού, σε χώρο διάστασης n είναι η έκφραση της μορφής

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(u)\mathrm{d}u_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_i A_i(u), \quad u = (u_1, u_2, ..., u_n) \tag{12.1}$$

Υποτίθεται ισχύουν κατάλληλα κριτήρια παραγωγισιμότητας και συνέχειας για τα $A_i(u)$.

Διαφορική μορφή-0 είναι απλώς η έκφραση (συνάρτηση)

$$f(u) \tag{12.2}$$

Διαφορική μορφή-2 είναι η έκφραση

$$\omega = \sum_{\substack{i<j \\ i=1}}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(u)\mathrm{d}u_i \Lambda \mathrm{d}u_j \ . \tag{12.3}$$

Το πλήθος των όρων του αθροίσματος στην Εξ. (12.3) είναι οι συνδυασμοί (δεν ενδιαφέρει η σειρά στη διάταξη) n διαφορετικών αντικειμένων ανά k διαφορετικά αντικείμενα δηλαδή $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Το σύμβολο Λ παριστάνει το γινόμενο-Λ (wedge-product) που βοηθά στη γενίκευση των συνήθων γινομένων του διανυσματικού λογισμού. Η μεθοδολογία αυτή ξεκίνησε για την εύκολη μετατροπή ολοκληρωμάτων από ένα σύστημα μεταβλητών σε άλλο.

Διαφορική μορφή-k (το k είναι ο βαθμός της διαφορικής μορφής) είναι η σχέση

$$\omega = \sum_{\substack{i_1<i_2<...<i_k \\ i=1}}^{n} B_{i_1 i_2 ... i_n}(u)\mathrm{d}u_{i_1} \Lambda \mathrm{d}u_{i_2} \Lambda ... \Lambda \mathrm{d}u_{i_k} \ . \tag{12.4}$$

Για το γινόμενο-Λ μεταξύ διαφορικών μορφών-1 ισχύουν οι ιδιότητες

$$\begin{aligned} &a_i \Lambda a_j = -a_j \Lambda a_i, \ \ a_i \Lambda a_i = 0 \\ &(\text{και προφανώς}) \ \mathrm{d}a_i \Lambda \mathrm{d}a_j = -\mathrm{d}a_j \Lambda \mathrm{d}a_i, \ \ \mathrm{d}a_i \Lambda \mathrm{d}a_i = 0 \end{aligned} \tag{12.5}$$

Για να προστεθούν δυο διαφορικές μορφές πρέπει να έχουν τον ίδιο βαθμό και ισχύει

$$a + b = b + a \, . \tag{12.6}$$

Το γινόμενο-Λ έχει πολλές από τις ιδιότητες του «συνήθους» γινομένου της αριθμητικής.

Δηλαδή αν a, b, c διαφορικές μορφές-1 τότε

$$\begin{aligned} &a\Lambda(b+c) = a\Lambda b + a\Lambda c \\ &a\Lambda(b\Lambda c) = (a\Lambda b)\Lambda c = a\Lambda b\Lambda c \end{aligned} \ . \tag{12.7}$$

Το γινόμενο δυο διαφορικών μορφών βαθμού k και l αντιστοίχως οδηγεί σε διαφορική μορφή βαθμού

$(k+l)$. Η (εξωτερική) διαφόριση της διαφορικής μορφής ω της Εξ. (12.4) ορίζεται ως εξής

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1<i_2<...<i_k=1}^{n} \mathrm{d}B_{i_1 i_2 ... i_n}(u) \Lambda \mathrm{d}u_{i_1} \Lambda \mathrm{d}u_{i_2} \Lambda ... \Lambda \mathrm{d}u_{i_k} \,. \tag{12.8}$$

Τα $B_{i_1 i_2 ... i_n}(u)$ είναι συνήθεις συναρτήσεις (άρα διαφορικές μορφές-0) και το διαφορικό τους είναι το σύνηθες ολικό διαφορικό συναρτήσεων. Το διαφορικό $\mathrm{d}\omega$ είναι βαθμού $k+1$, δηλαδή διαφορική μορφή-($k+1$). Κάθε διαφόριση αυξάνει τον βαθμό της διαφορικής μορφής κατά ένα.

Σημειώνουμε ότι πολλαπλασιασμός επί $f(u)$ σημαίνει συνήθης πολλαπλασιασμός, οπότε $f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{d}uf(u)$.

Για παράδειγμα, έστω η διαφορική μορφή πρώτου βαθμού

$$\omega = A(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_1 + B(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2 + C(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_3$$

Η εξωτερική διαφόρισή της οδηγεί στη διαφορική μορφή 2^{ου} βαθμού

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial A}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial A}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial A}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \right)\Lambda \mathrm{d}u_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial B}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial B}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \right)\Lambda \mathrm{d}u_2 \\
&+ \left(\frac{\partial C}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial C}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial C}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \right)\Lambda \mathrm{d}u_3 = \frac{\partial A}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 \Lambda \mathrm{d}u_1 + \frac{\partial A}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \Lambda \mathrm{d}u_1 \\
&+ \frac{\partial B}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 \Lambda \mathrm{d}u_2 + \frac{\partial B}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \Lambda \mathrm{d}u_2 + \frac{\partial C}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 \Lambda \mathrm{d}u_3 + \frac{\partial C}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 \Lambda \mathrm{d}u_3
\end{aligned}$$

Τελικώς

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial B}{\partial u_1} - \frac{\partial A}{\partial u_2} \right)\mathrm{d}u_1 \Lambda \mathrm{d}u_2 + \left(\frac{\partial C}{\partial u_1} - \frac{\partial A}{\partial u_3} \right)\mathrm{d}u_1 \Lambda \mathrm{d}u_3 + \left(\frac{\partial C}{\partial u_2} - \frac{\partial B}{\partial u_3} \right)\mathrm{d}u_2 \Lambda \mathrm{d}u_3$$

Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι μια διαφορική μορφή βαθμού μεγαλύτερου από τη διάσταση του χώρου είναι ίση με μηδέν διότι θα υπάρχουν δυο τουλάχιστο ίδια $\mathrm{d}u_l$ σε κάθε όρο της, βλέπε Εξ. (12.5).

Π2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΔΥΝΑΜΗΣ

Αν έχουμε μια δυνατή μεταβολή, δq_i, της γενικευμένης συντεταγμένης, q_i, ενώ όλες οι άλλες γενικευμένες συντεταγμένες μένουν αμετάβλητες, τότε το σημείο $\vec{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$ του πλήρους καρτεσιανού θεσικού χώρου θα υποστεί μια αντίστοιχη δυνατή μεταβολή, $\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, ..., \delta\vec{r}_N)$. Η κατεύθυνση αυτής της μετατόπισης στον καρτεσιανό χώρο, λέγεται κατεύθυνση q_i. Έστω η δύναμη, $\vec{F} = (X_1, X_2, ..., X_{3N})$, του καρτεσιανού χώρου (καρτεσιανή δύναμη). Η ορθή προβολή της στην κατεύθυνση q_i λέγεται φυσική συνιστώσα της $\vec{F}$ στην κατεύθυνση q_i και παριστάνεται συνήθως ως F_{q_i}. Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ γενικευμένων συνιστωσών δυνάμεων και φυσικών συνιστωσών σκεφτόμαστε ως εξής. Η συνιστώσα μιας δυνατής μετατόπισης στην q_i κατεύθυνση, στην κατεύθυνση της καρτεσιανής συνιστώσας x_j δίνεται από τη σχέση

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\delta q_i, \qquad j = 1, 2, ..., 3N \,. \tag{13.1}$$

Επομένως η συνιστώσα στην κατεύθυνση x_j του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{n}(q_i) = (n_1, n_2, ..., n_{3N})$ στην κατεύθυνση q_i, είναι

$$n_j(q_i) = \frac{\partial x_j / \partial q_i}{\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\partial x_j / \partial q_i\right)^2\right)^{1/2}}, \quad j = 1, 2, ..., 3N \,. \tag{13.2}$$

Το εσωτερικό γινόμενο επί τη δύναμη $\vec{F} = (X_1, X_2, ..., X_{3N})$, δίνει τη φυσική συνιστώσα της δύναμης αυτής στην κατεύθυνση q_i, δηλαδή

$$F_{\mathrm{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} X_j n_j(q_i) = \sum_{j=1}^{3N} \frac{X_j \partial x_j / \partial q_i}{\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\partial x_j / \partial q_i\right)^2\right)^{1/2}} \,. \tag{13.3}$$

Έχουμε την παρακάτω σχέση για τις γενικευμένες συνιστώσες δύναμης,

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \,.$$

Προφανώς στον συμβολισμό με τις καρτεσιανές συνιστώσες μπορεί να γραφτεί ως

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \,. \tag{13.4}$$

Από την Εξ. (13.3) και την Εξ. (13.4) βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση για την q_i φυσική συνιστώσα της καρτεσιανής δύναμης,

$$F_{\mathrm{q}_i} = \frac{Q_j}{\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\partial x_j / \partial q_i\right)^2\right)^{1/2}} \,. \tag{13.5}$$

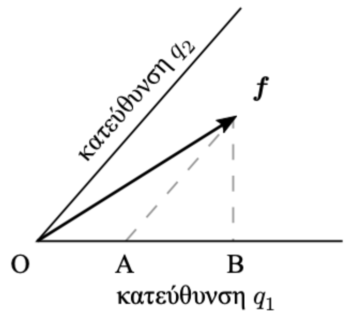
Υπάρχουν και άλλες ανάλογες ποσότητες για τις δυνάμεις, οι πιο διαδεδομένες είναι οι λεγόμενες συνήθεις (ordinary) συνιστώσες δύναμης, X_{oq_i}. Οι συνήθεις συνιστώσες δύναμης στις κατευθύνσεις $q_i, \quad i = 1, 2, ..., n$, ορίζονται ως το σύνολο των πολυδιάστατων διανυσμάτων στις κατευθύνσεις q_i τα οποία όταν αθροιστούν διανυσματικά δίνουν το πολυδιάστατο διάνυσμα της δύναμης στον καρτεσιανό χώρο των $3N$ διαστάσεων. Χωρίς να το αποδείξουμε απλώς αναφέρουμε ότι η συνήθης συνιστώσα δύναμης στην κατεύθυνση q_i δίνεται από

$$X_{\mathrm{oq}_i} = \sum_{j=1}^{n} (g_{ii})^{1/2} g'_{ij} Q_j \tag{13.6}$$

όπου Q_j η q_i γενικευμένη συνιστώσα δύναμης, $\left[g_{ij}\right]$ είναι μήτρα με στοιχεία $g_{ij}=\sum_{k=1}^{3N}\left(\partial x_k/\partial q_i\right)(\partial x_k/\partial q_j)$ και g'_{ij} είναι τα στοιχεία της αντίστροφης μήτρας.

Πολλές φορές οι όροι δε χρησιμοποιούνται προσεκτικά και μπερδεύονται, καλό είναι να το έχουμε υπόψη.

Το Σχ. (Π3.1) δείχνει τις διαφορές τους στις δυο διαστάσεις. ΟΒ είναι η φυσική συνιστώσα της δύναμης $\vec{f}$ στην κατεύθυνση της q_1 γενικευμένης συνιστώσας. ΟΑ είναι η συνήθης συνιστώσα της δύναμης $\vec{f}$ στην ίδια κατεύθυνση. Το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων q_1, q_2 είναι πλαγιογώνιο καρτεσιανό.



Σχήμα Π2.1 *Φυσική (ΟΒ) και συνήθης (ΟΑ) συνιστώσες δύναμης.*

Π3. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΜΕ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Ας ξεκινήσουμε από σύστημα αναφοράς στο οποίο η περιγραφή γίνεται με καρτεσιανές, σταθερές ως προς το σύστημα αναφοράς, συντεταγμένες. Για μηχανικό σύστημα με *N* σωμάτια έχουμε για την κινητική ενέργεια ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς:

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^{\,2}\,. \tag{14.1}$$

Έχουμε τις σχέσεις σημειακού μετασχηματισμού συντεταγμένων Εξ. (14.2), όπου έχουν ληφθεί υπόψη οι ολόνομοι δεσμοί και έτσι έχουν οριστεί *n* γενικευμένες συντεταγμένες θέσης

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,q_2,...,q_n,t), \qquad i=1,2,...,N. \tag{14.2}$$

Κατά τον μετασχηματισμό το σύστημα αναφοράς παραμένει το ίδιο, οπότε ισχύουν για τις ταχύτητες σε αυτό το σύστημα αναφοράς:

$$\vec{\upsilon}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}_i=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\,. \tag{14.3}$$

Άρα

$$\begin{aligned} T&=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\\ &=T_0(q,t)+T_1(q,\dot{q},t)+T_2(q,\dot{q},t). \end{aligned} \tag{14.4}$$

Όπου

$$
\begin{aligned}
&T_0(q,t)=M_0(q,t),\quad M_0(q,t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\\
&T_1(q,\dot{q},t)=\sum_{j=1}^{n}M_j(q,t)\dot{q}_j,\quad M_j(q,t)=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\\
&T_2(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k,\quad M_{jk}(q,t)=M_{kj}(q,t)=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right).
\end{aligned}
\tag{14.5}
$$

Το πρώτο άθροισμα, προσθετέος, $T_0=T_0(q,t)$, δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες, το δεύτερο, $T_1=T_1(q,\dot{q},t)$, εξαρτάται γραμμικά από τις ταχύτητες. Οι όροι αυτού του αθροίσματος λέγονται γυροσκοπικοί όροι. Σε αυτούς οφείλεται η «περίεργη» κίνηση του γυροσκοπίου. Το τρίτο άθροισμα $T_2=T_2(q,\dot{q},t)$ είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις ταχύτητες. Οι τρεις προσθετέοι είναι ομογενείς ως προς τις ταχύτητες βαθμών 0, 1, 2 αντιστοίχως. Δηλαδή ισχύει η γνωστή σχέση του Euler, $\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf$ όπου k είναι ο βαθμός ομογένειας για τις n μεταβλητές. Αν οι εξισώσεις μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές στις άλλες γενικευμένες συντεταγμένες δεν περιέχουν άμεσα τον χρόνο, τότε $T_0=T_1=0$ και μένει μόνο ο όρος T_2, $T=T_2(q,\dot{q})$, ο οποίος έχει ομογενή τετραγωνική μορφή ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες και δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο. Είναι δυνατόν οι εξισώσεις μετασχηματισμού να εξαρτώνται από τον χρόνο ενώ η κινητική ενέργεια να μην εξαρτάται από τον χρόνο. Μπορεί να το δείτε εύκολα θεωρώντας ότι οι μετασχηματισμοί έχουν γραμμική εξάρτηση από τον χρόνο. Αυτό δεν σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση $T=T_2$.

Σημειώνουμε ότι, η κινητική ενέργεια με τις νέες συντεταγμένες είναι η κινητική ενέργεια ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς. Απλώς εκφράζεται συναρτήσει άλλων συντεταγμένων. Η μορφή της έχει αλλάξει αλλά οι τιμές της στα αντίστοιχα σημεία είναι ίδιες. Με αυτό τον μετασχηματισμό σημείου, κάναμε απλή αντικατάσταση των συντεταγμένων θέσης στην έκφραση για την αρχική κινητική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια για κινούμενο σύστημα αναφοράς ως προς το πρώτο υπολογίζεται διαφορετικά και οι τιμές της στα αντίστοιχα σημεία είναι διαφορετικές. Συγκεκριμένα ισχύει $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\upsilon_{ri}^2$, όπου υ_r είναι η (σχετική) ταχύτητα ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς.

Π4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΟΗΘΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χωρόχρονος του Minkowski έχει τις τέσσερις συντεταγμένες που σε κάποιο σύστημα Lorentz είναι

$$x^0,x^1,x^2,x^3\qquad x^0=ct,x^1=x,x^2=y,x^3=z. \tag{15.1}$$

Δηλαδή η συντεταγμένη με δείκτη 0 αντιστοιχεί στον χρόνο και οι υπόλοιπες τρεις είναι οι συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι τέσσερεις αυτές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε ένα (κοσμικό) γεγονός σε ορισμένη χωρική θέση (x^1,x^2,x^3) που συμβαίνει ορισμένη χρονική στιγμή t. Η τετράδα αυτή αποτελεί ένα τετραδιάνυσμα.

Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τετραδιανύσματα, με ελληνικούς δείκτες, που παίρνουν τιμές (0,1,2,3).

$$\text{τετραδιάνυσμα } x^{\alpha},\quad \alpha=0,1,2,3. \tag{15.2}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μετασχηματισμός που μας οδηγεί από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Έστω ότι οι συντεταγμένες των δυο συστημάτων συνδέονται με μετασχηματισμούς της μορφής

$$\begin{aligned} x'^{\alpha} &= x'^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x^{\alpha} &= x^{\alpha}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \qquad \alpha = 0,1,2,3 \end{aligned} \tag{15.3}$$

Οι τανυστές τάξης k που ορίζονται στο χωροχρονικό σημείο x χαρακτηρίζονται από τις ιδιότητες μετασχηματισμού τους υπό τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x \to x'$. Συγκεκριμένα ένα βαθμωτό (μέγεθος) είναι ένας τανυστής τάξης μηδέν, δηλαδή είναι μια μοναδική ποσότητα που η τιμή της δεν μεταβάλλεται από τον μετασχηματισμό. Οι τανυστές τάξης 1 είναι διανύσματα και μπορεί να είναι δυο τύπων. Τα λεγόμενα ανταλλοίωτα διανύσματα A^{α} με τέσσερεις συνιστώσες A^0, A^1, A^2, A^3 , που δηλώνονται με άνω δείκτες και μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta} . \tag{15.4}$$

Δηλαδή όπως ένα διαφορικό. Εδώ εννοείται ότι έχουμε άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες, δηλαδή

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^3} A^3 . \tag{15.5}$$

Οι άνω δείκτες λέγονται ανταλλοίωτοι δείκτες. Τα λεγόμενα συναλλοίωτα διανύσματα B_{α} , δηλώνονται με κάτω δείκτες και χαρακτηρίζονται από τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$B'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} B_{\beta} . \tag{15.6}$$

Δηλαδή μετασχηματίζονται όπως η βαθμίδα μιας συνάρτησης. Αναλυτικά έχουμε

$$B'_{\alpha} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\alpha}} B_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^{\alpha}} B_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^{\alpha}} B_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^{\alpha}} B_3 . \tag{15.7}$$

Οι κάτω δείκτες λέγονται συναλλοίωτοι δείκτες. Ένας ανταλλοίωτος τανυστής τάξης δύο $F^{\alpha\beta}$ αποτελείται από 16 ποσότητες (συνιστώσες) που μετασχηματίζονται ως εξής

$$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta} . \tag{15.8}$$

Ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξης δύο, μετασχηματίζεται όπως φαίνεται παρακάτω

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} G_{\gamma\delta} . \tag{15.9}$$

Ένας μεικτός τανυστής δεύτερης τάξης $H'^{\alpha}{}_{\beta}$ μετασχηματίζεται ως εξής

$$H'^{\alpha}_{\ \beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} H^{\gamma}_{\ \delta} \,. \tag{15.10}$$

Το πλήθος των δεικτών χαρακτηρίζει την τάξη του τανυστή. Εύκολα μπορεί να γενικεύσει κάποιος τα ανωτέρω και σε τανυστές μεγαλύτερης τάξης. Το εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο δυο διανυσμάτων ορίζεται ως γινόμενο των αντίστοιχων συνιστωσών ενός συναλλοίωτου και ενός ανταλλοίωτου διανύσματος, δηλαδή

$$B \cdot A = B_{\alpha} A^{\alpha} \,. \tag{15.11}$$

Εύκολα προκύπτει ότι αυτό είναι πράγματι βαθμωτό με την έννοια ότι οι ανωτέρω μετασχηματισμοί συντεταγμένων το αφήνουν αμετάβλητο

$$B \cdot A = B' \cdot A' \,. \tag{15.12}$$

Με τον όρο εσωτερικό γινόμενο ή συναλοιφή ή συστολή (contraction) σε σχέση με δυο δείκτες που ανήκουν στον ίδιο τανυστή ή σε διαφορετικούς, ορίζεται ως η άθροιση ως προς αυτούς τους δείκτες με ανάλογο τρόπο όπως στην Εξ. (15.11). Πρέπει ο ένας δείκτης να είναι ανταλλοίωτος και ο άλλος συναλλοίωτος. Παρόλο που αναφερθήκαμε σε τανυστές που ορίζονται σε τετραδιάστατο χώρο, αυτό δεν είναι απαραίτητο, ο χώρος μπορεί να έχει οσεσδήποτε διαστάσεις. Αν ο χώρος έχει n διαστάσεις και η τάξη του τανυστή είναι k, τότε ο τανυστής έχει k^n συνιστώσες.

