Αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A^μ

Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο υπακούει την εξίσωση Dirac $(\not{\partial} - m)\psi = 0$ με $\psi = u(\mathbf{p})e^{-ipx}$. Η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εισάγεται με την ‘‘ελάχιστη αντικατάσταση’’ $p^\mu \to p^\mu + eA^\mu$ (θεωρώντας το φορτίο του ηλεκτρονίου $-e$). Ξεκινώντας λοιπόν από την εξίσωση Dirac

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{\nabla} + \beta m)\,\psi$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + eA^0\right)\psi = \mathbf{a}\cdot(-i\mathbf{\nabla} + e\mathbf{A})\,\psi + \beta m\psi$$

$$\gamma^0\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \gamma^0\left(-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{\nabla} + \beta m + \hat{V}\right)\psi$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0\psi + i\gamma\cdot\mathbf{\nabla}\psi - m\psi = \gamma^0\hat{V}\psi$$

$$(\not{p} - m)\psi = \gamma^0\hat{V}\psi$$

όπου $\hat{V} \equiv -eA^0 + e\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}$ και $\gamma^0\hat{V} = -e(\gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}) = -e\not{A}$.
Οπότε $(\gamma^0\hat{V} = -e\not{A} \rightarrow \hat{V} = -e\gamma^0\not{A})$

$$T_{fi} = -i\int \psi_f^\dagger \hat{V}\psi_i \, d^4x = -i\int \psi_f^\dagger \gamma^0(-e)\not{A}\psi_i \, d^4x$$
$$= -i\int (-e)\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_i A_\mu \, d^4x = -i\int j^\mu A_\mu \, d^4x$$

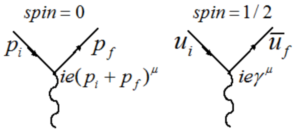
με

$$j^\mu = -e\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_i = -e\bar{u}(\mathbf{p}_f)\gamma^\mu u(\mathbf{p}_i)e^{-i(p_i-p_f)x}$$

Υπενθυμίζουμε ότι για σωματίδια με spin=0 το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$j^\mu = -e(p_f + p_i)^\mu e^{-i(p_i-p_f)x}$$

Η κορυφή στην περίπτωση spin=1/2 είναι τώρα ένας πίνακας.



Άσκηση 28 Δείξτε την παρακάτω σχέση (ανάπτυξη Gordon)

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

Δηλαδή, ενώ το σωματίδιο με spin=0 δρα με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με το φορτίο του $(-e(p_f + p_i)^\mu)$, το spin=1/2 δρα και με την μαγνητική ροπή του $(-e\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu)$. Αυτή η έννοια φαίνεται καλύτερα όταν πάμε στο όριο των μικρών ενεργειών όπου $p/m << 1$. Ας θεωρήσουμε $A^\mu \neq f(t)$. Οπότε (χρησιμοποιούμε κεφαλαία I και F αντί των i f)

$$\begin{aligned} T_{FI} &= -i \int j^\mu A_\mu \, d^4x = -i \int -e\bar{u}_F \gamma^\mu u_I A_\mu e^{-i(p_F - p_I)x} \, d^4x \\ &= -i \left[\int (-e\bar{u}_F \gamma^\mu u_I) A_\mu e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \, d^3x \right] 2\pi\delta(E_F - E_I) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Gordon, ο δεύτερος όρος της ανάπτυξης του $\bar{u}_F \gamma^\mu u_I$ δίνει $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I (p_F - p_I)_\nu A_\mu$. Γράφοντας το $u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ όπου u_A και u_B είναι οι μεγάλες και οι μικρές συνιστώσες αντίστοιχα ο όρος $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I$ γράφεται για τις τρεις περιπτώσεις:

α) $\nu, \mu = 1, 2, 3$. $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I \to (u_A^\dagger\ u_B^\dagger)_F \gamma^0 i\sigma^{ij} \left(\begin{array}{c} u_A \\ u_B \end{array} \right)_I$.

