Δεν υπάρχουν στοιχειώδη σωματίδια με σπιν μηδέν. Βέβαια υπάρχουν αδρόνια με σπιν μηδέν αλλά δεν είναι στοιχειώδη, είναι συμπλέγματα από κουάρκ.

Για να αποφύγουμε τις δυσκολίες του σπιν θα θεωρήσουμε ‘‘ηλεκτρόνια’’ με σπιν=0, για να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία διαταραχών με συναλλοίωτο τρόπο.

Ένα ‘‘ηλεκτρόνιο’’ σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A^{μ}

Όπως είδαμε η Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο γράφεται σε συναλλοίωτη μορφή

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2\right)\phi = 0$$

Η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^{\mu} = \left(A^0, \mathbf{A}\right)$ οδηγεί στην αντικατάσταση

$$p^{\mu} \to p^{\mu} - (-e)A^{\mu}$$

και στην κβαντομηχανική

$$i\partial^{\mu} \to i\partial^{\mu} + eA^{\mu}$$

όπου θεωρήσαμε το φορτίο του ‘‘ηλεκτρονίου’’ ίσο με $-e$. Τότε η KG γράφεται

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right) \phi = -V\phi$$

όπου

$$V = -ie\left(\partial^\mu A_\mu + A^\mu \partial_\mu\right) - e^2 A^2 \tag{9}$$

Το πρόσημο του V επιλέγεται σε συμφωνία με το σχετικό πρόσημο της κινητικής και δυναμικής ενέργειας στην εξίσωση του Schrödinger.
Το δυναμικό χαρακτηρίζεται από την ποσότητα e που σχετίζεται με την σταθερά λεπτής υφής α

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

Ακριβώς, η μικρή αυτή τιμή μας επιτρέπει να αναπτύξουμε το δυναμικό σε δυνάμεις του α και να εφαρμόσουμε θεωρία διαταραχών. Η χαμηλότερης τάξης (σε δυνάμεις του α) συνεισφορά σε ένα πλάτος σκέδασης θα αποτελεί μια καλή προσέγγιση.

Ακριβώς, δουλεύοντας στην χαμηλότερη τάξη, παραλείπουμε το όρο ανάλογο του e^2 στην εξ.9. Το πλάτος σκέδασης T_{fi} από ϕ_i σε ϕ_f από το δυναμικό A^μ είναι

$$T_{fi} = -i \int d^4x \, \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) =$$
$$= -i \int d^4x \, \phi_f^*(x)(-ie) \left(A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu\right) \phi_i(x)$$

Χρησιμοποιώντας, για τον δεύτερο όρο, ολοκλήρωση κατά μέρη (και διώχνοντας το επιφανειακό ολκλήρωμα μιας και το δυναμικό πηγαίνει στο μηδέν όταν $|\mathbf{x}| \to \infty$ και $t \to \pm\infty$)

$$\int d^4x \, \phi_f^*(x) \partial_\mu \left(A^\mu \phi_i(x)\right) = -\int d^4x \, \left(\partial_\mu \phi_f^*(x)\right) A^\mu \phi_i(x)$$

το T_{fi} γίνεται

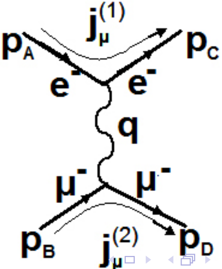
$$T_{fi} = -i \int d^4x \, (-ie) \left(\phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i - (\partial_\mu \phi_f^*) A^\mu \phi_i\right) =$$
$$= -i \int d^4x \, (-ie) \left(\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - \phi_i \partial_\mu \phi_f^*\right) A^\mu = -i \int d^4x \, j_\mu^{(fi)} A^\mu$$

όπου $j_\mu^{(fi)} = -ie\left(\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - \phi_i \partial_\mu \phi_f^*\right)$ είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα για την μετάβαση από $i \to f$. Αν $\phi_i = N_i e^{-ip_i x}$ και $\phi_f = N_f e^{-ip_f x}$, τότε

$$j_\mu^{(fi)} = -eN_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i)x}$$

Σκέδαση ''ηλεκτρονίου'' και ''μιονίου''

Με τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την σκέδαση ''ηλεκτρονίου'' από άλλο σωματίδιο, για παράδειγμα ''μιόνιο'' (για να αποφύγουμε όμοια σωματίδια). Το σχετικό διάγραμμα Feynman μας καθοδηγεί για το πώς θα γράψουμε τη σκέδαση. Το όλο ''πρόβλημα'' είναι να βρούμε το δυναμικό A^μ που αντιστοιχεί στο ρεύμα του ''μιονίου''.