Όπως αναφέραμε στην αρχή, στην περίπτωση της ειδικής σχετικότητας ο χώρος είναι ο τετραδιάστατος χώρος του Minkowski. Οι μετασχηματισμοί είναι οι μετασχηματισμοί του Lorentz. Η γεωμετρία του χωρόχρονου της ειδικής σχετικότητας χαρακτηρίζεται από το (αναλλοίωτο) μήκος s ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, για το οποίο ισχύει $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Για το στοιχειώδες μήκος έχουμε

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 \,. \tag{15.13}$$

Το στοιχειώδες μήκος είναι επίσης αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς του Lorentz, δηλαδή είναι ένα βαθμωτό (μέγεθος). Γενικώς το στοιχειώδες μήκος καθορίζεται από τη μετρική του χώρου που εκφράζεται από τον μετρικό τανυστή g, ως εξής

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x_{\beta}\mathrm{d}x^{\beta} = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \,. \tag{15.14}$$

Ο μετρικός τανυστής είναι ο ακόλουθος συμμετρικός, διαγώνιος τανυστής

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{15.15}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{gathered} g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{για } \mu \neq \nu \text{ και} \\ g_{00} = 1, \;\; g_{11} = -1, \;\; g_{22} = -1, \;\; g_{33} = -1 \,. \end{gathered} \tag{15.16}$$

Προφανώς έχουμε τη σχέση

$$g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\delta_{\alpha}^{\ \beta},\ \ \delta_{\alpha}^{\ \beta}=0\quad \alpha\neq\beta,\ \ \delta_{\alpha}^{\ \alpha}=1\ \ \alpha=0,1,2,3\,. \qquad (15.17)$$

Όπου $\delta_{\alpha}^{\ \beta}$ είναι το δέλτα του Kronecker. Ο μετρικός τανυστής είναι αυτός που χρησιμοποιείται ώστε να μετατρέψουμε έναν δείκτη τανυστή από συναλλοίωτο σε ανταλλοίωτο και αντίστροφα, αυτό ουσιαστικά έγινε στην Εξ. (15.14). Έχουμε

$$\begin{aligned} &x_{\alpha}=g_{\alpha\beta}x^{\beta},\ \ x^{\alpha}=g^{\alpha\beta}x_{\beta} \\ &F^{..\alpha..}_{..}=g^{\alpha\beta}F^{....}_{..\beta},\ \ G^{...}_{...\alpha.}=g_{\alpha\beta}G^{...\beta}_{....} \end{aligned}\,. \qquad (15.18)$$

Στην περίπτωση της σχετικότητας όταν ανεβαίνει ή κατεβαίνει ένας δείκτης τανυστή, αν ο δείκτης έχει την τιμή 0 (δηλαδή αναφέρεται στη χρονική συνιστώσα) τότε η συνιστώσα του τανυστή μένει αμετάβλητη, αν ο δείκτης είναι 1,2 ή 3 (χωρικές συνιστώσες) τότε το μέτρο της συνιστώσας μένει το ίδιο αλλά αλλάζει το πρόσημό της. Για παράδειγμα, έστω το ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα A^{α} στο χώρο του Minkowski, θα έχουμε

$$A^{\alpha}=(a,\vec{a}),\quad A_{\alpha}=(a,-\vec{a})\,. \qquad (15.19)$$

Το εσωτερικό γινόμενο δυο τετραδιανυσμάτων είναι

$$B\cdot A=B_{\alpha}A^{\alpha}=B^{0}A^{0}-\vec{B}\cdot\vec{A},\quad B^{0}=B_{0}$$

Ο τελεστής της παραγώγισης ως προς μιαν ανταλλοίωτη συνιστώσα του τετραδιανύσματος του τετραχώρου της σχετικότητας, είναι συναλλοίωτος διανυσματικός τελεστής. Ο τελεστής παραγώγισης ως προς τις αντίστοιχες συναλλοίωτες συνιστώσες είναι ανταλλοίωτος διανυσματικός τελεστής. Πρέπει να πούμε ότι τέτοιες παραγωγίσεις δεν οδηγούν στη γενική περίπτωση του τανυστικού λογισμού σε τανυστές αλλά μόνο αν ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι γραμμικός.

Έχουμε τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned} \partial^{\alpha}&=\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\vec{\nabla}\right) \\ \partial_{\alpha}&=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\vec{\nabla}\right). \end{aligned} \qquad (15.20)$$

Η τετραπόκλιση ενός τετραδιανύσματος είναι ένα βαθμωτό (αναλλοίωτο) μέγεθος,

$$\partial^{\alpha}A_{\alpha}=\partial_{\alpha}A^{\alpha}=\frac{1}{c}\frac{\partial A^{0}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,. \qquad (15.21)$$

Ο τετραδιάστατος τελεστής του Laplace (λαπλασιανή) στον χώρο της ειδικής σχετικότητας είναι

$$\Box=\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}=\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t^{2}}-\nabla^{2}\,. \qquad (15.22)$$

Θα αναφερθούμε με λίγα λόγια στον Τανυστικό Λογισμό ως ερευνητική μέθοδο.

Στα προηγούμενα αναφερθήκαμε σε μερικές σχέσεις του Τανυστικού Λογισμού που είναι χρήσιμες στην Ειδική Σχετικότητα. Η χρησιμότητά του όμως, είναι ίσως πιο σημαντική στη Γενική Σχετικότητα. Δεν θα επεκταθούμε σε αυτό αλλά θα μιλήσουμε για βασικές έννοιες χρήσιμες στη Φυσική όπου χρησιμοποιείται ο Τανυστικός Λογισμός.

Ισχύει το εξής: Αν οι συνιστώσες τανυστή είναι ταυτοτικά μηδέν σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων, θα είναι ταυτοτικά μηδέν και σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Στο παραπάνω στηρίζεται το εξής: Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστή μια σχέση ως προς το σύστημα ηρεμίας ενός φυσικού συστήματος. Αν μπορέσουμε να εκφράσουμε αυτόν τον νόμο στη μορφή εξίσωσης μεταξύ τανυστών η οποία ανάγεται στη σωστή (παραπάνω) εξίσωση στο σύστημα ηρεμίας, τότε αυτή η εξίσωση τανυστών είναι η σωστή συναλλοίωτη εξίσωση για το εξεταζόμενο φαινόμενο. Αυτή η μορφή είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων.

Π5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LEGENDRE

Ο μετασχηματισμός του Legendre, γενικώς, σχετίζεται με διαφορικές εξισώσεις.

Στη φυσική πολλές φορές, κάποιες ποσότητες δίνονται ως συναρτήσεις ανεξάρτητων μεταβλητών που δεν είναι βολικές για την περιγραφή του φυσικού συστήματος ενώ είναι πιο βολικές, ως ανεξάρτητες, μεταβλητές που είναι οι παράγωγοι της παραπάνω (αρχικής) συνάρτησης ως προς τις αρχικές μεταβλητές. Αφού διαλέξουμε αυτές τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές, πρέπει να βρούμε την κατάλληλη νέα ποσότητα-συνάρτηση ως προς αυτές. Τίθεται τότε το ερώτημα αν η νέα συνάρτηση διατηρεί το φυσικό και μαθηματικό περιεχόμενο της αρχικής ή αλλιώς, αν έχει την ίδια πληροφορία με την αρχική.

Παρακάτω θα εξετάσουμε μια απλή περίπτωση για να γίνει σαφές αυτό που λέμε. Για ευκολία αναφερόμαστε στην περίπτωση μιας υπό μετασχηματισμό μεταβλητής , διότι για αυτή την περίπτωση υπάρχει απλή γραφική παράσταση που κάνει τα πράγματα εύκολα κατανοητά. Στην αρχή θα περιοριστούμε σε συνεχείς συναρτήσεις που είναι μονότιμες στο πεδίο ορισμού τους, δηλαδή για κάθε μια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, υπάρχει μια μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Επίσης οι συναρτήσεις θα έχουν παραγώγους τουλάχιστον μέχρι και δεύτερης τάξης, στο πεδίο ορισμού τους. Τέλος, α) η καμπύλη που παριστάνει η συνάρτηση θα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή καμπύλη), αυτό θα πει ότι η δεύτερη παράγωγος της αρχικής συνάρτησης ως προς την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή είναι θετική ή β) θα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη καμπύλη), δηλαδή η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική. Με άλλα λόγια, στο διάστημα ορισμού δεν πρέπει να μεταβάλλεται η καμπύλωση. Αυτό εξασφαλίζει ότι η καμπύλη δεν έχει την ίδια κλίση σε δυο διαφορετικά σημεία. Μια ειδική περίπτωση είναι όταν υπάρχει γραμμική εξάρτηση της αρχικής συνάρτησης από την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή. Τότε οι πρώτες παράγωγοι είναι σταθερές και η δεύτερες μηδέν. Αυτό είναι περίπτωση που θα σχολιάσουμε αργότερα. Έστω η απλή περίπτωση συνάρτησης μιας ανεξάρτητης μεταβλητής,

$$f = f(x) . \tag{16.1}$$

Η νέα μεταβλητή p (κλίση), βρίσκεται με την παραγώγισή της,

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} . \tag{16.2}$$

Έστω ότι αυτή η σχέση μπορεί να αντιστραφεί, δηλαδή να λυθεί ως προς x οπότε

$$x = x(p) . \tag{16.3}$$

Η αντιστροφή μπορεί να γίνει αν $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \neq 0$. Από την Εξ. (16.3) και την Εξ. (16.1) βρίσκουμε

$$f = f\left(x(p)\right) = f_{\mathrm{a}}(p) . \tag{16.4}$$

Το πρόβλημα φαίνεται εκ πρώτης όψεως λυμένο αφού η ανεξάρτητη μεταβλητή x αντικαταστάθηκε από την ανεξάρτητη μεταβλητή p . Αυτό όμως δεν είναι αλήθεια, θα δούμε ότι η Εξ. (16.1) και η Εξ. (16.4) δεν είναι εντελώς ισοδύναμες, επομένως αυτή η προφανής διαδικασία δεν οδηγεί στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Πράγματι, ενώ η Εξ. (16.4) προέκυψε μονοσήμαντα από την Εξ. (16.1), η Εξ. (16.1) δεν προκύπτει μονοσήμαντα από την Εξ. (16.4). Αυτό είναι ευνόητο διότι για να πάμε από την Εξ. (16.4) πίσω στην Εξ. (16.1), πρέπει να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από την Εξ. (16.4),δηλαδή την

$$g(x) = f_{\mathrm{a}}\left(\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right). \tag{16.5}$$

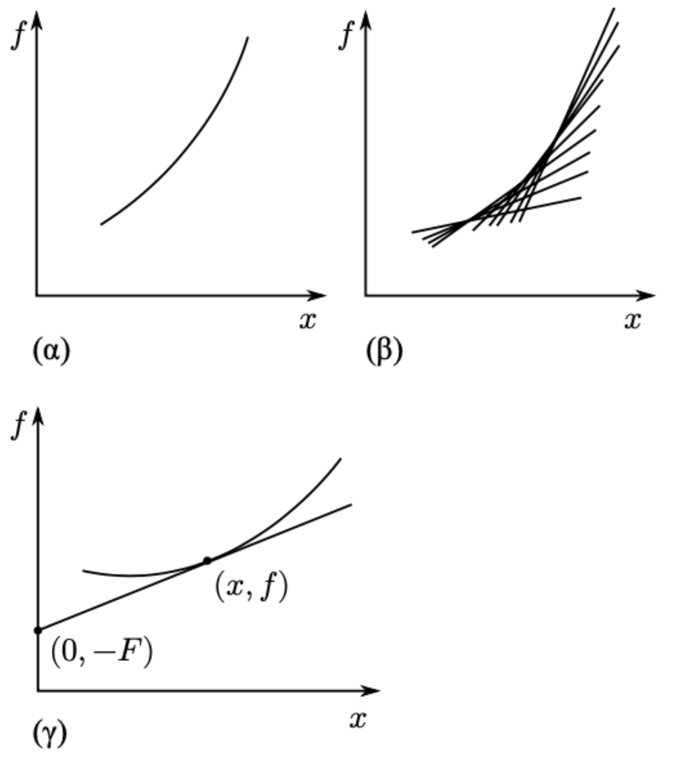
Η λύση της είναι της μορφής

$$g = g(x,c)\ . \tag{16.6}$$

Αυτή είναι μια παραμετρική οικογένεια (πολλών) καμπυλών (συναρτήσεων) που όλες είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Η αρχική συνάρτηση της Εξ. (16.1) είναι μια λύση, και συμπεριλαμβάνεται στην Εξ. (16.6) για κάποια τιμή της σταθεράς. Αυτά σημαίνουν ότι η συνάρτηση $f_{\mathrm{a}}(p)$ δεν είναι ακριβώς ισοδύναμη με την αρχική $f = f(x)$, διότι οδηγεί και σε άλλες (λύσεις) συναρτήσεις του x, δηλαδή έχει περισσότερη πληροφορία από την αρχική.

Επομένως υπάρχει η ανάγκη λύσης του προβλήματος με άλλο τρόπο. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση κατάλληλου μετασχηματισμού που να μας οδηγεί από την αρχική συνάρτηση $f = f(x)$ σε μια νέα συνάρτηση $F = F(p)$ και η αντίστροφη διαδικασία να οδηγεί μόνο στην αρχική συνάρτηση.

Για να κατανοήσουμε τον μετασχηματισμό που λύνει το πρόβλημά μας θα χρησιμοποιήσουμε τις γεωμετρικές εικόνες των Σχ.(Π6.1α, β,γ). Η καμπύλη με την οποία ξεκινούμε είναι κυρτή αλλά ανάλογα γίνονται και για κοίλη καμπύλη.



Σχήμα Π5.1 *α) Καμπύλη (κυρτή) συνάρτησης, ως γεωμετρικός τόπων σημείων. β) Καμπύλη συνάρτησης ως περιβάλλουσα οικογένειας εφαπτόμενων. γ) Γεωμετρική κατασκευή για την εύρεση της εξίσωσης της οικογένειας εφαπτόμενων του (β).*

Μια καμπύλη μπορεί να παρασταθεί είτε ως ο γεωμετρικός τόπος σημείων των οποίων οι συντεταγμένες πληρούν δεδομένη σχέση, όπως εδώ την Εξ. (16.1), είτε ως η περιβάλλουσα μιας οικογένειας εφαπτόμενων ευθειών των οποίων η κλίση υπακούει σε δεδομένη σχέση. Στα Σχ.(Π6.1α,β) παριστάνεται η ίδια καμπύλη με τους δυο τρόπους. Το πρόβλημα ανάγεται στο να βρούμε την εξίσωση που ισχύει για την οικογένεια των εφαπτόμενων ευθειών. Στο Σχ.(Π6.1γ) έχουμε την καμπύλη του Σχ.(Π6.1α) όπου φαίνεται η εφαπτόμενη ευθεία σε ένα σημείο της η οποία τέμνει τον άξονα των f στο σημείο (0,-F). Από αυτό το σχήμα έχουμε για την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας

$$p = \frac{f-(-F)}{x}.$$

Αντί για τα ζεύγη (σημεία) (x, f) θα έχουμε αντίστοιχα ζεύγη (σημεία) (p, F). Με βάση αυτή τη σχέση ορίζουμε την ενδιάμεση συνάρτηση $F(x, p)$ ως εξής

$$F(x, p) = px - f(x), \quad p = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{16.7}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \neq 0$ οπότε η δεύτερη σχέση στην Εξ. (16.7) αντιστρέφεται και βρίσκουμε τη σχέση $x = x(p)$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη σχέση στην Εξ. (16.7) και καταλήγουμε στη ζητούμενη νέα συνάρτηση,

$$F(p) = F(x(p), p) = px(p) - f(x(p)). \tag{16.8}$$

Λέμε ότι αυτή η νέα συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Legendre της αρχικής f. Είναι σαφές ότι $F(x(p), p) = F(p),\ px(p) = px,\ f(x(p)) = f(x)$ στα αντίστοιχα σημεία.

Με ακριβώς αντίστροφη διαδικασία, από την Εξ. (16.8) μπορούμε να βρούμε μονοσήμαντα την Εξ. (16.1). Δηλαδή η $f(x)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της $F(p)$.

