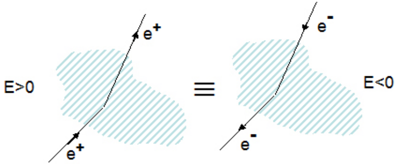


Μπορούμε να περιγράψουμε τα πάντα με την κυματοσυνάρτηση του e^-. Δεν χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του e^+.

Μη σχετικιστική θεωρία διαταραχών

Ας θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις ϕ_n της εξίσωσης Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο. Η χαμιλτονιανή H_0 είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n \qquad \text{με} \quad \int_V \phi_m^*\phi_n d^3x = \delta_{mn}$$

(νορμαλισμός=1 σωματίδιο/όγκο, $\rho = |\phi|^2 \Rightarrow N = V^{-1/2}$)

Ζητάμε να λύσουμε την

$$(H_0 + V(\mathbf{x}, t))\,\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (1)$$

Οι λύσεις ϕ_n αποτελούν πλήρες σύνολο, οπότε μπορούμε να αναλύσουμε την ψ

$$\psi = \sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt}$$

Βάζοντας αυτήν την έκφραση στην Εξ.(1) παίρνουμε

$$(H_0 + V(\boldsymbol{x},t))\sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} = i\frac{\partial}{\partial t}\sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} \Rightarrow$$

$$\sum_n a_n(t)E_n\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} + V(\boldsymbol{x},t)\sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} =$$

$$i\sum_n \frac{da_n}{dt}\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} + i\sum_n a_n(t)(-iE_n)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt}$$

Απαλοίφοντας τον πρώτο και τελευταίο όρο στην παραπάνω ισότητα καταλήγουμε στην σχέση

$$V(\boldsymbol{x},t)\sum_n a_n(t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} = i\sum_n \frac{da_n}{dt}\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt}$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_f^* και ολοκληρώνοντας

$$i\sum_n \frac{da_n}{dt}\int d^3x\,\phi_f^*(\boldsymbol{x})\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} =$$

$$\sum_n \int d^3x\,V(\boldsymbol{x},t)a_n(t)\phi_f^*(\boldsymbol{x})\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_nt} \Rightarrow$$

$$\frac{da_f}{dt} = -i\sum_n a_n(t)\int d^3x\,\phi_f^*(\boldsymbol{x})V(\boldsymbol{x},t)\phi_n(\boldsymbol{x})e^{-i(E_n-E_f)t} \qquad (2)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το V δρα σε μια ορισμένη κατάσταση ϕ_i της ελεύθερης χαμιλτονιανής την χρονική στιγμή $t=-T/2$, δηλαδή

$$\text{για}\quad t=-\frac{T}{2},\qquad \phi_n=\phi_i \to \begin{array}{ll} a_n=1, & n=i \\ a_n=0, & n\neq i \end{array}$$

και τότε

$$\frac{da_f}{dt} = -i\int d^3x\,\phi_f^*(\boldsymbol{x})V(\boldsymbol{x},t)\phi_i(\boldsymbol{x})e^{-i(E_i-E_f)t} \qquad (3)$$

Θεωρώντας ότι το V είναι ασθενές και αργά μεταβαλόμενο, η μεταβολή κάθε a_n είναι μικρή και επομένως κάθε a_n με $n \neq i$ θα παραμένει κοντά στο μηδέν. Με αυτό το συλλογισμό η Εξ.(3) ισχύει για κάθε χρονική στιγμή (και όχι μόνο για $t = -T/2$). Ολοκληρώνοντας την Εξ.(3) παίρνουμε

$$a_f = -i \int_{-T/2}^{t} dt' \int d^3x \, \phi_f^* V \phi_i e^{-i(E_i - E_f)t'} \Rightarrow \tag{4}$$

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \, \left(\phi_f e^{-iE_f t}\right)^* V \left(\phi_i e^{-iE_i t}\right) \Rightarrow$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x \, \phi_f^*(\boldsymbol{x}, t) V(\boldsymbol{x}, t) \phi_i(\boldsymbol{x}, t)$$

Για να ισχύει η προσέγγιση θα πρέπει $a_f(t) << 1$. Μπορούμε να αποδόσουμε στο $|T_{fi}|^2$ την έννοια της πιθανότητας ότι το σωματίδιο από την αρχική κατάσταση i πηγαίνει στην τελική f;

