Οι συμμετρίες παίζουν πρωταρχικό ρόλο στη Φυσική. Για παράδειγμα, η αναλλοιώτητα σε γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων οδήγησε τον Einstein στην διατύπωση της Θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας. Πιστεύουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις στη φύση περιγράφονται από Θεωρίες Βαθμίδας. Η διατήρηση μεγεθών (όπως φορτίο, χρώμα κ.λπ.) τοπικά (local) συνδέονται άρρηκτα με αυτές.
Η σχέση συμμετρίας$\leftrightarrow$νόμος διατήρησης έχει συζητηθεί στην Λαγκρανζιανή θεώρηση. Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

όπου q_i οι γενικευμένες συντεταγμένες και $\dot{q}_i = dq_i/dt$ και η συνάρτηση Lagrange $L = T - V (= \text{Κινητ. Εν.} - \text{Δυναμ. Εν.})$. Πηγαίνοντας από τα q_i στις $\phi(\mathbf{x}, t)$, παίρνουμε

$$L(q, \dot{q}, t) \to \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)$$

και οι εξισώσεις Lagrange γίνονται

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

όπου $\mathcal{L}$ η Λαγκρανζιανή πυκνότητα και $L = \int \mathcal{L}\, d^3x$. Αντί να γράφουμε τις εξισώσεις που διέπουν τα πεδία μας, γράφουμε την $\mathcal{L}$. Έτσι, για παράδειγμα η

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

δίνει την εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad \text{ή} \quad (\Box^2 + m^2)\phi = 0$$

Άσκηση 48 Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = 0$$

οδηγεί στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad \text{ή} \quad (\Box^2 + m^2)\phi = 0$$

Δεν υπάρχει τίποτα το μαγικό εδώ! Η Λαγκραντζιανή επιλέχτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να δίνει την εξίσωση Klein-Gordon.

Η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

δίνει την εξίσωση Dirac

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0$$

Άσκηση 49 Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

δίνει την εξίσωση Dirac

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0$$

Επίσης, η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

δίνει τις εξισώσεις του Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Αν γράψουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^{\mu}A_{\mu} + \frac{1}{2}m^2 A_{\mu}A^{\mu}$$

θα πάρουμε την εξίσωση του φωτονίου ‘‘με μάζα’’

$$(\Box^2 + m^2)A_{\mu} = j_{\mu}$$

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στην Λαγκραντζιανή προσέγγιση και της διαταρακτικής μεθόδου με τα διαγράμματα Feynman; Σε κάθε Λαγκραντζιανή αντιστοιχούν ορισμένοι κανόνες Feynman. Αυτή η αντιστοιχία γίνεται ως εξής:
1. Σε κάθε όρο της Λαγκραντζιανής αντιστοιχούμε διαδότες και συντελεστές κορυφής.
2. Οι διαδότες προέρχονται από τους τετραγωνικούς όρους της Λαγκραντζιανής (π.χ. ϕ^2, $\bar{\psi}\psi$, $(1/2)(\partial_{\mu}\phi)^2$, $\bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi)$.
3. Οι άλλοι όροι της Λαγκραντζιανής αντιστοιχίζονται στις κορυφές αλληλεπίδρασης. Ο συντελεστής της κορυφής είναι ο συντελεστής του αντίστοιχου όρου της Λαγκραντζιανής.

Ακολουθούμε τον κλασικό τρόπο προσέγγισης. Η κλασική Λαγκραντζιανή κβαντίζεται. Τα πεδία γίνονται τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Οι αλληλεπιδράσεις υπολογίζονται μέσω της θεωρίας διαταραχών. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας μεταφράζεται σε ένα σύνολο κανόνων Feynman. Μέσω αυτών μπορούμε να ελέγχουμε τις φυσικές διεργασίες που περιγράφει μια Λαγκραντζιανή. Εδώ δεν θα ακολουθήσουμε τον ‘‘κανονικό φορμαλισμό’’. Θα ακολουθήσουμε την πεποίθηση ότι τα ‘‘διαγράμματα Feynman περιγράφουν πολλά περισσότερα από ό,τι ένας απλός φορμαλισμός’’ (t'Hooft και Veltman).

Θεώρημα Noether. Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

Γνωρίζουμε ότι η αναλλοιώτητα σε χωρική μετάθεση οδηγεί στη διατήρηση ορμής, η αναλλοιώτητα σε στροφές οδηγεί στη διατήρηση της στροφορμής και η αναλλοιώτητα σε μετάθεση στο χρόνο οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας. Εδώ, θα ενδιαφερθούμε για εσωτερικές συμμετρίες. Μετασχηματισμοί που μετατίθενται με την χωροχρονική εξάρτηση της κυματοσυνάρτησης.

