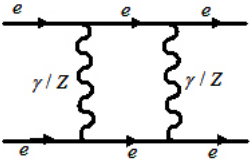
Μη αβελιανές θεωρίες - Yang-Mills θεωρίες

Η μικρή ακτίνα δράσης των ασθενών αλληλεπιδράσεων μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα σωματίδια υπεύθυνα για αυτήν την αλληλεπίδραση (τα αντίστοιχα σωματίδια βαθμίδας) πρέπει να έχουν μάζα, πράγμα που δεν επιτρέπεται στις θεωρίες βαθμίδας (Θ.Β.). Οπότε, η εισαγωγή των Θ.Β. ήταν από ομορφιά μόνο; Μπορούμε να αγνοήσουμε τις Θ.Β. και να βάλουμε όρο μάζας, για π.χ. $M^2 W^\mu W_\mu$, στην Λαγκραντζιανή; Αν το εφαρμόσουμε, θα συναντήσουμε απειρίες στους υπολογισμούς μας που δεν μπορούμε ούτε να ‘‘διώξουμε’’ ούτε να ‘‘κρύψουμε’’.

Στο παρακάτω διάγραμμα ‘‘ενός βρόχου’’, αν τα σωματίδια με την κυματιστή γραμμή είναι φωτόνια, κάθε διαδότης του φωτονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q^2$ ενώ κάθε διαδότης του ηλεκτρονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q$, όπου q είναι η ορμή στο βρόχο που είναι ελεύθερη (μετά την διατήρηση της ορμής σε κάθε κορυφή), οπότε και θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την ορμή αυτή: $\int d^4q$

$$\int d^4q \, \frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{\not{q}+m} \frac{1}{\not{q}+m}$$



Για μεγάλα q το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα.
Αν όμως αντί φωτόνια έχουμε σωματίδια με μάζα, ο διαδότης είναι

$$\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{q^2 - M^2} \xrightarrow{q \to \infty} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2}$$

οπότε, το διάγραμμα θα δίνει

$$\int d^4q \, \frac{1}{\not{q}+m} \frac{1}{\not{q}+m} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2} \frac{q_\rho q_\sigma}{M^2 q^2}$$

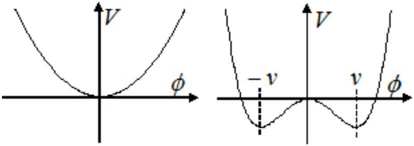
Το ολοκλήρωμα όμως τώρα αποκλίνει για μεγάλα q. Βέβαια, θα μπορούσαμε να βάλουμε ένα πάνω όριο στο ολοκλήρωμα, ως μια παράμετρο που θα μας δώσει το πείραμα. Αλλά, πηγαίνοντας σε διαγράμματα με περισσότερους βρόχους, οι απειρίες χειροτερεύουν και χρειαζόμαστε όλο και καινούργιες παραμέτρους. Μια τέτοια θεωρία ονομάζεται μη ‘‘ανακανονικοποιήσιμη’’ και δεν μπορεί να έχει προβλεψιμότητα.

Κρυμμένη συμμετρία - Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας

Ας θεωρήσουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

η οποία έχει μια συμμετρία $\phi \to -\phi$. Το λ θα πρέπει να είναι θετικό για να μπορούμε να έχουμε ελάχιστο. Για $\mu^2 > 0$, η Λαγκραντζιανή περιγράφει ένα βαθμωτό σωματίδιο με μάζα μ και αυτοαλληλεπιδράσεις. Η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας (ground state) είναι $\phi = 0$ και η κατάσταση αυτή υπακούει τη συμμετρία $\phi \to -\phi$. Για $\mu^2 < 0$, όμως, βλέπουμε ότι $\phi = 0$ δεν είναι ολικό ελάχιστο.