Άσκηση 7 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε συναλλοίωτη μορφή $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ όπου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία επιλογής της βαθμίδας μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι $\Box^2 A^\mu = j^\mu$.

Από τις εξ. του Maxwell έχουμε $\Box^2 A^\mu = j^\mu$ όπου, αντίστοιχα με το ρεύμα του ‘‘ηλεκτρονίου’’, γράφουμε για το ‘‘μιόνιο’’

$$j^{\mu(2)} = -eN_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B)x}$$

Αλλά, $\Box^2 e^{iqx} = -q^2 e^{iqx}$. Άρα, η λύση της $\Box^2 A^\mu = j^{\mu(2)}$ είναι

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j^{\mu(2)} \qquad \text{με} \quad q = p_D - p_B$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας αυτό το A^μ παίρνουμε υπ΄ όψη μας το ρεύμα του ‘‘μιονίου’’

$$T_{fi} = -i \int d^4x \, j^{\mu(1)} \left(-\frac{1}{q^2}\right) j^{(2)}_\mu =$$

$$= -i \int d^4x \, (-e)^2 N_A N_B N_C N_D (p_D + p_B)^\mu \left(-\frac{1}{q^2}\right) (p_A + p_C)_\mu \times$$

$$e^{i(p_D - p_B)x} e^{i(p_C - p_A)x} =$$

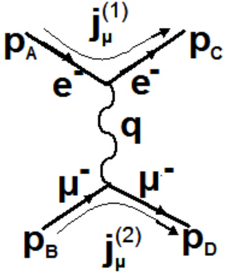
$$
= -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_A - p_B) \times
$$
$$
(i)\left[(ie)(p_A + p_C)^\mu \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)(ie)(p_B + p_D)^\nu\right]
$$

Η έκφραση μέσα στην αγκύλη της τελευταίας σχέσης συμβολίζεται συνήθως με $-i\mathcal{M}$

$$
-i\mathcal{M} = (ie)(p_A + p_C)^\mu \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)(ie)(p_B + p_D)^\nu
$$

Το $\mathcal{M}$ ονομάζεται αναλλοίωτο πλάτος (invariant amplitude) της συγκεκριμένης σκέδασης. Η συνάρτηση δέλτα εκφράζει την διατήρηση ενέργειας και ορμής. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα αν είχαμε το ''μιόνιο'' στο πεδίο A^μ του ''ηλεκτρονίου''.

Προσπαθώντας να κατατάξουμε τους διάφορους όρους στην διαταρακτική ανάπτυξη, ανάλογα με τα διαγράμματα στην μη σχετικιστική περίπτωση, κάνουμε και εδώ ανάλογα διαγράμματα. Στο προηγούμενο διάγραμμα, που το ξαναδείχνουμε, η μεσαία κυματοειδής γραμμή αναπαριστά τον διαδότη του φωτονίου και αντιστοιχεί στον όρο $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ (οι εκθέτες Lorentz αφείλονται στο ότι το φωτόνιο έχει σπιν=1). Το q καθορίζεται από την διατήρηση της ορμής - ενέργειας στις δύο κορυφές $q = p_C - p_A = p_B - p_d$. Άρα $q^2 \neq 0$: το φωτόνιο είναι ''εκτός του φλοιού μάζας'' (off mass shell).



Στις κορυφές αντιστοιχούμε τους όρους $ie(p_A + p_C)^\mu$ και $ie(p_B + p_D)^\nu$ που περιέχουν τη σταθερά σύζευξης του ηλεκτρομαγνητισμού e. Οι δείκτες μ και ν θα ζευγαρωθούν με τους αντίστοιχους του διαδότη του φωτονίου. Οι διάφοροι παράγοντες i απλά μπαίνουν για να μπορέσουμε να γενικεύσουνε εύκολα αυτούς τους κανόνες για ανώτερης τάξης διαγράμματα.
Έτσι φτιάχνουμε τους κανόνες Feynman που μας βοηθούν να υπολογίζουμε γρήγορα τις συνεισφορές των αντίστοιχων διαγραμμάτων.

