ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ β για το Καθιερωμένο Πρότυπο σε προσέγγιση 1 βρόχου

Ας υποθέσουμε ότι το μοντέλο μας στηρίζεται στο ευθύ άθροισμα των ομάδων $G_1 \times G_2$. Η συνάρτηση-β_1 της σταθεράς σύζευξης g_1 που αντιστοιχεί στο G_1, για προσέγγιση 1 βρόχου, δίνεται από τον

$$16\pi^2\beta_1 = g_1^3\left[-\frac{11}{3}C_2(G) + \frac{2}{3}T(R_1)d_{R2} + \frac{1}{3}T(S_1)d_{S2}\right]$$

όπου
R_1 και S_1 είναι η μη αναγωγίσημη αναπαράσταση της ομάδας G_1 που βρίσκονται τα φερμιόνια και τα μποζόνια αντίστοιχα,
το $T(R)$ ορίζεται από τη σχέση: $T(R)\delta^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left[R^\alpha R^\beta\right]$, όπου R^α οι πίνακες-γεννήτορες της αναπαράστασης,
το $C_2(R)$ (ο τετραγωνικός τελεστής του Casimir) ορίζεται από τη σχέση: $C_2(R)I = R^\alpha R^\alpha$,
το $C_2(G)$ είναι ο τετραγωνικός τελεστής του Casimir για την συζηγή αναπαράσταση,

το d_{R2} και d_{S2} είναι η πολλαπλότητα των φερμιονίων και μποζονίων αντίστοιχα ως προς την άλλη ομάδα G_2.
Τα $T(R)$, $C_2(R)$ συνδέονται με την σχέση

$$C_2(R)d(R) = T(R)r$$

όπου r ο αριθμός των γεννητόρων και $d(R)$ η διάσταση της αναπαράστασης. Για παράδειγμα, για την θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$, έχουμε 3 γεννήτορες, $r = 3$ και διάσταση $d = 2$. Γνωρίζοντας ότι για κάθε πίνακα του Pauli ισχύει $\tau^2 = 1/4$, έχουμε $C_2(R) = 3/4$. Οπότε, $T(R) = 1/2$. Η τιμή αυτή του $T(R)$ ισχύει για την θεμελιώδη αναπαράσταση κάθε $SU(N)$. Για $U(1)$, έχουμε $C_2(G) = 0$ και $T(R) = C_2(R) = Y^2$ με Y το υπερφορτίο.
Ας πάμε τώρα στο Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ). Η ομάδα είναι $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

$$\begin{pmatrix} (u_r & u_g & u_b) \\ (d_r & d_g & d_b) \end{pmatrix}_L , \quad \begin{matrix} (u_r & u_g & u_b)_R \\ (d_r & d_g & d_b)_R \end{matrix} , \begin{pmatrix} \nu_3 \\ e \end{pmatrix}_L , \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}_L , \; e_R$$

Ας ξεκινήσουμε τον υπολογισμό της β-συνάρτηση της $SU(3)$.
Εδώ έχουμε:
την χρωματική τριπλέτα του ζεύγους $(u, d)_L$. Δηλαδή, $(u_r, d_r)_L, (u_g, d_g)_L, (u_b, d_b)_L$ με r, g, b τα τρία χρώματα.
Επομένως έχουμε την θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(3)$ με πολλαπλότητα 2 ως προς την $SU(2)$ λόγω του ζεύγους

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,2$$

την χρωματική τριπλέτα του u_R, στην θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(3)$ με πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(2)$ (δεν την ''βλέπει''). Επομένως

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$$

Το ίδιο για την χρωματική τριπλέτα του d_R

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$$

Τέλος, έχουμε τα γκλουόνια, που βέβαια είναι στην συζηγή αναπαράσταση. Για τις $SU(N)$, ο $C_2(G) = N$. Οπότε

$$-\frac{11}{3}\,3$$

Κανένα άλλο σωματίδιο στο ΚΠ δεν ''βλέπει'' την $SU(3)$. Οπότε

$$16\pi^2\beta_3(g_3) = g_3^3\left[-11 + \frac{4}{3}\,n_g\right] = -7g_3^3$$

όπου $n_g = 3$ ο αριθμός των οικογενειών.
Προχωράμε στην συνάρτηση β της $SU(2)$. Εδώ έχουμε το ζεύγος $(u, d)_L$, στην θεμελιώδη αναπαράσταση, αλλά σε 3 χρώματα

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,3$$

το ζεύγος $(\nu_e, e)_L$, στην θεμελιώδη αναπαράσταση με πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(3)$ (δεν την ''βλέπει'')

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$$

και το βαθμωτό ζεύγος του Higgs, στην θεμελιώδη αναπαράσταση με πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(3)$ (δεν την ''βλέπει'')

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$$

Τα μποζόνια βαθμίδας συνεισφέρουν τον όρο

$$-\frac{11}{3}\,2$$

Τα u_R και d_R δεν ''βλέπουν'' την $SU(2)$. Και έχουμε τελικά

$$16\pi^2\beta_2(g_2) = g_2^3\left[-\frac{22}{3} + \frac{2}{3}\,2\,n_g + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\right] = -\frac{19}{6}g_2^3$$

Τέλος, προχωράμε στο $U(1)$. Κατ' αρχάς, από τη σχέση $Q = \tau_3 + Y$ βρίσκουμε το υπερφορτίο των σωματιδίων μας

$$(u\ d)_L \to \frac{1}{6}, \quad u_R \to \frac{2}{3}, \quad d_R \to -\frac{1}{3}, \quad (\nu_e\ e)_L \to -\frac{1}{2}$$
$$e_R \to -1, \quad (H^+\ H_0) \to \frac{1}{2},$$

και έχουμε

$$16\pi^2\beta_1(g_1) = g_1^3\left[\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 6 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 3 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 3 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 2 + \frac{2}{3}(-1)^2\right] n_g + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 2\right]$$

που τελικά δίνει, για $n_g = 3$,

$$16\pi^2\beta_1(g_1) = \frac{41}{6}\, g_1^3$$

Ξαναγράφουμε συνολικά για το ΚΠ

$$16\pi^2\beta_3(g_3) = -7g_3^3, \quad 16\pi^2\beta_2(g_2) = -\frac{19}{6}\, g_2^3, \quad 16\pi^2\beta_1(g_1) = \frac{41}{6}\, g_1^3$$