Φωτόνια - Διάνυσμα πόλωσης

Γνωρίζουμε ήδη ότι οι νόμοι του Maxwell γράφονται με συναλλοίωτο τρόπο

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu$$

ή ακόμα, ορίζοντας τον τανυστή του πεδίου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, μπορούμε να γράψουμε

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Η διατήρηση του ρεύματος j^ν είναι ενσωματωμένη στη μορφή αυτή: $\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Τα πεδία **E** και **B** παραμένουν αναλοίωτα στον μετασχηματισμό $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$ όπου χ τυχαία συνάρτηση. Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση χ μπορούμε να επιτύχουμε $\partial_\nu A^\nu = 0$ (συνθήκη Lorentz), οπότε

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu \to \Box^2 A^\mu = j^\mu$$

Ακόμα και σ' αυτήν την περίπτωση, παραμένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής της χ, αρκεί βέβαια $\Box^2\chi = 0$. Δηλαδή, μένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής του $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ με $\Box^2\Lambda = 0$.
Η κυματοσυνάρτηση του ελεύθερου φωτονίου ικανοποιεί την $\Box^2 A^\mu = 0$ με λύση $A^\mu = \epsilon^\mu(\mathbf{q})e^{-iqx}$, με $q^2 = 0$ $(m_\gamma = 0)$. Το $\epsilon^\mu(\mathbf{q})$ είναι το διάνυσμα πόλωσης, το οποίο έχει, βέβαια, 4 συνιστώσες. Αλλά, η σχέση $\partial_\mu A^\mu = 0$ μας υποχρεώνει $q^\mu\epsilon_\mu = 0$, οπότε έχουμε μειώσει σε τρεις τις ανεξάρτητες συνιστώσες. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχουμε ακόμα μια ελευθερία για το $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ με $\Box^2\Lambda = 0$. Αν επιλέξουμε $\Lambda = iae^{-iqx}$, οπότε $\Box^2\Lambda = -iq^2ae^{-iqx} = 0$, τότε $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda = A^\mu + aq^\mu e^{-iqx}$ που αντιστοιχεί στην αλλαγή $\epsilon^\mu \to \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + aq^\mu$. Δηλαδή, τα ϵ^μ και ϵ'^μ είναι ισοδύναμα, περιγράφουν το ίδιο φωτόνιο. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο a ώστε να έχουμε $\epsilon^0 = 0$. Και η σχέση $\epsilon^\mu q_\mu = 0$ γίνεται $\epsilon \cdot \mathbf{q} = 0$ (βαθμίδα Coulomb).

Τελικά, λοιπόν, έχουμε μόνο δύο ανεξάρτητες συνιστώσες (spin=1 με μηδενική μάζα), π.χ. $\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)$ και $\boldsymbol{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)$, θεωρώντας ότι $\mathbf{q} = (0, 0, q)$. Τα $\mathbf{q}$ και ϵ^μ περιγράφουν πλήρως το φωτόνιο.

Άσκηση 33 Δείξτε πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$

σε μια στροφή με γωνία θ γύρω από τον άξονα z. Τα διανύσματα αυτά ονόμαζονται διανύσματα κυκλικής πόλωσης και το δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα.

Άσκηση 34 Δείξτε ότι στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_i (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\epsilon_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_1 + i\epsilon_2\right), \quad \epsilon_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_1 - i\epsilon_2\right)$$

$$\epsilon_1 = (1,0,0), \quad \epsilon_2 = (0,1,0)$$

Διανύσματα πόλωσης για spin=1 και M $\neq$ 0

Στο σύστημα ηρεμίας έχουμε 3 δυνατές καταστάσεις για spin=1. Για παράδειγμα, μπορούν να περιγραφούν από τα τρία διανύσματα $\epsilon_1 = (1,0,0)$, $\epsilon_2 = (0,1,0)$ και $\epsilon_3 = (0,0,1)$, και βέβαια ισχύει $\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \delta_{ij}$. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τα διανύσματα

$$\epsilon_{\lambda=1} = -\sqrt{1/2}(1,i,0) = -\sqrt{1/2}(\epsilon_1 + i\epsilon_2)$$

$$\epsilon_{\lambda=0} = (0,0,1) = \epsilon_3$$

$$\epsilon_{\lambda=-1} = \sqrt{1/2}(1,-i,0) = \sqrt{1/2}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$