Σχηματίζουμε το διαφορικό της $F(x, p)$, από την Εξ. (16.7),

$$\mathrm{d}F(x, p) = p\mathrm{d}x + x\mathrm{d}p - \mathrm{d}f(x). \tag{16.9}$$

Από τη δεύτερη σχέση της Εξ. (16.7) έχουμε

$$\mathrm{d}f = p\mathrm{d}x. \tag{16.10}$$

Άρα η Εξ. (16.9) δίνει $\mathrm{d}F(x, p) = x\mathrm{d}p$. Όμως $\mathrm{d}F(p) = \frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p$ και $\mathrm{d}F(x, p) = \mathrm{d}F(p)$.

Τελικώς,

$$x = \frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} \tag{16.11}$$

Αυτή είναι όμοια με τη δεύτερη στην Εξ. (16.7). Υποθέτουμε ότι αυτή αντιστρέφεται οπότε έχουμε ξανά τη σχέση $p = p(x)$. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$f(p, x) = xp - F(p). \tag{16.12}$$

Αντικαθιστούμε το $p = p(x)$ και βρίσκουμε την αρχική συνάρτηση $f(x) = f(p(x), x)$. Σημειώνουμε επίσης, ότι η αρχική και η τελική συνάρτηση έχουν την ίδια κυρτότητα.

Ο μετασχηματισμός Legendre είναι δυϊκός. Δηλαδή, η νέα μεταβλητή είναι η παράγωγος της παλιάς συνάρτησης και η παλιά μεταβλητή είναι η παράγωγος της νέας συνάρτησης. Η ίδια διαδικασία που οδηγεί από το παλιό σύστημα στο νέο, οδηγεί και από το νέο στο παλιό. Υποθέσαμε ότι υπάρχει εξάρτηση μόνο από την αρχική μεταβλητή x και την τελική μεταβλητή p.

Στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρχει εξάρτηση και από άλλη μεταβλητή, την y, που δεν παίρνει μέρος στον μετασχηματισμό. Οι πρώτες λέγονται ενεργητικές μεταβλητές και η δεύτερη παθητική μεταβλητή. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε χρήση μερικών παραγώγων. Ο πίνακας που ακολουθεί δηλώνει τη δυϊκότητα.

Πίνακας 16.1 *Η δυϊκότητα του μετασχηματισμού Legendre*

		Παλιό σύστημα	Νέο σύστημα
Μεταβλητή:		x	p
Μετασχηματισμός			
		$p=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $x=x(p,y)$	$x=\dfrac{\partial F(p,y)}{\partial p}$ $p=p(x,y)$
		$F(x,p,y)=px-f(x,y)$	$f(x,p,y)=px-F(p,y)$
		$F(p,y)=F(x(p),p,y)=px(p)-f(x(p),y)$	$f(x,y)=f(x,p,y)=p(x)x-F(p(x),y)$

Επίσης έχουμε $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται ως εξής: Διαφορίζουμε την πρώτη σχέση της τρίτης σειράς,

$$\mathrm{d}F(x,p,y)=p\mathrm{d}x+x\mathrm{d}p-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την πρώτη της πρώτης σειράς οπότε,

$$\mathrm{d}F(x,p,y)=x\mathrm{d}p-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\cdot$$

Επίσης ισχύει $\mathrm{d}F(x,p,y)=\mathrm{d}F(p,y)=\dfrac{\partial F}{\partial p}\mathrm{d}p+\dfrac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\cdot$

Επομένως βρίσκουμε ξανά τη δεύτερη της πρώτης σειράς και τη ζητούμενη,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Τονίζουμε ότι οι σχέσεις της τρίτης σειράς, κάτω από τον τίτλο Μετασχηματισμός, είναι στην ουσία ίδιες, με την έννοια πως οι αντίστοιχοι όροι προκύπτουν οι μεν από τους δε με απλή αντικατάσταση των μεταβλητών τους με τις συναρτήσεις των μεταβλητών ως προς άλλες μεταβλητές. Αξίζει τον κόπο να κάνουμε την εξής γενίκευση: Η αρχική συνάρτηση είναι δυνατόν να μην έχει παραγώγους σε μεμονωμένα σημεία της. Μπορεί να έχει, για παράδειγμα, γωνίες (κορυφές) όπου υπάρχουν μόνο η αριστερή και η δεξιά παράγωγος και είναι διαφορετικές. Τώρα μπορούμε να πούμε ότι η ευθεία που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, που είναι η γραφική παράσταση της $F(x,p,y)=xp-f(x.y)$, εφάπτεται (καλύτερα ακουμπά) στην $f=f(x,y)$ έτσι που να μην την διαπερνά. Όταν υπάρχει η πρώτη παράγωγος αυτό σημαίνει πως είναι η εφαπτόμενη ευθεία στην $f=f(x,y)$. Είναι σαφές ότι υπάρχει απειρία τέτοιων ευθειών, άρα πολλές κλίσεις p για κάθε σημείο που είναι «γωνία» και επίσης τα σημεία τομής με τον άξονα των f είναι πολλά. Δηλαδή για ένα ζευγάρι τιμών (x,f) έχουμε πολλά διαφορετικά ζεύγη (p,F). Επίσης μπορεί η αρχική συνάρτηση να έχει «ευθύγραμμα» τμήματα όπου η κλίση p είναι ίδια για πολλά x, δηλαδή εκεί υπάρχει γραμμική εξάρτηση της f από το x.

Τώρα θα σχολιάσουμε αυτή την ειδική περίπτωση. Θα θεωρήσουμε ότι παντού $f(x,y)=a(y)x+b(y)$. Η πρώτη παράγωγος που ορίζει τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή, $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, δεν εξαρτάται από την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή x, η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$. Η κλίση p είναι, $p(y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=a(y)=p_1(y)$. Δε μπορούμε να αντιστρέψουμε και να βρούμε $x=x(p)$. Όμως το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα βρίσκεται θέτοντας $x=0$ και αυτό δίνει την τιμή $-F=b(y)$. Το συμπέρασμα είναι πως έχουμε τη νέα συνάρτηση F η οποία όμως ορίζεται μόνο σε ένα σημείο, στο $p=p_1=a(y)$ και έχει μια μόνο τιμή, την τιμή $F_1=F(p_1,y)=-b(y)$, μη ξεχνάτε το y είναι μια παράμετρος, σταθερή όσον αφορά στον μετασχηματισμό. Αντιστρόφως, στο ένα σημείο (F_1,p_1), ακουμπούν, περνούν («εφάπτονται») πολλές ευθείες με διάφορες κλίσεις. Αυτό σημαίνει ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Legendre δίνει, $f(x,y)=p_1x-F_1=a(y)x+b(y)$, όπως αναμένεται. Σημειώνουμε ότι, τώρα στον χώρο (p,F), το x είναι η κλίση της ευθείας που παίρνει πολλές τιμές. Συμπεραίνουμε ότι ακόμη και σε αυτή την ειδική περίπτωση υπάρχει μετασχηματισμός Legendre.

Π6. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ JACOBI

Θα δείξουμε την ταυτότητα Jacobi, δηλαδή ότι για οποιεσδήποτε τρεις δυναμικές συναρτήσεις u,υ,w ισχύει

$$\left[u,\left[\upsilon,w\right]\right]+\left[\upsilon,\left[w,u\right]\right]+\left[w,\left[u,\upsilon\right]\right]=0. \tag{17.1}$$

Εξετάζουμε τους δυο πρώτους όρους της Εξ. (17.1) εναλλάσσοντας μεταξύ τους, στο δεύτερο όρο, τα u,w. Έχουμε

$$\left[u,\left[\upsilon,w\right]\right]-\left[\upsilon,\left[u,w\right]\right]. \tag{17.2}$$

Θα δείξουμε ότι αυτοί οι όροι μαζί δεν περιέχουν δεύτερες παραγώγους του w. Για τη συνάρτηση υ εισάγουμε τον γραμμικό διαφορικό τελεστή

$$D_\upsilon=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}-\frac{\partial\upsilon}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right). \tag{17.3}$$

Ο τελεστής αυτός μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$D_\upsilon=\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}. \tag{17.4}$$

Τα α_i είναι παράγωγοι του υ ως προς τα q,p με κατάλληλα πρόσημα. Ανάλογα μπορούμε να εισαγάγουμε τον γραμμικό τελεστή

$$D_u=\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}. \tag{17.5}$$

Η Εξ. (17.2) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$D_uD_\upsilon w-D_\upsilon D_u w=\sum_{i,j=1}^{2n}\beta_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\alpha_j\frac{\partial w}{\partial\xi_j}\right)-\sum_{i,j=1}^{2n}\alpha_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\beta_i\frac{\partial w}{\partial\xi_i}\right). \tag{17.6}$$

Οι μόνοι όροι στην Εξ. (17.6) που περιέχουν δεύτερες παραγώγους του w είναι αυτοί του αθροίσματος της Εξ. (17.7), το άθροισμα όμως είναι μηδέν, δηλαδή

$$\sum_{i,j=1}^{2n}\left(\beta_i\alpha_j\,\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_i\partial\xi_j}-\alpha_j\beta_i\,\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_j\partial\xi_i}\right)=0\,. \tag{17.7}$$

Επομένως η Εξ. (17.2) έχει μόνο πρώτες παραγώγους του w και θα έχει τη μορφή

$$\left[u,\left[\upsilon,w\right]\right]-\left[\upsilon,\left[u,w\right]\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i\,\frac{\partial w}{\partial p_i}+B_i\,\frac{\partial w}{\partial q_i}\right). \tag{17.8}$$

Τα A_i, B_i είναι συναρτήσεις των u,υ, που πρέπει να προσδιοριστούν, αλλά δεν είναι συναρτήσεις του w. Ο προσδιορισμός τους γίνεται ως εξής. Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου $w=p_i$ (αυτό δεν μεταβάλλει τα A_k, B_k γιατί δεν εξαρτώνται από το w), τότε η Εξ. (17.8) γίνεται

$$\left[u,\left[\upsilon,w\right]\right]-\left[\upsilon,\left[u,w\right]\right]=A_i\,. \tag{17.9}$$

Όμως ισχύει η σχέση (8) από το Εδάφιο 7.3, δηλαδή

$$[\,f\,,p_k\,]=\frac{\partial f}{\partial q_k}\,. \tag{17.10}$$

Επομένως η Εξ. (17.9) δίνει

$$A_i=\frac{\partial}{\partial q_i}\left[u,\upsilon\right]. \tag{17.11}$$

Ομοίως, θέτοντας $w=q_i$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (7) από το Εδάφιο 7.3, δηλαδή την

$$[\,f\,,q_k\,]=-\frac{\partial f}{\partial p_k}\,. \tag{17.12}$$

Βρίσκουμε

$$B_i=-\frac{\partial}{\partial p_i}\left[u,\upsilon\right]. \tag{17.13}$$

Η Εξ. (17.8), με χρήση των Εξ. (17.11) και (17.13), γίνεται

$$\left[u,\left[\upsilon,w\right]\right]+\left[\upsilon,\left[w,u\right]\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[u,\upsilon\right]-\frac{\partial w}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left[u,\upsilon\right]\right)=-\left[w,\left[u,\upsilon\right]\right]. \tag{17.14}$$

Αυτή είναι η ταυτότητα του Jacobi, δηλαδή η Εξ. (17.1).

Π7. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για την περιοχή αυτή των μαθηματικών, χρησιμοποιούνται οι όροι, θεωρία μεταβολών ή παραλλαγών ή παραλλακτικές μέθοδοι (variational methods). Τα θεωρήματα στα οποία θα αναφερθούμε είναι στην ουσία μαθηματικά θεωρήματα. Αυτά τα θεωρήματα έχουν εφαρμογή στη Φυσική και γι' αυτό τα εξετάζουμε στη μορφή που είναι χρήσιμα στη Φυσική. Συγκεκριμένα, βρίσκουν εφαρμογή στην Κλασική Φυσική και με αυτό εννοούμε, στην περιοχή που λαμβάνονται υπόψη η καθαρά Νευτώνεια Φυσική ή η Ειδική ή η Γενική σχετικότητα, ακόμη και η Κβαντική Φυσική με τα πεδία να είναι κλασικά πεδία.

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι συντεταγμένες του πολυδιάστατου χώρου. Οι εξαρτημένες μεταβλητές εξαρτώνται από τις συντεταγμένες και στη Φυσική είναι αυτές που ονομάζουμε πεδία. Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι ο χώρος έχει πολλές διαστάσεις και είναι επίπεδος (flat). Για τις συντεταγμένες $x=\left(x^1,x^2,...,x^m\right)$, το στοιχείο όγκου όταν ο χώρος είναι επίπεδος , μη καμπύλος, μπορεί να πάρει τη μορφή $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}^m x=\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2...\mathrm{d}x^m$, όπου m η διάσταση του χώρου. Τέτοιος τετραδιάστατος χώρος στη Φυσική, στη μη σχετικιστική μηχανική , είναι ο συνήθης τρισδιάστατος (ευκλείδειος) χώρος για τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθούν καρτεσιανές συντεταγμένες μαζί με τον ανεξάρτητο χρόνο, $x=\left(t,x^1,x^2,x^3\right)$. Στην Ειδική Σχετικότητα είναι ο τετραδιάστατος χώρος Minkowski, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν καρτεσιανές συντεταγμένες μαζί με τον χρόνο, δηλαδή $x=\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right),\ x^0=ct$, $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$, (ψευδοευκλείδειος). Μερικές φορές χρησιμοποιούμε το σύμβολο $x^0=ct$ στη θέση της συντεταγμένης του χρόνου ακόμη και για τη μη σχετικιστική περίπτωση. Αυτό δε σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε τετραδιανύσματα, πράγμα που ισχύει για τη Σχετικότητα. Ο συμβολισμός μας διευκολύνει γιατί δεν κάνουμε αλλαγή όταν αναφερόμαστε στη Σχετικότητα και επίσης είναι βολικό το ότι οι τέσσερεις συνιστώσες του τετραδιάστατου χώρου με καρτεσιανές συντεταγμένες έχουν ίδιες διαστάσεις. Είναι γνωστό ότι εκτός Σχετικότητας και σε καρτεσιανές συντεταγμένες δεν έχει νόημα ο διαχωρισμός σε ανταλλοίωτους και συναλλοίωτους δείκτες. Αν χρησιμοποιηθούν καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, το στοιχείο όγκου τροποποιείται. Η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι της Γενικής Σχετικότητας όπου, γενικώς, ο χώρος είναι καμπύλος (non flat) ανεξάρτητα από το είδος των συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται. Γενικώς για καμπύλο χώρο, ή για γενικευμένες (καμπυλόγραμμες) συντεταγμένες το στοιχείο όγκου γίνεται $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}^m x=\sqrt{|g|}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2...\mathrm{d}x^m$, όπου $g(x)$ είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g^{\mu\nu}(x)$ στο σημείο x. Θα δούμε ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση γίνεται $\sqrt{|g|}\mathrm{L}$. Σε αυτή την περίπτωση τροποποιείται με ανάλογο τρόπο και το θεώρημα της απόκλισης που συνδέει το ολοκλήρωμα όγκου με το ολοκλήρωμα στην περικλείουσα τον όγκο επιφάνεια. Από πλευράς Φυσικής, η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση καμπύλου χώρου είναι στη Γενική Σχετικότητα (χώρος Riemann). Σε αυτή την περίπτωση στα πεδία συμπεριλαμβάνονται και τα στοιχεία του μετρικού τανυστή. Σε χώρους που ενώ είναι επίπεδοι γίνεται χρήση καμπυλόγραμμων συντεταγμένων οπότε χρησιμοποιείται ο μετρικός τανυστής, τα στοιχεία αυτού του τανυστή δεν αποτελούν πεδία, γι' αυτό η περίπτωση είναι απλούστερη και με αυτήν θα ασχοληθούμε, κατά κύριο λόγο.

Όταν ένας χώρος είναι επίπεδος, τότε είναι δυνατόν με κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων να ισχύει για την απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε σημείων του, το πυθαγόρειο θεώρημα. Για παράδειγμα για το επίπεδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (ρ,θ). Σε αυτές τις συντεταγμένες η (στοιχειώδης) απόσταση είναι: $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2$ και το στοιχείο «όγκου», εδώ επιφάνειας, είναι $\mathrm{d}\Omega=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$. Όμως με μετασχηματισμό σε καρτεσιανές συντεταγμένες, για όλο το επίπεδο, δηλαδή $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$, βρίσκουμε για απειροστές αποστάσεις $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$ και για πεπερασμένες $\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2$ για όλο το χώρο, επίσης $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι «είμαστε» πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας R. Οι συντεταγμένες είναι οι δυο σφαιρικές συντεταγμένες (φ,θ). Η απόσταση μεταξύ σημείων ορίζεται ως το μήκος πάνω σε μέγιστο κύκλο που ενώνει τα δυο σημεία. Η στοιχειώδης απόσταση είναι

$$\mathrm{d}s^2=R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+R^2\mathrm{d}\theta^2 \text{ και } \mathrm{d}\Omega=R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta .$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει μετασχηματισμός που να ισχύει για όλη τη σφαιρική επιφάνεια, ο οποίος να οδηγεί σε συντεταγμένες για τις οποίες να ισχύει για την απόσταση, το πυθαγόρειο θεώρημα. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο τοπικά, δηλαδή στην περιοχή του κάθε σημείου.

Ένα άλλο σημείο που αξίζει να τονίσουμε είναι οι λεγόμενες καμπυλότητες ενός χώρου.

Θα περιοριστούμε σε παραδείγματα δυο διαστάσεων. Γενικώς οι δισδιάστατες επιφάνειες έχουν σε κάθε σημείο τους δυο καμπυλότητες ή το αντίστροφό τους, δυο ακτίνες καμπυλότητας. Η κάθε ακτίνα καμπυλότητας αναφέρεται σε ένα επίπεδο που περιέχει την κάθετο στην επιφάνεια σε ένα σημείο της και επομένως είναι κάθετο στο εφαπτόμενο στην επιφάνεια επίπεδο. Η ακτίνα καμπυλότητας σε ένα σημείο είναι οι ακτίνα καμπυλότητας του εγγύτατου κύκλου στην καμπύλη που είναι η τομή του επιπέδου που περιέχει την κάθετο με την επιφάνεια. Σε κάθε τέτοιο κάθετο επίπεδο αντιστοιχεί μια ακτίνα και (επομένως) μια καμπυλότητα. Σε κάθε σημείο υπάρχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη καμπυλότητα που λέγονται κύριες καμπυλότητες (principal curvatures). Τα επίπεδά τους λέγονται κύρια επίπεδα και είναι κάθετα μεταξύ τους. Η καμπυλότητα μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Είναι θετική αν η καμπύλη καμπυλώνεται κατά την κατεύθυνση που έχει οριστεί ως κατεύθυνση της καθέτου, στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητική.