Πράγματι

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \to \phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$$

Εφαρμόζουμε θεωρία διαταραχών γύρω από ένα από τα ελάχιστα, επιλέγοντας το $\phi = +v$

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

όπου $\eta(x)$ περιγράφει τις κβαντικές διαταραχές γύρω από το ελάχιστο. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \text{σταθερά}$$

Ο δεύτερος όρος μας δείχνει ότι το η έχει μάζα

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Αλλά, η $\mathcal{L}$ και η $\mathcal{L}'$ είναι ισοδύναμες. Ένας μετασχηματισμός δεν μπορεί να αλλάξει τη φυσική που περιγράφει η Λαγκραντζιανή. Αν μπορούσαμε να ‘‘λύσουμε’’ πλήρως την $\mathcal{L}$ και την $\mathcal{L}'$ θα βρίσκαμε τα ίδια αποτελέσματα. Αλλά, στη θεωρία διαταραχών υπολογίζουμε διαταραχές γύρω από ένα ελάχιστο. Με την $\mathcal{L}$, η σειρά της θεωρίας διαταραχών δεν θα συνέκλινε γιατί θα αναπτύσαμε γύρω από ένα ασταθές ελάχιστο, $\phi = 0$.

Αυθόρμητη παραβίαση ολικής θεωρίας βαθμίδας

Η Λαγκραντζιανή για μιγαδικό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - \left(\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^*\phi)^2\right) =$$
$$= (\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

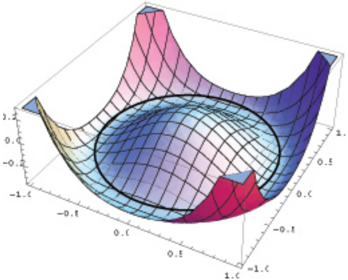
Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$, στο χώρο των (ϕ_1, ϕ_2) υπάρχει μια περιφέρεια $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\mu^2/\lambda \equiv v^2$ που η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη.

Σ' αυτήν την περιφέρεια, επιλέγουμε ένα σημείο

$$\phi_1 = v, \quad \text{και} \quad \phi_2 = 0$$

και γράφουμε το $\phi(x)$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,[v + \eta(x) + i\xi(x)]$$



όπου η είναι η ''ακτινική'' διαταραχή και ξ η διαταραχή στην κατεύθυνση της περιφέρειας του ελάχιστου, γύρω από το ελάχιστο που διαλέξαμε. Η Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2\eta^2 + \text{σταθερές} + (\text{κυβικοί όροι σε } \eta \text{ και } \xi)$$

βλέπουμε πάλι το πεδίο η να έχει μάζα $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$, αλλά το πεδίο ξ είναι άμαζο. Είναι το λεγόμενο ''μποζόνιο'' Goldstone. Επομένως, προσπαθώντας να παραβιάσουμε τη συμμετρία, επιλέγοντας το συγκεκριμένο ελάχιστο, δώσαμε μάζα σε ένα σωματίδιο αλλά μας μένει και ένα άμαζο. Το τελευταίο το περιμέναμε. Το ξ είναι στην διεύθυνση της περιφέρειας του ελάχιστου. Σ′ αυτή τη διεύθυνση δεν υπάρχει ελάχιστο.
Το παράδειγμά μας είναι μια εφαρμογή του Θεωρήματος Goldstone, που αναφέρει ότι όποτε παραβιάζουμε αυθόρμητα μια ολική συμμετρία, εμφανίζονται άμαζα βαθμωτά πεδία.
Επομένως, τι μπορεί να γίνει με την ασθενή αλληλεπίδραση, που τα σωματίδια βαθμίδας W και Z έχουν μάζα χωρίς την εμφάνιση άμαζων σωματιδίων;

Μηχανισμός Higgs

Πηγαίνουμε τώρα σε μια Λαγκραντζιανή που υπακούει μια τοπική συμμετρία βαθμίδας, $\phi(x) \to \exp[i\alpha(x)]\phi(x)$, και φυσικά χρειαζόμαστε την συναλλοίωτο παράγωγο $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ με $A_\mu \to A_\mu + (1/e)\partial_\mu\alpha(x)$. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Για $\mu^2 > 0$, αν εξαιρέσουμε το όρο $(\phi^*\phi)^2$, έχουμε την λεγόμενη ''βαθμωτή'' Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Για $\mu^2 < 0$ θα έχουμε αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας. Κάνοντας τα ίδια όπως και στην περίπτωση της ολικής συμμετρίας, θα πάρουμε

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 - \lambda v^2\eta^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\xi - \\ - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\text{όροι αλληλεπιδράσεων})$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_A = ev$$