Ας υποθέσουμε ότι $V(\boldsymbol{x}, t) = V(\boldsymbol{x})$. Τότε

$$
\begin{aligned}
T_{fi} &= -\, i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x\, \phi_f^* e^{iE_f t} V(\boldsymbol{x}) \phi_i e^{-iE_i t} = \\
&= -\, i \left[\int d^3x\, \phi_f^* V \phi_i \right] \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i(E_i - E_f)t} = \\
&= -\, i V_{fi}\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)
\end{aligned}
$$

όπου ορίσαμε V_{fi} το ολοκλήρωμα μέσα στην αγκύλη της δεύτερης σειράς ενώ η συνάρτηση δ δείχνει την διατήρηση της ενέργειας. Αλλά για $E_f = E_i$, η αρχή της αβεβαιότητας μας λέει ότι χρειαζόμαστε άπειρο χρόνο για να μεταβούμε από τη μια κατάσταση στην άλλη. Γι΄ αυτό καλύτερα ορίζουμε την ποσότητα

$$
W = \lim_{T \to \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2\, 4\pi^2\ [\delta(E_f - E_i)]^2
$$

που αποτελεί την πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδου χρόνου (transition probability per unit time).

Ο τετραγωνισμός της συνάρτησης δ δίνει

$$(2\pi)^2 \left[\delta(E_f - E_i)\right]^2 = 2\pi \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt$$
$$= T\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)$$

οπότε παίρνουμε

$$W = |V_{fi}|^2\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση έχει έννοια αν ολοκληρωθεί σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων. Συνήθως ξεκινάμε από μια καθορισμένη κατάσταση και καταλήγουμε σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων με πυκνότητα $\rho(E_f)$ (δηλαδή $\rho(E_f)dE_f$ είναι ο αριθμός καταστάσεων με ενέργεια μεταξύ των E_f και $E_f + dE_f$). Οπότε ορίζουμε ως ρυθμό μετάπτωσης (transition rate)

$$W_{fi} = \int dE_f\, \rho(E_f) W = 2\pi \int dE_f\, \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) =$$
$$= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

Μπορούμε να πάμε μία τάξη προσέγγισης παρακάτω βάζοντας την λύση για το a_f, Εξ.(4), στην διαφορική εξίσωση του a_f, Εξ.(2)

$$\frac{da_f}{dt} = ... + (-i) \sum_{n \neq i} \left[(-i) \int_{-T/2}^{t} dt' \, V_{ni} e^{-i(E_i - E_n)t'} \right] V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t}$$

όπου ... είναι ο όρος πρώτης τάξης και η έκφραση μέσα στις αγκύλες είναι ο συντελεστής a_n. Οπότε, έχουμε

$$T_{fi} = ... + (-i)^2 \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, e^{-i(E_n - E_f)t} \int_{-T/2}^{t} dt' \, e^{-i(E_i - E_n)t'}$$

Για να έχει νόημα η δεύτερη ολοκλήρωση εισάγουμε μια απειροστή ποσότητα $\epsilon > 0$ και στο τέλος βέβαια $\epsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i(E_i - E_n + i\epsilon)t'} = i \frac{e^{-i(E_i - E_n + i\epsilon)t}}{(E_i - E_n + i\epsilon)}$$

και το T_{fi} γράφεται

$$T_{fi} = ... + (-2\pi i) \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} \delta(E_f - E_i)$$

Άσκηση 4 Δείξτε ότι ο ρυθμός μετάβασης i→f για την προσέγγιση 2ης τάξης δίνεται από τη σχέση $W_{fi} = 2\pi \left|V_{fi}\right|^2 \rho(E_i)$, όπου το V_{fi} αντικαθίσταται από τη σχέση

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} + ...$$

Ποιά είναι η σχέση για την επόμενη διόρθωση (3ης τάξης σε V).

Δηλαδή για κάθε σημείο αλληλεπίδρασης έχουμε έναν παράγοντα V_{ij} και για κάθε ενδιάμεση διάδοση έχουμε ένα διαδότη $\sim 1/(E_i - E_j)$. Αυτή η ενδιάμεση κατάσταση είναι ''εικονική'' (virtual) με την έννοια ότι $E_i \neq E_j$ (δεν διατηρείται η ενέργεια) αλλά βέβαια $E_f = E_i$ που φαίνεται από την παρουσία της $\delta(E_f - E_i)$. Όλα τα παραπάνω πρέπει να γενικευτούν για σχετικιστικά σωματίδια και αντισωματίδια.

