Οπότε παίρνουμε

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Διατήρηση της ελικότητας σε μεγάλες ενέργειες
Έχουμε ήδη δει ότι για $E >> m$ ισχύει

$$P_L u = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u \equiv u_L \quad \text{με αρνητική ελικότητα } \lambda = -1/2$$
$$P_R u = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u \equiv u_R \quad \text{με θετική ελικότητα } \lambda = +1/2$$

Ας το δούμε αυτό καλύτερα πηγαίνοντας στην γνωστή μορφή των λύσεων του Dirac για θετικές ενέργειες

$$u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αυτή η επιλογή του $\chi^{(s)}$ αντιστοιχεί στην ορμή $(0,0,p)$ και ότι το $u^{(1)}$ έχει θετική ελικότητα $(\lambda = +1/2)$, ενώ το $u^{(2)}$ έχει αρνητική ελικότητα $(\lambda = -1/2)$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3\chi^{(s)} \\ \frac{p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

μιας και $\sigma_3\chi^{(1)} = \chi^{(1)}$ και $\sigma_3\chi^{(2)} = -\chi^{(2)}$ Όμοια, το $u^{(3)}(-\mathbf{p}) = v^{(2)}(\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα $(\lambda = +1/2)$, ενώ το $u^{(4)}(-\mathbf{p}) = v^{(1)}(\mathbf{p})$ έχει αρνητική ελικότητα $(\lambda = -1/2)$.
Για υψηλές ενέργειες, $E + m \sim E$ και $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \sim \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E} = \frac{\sigma_3 p}{E} = \sigma_3$.
Και τα $u^{(1,2)}$ γίνονται

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ομοια, οι αρνητικής ενέργειας λύσεις

$$u^{(3,4)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \acute{\eta} \quad u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

γράφονται

$$u^{(3)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad u^{(4)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Είχαμε, επίσης, δει ότι για υψηλές ενέργειες ο τελεστής της ελικότητας $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ και ο τελεστής της χειραλικότητας γ^5 έχουν την ίδια δράση: $\gamma^5 \sim \boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$, δηλαδή $\gamma^5 = \mathrm{diag}(\sigma_3, \sigma_3)$. Οπότε

$$P_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_3 \end{pmatrix}$$
$$P_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1-\sigma_3 \end{pmatrix}$$

Η δράση του $\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)$ στα $\chi^{(s)}$ είναι

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(1-\sigma_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{1}{2}(1-\sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$P_R u^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = u^{(1)}$$

ενώ $P_R u^{(2)} = 0$. Άρα, το P_R προβάλλει το $u^{(1)}$, πού έχει θετική ελικότητα ($\lambda = +1/2$). Όμοια, ο P_L προβάλλει το $u^{(2)}$ πού έχει αρνητική ελικότητα ($\lambda = -1/2$). Αν εφαρμόσουμε τους P_{LR} στους $u^{(3,4)}(-\mathbf{p})$, θα δούμε ότι $P_R u^{(3)}(-\mathbf{p}) = u^{(3)}(-\mathbf{p})$, $P_L u^{(3)}(-\mathbf{p}) = 0$, $P_L u^{(4)}(-\mathbf{p}) = u^{(4)}(-\mathbf{p})$ και $P_R u^{(4)}(-\mathbf{p}) = 0$. Επομένως, το $u^{(3)}(-\mathbf{p})$ είναι R και το $u^{(4)}(-\mathbf{p})$ είναι L. Αλλά, αυτά αντιστοιχούν σε ‘‘έλλειψη’’ ηλεκτρονίου με $-\mathbf{p}$, άρα το αντίστοιχο ποζιτρόνιο έχει αντίθετη χειραλικότητα: το $v^{(2)}(\mathbf{p}) = u^{(3)}(-\mathbf{p})$ είναι L και το $v^{(1)}(\mathbf{p}) = u^{(4)}(-\mathbf{p})$ είναι R.

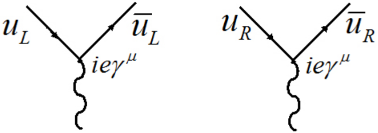
Συνοψίζουμε:

Σε μεγάλες ενέργειες
το $u^{(1)}(\mathbf{p})$ *έχει* $\lambda = +1/2$ *και είναι* R,
το $u^{(2)}(\mathbf{p})$ *έχει* $\lambda = -1/2$ *και είναι* L,
το $v^{(2)}(\mathbf{p})$, *έχει* $\lambda = +1/2$ *και είναι* L,
το $v^{(1)}(\mathbf{p})$, *έχει* $\lambda = -1/2$ *και είναι* R,