Η ενεργός διατομή και το αναλλοίωτο πλάτος

Για να συνεχίσουμε θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον νορμαλισμό της κυματοσυνάρτησης $\phi = Ne^{-ipx}$. Υπενθυμίζουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι $\rho = 2E|N|^2$. Ακριβώς, το ότι η ρ είναι ανάλογη της ενέργειας E, είναι αυτό που χρειάζεται για να παραμείνει η πιθανότητα σχετικιστικά αναλλοίωτη: ο όγκος d^3x συστέλλεται κατά Lorentz και η ενέργεια E αποκαθιστά αυτή την μεταβολή στο γινόμενο $d^3x\,\rho$. Επομένως, είναι προτιμότερο να νορμαλίσουμε, αντί του "ένα σωματίδιο σε V", σε "$2E$ σωματίδια σε όγκο V"

$$\int_V d^3x\,\rho = 2E \qquad \text{αντί του} \quad \int d^3x\,\rho = 1$$

οπότε έχουμε ότι $N = 1/\sqrt{V}$.

Τρία βήματα για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής:
1. Ο ''ρυθμός μετάπτωσης ανά μονάδα όγκου'', για την αλληλεπίδραση $A + B \to C + D$, είναι

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{VT}$$

όπου T είναι η χρονική διάρκεια της αλληλεπίδρασης και, βέβαια,

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}$$

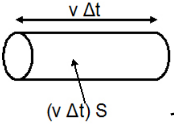
Ο τετραγωνισμός της δ, σε τέσσερις διαστάσεις, θα δώσει

$$\left(\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\right)^2 =$$
$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(p_C + p_D - p_A - p_B)} =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^4}(VT)\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

Επομένως,

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)|\mathcal{M}|^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^4 \right]^2$$

2. Για να συγκρίνουμε πειράματα πρέπει να ‘‘απομονώσουμε’’



την εξάρτηση από την ροή των εισερχομένων σωματιδίων και από την πυκνότητα των σωματιδίων του στόχου.

α) Ροή προσπιπτόντων σωματιδίων

$$\frac{\text{αριθμ. σωματ.}}{S\,\Delta t} = \frac{(\text{πυκν.})\cdot(\text{όγκος})}{S\,\Delta t} = \frac{2E_A/V \cdot v_A\,\Delta t S}{S\,\Delta t} = \frac{2E_A}{V} v_A$$

β) Πυκνότητα σωματιδίων στόχου $2E_B/V$

3. Θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλες τις επιτρεπτές καταστάσεις των τελικών σωματιδίων. Υποθέτουμε την ''σύγκρουση'' ενός σωματιδίου του στόχου με ένα σωματίδιο της δέσμης σε όγκο $V = L^3$ $(-L/2 \leq x, y, z \leq)L/2$. Επιβάλουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες στις κυματοσυναρτήσεις

$$\Psi(x - L/2, y, z) = \Psi(x + L/2, y, z)$$
$$\Psi(x, y - L/2, z) = \Psi(x, y + L/2, z)$$
$$\Psi(x, y, z - L/2) = \Psi(x, y, z + L/2)$$

και στο τέλος $L \to \infty$. Αλλά $\Psi = e^{-i\mathbf{kx}}$, και επομένως $k_x(x + L/2) = k_x(x - L/2) + 2\pi n_x$ με n_x ακέραιο. Άρα $k_x = (2\pi/L)n_x$ και ανάλογα $k_y = (2\pi/L)n_y$ και $k_z = (2\pi/L)n_z$. Αυτή είναι ακριβώς η κβάντωση της ορμής.
Επομένως, ο αριθμός των δυνατών ακεραίων Δn_x στην περιοχή k_x, $k_x + dk_x$ είναι $\Delta n_x = (L/2\pi)dk_x$ και όμοια για τις άλλες συνιστώσες. Για τις πιθανές καταστάσεις στην περιοχή $\mathbf{k}$, $\mathbf{k} + \mathbf{dk}$ είναι

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k$$

Για το δικό μας νορμαλισμό ($2E$ σωματίδια στον όγκο V), θα έχουμε $\frac{V}{2E(2\pi)^3} d^3 k$. Αν ορίσουμε λοιπόν ως

$$\text{ενεργός διατομή } \sigma = \int \frac{W_{fi}}{(\text{αρχική ροή})} (\text{αριθμ. τελ. καταστάσων})$$

μπορούμε να γράψουμε (θεωρώντας το σωματίδιο B ακίνητο)