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι έχουμε μια κυλινδρική επιφάνεια, μια κωνική επιφάνεια και μια σφαιρική επιφάνεια. Στην περίπτωση της κυλινδρικής επιφάνειας οι ακτίνες σε κάθε σημείο στα κύρια επίπεδα (κύριες ακτίνες καμπυλότητας) είναι $R_1 = R, R_2 = +\infty$ και οι (κύριες) καμπυλότητες είναι $\kappa_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R},\ \kappa_2 = \frac{1}{R_2} = 0$. R είναι η συνήθης ακτίνα (της κάθετης τομής) του κυλίνδρου. Για την κωνική επιφάνεια ισχύουν, $R_1, R_2 = +\infty$ και οι κύριες καμπυλότητες είναι

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1}, \kappa_2 = \frac{1}{R_2} = 0 .$$

Για την περίπτωση της σφαιρικής επιφάνειας έχουμε προφανώς, $R_1 = R_2 = R,\ \ \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = \frac{1}{R}$. Εκ πρώτης όψεως όλες οι επιφάνειες «φαίνονται» καμπύλες. Όμως υπάρχει ουσιώδης διαφορά μεταξύ τους. Οι δυο πρώτες μπορεί να «ξετυλιχτούν» αφού κοπούν κατάλληλα και να γίνουν επίπεδες επιφάνειες. Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρες αυτές οι επιφάνειες μπορούν να χαρακτηριστούν με καρτεσιανές συντεταγμένες, άρα είναι επίπεδες επιφάνειες. Αυτό δε μπορεί να γίνει για τη σφαιρική επιφάνεια. Μόνο σε απειροστές περιοχές της μπορεί να έχουμε καρτεσιανές συντεταγμένες κατά προσέγγιση. Αυτά εκφράζονται με τη λεγόμενη γκαουσιανή καμπυλότητα K (gaussian curvature). Αυτή είναι μια εσωτερική ιδιότητα του χώρου που δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες. Ισχύει η σχέση $K = \kappa_1\kappa_2$. Αν αυτή είναι μηδέν τότε η επιφάνεια είναι επίπεδη αν όχι είναι καμπύλη. Στις περιπτώσεις που εξετάσαμε η κυλινδρική και η κωνική επιφάνειες είναι επίπεδες ενώ η σφαιρική είναι καμπύλη και μάλιστα έχει θετική καμπυλότητα. Το θετικό ή το αρνητικό χαρακτηρίζεται από το πρόσημο του K. Αυτά γενικεύονται κατάλληλα σε πολυδιάστατους χώρους.

Π7.1 Εξισώσεις των Euler-Lagrange από θεωρία μεταβολών για συνεχή συστήματα

Έστω η συνάρτηση F η οποία εξαρτάται, τελικώς, από τις m ανεξάρτητες μεταβλητές (γενικευμένες συντεταγμένες) x_i, επίπεδου χώρου όπου το στοιχείο όγκου έχει τη γενική μορφή $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}^m x = \sqrt{|g|}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_m$. Στη Μηχανική για διακριτά συστήματα έχουμε $m=1$ και ανεξάρτητη μεταβλητή είναι, συνήθως, ο χρόνος, ή ο ιδιόχρονος ή κάποια άλλη κατάλληλη παράμετρος. Στη Φυσική, στην περίπτωση πεδίων έχουμε $m=4$. Ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι τρεις συντεταγμένες του συνήθους τρισδιάστατου χώρου και ο χρόνος, ενώ F είναι η λαγκρανζιανή πυκνότητα ή απλώς λαγκρανζιανή. Εδώ υποθέτουμε ότι η F εξαρτάται και από n συναρτήσεις των x_i, τις $y_j(x)$, που είναι οι εξαρτημένες μεταβλητές και είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Αυτές αντιστοιχούν στα πεδία της Φυσικής. Θα υποθέσουμε ακόμη ότι η F εξαρτάται επίσης, (μόνο) από τις πρώτες παραγώγους $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = y_{j,i}$.

Μπορεί κανείς να ασχοληθεί με πιο γενικές μορφές όπου υπάρχει εξάρτηση και από παραγώγους ανώτερης τάξης. Τότε, όπως έχουμε δει, οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι ανώτερης τάξης. Τέτοιες γενικεύσεις και επεκτάσεις έχουν προταθεί ή βρίσκουν εφαρμογή στα πλαίσια Υπερσυμμετρικών Θεωριών Στοιχειωδών Σωματιδίων (θεωρίες SUSY, supersymmetry). Όμως στα πλαίσια της Φυσικής που μας ενδιαφέρει εδώ, είναι αρκετή η εξάρτηση μόνο από τις πρώτες παραγώγους. Όπως είπαμε όσα ακολουθούν αναφέρονται σε προβλήματα που σχετίζονται με ανεξάρτητες μεταβλητές σε χώρο m διαστάσεων (υπερόγκος).

Στο σύνορο του χώρου (υπερεπιφάνεια m-1 διαστάσεων) οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών είναι καθορισμένες και δεν μεταβάλλονται κατά τις παραλλαγές. Θα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$
\begin{aligned}
&x=(x_1,x_2,...,x_m)\\
&y=y(x)=\left(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\right)\\
&\frac{\partial y}{\partial x}=y_x=\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=y_{j,i}\quad j=1,2,...,n\quad i=1,2,...,m\\
&F(x,y,y_x)=F\left(x_i,y_j,\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)=F\left(x_i,y_j,y_{j,i}\right)\ j=1,2,...,n\quad i=1,2,...,m.
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

Σχηματίζουμε το συναρτησοειδές της συνάρτησης F

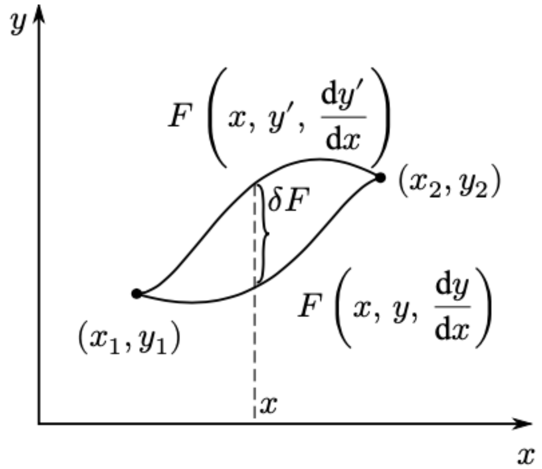
$$
Z=Z\left(y(x)\right)=\int_{\Omega}F(x,y,y_x)\mathrm{d}\Omega\,. \tag{18.2}
$$

Το ολοκλήρωμα εκτείνεται σε ένα πεπερασμένο ή απέραντο χωρίο («όγκο») του χώρου των x, διαστάσεως m. Τα $y(x)$ παριστάνουν μια «τροχιά» στον ανωτέρω πολυδιάστατο χώρο. Θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις που πρέπει να πληρούν τα $y(x)$ (πραγματική τροχιά) ώστε το συναρτησοειδές να έχει στάσιμη τιμή για αυτή την τροχιά. Η σύγκριση γίνεται κατά τα γνωστά με γειτονικές τροχιές που διαφέρουν κατά απειροστά πρώτης τάξης από την πραγματική. Οι απειροστές μεταβολές των $y(x)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των x_i και γίνονται με τα x_i σταθερά. Για κάθε θέση x πηγαίνουμε από το σημείο της πραγματικής τροχιάς $y(x)$ στο σημείο της γειτονικής τροχιάς $y'(x)$. Σε αυτό το Εδάφιο, αυτές οι μεταβολές θα συμβολίζονται με το γνωστό σύμβολο δ. Αφού τα $y(x)$ είναι καθορισμένα, δηλαδή δεν μεταβάλλονται κατά τις παραλλαγές στο σύνορο, οι αυθαίρετες μεταβολές των $y(x)$, δηλαδή τα $\delta y(x)$, μηδενίζονται στο σύνορο S του χωρίου Ω.

Όπως είπαμε, το σύνορο S είναι ένα είδος υπερεπιφάνειας διαστάσεως $m-1$ μέσα στον χώρο των ανεξάρτητων μεταβλητών διαστάσεως m. Το χωρίο Ω δεν μεταβάλλεται κατά την παραλλαγή (μεταβολή). Στάσιμη τιμή σημαίνει ότι, η απειροστή παραλλαγή του συναρτησοειδούς (δηλαδή του ολοκληρώματος) της Εξ (18.2) κατά τη μεταβολή από την πραγματική τροχιά στη γειτονική παραλλαγμένη τροχιά, είναι μηδέν. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\delta Z&=\int_{\Omega}F\left(x_i,y',y'_x\right)\mathrm{d}^m x-\int_{\Omega}F\left(x,y,y_x\right)\mathrm{d}^m x\\
&=\int_{\Omega}\left[F\left(x,y',y'_x\right)-F\left(x,y,y_x\right)\right]\mathrm{d}^m x\\
&=\delta\int_{\Omega}F\left(x,y,y_x\right)\mathrm{d}^m x=\int_{\Omega}\delta F\left(x,y,y_x\right)\mathrm{d}^m x=0.
\end{aligned}
\tag{18.3}
$$

Στο Σχ. (Π7.1) φαίνεται η απλή περίπτωση για $m=1$ και $n=1$.



Σχήμα Π7.1 *Πραγματική και γειτονική τροχιά για την πιο απλή περίπτωση.*

Αυτή είναι η αρχή παραλλαγών (ή μεταβολών) σε πολλές διαστάσεις. Με βάση αυτή την αρχή θα δείξουμε ότι για την πραγματική τροχιά ισχύουν οι εξισώσεις των Euler-Lagrange.

Η ισχύς των εξισώσεων των Euler-Lagrange είναι αναγκαία συνθήκη για το στάσιμο του συναρτησοειδούς αλλά όχι πάντοτε και ικανή συνθήκη. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το δεύτερο μαθηματικό θέμα εδώ. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $y(x)$ και έχουν παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς τα x. Θα ορίσουμε μεταβολές των μεταβλητών που να είναι σε συμφωνία με όσα είπαμε παραπάνω. Μπορεί κανείς να ορίσει γενικότερες μεταβολές με πιο πολύπλοκες εξαρτήσεις.

Ορίζουμε τις μεταβολές ως εξής

$$\begin{aligned} &\delta x_i = x_i' - x_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., m \\ &\delta y_j(x) = y_j' - y_j \quad j = 1, 2, ..., n \\ &\delta y_j(x)\big|_S = 0. \end{aligned} \tag{18.4}$$

Για μια συνάρτηση f με άμεση και έμμεση εξάρτηση από τα x_i έχουμε

$$\begin{aligned} &\delta \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f'}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \left(f' - f \right)}{\partial x_i} = \frac{\partial \left(\delta f \right)}{\partial x_i} \\ &\delta \frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta f_{,i} = \frac{\partial \left(\delta f \right)}{\partial x_i} \\ &\delta \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial^k \left(\delta f \right)}{\partial x_i^k}. \end{aligned} \tag{18.5}$$

Ισχύει η σχέση

$$\delta Z = \int_\Omega \delta F \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_{j,i}} \delta y_{j,i} \right) \mathrm{d}\Omega = 0 \,. \tag{18.6}$$

Με την έννοια της ολικής παραγώγου μερικές φορές θα θεωρούμε ότι ισχύουν,

$$\frac{\partial y_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\mathrm{d} y_j(x)}{\mathrm{d} x_k} \,. \tag{18.7}$$

Αυτό δεν είναι σύμφωνο με τον συνήθη συμβολισμό για τις παραγώγους. Εδώ δεν σημαίνει ότι το y_j εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την x_k, αλλά σημαίνει ότι υπάρχει μόνο άμεση εξάρτηση από το x_k, δεν υπάρχει και έμμεση εξάρτηση. Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύουν οι αντίστοιχες των τελευταίων από τις Εξ. (18.5) για την ολική παράγωγο.

Για μια συνάρτηση με άμεση και έμμεση εξάρτηση από τα x_i έχουμε

$$\begin{aligned} \delta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i} &= \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x_i}-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}=\frac{\mathrm{d}(\delta f)}{\mathrm{d}x_i} \\ \delta\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x_i^k} &= \frac{\mathrm{d}^k(\delta f)}{\mathrm{d}x_i^k}. \end{aligned} \tag{18.8}$$

Θα ολοκληρώσουμε παραγοντικά το δεύτερο ολοκλήρωμα του αθροίσματος της Εξ. (18.6).
Ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_j\right) &= \delta y_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\right)+\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\frac{\mathrm{d}(\delta y_j)}{\mathrm{d}x_i} \\ &= \delta y_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\right)+\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x_i}=\delta y_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\right)+\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \\ &= \delta y_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\right)+\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_{j,i} \end{aligned} \tag{18.9}$$

Επομένως, με παραγοντική ολοκλήρωση, το δεύτερο ολοκλήρωμα της Εξ. (18.6) γίνεται

$$\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_{j,i}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_j\right)\mathrm{d}\Omega\text{-}\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\delta y_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\right)\mathrm{d}\Omega\,. \tag{18.10}$$

Η έκφραση $\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_j\right)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της Εξ. (18.10), είναι η απόκλιση (divergence) με διάσταση m, της συνάρτησης που αντιπροσωπεύει η παρένθεση. Ισχύει το σχετικό θεώρημα της απόκλισης, οπότε το ολοκλήρωμα όγκου μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα στην επιφάνεια που περικλείει τον όγκο (σύνορο του χωρίου, σύνορο του όγκου). Σε κάθε σημείο της επιφάνειας θεωρείται θετική η κατεύθυνση από μέσα προς τα έξω. Έχουμε

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}\Omega=\int_{S}\sum_{i=1}^{m}f_i\mathrm{d}S_i\,. \tag{18.11}$$

Τα $\mathrm{d}S_i$ είναι οι «προβολές» του στοιχείου του συνόρου S στο υπερεπίπεδο που καθορίζεται από x_i = σταθερό. Έτσι το ολοκλήρωμα της Εξ. (18.10) γίνεται

$$\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_j\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{S}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\delta y_j\right)\mathrm{d}S_i. \tag{18.12}$$

Όμως οι δεύτερες σχέσεις της Εξ. (18.4) λένε ότι στην επιφάνεια S τα $\delta y_j=0$, άρα το ολοκλήρωμα της Εξ. (18.12) είναι μηδέν, οπότε η Εξ. (18.6) με χρήση της Εξ. (18.10) και της Εξ. (18.12) δίνει

$$\delta Z = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \delta y_j \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}} \right) \right] \mathrm{d}\Omega = 0 \,. \tag{18.13}$$

Βλέπουμε ότι η δυνατή μεταβολή του ολοκληρώματος της απόκλισης είναι μηδέν. Αυτό μπορεί να δει κάποιος πως σχετίζεται με το ότι το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης ισούται με ολοκλήρωμα στο σύνορο το οποίο είναι μια σταθερά.

Στη συνέχεια κάνουμε τον συνήθη συλλογισμό: Αφού τα y_j είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα θα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και τα δy_j, επομένως μπορούμε να διαλέγουμε διαδοχικά ένα από αυτά μη μηδενικό στο άθροισμα των ολοκληρωμάτων πάνω στα $j = 1, 2, \ldots, n$ και όλα τα άλλα μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ένα από αυτά τα ολοκληρώματα του αθροίσματος θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\int_{\Omega} \delta y_j \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}} \right) \right] \mathrm{d}\Omega = 0 \,. \tag{18.14}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το γνωστό θεμελιώδες λήμμα της Θεωρίας Μεταβολών. Αυτό λέει ότι αφού οι μεταβολές δy_j είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των x_i, τότε για να είναι το ολοκλήρωμα της σχέσης (18.14) ίσο με μηδέν, πρέπει η αγκύλη να είναι μηδέν. Επομένως τελικώς η Εξ. (18.14) μας οδηγεί στο ότι, για την πραγματική τροχιά, δηλαδή για τα $y_j(x)$ $j = 1, 2, \ldots, n$, που την καθορίζουν, ισχύουν οι εξισώσεις των Euler-Lagrange για τη συνάρτηση F, δηλαδή

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \frac{\partial F}{\partial y_{j,i}} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \frac{\partial F}{\partial \left(\partial y_j / \partial x_i \right)} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{18.15}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθούμε στο γεγονός που παρόμοιό του έχουμε δει στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων. Έστω οι αυθαίρετες παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\Lambda_i(x, y)$ $i = 1, 2, \ldots, m$ που μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως τις συνιστώσες ενός διανύσματος στον χώρο των m διαστάσεων. Σχηματίζουμε την απόκλιση, δηλαδή την παράσταση $\sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i}$. Ολοκληρώνουμε την απόκλιση στον χώρο Ω.

Έχουμε $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \mathrm{d}\Omega$. Προσθέτουμε αυτό το ολοκλήρωμα και τροποποιούμε το συναρτησιακό της Εξ. (18.2), οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} Z' &= \int_{\Omega} F(x, y, y_x) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \mathrm{d}\Omega = Z + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(F(x, y, y_x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \right) \mathrm{d}\Omega \quad . \end{aligned} \tag{18.16}$$

Σχηματίζουμε τη δυνατή μεταβολή $\delta Z'$. Προφανώς έχουμε,

$$\delta Z' = \delta \int_{\Omega} \left(F(x, y, y_x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \right) \mathrm{d}\Omega = \delta Z + \delta \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \mathrm{d}\Omega . \qquad (18.17)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα απόκλισης οπότε, μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα στο σύνορο. Είδαμε λίγο πριν ότι η δυνατή μεταβολή ενός ολοκληρώματος απόκλισης είναι μηδέν. Αυτό σχετίζεται με το γεγονός ότι, όπως είπαμε, το ολοκλήρωμα είναι μια σταθερά. Επομένως

$$\delta Z' = \delta \int_{\Omega} \left(F(x, y, y_x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \right) \mathrm{d}\Omega = \delta Z . \qquad (18.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι θέτοντας $\delta Z = \delta Z' = 0$, καταλήγουμε στις ίδιες εξισώσεις Lagrange , από την Z και την Z'. Παίρνουμε τις ίδιες λύσεις και από τα δυο αυτά συναρτησιακά.

Τελικώς, καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση μπορεί να τροποποιηθεί σύμφωνα με τη σχέση,

$$F'(x, y, y_x) = F(x, y, y_x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\Lambda_i(x, y)}{\mathrm{d}x_i} \qquad (18.19)$$

ενώ οι εξισώσεις Lagrange μένουν οι ίδιες. Θυμηθείτε ότι έχουμε το αντίστοιχο για διακριτά συστήματα στη Μηχανική όπου αντί για απόκλιση έχουμε ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο και αυτό το ξέρουμε και από το λαγκρανζιανό φορμαλισμό, χωρίς θεωρία μεταβολών. Εφόσον η F περιέχει μόνο πρώτες παραγώγους των y, γράψαμε τα Λ_i ως συναρτήσεις μόνο των x, y. Αυτά μπορεί να γενικευτούν κατάλληλα σε γενικότερες περιπτώσεις όπου υπάρχουν στην F ανώτερες παράγωγοι.