Κανόνες για πλάτης σκέδαση στην εικόνα Feynman-Stückelberg

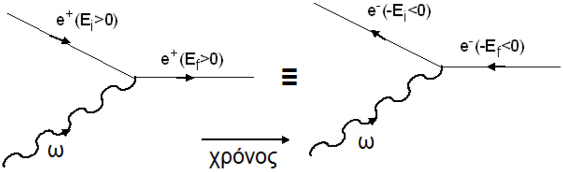
Πρέπει λοιπόν να εισάγουμε αντισωματίδια που πηγαίνουν πίσω στο χρόνο. Βέβαια έως τώρα δεν έχουμε δουλέψει σε ''συναλλοίωτο περιβάλλον'' (το δυναμικό $V(\boldsymbol{x})$ ήταν στατικό). Πώς θα περιγράψουμε κρούσεις σωματιδίων;

Ας κάνουμε μερικά προθύστερα σχήματα. Ας εισάγουμε το φωτόνιο ως το σωμάτιο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και ας δούμε την επίδραση του δυναμικού ως σκέδαση του σωματιδίου με το φωτόνιο. Τότε χρειαζόμαστε μια χρονική εξάρτηση για το φωτόνιο: $e^{-i\omega t}$. Το χρονικό ολοκλήρωμα στο T_{fi} γίνεται

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\,\left(e^{-iE_f t}\right)^* e^{-i\omega t}\, e^{-iE_i t} = \delta(E_f - \omega - E_i)$$

απ' όπου φαίνεται ότι $E_f = E_i + \omega$. Για αντισωματίδιο θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\,\left(e^{-i(-E_i)t}\right)^* e^{-i\omega t}\, e^{-i(-E_f)t} = \delta(E_f - \omega - E_i)$$



οπότε και πάλι έχουμε $E_f = E_i + \omega$. Δηλαδή ο κανόνας είναι

$$\int d^4x \, \phi^*_{\text{εκτός}} \, V \, \phi_{\text{εντός}}$$

όπου ϕ είναι για σωματίδια και όχι για αντισωματίδια.

Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο κανόνας $\int \phi^*_{\text{outgoing}} V \phi_{\text{ingoing}} \, d^4x$ πληροί τη διατήρηση ενέργειας στην περίπτωση της δημιουργίας ζεύγους e^+e^- ή στην αντίστοιχη εξαΰλωση. Να γίνει το ίδιο και για την διατήρηση της ορμής. Ο όρος του φωτονίου είναι $e^{-i(\omega t - \boldsymbol{px})}$.

Η εξίσωση Klein-Gordon και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από ένα διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A}$ και ένα βαθμωτό δυναμικό V. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

επειδή η δεύτερη ικανοποιείται αν θέσουμε $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$, η πρώτη γράφεται

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

και επομένως η ποσότητα στην παρένθεση μπορεί να γραφεί ως η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} V \Rightarrow \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} V$$

(το αρνητικό πρόσημο στο όρο $\boldsymbol{\nabla} V$ επιλέγεται για να δείνει τη γνωστή σχέση στην ηλεκτροστατική περίπτωση). Τα δυναμικά $\boldsymbol{A}$ και V δεν ορίζονται μονοσήμαντα.

Θα πάρουμε τα ίδια $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ με τα $\boldsymbol{A}'$ και V' που ορίζονται από τους **μετασχηματισμούς βαθμίδας**

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f, \qquad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\text{ή σε τετραδιανύσματα} \quad A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} f, \quad \text{για} \quad A^{\mu} = (V, \boldsymbol{A})$$

όπου f μια τυχαία συνάρτηση των $\boldsymbol{x}$ και t. Πράγματι

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} V' = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{\nabla} f}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} V + \boldsymbol{\nabla} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} V$$

Ο τρόπος εισαγωγής των δυναμικών στην Klein-Gordon θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε αυτή η ελευθερία επιλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Αυτός ο τρόπος είναι ο λεγόμενος της ''ελάχιστης αντικατάστασης'' (minimal substitution)

$$E \to E - qV = i\frac{\partial}{\partial t} - qV, \qquad \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} = -i\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}$$

$$\text{ή σε τετραδιανύσματα} \quad p^{\mu} \to p^{\mu} - qA^{\mu} = i\partial^{\mu} - qA^{\mu}$$

με q το φορτίο του σωματιδίου. Η Klein-Gordon γίνεται

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)^2 \phi = (-i\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A})^2 \phi + m^2\phi \Rightarrow$$
$$\left[(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2\right]\phi = 0$$

Αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας αν η κυματοσυνάρτηση αλλάξει με μια φάση

$$\phi' = \phi e^{iqf}$$

Άσκηση 6 Δείξτε την παραπάνω πρόταση

Στην ηλεκτροστατική περίπτωση, $\boldsymbol{A} = 0$, ο όρος qV είναι η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου U. Με την γνωστή αντικατάσταση $\phi(\boldsymbol{x}, t) = \phi(\boldsymbol{x})e^{-iEt}$, όπου E η ενέργεια του σωματιδίου, παίρνουμε την χρονοανεξάρτητη εξίσωση

$$
\begin{aligned}
&(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)\,\phi + m^2\phi = 0 \Rightarrow \\
&(\partial_t + iqV, -\boldsymbol{\nabla})(\partial_t + iqV, \boldsymbol{\nabla})\,\phi + m^2\phi = 0 \Rightarrow \\
&\left[(\partial_t + iqV)^2 - \nabla^2\right]\phi + m^2\phi = 0 \Rightarrow \\
&\left[(\partial_t + iqV)^2 - \nabla^2\right]\phi(\boldsymbol{x})e^{-iEt} + m^2\phi(\boldsymbol{x})e^{-iEt} = 0 \Rightarrow \\
&(E-U)^2\phi(\boldsymbol{x}) = -\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) + m^2\phi(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Η εξίσωση Klein-Gordon και το πεδίο Coulomb

Η δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πρωτονίου είναι $U = -e^2/r$. Η σφαιρική συμμετρία του προβλήματος μας οδηγεί άμεσα στο να γράψουμε τη λύση με τη μορφή χωριζομένων μεταβλητών

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{6}$$

όπου $Y_l^m(\theta,\varphi)$ οι σφαιρικές αρμονικές (όπως ακριβώς στην εξίσωση του Schrödinger). Αν συγκρίνουμε το τετράγωνο του τελεστή της στροφορμής

$$\boldsymbol{l}^2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

με την Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\boldsymbol{l}^2}{r^2}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $Y_m^l(\theta,\varphi)$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\boldsymbol{l}^2$ με ιδιοτιμές $l(l+1)$: $\boldsymbol{l}^2 Y_m^l(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_m^l(\theta,\varphi)$. Οπότε, αντικαθιστώντας την Εξ.(6) στην Εξ.(5), παίρνουμε

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rR)}{\partial r^2}Y_m^l - \frac{l(l+1)}{r^2}RY_m^l + \left[(E-U)^2 - m^2\right]RY_m^l = 0$$

Η Y_m^l απαλοίφεται. Πολλαπλασιάζοντας επί r και ορίζοντας $y(r) = rR(r)$, παίρνουμε την διαφορική εξίσωση ως προς $y(r)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[(E-U)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right] y = 0 \Rightarrow \\
&\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[E^2 - m^2 + \frac{2Ee^2}{r} - \frac{l(l+1)-e^4}{r^2}\right] y = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

όπου αντικαταστήσαμε την δυναμική ενέργεια με $-e^2/r$. Επειδή ψάχνουμε για δέσμιες καταστάσεις, θα πρέπει $y(r \to \infty) = 0$ και βέβαια $y(r = 0) = 0$ από τον ορισμό του $y(r)$. Για τη λύση της, ακολουθούμε την γνωστή διαδικασία που ακολουθείται για την αντίστοιχη λύση της Schrödinger. Για μεγάλα r, η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$
\frac{\partial^2 y_\infty}{\partial r^2} + \left[E^2 - m^2\right] y_\infty = 0 \tag{8}
$$

Στις δέσμιες καταστάσεις που αναζητούμε, η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική, οπότε η ολική ενέργεια είναι μικρότερη από την ελάχιστη m. Οπότε, $E^2 - m^2 = -\gamma^2$. Η λύση της Εξ.(8) είναι

$$y_\infty = e^{\pm\gamma r}$$

Κρατάμε βέβαια την φθίνουσα λύση και ξαναγράφουμε

$$y(r) = e^{-\gamma r} F(r)$$

όπου η F θα θέλαμε να είναι ένα πολυώνυμο. Η εξίσωση για την $F(r)$, βάζοντας την προηγούμενη λύση στην Εξ.(7), γίνεται

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\gamma \frac{\partial F}{\partial r} + \left[\frac{2Ee^2}{r} - \frac{l(l+1) - e^4}{r^2} \right] F = 0$$