με $\epsilon^*_\lambda \cdot \epsilon_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$. Ας φτιάξουμε τώρα τετραδιανύσματα. Στο σύστημα ηρεμίας μπορώ να διαλέξω $\epsilon^\mu_\lambda = (0, \epsilon_\lambda)$. Σ' αυτό το σύστημα βέβαια, η ορμή είναι $p^\mu = (M,0,0,0)$ και ισχύει $p_\mu \epsilon^\mu = 0$.

Η τελευταία είναι μια αναλλοίωτη συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς. Τώρα θα πρέπει να βρούμε το αντίστοιχο διάνυσμα πόλωσης όταν πάμε από $(M, 0, 0, 0) \to (E, 0, 0, p)$. Η ταχύτητα του νέου συστήματος είναι $(0, 0, -p/E)$ και το διάνυσμα πόλωσης $(0, \epsilon_{\lambda=0})$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
0 &\to \frac{0 - (-v)}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{p/E}{\sqrt{1 - p^2/E^2}} = \frac{p}{M} \\
1 &\to \frac{1 - (-v)0}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{E}{M}
\end{aligned}
$$

Άρα, $\epsilon^{\mu}_{\lambda=0} = (0, 0, 0, 1) \to \frac{1}{M}(p, 0, 0, E)$ και βέβαια ισχύει $(E, 0, 0, p) \cdot \frac{1}{M}(p, 0, 0E) = 0$. Τα διανύσματα για $\lambda = \pm 1$ δεν αλλάζουν μιας και το σύστημα μας κινείται στον άξονα των z. Την σχέση $p^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0$ μπορούμε να τη δούμε και από άλλη πλευρά. Γενικεύοντας την εξίσωση για το φωτόνιο, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$
\Box^2 A_{\mu} - \partial_{\mu}(\partial_{\nu} A^{\nu}) = 0 \to \left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\right] A^{\nu} = 0
$$

και εισάγοντας μάζα M

$$\left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + M^2\right) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = 0 \tag{21}$$

Παραγωγίζοντας ως προς ∂^μ

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + M^2\right) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu &= 0 \\ \left[\partial_\nu\left(\Box^2 + M^2\right) - \Box^2\partial_\nu\right] A^\nu &= 0 \\ \partial_\nu A^\nu &= 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή, η συνθήκη Lorentz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, για τα φωτόνια ($M = 0$), είναι ταυτότητα για $M \neq 0$. Και βέβαια η σχέση $p^\mu \epsilon_\mu = 0$ έπεται άμεσα ($A^\mu = \epsilon^\mu e^{-ip\cdot x}$).

Άσκηση 35 Δείξτε ότι η σχέση πληρότητας για τα spin=1 με μάζα

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \tag{22}$$

Ο διαδότης του ηλεκτρονίου

Από την μη σχετικιστική θεωρία είχαμε δει

$$T_{fi} = -2\pi i\delta(E_f - E_i)\Big[< f|V|i > + \sum_{n\neq i} < f|V|n > \frac{1}{E_i - E_n} < n|V|i > + ...\Big]$$

όπου $H_0|n >= E_n|n >$. Φορμαλιστικά μπορούμε να γράψουμε

$$T_{fi} = 2\pi\delta(E_f - E_i) < f|(-iV) + (-iV)\frac{i}{E_i - H_0}(-iV) + ...|i >$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\sum_{n\neq i}|n >< n| = 1$. Η επιλογή του $-iV$, αντί του V, γίνεται από την παρουσία του V στην εξίσωση του Schroedinger, $i\partial\Psi/dt = V\Psi$, που δίνει και την χρονική εξάρτηση $\exp(-iVt)$ στην ''εικόνα αλληλεπίδρασης'' (interaction picture). Οπότε, αντιστοιχούμε **κορυφή**$\to (-iV)$ και **διαδότης**$\to \frac{i}{E_i - H_0}$.