Γράφοντας το ρεύμα $\bar{u}\gamma^\mu u$ ως

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}(P_L + P_R)\gamma^\mu(P_L + P_R)u = \bar{u}P_L\gamma^\mu P_R u + \bar{u}P_R\gamma^\mu P_L u =$$
$$= u^\dagger\gamma^0 P_L\gamma^\mu u_R + u^\dagger\gamma^0 P_R\gamma^\mu u_L = u^\dagger P_R\gamma^0\gamma^\mu u_R + u^\dagger P_L\gamma^0\gamma^\mu u_L =$$
$$= (P_R u)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u_R + (P_L u)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u_L = \overline{u_R}\gamma^\mu u_R + \overline{u_L}\gamma^\mu u_L$$

$(P_L P_R = P_R P_L = 0,\ \gamma^{5^2} = 1,\ \gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu)$ παρατηρούμε ότι η ηλεκτροδυναμική διατηρεί την χειραλικότητα (L, R), και για μεγάλες ενέργειες ($E >> m$), και την ελικότητα. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση που έχουμε ψευδοδιάνυσμα ($\gamma^\mu\gamma^5$) αντί διάνυσμα (γ^μ) στην αλληλεπίδραση.



Στην εξαΰλωση και την δίδυμη γένεση, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο έχουν αντίθετη χειραλικότητα (και επομένως, σε μεγάλες ενέργειες αντίθετη ελικότητα).

$$\overline{u^{(3,4)}(-\mathbf{p})}P_R\gamma^\mu P_L u^{(1,2)} =$$

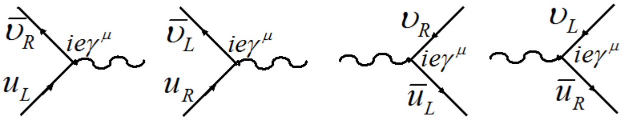
$$u^{(3,4)}(-\mathbf{p})^\dagger\gamma^0 P_R\gamma^\mu u_L^{(2)} = \left(P_L u^{(3,4)}(-\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu u_L^{(2)} =$$

$$\left(u_L^{(4)}(-\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu u_L^{(2)} = \left(v_R^{(1)}(\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu u_L^{(2)} = \overline{v_R^{(1)}(\mathbf{p})}\gamma^\mu u_L^{(2)}$$

και όμοια

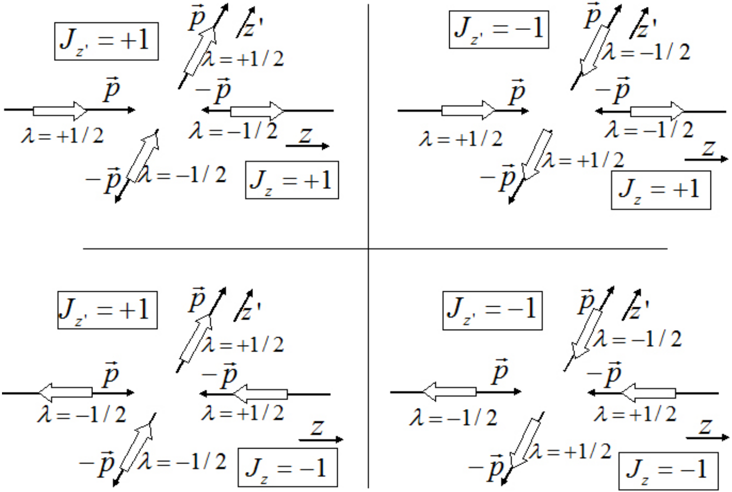
$$\overline{u^{(3,4)}(-\mathbf{p})}P_L\gamma^\mu P_R u^{(1,2)} = \overline{v_L^{(2)}(\mathbf{p})}\gamma^\mu u_R^{(1)}$$

Αντίστοιχα ισχύει και για την δίδυμη γένεση.



Άσκηση 30 Δείξτε ότι στην διάσπαση $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ το e είναι L. Στην $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$, ποια είναι η χειραλικότητα του e;

Μπορούμε μόνο με την διατήρηση της ελικότητας να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Όπως είδαμε, για μεγάλες ενέργειες, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο (στην αρχική κατάσταση) όπως και το μιόνιο και το αντιμιόνιο (στη τελική κατάσταση) θα πρέπει να έχουν αντίθετη ελικότητα. Επομένως, στο Κέντρο Μάζας, θά εχουμε τις τέσσερεις παρακάτω περιπτώσεις, όπου με παχιά βέλη δείχνουμε το spin και σημειώνεται και η αντίστοιχη ελικότητα.