αλλά υπάρχει και ένας ‘‘παράξενος’’ όρος, μη διαγώνιος: $-evA_\mu\partial^\mu\xi$. Ο λόγος είναι ότι το A_μ, αφού πήρε μάζα, απέκτησε (από 2) 3 βαθμούς ελευθερίας. Η $\mathcal{L}'$ δεν είναι ‘‘καλά’’ γραμμένη και μπερδεύει τις ανεξάρτητες καταστάσεις των πεδίων. Κατ' αρχή, αυτό δεν είναι κακό, αρκεί να μπορούμε να διακρίνουμε ποιες είναι οι φυσικές καταστάσεις.
Μπορούμε να βρούμε κάποιο συγκεκριμένη βαθμίδα, που να μας δείχνει εκπεφρασμένα αυτές τις φυσικές καταστάσεις;
Παρατηρήστε ότι

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta + i\xi) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v}$$

Επομένως, στην αρχική Λαγκραντζιανή επιλέγουμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\phi(x) \to \sqrt{\frac{1}{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta(x)$$

Επιλέγοντας αυτήν την βαθμίδα, περιμένουμε την ανεξαρτησία από το θ, μιας και είναι η φάση. Πράγματι, η νέα Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \\ + \frac{1}{2}e^2 h^2 A_\mu A^\mu + v e^2 h A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Το μποζόνιο Goldstone δεν εμφανίζεται πια. Ο βαθμός ελευθερίας του είναι ''πλαστός'' γιατί αντιστοιχεί στην ελευθερία του μετασχηματιστού βαθμίδας. Αυτός ο βαθμός ελευθερίας δόθηκε στο A_μ που τώρα έχει μάζα και έχει 3 βαθμούς ελευθερίας. Αυτός είναι ''ο μηχανισμός Higgs''.

Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας $SU(2)$

Ας πάρουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

με

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Απαιτώντας αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας της $SU(2)$

$\phi \to \phi' = e^{i\alpha_j(x)\tau_j/2}\phi, \quad$ όπου $\quad \tau_j \quad$ οι πίνακες του Pauli, $j = 1, 2, 3$

θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\frac{\tau_j}{2}W_j^\mu$$

Για απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\phi \to (1 + i\boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\tau}/2)\phi$$

$$\boldsymbol{W}_\mu \to \boldsymbol{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{W}_\mu$$

(θυμηθείτε ότι για την $SU(2)$ οι σταθερές δομής της ομάδας $f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$). Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\phi + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu\phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu\phi + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}^\mu\phi\right) - V(\phi) - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}^{\mu\nu}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$$

με

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu - g\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu$$

$$V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$, το ελάχιστο του δυναμικού επιτυγχάνεται όταν

$$\phi^\dagger \phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Επιλέγουμε

$$\phi_1^2 = \phi_2^2 = \phi_4^2 = 0, \quad \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το ελάχιστο

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

και επιλέγοντας τη βαθμίδα

$$\phi(x) = e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

για απειροστούς μετασχηματισμούς πέρνουμε

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\theta_3/v & i(\theta_1 - i\theta_2)/v \\ i(\theta_1 + i\theta_2)/v & 1 - i\theta_3/v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 + i\theta_2 \\ v - h - i\theta_3 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα με αυτό που κάναμε στην πρηγούμενη περίπτωση.
Στην $\mathcal{L}'$, τα θ_1, θ_2 και θ_3 ‘‘εξαφανίζονται’’ και μένει μόνο το h.
Τα τρία θ έδωσαν το βαθμό ελευθερίας τους στα W_1, W_2 και W_3, που απέκτησαν μάζα.
Ποια είναι η μάζα των W; Αυτό θα το βρούμε από το τετραγωνικό όρο ως προς τα W

$$\left| ig\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{W}^\mu \phi \right|^2 = \frac{g^2}{4} \left| \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \phi_0 \right|^2 =$$
$$= \frac{g^2 v^2}{8} \left[(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2 + (W_3^\mu)^2 \right]$$

και η μάζα είναι

$$M = \frac{1}{2} g v$$

καταλήγουμε, λοιπόν, με 3 W με μάζα M και ένα βαθμωτό h με μάζα $\sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$.