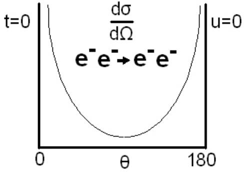
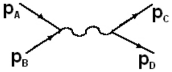


Ο διαδότης

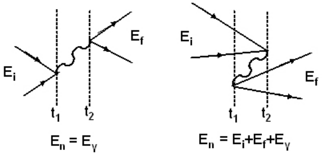
Έχουμε δει ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δεί ότι

$$T_{fi} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi \delta(E_f - E_i)$$



Πώς θα πάμε από το $1/(E_i - E_n)$ στο $1/(p_A + p_B)^2$. Ας θυμηθούμε ότι το διάγραμμα Feynman είναι το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων



Επομένως, το αναλλοίωτο πλάτος θα είναι

$$\mathcal{M} \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - (2E_i + E_\gamma)} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni}$$

Το $2E_\gamma$ σχετίζεται με τον νορμαλισμό. Η παραπάνω μέθοδος είναι η λεγόμενη ''παλαιά μέθοδος διαταραχών''. Σ' αυτήν η τρι-ορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά όχι η ενέργεια (πράγμα μη συναλλοίωτο). Τα σωματίδια είναι πάντα στο ''κέλυφος μάζας'' (mass shell), δηλαδή το τετράγωνο της τετρ-ορμής είναι ίσο με το τετράγωνο της μάζας.

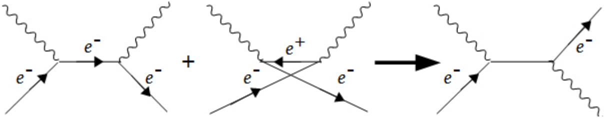
Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$E_i^2 = (p_A + p_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 \quad \text{και} \quad E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + \mathbf{p}_\gamma^2$$

όπου βάλαμε μια μάζα στο φωτόνιο για την περίπτωση που το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα. Επίσης $\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$. Οπότε, ο παρονομαστής της προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$E_i^2 - E_\gamma^2 = (p_A + p_B)^2 - m_\gamma^2 = q^2 - m_\gamma^2$$

που στην περίπτωση του άμαζου φωτόνιου γίνεται απλά q^2. Δηλαδή, αθροίζοντας τα δύο διαγράμματα παίρνουμε συναλλοίωτο αποτέλεσμα. Μπορούμε να δούμε το ίδιο γεγονός και στην σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο.



Αριστερά έχουμε το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων όπου η τριορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή και για το ενδιάμεσο σωματίδιο ισχύει $p^2 = m^2$. Αλλά η ενέργεια δεν διατηρείται σε κάθε κορυφή. Στο δεξιό διάγραμμα η τετρορμή (ορμή και ενέργεια) διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά $p^2 \neq m^2$.

... τα κουάρκ και τα λεπτόνια όμως έχουν spin $1/2$ και δεν περιγράφονται από την απλή κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί την Klein-Godon. Πρέπει να βρούμε μια εξίσωση με λύσεις που να μπορούν να περιγράφουν το spin των σωματιδίων και αντισωματιδίων.
Ο Dirac προσπάθησε να γράψει μια εξίσωση γραμμική ως προς το $\partial/\partial t$, επομένως γραμμική και ως προς $\boldsymbol{\nabla}$ (συναλλοιώτητα).
Η πιο γενική μορφή είναι

$$H\psi = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{P} + \beta m)\,\psi = 0$$

Οι παράμετροι $\mathbf{a}$ και β πρέπει να είναι κατάλληλοι ώστε για το ελεύθερο σωματίδιο να πληρούται η σχέση

$$H^2\psi = \left(P^2 + m^2\right)\psi$$

Βέβαια, η αρχική προσπάθεια του Dirac ήταν να αποφύγει την αρνητική πυκνότητα πιθανότητας. Αλλά αυτό για μας δεν είναι πλέον πρόβλημα. Αντίθετα, έχουμε το κέρδος περιγραφής των αντισωματιδίων. Έχουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
&H^2\psi = (a_iP_i + \beta m)(a_jP_j + \beta m)\psi = \\
&= \left((a_iP_i)(a_jP_j) + \beta^2 m^2 + (a_iP_i)\beta m + \beta(a_jP_j)m\right)\psi = \\
&= \left(a_i^2 p_i^2 + (\underbrace{a_ia_j + a_ja_i}_{i \neq j})P_iP_j + \beta^2 m^2 + (a_iP_i)\beta m + \beta(a_jP_j)m\right)\psi
\end{aligned}
$$

Επομένως, θα πρέπει

$$
\begin{aligned}
&a_i^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i\beta + \beta a_i = 0 \quad \text{για } i = 1, 2, 3 \\
&\beta^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_ia_j + a_ja_i = 0 \quad \text{για } i \neq j
\end{aligned}
$$

Τα a_i και β δεν μπορεί να είναι απλοί αριθμοί. Θα πρέπει να πάμε σε πίνακες που δρουν στην κυματοσυνάρτηση ψ που γίνεται πια διάνυσμα με συνιστώσες.

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1.

Η ελάχιστη διάσταση, λοιπόν, είναι 4. Η περίπτωση 2 διαστάσεων πρέπει να απορριφθεί διότι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μόνο 3 ανεξάρτητοι 2×2 πίνακες (του Pauli) ενώ εμείς χρειαζόμαστε 4 πίνακες. Μια άπο τις δυνατές αναπαραστάσεις των a_i και β είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Pauli-Dirac (όπου $\boldsymbol{\sigma}$ οι πίνακες του Pauli)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \text{όπου}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μια άλλη αναπαράσταση είναι αυτή του Weyl

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια, η επιλογή των a_i και β δεν είναι μοναδική. Θυμίζοντας ότι ένας μοναδιακός μετασχηματισμός διατηρεί τις αντιμεταθετικές ιδιότητες, έπεται ότι οι μετασχηματισμοί

$$a_i' = U a_i U^{-1}, \quad \beta' = U \beta U^{-1}$$

όπου U ένας μοναδιακός πίνακας 4×4, δίνει μια νέα αναπαράσταση των a_i και β. Φυσικά, όλα τα μετρήσιμα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από την αναπαράσταση. Το διάνυσμα ψ έχει τέσσερις συνιστώσες και ονομάζεται spinor του Dirac.

Συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Πίνακες γ

Από την $H\psi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \beta m)\psi$ παίρνουμε, πολλαπλασιάζοντας επί β,

$$\beta i \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\beta \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta^2 m\right)\psi \to \left(\beta i \frac{\partial}{\partial t} + i\beta \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\psi = \beta^2 m\psi \to$$

$$(\beta, \beta \mathbf{a})\left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\boldsymbol{\nabla}\right)\psi = m\psi \to \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

όπου ορίσαμε $\gamma^\mu = (\beta, \beta\mathbf{a})$ τους πίνακες γ. Αυτή είναι η συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Αντιστοιχεί σε τέσσερις διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_k \left(i\left(\gamma^\mu\right)_{jk}\partial_\mu - m\delta_{jk}\right)\psi_k = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των $\mathbf{a}$ και β πινάκων, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I$$

και επίσης τις σχέσεις

$$\gamma^0 = \beta \to \left(\gamma^0\right)^2 = 1, \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$
$$\gamma^{k\dagger} = (\beta a^k)^\dagger = a^k\beta = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = \beta a^k \beta a^k = -1, \quad k = 1,2,3$$

ή, πιο γενικά $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

Διατηρήσιμο ρεύμα και η συζυγής εξίσωση Dirac

Η ερμητιανή συζυγής της εξίσωση Dirac
$(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^k\partial_k - m)\psi = 0$ είναι

$$-i(\partial_t\psi^\dagger)\gamma^{0\dagger} - i(\partial_k\psi^\dagger)\gamma^{k\dagger} - m\psi^\dagger = 0$$
$$-i(\partial_t\psi^\dagger)\gamma^0 + i(\partial_k\psi^\dagger)\gamma^k - m\psi^\dagger = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με γ^0 και χρησιμοποιώντας ότι
$\gamma_0\gamma_k = -\gamma_k\gamma_0$

$$-i\partial_t(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^0 - i\partial_k(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^k - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0$$
$$i\partial_t\bar{\psi}\gamma^0 + i\partial_k\bar{\psi}\gamma^k + m\bar{\psi} = 0 \to i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

όπου ορίσαμε $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ που είναι ένας spinor γραμμή.
Τώρα χρησιμοποιώντας την $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$ επί $(\bar{\psi}\cdot)$
και την $i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$ επί $(\cdot\psi)$
και αθροίζοντας παίρνουμε

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \to \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

Επομένως, ορίζουμε το ρεύμα πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ και βέβαια τώρα

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{4}|\psi_i|^2 \geq 0$$

δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας στον Dirac είναι θετική (στην εξίσωση Klein-Gordon ήταν ανάλογη της ενέργειας).

Χρησιμοποιώντας την Pauli-Weiskopf περιγραφή, το j^μ γίνεται πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Το γ^μ είναι τετραδιάνυσμα με την έννοια ότι το j^μ είναι τετραδιάνυσμα.

Spinor ελεύθερου σωματιδίου

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon.

Ψάχνουμε για λύσεις ελεύθερων σωματιδίων (ιδιοσυναρτήσεις της ορμής) της μορφής

$$\psi = u(p)e^{-ip^\mu x_\mu}$$

με $u(p)$ ένας spinor με 4 συνιστώσες. Χρησιμοποιώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση Dirac (το $u(p)$ δεν εξαρτάται από το x^μ)

$$i\gamma^\nu\partial_\nu\psi - m\psi = 0 \rightarrow i\gamma^\nu u(p)(-ip_\nu)e^{-ip^\mu x_\mu} - mu(p)e^{-ip^\mu x_\mu} = 0$$

$$(\gamma^\nu p_\nu - m)u(p) = 0 \rightarrow (\not{p} - m)u(p) = 0$$

χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\gamma^\mu u_\mu = \not{u}$, με u_μ τετραδιάνυσμα. Μιας και ψάχνουμε για ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας πάμε στην αρχική εξίσωση

$$Hu = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu$$

Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις για $\mathbf{p} = 0$. Οπότε

$$Hu = m\beta u = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u$$

με ιδιοτιμές $E = m, m, -m, -m$ και ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις, με $E > 0$, περιγράφουν ηλεκτρόνιο ενώ οι δύο άλλες, με $E < 0$ το ποζιτρόνιο. Για $\mathbf{p} \neq 0$ έχουμε

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

όπου χωρίσαμε το u σε 2 spinor με 2 συνιστώσες το καθένα. Οπότε

$$\left. \begin{array}{r} mu_A + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = Eu_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A - mu_B = Eu_B \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = (E - m) u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A = (E + m) u_B \end{array}$$

Για $E > 0$ επιλέγουμε τη μορφή του u_A, για παράδειγμα

$$u_A = \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ή γραμμικό συνδυασμό τους) και το u_B το παίρνουμε από την δεύτερη εξίσωση

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)}, \quad s = 1, 2$$

Επομένως, για $E > 0$, έχουμε (με N σταθερά νορμαλισμού)

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

Αντίστοιχα, για $E < 0$, επιλέγουμε $u_B = \chi^{(s)}$ και τότε παίρνοντας το u_A από την πρώτη εξίσωση

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$