ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΑΡΧΑΡΙΟΥΣ: ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ

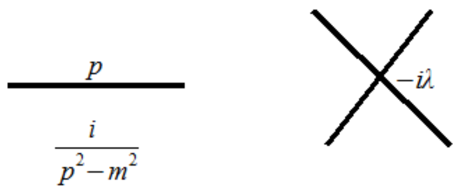
Νίκος Τράκας

1. Ανακανονικοποίηση

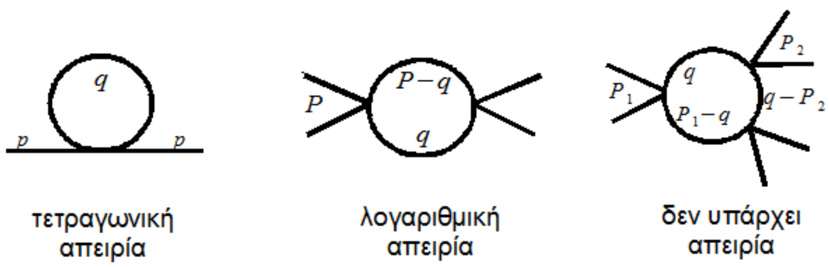
Θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία ϕ^4 που περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή (πυκνότητα)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$$

Οι κανόνες Feynman για τον διαδότη και την αλληλεπίδραση είναι



Στη θεωρία διαταραχών συναντάμε διαγράμματα με βρόχους. Για παράδειγμα, τα παρακάτω διαγράμματα περιέχουν ένα βρόχο και 2, 4 και 6 εξωτερικά ''πόδια'' αντίστοιχα.



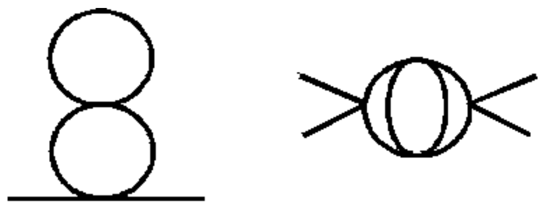
Για κάθε βρόχο (μετά την διατήρηση της τετρα-ορμής σε κάθε κορυφή) μια τετρα-ορμή παραμένει ελεύθερη που θα πρέπει να ολοκληρωθεί από $-\infty$ έως ∞. Τα διαγράμματα αυτά εμφανίζουν την παρακάτω συμπεριφορά για μεγάλες τιμές του q

$$\int \frac{d^4q}{q^2-m^2}, \qquad 4/2, \text{ τετραγωνική απειρία}$$

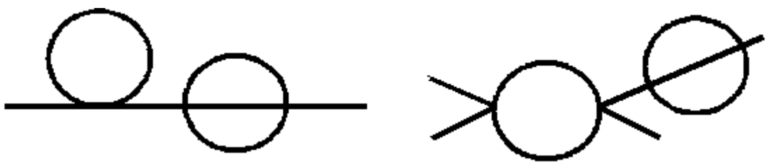
$$\int \frac{d^4q}{(q^2-m^2)((P-q)^2-m^2)}, \qquad 4/4, \text{ λογαριθμική απειρία}$$

$$\int \frac{d^4q}{(q^2-m^2)((P_1-q)^2-m^2)((q-P_2)^2-m^2)}, \qquad 4/6, \text{ δεν υπάρχει απειρία}$$

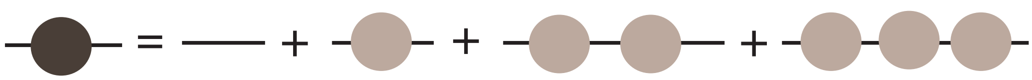
1-Particle-Irreducible, 1PI διαγράμματα, ονομάζουμε τα διαγράμματα που δεν χωρίζονται σε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους διαγράμματα αν κόψουμε μια εσωτερική γραμμή (διαδότη)



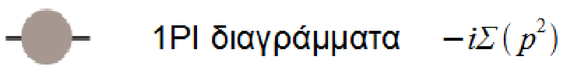
Αντίθετα, , Non 1-Particle-Irreducible, Non-1PI διαγράμματα είναι αυτά που χωρίζονται



Ο συνολικός διαδότης $i\Delta(p)$ (1PI και Non 1PI διαγράμματα) είναι μια σειρά



όπου

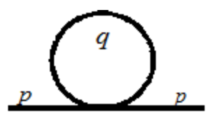


περιέχει μόνο 1PI διαγράμματα και συμβολίζεται με $-i\Sigma(p^2)$.