Η πιο γενική μορφή συνάρτησης F είναι να ορίζεται σε πολυδιάστατο χώρο ανεξάρτητων μεταβλητών και να εξαρτάται από πολλές εξαρτημένες μεταβλητές και παραγώγους τους ανώτερης τάξης συμπεριλαμβανομένων μεικτών παραγώγων της μορφής $\dfrac{\partial^l}{\partial x_1 \partial x_2 \partial^\mu x_3 \ldots}$.

Παρακάτω αναφερόμαστε στην περίπτωση όπου στην F έχουμε μιαν ανεξάρτητη μεταβλητή μια εξαρτημένη μεταβλητή και παραγώγους μέχρι τάξεως N. Αυτή η περίπτωση μπορεί, σχετικά εύκολα, να γενικευθεί για πολλές ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές με παραγώγους ανώτερης τάξης, χωρίς μεικτές παραγώγους. Θα χρησιμοποιήσουμε για ευκολία τον συμβολισμό

$$\begin{aligned} & y^{(l)} = \frac{\mathrm{d}^l y}{\mathrm{d}x^l}, \quad l = 0,1,\ldots,N \\ & y = y^{(0)}, \quad F = F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}) \end{aligned} \qquad (18.20)$$

Τώρα η Εξ. (18.6) γίνεται

$$\delta Z = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \delta y^{(i)} \right) \mathrm{d}x = 0 . \qquad (18.21)$$

Σε αυτή την περίπτωση με παραγώγους μέχρι N τάξης ισχύει ο περιορισμός στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης (δηλαδή στο σύνορο)

$$\delta y^{(i)}\Big|_{x_1, x_2} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,N \;\; \delta \mathrm{d}^i y, \quad i = 0,1,\ldots,N-1 . \qquad (18.22)$$

Σύμφωνα με τις Εξ. (18.5) ή (18.8) μετατίθενται τα $\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}$, δ οπότε έχουμε

$$\delta Z = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \frac{\mathrm{d}^i \delta y}{\mathrm{d}x^i} \right) \mathrm{d}x = 0 . \tag{18.23}$$

Είναι γνωστό ότι ισχύει η ταυτότητα της Εξ. (18.24), όπου όταν $i = 0$, θεωρούμε ότι ο δεύτερος όρος στο δεύτερο μέλος είναι μηδέν,

$$fg^{(i)} = (-1)^i g f^{(i)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} f^{(l-1)} g^{(i-l)} \right). \tag{18.24}$$

Επομένως η Εξ. (18.23) γίνεται

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^{N} \delta y \left((-1)^i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right) \frac{\mathrm{d}^{i-l} \delta y}{\mathrm{d}x^{i-l}} \right] \mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{18.25}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ολικού διαφορικού. Κάνοντας την μετάθεση των $\dfrac{\mathrm{d}^{i-l}}{\mathrm{d}x^{i-l}}$ και δ, αυτό γίνεται

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right) \frac{\mathrm{d}^{i-l} \delta y}{\mathrm{d}x^{i-l}} \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right) \delta y^{(i-l)} \right] \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right) \delta y^{(i-l)} \right] \Bigg|_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \tag{18.26}$$

Αυτό το ολοκλήρωμα οδηγεί σε όρο ο οποίος έχει τιμές στο σύνορο, δηλαδή στα σημεία x_1, x_2 (όρος συνόρου). Αυτός είναι μηδέν αφού υποθέσαμε ότι ισχύουν οι συνθήκες μηδενισμού των μεταβολών των παραγώγων και της y στο σύνορο, $\delta y^{(r)}\big|_{x_1,x_2} = 0,\ \ r = 0,1,\dots,N-1$, Εξ. (18.22) και για την περίπτωση $i = 0$ είπαμε ότι η αγκύλη είναι μηδέν. Επομένως, εφόσον το δy είναι αυθαίρετη συνάρτηση του x, εφαρμόζουμε το θεμελιώδες λήμμα της θεωρίας μεταβολών και από την Εξ. (18.25) καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση των Euler-Lagrange με ανώτερες παραγώγους

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} \left((-1)^i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}x^i}} \right) = 0. \tag{18.27}$$

Η γενική μορφή των εξισώσεων των Euler-Lagrange με όλων των μορφών παραγώγους στην F , με πολλές ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές είναι πολύπλοκη και μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία.

Τονίζουμε εδώ ότι, η συνάρτηση F μπορεί να εξαρτάται και από άλλες συναρτήσεις των x_i των οποίων η εξέλιξη δεν προκύπτει από θεωρία μεταβολών του ανωτέρω συναρτησοειδούς, αυτές για τη θεωρία μεταβολών που οδηγεί στις εξισώσεις των Euler-Lagrange είναι δεδομένες και προσδιορίζονται με άλλους τρόπους. Όταν κάνουμε τις ανωτέρω μεταβολές αυτές οι συναρτήσεις δεν μεταβάλλονται αλλά λαμβάνονται ως σταθερές. Οι συναρτήσεις (μεταβλητές) που μπορούν να προσδιοριστούν από θεωρία μεταβολών στη φυσική λέγονται δυναμικές μεταβλητές και οι άλλες απόλυτες μεταβλητές. Οι δυναμικές μεταβλητές εξαρτώνται από τις απόλυτες ενώ οι απόλυτες δεν εξαρτώνται από τις δυναμικές.

Π7.1.1 Συναρτησιακή παράγωγος.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι εισαγωγής της έννοιας της συναρτησιακής παραγώγου ή παραλλακτικής παραγώγου (functional ή variational derivative). Εδώ δίνουμε έναν σχετικά απλό ορισμό της συναρτησιακής παραγώγου. Το πρόβλημα που τίθεται είναι το εξής: Τι θα συμβεί στην τιμή του συναρτησιακού αν μεταβληθεί κατά πολύ λίγο (απειροστό) μια από τις συναρτήσεις $y_i(x)$. Έχουμε γενικώς,

$$Z = Z\left(y(x)\right) = \int_{\Omega} F(x, y) \mathrm{d}\Omega .$$

Αν μεταβληθεί ένα $y_i(x)$ κατά $\delta y_i(x)$ για κάθε ένα σημείο x του πολυδιάστατου χώρου, τότε το συναρτησιακό θα μεταβληθεί κατά $\delta Z(x)$, $\delta Z\left(y(x)\right) = \dfrac{\partial Z}{\partial y_i(x)} \delta y_i(x)$. Η μεταβολή θα είναι, γενικώς, διαφορετική από σημείου εις σημείο, x. Διαιρούμε και τα δύο μέλη αυτής της έκφρασης δια του πολύ μικρού «όγκου» $\Delta\Omega$, στην περιοχή του σημείου x. Έχουμε την έκφραση $\dfrac{\delta Z\left(y(x)\right)}{\Delta\Omega} = \dfrac{1}{\Delta\Omega} \dfrac{\partial Z}{\partial y_i(x)} \delta y_i(x)$. Αυτή η έκφραση δίνει τη μεταβολή ανά μονάδα «όγκου» και μονάδα y_i, του συναρτησιακού σε κάθε σημείο του χώρου. Η συναρτησιακή παράγωγος $\dfrac{\delta Z}{\delta y_i}$, ορίζεται από την έκφραση

$\dfrac{\delta Z}{\delta y_i} = \dfrac{1}{\Delta\Omega} \dfrac{\partial Z}{\partial y_i}$ για κάθε ένα y_i και για κάθε ένα σημείο του χώρου. Πρόκειται για συμβολισμό που μπορεί να οδηγήσει σε παρεξήγηση, γι' αυτό επαναλαμβάνουμε ότι στην πραγματικότητα το $\dfrac{\delta Z}{\delta y_i}$ δηλώνει μεταβολή του Z ανά μονάδα του y_i και ανά μονάδα «όγκου», σε ένα σημείο του χώρου x. Η συνολική μεταβολή του συναρτησιακού σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$\delta Z(y_i) = \int_{\Omega} \frac{\delta Z(y_i)}{\delta y_i(x)} \delta y_i(x) \mathrm{d}\Omega .$$

Στην περίπτωση διακριτών συστημάτων ο χώρος είναι μονοδιάστατος, συγκεκριμένα είναι ο χρόνος και το στοιχείο «όγκου» είναι ο στοιχειώδης χρόνος.

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι για τη συνάρτηση έχουμε $F = F(x, y, y_x)$, στον πολυδιάστατο χώρο. Ξεκινούμε από την (18.2). Κάνουμε δυνατή μεταβολή στο συναρτησιακό, εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση οπότε καταλήγουμε σε ένα ολοκλήρωμα όγκου και σε ολοκλήρωμα στο σύνορο. Θεωρούμε ότι στο σύνορο έχουμε τις γνωστές συνοριακές σχέσεις, οπότε το ολοκλήρωμα στο σύνορο είναι μηδέν. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\delta Z=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\delta y_j\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\right)\mathrm{d}\Omega\,.$$

Αυτή είναι η σχέση (18.14) χωρίς να θέσουμε τη δυνατή μεταβολή του συναρτησιακού ίση με μηδέν. Στη συνέχεια κάνουμε το γνωστό συλλογισμό, αφού τα δy είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και επίσης είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των x, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα κάθε φορά μη μηδενικό, οπότε φεύγει το άθροισμα. Σύγκριση με την παραπάνω σχέση για τη συνολική μεταβολή του συναρτησιακού μας οδηγεί στο ότι ισχύει:

$$\frac{\delta Z}{\delta y_k(x)}=\frac{\partial F}{\partial y_j}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\frac{\partial F}{\partial y_{j,i}}\,. \qquad (18.28)$$

Σημειώνουμε ότι η συναρτησιακή παράγωγος ορίζεται χωρίς να ισχύουν κατ’ ανάγκη οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

Με χρήση της συναρτησιακής παραγώγου, οι εξισώσεις Euler-Lagrange μπορούν να γραφτούν στη μορφή,

$$\frac{\delta Z}{\delta y_k(x)}=0\,.$$

Αν στη λαγκρανζιανή υπάρχουν παράγωγοι μέχρι τάξη n τότε, γενικώς, η διαφορική εξίσωση που προκύπτει έχει τάξη μέχρι $2n$. Αν η εξάρτηση της λαγκρανζιανής από την παράγωγο τάξης n είναι γραμμική τότε η αντίστοιχη συμβολή στην τελική διαφορική εξίσωση οδηγεί σε παραγώγους με μέγιστη τάξη n. Παράδειγμα γραμμικής εξάρτησης από παραγώγους δεύτερης τάξης έχουμε στη Βαρύτητα στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Για αυτόν τον λόγο, σε αυτή την περίπτωση, οι διαφορικές εξισώσεις είναι τάξης 2 και όχι 4.

Π7.1.2 Συναρτησιακή παράγωγος της λαγκρανζιανής και της χαμιλτονιανής.

Τώρα θα αναφερθούμε στον ορισμό της συναρτησιακής παραγώγου της λαγκρανζιανής και της χαμιλτονιανής, τις οποίες θεωρούμε συναρτησιακά. Αυτό είναι χρήσιμο στη θεωρία πεδίων, στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, όπου η παράγωγος ως προς τον χρόνο παίζει ξεχωριστό ρόλο από τις παραγώγους ως προς τη θέση στον συνήθη χώρο. Η λαγκρανζιανή και η λαγκρανζιανή πυκνότητα συνδέονται με τη σχέση:

$$L=\int_{\Omega}L\,\left(\eta_\rho(x^i,x^0),\eta_{\rho,i}(x^i,t),x^i,x^0\right)\mathrm{d}^3x\,.$$

Έχουμε ξεχωρίσει τη συντεταγμένη x^0 του χρόνου από τις άλλες τρεις χωρικές συντεταγμένες x^1,x^2,x^3. Όπως συνήθως, μπορεί να θεωρήσουμε ότι $x^0=t$ ή $x^0=ct$. Το στοιχείο του όγκου d^3x αναφέρεται στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο των x^1,x^2,x^3 που παριστάνουμε με Ω. Σημειώνουμε ότι το Ω είναι γενικώς όλος ο απέραντος συνήθης χώρος. Σχηματίζουμε τη δυνατή μεταβολή (παραλλαγή) της λαγκρανζιανής, έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta L&=\int_{\Omega}\delta L\,\left(\eta_\rho(x^i,x^0),\eta_{\rho,i}(x^i,t),x^i,x^0\right)\mathrm{d}^3x\\&=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial L}{\partial\eta_\rho}\delta\eta_\rho+\frac{\partial L}{\partial\eta_{\rho,i}}\delta\eta_{\rho,i}+\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}_\rho}\delta\dot{\eta}_\rho\right]\boldsymbol{d}^3x.\end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι $i=1,2,3$, δηλαδή ο δείκτης αναφέρεται στις τρεις συνήθεις χωρικές συνιστώσες, επίσης ισχύουν:

$$\eta_{\rho,i} = \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x^i}, \; i = 1,2,3 \quad \dot{\eta}_\rho = \eta_{\rho,0} = \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x^0}.$$

Έχουμε τη σχέση, $\delta\eta_{\rho,i} = \dfrac{\partial(\delta\eta_\rho)}{\partial x^i}$. Κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση στο ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου του δL και αφού μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα της απόκλισης που προκύπτει σε ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο, S, δηλαδή στην περικλείουσα επιφάνεια του τρισδιάστατου χώρου, βρίσκουμε για αυτό το ολοκλήρωμα,

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,i}} \delta\eta_{\rho,i} \right) \mathbf{d}^3 x = (\text{ολοκλήρωμα στο σύνορο}) - \int_\Omega \delta\eta_\rho \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) \mathbf{d}^3 x \,.$$

Υποθέτουμε ότι τα πεδία η_ρ είναι εντοπισμένα στον τρισδιάστατο χώρο οπότε αυτό σημαίνει ότι στην, γενικώς απέραντη, επιφάνεια S είναι μηδέν ή τείνουν στο μηδέν με την απόσταση, κατά τρόπο που το ολοκλήρωμα στο σύνορο να μηδενίζεται. Τελικώς έχουμε,

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_\Omega \delta L \, \left(\eta_\rho(x^i, x^0), \eta_{\rho,i}(x^i, t), x^i, x^0 \right) \mathrm{d}^3 x \\ &= \int_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) \right] \boldsymbol{\delta}\eta_\rho + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\rho} \delta\dot{\eta}_\rho \right\} \mathbf{d}^3 x. \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι τα $\delta\eta_\rho, \delta\dot{\eta}_\rho$ είναι ανεξάρτητα και αυθαίρετα, οπότε τώρα έχουμε την αντίστοιχη σχέση, με αυτή που δώσαμε στα προηγούμενα, για την συνολική μεταβολή του συναρτησιακού:

$$\delta L = \int_\Omega \left(\frac{\delta L}{\delta\eta_\rho(x)} \delta\eta_\rho + \frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}_\rho(x)} \delta\dot{\eta}_\rho \right) \mathrm{d}^3 x \,.$$

Η σύγκριση με την τελευταία προηγούμενη σχέση οδηγεί στις δυο ακόλουθες συναρτησιακές παραγώγους της λαγκρανζιανής:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta\eta_\rho} &= \frac{\partial L}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) \\ \frac{\delta L}{\delta\dot{\eta}_\rho} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\rho}. \end{aligned}$$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\dfrac{\delta L}{\delta\eta_\rho}$ αντί του $\dfrac{\delta L}{\delta\eta_\rho}$. Δεν υπάρχει πρόβλημα αρκεί να ξέρουμε τι σημαίνουν όλα αυτά.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τη χαμιλτονιανή για πεδία. Ορίσαμε τη χαμιλτονιανή για διακριτά συστήματα με χρήση της λαγκρανζιανής και με τον μετασχηματισμό Legendre.

Θα γενικεύσουμε αυτή τη διαδικασία για πεδία. Γράφουμε $H \overset{\mathrm{d}}{=} \int_\Omega \pi^\rho(x)\dot{\eta}_\rho(x) d^3 x - L$ όπου

$\pi^{\rho}(x)=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{\rho}}$ είναι η πυκνότητα, στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο, της συζυγούς ορμής για το πεδίο η_{ρ}. Στη συνέχεια γράφουμε $H \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{\Omega} \left[\pi^{\rho}(x)\dot{\eta}_{\rho}(x) - L \right] \mathrm{d}^3 x$. Αυτό σημαίνει ότι η χαμιλτονιανή είναι συναρτησιακό με εξαρτημένες μεταβλητές τα π^{ρ}, η_{ρ}. Η χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι $H = \pi^{\rho}(x)\dot{\eta}_{\rho}(x) - L$. Παρατηρούμε ότι στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό ο χρόνος και ο συνήθης χώρος ξεχωρίζουν δεν εισέρχονται ισοδύναμα, συμμετρικά. Στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό εισέρχονται συμμετρικά.