Αλλά

$$\begin{aligned} i\gamma^0\sigma^{ij} &= i \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \frac{i}{2} \left[\left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{array} \right) \right] = \\ &= i \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \frac{i}{2} \left(\begin{array}{cc} -(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) & 0 \\ 0 & -(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) \end{array} \right) = \\ &= i \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \frac{i}{2} 2 \left(\begin{array}{cc} -i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{array} \right) \end{aligned}$$

Άρα, θα εμφανιστούν όροι της μορφής $\bar{u}_{AF}\sigma_k u_{AI}$ και $\bar{u}_{BF}\sigma_k u_{BI}$.
Ο δεύτερος όρος είναι κατά $(p/m)^2$ μικρότερος από τον πρώτο.
Επομένως, θα μείνει ο όρος $\bar{u}_{AF} i\sigma_k u_{AI}\ \epsilon_{ijk}(p_F - p_I)^j A^i$.

β) $\mu = 0$, $\nu = 1,2,3$. Το $\gamma^0\sigma^{0j}$ είναι πίνακας με στοιχεία εκτός διαγωνίου, άρα αναμιγνύει μεγάλες και μικρές συνιστώσες, επομένως όλοι οι όροι είναι τάξης (p/m) και τέλος
γ) $\mu = \nu = 0$, το $\sigma^{\mu\nu} = 0$
Επομένως, μαζεύοντας τους ''μεγάλους'' όρους μόνο, έχουμε

$$T_{fi} = -e2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}}\bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k(p_F - p_I)^j A^i u_{AI} =$$

$$= -ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x \left(\partial^j e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}}\right)\bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k A^i u_{AI} =$$

$$= ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}}\bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k\left(\partial^j A^i\right)u_{AI} =$$

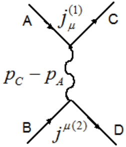
$$= -ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}}\bar{u}_{AF}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right]u_{AI}$$

(όπου στην 3η γραμμή απορρίφθηκε το επιφανειακό ολοκλήρωμα). Ο όρος μέσα στην αγκύλη δεν είναι τίποτα άλλο παρά $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$, με $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ το μαγνητικό πεδίο.

Σκέδαση Moeller($e^- e^- \to e^- e^-$)

Γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}$$



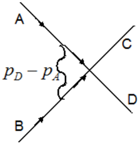
Αλλά

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2}\right) j^{\mu(2)}(x)\, d^4x =$$

$$-\, i\,(-e\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\left(-\frac{1}{q^2}\right)(-e\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

όπου $q = p_C - p_A$. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος $\mathcal{M}$ είναι

$$-i\mathcal{M} = \left(ie\bar{u}_C\gamma_\mu u_A\right)\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\left(ie\bar{u}_D\gamma_\nu u_B\right)$$



όπως είχαμε ορίσει τις ‘‘κορυφές’’. Βέβαια, υπάρχει και το διάγραμμα με διασταυρωμένα τα ηλεκτρόνια C και D και το επιπλέον $-$, λόγω ανταλλαγής όμοιων φερμιονίων. Το συνολικό πλάτος είναι λοιπόν

$$\mathcal{M} = -e^2\frac{\left(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A\right)\left(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B\right)}{(p_A - p_C)^2} + e^2\frac{\left(\bar{u}_D\gamma_\mu u_A\right)\left(\bar{u}_C\gamma^\mu u_B\right)}{(p_A - p_D)^2} \qquad (15)$$

Για να πάμε στην ‘‘μη πολωμένη’’ ενεργό διατομή (δηλαδή σ' αυτήν που δεν διακρίνουμε το spin πριν και μετά την σκέδαση), θα πρέπει να τετραγωνίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος, να πάρουμε μέσο όρο του spin των εισερχομένων και να αθροίσουμε στα spin των εξερχομένων ηλεκτρονίων

$$\frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2$$

Ας δούμε αυτήν την ‘‘πράξη’’ πρώτα στην περίπτωση χαμηλής ενέργειας. Τότε τα εισερχόμενα ηλεκτρόνια είναι

$$u^{(s)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{u}^{(s)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi^{\dagger(s)} & 0\end{pmatrix} \quad s=1,2$$

και παίρνουμε

$$\bar{u}^{(s)}\gamma^{\mu}u^{(s')}=\begin{Bmatrix}2m & \mu=0\\ 0 & \mu\neq 0\end{Bmatrix}\delta^{ss'}$$