Για παράδειγμα, η Λαγκραντζιανή που περιγράφει το ηλεκτρόνιο

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

παραμένει αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$$

Πράγματι, πολύ εύκολα φαίνεται ότι

$$\bar{\psi}(x) \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x), \quad \partial_\mu \psi \to e^{i\alpha}\partial_\mu \psi(x)$$

Οι οικογένεια των μετασχηματισμών φάσης $U(a) = e^{i\alpha}$ αποτελεί την μονοπαραμετρική αβελιανή ομάδα που συμβολίζεται με $U(1)$. Ο όρος Αβελιανή αναφέρεται στην αντιμεταθετικότητα

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1)$$

Ενώ αυτός ο μετασχηματισμός φαντάζει απλοϊκός, έχει τεράστια σημασία. Η αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς $U(1)$, οδηγεί στην διατήρηση του ρεύματος. Ας πάρουμε απειροστό μετασχηματισμό

$$U(\alpha) = 1 + i\alpha, \quad \psi \to (1 + i\alpha)\psi, \quad \partial_\mu \psi \to (1 + i\alpha)\partial_\mu \psi$$

Αναλλοιώτητα σημαίνει $\delta\mathcal{L} = 0$. Οπότε

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi) + (-i\alpha\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + (-i\alpha\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) - \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right] i\alpha\psi + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right] i\alpha -$$

$$- i\alpha\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + i\alpha\bar{\psi}\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)\right] - i\alpha\partial_\mu\left[\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right] =$$

$$= i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right]\psi + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right] i\alpha -$$

$$- i\alpha\bar{\psi}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right] - i\alpha\partial_\mu\left[\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right] =$$

$$= (i\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right]$$

Η πρώτη και η τρίτη αγκύλη μηδενίζονται (Εξίσωση Lagrange). Επομένως, η απαίτηση $\delta\mathcal{L} = 0$ οδηγεί στη σχέση

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

όπου το ρεύμα

$$j^\mu = \frac{ie}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Η σταθερά εκλέγεται κατάλληλα ώστε το ρεύμα να συμπίπτει με την ηλεκτρομαγνητική πυκνότητα ρεύματος για το ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$. Άμεσα έπεται ότι το φορτίο

$$Q = \int d^3x\, j^0$$

είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα λόγω της αναλλοιώτητας φάσης $U(1)$

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x\, \partial_0 j_0 = \int d^3x\, (\partial_\mu j^\mu - \nabla\mathbf{j}) = -\int d^3x\, \nabla\mathbf{j} = 0$$

όπου η διατήρηση του ρεύματος δίνει $\partial_\mu j^\mu = 0$, ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, μετατρέποντας το σε επιφανειακό ολοκλήρωμα του ρεύματος και θεωρώντας ότι το ρεύμα μηδενίζεται πηγαίνοντας την επιφάνεια στο άπειρο.
Για την Λαγκραντζιανή ενός μιγαδικού βαθμωτού πεδίου

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi \phi^*$$

με μια διαδικασία τελείως ανάλογη με αυτή που κάναμε για το πεδίο Dirac, το διατηρησιμο ρεύμα, λόγω της αναλλοιώτητας σε $U(1)$, είναι

$$j^\mu = (ie)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\phi^*\right]$$

που δίνει

$$j^\mu = -ie\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right)$$

Προσέξτε ότι η Λαγκραντζιανή για το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, γράφεται

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2)$$

με $\mathcal{L}(\phi_i)$ η Λαγκραντζιανή του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Ο μετασχηματισμός $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ σημαίνει ότι το α ΔΕΝ είναι μετρήσιμο, ΔΕΝ έχει φυσική σημασία και η τιμή του μπορεί να διαλεχτεί αυθαίρετα, φυσικά την ίδια για όλα τα σημεία του χωροχρόνου. Μιλάμε για μια ''ολική βαθμίδα'' (global gauge).