$J_{z'} = +1$
$\vec{p}$
z'
$\lambda = +1/2$
$-\vec{p}$
$\lambda = -1/2$
z
$J_z = +1$
$J_{z'} = -1$
$\lambda = -1/2$
$\lambda = +1/2$
$J_{z'} = +1$
$\lambda = -1/2$
$\lambda = +1/2$
$J_z = -1$
$J_{z'} = -1$
$J_z = -1$

Από μια αρχική κατάσταση με στροφορμή $J_z = \pm 1$, το σύστημα πηγαίνει σε $J_{z'} = \pm 1$, μέσω μιας ενδιάμεσης κατάστασης, το φωτόνιο, με στροφορμή 1. Επομένως το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι ανάλογο του πίνακα στροφής

$$< j\lambda' | exp(-i\theta J_y) | j\lambda > \tag{17}$$

όπου y είναι ο άξονας κάθετος στο επίπεδο αλληλεπίδρασης και λ και λ' είναι η συνολική ελικότητα στους άξονες z και z'. Η αναπαράσταση του πίνακα J_y είναι ($j = 1$)

$$J_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζεται ότι

$$J_y^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_y^3 = J_y, \quad J_y^4 = J_y^2$$

οπότε

$$e^{-i\theta J_y} = 1 + J_y^2\left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) - iJ_y\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 - J_y^2 + J_y^2\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) - iJ_y\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 - J_y^2 + J_y^2\cos\theta - iJ_y\sin\theta$$

Και η (17) αντιστοιχεί στη σχέση

$$\left(a_1^*\, a_0^*\, a_{-1}^*\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στην συνολική ελικότητα. Εμάς μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις από ± 1 σε ± 1. Βλέπουμε ότι

$$\text{οι όροι } (-1 \to -1) \text{ και } (1 \to 1) \text{ αντιστοιχούν } \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$\text{οι όροι } (-1 \to 1) \text{ και } (1 \to -1) \text{ αντιστοιχούν } \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Για μεγάλες ενέργειες όμως $\frac{1+\cos\theta}{2} = -u/s$ και $\frac{1-\cos\theta}{2} = -t/s$. Οπότε

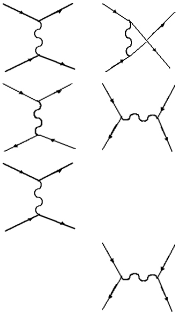
$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{u^2}{s^2} + \frac{t^2}{s^2} = \frac{u^2+t^2}{s^2}$$

Το αποτέλεσμα είναι λοιπόν απλή απόρροια διατήρησης της στροφορμής. Βλέπουμε ακόμα, για παράδειγμα, ότι η σκέδαση $e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+$, που αντιστοιχεί στη πάνω δεξιά περίπτωση του Σχ.(147), για $\theta = 0$ είναι 0. Δεν έχουμε εμπρόσθια (forward) σκέδαση σ' αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 31 Δείξτε, με την παραπάνω μέθοδο, ότι για σωματίδια με spin=0, το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ είναι ανάλογο του $(t-u)/s = \cos\theta$

$e^+e^- \to e^+e^-,\ \mu^+\mu^-$: **Περίληψη**

Διαδικασία	$\overline{\lvert\mathcal{M}\rvert^2}/2e^4$
$e^-e^- \to e^-e^-$	$\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2+t^2}{u^2}$
$e^-e^+ \to e^-e^+$	$\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2+t^2}{s^2}$
$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$	$\frac{s^2+u^2}{t^2}$
$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$	$\frac{u^2+t^2}{s^2}$



$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **στο εργαστήριο - Κινηματική**

Η παρακάτω ανάλυση θα φανεί πολύ χρήσιμη στην κατανόηση της σκέδασης ηλεκτρονίου από πρωτόνιο. Επιστρέφουμε στον πλήρη τύπο της σκέδασης $e^-(k)\mu^-(p) \to e^-(k')\mu^-(p')$, Εξ.(16), όπου αμελούμε μόνο την μάζα του ηλεκτρονίου

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') - M^2 k'\cdot k\right] \\ &= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2(k\cdot p - k'\cdot p) + 2(k'\cdot p)(k\cdot p) + \frac{1}{2}M^2 q^2\right]\end{aligned}$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και χρησιμοποιήσαμε ότι

$$p' = k - k' + p, \qquad k^2 = k'^2 \simeq 0, \qquad q^2 = (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k'$$

Στο σύστημα εργαστηρίου $p = (M, 0)$ για το μιόνιο, οπότε παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2 M(E-E') + 2EE'M^2 + \frac{1}{2}M^2 q^2\right] \\
&= \frac{8e^4}{q^4} 2M^2 EE' \left[-\frac{q^2}{2M^2}\,\frac{M(E-E')}{2EE'} + 1 + \frac{1}{4}\,\frac{q^2}{EE'}\right] = \qquad (19) \\
&= \frac{8e^4}{q^4} 2M^2 EE' \left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]
\end{aligned}
$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε ότι

$$
\begin{aligned}
& q^2 \simeq -2kk' = 2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} \\
& q = -p + p' \to q + p = p' \to q^2 + 2p\cdot q + M^2 = M^2 \to \\
& \qquad \to q^2 = -2p\cdot q = -2M(E-E')
\end{aligned}
$$