Επειδή η χαμιλτονιανή εξαρτάται από τα δυο είδη εξαρτημένων μεταβλητών θα έχουμε την ανάλογη σχέση με αυτή για τη λαγκρανζιανή:

$$\delta H = \int_{\Omega} \left[\frac{\delta H}{\delta \pi^{\rho}} \delta \pi^{\rho} + \frac{\delta H}{\delta \eta_{\rho}} \delta \eta_{\rho} \right] \mathrm{d}^3 x \,.$$

Με τον τρόπο που ορίσαμε τη χαμιλτονιανή, δεν υπάρχει εξάρτηση από τα $\pi^{\rho}_{,i}$, όμως μπορούμε, κατά τα γνωστά, να προσθέσουμε στη χαμιλτονιανή πυκνότητα μια απόκλιση και οι εξισώσεις κίνησης θα μείνουν ίδιες. Σε αυτή την περίπτωση η χαμιλτονιανή, γενικώς, θα εξαρτάται και από τα $\pi^{\rho}_{,i}$. Με αυτό το σκεπτικό γράφουμε τη δυνατή μεταβολή για τη χαμιλτονιανή:

$$\delta H = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}} \delta \pi^{\rho} + \frac{\partial H}{\partial \pi_{,i}^{\rho}} \delta \pi_{,i}^{\rho} + \frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho}} \delta \eta_{\rho} + \frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho,i}} \delta \eta_{\rho,i} \right] \mathrm{d}^3 x \,.$$

Με τη γνωστή διαδικασία ο δεύτερος και τέταρτος όρος μπορεί να μετατραπούν με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, ώστε να είναι άθροισμα ολοκληρώματος στον τρισδιάστατο χώρο συν ολοκλήρωμα στο σύνορο του χώρου αυτού, δηλαδή στην περικλείουσα επιφάνεια του χώρου. Ο χώρος είναι ο απέραντος συνήθης τρισδιάστατος χώρος. Υποθέτουμε ότι η χαμιλτονιανή πυκνότητα και οι παράγωγοί της μηδενίζονται στο άπειρο με τέτοιο τρόπο που το ανωτέρω επιφανειακό ολοκλήρωμα να μηδενίζεται. Αυτό οδηγεί στις σχέσεις:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}_{,i}} \delta \pi^{\rho}_{,i} \right) \mathrm{d}^3 x = -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}_{,i}} \right) \delta \pi^{\rho} \mathrm{d}^3 x$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho,i}} \delta \pi^{\rho}_{,i} \right) \mathrm{d}^3 x = -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) \delta \eta_{\rho} \mathrm{d}^3 x.$$

Οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\delta H = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}_{,i}} \right) \right) \delta \pi^{\rho} + \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) \right) \delta \eta_{\rho} \right] \mathrm{d}^3 x \,.$$

Έτσι τελικώς βρίσκουμε,

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{\rho}} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{\rho}_{,i}} \right)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \eta_{\rho}} = \frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) \,.$$

Π7.2 Συμμετρίες Noether. Θεωρήματα Noether

Τα θεωρήματα της Noether ασχολούνται με τις συνέπειες τις οποίες έχει η ύπαρξη ομάδας απειροστών μετασχηματισμών των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών, υπό τους οποίους το συναρτησοειδές παραμένει αναλλοίωτο (invariant) ή ημιαναλλοίωτο (quasi-invariant). Θα δούμε τη σημασία αυτών των όρων παρακάτω. Το ολοκλήρωμα λαμβάνεται πάνω σε αυθαίρετο χωρίο Ω το οποίο μετασχηματίζεται επίσης. Δεν τίθενται συνοριακές συνθήκες κατά τους μετασχηματισμούς. Αυτό συνήθως λέγεται παραλλακτική συμμετρία ή συμμετρία θεωρίας παραλλαγών (variational symmetry). Οι συμμετρίες τις οποίες διαπραγματεύεται αυτό το θεώρημα περιγράφονται με συνεχείς απειροστούς μετασχηματισμούς που αποτελούν ομάδα και εξαρτώνται από κάποιες αυθαίρετες ανεξάρτητες, απειροστές (σταθερές) παραμέτρους ή από κάποιες αυθαίρετες ανεξάρτητες, απειροστές συναρτήσεις. Αυτές οι ομάδες είναι ομάδες του Lie. Τα θεωρήματα της Noether μπορεί να χρησιμοποιηθούν στη Φυσική όταν (όπως συμβαίνει στις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις) ορίζεται ένα συναρτησοειδές που είναι το ολοκλήρωμα δράσης και από αυτό το ολοκλήρωμα δράσης προκύπτουν οι εξισώσεις των Euler-Lagrange με χρήση της αρχής του Hamilton, στη μορφή θεωρίας μεταβολών. Υπάρχουν και τα αντίστροφα των θεωρημάτων αυτών που δεν θα μας απασχολήσουν. Υπάρχουν συμμετρίες που δεν περιγράφονται με συνεχείς μετασχηματισμούς, μια τέτοια σχετίζεται με την αλλαγή συντεταγμένων από $\vec{r}$ σε $-\vec{r}$, μάλιστα η ύπαρξη τέτοιας συμμετρίας οδηγεί στη διατήρηση της ομοτιμίας (parity). Αυτές οι περιπτώσεις δεν περιγράφονται από τα θεωρήματα της Noether.

Υπάρχουν δυο θεωρήματα, το πρώτο και το δεύτερο θεώρημα της Noether. Στο πρώτο θεώρημα οι μετασχηματισμοί περιέχουν αυθαίρετες, ανεξάρτητες σταθερές και αποτελούν ομάδα τύπου πεπερασμένων συνεχών ομάδων (finite continuous group). Βρίσκει εφαρμογή στη Φυσική, όταν έχομε θεωρίες με καθολική (παγκόσμια) αναλλοιώτητα (global invariance) ή ημιαναλλοιώτητα (global semi-invariance). Στο δεύτερο θεώρημα οι μετασχηματισμοί περιέχουν αυθαίρετες, ανεξάρτητες παραγωγίσιμες συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών και αποτελούν ομάδα τύπου απείρων συνεχών ομάδων (infinite continuous group). Το δεύτερο θεώρημα της Noether βρίσκει εφαρμογή σε θεωρίες της Φυσικής που έχουν τοπικές συμμετρίες (local invariance ή gauge invariance, αναλλοίωτο βαθμίδας). Τέτοια θεωρία είναι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας αλλά και η Κβαντική Χρωμοδυναμική και άλλες κβαντικές θεωρίες στοιχειωδών σωματιδίων. Η έννοια του αναλλοίωτου βαθμίδας έχει μεγάλη σημασία στη Φυσική των Στοιχειωδών Σωματιδίων όπου η απαίτηση αυτής της συμμετρίας οδηγεί στη μορφή των διαφόρων αλληλεπιδράσεων και στην ύπαρξη των σχετικών πεδίων και σωματιδίων φορέων των αλληλεπιδράσεων. Οι θεωρίες αυτές χαρακτηρίζονται με τον όρο θεωρίες βαθμίδας (gauge theories). Αυτό δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το βιβλίο. Η ομάδα μετασχηματισμών του πρώτου τύπου είναι υποομάδα των μετασχηματισμών του δεύτερου τύπου, όπου οι αυθαίρετες συναρτήσεις γίνονται αυθαίρετες σταθερές. Αν οι γενικότεροι μετασχηματισμοί παραλλακτικής συμμετρίας που επιδέχεται ένα φυσικό σύστημα είναι τύπου ομάδας ολικού χαρακτήρα τότε μπορεί να προκύψουν σταθερές ποσότητες κίνησης που είναι αναλλοίωτες στη μορφή υπό τους εν λόγω μετασχηματισμούς. Αν όμως οι γενικότεροι μετασχηματισμοί είναι τοπικού τύπου, παρόλο που ως υποομάδα αυτών ισχύουν και ολικοί μετασχηματισμοί, δεν μπορούν να οριστούν σταθερές ποσότητες κίνησης που να είναι αναλλοίωτες στη μορφή υπό τους γενικότερους μετασχηματισμούς του συστήματος. Θα ασχοληθούμε με απειροστούς συνεχείς μετασχηματισμούς των ανεξάρτητων και των εξαρτημένων μεταβλητών από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση F του συναρτησιακού Z. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση εξαρτάται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, τις εξαρτημένες $y(x)$ και τις πρώτες παραγώγους y_x, $F=F(x,y,y_x)$. Όπως είπαμε με τους μετασχηματισμούς μεταβάλλεται και το χωρίο Ω ολοκλήρωσης. Οι απειροστοί μετασχηματισμοί των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι της μορφής

$$x_i' = x_i + \delta x_i(x). \tag{18.29}$$

Όπου οι μεταβολές $\delta x_i(x)$ είναι, γενικώς, αυθαίρετες συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x_i, των εξαρτημένων μεταβλητών y και των παραγώγων y_x. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές και οι παράγωγοί τους μετασχηματίζονται όπως φαίνεται στις Εξ. (18.30). Η μεταβολή δ και η ολική παραγώγιση $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}$ ή η μερική παραγώγιση $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, γενικώς, δεν μετατίθενται διότι κατά τον μετασχηματισμό δεν αναφερόμαστε στο ίδιο σημείο αλλά πάμε από το σημείο x στο σημείο x' όπου γενικώς $x' \neq x$,

$$\begin{aligned}
&y'_j(x') = y_j(x) + \delta y_j \\
&y'_{j,i}(x') = y_{j,i}(x) + \delta y_{j,i} \\
&\delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\delta, \delta \frac{\partial}{\partial x_i} \neq \frac{\partial}{\partial x_i}\delta.
\end{aligned} \tag{18.30}$$

Σε αυτό το Εδάφιο, η μεταβολή $\delta y_j(x_i)$ οφείλεται σε δυο είδη μεταβολών, σε μεταβολή ένεκα μεταβολής των ανεξάρτητων μεταβλητών (θέση), $x_i \to x'_i \quad i = 1, 2, ..., m$ και σε μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές (θέση) μένουν σταθερές. Η μεταβολή του δευτέρου είδους εδώ θα παριστάνεται με $\bar{\delta} y_j$. Έχουμε, $\bar{\delta} y_j = \bar{\delta} y_j(x) = y'_j(x) - y_j(x)$. Επομένως ισχύει ότι $\delta y_j = \bar{\delta} y_j + \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} \delta x_i$.
Η μεταβολή $\bar{\delta}$ και η παραγώγιση $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}$ ή η $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ μετατίθενται όπως ήδη ξέρουμε, διότι δεν έχουμε κατά τη μεταβολή $\bar{\delta}$ αλλαγή στα x_i. Συνοψίζουμε τα παραπάνω με τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta} y_j = \bar{\delta} y_j(x) = y'_j(x) - y_j(x) \\
&\delta y_j = y'_j(x') - y_j(x) = \bar{\delta} y_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \delta x_i \\
&\bar{\delta} y_{j,i}(x) = y'_{j,i}(x) - y_{j,i}(x) \\
&\bar{\delta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\bar{\delta}, \bar{\delta} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\delta}.
\end{aligned} \tag{18.31}$$

Πριν προχωρήσουμε θα αναφερθούμε σε δυο είδη μετασχηματισμών, στους παθητικούς και στους ενεργητικούς. Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής: Έστω ότι έχουμε ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται με καρτεσιανές συντεταγμένες. Ένας παθητικός μετασχηματισμός, μπορεί να είναι μια περιστροφή, κατά γωνία φ κατά τη φορά του ρολογιού, των καρτεσιανών αξόνων περί τον άξονα z. Ένας ενεργητικός μετασχηματισμός, ισοδύναμος του προηγούμενου, είναι περιστροφή του φυσικού συστήματος κατά γωνία $-\varphi$ (αντίθετα προς το ρολόι), ενώ οι άξονες μένουν σταθεροί. Σε περιπτώσεις όπως εδώ είναι καλύτερη η θεώρηση ενεργητικών μετασχηματισμών.

Θα εφαρμόσουμε τον ανωτέρω απειροστό μετασχηματισμό και θα υπολογίσουμε τη μεταβολή του συναρτησιακού $\int_{\Omega} F(x, y, y_x)\mathrm{d}\Omega$. Υποθέτουμε ότι με τον μετασχηματισμό η μετασχηματισμένη F' έχει ως προς τις νέες συντεταγμένες την ίδια μορφή που έχει η συνάρτηση F ως προς τις παλιές. Συγκεκριμένα ισχύουν οι σχέσεις,

$$F'(x', y', y'_{x'}) = F(x', y', y'_{x'}) = F(x, y, y_x).$$

Μπορεί κάποιος να δει ότι ένα τέτοιο (απλό) παράδειγμα ισχύει για τη συνάρτηση $F = \dfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$, όπου τα x, y είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο. Ας εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό περιστροφής των αξόνων ως προς την αρχή των καρτεσιανών συντεταγμένων. Έχουμε $x = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi,\ \ y = -x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$, οπότε βρίσκουμε εύκολα ότι

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = F'(x_1, y_1) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = F(x_1, y_1).$$

Δηλαδή, πράγματι δεν αλλάζει η μορφή της συνάρτησης. Το συναρτησιακό πριν και μετά τον μετασχηματισμό είναι αντιστοίχως:

$$\begin{gathered}\int_{\Omega} F(x, y, y_x)\mathrm{d}\Omega \\ \int_{\Omega'} F(x', y', y'_{x'})\mathrm{d}\Omega'.\end{gathered} \tag{18.32}$$

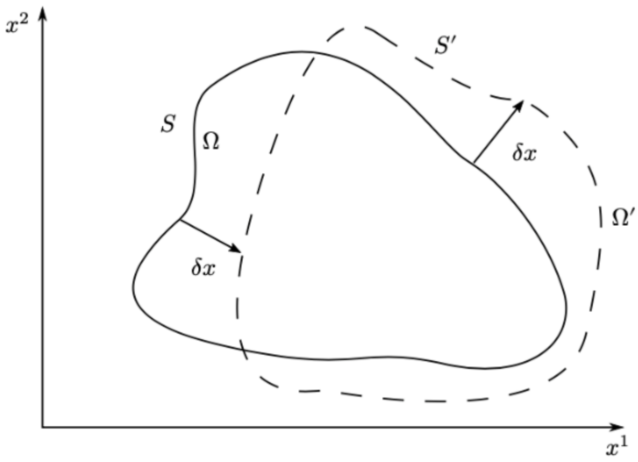
Αυτό που εννοούμε με τον μετασχηματισμό είναι ότι: Ξεκινούμε από κάποιες συναρτήσεις $y_i = y_i(x)$, και από τις παραγώγους τους οι οποίες υπολογίζονται από αυτές. Για κάθε x υπολογίζουμε τη συνάρτηση $F(x, y, y_x)$ και στη συνέχεια το ολοκλήρωμα (το συναρτησιακό) στον χώρο Ω. Ουσιαστικά τα $y_i = y_i(x),\ i = 1,2,...,m$ καθορίζουν μια τροχιά στον πολυδιάστατο χώρο, που δεν είναι η πραγματική τροχιά. Κάνουμε τον μετασχηματισμό, που τον εννοούμε ως ενεργητικό, οι συναρτήσεις και οι παράγωγοί τους μετασχηματίζονται, το χωρίο ολοκλήρωσης μετασχηματίζεται, η «τροχιά» μετασχηματίζεται σε διαφορετική τροχιά και υπολογίζεται το νέο συναρτησιακό με τα νέα δεδομένα. Το νέο όπως και το παλιό συναρτησιακό με την αρχή Hamilton πρέπει να οδηγούν στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Πρόκειται για το ίδιο σύστημα που περιγράφεται με διαφορετικές συντεταγμένες.

Όπως είπαμε, θα δούμε παρακάτω τι πρέπει να ισχύει για να συμβαίνει αυτό. Αναφερόμαστε σε απειροστούς μετασχηματισμούς οπότε η μεταβολή του συναρτησιακού, δZ, είναι επίσης απειροστή. Έχουμε,

$$\delta Z = \int_{\Omega'} F(x', y', y'_{x'})\mathrm{d}\Omega' - \int_{\Omega} F(x, y, y_x)\mathrm{d}\Omega. \tag{18.33}$$

Όπως σε παρόμοιες περιπτώσεις, υποθέτουμε ότι οι διαφορές είναι απειροστά μέχρι πρώτης τάξης. Είναι κατανοητό ότι τα x, x' είναι «τρέχουσες» ή βωβές μεταβλητές (dummies), όπως είναι και τα $\mathrm{d}\Omega, \mathrm{d}\Omega'$ ως συναρτήσεις των x, x', στις οποίες ολοκληρώνουμε, οπότε δε χρειάζεται να διαφοροποιούνται με τονούμενα. Τα δυο χωρία ολοκλήρωσης διαφέρουν «απειροστά» οπότε μπορούμε να αναγάγουμε τα δυο ολοκληρώματα στον ίδιο χωρίο ολοκλήρωσης. Για αυτό τον σκοπό θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία. Ο τρόπος γίνεται κατανοητός με το Σχήμα Π7.2, που δείχνει μια αναπαράσταση των Ω, Ω' για χώρο ανεξάρτητων μεταβλητών δυο διαστάσεων. Η μεταβολή $\Omega' - \Omega$ του χωρίου ολοκλήρωσης, που σχετίζεται με τις (απειροστές) μεταβολές δx_i είναι απειροστή. Γράφουμε το πρώτο ολοκλήρωμα της Εξ. (18.33) ως άθροισμα δυο ολοκληρωμάτων, οπότε θα καταλήξουμε στις ακόλουθες σχέσεις,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega'} F\left(x, y', y'_x\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} F\left(x, y, y_x\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} F\left(x, y', y'_x\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega'-\Omega} F\left(x, y', y'_x\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} F\left(x, y, y_x\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega}\left[F\left(x, y', y'_x\right) - F\left(x, y, y_x\right)\right]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega'-\Omega} F\left(x, y', y'_x\right)\mathrm{d}\Omega.\end{aligned} \tag{18.34}$$



Σχήμα Π7.2 *Τα χωρία ολοκλήρωσης σε χώρο ανεξάρτητων μεταβλητών δυο διαστάσεων.*

Εφόσον το χωρίο μεταξύ των Ω', Ω είναι απειροστό, η τιμή της συνάρτησης $F\left(x, y, y_x\right)$ είναι περίπου η ίδια κατά τον μετασχηματισμό από το σημείο x της επιφάνειας S στο αντίστοιχο x' της επιφάνειας S'. Μπορούμε επομένως να φανταστούμε έναν στοιχειώδη «όγκο» σε κάθε σημείο x της επιφάνειας S που φτάνει μέχρι το αντίστοιχο μετασχηματισμένο σημείο x' της επιφάνειας S'. Αν $\mathrm{d}S_i$ είναι το στοιχείο της επιφάνειας, στον χώρο που αναφερόμαστε, ο παραπάνω στοιχειώδης όγκος θα είναι το «εσωτερικό» γινόμενο $\sum_{i=1}^{m} \delta x_i \mathrm{d}S_i$, επομένως το τελευταίο ολοκλήρωμα της Εξ. (18.34), πάνω στον στοιχειώδη όγκο $\Omega' - \Omega$ γίνεται ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S , δηλαδή

$$\int_S F\left(x, y, y_x\right) \sum_{k=1}^{m} \delta x_k \mathrm{d}S_k \,. \tag{18.35}$$

Όμως αυτό το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα όγκου με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης, Εξ. (18.12), οπότε έχουμε.