Τοπική $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας και ΚΗΔ

Αναγάγουμε την φάση α σε συνάρτηση του x. Οπότε έχουμε τον λεγόμενο ''τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας''

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi \quad \text{και} \quad \bar{\psi}(x) \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός ΔΕΝ αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Πράγματι, ο δεύτερος όρος παραμένει αναλλοίωτος αλλά ο πρώτος όχι, μιας και

$$\partial_{\mu}\psi \to e^{i\alpha(x)}\partial_{\mu}\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_{\mu}\alpha(x)$$

Αν επιμένουμε να ζητάμε την αναλλοιώτητα της Λαγκραντζιανής κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, θα πρέπει να βρούμε μια ''κατάλληλη'' (συναλλοίωτη) παράγωγο που να μετασχηματίζεται

$$D_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu\psi$$

Για να το επιτύχουμε αυτό εισάγουμε ένα νέο πεδίο A_μ και ορίζουμε

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

απαιτώντας το νέο πεδίο να μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Τότε βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\,\psi \rightarrow & e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) \\ & - (ie)e^{i\alpha(x)}A_\mu\psi - ie\,\frac{1}{e}\,e^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) = \\ & = e^{i\alpha(x)}\,(\partial_\mu - ieA_\mu)\,\psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \end{aligned}$$

Οπότε, η νέα αναλλοίωτη Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}D_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

Υποχρεωθήκαμε λοιπόν στην εισαγωγή του **πεδίου βαθμίδας** A_μ, που αλληλεπιδρά με το ψ όπως ακριβώς το φωτόνιο. Αν το A_μ είναι φυσικό πεδίο, χρειάζεται και κινητικό όρο. Ο όρος αυτός είναι $(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, που είναι αναλλοίωτος κάτω από τον μετασχηματισμό του A_μ. Έτσι, καταλήγουμε στην Λαγκραντζιανή της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (ΚΗΔ)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Παρουσία μάζας για το A_μ αντιστοιχεί στον όρο $M^2A^\mu A_\mu$ που όμως δεν παραμένει αναλλοίωτος στον μετασχηματισμό του A_μ. Το φωτόνιο δεν μπορεί να έχει μάζα.

Περιμέναμε την εμφάνιση ενός νέου πεδίου. Αν αλλάξουμε τη φάση ($\alpha(x)$) τοπικά, θα δημιουργούσε μια μετρήσιμη διαφορά φάσης, αν δεν μπορούσε να αντισταθμιστεί. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτό το αντιστάθμισμα γίνεται από το A_μ. Περιμένουμε επίσης το πεδίο αυτό να έχει άπειρη ακτίνα δράσης (το φωτόνιο άμαζο), μιας και το αντιστάθμισμα πρέπει να γίνει σε όλα τα σημεία του χωροχρόνου.

Συμπερασματικά, απαιτώντας αναλλοιώτητα σε τοπική αλλαγή φάσης της ελεύθερης Λαγκραντζιανής, οδηγούμαστε σε μια θεωρία με αλληλεπιδράσεις, την ΚΗΔ. Αυτό που φάνταζε σαν μια παραξενιά της θεωρίας του Maxwell, γίνεται τώρα σημαντικό στοιχείο.

Μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας και Κβαντική Χρωμοδυναμική

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική βασίζεται στην ομάδα $SU(3)$. Η ελεύθερη Λαγκραντζιανή είναι

$$\mathcal{L} = \bar{q}_j \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) q_j, \quad \text{όπου} \quad j = 1, 2, 3, \text{ τα τρία χρώματα}$$

Θα συγκεντρωθούμε προς στιγμή σε μια ''γεύση'' κουαρκ. Ο μετασχηματισμός του πεδίου $q(x)$ είναι τώρα

$$q(x) \to Uq(x) = e^{i\alpha_j(x)T_j} q(x)$$

όπου U είναι ένας μοναδιακός (unitary) 3×3 πίνακας. Οι πίνακες T_j είναι οι 8 γενήτορες της $SU(3)$ $(j = 1, 2, ..., 8)$ και α_j οι παράμετροι του μετασχηματισμού.

Άσκηση 50 Για μοναδιακό μετασχηματισμό ($U^\dagger U = 1$), ισχύει ότι $\det U = e^{i\phi}$ με $\phi \in \mathbb{R}$. Αν περιοριστούμε στους μοναδιακούς πίνακες με $\det U = +1$ (ειδικούς μοναδιακούς, special unitary), τότε $\mathrm{Tr}(T_j) = 0$, και $\alpha_i T_j = \alpha_j^* T_j^\dagger$.

Η ομάδα $SU(3)$ δεν είναι αβελιανή

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$$

όπου f_{ijk} είναι οι σταθερές δομής (structure constants) της ομάδας. Οι σταθερές αυτές είναι πραγματικές και πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k.

Άσκηση 51 Δείξτε ότι οι σταθερές αυτές είναι πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k.