Οπότε, έχουμε για τον διαδότη

$$
\begin{aligned}
i\Delta(p) &= \frac{i}{p^2-m^2} + \frac{i}{p^2-m^2}\left(-i\Sigma(p^2)\right)\frac{i}{p^2-m^2} + \ldots \\
&= \frac{i}{p^2-m^2} \quad \frac{1}{1+i\Sigma(p^2)\frac{i}{p^2-m^2}} \\
&= \frac{i}{p^2-m^2-\Sigma(p^2)}
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας το άθροισμα των όρων μιας άπειρης αλγεβρικής σειράς.
Το $\Sigma(p^2)$ σε πρώτη τάξη διαταραχών έγκειται στον υπολογισμό του διαγράμματος



που οδηγεί στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^4q}{q^2-m^2}$$

που, όπως είδαμε ήδη, έχει τετραγωνική απειρία. Ας υποθέσουμε ότι με κάποιο τρόπο (ομαλοποίηση) καταφέραμε να ξεχωρίσουμε το άπειρο από το πεπερασμένο τμήμα του ολοκληρώματος (βέβαια, αυτός ο διαχωρισμός περιέχει κάποια αυθαιρεσία), και γράφουμε

$$\Sigma(p^2) = \lambda(A_\infty + A_f)p^2 + \lambda(B_\infty + B_f)m^2 \tag{1}$$

Στην ειδική περίπτωση της θεωρίας που έχουμε διαλέξει, είναι φανερό ότι το $\Sigma(p^2)$ δεν εξαρτάται από την εξωτερική ορμή p. Βέβαια, αυτό συμβαίνει μόνο στο επίπεδο του ενός βρόχου. Για να κάνουμε, παρ' όλα αυτά, μια γενική θεώρηση, βάζουμε και όρο ανάλογο του p^2. Ο παρονομαστής του διαδότη γράφεται

$$
\begin{aligned}
&p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) = \\
&= p^2(1-\lambda A_\infty) - m^2(1+\lambda B_\infty) - \lambda A_f p^2 - \lambda B_f m^2 = \\
&= (1-\lambda A_\infty)\left[p^2 - m^2(1+\lambda B_\infty)(1+\lambda A_\infty) - (\lambda A_f p^2 + \lambda B_f m^2)(1+\lambda A_\infty)\right] = \\
&= (1-\lambda A_\infty)\left[p^2(1-\lambda A_f) - m^2(1+\lambda B_\infty + \lambda A_\infty + \lambda B_f)\right]
\end{aligned}
$$

Προσέξτε, ότι αμελούμε όρους τάξης λ^2 και άνω, οπότε και $(1 \pm \lambda A_\infty)^{-1} = (1 \mp \lambda A_\infty)$. Και ο διαδότης γίνεται

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2)} = \frac{i(1+\lambda A_\infty)}{p^2(1-\lambda A_f) - m^2(1+\lambda B_\infty + \lambda A_\infty + \lambda B_f)}$$

Τώρα κάνουμε δύο βήματα:
1) Επαναορίζουμε

$$m^2 = m_R^2(1+\lambda B') \rightarrow \mathbf{m^2 = Z_m m_R^2} \tag{2}$$

και ο παρονομαστής γίνεται πάλι

$$\begin{aligned} p^2(1-\lambda A_f) - m_R^2(1+\lambda B')(1+\lambda B_\infty + \lambda A_\infty + \lambda B_f) = \\ = p^2(1-\lambda A_f) - m_R^2(1+\lambda B' + \lambda B_\infty + \lambda A_\infty + \lambda B_f) = \end{aligned}$$

Επιλέγοντας

$$B' = -B_\infty - A_\infty$$

ο όρος ο ανάλογος με την μάζα γίνεται

$$m_R^2(1+\lambda B_f)$$

2) Επαναορίζοντας την κυματοσυνάρτηση ϕ του σωματιδίου

$$\phi = (1 + A'\lambda)^{1/2}\phi_R \rightarrow \boldsymbol{\phi = Z_\phi^{1/2}\phi_R} \tag{3}$$

ο διαδότης πολλαπλασιάζεται με ένα παράγοντα $(1 + A'\lambda)$. Επομένως καταλήγουμε

$$i\Delta(p) = \frac{i(1+\lambda A_\infty)(1+A'\lambda)}{p^2(1-\lambda A_f) - m_R^2(1+\lambda B_f)}$$

Επιλέγοντας πάλι κατάλληλα το A'

$$A' = -A_\infty$$

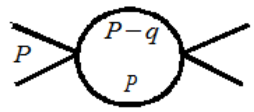
καταλήγουμε

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2(1-\lambda A_f) - m_R^2(1+\lambda B_f)}$$