Αν η F είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού, για μεγάλα r θα έχουμε $F(r) \sim r^n$, και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$n(n-1)r^{n-2} - 2\gamma n r^{n-1} + 2Ee^2 r^{n-1} - (l(l+1) - e^4) r^{n-2} = 0 \xrightarrow{r\to\infty}$$

$$-2\gamma n r^{n-1} + 2Ee^2 r^{n-1} = 0 \to \gamma = \frac{Ee^2}{n}$$

Αν τώρα s είναι η μικρότερη δύναμη του πολυωνύμου F, τότε για μικρά r θα είναι $F(r) \sim r^s$ και η διαφορική εξίσωση θα δίνει

$$s(s-1)r^{s-2} - 2\gamma s r^{s-1} + 2Ee^2 r^{s-1} - (l(l+1) - e^4)r^{s-2} = 0 \xrightarrow{r\to 0}$$

$$s(s-1)r^{s-2} - (l(l+1) - e^4)r^{s-2} = 0 \Rightarrow$$

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1) - 4e^4}}{2}$$

Κρατάμε την θετική λύση

$$s = \frac{1 + \sqrt{1 + 4l(l+1) - 4e^4}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}$$

Βέβαια, ο ανώτερος βαθμός του πολυωνύμου n και ο κατώτερος s συνδέονται με την σχέση $n = s + k$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Από την $E^2 - m^2 = -\gamma^2$ και την $\gamma = \frac{Ee^2}{n}$ προκύπτει η σχέση για τις ενέργειες

$$E^2 - m^2 = -E^2 \frac{e^4}{n^2} \Rightarrow E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{n^2}}}$$

Αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του e^4 παίρνουμε

$$E = m - \frac{me^4}{2n^2} + \frac{3me^8}{8n^4} + \ldots$$

Αλλά, το n είναι συνάρτηση του s ($n = s + k$) ενώ το s είναι κι αυτό συνάρτηση του e^4, επομένως θα πρέπει και αυτό να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του e^4

$$n = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4} + k = \frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{e^4}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}} + k =$$

$$\frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{e^4}{2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right) + k = l + k + 1 - \frac{e^4}{2l + 1} + \ldots$$

Ονομάζοντας $4N = l + k + 1$ παίρνουμε

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{N^2\left(1 - \frac{e^4}{N(2l+1)}\right)^2} = \frac{1}{N^2}\left(1 + \frac{2e^4}{N(2l+1)}\right)$$

και η έκφραση για την ενέργεια γίνεται

$$E = m - \frac{me^4}{2N^2} - \frac{me^8}{2N^4}\left(\frac{N}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$$

Ο τρίτος όρος αποτελεί την σχετικιστική διόρθωση η οποία όμως δεν συμφωνεί με την αντίστοιχη του τύπου του Sommerfeld και ο λόγος είναι ότι το ηλεκτρόνιο έχει ιδιοστροφορμή (spin). Η Klein-Gordon περιγράφει σωματίδια με μηδενικό spin, π.χ. σωματίδια π (πιόνια).

Άσκηση 6 Δείξτε ότι η Klein-Gordon

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)^2 \phi = \left(-i\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}\right)^2 \phi + m^2\phi$$

παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f, \qquad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

και την αλλαγή φάσης της κυματοσυνάρτησης $\phi' = \phi e^{iqf}$.
(Π)

Λύση

Με $A^{\mu\prime} = A^{\mu} - \partial^{\mu} f$ και $\phi' = e^{iqf}\phi$ έχουμε

$$\left(\partial^{\mu} + iqA^{\mu\prime}\right)\phi' = \left(\partial^{\mu} + iqA^{\mu} - iq\partial^{\mu} f\right) e^{iqf}\phi =$$

$$e^{iqf}\partial^{\mu}\phi + iq(\partial^{\mu} f)\phi e^{iqf} + iqA^{\mu}\phi e^{iqf} - iq(\partial^{\mu} f)e^{iqf}\phi =$$

$$= e^{iqf}\left(\partial^{\mu} + iqA^{\mu}\right)\phi$$

Δηλαδή η έκφραση $\Phi = \left(\partial^{\mu} + iqA^{\mu}\right)\phi$ μετασχηματίζεται όπως η ϕ.

Επομένως

$$\left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right)\phi' = \left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\Phi' =$$
$$= e^{iqf}\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\Phi = e^{iqf}\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\phi$$

Και

$$\left[\left(\partial^\mu + iqA^{\mu\prime}\right)\left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right) + m^2\right]\phi' = 0 \rightarrow$$
$$e^{iqf}\left[\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) + m^2\right]\phi = 0$$
$$\left[\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) + m^2\right]\phi = 0$$