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{V^4}}{\frac{2E_A v_A}{V} \frac{2E_B}{V}} \frac{V d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{V d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} =$$

$$= \frac{1}{F} |\mathcal{M}|^2 dQ \tag{10}$$

όπου

$$F = v_A 2E_A 2E_B,$$

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

Ο όρος $d^3p/2E$ είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz, αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι και το F είναι επίσης. Να σημειώσουμε ότι για γενική κρούση (το B να μην είναι ακίνητο) θα πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση $v_A \to |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$.
Ας δούμε ξανά τι μας λέει η βασική σχέση: το γινόμενο

$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

μας δίνει τον αριθμό των σκεδαζομένων σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και όγκου. Για να κάνουμε την ενεργό διατομή ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο πείραμα, διαιρούμε με την ροή των αρχικών σωματιδίων (που για ακίνητο σωματίδιο είναι η πυκνότητά του). Σχηματικά

$$\frac{\text{αριθμ.σκεδαζ.σωματ.}}{(\text{όγκο})(\Delta t)} = (\text{πυκν.σωματ.στόχου})(\text{πυκν.σωματ.}\cdot v_A)\sigma$$

$$n_S = (n_t)(n_A v_A)\sigma \quad \text{διαστατικά } 1/(L^3 T) = (1/L^3)(1/L^3 \cdot L/T)\sigma$$

όπου, στην τελευταία σχέση, η πρώτη παρένθεση αντιστοιχεί στον στόχο και η δεύτερη στη δέσμη. Πάντοτε το n_S θα είναι ανάλογο του $(n_t)(n_A v_A)$. **Στο σ κρύβεται όλη η Φυσική**. Διαστατικά, το σ είναι εμβαδόν(L^2). Γι΄ αυτό και το προσομοιάζουμε ως την ''ενεργό επιφάνεια'' της δέσμης που βλέπει ο στόχος, δηλαδή η επιφάνεια αλληλεπίδρασης των A και B.

Άσκηση 8 Δείξτε ότι η έκφραση $F = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B$ είναι, για $\mathbf{p}_A$ και $\mathbf{p}_B$ συγγραμικά και με αντίθετη φορά, ίση με $4\left(|\mathbf{p}_A| E_B + |\mathbf{p}_B| E_A\right)$ και στη συνέχεια ότι είναι ίση με $4\left[\left(p_A^\mu p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2}$, οπότε και σχετικιστικά αναλλοίωτη.

Άσκηση 9 Δείξτε ότι στο σύστημα Κ.Μ. της $A + B \to C + D$ οι όροι F και dQ στον τύπο της ενεργού διατομής, Εξ.(10), γίνονται

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{p_f}{4\sqrt{s}}d\Omega, \qquad \text{και} \quad F = 4p_i\sqrt{s}$$

όπου $d\Omega$ είναι η στερεά γωνία γύρω από το p_C, $s = (E_A + E_B)^2$, $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| \equiv p_i$ και $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| \equiv p_f$.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9, η ενεργός διατομή στο Κ.Μ. γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{K.M.}} = |\mathcal{M}|^2\,\frac{1}{64\pi^2}\,\frac{p_f}{p_i s}$$

Άσκηση 10 Δείξτε ότι για υψηλές ενέργειες, η ενεργός διατομή για την σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’-‘‘μιονίου’’ δίνεται από τη σχέση

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{K.M.}} = \frac{\alpha^2}{4s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

Άσκηση 7 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε συναλλοίωτη μορφή ως $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ όπου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία επιλογής της βαθμίδας μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι $\Box^2 A^\mu = j^\mu$.(Π)

Λύση

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Δηλαδή

$$F^{12} = -F^{21} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_z = -B_z$$
$$-F^{13} = F^{31} = -\partial_z A_x + \partial_x A_z = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_y = -B_y$$
$$F^{23} = -F^{32} = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x = -B_x$$

και

$$F^{01} = -F^{10} = \partial_t A_x + \partial_x V = -E_x$$
$$F^{02} = -F^{20} = \partial_t A_y + \partial_y V = -E_y$$
$$F^{03} = -F^{30} = \partial_t A_z + \partial_z V = -E_z$$

Οπότε,

$$\text{για } \nu = 0: \quad \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_x F^{10} + \partial_y F^{20} + \partial_z F^{30} = \\ = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = j^0$$

$$\text{για } \nu = 1: \quad \partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_t F^{01} + \partial_y F^{21} + \partial_z F^{31} = \\ = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = \\ = -\partial_t E_x + (\nabla \times \mathbf{B})_x = j_x$$