Αν γράψουμε την εξίσωση Schrödinger

$$(H_0 + V)\Psi = E\Psi \rightarrow (H_0 - E)\Psi = -V\Psi \rightarrow i(H_0 - E)\Psi = -iV\Psi$$

βλέπουμε ότι ο διαδότης ''είναι'' το αντίστροφο του τελεστή στο αριστερό σκέλος της τελευταίας ισότητας

$$\frac{1}{i(H_0 - E)} = \frac{i}{E - H_0}$$

Ο διαδότης του βαθμωτού σωματιδίου

Στο βαθμωτό πεδίο, η Klein-Gordon γράφεται

$$(\Box^2 + m^2)\phi = -V\phi \rightarrow i(\Box^2 + m^2)\phi = -iV\phi$$

και, με τον παραπάνω κανόνα, ο διαδότης τους βαθμωτού πεδίου είναι

$$\frac{1}{i(\Box^2 + m^2)} = \frac{-i}{-p^2 + m^2} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Ο διαδότης του σωματιδίου Dirac

Για το ηλεκτρόνιο θα έχουμε ανάλογα

$$(\not{p} - m)\psi = \gamma^0 V\psi \rightarrow -i(\not{p} - m)\psi = -i\gamma^0 V\psi$$

όπου $\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu$. Και ο διαδότης του ηλεκτρονίου είναι

$$\frac{1}{-i(\not{p} - m)} = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

Θυμηθείτε ότι $\not{p} + m = \sum u^{(s)} \bar{u}^{(s)}$. Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που θα τον δούμε ξανά στο διαδότη του φωτονίου.

Ο διαδότης του φωτονίου

Η εξίσωση που πληρεί το φωτόνιο είναι

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu \partial_\nu\right] A^\nu = j^\mu \tag{23}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι έχουμε μια ελευθερία επιλογής του πεδίο: $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$. Αν δεν ''αφαιρέσουμε'' αυτήν την ελευθερία δεν θα καταφέρουμε να βρούμε τον αντίστροφο του τελεστή.

Άσκηση 36 Δείξτε ότι δεν μπορείτε να ορίσετε τον αντίστροφο του $g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu \partial_\nu$

Μόλις όμως επιλέξουμε την βαθμίδα Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$, η εξίσωση γίνεται $g^{\mu\nu}\Box^2 A_\nu = j^\mu$, και μιας και $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$, βλέπουμε άμεσα ότι το αντίστροφο του $-ig_{\mu\nu}\Box^2$ είναι

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Αυτός είναι ο διαδότης του Feynman (ή στη βαθμίδα Feynman).

Άσκηση 37 Η συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$ αφήνει ακόμα μια ελευθερία επιλογής του A^μ: $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ όπου $\Box^2 \Lambda = 0$. Οπότε, η Εξ.(23) μπορεί να γραφεί

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu \partial_\nu\right] A^\nu = j^\mu$$

και τότε ο αντίστροφος του τελεστή είναι

$$\frac{i}{q^2}\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]$$

Για $\xi = 1$ πηγαίνουμε στον διαδότη Feynman. Στην QED ο δεύτερος όρος μηδενίζεται στους υπολογισμούς μιας και το δυνητικό φωτόνιο αλληλεπιδρά με διατηρούμενο ρεύμα j^μ για το οποίο ισχύει $q_\mu j^\mu = 0$.

