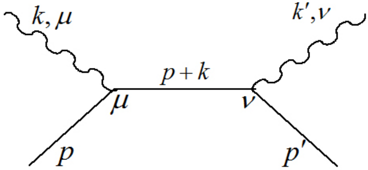
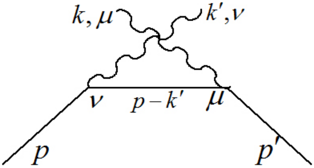
Άσκηση 38 Δείξτε ότι ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2-M^2}$$

Σκέδαση Compton $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά το αναλοίωτο πλάτος για την σκέδαση Compton. Ας προσπαθήσουμε να δούμε κάθε όρο του πλάτους αυτού. Για το εισερχόμενο φωτόνιο θα υπάρχει ο όρος: $\epsilon_\mu e^{-ikx}$ και για το εξερχόμενο: $\epsilon'^*_\nu e^{+ik'x}$, για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα και για το δεύτερο.





Για το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο: $e^{-ipx}u^{(s)}(p)$ και το εξερχόμενο: $e^{+ip'x}\bar{u}^{(s')}(p')$. Στο ενδιάμεσο ηλεκτρόνιο θα αντιστοιχήσουμε τον διαδότη: $i(\not{p}+\not{k}+m)/((p+k)^2-m^2)$ για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα για το άλλο. Οι δύο κορυφές θα είναι: $ie\gamma^{\mu}$ και $ie\gamma^{\nu}$. Όλα τα εκθετικά θα δώσουν την δέλτα συνάρτηση για την διατήρηση της ορμής-ενέργειας. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος για κάθε διάγραμμα θα είναι

$$-i\mathcal{M}_1 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^{\nu})\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(ie\gamma^{\mu})u^{(s)}(p)\right]\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^{\mu})\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}(ie\gamma^{\nu})u^{(s)}(p)\right]\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}$$

Προσέξτε ότι, όπως περιμέναμε, το άθροισμα $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ είναι αναλλοίωτο στην αλλαγή $(k,\epsilon)\leftrightarrow(-k',\epsilon'^{*})$. Ας δούμε πώς εμφανίζεται εδώ η αναλλοιώτητα βαθμίδας. Απαιτώντας την συνθήκη Lorentz, $\partial^{\mu}A_{\mu}=0$, γνωρίζουμε ότι η φυσική δεν αλλάζει με τον μετασχηματισμό $\epsilon_{\mu}\to\epsilon_{\mu}+ak_{\mu}$. Γράφοντας, λοιπόν, $\mathcal{M}=\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}T^{\mu\nu}$ θα πρέπει

$$\mathcal{M}=\epsilon_{\mu}\epsilon'^{*}_{\nu}T^{\mu\nu}=(\epsilon_{\mu}+ak_{\mu})(\epsilon'^{*}_{\nu}+ak'_{\nu})T^{\mu\nu}$$

οπότε έχουμε τις σχέσεις

$$k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Άσκηση 39 Δείξτε ότι το πράγματι ισχύει η σχέση $k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά.

Χρησιμοποιώντας ότι $(p+k)^2 = s$ και $(p-k')^2 = u$ και αγνοώντας την μάζα του ηλεκτρονίου, τα δύο πλάτη γίνονται

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s}\,\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu\, e^2\, \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu u^{(s)}(p)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{u}\,\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu\, e^2\, \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}')\gamma^\nu u^{(s)}(p)$$

θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2}$. Ας υπολογίσουμε πρώτα το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{s^2}\, e^4\, Tr\left[\not{p}\gamma^{\mu'}(\not{p}+\not{k})\gamma^{\nu'}\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\right]\epsilon_\mu\epsilon'^*_\nu\epsilon^*_{\mu'}\epsilon'_{\nu'}$$

Για τα φωτόνια έχουμε: $\epsilon_\mu\epsilon^*_{\mu'} = -g_{\mu\mu'}$ και $\epsilon'^*_\nu\epsilon'_{\nu'} = -g_{\nu\nu'}$ (βλ. το Παράρτημα) και το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2} &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2}\,e^4\,Tr\left[\not{p}\gamma_\mu(\not{p}+\not{k})\gamma_\nu\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2}\,e^4\,(-2)(-2)\,Tr\left[\not{p}(\not{p}+\not{k})\not{p}'(\not{p}+\not{k})\right] \\
&= \frac{1}{s^2}\,e^4\,Tr\left[\not{p}\not{k}\not{p}'(\not{p}+\not{k})\right] \\
&= \frac{1}{s^2}\,e^4\,Tr\left[\not{k}\not{p}'\not{k}\not{p}\right] = \frac{1}{s^2}\,e^4\,4\left[(kp')(kp)+(kp)(kp')\right] = \\
&= \frac{4e^4}{s^2}\,2\frac{s(-u)}{4} = -2e^4\frac{u}{s}
\end{aligned}
$$