μιας και

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\gamma^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix},\chi^{(s)}=\begin{pmatrix}\delta^{1s}\\ \delta^{2s}\end{pmatrix}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για $p/m << 1$ το spin δεν αλλάζει. Αυτό το περιμέναμε. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν αλλάζει την προβολή του spin. Το μαγνητικό πεδίο το κάνει και αυτό εμφανίζεται σε μεγάλες ταχύτητες (ενέργειες). Επομένως, η Εξ.(15) δίνει

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to\uparrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow\to\downarrow\downarrow) = -e^2 4m^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\to\uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\downarrow\uparrow) = -e^2 4m^2 \frac{1}{t}$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\to\downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\uparrow\downarrow) = e^2 4m^2 \frac{1}{u}$$

και

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(4m^2e^2)^2 2\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\right)$$

όπου $t = (p_A - p_C)^2$ και $u = (p_A - p_D)^2$.

Στο Κ.Μ. έχουμε
$t = (p_A - p_C)^2 = 2m^2 - 2p_A^{\mu} p_{C\mu} = 2m^2 - 2(E^2 - p^2\cos\theta) =$
$2(m^2 - E^2 + p^2\cos\theta) = -2p^2(1-\cos\theta) = -4p^2\sin^2\theta/2$ και
$u = -2p^2(1+\cos\theta) = -4p^2\cos^2\theta/2$, και η ενεργός διατομή

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2 =$$

$$= \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{1}{4}16m^4e^4 2\left[\left(\frac{1}{\sin^2\theta/2} - \frac{1}{\cos^2\theta/2}\right)^2 = \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2}\right]\frac{1}{16p^4} =$$

$$= \frac{1}{128\pi^2}\frac{1}{s}m^4\left[\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2(4\pi)^2\right]\frac{2}{p^4} =$$

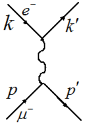
$$\left[\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} - \frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{p^4}\frac{m^4}{s}\left[\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} - \frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right]$$

όπου $\alpha = e^2/(4\pi)$. Για $p/m << 1$, $s \simeq 4m^2$ οπότε $m^4/s = m^2/4$.

Σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

Ας πάμε πίσω στη σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ οπότε έχουμε μόνο ένα διάγραμμα. Το αναλλοίωτο πλάτος γράφεται



$$\mathcal{M} = -e^2 \left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right] \frac{1}{q^2} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right]$$

με $q = k - k'$. Γράφουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{(e)} L^{(\mu)}_{\mu\nu}$$

με

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = (1/2) \sum_{\text{spin e}} \left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right] \left[\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)\right]^*$$

$$L^{(\mu)}_{\mu\nu} = (1/2) \sum_{\text{spin } \mu} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right] \left[\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p)\right]^*$$

Να υπολογίσουμε την δεύτερη αγκύλη του $L^{\mu\nu}_{(e)}$

$$\begin{aligned}\left[\bar{u}(k')\gamma^{\nu}u(k)\right]^{*} = \left[\bar{u}(k')\gamma^{\nu}u(k)\right]^{\dagger} &= u^{\dagger}(k)\gamma^{\nu\dagger}\bar{u}^{\dagger}(k') = \\ &= u^{\dagger}(k)\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{0\dagger}u(k') = u^{\dagger}(k)\gamma^{0}\gamma^{\nu}u(k') \\ &= \bar{u}(k)\gamma^{\nu}u(k')\end{aligned}$$

Άρα, γράφοντας αναλυτικά τους δείκτες των πινάκων και των spinors

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2}\sum_{s,s'}\left[\bar{u}^{(s')}(k')_{\alpha}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}u^{(s)}(k)_{\beta}\right]\left[\bar{u}^{(s)}(k)_{\delta}\gamma^{\nu}_{\delta\epsilon}u^{(s')}(k')_{\epsilon}\right]$$

όπου βέβαια υπονοείται άθροιση στα α, β, δ και ϵ. Αλλά

$$\sum_{s} u^{(s)}(k)_{\beta}\,\bar{u}^{(s)}(k)_{\delta} = (\not{k} + m)_{\beta\delta} \quad \text{και}$$

$$\sum_{s'} u^{(s')}(k')_{\epsilon}\,\bar{u}^{(s')}(k')_{\alpha} = (\not{k}' + m)_{\epsilon\alpha}$$