με E και E' η ενέργεια του εισερχόμενου και εξερχόμενου ηλεκτρονίου και θ η γωνία σκέδασης του ηλεκτρονίου. Ορίζουμε την χρήσιμη ποσότητα $\nu = E - E' = -\frac{q^2}{2M} = \frac{pq}{M}$.

Πηγαίνουμε τώρα στην ενεργό διατομή

$$d\sigma = \left(\frac{1}{(2E)(2M)}\,\frac{1}{1}\right)\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\,\frac{d^3k'}{2E'}\,\frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p+k-p'-k')$$

όπου ο όρος $(2E)$ αντιστοιχεί στην ροή των ηλεκτρονίων, ο $(2M)$ στην ''ροή'' των μιονίων και η μονάδα στην σχετική ταχύτητα του ηλεκτρονίων ως προς το μιόνιο (περίπου c). Γράφοντας $d^3k' = k'^2 dk' d\Omega$ παίρνουμε

$$d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4ME}\,\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\,\frac{\mathbf{k}^{2'}dk'd\Omega}{E'}\,\frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p+k-p'-k')$$

Αλλά, $\mathbf{k}^{2'} \simeq E'^2$ οπότε $\frac{\mathbf{k}^{2'}dk'}{E'} \simeq E'dE'$ και η διατομή γράφεται

$$d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4ME}\,\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}E'dE'\,\frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p-p'+q)d\Omega \qquad (20)$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι

$$\int \frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p-p'+q) = \int d^3p'dp'_0\delta^{(4)}(p-p'+q)\theta(p'_0)\delta(p'^2-M^2)$$
$$= \frac{1}{2M}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right) = \frac{1}{2MA}\delta\left(E'-\frac{E}{A}\right)$$

όπου $A = 1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}$.
Κατ' αρχάς μπορούμε να γράψουμε
$\delta(p'^2-M^2) = \delta(p_0'^2-M^2-\mathbf{p}'^2)$. Και επομένως
$\int dp'_0\delta(p_0'^2-M^2-\mathbf{p}'^2) = \frac{1}{2p'_0}$, με $p'_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}$, όπου
χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης δ

$$\int dxf(x)\delta(g(x)) = \frac{f(x_0)}{\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}\right|}$$

Η συνάρτηση θ είναι ίση με τη μονάδα όταν το όρισμα της είναι θετικό και μηδέν σε αντίθετη περίπτωση. Οπότε η $\theta(p'_0)$ επιλέγει μόνο τη θετική ρίζα. Έτσι δείξαμε την πρώτη ισότητα της προς απόδειξη σχέσης. Για την δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\int d^4p'\delta^{(4)}(p+q-p')\theta(p_0')\delta(p'^2-M^2)=\delta\left((p+q)^2-M^2\right)=$$

$$=\delta(q^2+2pq)=\delta(q^2+2\nu M)=\frac{1}{2M}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right)=$$

$$=\frac{1}{2M}\delta\left(E-E'-\frac{4EE'}{2M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2M}\delta\left(E-E'\left(1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2M}\frac{1}{A}\,\delta\left(E'-\frac{E}{A}\right),\quad \text{όπου } A=\left(1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Ξαναγυρίζουμε στη σχέση (20) και χρησιμοποιώντας το αναλοίωτο πλάτος, (19), έχουμε

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}=\frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right)=$$

$$=\frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\frac{1}{A}\delta(E'-E/A)$$

και ολοκληρώνοντας ως προς E' θα πάρουμε ($q^2 = (k-k')^2 = -2kk' = 2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$ και
$A = 1 + 2E\sin^2(\theta/2)/M = 1 + q^2/(-2E'M) =$
$1 + (-2M(E-E'))/(-2E'M) = 1 + E/E' - 1 = E/E'$)

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{1}{A}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] =$$
$$= \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{E'}{E}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Η ύπαρξη του δεύτερου όρου στις αγκύλες ($\sin^2\frac{\theta}{2}$) είναι χαρακτηριστικό του στόχου (μιόνιο) με spin=1/2.

Άσκηση 32 Δείξτε, ότι η ενεργός διαφορική διατομή για σκέδαση ηλεκτρονίου από στόχο με spin=0 δίνεται από τον τύπο

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}$$