Ο διαδότης διανυσματικού, spin=1, με μάζα

Όπως είχαμε αναφέρει, Εξ.(21), η εξίσωση που πληροί ένα ελεύθερο διανυσματικό σωματίδιο με μάζα είναι

$$\left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + m^2\right) - \partial_\mu \partial_\nu\right] A^\nu = 0$$

Το αντίστροφο του τελεστή (επι i) είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2 - M^2}$$

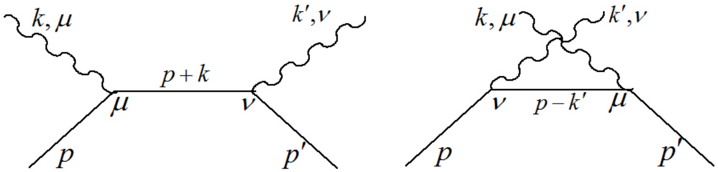
οπότε αυτός είναι και ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα. Προσέξτε ότι ο αριθμητής είναι η σχέση πληρότητας Εξ.(22)

Άσκηση 38 Δείξτε ότι ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2-M^2}$$

Σκέδαση Compton $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά το αναλοίωτο πλάτος για την σκέδαση Compton. Ας προσπαθήσουμε να δούμε κάθε όρο του πλάτους αυτού. Για το εισερχόμενο φωτόνιο θα υπάρχει ο όρος: $\epsilon_\mu e^{-ikx}$ και για το εξερχόμενο: $\epsilon_\nu'^{*} e^{+ik'x}$, για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα και για το δεύτερο.



Άσκηση 34 Δείξτε ότι για άμαζα σωματιδια με spin=1 στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_i (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$$

(Π)

Λύση

Φαίνεται εύκολα ότι

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_i (\epsilon_\lambda)_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i} \epsilon_{\kappa_j}$$

Αυτός ο τελεστής, που έχει δύο δείκτες, i, j, θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυσμός των δύο τελεστών που μπορούμε να φτιάξουμε: δ_{ij} και $q_i q_j$

$$\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j} = A\delta_{ij} + Bq_iq_j$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\sum_i \epsilon_{\xi_i}$, $\xi = 1, 2$, και γνωρίζοντας ότι $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q} = \sum_i \epsilon_{\kappa_i} q_i = 0$ και $\boldsymbol{\epsilon}_\xi \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\kappa = \sum_i \epsilon_{\xi_i}\epsilon_{\kappa_i} = \delta_{\xi\kappa}$ έχουμε

$$\sum_i \epsilon_{\xi_i} \left[\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j}\right] = A\sum_i \epsilon_{\xi_i}\delta_{ij} + B\sum_i \epsilon_{\xi_i} q_iq_j$$

$$\sum_{\kappa=1,2} \delta_{\xi\kappa}\epsilon_{\kappa_j} = A\epsilon_{\xi_j} \to \epsilon_{\xi_j} = A\epsilon_{\xi_j}$$

Άρα, $A = 1$. Τώρα πολλαπλασιάζουμε, την αρχική σχέση, επί δ_{ij}

$$\delta_{ij}\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_j} = \delta_{ij}\delta_{ji} + B\delta_{ij}q_iq_j$$

$$\sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i}\epsilon_{\kappa_i} = 3 + B\mathbf{q}^2 \to 1 + 1 = 3 + B\mathbf{q}^2$$

Άρα $B = -1/\mathbf{q}^2$, και $-q_iq_j/\mathbf{q}^2 = -\hat{q}_i\hat{q}_j$

Επομένως, έχουμε

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa_i} \epsilon_{\kappa_j} = A\delta_{ij} + Bq_i q_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

Άσκηση 36 Δείξτε ότι δεν μπορείτε να ορίσετε τον αντίστροφο του $g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu$
(Π)
Λύση
Ο αντίστροφος του $-g_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu$ θα είναι της μορφής $Ag^{\nu\lambda} + Bp^\nu p^\lambda$ και θα πρέπει

$$\left[-g_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu\right]\left[Ag^{\nu\lambda} + Bp^\nu p^\lambda\right] = g_\mu^\lambda$$

Κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} -Ap^2 g_\mu^\lambda - Bp^2 p_\mu p^\lambda + Ap_\mu p^\lambda + Bp^2 p_\mu p^\lambda &= g_\mu^\lambda \\ A(-p^2 g_\mu^\lambda + p_\mu p^\lambda) &= g_\mu^\lambda \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε τα A και B.