Θεωρώντας απειροστούς μετασχηματισμούς, παίρνουμε

$$q(x) \to (1 + i\alpha_j(x) T_j)\, q(x)$$
$$\partial_\mu q(x) \to (1 + i\alpha_j(x) T_j)\, \partial_\mu q(x) + iT_j q(x) \partial_\mu \alpha_j$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην ΚΗΔ, θα εισάγουμε 8 νέα πεδία G_j^μ που μετασχηματίζονται

$$G_j^\mu \to G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \alpha_j$$

και θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + igT_j G_j^\mu$$

Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

Ας δούμε πώς μετασχηματίζεται κάθε όρος

$$\begin{aligned} m\bar{q}q &\to m\bar{q}\left(1 - i\alpha_j(x)T_j\right)\left(1 + i\alpha_i(x)T_i\right)q = m\bar{q}q + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q &\to i\bar{q}\left(1 - i\alpha_i(x)T_i\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(1 + i\alpha_j(x)T_j\right)q = \\ &= -i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q - \bar{q}\gamma^\mu T_j q \partial_\mu \alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu \to -g\bar{q}\left(1 - i\alpha_i(x)T_i\right)\gamma_\mu T_j\left(1 + i\alpha_m(x)T_m\right)q\cdot \\
\cdot\left(G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu\alpha_j\right) = \\
= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu - ig\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu[T_j, T_m]qG_j^\mu - \\
+ g\,\frac{1}{g}\,\bar{q}\gamma_\mu T_j q\partial^\mu\alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\
= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu + \underline{g\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu f_{jmr}T_r q G_j^\mu} - \\
+ \bar{q}\gamma_\mu T_j q\partial^\mu\alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

Βλέπουμε ότι μας μένει ο όρος $g\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu f_{jmr}T_r q G_j^\mu$ που χαλάει την αναλλοιώτητα. Αλλά, αν αναβαθμίσουμε το μετασχηματισμό του πεδίου βαθμίδας

$$
G_j^\mu \to G_j^\mu - \frac{1}{g}\,\partial^\mu\alpha_j - f_{jms}\alpha_m G_s^\mu
$$

στον μετασχηματισμό του όρου $-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu$ θα εμφανιστεί ο επιπλέον όρος

$$
g\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu f_{jms}T_j q G_s^\mu
$$

Κάνοντας την αλλαγή στους ‘‘τυφλούς’’ δείκτες $j \to r$ και $s \to j$, παίρνουμε

$$g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{rmj} T_r q G_j^\mu = -g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $f_{rmj} = -f_{jmr}$. Οπότε, βλέπουμε ότι ο όρος που χαλούσε την αναλλοιώτητα εξαλείφεται. Βέβαια, στην Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

θα πρέπει να προσθέσουμε τον κινητικό όρο του πεδίου βαθμίδας, τον αντίστοιχο του $-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu - \frac{1}{4}G_j^{\mu\nu}G_{\mu\nu j}$$

όπου όμως, ο αναβαθμισμένος μετασχηματισμός του πεδίου βαθμίδας μας υποχρεώνει να ορίσουμε

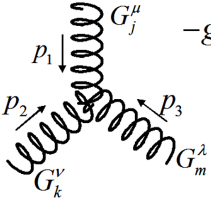
$$G_j^{\mu\nu} = \partial^\mu G_j^\nu - \partial^\nu G_j^\mu - g f_{jrs} G_r^\mu G_s^\nu$$

Η παραπάνω Λαγκραντζιανή περιγράφει ‘‘έγχρωμα’’ κουάρκ και γκλουόνια και είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς της ομάδας $SU(3)$. Τα γκλουόνια είναι και πάλι άμαζα.

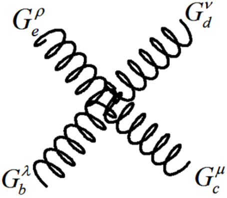
Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m)q - \frac{1}{4} G_j^{\mu\nu} G_{\mu\nu j}$$

Ποιο είναι το καινούργιο στοιχείο με τα γκλουόνια; Ο κινητικός όρος περιέχει όρο αυτο-αλληλεπίδρασης μεταξύ των γκλουονίων: $gGGG$ και $g^2 GGGG$.



$$-gf_{jkm}[(p_1 - p_2)_{\lambda} g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_{\mu} g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_{\nu} g_{\mu\lambda}]$$



$$-ig^2[f_{abc} f_{ade}(g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) + f_{adc} f_{abe}(g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f_{abd} f_{ace}(g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} - g_{\nu\mu} g_{\lambda\rho})]$$