Οπότε, γράφουμε

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2}(\not{k}' + m)_{\epsilon\alpha}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(\not{k} + m)_{\beta\delta}\gamma^{\nu}_{\delta\epsilon} = \frac{1}{2}Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^{\mu}(\not{k} + m)\gamma^{\nu}\right]$$

Θεωρήματα ίχνών και πίνακες γ

Η βασική σχέση είναι η $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Βασικά θεωρήματα είναι τα ακόλουθα

- $TrI = 4$
- $Tr[\gamma^\mu] = 0$
- $Tr[\text{περιττός αριθμός πινάκων γ}] = 0$
- $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ οπότε $Tr[\not{a}\not{b}] = 4a\cdot b$
- για n άρτιος ακέραιος

$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n] = (a_1\cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - (a_1\cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + ... + (a_1\cdot a_n)Tr[\not{a}_2\not{a}_3...\not{a}_{n-1}]$$

οπότε

$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4] = 4[(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4) - (a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4) + (a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3)]$$

- $Tr[\gamma^5] = 0$
- $Tr[\gamma^5\not{a}\not{b}] = 0$
- $Tr[\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma$

Σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **και** $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Ξαναγυρίζουμε στην σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ Είχαμε φτάσει στο σημείο να γράψουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{(e)} L^{(\mu)}_{\mu\nu}$$

όπου

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2} Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu\right]$$

και όμοια και για το

$$L_{(\mu)\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr\left[(\not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu\right]$$

Από τις ιδιότητες των ιχνών των πινάκων παίρνουμε

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}_{(e)} &= \frac{1}{2} Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2} Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu + m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2} 4\left[k^{\mu\prime}k^\nu + k^{\nu\prime}k^\mu - g^{\mu\nu}(kk' - m^2)\right] \end{aligned}$$

και

$$L_{(\mu)\mu\nu} = 2\left[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(pp' - M^2)\right]$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{(e)} L_{(\mu)\mu\nu} = \\ &= \frac{8e^4}{q^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') \right. \\ &\qquad \left. - m^2 p'\cdot p - M^2 k'\cdot k + 2m^2 M^2\right]\end{aligned} \tag{16}$$

Για την περίπτωση που $E >> m, M$ παίρνουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{(k-k')^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p')\right]$$

Υπενθυμίζοντας ότι

$$
\begin{aligned}
s &= (k+p)^2 \simeq 2k \cdot p = 2k' \cdot p' \\
t &= (k-k')^2 \simeq -2k \cdot k' = -2p \cdot p' \\
u &= (k-p')^2 \simeq -2k \cdot p' = -2k' \cdot p
\end{aligned}
$$

έχουμε τελικά

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2+u^2}{t^2}, \qquad \text{για την} \quad e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

Για το $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$, απλά χρειαζόμαστε την αντικατάσταση $s \leftrightarrow t$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{t^2+u^2}{s^2}, \qquad \text{για την} \quad e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$$

Γνωρίζοντας ότι

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{p_f}{p_i}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

παίρνουμε, για την $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,2e^4\,\frac{t^2+u^2}{s^2} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,2e^4\,\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) = $$
$$= \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta), \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

Για να βρούμε την συνολική ενεργό διατομή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε

$$\int d\Omega(1+\cos^2\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta(1+\cos^2\theta)d\theta = 2\pi\,\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi$$

Οπότε παίρνουμε

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Διατήρηση της ελικότητας σε μεγάλες ενέργειες
Έχουμε ήδη δει ότι για $E >> m$ ισχύει

$$P_L u = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u \equiv u_L \quad \text{με αρνητική ελικότητα } \lambda = -1/2$$
$$P_R u = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u \equiv u_R \quad \text{με θετική ελικότητα } \lambda = +1/2$$

Ας το δούμε αυτό καλύτερα πηγαίνοντας στην γνωστή μορφή των λύσεων του Dirac για θετικές ενέργειες

$$u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$