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(F(x, y, y_x) \delta x_k \right) \right\} \mathrm{d}\Omega = \int_S F(x, y, y_x) \sum_{k=1}^{m} \delta x_k \mathrm{d}S_k \,. \tag{18.36}$$

Από τις Εξ. (18.33), (18.34), (18.35) και (18.36) καταλήγουμε στη σχέση

$$\delta Z = \int_\Omega \left\{ \left[F(x, y', y'_x) - F(x, y, y_x) \right] + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(F(x, y, y_x) \delta x_k \right) \right\} \mathrm{d}\Omega \,. \tag{18.37}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (18.27) βρίσκουμε για τη διαφορά που είναι μέσα στην αγκύλη στην Εξ. (18.37)

$$\bar{\delta} F = F\left(x, y', y'_x\right) - F\left(x, y, y_x\right) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_r} \bar{\delta} y_r + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_{r,l}} \bar{\delta} y_{r,l} \,. \tag{18.38}$$

Σύμφωνα με την (18.27) τα $\bar{\delta}$, και οι παράγωγοι μετατίθενται άρα έχουμε $\bar{\delta} y_{r,l} = \dfrac{\mathrm{d}\bar{\delta} y_r}{\mathrm{d}x_l}$. Εδώ η μερική παράγωγος και η ολική συμπίπτουν, διότι σύμφωνα με τους ορισμούς που έχουμε δώσει στα προηγούμενα, τα

y_r εξαρτώνται μόνο από τα x_l. Επομένως η Εξ. (18.38) γίνεται

$$\bar{\delta} F = F\left(x, y', y'_x\right) - F\left(x, y, y_x\right) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_r} \bar{\delta} y_r + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_{r,l}} \frac{\mathrm{d}\bar{\delta} y_r}{\mathrm{d}x_l}. \quad (18.39)$$

Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα, δηλαδή ο μύστακας της Εξ. (18.37) γίνεται

$$\begin{aligned} &\bar{\delta} F + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left(F \delta x_k\right) \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_r} \bar{\delta} y_r + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_{r,l}} \frac{\mathrm{d}\bar{\delta} y_r}{\mathrm{d}x_l} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left(F \delta x_k\right). \end{aligned} \quad (18.40)$$

Όμως ισχύει

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_l} \frac{\partial (F \bar{\delta} y_r)}{\partial y_{r,l}} = \sum_{l=1}^{m} \bar{\delta} y_r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_l} \frac{\partial F}{\partial y_{r,l}} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_{r,l}} \frac{\mathrm{d}\bar{\delta} y_r}{\mathrm{d}x_l}. \quad (18.41)$$

Από τις Εξ. (18.37), (18.40) και (18.41) καταλήγουμε στη σχέση,

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_{\Omega} \left\{ \bar{\delta} F + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left(F \delta x_k\right) \right\} \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \bar{\delta} y_r \left(\frac{\partial F}{\partial y_r} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} \bar{\delta} y_r + F \delta x_k \right) \right\} \mathrm{d}\Omega . \end{aligned} \quad (18.42)$$

Οι εκφράσεις μέσα στις πρώτες παρενθέσεις στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης, είναι οι εκφράσεις του Euler, λέγονται και λαγκρανζιανές εκφράσεις.

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι αρχικά η Noether διατύπωσε τα θεωρήματα βασιζόμενη μόνο σε όσα είπαμε μέχρι τώρα. Είχε όμως καταλάβει και η ίδια ότι μπορούσε να γενικεύσει την ανάλυση, διότι έχουμε δει ότι η προσθήκη ενός ολοκληρώματος απόκλισης στο συναρτησιακό οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις Euler-Lagrange. Αυτή η ιδιότητα έπρεπε, όπως και έγινε, να ληφθεί υπόψη για μια γενικότερη διατύπωση. Αυτό είναι γνωστό ότι ισοδυναμεί με την προσθήκη στη συνάρτηση μιας απόκλισης. Αυτό που γίνεται είναι να προστεθεί στο πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (18.33) το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega'} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\delta G_k(x', y')}{\mathrm{d}x'_k} \mathrm{d}\Omega'$. Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις της απόκλισης, $\delta G_k(x', y')$, είναι απειροστές ποσότητες διότι ο μετασχηματισμός είναι απειροστός. Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ολοκλήρωμα πάνω στο χωρίο Ω και με μεταβλητές τις αρχικές (όχι τις μετασχηματισμένες).

Για τον μετασχηματισμό χρησιμοποιούμε την ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού (18.30). Έχουμε κρατώντας απειροστά μέχρι πρώτης τάξης,

$$\left\| \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \right\| = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (\delta x_i)}{\partial x_i}, \ \mathrm{d}\Omega' = \left\| \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \right\| \mathrm{d}\Omega = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (\delta x_i)}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}\Omega .$$

Παραλείποντας διαφορικά ανώτερης (δεύτερης) τάξης, βρίσκουμε $\mathrm{d}\Omega' = \mathrm{d}\Omega$. Τελικώς

$$\int_{\Omega'} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\delta G_k(x', y')}{\mathrm{d}x'_k} \mathrm{d}\Omega' = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\delta G_k(x, y)}{\mathrm{d}x_k} \mathrm{d}\Omega$$

Είναι ευνόητο ότι θα προστεθεί αυτό το ολοκλήρωμα απόκλισης στην έκφραση (18.42). Τελικώς, αυτό που ζητούμε είναι η διαφορά των δυο συναρτησιακών συν το ολοκλήρωμα απόκλισης να είναι μηδέν. Αυτό εκφράζεται με την παρακάτω σχέση όπου για το δZ χρησιμοποιείται η Εξ. (18.42):

$$\delta Z + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\delta G_k(x, y)}{\mathrm{d}x_k} \mathrm{d}\Omega = 0 \,.$$

Η Noether αρχικά θεώρησε τη συμμετρία ως αυτήν που οδηγεί σε $\delta Z = 0$, εδώ η συμμετρία είναι στην πιο γενική της μορφή.

Σύμφωνα με όσα είπαμε, όταν υπάρχει τέτοια συμμετρία τότε το μετασχηματισμένο συναρτησιακό οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις Euler-Lagrange. Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$\delta Z = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[-\frac{\mathrm{d}\delta G_k(x, y)}{\mathrm{d}x_k} \right] \right\} \mathrm{d}\Omega \,. \tag{18.43}$$

Τα θεωρήματα της Noether εφαρμόζονται στην περίπτωση που ισχύει αυτή η σχέση η οποία εκφράζει αυτό που λέμε νεδεριανή συμμετρία. Ουσιαστικά στη γενική της έκφραση, η νεδεριανή συμμετρία σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός αφήνει ημιαναλλοίωτη τη δράση (και τη συνάρτηση). Αυτό ονομάζεται ημιαναλοιώτητα.

Αν δεν υπάρχει ο όρος της απόκλισης, $\delta G = 0$, τότε έχουμε αναλλοίωτη δράση, αναλλοιώτητα. Σύμφωνα με τη σχέση (18.43), μπορούμε να πούμε ότι, γενικώς, μια νεδεριανή συμμετρία οδηγεί στο ότι η μεταβολή του συναρτησιακού ισούται με το ολοκλήρωμα μιας απόκλισης.

Θα εισαγάγουμε στη συνέχεια τις εκφράσεις του Euler, E_r,

$$E_r = \frac{\partial F}{\partial y_r} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}}$$

τότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left\{ \bar{\delta} F + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(F \delta x_k + \delta G_k \right) \right\} \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \bar{\delta} y_r E_r + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} \bar{\delta} y_r + F \delta x_k + \delta G_k \right) \right\} \mathrm{d}\Omega = 0. \end{aligned} \tag{18.44}$$

Η ύπαρξη του όρου δG είναι χρήσιμη στη Φυσική, για παράδειγμα, όταν εξετάζουμε μετασχηματισμούς από ένα αδρανειακό σύστημα σε άλλο που κινείται ως προς το πρώτο με σταθερή διανυσματική ταχύτητα (συστήματα του Γαλιλαίου ή συστήματα του Lorentz). Δυστυχώς ο συμβολισμός και εδώ δεν είναι ο καλύτερος, εδώ το δG_k δηλώνει απειροστό μέγεθος, όχι δυνατή μεταβολή.

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι μηδέν για κάθε χωρίο Ω, εύκολα καταλήγουμε στο ότι οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες στην Εξ. (18.44) είναι μηδέν. Αν λάβουμε υπόψη ότι ισχύουν και οι Εξ. (18.31) και (18.39) καταλήγουμε στις δυο παρακάτω ισοδύναμες ομάδες σχέσεων

$$
\begin{aligned}
&\bar{\delta} F = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left(F\delta x_k + \delta G_k \right) \\
&\sum_{r=1}^{n} \bar{\delta} y_r E_r = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} \bar{\delta} y_r + F\delta x_k + \delta G_k \right) \\
&\qquad\qquad \text{ή} \qquad\qquad (18.45) \\
&\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_r} \bar{\delta} y_r + \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_{r,l}} \frac{\mathrm{d}\delta y_r}{\mathrm{d}x_l} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left(F\delta x_k + \delta G_k \right) \\
&\sum_{r=1}^{n}\left(\delta y_r - \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial y_r}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma \right) E_r = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} \left(\delta y_r - \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial y_r}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma \right) + F\delta x_k + \delta G_k \right]
\end{aligned}
$$

Το κριτήριο ημιαναλλοιώτητας ή αναλλοιώτητας εκφράζουν οι παραπάνω σχέσεις με λίγο διαφορετικές μορφές. Οι Εξ. (18.45) συνδέουν μια παράσταση στο πρώτο μέλος, που περιέχει τις κατάλληλες για κάθε περίπτωση εκφράσεις του Euler, με το δεύτερο μέλος που είναι απόκλιση (divergence). Αυτές αποτελούν το κριτήριο του αν ένας μετασχηματισμός αποτελεί νεδεριανή συμμετρία ή αλλιώς, αν το σύστημα είναι νεδεριανό υπό τον εν λόγω μετασχηματισμό. Η ομάδα μετασχηματισμών που είναι νεδεριανοί, λέγεται νεδεριανή ομάδα

Σημειώστε ότι τα παραπάνω είναι ανεξάρτητα από το αν ισχύουν οι εξισώσεις των Euler-Lagrange, αφού πουθενά δεν υποθέσαμε κάτι τέτοιο.

Π7.2.1 Πρώτο θεώρημα της Noether

Διατυπώνουμε το πρώτο θεώρημα της Noether. «Αν μια συνεχής ομάδα (του Lie) απειροστών μετασχηματισμών των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών, η οποία εξαρτάται από R αυθαίρετες απειροστές σταθερές παραμέτρους ε_μ $\mu = 1, 2, ..., R$, (πρόκειται για καθολικό, παγκόσμιο μετασχηματισμό, global transformation) είναι νεδεριανή ομάδα ως προς τη συνάρτηση $F(x, y, y_x)$, τότε ικανοποιούνται οι ακόλουθες R σχέσεις, μια για την κάθε παράμετρο»:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\rho=1}^{n}\left(Y_{\rho\mu} - \sum_{\nu=0}^{3} y_{\rho,\nu}\delta x_\nu \right) E_\rho \\
&= -\sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\left\{ \sum_{\sigma=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} y_{r,\sigma} - F\delta_{\sigma k} \right) X_{\sigma\mu} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} Y_{r\mu} + Z_{\nu\mu} \right\} = 0 \qquad (18.46) \\
&\mu = 1, 2, ..., R.
\end{aligned}
$$

Με άλλα λόγια, έχουμε ότι R ανεξάρτητοι γραμμικοί συνδυασμοί των εκφράσεων του Euler είναι αποκλίσεις (divergences).

Πρέπει να τονίσουμε ότι η εξάρτηση των μεταβολών των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών είναι γραμμική ως προς τις απειροστές παραμέτρους ε_μ. Η Εξ. (18.46) προκύπτει από την Εξ. (18.44) και την Εξ. (18.45), αφού ληφθούν υπόψη οι παρακάτω σχέσεις των απειροστών μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμοί για τις απειροστές μεταβολές δx_k, της Εξ. (18.29), περιέχουν τις συναρτήσεις $X_{k\mu}(x, y, y_x)$. Ισχύουν οι σχέσεις

$$
\delta x_k = \sum_{\mu=1}^{R} X_{k\mu}(x, y, y_x)\varepsilon_\mu . \qquad (18.47)
$$

Για τις απειροστές μεταβολές δy_r, Εξ. (18.30) και (18.31), ισχύουν οι σχέσεις,

$$\delta y_{\rho} = \sum_{\mu=1}^{R} Y_{\rho\mu}(x, y, y_x)\varepsilon_{\mu}$$

$$\bar{\delta} y_{\rho} = \delta y_{\rho} - \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial y_{\rho}}{\partial x_{\sigma}} \delta x_{\sigma}$$

$$\bar{\delta} y_{\rho} = \sum_{\mu=1}^{R} \varepsilon_{\mu} \left(Y_{\rho\mu} - \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial y_{\rho}}{\partial x_{\sigma}} \delta x_{\sigma} \right) \tag{18.48}$$

μπορούμε να γράψομε $\bar{\delta} y_{\rho} = \sum_{\mu=1}^{R} \xi_{\rho\mu}(x, y, y_x)\varepsilon_{\mu}$

όπου $\xi_{\rho\mu} = Y_{\rho\mu} - \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial y_{\rho}}{\partial x_{\sigma}} \delta x_{\sigma}$.

Υποθέτουμε ότι και για τα $\delta G_k(x, y)$ ισχύουν ανάλογα, δηλαδή έχουμε τις σχέσεις

$$\delta G_k = \delta G_k(x, y) = \sum_{\mu=1}^{R} Z_{k\mu}(x, y)\varepsilon_{\mu} \tag{18.49}$$

Θυμίζουμε ότι τα $\delta G_k(x, y)$ δεν είναι μεταβολές, απλώς συμβολίζονται έτσι διότι είναι απειροστά. Προφανώς τα $Z_{k\mu}$ θα εξαρτώνται μόνο από τα (x, y) όπως ισχύει κατά τα γνωστά και για τα δG_k . Τελικώς, από την Εξ. (18.45) με χρήση και των Εξ. (18.48), (18.49) βρίσκουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{R} \varepsilon_{\mu} \sum_{r=1}^{n} \left(Y_{r\mu} - \sum_{\nu=1}^{m} y_{r,\nu} \delta x_{\nu} \right) E_r \\ &= -\sum_{\mu=1}^{R} \varepsilon_{\mu} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \left\{ \sum_{\sigma=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} y_{r,\sigma} - F\delta_{\sigma k} \right) X_{\sigma\mu} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,k}} Y_{r\mu} + Z_{\nu\mu} \right\} = 0. \end{aligned} \tag{18.50}$$

Εφόσον τα ε_{μ} είναι αυθαίρετα (είναι και μεταξύ τους ανεξάρτητα), προκύπτουν R ανεξάρτητες σχέσεις μια για κάθε μ , δηλαδή οι Εξ. (18.46).

Π7.2.2 Δεύτερο θεώρημα της Noether

Το κύριο συμπέρασμα που συνδέεται με το δεύτερο θεώρημα της Noether έχει την παρακάτω διατύπωση.

«Αν μια συνεχής ομάδα (του Lie) απειροστών μετασχηματισμών των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών, η οποία εξαρτάται από R αυθαίρετες απειροστές συναρτήσεις $p_{\mu}(x)$ $\mu = 1, 2, ..., R$ και παραγώγους τους $\frac{\mathrm{d}^l p_{\mu}(x)}{\mathrm{d}x^l}$, $l = 1, 2, ..., \sigma$, είναι νεδεριανή ομάδα ως προς τη συνάρτηση $F\left(x_i, y_j, y_{j,i}\right)$, τότε ικανοποιούνται οι ακόλουθες R σχέσεις, μια για την κάθε αυθαίρετη συνάρτηση από τις οποίες εξαρτάται η ομάδα»:

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ b_{j\lambda 0} E_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{\sigma} \left((-1)^r \frac{d^r (b_{j\lambda r} E_j)}{dx_i^r} \right) \right\} = 0 \quad \lambda = 1, 2, ..., R. \tag{18.51}$$

Ανάλογα με τη σύμβαση που υιοθετεί κάποιος μπορεί αντί για $\dfrac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}$ να χρησιμοποιεί τον συμβολισμό $\dfrac{\partial^r}{\partial x^r}$. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι τοπικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός βαθμίδας, local transformation ή gauge transformation. Αυτοί οι απειροστοί μετασχηματισμοί έχουν τη μορφή,

$$
\begin{aligned}
\delta x_k &= \sum_{\mu=1}^{R}\left(a_{\mu k0}\, p_\mu + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\sigma} a_{\mu kl}\,\frac{\mathrm{d}^l p_\mu}{\mathrm{d}x_i^l}\right)\\
\bar{\delta} y_j &= \sum_{\mu=1}^{R}\left(b_{\mu j0}\, p_\mu + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\sigma} b_{\mu jl}\,\frac{\mathrm{d}^l p_\mu}{\mathrm{d}x_i^l}\right)\\
\delta G_k &= \sum_{\mu=1}^{R}\delta G_{k\mu}\\
\delta G_{k\mu} &= \sum_{\mu=1}^{R}\left(c_{\mu k0}\, p_\mu + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\sigma} c_{\mu kl}\,\frac{\mathrm{d}^l p_\mu}{\mathrm{d}x_i^l}\right).
\end{aligned}
\tag{18.52}
$$

Γενικώς τα a, b, c εξαρτώνται από τα x, y, y_x. Με χρήση των δεύτερων από τις σχέσεις (18.52) βρίσκουμε ότι

$$
\sum_{j=1}^{n} E_j \bar{\delta} y_j = \sum_{j=1}^{n} E_j \left\{\sum_{\mu=1}^{R}\left(b_{\mu j0}\, p_\mu + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\sigma} b_{\mu jl}\,\frac{\mathrm{d}^l p_\mu}{\mathrm{d}x_i^l}\right)\right\}. \tag{18.53}
$$

Ισχύει η γνωστή ταυτότητα

$$
\varphi_j \frac{\mathrm{d}^r p_\mu}{\mathrm{d}x_i^r} = (-1)^r\, p_\mu \frac{\mathrm{d}^r \varphi_j}{\mathrm{d}x_i^r} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}\varphi_j}{\mathrm{d}x_i^{k-1}}\frac{\mathrm{d}^{r-k} p_\mu}{\mathrm{d}x_i^{r-k}}\right]. \tag{18.54}
$$

Όπου υποτίθεται ότι όταν $r = 0$ $\dfrac{\mathrm{d}^r \psi}{\mathrm{d}x_i^r} = \dfrac{\mathrm{d}^0 \psi}{\mathrm{d}x_i^0} = \psi$. Ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους της Εξ. (18.54) οδηγεί, όταν αθροίσουμε στα $i = 1, 2, ..., m$, σε απόκλιση (divergence) των συναρτήσεων

$$
C_{ji} = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}\varphi_j}{\mathrm{d}x_i^{k-1}}\frac{\mathrm{d}^{r-k} p_\mu}{\mathrm{d}x_i^{r-k}}. \tag{18.55}
$$

Έτσι έχουμε αντί της (18.54) την εξίσωση

$$
\varphi_j \frac{\mathrm{d}^r p_\mu}{\mathrm{d}x_i^r} = (-1)^r\, p_\mu \frac{\mathrm{d}^r \varphi_j}{\mathrm{d}x_i^r} + \frac{\mathrm{d}C_{ji}}{\mathrm{d}x_i}. \tag{18.56}
$$

Θέτουμε όπου φ_j τα $E_j b_{\mu jl}$ στην Εξ. (18.56) και αντικαθιστώντας στην Εξ. (18.53) βρίσκουμε

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ji}$$

$$\sum_{j=1}^{n} E_j \bar{\delta} y_j = \sum_{\mu=1}^{R} p_\mu \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(b_{\mu j 0} E_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}^l (b_{\mu j l} E_j)}{\mathrm{d} x_i^l} \right) \right\} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d} C_i}{\mathrm{d} x_i}. \tag{18.57}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος είναι απόκλιση. Συνδυάζοντας την Εξ. (18.57) με τη δεύτερη από τις σχέσεις στην Εξ. (18.44) καταλήγουμε στην

$$\sum_{\mu=1}^{R} p_\mu \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(b_{\mu j 0} E_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}^l (b_{\mu j l} E_j)}{\mathrm{d} x_i^l} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}(B_i - C_i)}{\mathrm{d} x_i}. \tag{18.58}$$

Δηλαδή και το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι απόκλιση και για τα B_i έχουμε, $B_i = -\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_{r,i}} \bar{\delta} y_r + F \delta x_i + \delta G_i \right)$. Τα B_i με χρήση των (18.52) φαίνεται ότι είναι συναρτήσεις των x, y, y_x, p και παραγώγων των p .