Ποια είναι η μάζα του σωματιδίου μας, σε τάξη ενός βρόχου, δηλαδή παίρνοντας διορθώσεις από αλληλεπιδράσεις ενός βρόχου; Απλά θα πρέπει να βρούμε τον πόλο του διαδότη, για ποιο p^2 μηδενίζεται ο παρονομαστής

$$p^2(1-\lambda A_f) - m_R^2(1+\lambda B_f) = 0 \rightarrow p^2 = m_R^2(1+\lambda B_f + \lambda A_f)$$

Συνοψίζοντας την έως τώρα διεργασία: αντικαθιστώντας στην Λαγκρανζιανή μας τα ϕ και m^2 με τα αντίστοιχα που δίνονται από τις Εξ.2 και 3, σε επίπεδο ενός βρόχου δεν έχουμε πλέον απειρίες. Βέβαια, οι λεγόμενες γυμνές σταθερές, ϕ και m^2 είναι τώρα άπειρες, αλλά αυτές δεν είναι μετρήσιμες ποσότητες! Δεν μπορούμε να αποφύγουμε τις αλληλεπιδράσεις.
Ας προχωρήσουμε στη σταθερά σύζευξης λ. Σε προσέγγιση ενός βρόχου, το διάγραμμα που θα πρέπει να υπολογιστεί είναι το



και το αντίστοιχο διάγραμμα είναι (με P συμβολίζουμε την εισερχόμενη ορμή από τα δύο αριστερά πόδια)

$$\int \frac{d^4q}{(q^2-m^2)((P-q)^2-m^2)}$$

με λογαριθμική απειρία. Όπως και πριν, θεωρούμε ότι διαχωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε άπειρο και πεπερασμένο τμήμα

$$\Gamma(P^2) = \lambda^2 \left(C_\infty + C_f\right) \tag{4}$$

Διαστατικά, το ολοκλήρωμα είναι αδιάστατο. Επομένως, η εξάρτηση θα είναι από το λόγο P^2/m^2. Για μεγάλα q δεν περιμένουμε εξάρτηση από το P οπότε περιμένουμε ο άπειρος όρος να είναι ανεξάρτητος από P^2 και m^2.
Ορίζουμε

$$\lambda = \lambda_R(1 + C'\lambda_R) \to \boldsymbol{\lambda = Z_\lambda \lambda_R}$$

Οπότε, στην Λαγκρανζιανή, ο όρος $\lambda\phi^4$ γίνεται

$$-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \to$$

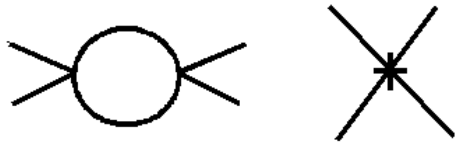
$$-\frac{1}{4!}\lambda_R(1+C'\lambda_R)(1+A'\lambda_R)^2\phi_R^4 = -\frac{1}{4!}\lambda_R(1+C'\lambda_R+2A'\lambda_R)\phi_R^4 =$$

$$= -\frac{\lambda_R}{4!}\phi_R^4 - \frac{1}{4!}\lambda_R^2(C'+2A')\phi_R^4$$

Προσέξτε, ότι σε όρους που περιέχουν ήδη της σταθερά σύζευξης, μπορούμε να εναλλάξουμε το λ με το λ_R μιας και αμελούμε όρους ανώτερης τάξης. Έτσι, αντικαταστήσαμε το ϕ με το $(1+A'\lambda)\phi_R = (1+A'\lambda_R)\phi_R$. Επιλέγοντας, λοιπόν,

$$C' + 2A' = -C_\infty \to C' = -2A' - C_\infty = 2A_\infty - C_\infty$$

σε επίπεδο λ^2, η Λαγκρανζιανή μας δίνει για όρους ϕ^4, τα διαγράμματα



όπου το δεύτερο διάγραμμα αντιστοιχεί στο

$$-i\lambda_R^2(C' + 2A')$$

Αυτό ακριβώς είναι το κατάλληλο για να διώξει την απειρία από το πρώτο διάγραμμα. Βέβαια, και πάλι, το λ είναι άπειρο, αλλά και αυτή η γυμνή σταθερά δεν είναι μετρήσιμη!!
Επομένως, η Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_R\right)^2 - \frac{1}{2} m_R^2 \left(1 - \lambda_R(-B_\infty - A_\infty)\right) \phi_R^2 - \frac{1}{4!}\lambda_R \left(1 + \lambda_R(2A_\infty - C_\infty)\right) \phi_R^4$$

και A_∞, B_∞ και C_∞ οι απειρίες που βρέθηκαν στα διαγράμματα ενός βρόχου, δεν παρουσιάζει απειρίες σ' αυτήν την τάξη.

2. Διαστατική ομαλοποίηση

Παρατηρώντας τα δύο παρακάτω ολοκληρώματα

$$\int d^4l \, \frac{1}{(l^2-m^2)^2} \qquad \text{έχει λογαριθμική απειρία}$$
$$\int d^2l \, \frac{1}{(l^2-m^2)^2} \qquad \text{είναι πεπερασμένο για } l \to \infty$$

παρατηρούμε ότι η μείωση του αριθμού των διατάσεων μπορεί να κάνει το αρχικά άπειρο ολοκλήρωμα να συγκλίνει.

Η ιδέα: ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται για διάσταση $n < 4$. Ορίζουμε, με αναλυτική επέκταση, το ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του n. Η απειρία εμφανίζεται ως πόλος του ολοκληρώματος για $n = 4$.

Τι σημαίνει αναλυτική επέκταση;

Έχοντας το ολοκλήρωμα $\int d^4l \, F(l,k)$, εισάγω την συνάρτηση $I(n,k) = \int d^n \, F(l,k)$. Υπολογίζω το $I(n,k)$ στην περιοχή όπου δεν έχει απειρίες. Βρίσκω μια συνάρτηση $(I'(n,k))$ που

- συμπίπτει με την $I(n,k)$ στην περιοχή σύγλισής της και
- έχει καθορισμένα σημεία μη σύγκλισης (απειρίες) εκτός της περιοχής αυτής. Η $I'(n,k)$ θεωρείται η αναλυτική επέκταση της $I(n,k)$

Παράδειγμα. Αναπαράσταση Euler για την συνάρτηση $\Gamma(z)$, $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt \, e^{-t} t^{z-1}$$

Για $Re(z) < 0$ αποκλίνει. Αλλά

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^a dt \, e^{-t} t^{z-1} + \int_a^\infty dt \, e^{-t} t^{z-1} \\
&= \int_0^a dt \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} + \int_a^\infty dt \, e^{-t} t^{z-1} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^a dt \, t^{n+z-1} + \int_a^\infty dt \, e^{-t} t^{z-1} \\
\Gamma(z) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{a^{n+z}}{z+n} + \int_a^\infty dt \, e^{-t} t^{z-1}
\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα έχει απλούς πόλους για $z = 0, -1, -2, ...$ Η τελευταία σειρά, για $a = 1$, αποτελεί την Weirstrass αναπαράσταση της $\Gamma(z)$.
Παρατηρήστε ότι $\Gamma(z)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του a ($\frac{d\Gamma}{da} = 0$). Δηλαδή, χρειάστηκε η εισαγωγή μιας σταθεράς αλλά το αποτέλεσμα ΔΕΝ εξαρτάται από αυτή!!

ΕΜΕΙΣ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ WEIRSTARRS ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΑΣ!!

Έχουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα

$$I = \int d^n l \, \frac{1}{(l^2 + M^2)^2}$$

Επειδή δεν έχουμε ''γωνίες'', πάμε σε ''σφαιρικές συντεταγμένες''

$$\int d^n l = \int_0^\infty l^{n-1} dl \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^\pi d\theta_3 \sin^2\theta_3 ... \int_0^\pi d\theta^{n-1} \sin^{n-2}\theta$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\int \sin^m \theta d\theta = \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int d^n l &= 2\pi\pi^{\frac{n-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+2}{2}\right)} ... \frac{\Gamma\left(\frac{n-2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2+2}{2}\right)} \int l^{n-1} dl \\ &= 2\pi^{n/2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n/2)} \int l^{n-1} dl = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int l^{n-1} dl\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\Gamma(1) = 1$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{l^{n-1} dl}{(l^2 + M^2)^2}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται για $0 < n < 4$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την περιοχή αναλυτικότητας με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ($n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$)

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty \frac{l^{n-1}dl}{\left(l^2+M^2\right)^2} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}\int_0^\infty \frac{dl^n}{\left(l^2+M^2\right)^2} = \\
&= \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty \frac{dl^n}{\left(l^2+M^2\right)^2} = \\
&= \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\left[\left.\frac{l^n}{\left(l^2+M^2\right)^2}\right|_0^\infty - \int_0^\infty l^n \frac{d}{dl}\frac{1}{\left(l^2+M^2\right)^2}dl\right] = \\
&= \frac{8\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty \frac{2l^{n+1}}{\left(l^2+M^2\right)^3}dl = \frac{16\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty \frac{l^{n+1}}{\left(l^2+M^2\right)^3}dl
\end{aligned}$$

Τώρα η περιοχή αναλυτικότητας γίνεται $-2 < n < 4$ και τελικά μπορούμε να καταλήξουμε στη περιοχή $\infty < n < 4$.
Τι γίνεται για $n = 4$; Ας χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{\left(t+a^2\right)^n}dt = \frac{1}{\left(a^2\right)^{n-m}}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}$$

Μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα για να το φέρουμε στη μορφή που θέλουμε

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{\left(t+a^2\right)^n}dt = \int_0^\infty \frac{\left(t'^2\right)^{m-1}}{\left(t'^2+a^2\right)^n}2t'dt' = \int_0^\infty \frac{2t'^{2m-1}}{\left(t'^2+a^2\right)^n}dt'$$

Οπότε, το ολοκλήρωμά μας γίνεται

$$I = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n/2)\Gamma(2-n/2)}{\Gamma(2)} = \pi^{n/2}\Gamma(2-n/2) = \pi^{\frac{4-\epsilon}{2}}\Gamma(\epsilon/2)$$

όπου γράψαμε $\epsilon = 4 - n$. Η συνάρτηση Γάμμα έχει πόλους στο μηδέν και τους αρνητικούς ακεραίους. Για το μηδέν έχουμε την ανάπτυξη

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.577...$$

και το ολοκλήρωμα γράφεται, αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του ϵ

$$I=\left(\frac{1}{\epsilon/2}-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon)\right)\pi^2\left(1-\frac{\epsilon}{2}\ln\pi+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)=\frac{2\pi^2}{\epsilon}-\pi^2\gamma-\pi^2\ln\pi+\mathcal{O}(\epsilon)$$

δηλαδή έχουμε πόλο για $\epsilon=0$ δηλαδή για $n=4$. Οπότε, το άπειρο τμήμα το ολοκληρώματός μας είναι ο όρος $2\pi^2/\epsilon$ και το πεπερασμένο $-\pi^2(\gamma+\ln\pi)$. [1]
Έτσι έχουμε τα ολοκληρώματα

$$\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{[k^2+2kp-M^2]^a}=\frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(a-n/2)}{\Gamma(a)}\frac{1}{[M^2+p^2]^{a-n/2}}$$
$$\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^\mu}{[k^2+2kp-M^2]^a}=\frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(a-n/2)}{\Gamma(a)}\frac{-p^\mu}{[M^2+p^2]^{a-n/2}}$$
$$\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^\mu k^\nu}{[k^2+2kp-M^2]^a}=\frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}}\left\{\frac{\Gamma(a-n/2)}{[M^2+p^2]^{a-n/2}}p^\mu p^\nu-\frac{\Gamma(a-n/2-1)}{[M^2+p^2]^{a-n/2-1}}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\right\}$$

Ο δεύτερος και τρίτος τύπος προέρχονται από παραγώγιση του πρώτου ως προς p_μ.

[1] Παρατήρηση: Για τους διαδότες $1/(p^2-m^2)$ κάνουμε μια ''στροφή''-Wiik $p_0\to ip_4$, οπότε $p^2-p_0^2-\mathbf{p}^2=-p_4^2-\mathbf{p}^2=-(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2)$ και έχουμε την εμφάνιση ενός i από την αλλαγή $dp_0\to idp_4$.

3. Ομάδα Ανακανονικοποίησης

Η διάσταση της Λαγκρανζιανής πυκνότητας είναι 4, σε μονάδες μάζας ($[\mathcal{L}] = 4$) μιας και η δράση S είναι αδιάστατο μέγεθος

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} L(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x\mathcal{L}$$

Επομένως, πηγαίνοντας σε n διαστάσεις, η διάσταση της Λαγρανζιανής πυκνότητας είναι n. Στην θεωρία ϕ^4, όπου

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$$

επειδή $[\partial_\mu] = 1$ (αντιστοιχεί σε ορμή), και βέβεια $[m] = 1$, θα πρέπει

$$n = 2 + 2[\phi], \qquad n = 2 + 2[\phi], \qquad 4 = [\lambda] + 4[\phi]$$

οπότε

$$[\phi] = \frac{n-2}{2}, \qquad [\lambda] = 4 - 4\frac{n-2}{2} = 4 - n$$

Δηλαδή σε n διαστάσεις η σταθερά σύζευξης λ δεν είναι αδιάστατη! Για να την κρατήσουμε αδιάστατη γράφουμε στη θέση της $\lambda\mu^{4-n}$ όπου τώρα το λ είναι αδιάστατο και τις διαστάσεις τις ''κουβαλάει'' η παράμετρος μ με μονάδες μάζας. Ακριβώς, η ανάγκη να μην εξαρτάται το φυσικό αποτέλεσμα από την παράμετρο αυτή θα μας οδηγήσει στην Ομάδα Ανακανονικοποίησης (θυμηθείτε το a στην κατά Weirstrass περιγραφή της συνάρτησης Γάμμα).

Η ανακανονικοποιημένη συνάρτηση Green που περιγράφεται από ένα διάγραμμα με N εξωτερικά πόδια έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} G_R^{(N)}(x_1, x_2, ..., x_N) &= \langle 0 \left| T\left(\phi_R(x_1)\phi_R(x_2)...\phi_R(x_N)\right)\right| 0\rangle = \\ &= Z_\phi^{-N/2}\langle 0 \left| T\left(\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_N)\right)\right| 0\rangle = \\ &= Z_\phi^{-N/2} G^{(N)}(x_1, x_2, ..., x_N) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον επαναορισμό της κυματοσυνάρτησης

$$\phi = Z_\phi^{1/2}\phi_R$$

ακριβώς ανάλογα με την Εξ.3. Στο χώρο των ορμών θα γράφαμε

$$G_R^{(N)}(p_1, p_2, ..., p_N) = Z_\phi^{-N/2} G^{(N)}(p_1, p_2, ..., p_N)$$

Αν πάμε στις συναρτήσεις Green που περιγράφουν τα 1PI διαγράμματα χωρίς τους εξωτερικούς διαδότες (amputated) τότε θα πρέπει να γράφουμε

$$\Gamma_R^{(N)}(p_1, p_2, ..., p_N) = \frac{Z_\phi^{-N/2}}{Z_\phi^{-N}} \Gamma^{(N)}(p_1, p_2, ..., p_N) = Z_\phi^{N/2} \Gamma^{(N)}(p_1, p_2, ..., p_N)$$

Ο λόγος που διαιρούμε με τον παράγοντα Z_ϕ^{-N} είναι ότι αφαιρώντας N διαδότες και από τις δύο πλευρές της ισότητας, αφαιρούμε από αριστερά $2N$ πεδία ϕ_R και από δεξιά $2N$ πεδία ϕ. Αλλά ισχύει η σχέση $\phi = Z_\phi^{1/2} \phi_R$. Ας δούμε αναλυτικότερα τις εξαρτήσεις των συναρτήσεων Γ. Η (μη ανακανονικοποιημένη) Γ θα εξαρτάται από

$$\Gamma^{(N)}(p, \lambda, m)$$

όπου p περιγράφει το σύνολο των ορμών $(p_1, p_2, ..., p_N)$. Η σταθερά ανακανονικοποίησης θα εξαρτάται από τη σταθερά σύζευξης και με παρουσία και της παραμέτρου μ μιας και είμαστε πια σε n διαστάσεις

$$Z_\phi(\lambda \mu^{4-n}, n)$$

και η ανακανονικοποιημένη συνάρτηση Green σε n διαστάσεις

$$\tilde{\Gamma}_R^{(R)}\left(p, \lambda_R(n, \lambda\mu^{4-n}), m Z_m^{-1}(n, \lambda\mu^{4-n}), \mu, n\right)$$

Ο όρος $m Z_m^{-1}$ δεν είναι παρά η m_R, ακριβώς ανάλογα με την Εξ.2. Ξαναγράφουμε λοιπόν

$$\tilde{\Gamma}_R^{(N)}\left(p, \lambda_R(n, \lambda\mu^{4-n}), m Z_m^{-1}(n, \lambda\mu^{4-n}), \mu, n\right) = Z_\phi^{N/2}(\lambda\mu^{4-n}, n) \Gamma^{(N)}(p, \lambda, m)$$

Την ανακανονικοποιημένη συνάρτηση Green σε 4 διαστάσεις την παίρνουμε

$$\Gamma_R^{(N)} = \lim_{n \to 4} \tilde{\Gamma}_R^{(N)}$$

Το ότι τα φυσικά μεγέθη δεν μπορούν να εξαρτώνται από το μ μας οδηγεί στο μηδενισμό της παραγώγου ως προς μ της $\tilde{\Gamma}_R^{(N)}$

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\Gamma}_R^{(N)} &= \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \mu m \frac{\partial Z_m^{-1}}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_R} \right) \tilde{\Gamma}_R^{(N)} = \\
&= \frac{N}{2} Z^{N/2-1} \mu \frac{\partial Z_\phi}{\partial \mu} \Gamma^{(N)}(p, \lambda, m) \\
&= \frac{N}{2} \mu \frac{\partial Z_\phi}{\partial \mu} \frac{1}{Z} \tilde{\Gamma}_R^{(N)}
\end{aligned}$$

και πηγαίνοντας όλα στο αριστερό μέλος παίρνουμε

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial\lambda_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda_R}+\mu m\frac{\partial Z_m^{-1}}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_R}-\frac{N}{2}\mu\frac{\partial Z_\phi}{\partial\mu}\frac{1}{Z_\phi}\right)\tilde{\Gamma}_R^{(N)}=0\rightarrow$$
$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(\lambda_R)\frac{\partial}{\partial\lambda_R}-\mu m\frac{1}{Z_m^{-2}}\frac{\partial Z_m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_R}-\frac{N}{2}\tilde{\gamma}(\lambda_R)\right)\tilde{\Gamma}_R^{(N)}=0$$
$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(\lambda_R)\frac{\partial}{\partial\lambda_R}-m_R\tilde{\gamma}_m(\lambda_R)\frac{\partial}{\partial m_R}-\frac{N}{2}\tilde{\gamma}(\lambda_R)\right)\tilde{\Gamma}_R^{(N)}=0$$

όπου ορίσαμε

$$\tilde{\beta}(\lambda_R)=\mu\frac{\partial\lambda_R}{\partial\mu},\quad \tilde{\gamma}_m(\lambda_R)=\mu\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\mu},\quad \tilde{\gamma}(\lambda_R)=\mu\frac{\partial\ln Z_\phi}{\partial\mu}$$

Πηγαίνοντας στις 4 διαστάσεις παίρνουμε τις αντίστοιχες ποσότητες $\beta(\lambda_R)$, $\gamma_m(\lambda_R)$ και $\gamma(\lambda_R)$ που είναι όλες πεπερασμένες. Είναι η συνάρηση β, η συνάρτηση γ_m της μάζας και η ανώμαλη διάσταση της κυματοσυνάρτησης γ.
Θέλουμε να δούμε τώρα πώς συμπεριφέρεται η $\Gamma_R^{(N)}$ όταν οι (εξωτερικές) ορμές γίνουν από p_i σε αp_i με α αδιάστατος αριθμός. Αν D_Γ είναι η διάσταση της $\Gamma_R^{(N)}$, τότε ο τελεστής

$$\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m_R\frac{\partial}{\partial m_R}$$

θα μας δώσει την διάσταση της $\Gamma_R^{(N)}$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m_R\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\Gamma_R^{(N)}=D_\Gamma\Gamma_R^{(N)}$$

Χρησιμοποιώντας το όρο $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma_R^{(N)}$ από την Εξ. θα πάρουμε

$$\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda_R}-\frac{N}{2}\gamma-m_R\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}+D_\Gamma\right)\Gamma_R^{(N)}=0$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση λύνεται και η λύση είναι

$$\Gamma_R^{(N)}(\alpha p,m_R,\lambda_R,\mu)=\alpha^{D_\Gamma}\exp\left[-\frac{N}{2}\int_1^\alpha\frac{d\alpha'}{\alpha'}\gamma(\bar{\lambda}_R(\alpha'))\right]\Gamma_R^{(N)}(p,\bar{m}_R,\bar{\lambda}_R,\mu) \tag{5}$$

όπου $\bar{m}_R$ και $\bar{\lambda}_R$ είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$\alpha\frac{\partial\bar{\lambda}_R(\alpha)}{\partial\alpha}=\beta(\bar{\lambda}_R(\alpha)),\quad \alpha\frac{\partial\bar{m}_R(\alpha)}{\partial\alpha}=\bar{m}_R(\alpha)\left(1+\gamma_m(\bar{\lambda}_R(\alpha))\right)$$

Οι $\bar{\lambda}_R(\alpha)$ και $\bar{m}_R(\alpha)$ είναι οι λεγόμενες ''τρέχουσες'' (running) λ και m_R. Η αγκύλη στην Εξ.5 σχετίζεται με την ανώμαλη διάσταση της συνάρτησης Γ, μιας και η κανονική διάσταση είναι η D_Γ. Προσέξτε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\exp\left[-\frac{N}{2}\int_1^\alpha \frac{d\alpha'}{\alpha'}\gamma(\bar{\lambda}_R(\alpha'))\right] = \alpha^{-N/2\int_1^\alpha \frac{d\alpha'}{\alpha'}\gamma(\bar{\lambda}_R(\alpha'))/\ln\alpha}$$

Ας δούμε λίγο καλύτερα τη συνάρτιση β. Ας θυμηθούμε ότι α είναι ο παράγοντας που μεγαλώνουμε την ενέργεια-ορμή $\alpha = E/E_0$. Αν ορίσουμε τη νέα παράμετρο $t = \ln\alpha$ θα πάρουμε

$$\alpha\frac{\partial\bar{\lambda}_R(\alpha)}{\partial\alpha} = \beta(\bar{\lambda}_R(\alpha)) \to \frac{\partial\bar{\lambda}_R(t)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda}_R(t))$$

Η λύση αυτής της διαφορικής θα μας δώσει την εξάρτηση της σταθεράς λ_R από την t με αρχική συνθήκη την τιμή της λ_R για μια αρχική t_0. Επιλέγοντας $t_0 = 0$, δηλαδή $\alpha = 1$, η αρχική τιμή της λ_R είναι η (πειραματικά μετρούμενη) τιμή στην ενέργεια E_0. Επομένως, η λύση $\lambda_R(t)$ μας δίνει την εξάρτηση της λ_R από την ενέργεια.

Εφαρμογή στη θεωρία ϕ^4

Ας εφαρμόσουμε τη συνταγή αυτή στη θεωρία μας. Γράφοντας στην διαστατική ομαλοποίηση

$$\begin{aligned}
\lambda\mu^{4-n} &= \lambda_R + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu(\lambda_R)}{(n-4)^\nu} \\
m^2 = Z_m m_R^2 &= m_R^2 + m_R^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(\lambda_R)}{(n-4)^\nu} \\
Z_\phi &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu(\lambda_R)}{(n-4)^\nu}
\end{aligned}$$

όπου a_ν, b_ν και c_ν είναι κατάλληλα ώστε να απαλείψουν τους πόλους που εμφανίζονται στα διαγράμμα Feynman (προσέξτε, ότι σε διαγράμματα με περισσότερους τους ενός βρόχου θα εμφανιστούν πόλοι ανώτερης τάξης), αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda_R) &= \left(a_1 - \lambda_R\frac{\partial a_1}{\partial\lambda_R}\right) \\
\gamma(\lambda_R) &= \lambda_R\frac{\partial c_1}{\partial\lambda_R} \\
\gamma_m(\lambda_R) &= \lambda_R\frac{\partial b_1}{\partial\lambda_R}
\end{aligned} \tag{6}$$

Ο υπολογισμός του Σ, Εξ.1, δίνει

$$\Sigma = \frac{1}{16\pi^2}\frac{\lambda}{n-4}m^2 + \lambda \times \text{πεπερασμένο τμήμα}$$

Επειδή, όπως ήδη το αναφέραμε, σε ένα βρόχο, το Σ δεν εξαρτάται από την εξωτερική ορμή, δεν υπάρχει ανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης και επομένως $c_1 = 0$. Για την ανακανονικοποίηση της μάζας θα έχουμε

$$m^2 = m_R^2 + \frac{m_R^2}{n-4}(-\frac{\lambda}{16\pi^2}) = m_R^2 + \frac{m_R^2}{n-4}(-\frac{\lambda_R}{16\pi^2})$$

οπότε, $b_1 = -\lambda_R/(16\pi^2)$. Ο υπολογισμός του Γ, Εξ.4, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{\mu^{4-n}\lambda_R^2}{16\pi^2}\frac{3}{n-4} + \lambda_R^2 \times \text{πεπερασμένο τμήμα}$$

Επομένως

$$\lambda = \mu^{4-n}\lambda_R\left(1 - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\right)$$

και επομένως, $a_1 = -3\lambda_R/(16\pi^2)$. Οπότε,

$$\beta(\lambda_R) = \frac{1}{16\pi^2}\left(-3\lambda_R^2 - \lambda_R\frac{\partial}{\partial\lambda_R}(-3\lambda_R^2)\right) = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2}$$

και

$$\gamma_m(\lambda_R) = \frac{1}{16\pi^2}\left(\lambda_R\frac{\partial}{\partial\lambda_R}(-\lambda_R)\right) = -\frac{\lambda_R}{16\pi^2}$$

Ας βρούμε την εξάρτηση της λ_R από την ενέργεια

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_R}{dt} = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2} &\rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda_R}\frac{d\lambda}{\lambda_R^2} = \frac{3}{16\pi^2}\int_0^t dt \\ -\frac{1}{\lambda_R} + \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3t}{16\pi^2} &\rightarrow \frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{3t}{16\pi^2} \\ \lambda_R &= \frac{\lambda_0}{1 - \frac{3\lambda_0}{16\pi^2}\ln(E/E_0)} \end{aligned} \tag{7}$$

όπου $\lambda_0 = \lambda(E_0)$.