Όμοια, $\partial_\mu F^{\mu 2} = j_y$ και $\partial_\mu F^{\mu 3} = j_z$. Άρα, πράγματι $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\rho, \mathbf{j}) = j^\nu$. Τέλος

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \Box^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)$$

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$. Οπότε, μπορώ νε επιλέξω κατάλληλα την συνάρτηση χ έτσι ώστε να έχω $\partial_\mu A^\mu = 0$. Επομένως, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box^2 A^\nu$

Άσκηση 9 Δείξτε ότι στο σύστημα Κ.Μ. της $A + B \to C + D$ οι όροι F και dQ στον τύπο της ενεργού διατομής

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)}{2E_A\,|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|\,2E_B} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ
\end{aligned}
$$

γίνονται

$$
dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}}\, d\Omega, \qquad F = 4p_i\sqrt{s}, \quad s = (E_A + E_B)^2
$$

όπου $p_i = |\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $p_f = |\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D|$ και $d\Omega$ η στοιχειώδης στερεά γωνία γύρω από την $\mathbf{p}_C$. Οπότε, η ενεργός διατομή στο Κ.Μ. γράφεται

$$
\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s}
$$

(Π)

Λύση

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2}\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\frac{d^3 p_C}{2E_C}\frac{d^3 p_D}{2E_D}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\delta(E_A + E_B - E_C - E_D)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_D)\frac{d^3 p_C}{2E_C}\frac{d^3 p_D}{2E_D}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\delta(E_C + E_D - \sqrt{s})\frac{p_f^2}{2E_D 2E_C}\, dp_f\, d\Omega$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε (α) από τη χρήση της συνάρτησης $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_D)$ και ολοκλήρωσης ως προς $d^3 p_D$, (β) $d^3 p_C = p_C^2 dp_C d\Omega$, και τέλος (γ) από το ότι στο Κ.Μ., $s = (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2$ και ότι $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| = p_f$. Ας δούμε τώρα την συνάρτηση $\delta(E_C + E_D - \sqrt{s})$. Έχουμε τη σχέση $E_C + E_D = (p_f^2 + m_C^2)^{1/2} + (p_f^2 + m_D^2)^{1/2}$ και την ιδιότητα της συνάρτησης δ

$$\int dx\, f(x)\, \delta\left(g(x) - K\right) = \frac{f(x_0)}{\left|\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}}, \qquad \text{όπου } g(x_0) = K$$

Στην περίπτωσή μας, η $g(x)$ είναι η $E_C + E_D$ ως συνάρτηση του p_f. Οπότε, θα χρειαστούμε

$$\frac{d(E_C + E_D)}{dp_f} = p_f \left(\frac{1}{E_C} + \frac{1}{E_D} \right) = p_f \frac{\sqrt{s}}{E_C E_D}$$

(από διατήρηση ενέργειας: $E_A + E_B = E_C + E_D$). Επομένως

$$\int \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) p_f^2 \, dp_f = \frac{{p_f^o}^2}{p_f^o \sqrt{s}} E_C E_D = \frac{p_f^o}{\sqrt{s}} E_C E_D$$

όπου p_f^o είναι το κατάλληλο μέτρο της (τρι)ορμής που ικανοποιεί την $E_C + E_D = \sqrt{s}$.
Άρα, το dQ γράφεται

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4\pi^2} \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) \frac{p_f^2 \, dp_f \, d\Omega}{2E_D 2E_C} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f^o}{4\sqrt{s}} d\Omega \end{aligned}$$

Για τη ροή F έχουμε

$$F = 4\left[\left(p_A^{\mu}\cdot p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2} = 4\left[\left(E_A E_B + p_i^2\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2} =$$

$$= 4\left[\left(p_i^2 + m_A^2\right)\left(p_i^2 + m_B^2\right) + p_i^2 p_i^2 + 2E_A E_B p_i^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2}$$

$$= 4\left[2p_i^2 p_i^2 + p_i^2\left(m_A^2 + m_B^2\right) + 2E_A E_B p_i^2\right]^{1/2}$$

$$= 4p_i\left[2p_i^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B\right]^{1/2} =$$

$$= 4p_i\left[E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B\right]^{1/2} = 4p_i(E_A + E_B) = 4p_i\sqrt{s}$$

και, επομένως, για τη διαδικασία $A + B \to C + D$ στο Κ.Μ. έχουμε

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{p_f}{p_i}\,|\mathcal{M}|^2$$