όπου στην τρίτη και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\not{p}^2 = p^2 = 0$. Όμοια, το άλλο διάγραμμα δίνει

$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = -2e^4\frac{s}{u}$$

Άσκηση 40 Δείξτε ότι $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* = 0$

Επομένως,

$$\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2} = 2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}\right)$$

Σχέσεις πληρότητας για τα φωτόνια (Π)

Γνωρίζουμε ότι για φωτόνια ισχύει η σχέση πληρότητας (βλ. την Άσκηση 34)

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i} \epsilon_{\kappa_j} = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$$

Πώς θα γράψουμε τη σχέση αυτή με συναλλοίωτο τρόπο; Σε κάθε διαδικασία με εισερχόμενο φωτόνιο, το αναλλοίωτο πλάτος θα περιέχει την μορφή

$$\epsilon_\mu T^{\mu\ldots}_{\ldots}$$

όπου οι ... αντιστοιχούν σε δείκτες που είναι ‘‘αθροισμένοι’’ (το αναλλοίωτο πλάτος είναι αναλλοίωτο Lorentz!!).

Όταν πάμε στο τετράγωνο του πλάτους και αθροίσουμε στα διανύσματα πόλωσης θα πάρουμε

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} T^{\mu\cdots}_{\cdots} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} (T^{\mu'\cdots}_{\cdots})^{\dagger}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα πόλωσης ϵ_1 και ϵ_2, οπότε έχουμε θεωρήσει ότι η ορμή του φωτονίου μας είναι $\boldsymbol{q} = (0, 0, q)$ (λόγω της σχέσης $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$). Τώρα θα ''ανάγουμε'' τα διανύσματα αυτά σε τετραδιανύσματα. Για το φωτόνιο θα έχουμε $q^{\mu} = (q, 0, 0, q)$ μιας και πρέπει $q^{\mu} q_{\mu} = 0$. Λόγω της σχέσης $q^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0$, τα ϵ_1 και ϵ_2 θα γίνουν $\epsilon_1^{\mu} = (0, 1, 0, 0)$ και $\epsilon_2^{\mu} = (0, 0, 1, 0)$. Επομένως, το πλάτος θα γίνει

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} T^{\mu\cdots}_{\cdots} (T^{\mu'\cdots}_{\cdots})^{\dagger} &= T^{1\cdots}_{\cdots} (T^{1\cdots}_{\cdots})^{\dagger} + T^{2\cdots}_{\cdots} (T^{2\cdots}_{\cdots})^{\dagger} \\
&= T^{0\cdots}_{\cdots} (T^{0\cdots}_{\cdots})^{\dagger} - T^{3\cdots}_{\cdots} (T^{3\cdots}_{\cdots})^{\dagger} - T^{\nu\cdots}_{\cdots} (T^{\cdots}_{\nu\cdots})^{\dagger}
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί

$$T^{\nu\cdots}_{\cdots}(T^{\cdots}_{\nu\cdots})^\dagger = T^{0\cdots}_{\cdots}(T^{\cdots}_{0\cdots})^\dagger + T^{1\cdots}_{\cdots}(T^{\cdots}_{1\cdots})^\dagger + T^{2\cdots}_{\cdots}(T^{\cdots}_{2\cdots})^\dagger + T^{3\cdots}_{\cdots}(T^{\cdots}_{3\cdots})^\dagger =$$
$$= T^{0\cdots}_{\cdots}(T^{0\cdots}_{\cdots})^\dagger - T^{1\cdots}_{\cdots}(T^{1\cdots}_{\cdots})^\dagger - T^{2\cdots}_{\cdots}(T^{2\cdots}_{\cdots})^\dagger - T^{3\cdots}_{\cdots}(T^{3\cdots}_{\cdots})^\dagger$$

Επί πλέον, θα πρέπει $q_\mu T^{\nu\cdots}_{\cdots} = 0$. Επειδή το q^μ έχει τη συγκεκριμένη μορφή, $(q, 0, 0, q)$, θα πρέπει υποχρεωτικά

$$T^{0\cdots}_{\cdots} = T^{3\cdots}_{\cdots}$$

Επομένως, καταλήγουμε

$$\sum_\lambda \epsilon^{(\lambda)}_\mu \epsilon^{(\lambda)*}_{\mu'} T^{\mu\cdots}_{\cdots}(T^{\mu'\cdots}_{\cdots})^\dagger = -T^{\nu\cdots}_{\cdots}(T^{\cdots}_{\nu\cdots})^\dagger = -g_{\mu'\mu} T^{\mu\cdots}_{\cdots}(T^{\mu'\cdots}_{\cdots})^\dagger$$

δηλαδή

$$\sum_\lambda \epsilon^{(\lambda)}_\mu \epsilon^{(\lambda)*}_{\mu'} = -g_{\mu'\mu}$$