Παίρνουμε το ολοκλήρωμα και των δυο μελών πάνω σε οποιοδήποτε χωρίο Ω οπότε βρίσκουμε

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \sum_{\mu=1}^{R} p_\mu \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(b_{\mu j 0} E_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}^l (b_{\mu j l} E_j)}{\mathrm{d} x_i^l} \right) \right\} = \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}(B_i - C_i)}{\mathrm{d} x_i}. \tag{18.59}$$

Το ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους που περιέχει την απόκλιση, σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης, ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην κλειστή υπερεπιφάνεια S που είναι το σύνορο του χωρίου Ω . Έτσι έχουμε

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}(B_i - C_i)}{\mathrm{d} x_i} = \int_{S} \sum_{k=1}^{m} \mathrm{d} S_k (B_k - C_k) \,. \tag{18.60}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω τα B_k, C_k εξαρτώνται από τα x, y, y_x, επίσης από τις αυθαίρετες συναρτήσεις $p_\mu(x)$ και τις παραγώγους τους, έτσι που αν στο σύνορο S ληφθούν οι συναρτήσεις και οι υπάρχουσες παράγωγοί τους μηδέν, τότε τα B_k, C_k είναι μηδέν στο σύνορο. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε διότι οι συναρτήσεις $p_\mu(x)$ είναι αυθαίρετες. Τελικώς καταλήγουμε στο ότι το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (18.59) είναι μηδέν άρα είναι μηδέν και το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους. Εφόσον το χωρίο Ω είναι αυθαίρετο, η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι επίσης μηδέν.

Άρα

$$\sum_{\mu=1}^{R} p_\mu \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(b_{\mu j 0} E_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}^l (b_{\mu j l} E_j)}{\mathrm{d} x_i^l} \right) \right\} = 0. \tag{18.61}$$

Εφόσον οι συναρτήσεις $p_\mu(x)$ είναι αυθαίρετες (και ανεξάρτητες μεταξύ τους) ο κάθε όρος του αθροίσματος πάνω στα $\mu = 1, 2, ..., R$, ο οποίος είναι μέσα στον μύστακα, θα είναι μηδέν άρα καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις (εξαρτήσεις) μεταξύ των λαγκρανζιανών εκφράσεων που ισχύουν ανεξάρτητα από το αν ισχύουν ή όχι οι εξισώσεις των Euler-Lagrange,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{\mu j0}E_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\mathrm{d}^l(b_{\mu jl}E_j)}{\mathrm{d}x_i^l}\right)=0 \quad \mu=1,2,\ldots,R. \tag{18.62}$$

Αυτές οι εξαρτήσεις, ταυτότητες, είναι του τύπου των ταυτοτήτων του Bianchi, που απαντούν στη Γενική Σχετικότητα, και σημαίνουν ότι στην περίπτωση φυσικών συστημάτων που υπακούν σε τοπικές συμμετρίες, δηλαδή σε συμμετρίες βαθμίδας, οι εκφράσεις του Euler που υπολογίζονται από τη λαγκρανζιανή και οι παράγωγές τους συνδέονται με τις ανωτέρω εξισώσεις. Αυτό έχει συνέπειες στη λύση τέτοιων προβλημάτων και σημαίνει ότι όταν ισχύουν οι εξισώσεις των Euler-Lagrange δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Βιβλιογραφία Παραρτημάτων

[1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[2] E. Noether, *Invariant Variation Problems*, Transport Theory and Statistical Physics, Vol. 1, 1971 (Translated from German by M. A. Tavel. The Original publication in German is, *Invariante Variationsprobleme,* Nachr. d. Koenig. Gesellsch. d. Wiss. zu Goettingen, Math-Phys. Klasse, 235, 1918).

[3] D. Anderson, *Noether's Theorem in Generalized Mechanics*, J. Phys. A: Math., Nucl.Gen., Vol. 6, pp. 299, 1973.

[4] H. Fleming, *Noether's Theorem in Classical Field Theories and Gravitation*, Revista Brasileira de Fisica, Vol. 17, pp. 236, 1987.

[5] E. L. Hill, *Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Rev. Modern Phys., Vol. 23, pp. 253, 1951.

[6] H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, D. Van Nostrand Co. Inc., 1962.

[7] H. Flandres, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences,* Dover Publications, N.Y., 1989.

[8] S.H. Weitraub, *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus*, Academic Press,1996.

[9] E. A. Desloge, *Classical Mechanics*, *Vol. 1, 2*, John Wiley, 1982.

[10] R.K. Zia, E. E. Redish and S. R. McKay, *Making sense of the Legendre transform*, American Journal of Physics, Vol. 77(7), pp. 614, 2009.

[11] S. Kennerly, *A graphical derivation of the Legendre transform*, this work is licensed under the Creative Commons Attribution 3.0 Unported License April 12, 2011.

[12] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

Συνολική Βιβλιογραφία

[17] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001.

[18] Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος, *Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής*, Β' Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[19] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.

[20] Γ. Κατσιάρης, *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, ΟΑΔΒ, 1988.

[21] Σ. Ι. Ιχτιάρογλου, *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

[22] E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Vol. 1, 2*, John Wiley, 1982.

[23] Α. Μαυραγάνης, *Αναλυτική Μηχανική*, ΕΜΠ, 1998.

[24] V. I. Arnold, *Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.

[25] J. V. Jose and Eu. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1998.

[26] E. Whittaker, *A Treatise in the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, 1965.

[27] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Univ. of Toronto Press, 1970.

[28] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 1977.

[29] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, 1987.

[30] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press, 1967.

[31] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972.

[32] M. R. Flannery, *The Enigma of Nonholonomic Constraints*, American Journal of Physics, Vol. 73, pp. 265, 2005.

[33] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *A Variational Principle for Nonholonomic Systems*, American Journal of Physics, Vol. 38, pp. 892, 1970.

[34] E. Noether, *Invariant Variation Problems*, Transport Theory and Statistical Physics, Vol. 1, 1971 (Translated from German by M. A. Tavel. The Original publication in German is, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. Koenig. Gesellsch. d. Wiss. zu Goettingen, Math-Phys. Klasse, 235, 1918).

[35] I. Damian, *Symmetries and Conservation Laws in Theories with Higher Derivatives*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 39, pp. 2141, 2000.

[36] D. Anderson, *Noether's Theorem in Generalized Mechanics*, J. Phys. A: Math., Nucl.Gen., Vol. 6, pp. 299, 1973.

[37] H. Fleming, *Noether's Theorem in Classical Field Theories and Gravitation*, Revista Brasileira de Fisica, Vol. 17, pp. 236, 1987.

[38] E. L. Hill, *Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Rev. Modern Phys., Vol. 23, pp. 253, 1951.

[39] M. Borneas, *Principle of Action with Higher Derivatives*, Phys. Rev., Vol. 186, pp. 1299, 1969.

[40] N. Bobillo-Ares, *Noether's Theorem in Discrete Classical Mechanics*, American Journal of Physics, Vol. 56, pp. 174, 1988.

[41] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, second edition, Academic Press, 1970.

[42] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. I, II*, John Wiley & Sons, 1989.

[43] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, 1983.

[44] G. L. Baker and J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[45] Y. H. Chen, *Pars's Acceleration Paradox*, J. Franklin Inst., Vol. 335B, No. 5., pp. 871- 875, 1998.

[46] L. A. Pars, *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann,1968.

[47] C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I: Partial Differential Equations of the First Order*, English Translation by Robert B. Dean and Julius J. Brandstatter, Holden-Day, 1965.

[48] C. G. Gray and E. F. Taylor, *When action is not least*, American Journal of Physics, Vol. 75 (5), pp. 434, May 2007.

[49] C. Caratheodory, *Theorem of Caratheodory*, Math. Annalen, Vol. 67, pp. 355, 1909.

[50] H. A. Buchdahl, *On the Unrestricted Theorem of Caratheodory and its Application in the Treatment of the Second Law of Thermodynamics*, American Journal of Physics, Vol. 17, pp. 212, 1949.

[51] H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, D. Van Nostrand Co. Inc., 1962.

[52] H. Flandres, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Dover Publications, N.Y.,

1989.
[53] S.H. Weitraub, *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus*, Academic Press,1996.
[54] T. Levi-Civita, *Sulla Integrazione di Hamilton-Jacobi per Separazione di Variabili*, Math. Ann., Vol. 59, pp. 383-397, 1904.
[55] J. L. C. Quilantan, J. L. del Rio-Correa and M. A. R. Medina, *Alternative proof of Bertrand's theorem using phase space approach*, Revista Mexicana de Fisica, Vol. 42, 5, pp. 867-877, 1996.
[56] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Persus Books, 1994.
[57] *ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΧΑΟΣ σε Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα*, Πρακτικά του 2^{ου} Θερινού Σχολείου μη γραμμικής Φυσικής και Μαθηματικών, Σάμος, 3-10 Ιουλίου 1988, Επιστημονικοί εκδότες Τ. Μπουντής και Σ. Πνευματικός.
[58] G. Contopoulos, *A Third Integral of Integral of Motion in a Galaxy*, Z. Astrophys., Vol. 49, pp. 273, 1960.
[59] G. Contopoulos, *On the Existence of the Third Integral of Motion*, Astron. J., Vol. 68, pp. 1, 1963.
[60] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Nonlinear Mechanics, A supplement to Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, Dover Publications, Inc., 2006.
[61] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel Publishing Company, 1974.
[62] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover Publications, Inc., 1976.
[63] J. L. Martin, *General Relativity. A first course for physicists*, Pearson Education Limited, 1996.
[64] G. Contopoulos, *On the Relative Motion of Stars,* Stockholms Obs. Ann. 19, No. 10, 1957.
[65] M. Henon and C. Heiles, *The Applicability of the Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments*, The Astronomical Journal, Vol. 69, No. 1, pp. 73, 1964.
[66] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physics 16D, pp. 285, 1985.
[67] C.C. Yan, *Construction of Lagrangians and Hamiltonians from the equation of motion*, American Journal of Physics, Vol. 46, pp. 671, 1978.
[68] C. Leubnert and P. Krumm, *Lagrangians for simple systems with variable mass*, Eur. J. Phys., Vol. 11, pp. 31, 1990.
[69] A. Mizel, *Nonuniqueness of the Lagrangian Function*, report Univ. of Cal. Berkeley, May 20, 1995.
[70] R. G. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
[71] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan and B. Vijayalakshmi, *Particles of half-integral or integral helicity by quantization of a nonrelativistic free particle, and relevant topics*, Phys. Rev. D. 18 (1950), 1978.
[72] S. Hojman and H. Harleston, *Equivalent Lagrangians: Multidimensional Case*, J. Math. Phys., Vol. 22, pp. 1414-1419, 1981.
[73] M. Crampin, *A Note on Non-Noether Constants of Motion*, Phys. Lett., Vol. 95A, pp. 209, 1983.
[74] J. Hurley, *Necessary and Sufficient Conditions for a Canonical Transformation*, American Journal of Physics, Vol. 40, pp. 533, 1972.
[75] E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Willey, 1971.
[76] C. Moeller, *The Theory of Relativity*, Oxford Univ. Press, 1952.
[77] G. Marmo, E.J. Saletan, *Ambiguities in the Lagrangian and Hamiltonian Formalism: Transformation Properties*, Nuovo Cimento, D. 40B, pp. 67, 1977.
[78] J. F. Carinena, A. Ibort, G. Marmo, G. Morandi, *Geometry from Dynamics, Classical and Quantum*, Springer, 2015.
[79] N. E. Mavromatos, *General Relativity and Cosmology (Notes)*, King's College, Univ. of London, May 2008.
[80] H. von Helmholtz, *Über die Physikalische Bedeutung des Princips der Kleinsten Wirkung*, Z. Reine Angew. Math., Vol. 100, pp. 137, 1887.
[81] G. Darboux, *Lecons sur la theorie generale des surfaces et des applications geometriques du calcul infinitesimal*, IIIeme partie, Paris, Gauthiers-Villars, 1894.
[82] J. Weber, *Detection and Generation of Gravitational Waves*, Phys. Rev., D., Vol. 117, pp. 306-313, 1960.
[83] M. E. Gerstsenshtein and V. I. Pustovoit, *On the Detection of Low-Frequency Gravitational Waves*, Soviet Physics-JETP, Vol. 16, pp. 433-435, 1963.
[84] F. A. E. Pirani, *On the Physical Significance of the Riemann Tensor*, Republication, Gen. Relativ.,

Vol. 41, pp. 1215-1232, 2009.
[85] P. R. Saulson, *If light waves are stretched by gravitational waves, how can we use light as a ruler to detect gravitational waves?*, American Journal of Physics, Vol. 65, pp. 501, 1997.
[86] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett., Vol. 116 (061102), 2016.
[87] M. Hendry, *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*, Notes, Univ. of Glasgow, Dept of Phys. and Astronomy, October 2012.
[88] M. P. Hobson, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, *General Relativity. An Introduction for Physicists*, Cambridge Univ. Press, 2006.
[89] R. E. Vogt et al., *The Construction, Operation, and Supporting Research and Development of a Laser Interferometer Gravitational – Wave Observation*, (LIGO), submitted by the California Institute of Technology, Copyright 1979.
[90] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 246, pp. 326-332, 1958.
[91] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics,* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
[92] M. K. Fung, *Dirac Bracket for Pedestrians*, Notes, Chinese Journal of Physics, Vol. 52, No. 6, Dec. 2014.
[93] S. Avery, *Dirac Brackets*, Notes based on Dirac’s Lectures on Quantum Mechanics, published by Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
[94] D. M. Greenberger, *Esoteric Elementary Particle Phenomena in undergraduate Physics-Spontaneous Symmetry breaking and Scale invariance,* American Journal of Physics, Vol. 46, pp. 394, 1978.
[95] J. Iliopoulos, *Introduction to the Standard Model of Electro-Weak Interactions,* Lectures given at the 2012 CERN Summer School, Angers, France, June 2012, Hal Id: hal-00827554.
[96] I. van Vulpen and I. Angelozzi, *The Standard Model Higgs Boson*, Part of Lecture Particle Physics II, UvA Particle Physics Master, 2013-2014.
[97] Κ. Ε. Βαγιωνάκης, *Σωματιδιακή Φυσική*, Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2008.
[98] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks And Leptons*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1984.
[99] A. R. Forsyth, *A Treatise On Differential Equations*, sixth Ed., Macmillan and Company Limited, 1956.
[100] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1953.
[101] Dan Green, *Cosmology with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., 2016.
[102] Dan Green, *One Hundred Physics Visualizations Using MATLAB*, World Scientific Publishing Co., 2014.
[103] Dan Green, *More Physics with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., 2015.
[104] Dan Green, *Stars and Space with Matlab Apps*, World Scientific Publishing Co., 2020.
[105] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
[106] Κ. Ταμβάκης, *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*, Leader Books, 2003.
[107] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Inc., 1998.
[108] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, 1962.
[109] A.O. Barut, *Electrodynamics of Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, 1964.
[110] R.K. Zia, E. E. Redish and S. R. McKay, *Making sense of the Legendre transform*, American Journal of Physics, Vol. 77(7), pp. 614, 2009.
[111] N. Cutic, *Legendre transform short tutorial*, taken from sci.physics.research, author unknown.
[112] S. Kennerly, *A graphical derivation of the Legendre transform*, this work is licensed under the Creative Commons Attribution 3.0 Unported License April 12, 2011.
[113] A. W. Wipf, *Hamilton’s Formulation for Systems with Constraint*, Lectures at the Seminar “The Canonical Formalism in Classical and Quantum General Relativity” Bad Honnet, Sept. 1993, ETH-Th/93-48, arXiv:hep- th/9312078v3, 20 Dec. 1993.
[114] A. Shirzad and P. Moyassari, *Dirac Quantization of Some Singular Theories*, IUT-Phys/01-11, Dec. 2001, arXiv:hep-th/0112194v1 20 Dec. 2001.
[115] A.M. Stewart, *Longitudinal and transverse components of a vector field*, Sri Lankan Journal of Physics, Vol. 12, pp. 33-42, 2011.
[116] W. Greiner, *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 1989.

[117] J. Pantaleone, *Synchronization of metronomes*, American Journal of Physics, Vol. 70, No. 10, pp. 992, Oct. 2002.
[118] H. Ultrichs, A. Mann and U. Parlitz, *Synchronization and chaotic dynamics of coupled mechanical metronomes*, CHAOS 19, 043120, 2009.
[119] A. Jenkins, *Self-oscillation*, Physics Reports, Vol. 525, No. 2, pp. 167-222, 2013.
[120] D. W. Olson, S. F. Wolf and J. M. Hook, *The Tacoma Narrows Bridge collapse*, Physics Today, Nov. 2015.
[121] E. A. Desloge, *Suppression and restoration of constants in physical equations*, American Journal of Physics, Vol. 52, No. 4, pp. 312-316, April 1984.
[122] R. P. Woodard, *The Theorem of Ostrogradsky*, arXiv: 1506.02210v2 {hep-th], 2015.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Ν

Ο

Π

Σ

Τ

Φ

Χ

Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε
από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας.